第七章 非线性方程（组）求根

内容提要

7.1 方程求根与二分法

7.2 不动点迭代法及其收敛性

7.3 牛顿法

7.4 弦截法（割线法）

（**7.5** 非线性方程组）

求根问题包括下面三个问题：

- 根的存在性：即 $f(x)=0$ 有没有根？若有，有几个根？
- 哪儿有根？确定有根区间
- 根的精确化：已知一个根的近似值后，能否将它精确到足够精度？

本章假设 $f\in C[a,\ b]$，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 f 在 $(a,\ b)$ 上至少有一根，(a,b) 即为有根区间。问题1、2得到解决。

异号有根

考虑单变量非线性方程 $f(x)=0$ 的求根问题，其中$x\in[a,b],\ f(x)\in C[a,b]$，

其中$f(x)$是高次多项式函数或超越函数。

“超越”：代数

如

$$f(x)=3x^5-2x^4+8x^2-7x+1$$

$$f(x)=e^{2x+1}-x\ln(\sin x)-2$$

等等。

非线性方程的分类

1. 代数方程（代数多项式方程）

整数次方幂函数多项式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

其中$a_n \neq 0,\ a_i \in R$ (其中$i=0,1,\cdots,n$). 如: $x^3-x-1=0$ 。

2. 超越方程 如: $x-e^{-x}=0$ 。

如果存在α（或x^*），使得$f(\alpha)=0$，则称α是方程$f(x)=0$的根，或称α是函数$f(x)$的零点。

如果$f(x)$满足$f(x)=(x-\alpha)^m h(x)$, 其中$h(x)$在$x=\alpha$处连续且$h(\alpha)\neq 0$，称α是方程$f(x)=0$的m重根。

如果 $f(x)$ 可以分解为

$$f(x)=(x-\alpha)^m h(x),$$

其中 $0<|h(\alpha)|<\infty$, m为正整数. 则称 α为 $f(x)$ 的 m 重零点。此时 $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0$。

$\boxed{m=1？m=2？推导}$

若$f(x)\in C[a,b],\ f(a)\cdot f(b)<0$, 则可用 搜索法在有根区间求根。

先叙述两个基本定理。

定理 1 （代数基本定理）

设 $f(x)=0$ 为具有复系数的 n 次代数方程，则 $f(x)=0$ 于复数域上恰有 n 个根（r 重根计算 r 个）。如果 $f(x)=0$ 为实系数代数方程，则复数根成对出现，即当 $\alpha+i\beta(\beta\neq 0)$ 是 $f(x)=0$ 的复根，则 $\alpha-i\beta$ 亦是 $f(x)=0$ 的根。

定理2 （1）设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续；

（2）且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在有 $x^*\in(a,b)$ 使 $f(x^*)=0$

即 $f(x)$ 于 (a,b) 内存在实的零点。

异号有根

例如　求方程 $x^3-11.1x^2+38.8x-41.77=0$ 的有根区间

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$的符号	−	−	+	+	−	−	+

由此可知方程的有根区间为[1, 2] [3, 4] [5, 6]。

7.1.2、二分法

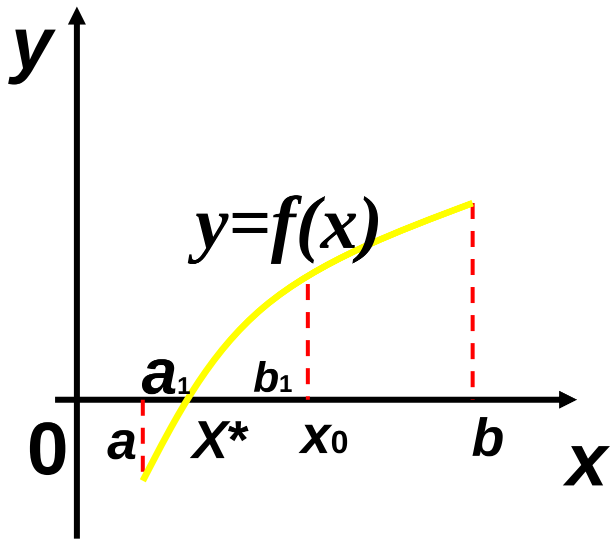
设 $f(a)\cdot f(b)<0$, 取 $x_0=(a+b)/2$。假如 $f(x_0)$ 是$f(x)$ 的零点，那么输出 x_0，停止。假若不然，若 $f(a)$ 与 $f(x_0)$ 异号，则 $a_1=a$, $b_1=x_0$；否则 $a_1=x_0$, $b_1=b$。

二分过程中有三个量在变：（区间、近似根、区间长度）

(1) $[a,b]\supset\ [a_1,b_1]\ \supset\cdots\supset\ [a_k,b_k]\ \supset\ \cdots$

(2) x_0, $\quad x_1=\dfrac{b_1+a_1}{2}$, $\quad\cdots$, $\quad x_k=\dfrac{a_k+b_k}{2}$, $\quad\cdots$

(3) $b-a$, $\quad b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$, $\quad\cdots$, $\quad b_k-a_k=\dfrac{b-a}{2^k}$, $\quad\cdots$



推导

二分法收敛性分析：

因 $|x_k - x^*| \le (b_k - a_k)/2 = (b-a)/2^{k+1}$ ，故有 $x_k = (a_k + b_k)/2 \to x^*$ (当$k \to \infty$).

只要二分足够多次（即k 充分大），便有$\left|x^* - x_k\right| < \varepsilon$ ，这里ε 为预定的精度。

例7-1 求$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$在$[1.0,1.5]$内的一个实根，准确到小数点后2位.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$符号
0	1.0 (-)	1.5 (+)	1.25	−
1	1.25 (-)		1.375	+
2		1.375 (+)	1.3125	−
3	1.3125 (-)		1.3438	+
4		1.3438 (+)	1.3281	+
5		1.3281 (+)	1.3203	−
6	1.3203 (-)		1.3242	−

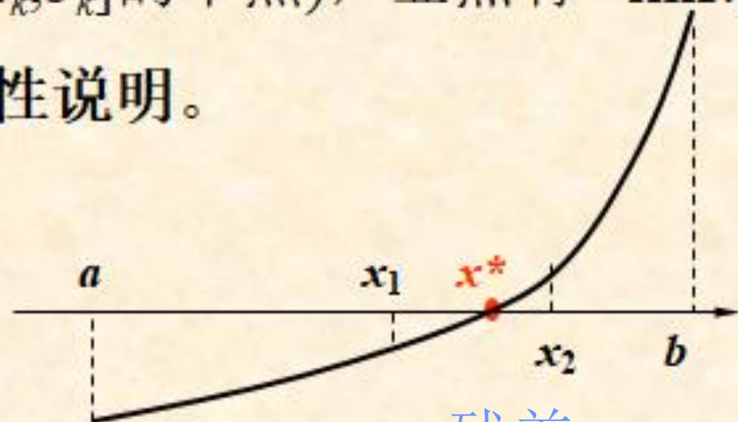
只要二分6次（$k=6$），便能达到预定的精度$\left|x^* - x_6\right| \le 0.005$

解误差

取$x_k=(a_k+b_k)/2$（$[a_k,b_k]$的中点），显然有 $\lim x_k=x^*$.

——算法和收敛性说明。

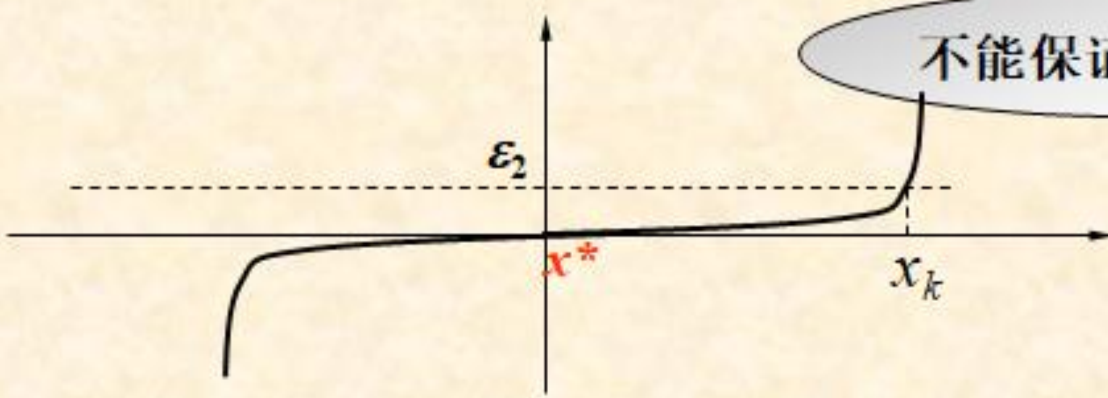
When to stop?



残差

解间差 $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon_1$ 或 $|f(x_k)|<\varepsilon_2$

不能保证x_k的精度



推导

Lagrange微分中值定理

二分法的优点是算法简单，且总是收敛的，缺点是收敛太慢, 故一般不单独将其用于求根，只用其为根求得一个较好的近似值。

7.2 迭代法

7.2.1 不动点迭代与不动点迭代法

将非线性方程 $f(x)=0$ 化为等价形式 $x=\phi(x)$

$$f(x^*)=0 \Leftrightarrow x^*=\phi(x^*);$$

称x^*为函数$\phi(x)$的一个**不动点**。

给定初始近似值 x_0, 可以得到 $x_1=\phi(x_0)$，如此反复，构造迭代公式

$$x_{k+1}=\phi(x_k),\ k=0,1,2,\cdots. \tag{7.1}$$

称 $\phi(x)$ 为迭代函数。

如果对任何$x_0\in[a,b]$，由式(7.1) 得到的序列$\{x_k\}$ 有极限

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

则称迭代公式收敛，且$x^*=\phi(x^*)$ 为$\phi(x)$ 的不动点，

称式(7.1) 为不动点迭代法。

不动点，fixed point，固定点

上述迭代法是一种逐次逼近法，其基本思想是将隐式方程归结为一组显示的计算公式，就是说，迭代过程实质上是一个逐步显示的过程。

例7-2 求$x^3-x-1=0$在1.5附近的根x^*。

解：（1）将方程改写成下列形式

$$x=\sqrt[3]{x+1}$$

据此建立迭代公式

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

k	x_k	k	x_k	k	x_k
0	1.5	3	1.32588	6	1.32473
1	1.35721	4	1.32494	7	1.32472
2	1.33086	5	1.32476	8	1.32472

结果x_7 与x_8 完全相同，可以认为x_7 实际上已满足方程即为所求的根。

(2) 另一种等价形式 $x = x^3 - 1$

建立迭代公式 $x_{k+1} = x_k^3 - 1$

迭代初值仍取 $x_0 = 1.5$, 则有

$$x_1 = 2.375, \quad x_2 = 12.39, \quad \cdots \quad \cdots$$

继续迭代下去已经没有必要，因为结果显然会越来越大，不可能趋于某个极限。这种不收敛的迭代过程称作是发散的。一个发散的迭代过程，纵使进行了千百次迭代，其结果也毫无价值。因此，迭代格式形式不同，有的收敛，有的发散，只有收敛的迭代过程才有意义，为此要研究不动点的存在性及迭代法的收敛性。

等价不一定等效

7.2.2 不动点的存在性与迭代法的收敛性

定理7-1 设迭代函数$\phi(x)\in C[a,b]$，并且

(1) $\forall x\in[a,b]$, 都有$\phi(x)\in[a,b]$,

(2) $\exists 0\le$ 常数$L<1$, 使得$\forall x,y\in[a,b]$, 都有

$$|\phi(x)-\phi(y)|\le L|x-y|; \qquad (7.2)$$

那么$\phi(x)$在$[a,b]$上存在唯一的不动点x^*.

证明：先证不动点存在性。

若$\phi(a)=a$ 或 $\phi(b)=b$，显然 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在不动点。

因 $a\le\phi(x)\le b$，设$a<\phi(x)<b$，定义函数

$$f(x)=\phi(x)-x$$

显然 $f(x)\in C[a,b]$, 且满足

$$f(a)=\phi(a)-a>0,$$

$$f(b)=\phi(b)-b<0$$

此证明不做要求

由连续函数性质可知存在 $x^*\in(a,b)$ 使 $f(x^*)=0$, 即

$x^*=\phi(x^*)$, x^* 即为 $\phi(x)$ 的不动点。

再证唯一性。设x_1^*及$x_2^* \in [a,b]$ 都是 $\phi(x)$ 的不动点，

则由7.2得

此证明不做要求

$$|x_1^* - x_2^*| = |\phi(x_1^*) - \phi(x_2^*)|$$
$$\le L|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$$

引出矛盾。故$\phi(x)$ 的不动点只能是唯一的。

对定理7–1中的条件2，在使用时如果

$\phi(x) \in C^1[a,b]$ 且对任意$x \in [a,b]$ 有

$$|\phi'(x)| \le L < 1 \qquad (7.3)$$

则由中值定理可知对$\forall x, y \in [a,b]$ 有

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(\xi)(x-y)| \le L|x\text{-}y|, \qquad \xi \in (a,b)$$

它表明定理中的条件2可用(7.3) 代替。

定理7－2 在定理7–1的条件下，对任意初值$x_0 \in [a,b]$，迭代序列(7.1)均收敛于$\phi(x)$的不动点x^*，且

$$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|. \tag{7.4}$$

误差估计式 (7.4) 原则上可用于确定迭代次数，但它由于含有信息L而不便于实际应用。可将其化为 $|x_k - x^*| \le \dfrac{1}{1-L} |x_{k+1} - x_k|.$

由此可见，只要相邻两次计算结果的偏差$|x_{k+1} - x_k|$足够小即可保证近似值x_k具有足够精度。

$$\boxed{|x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|}$$

在例7-2中，当$\phi(x) = \sqrt[3]{x+1}$时，$\phi'(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$，在区间[1, 2]中，$|\phi'(x)| \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$，又因 $1 \le \sqrt[3]{2} \le \phi(x) \le \sqrt[3]{3} \le 2$

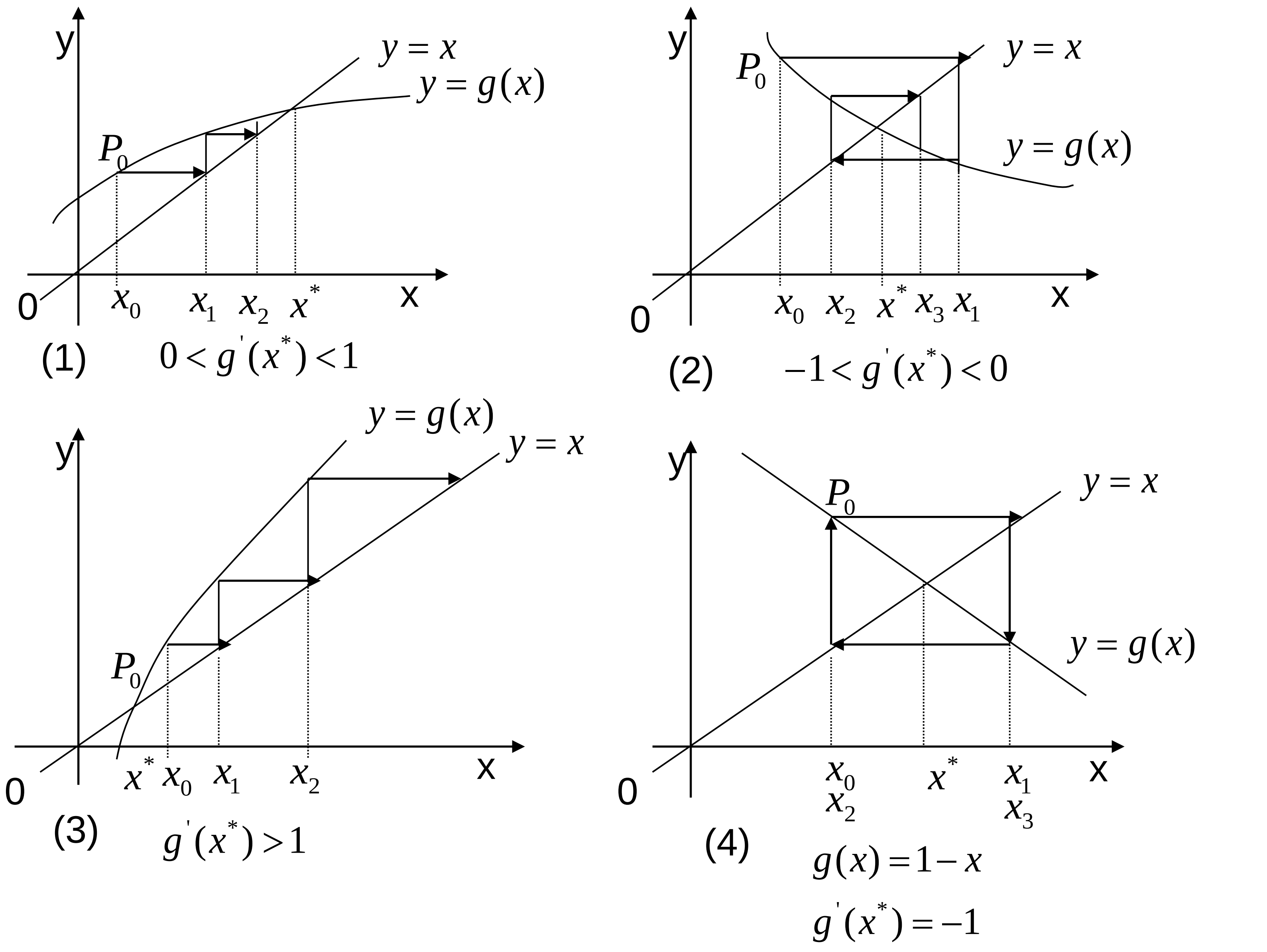
故定理7–1中条件1 成立。所以迭代法收敛。而当$\phi(x) = x^3 - 1$ 时，$\phi'(x) = 3x^2$ 在区间[1,2] 中$|\phi'(x)| > 1$不满足定理条件。

Fixed-Point Theorem

Theorem 2.3 (Fixed-Point Theorem). Assume that (i) $g, g' \in C[a, b]$, (ii) K is a positive constant, (iii) $p_0 \in (a, b)$, and (iv) $g(x) \in [a, b]$ for all $x \in [a, b]$.

(6) If $|g'(x)| \leq K < 1$ for all $x \in [a, b]$, then the iteration $p_n = g(p_{n-1})$ will converge to the unique fixed point $P \in [a, b]$. In this case, P is said to be an attractive fixed point.

(7) If $|g'(x)| > 1$ for all $x \in [a, b]$, then the iteration $p_n = g(p_{n-1})$ will not converge to P. In this case, P is said to be a repelling fixed point and the iteration exhibits local divergence.



y
y = x
y = g(x)
P0
0
x0 x1 x2 x*
x
(1) 0 < g'(x*) < 1
y
P0
y = x
y = g(x)
0
x0 x2 x* x3 x1
x
(2) −1 < g'(x*) < 0
y = g(x)
y = x
y
P0
0
x* x0 x1 x2
x
(3) g'(x*) > 1
y
P0
y = x
y = g(x)
0
x0 x2 x* x1 x3
x
(4) g(x) = 1 − x
g'(x*) = −1

课堂演算

Fixed-Point Theorem

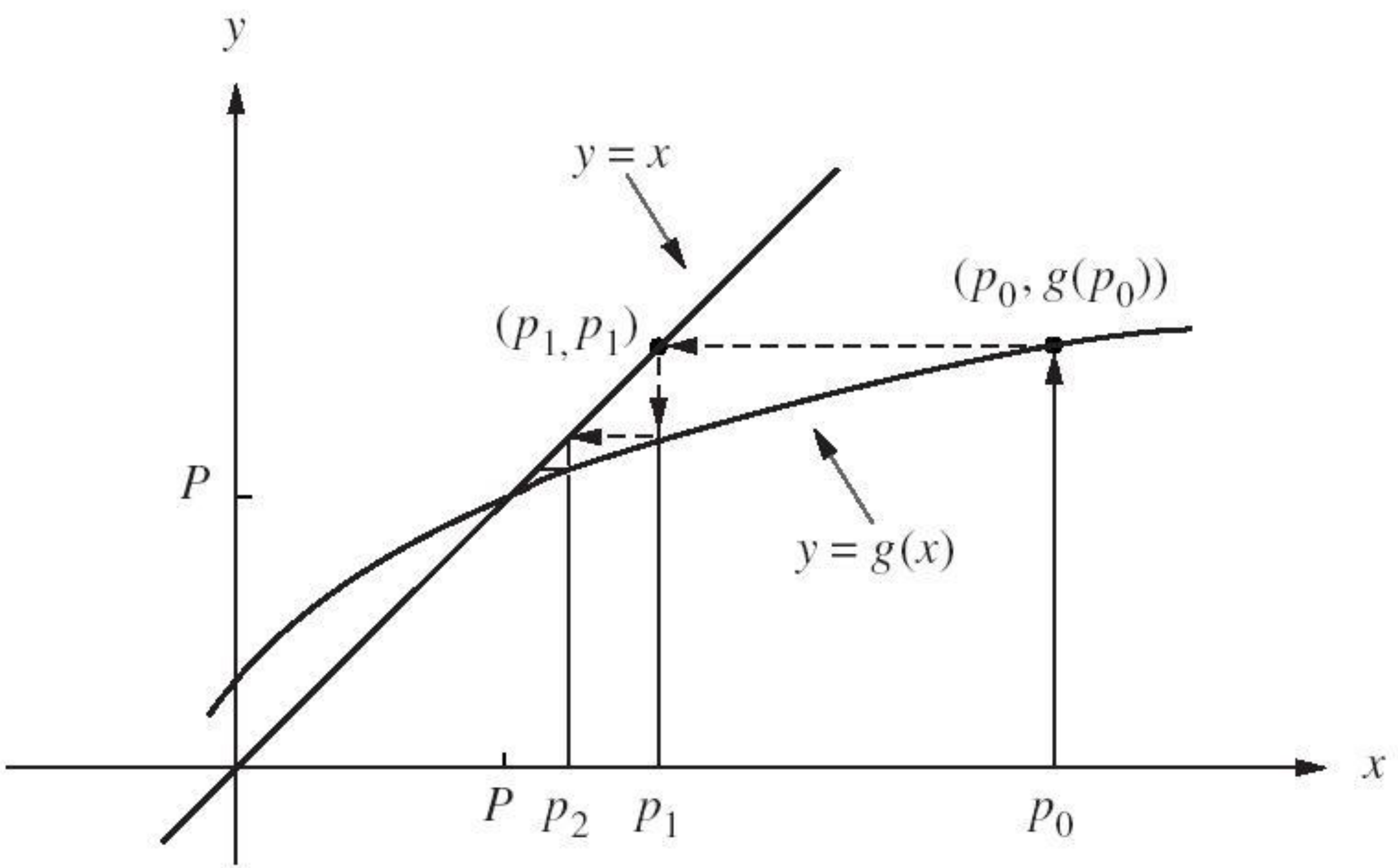


Figure 2.4 (a) Monotone convergence when $0 < g'(P) < 1$.

Fixed-Point Theorem

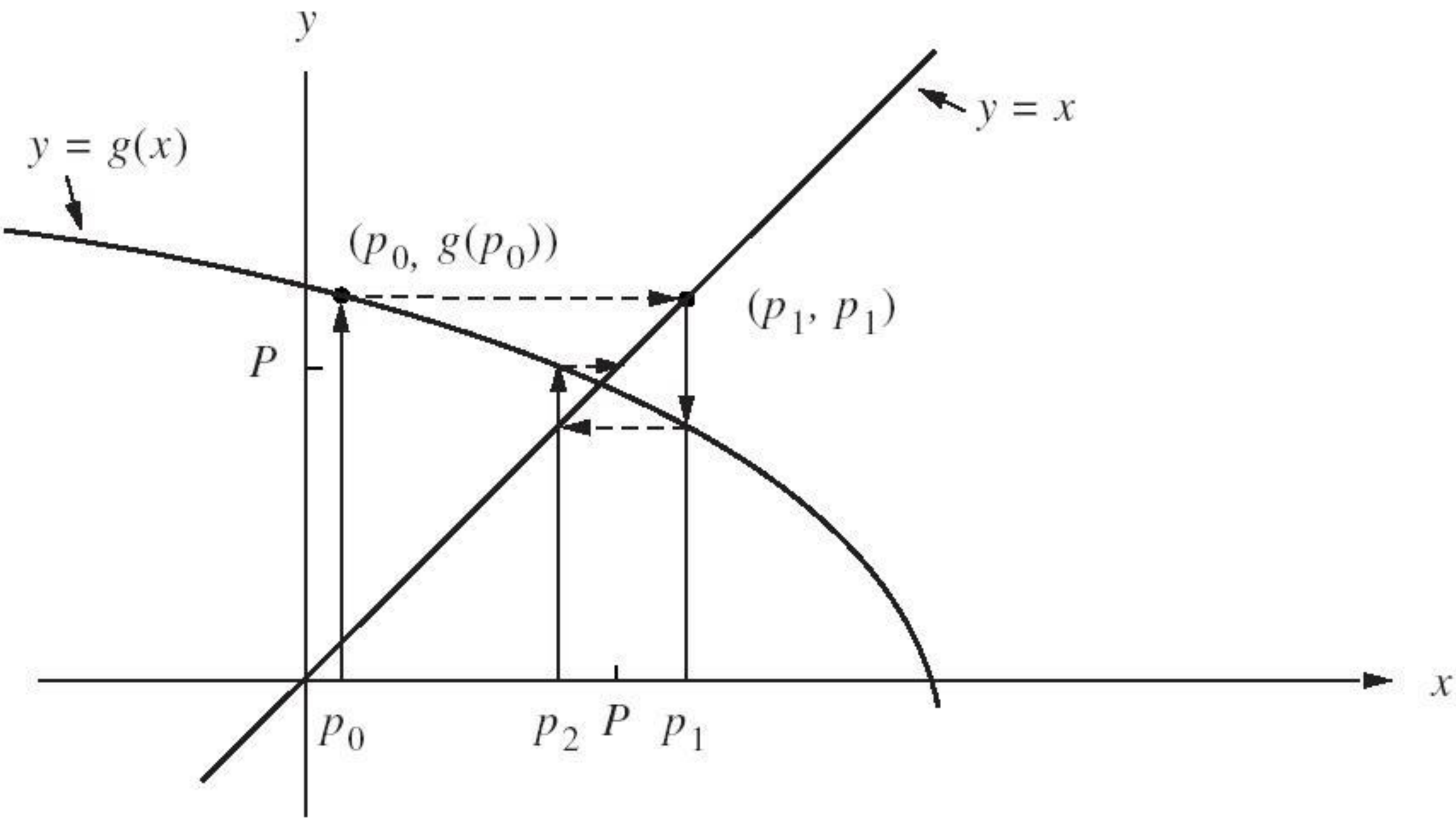


Figure 2.4 (b) Oscillating convergence when $-1 < g'(P) < 0$.

Fixed-Point Theorem

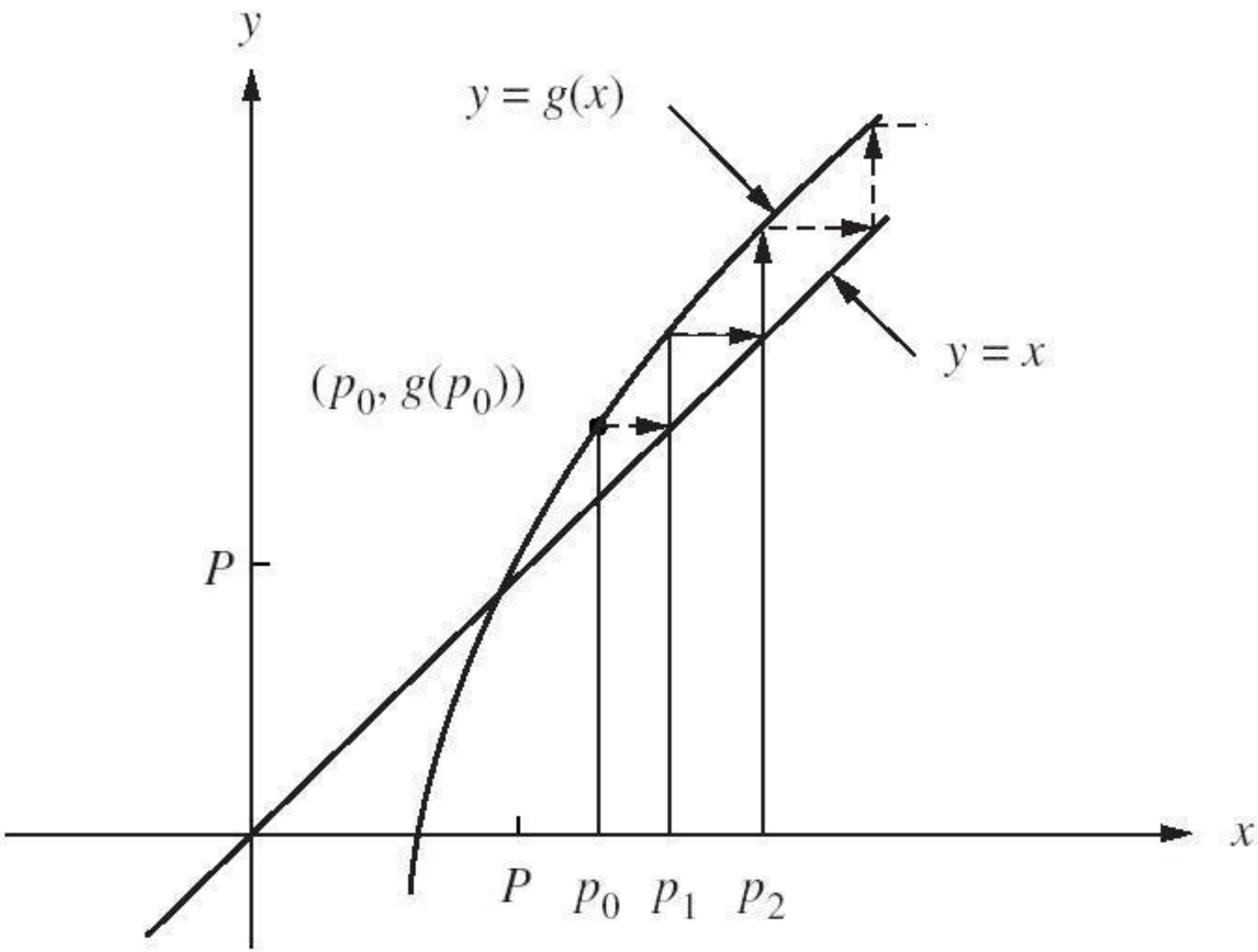


Figure 2.5 (a) Monotone divergence when $1 < g'(P)$.

Fixed-Point Theorem

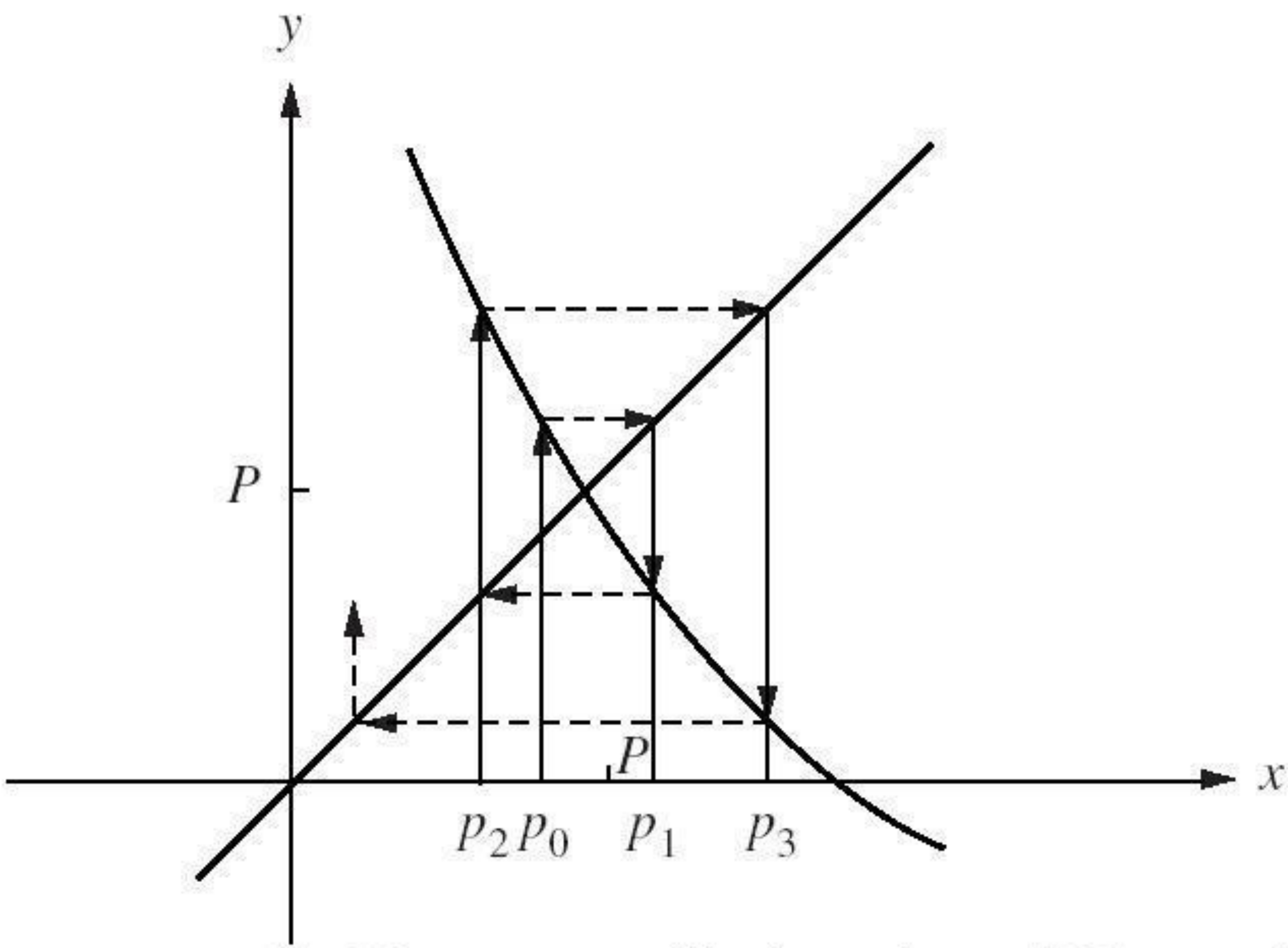


Figure 2.5 (b) Divergent oscillation when $g'(P) < -1$.

例7-3 为求x^3-x^2-1 = 0 在 $x_0 = 1.5$ 附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式：

(1) $x = 1+\dfrac{1}{x^2}$, 迭代公式 $x_{k+1} = 1+\dfrac{1}{x_k^2}$;

(2) $x^3 = 1+x^2$, 迭代公式 $x_{k+1} = \sqrt[3]{1+x_k^2}$

(3) $x^2 = \dfrac{1}{x-1}$, 迭代公式 $x_k = \dfrac{1}{\sqrt{x_k - 1}}$

试分析每种迭代公式的收敛性，并选取一种公式求出近似根。

解: 取$x_0 = 1.5$的邻域 [1.3,1.6]来考察

(1) 当$x \in [1.3,1.6]$时，$\phi(x) = 1+\dfrac{1}{x^2} \in [1.3,1.6]$,

$$|\phi'(x)| = \left|-\frac{2}{x^3}\right| \le \frac{2}{1.3^3} \approx 0.9103 = L < 1,$$ 故迭代式 $x_{k+1} = 1+\dfrac{1}{x_k^2}$ 在[1.3,1.6]上整体收敛。

(2) 当$x\in[1.3,1.6]$时

$$\phi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\quad\in[1.3,1.6]$$

$$|\phi'(x)|=\frac{2}{3}\left|\frac{x}{(1+x^2)^{2/3}}\right|<\frac{2}{3}\frac{1.6}{(1+1.3^2)^{2/3}}\approx 0.522=L<1$$

故$x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$ 在[1.3,1.6]上整体收敛。

(3) $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $|\phi'(x)|=\left|\dfrac{-1}{2(x-1)^{3/2}}\right|>\dfrac{1}{2(1.6-1)^{3/2}}\approx 1.0758>1,$

Matlab计算与画图

故 $x_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x_k-1}}$发散。

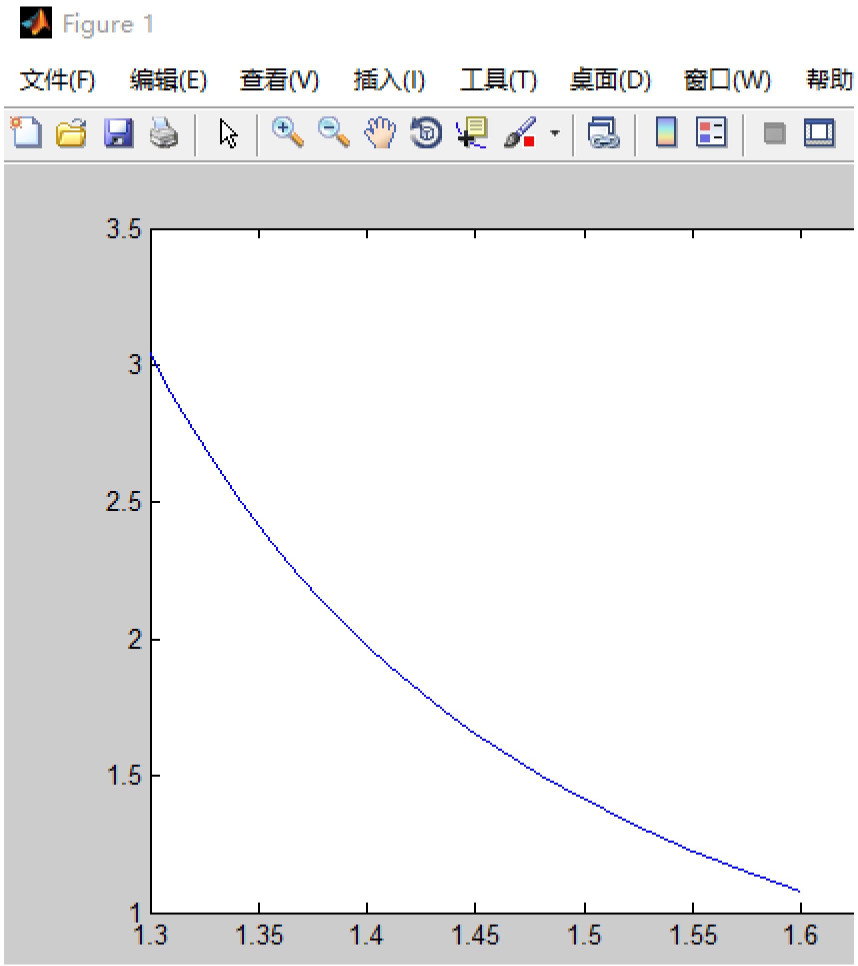
等价不一定等效

由于(2) 的L较小，故取(2) 中迭代公式计算。取 $x_0=1.5$ 计算结果见下表

k	x_k	k	x_k
1	1.484248034	4	1.467047973
2	1.472705730	5	1.466243010
3	1.468817314	6	1.465876820

$$(3)\quad \phi(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}},\quad |\phi'(x)|=\left|\frac{-1}{2(x-1)^{3/2}}\right|>\frac{1}{2(1.6-1)^{3/2}}\approx 1.0758>1$$

```
x=1.3:0.01:1.6;
phix=abs(1./((x-1).^(3/2))/2);
plot(x,phix)
```



例7-4 比较求$e^x+10x-2=0$根的误差小于$10^{-4}/2$所需的计算量：

(1) 在区间[0,1] 内用二分法；

(2) 用迭代法 $x_{k+1}=(2-e^{x_k})/10$，取初值$x_0=0$.

解：(1) 因$x^*\in[0,1]$，$f(0)<0$，$f(1)>0$，故$0<x^*<1$，

事前误差估计

用二分法计算，此时$\left|x_{14}-x^*\right|\le\frac{1}{2^{15}}=0.000030517<\frac{1}{2}\times10^{-4}$，$x^*\approx x_{14}$ 。

(2)当$x\in[0,0.5]$时，$\phi(x)\in[0,0.5]$，$\left|\phi'(x)\right|=\frac{e^x}{10}\le L=0.16487$

在[0,0.5]上整体收敛。取$x_0=0$，迭代计算结果如下：

k	x_k	k	x_k
1	0.1	4	0.090512616
2	0.089482908	5	0.090526468
3	0.090639135	6	0.090524951

事中误差估计

此时$\left|x_6-x^*\right|\le\frac{L}{1-L}\left|x_6-x_5\right|\le2.995\times10^{-7}$而$\left|x_4-x^*\right|=2.4978\times10^{-5}<\frac{10^{-4}}{2}$，故$x_4$可

全局是相对的

7.2.3 局部收敛性与收敛阶

迭代序列$\{x_k\}$在$[a,b]$上的收敛性通常称为全局收敛性；不容易由定理作出判断。应用上经常只在不动点x^* 附近考察收敛性，称为局部收敛性.

定义7-1 设$\phi(x)$有不动点x^*, 如果存在x^*的某个邻域$R:\left|x-x^*\right|\le\delta$, 对任意$x_0\in R$, 迭代(7.1)产生的序列$\{x_k\}\in R$, 且收敛到$x^*$ 则称迭代法(7.1)局部收敛。

定理7-3 设x^*为迭代函数 $\phi(x)$ 的不动点, $\phi'(x)$ 在x^* 的某邻域内连续, 且$|\phi'(x^*)|<1$, 则迭代法 (7.1) 是局部收敛的.

此证明不做要求

证明: 由连续函数性质, 存在x^* 的某个邻域 $R:\left|x-x^*\right|<\delta$, 使对于任意 $x\in R$ 成立 $\left|\phi'(x)\right|\le L<1$. 此外, 对于任意$x\in R$, 总有$\phi(x)\in R$, 这是因为 $\left|\phi(x)-x^*\right|=\left|\phi(x)-\phi(x^*)\right|\le L\left|x-x^*\right|<\left|x-x^*\right|<\delta$

于是依据定理可以断定迭代过程$x_{k+1}=\phi(x_k)$ 对于任意初值$x_0\in R$ 均收敛.

例7-5 用不同方法求方程$x^2-3=0$的根$x^*=\sqrt{3}$.

(1) $x_{k+1}=x_k^2+x_k-3,\quad \phi(x)=x^2+x-3,\quad \phi'(x)=2x+1,\quad \phi'(x^*)=\phi'\left(\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}+1>1;$

(2) $x_{k+1}=\dfrac{3}{x_k},\quad \phi(x)=\dfrac{3}{x},\quad \phi'(x)=-\dfrac{3}{x^2},\quad \underline{\phi'(x^*)=-1;}$

(3) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{1}{4}(x_k^2-3),\quad \phi(x)=x-\dfrac{1}{4}(x^2-3),\quad \phi'(x)=1-\dfrac{x}{2},\quad \phi'(x^*)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134<1;$

(4) $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{3}{x_k}\right),\quad \phi(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right),\quad \phi'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right),\quad \phi'(x^*)=\phi'\left(\sqrt{3}\right)=0.$

k	x_k	迭代法(1)	迭代法(2)	迭代法(3)	迭代法(4)
0	x_0	2	2	2	2
1	x_1	3	1.5	1.75	1.75
2	x_2	9	2	1.73475	1.732143
3	x_3	87	1.5	1.732631	1.732051
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

牛顿法

定义7－2 设迭代过程$x_{k+1}=\phi(x_k)$收敛于x^*，误差$e_k=x_k-x^*$，若$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{e_{k+1}}{e_k^p}=C$，其中$C$是不等于零的常数，则称迭代过程为$p$阶收敛. 特别地，当$p=1$时迭代法为线性收敛；当$p>1$时为超线性收敛；当$p=2$时为平方收敛.

p范围？C范围？

定理7－4 如果迭代函数$\phi(x)$在$x=\phi(x)$的根x^*邻近具有p阶连续导数，并且

$$\phi'(x^*)=\phi''(x^*)=\cdots=\phi^{(p-1)}(x^*)=0,\quad \phi^{(p)}(x^*)\neq 0,$$

那么迭代过程在x^*附近是p阶收敛的.

特别地，当$0<|\phi'(x^*)|<1$时，迭代法线性收敛;

当$\phi'(x^*)=0$，$\phi''(x^*)\neq 0$时，平方收敛.

例7−5 中，迭代法 (3) 的$\phi'(x^*)\neq 0$，故它只是线性收敛的，而迭代法(4)的$\phi'(x^*)=0$，而$\phi''(x^*)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\neq 0$，由定理7−4 知$p=2$该迭代法为2 阶收敛。

牛顿法

课堂演算

例7-7 求方程 $3x^2-\mathrm{e}^x=0$在[3,4]中的解。

解：由方程$\mathrm{e}^x=3x^2$，取对数得

$$x=\ln\left(3x^2\right)=2\ln x+\ln 3=\varphi(x)$$

由于$\varphi'(x)=\dfrac{2}{x}$，$\max\limits_{3\le x\le 4}\left|\varphi'(x)\right|\le\dfrac{2}{3}<1$,

课堂演算

且当$x\in[3,4]$，$\varphi(x)\in[3,4]$,

根据定理7-2此迭代法是收敛的。

若取时$x_0=3.5$迭代16次得$x_{16}=3.73307$.

Example 2.5. Consider the iteration $p_{n+1} = g(p_n)$ when the function $g(x) = 2(x-1)^{1/2}$ for $x \geq 1$ is used. Only one fixed point $P = 2$ exists. The derivative is $g'(x) = 1/(x-1)^{1/2}$ and $g'(2) = 1$, so Theorem 2.3 does not apply. There are two cases to consider when the starting value lies to the left or right of $P = 2$.

Case (i): Start with $p_0 = 1.5$,
then get

$$\begin{aligned} p_1 &= 1.41421356 \\ p_2 &= 1.28718851 \\ p_3 &= 1.07179943 \\ p_4 &= 0.53590832 \\ &\vdots \\ p_5 &= 2(-0.46409168)^{1/2}. \end{aligned}$$

Since p_4 lies outside the domain of $g(x)$, the term p_5 cannot be computed.

Case (ii): Start with $p_0 = 2.5$,
then get

$$\begin{aligned} p_1 &= 2.44948974 \\ p_2 &= 2.40789513 \\ p_3 &= 2.37309514 \\ p_4 &= 2.34358284 \\ &\vdots \\ \lim_{n\to\infty} p_n &= 2. \end{aligned}$$

This sequence is converging too slowly to the value $P = 2$; indeed, $P_{1000} = 2.00398714$.

下面介绍**Aitken加速算法**，此方法可对线性收敛的简单迭代法起到加速作用，而且可应用于其它数值方法中。

由于 $x_{k+1}-\alpha=\varphi'(\xi_1)(x_k-\alpha)$, $x_{k+2}-\alpha=\varphi'(\xi_2)(x_{k+1}-\alpha)$

假设 $\varphi'(\xi_1)\approx\varphi'(\xi_2)$，则有

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_{k+2}-\alpha}\approx\frac{x_k-\alpha}{x_{k+1}-\alpha}$$

一样的技巧，如Romberg求积

即 $(x_{k+1}-\alpha)^2\approx(x_k-\alpha)(x_{k+2}-\alpha)$

$$x_{k+1}^2-2x_{k+1}\alpha+\alpha^2\approx x_k x_{k+2}-(x_k+x_{k+2})\alpha+\alpha^2$$

解得

$$\alpha\approx\frac{x_k x_{k+2}-x_{k+1}^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}=x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$

$$=x_{k+2}-\frac{(x_{k+2}-x_{k+1})^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$

等价不一定等效

更稳健robust

如果记 $$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

则序列$\{\hat{x}_k\}$要比序列$\{x_k\}$更快地收敛于α，可构造如下的Aitken加速算法（Steffenson迭代法）：

REPORT：A/S历史

$$\begin{cases} y_k = \varphi(x_k) \\ z_k = \varphi(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \end{cases}, k = 0,1,2,\cdots$$

注意: 如果第k步发生z_k-2y_k+x_k=0, 就终止计算, 取$\alpha \approx x_k$。

分母为0立即停算

例 分别用简单迭代法和Aitken加速算法求方程x=1.6+0.99cos$x$在x_0=π/2附近的根 (该根准确值为1.585471802)。

解 用迭代公式：

$$x_{k+1}=1.6+0.99\cos x_k \text{，} \quad k=0\text{，}1\text{，}2\text{，}\ldots$$

取$x_0 = \pi/2$, 计算结果如下:

k	简单迭代法		k	**Aitken**算法	
	x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$		x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$
0	1.57080		0	1.57079630	
1	1.6	0.02920	1	1.58547258	0.01467628
2	1.57109	0.02891	2	1.58547180	0.00000078
3	1.59971	0.02862			
4	1.57138	0.02833			

课堂演算

7.3 牛顿法

7.3.1 牛顿法及其收敛性

牛顿迭代公式的推导、线性化：设已知方程$f(x)=0$ 的近似根x_k，并假定$f'(x_k)\neq 0$，做Taylor展开

1712年Taylor公式

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k),$$

于是 $f(x)=0$近似表示为

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0, \tag{7.5}$$

记其根为 x_{k+1}，则有计算公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{7.6}$$

这就是**牛顿迭代**（Newton-Raphson iteration）**法**.

（Newton写特例2文于1669和1671年，后自1685年起被发表; 1690年Raphson发表）

平方收敛证明

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)^2$$

$$0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x^*-x_k)^2$$

$$0=\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}+(x^*-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

$$0=x^*+\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-x_k+\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

$$0=x^*-x_{k+1}+\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

一般可略

可见，Newton迭代法至少是平方收敛的。

可见, Newton迭代法至少是平方收敛的.

阅读，了解，可略

若记 $C=\dfrac{m_2}{2m_1}$ (其中 $m_2=\max|f''(x)|$, $m_1=\min|f'(x)|$.

则有 $|x_{k+1}-x^*|\le C|x_k-x^*|^2 \le (C|x_{k-1}-x^*|)^4/C$

因此 $C|x_{k+1}-x^*|\le (C|x_k-x^*|)^2 \le \cdots \le (C|x_0-x^*|)^{2^{k+1}}$

理论意义

可见,当$C|x_0-x^*|<1$, 即$|x_0-x^*|<2m_1/m_2$ 时, Newton迭代法是收敛的.

几何意义

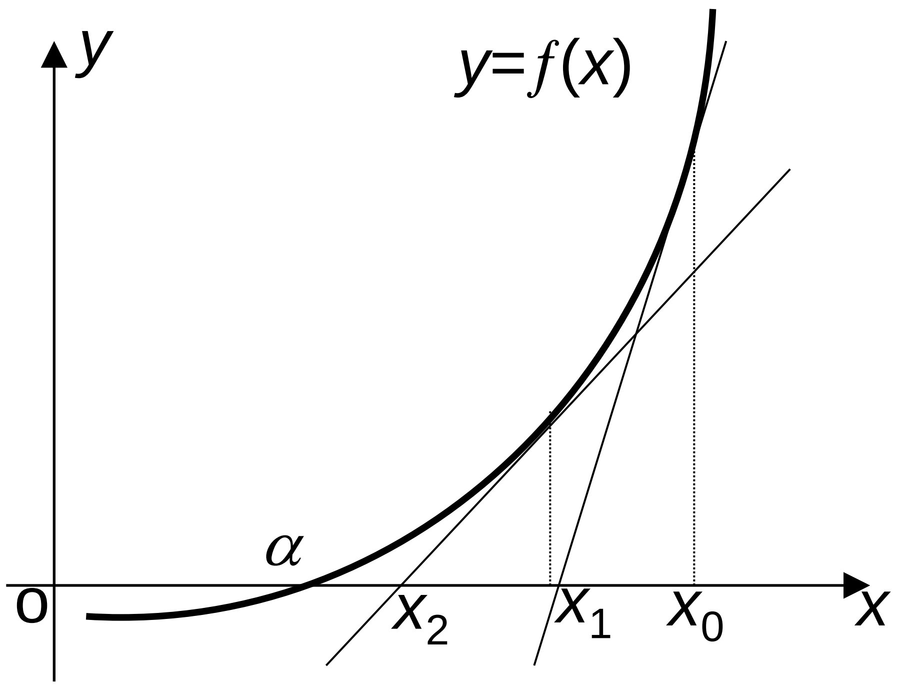
直线 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

点斜式

就是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

与x轴交点： $0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$

故， $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$



Newton迭代法也叫切线法.

例7-8 用牛顿法解方程 $xe^x=1$，取迭代初值$x_0=0.5$。

解：$f(x)=xe^x-1$，牛顿公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}$$

迭代结果列于右表

k	x_k	k	x_k
0	0.5	2	0.56716
1	0.57102	3	0.56714

牛顿迭代法的局部收敛性：

$$\boxed{\frac{|f(x)f''(x)|}{|f'(x)|^2}<1 \quad \text{for all } x\in(p-\delta,p+\delta)}$$

$$\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$$

课堂推导（分母平方，分子先导）

$$\phi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

$$\phi''(x^*)=\frac{[f'(x^*)f''(x^*)+0f'''(x^*)][f'(x^*)]^2-0}{[f'(x^*)]^4}=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)},$$

当x^*是$f(x)$的单根时，$\phi'(x^*)=0$，$\phi''(x^*)\neq 0$。此时牛顿法是二阶收敛的。

二重根呢？

7.3.2 牛顿法应用举例

例7-9 对于给定正数C，应用牛顿法解二次方程

$$x^2 - C = 0$$

证明迭代公式对于任意初值$x_0 > 0$ 都是收敛的，并求$\sqrt{115}$.

证明：$\forall x_0 > 0$，对$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{C}{x_k} \right)$式配方，易知

$$x_{k+1} - \sqrt{C} = \frac{1}{2x_k}\left(x_k - \sqrt{C} \right)^2$$

$$x_{k+1} + \sqrt{C} = \frac{1}{2x_k}\left(x_k + \sqrt{C} \right)^2$$

以上两式相除得

$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{C}}{x_{k+1} + \sqrt{C}} = \left[\frac{x_k - \sqrt{C}}{x_k + \sqrt{C}} \right]^2$$

此证明不做要求

据此反复递推有 **此证明不做要求**

$$\frac{x_k - \sqrt{C}}{x_k + \sqrt{C}} = \left[\frac{x_0 - \sqrt{C}}{x_0 + \sqrt{C}}\right]^{2^k}$$

记

$$q = \frac{x_0 - \sqrt{C}}{x_0 + \sqrt{C}}$$

整理上式，得

$$x_k - \sqrt{C} = 2\sqrt{C}\,\frac{q^{2^k}}{1-q^{2^k}}, \quad x_k = \sqrt{C}\,\frac{1+q^{2^k}}{1-q^{2^k}}$$

对任意$x_0 > 0$, 总有$|q| < 1$, 故由上式推知，当$k \to \infty$ 时

$x_k \to \sqrt{C}$, 即迭代过程恒收敛。

利用 $$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{C}{x_k}\right)$$

取$C = 115$, 初值 $x_0 = 10$ 。迭代3次便得到精度为10^{-6}的结果。

k	x_k
0	10
1	10.750000
2	10.723837
3	10.723805
4	10.723805

例 用Newton迭代法求 $\sqrt{3}$ 的近似值，要求ε=10^{-7}。

解 对方程$x^2-3=0$应用Newton迭代法：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-3}{2x_k}=\frac{x_k}{2}+\frac{3}{2x_k} \qquad ,k=0,1,2,\cdots$$

取x_0=1.7，计算得：

k	x_k	$\|x_k-x_{k-1}\|$
0	1.7	
1	1.732352941	0.032352941
2	1.732050834	0.000302107
3	1.732050808	0.000000026

所以取 $\sqrt{3}\approx x_3$=1.732050808

7.3.3 简化牛顿法与牛顿下山法

可略

(1) 构造迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - Cf(x_k) \quad C \neq 0, k = 0,1,2,\cdots.$$

迭代函数$\varphi(x) = x - Cf(x)$. 若$|\varphi'(x)| = |1 - Cf'(x)| < 1$，即$0 < Cf'(x) < 2$ 时

在根x^*附近成立，迭代法局部收敛。当取$C = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ 时，迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$ 称为简化牛顿法。

(2) 将牛顿法与下山法结合起来使用。牛顿法的计算结果 $\bar{x}_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

与前一步的近似值x 的适当加权平均作为新的改进值

$$x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k, \qquad x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2,\cdots,$$

加入下山因子的迭代公式称为牛顿下山法。

选择下山因子时从$\lambda = 1$开始，逐次将λ折半直到满足 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$.

回想$Ax=b$逐次超松驰（Successive Over-Relaxation）迭代法

例如 再求$x^3-x-1=0$在1.5附近的根x^*.

解：依次用牛顿法$x_0=1.5$，简化牛顿法$x_0=0.6$，牛顿下山法$x_0=0.6$，计算结果如下：

k	x_k	x_k	x_k	$f(x_k)$
0	1.5	0.6	0.6	-1.384
1	1.34783	17.9	1.140625	-0.656643
2	1.32520	发散	1.36181	0.1866
3	1.32472		1.32628	0.00667
4			1.32472	0.0000086

还是Newton法好！

7.3.4 重根情形

m重根情形，$f(x)=(x-x^*)^m h(x)$，牛顿法不是平方收敛，

(*)可将迭代法改为 $x_{k+1}=x_k-m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$， 仍平方收敛.

推导由来

设α是方程$f(x)=0$的m重根，则：$f(x)=(x-\alpha)^m h(x)$，其中$h(x)$在$x=\alpha$处连续且$h(\alpha)\neq 0$。

由于

$$F(x)=[f(x)]^{\frac{1}{m}}=(x-\alpha)[h(x)]^{\frac{1}{m}}$$

可见，α恰是方程$F(x)=0$的单根，应用Newton迭代法可得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{F(x_k)}{F'(x_k)}=x_k-\frac{[f(x_k)]^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}[f(x_k)]^{\frac{1}{m}-1}f'(x_k)}$$

即 $$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad , \qquad k=0,1,2,\cdots$$

称之为带参数m的Newton迭代法，它是求方程$f(x)=0$的m重根的具有平方收敛的迭代法。

m重根情形, $f(x)=(x-x^*)^m h(x)$，牛顿法不是平方收敛，

(*)可将迭代法改为 $x_{k+1}=x_k-m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$， 仍平方收敛.

(**)可令$\mu(x)=f(x)/f'(x)$，若x^*是$f(x)$ 的m重根，则

$$\mu(x)=\frac{(x-x^*)h(x)}{mh(x)+(x-x^*)h'(x)},$$ 故x^*是$\mu(x)=0$ 的单根.

课堂推导

对$\mu(x)$用牛顿法得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)},$$

仍平方收敛.

例7-10 用上述三种方法求$x^4-4x^2+4=0$ 的二重根$x^*=\sqrt{2}$.

解： （1）牛顿法 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-2}{4x_k}$;

（2）(*) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-2}{2x_k}$;

（3）(**) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k(x_k^2-2)}{x_k^2+2}$.

计算结果如下：

k	x_k	(1)	(2)	(3)
0	x_0	1.5	1.5	1.5
1	x_1	1.458333333	1.416666667	1.411764706
2	x_2	1.436607143	1.414215686	1.414211438
3	x_3	1.425497619	1.414213562	1.414213562

7.4 弦截法（割线法）

用牛顿法求解非线性方程 $f(x)=0$, 每步除计算 $f(x_k)$ 外还要计算 $f'(x_k)$ 。下面介绍避免求$f'(x_k)$ 的迭代法。

1. 单点弦截法

以x_k和x_0为插值节点，得到线性插值函数

$$p_1(x) = f(x_k) + f[x_k, x_0](x - x_k)$$

$$= f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}(x - x_k).$$

令$p_1(x)=0$，得到

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}(x_k - x_0),$$

称为单点弦截法.

在牛顿法中用差商 $\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$ 代替导数 $f'(x_k)$ ，同样得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}(x_k - x_0).$$

略讲

可以证明单点弦截法是线性收敛的.

$$\phi'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)[f(x^*) - f(x_0)] - 0}{[f(x^*) - f(x_0)]^2}(x^* - x_0) - 0$$

如愿，课堂推导

$$= 1 - \frac{f'(x^*)}{\frac{f(x^*) - f(x_0)}{x^* - x_0}},$$

故 $0 < |\phi'(x^*)| < 1$?

2. 两点弦截法

以x_k和x_{k-1}为插值节点，得到线性插值函数

$$p_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

令$p_1(x) = 0$，得到

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$，称为两点弦截法。

优点：无需求导

或在牛顿法中取$f'(x_k) = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$而得到。

可以证明两点弦截法超线性收敛.

Secant method

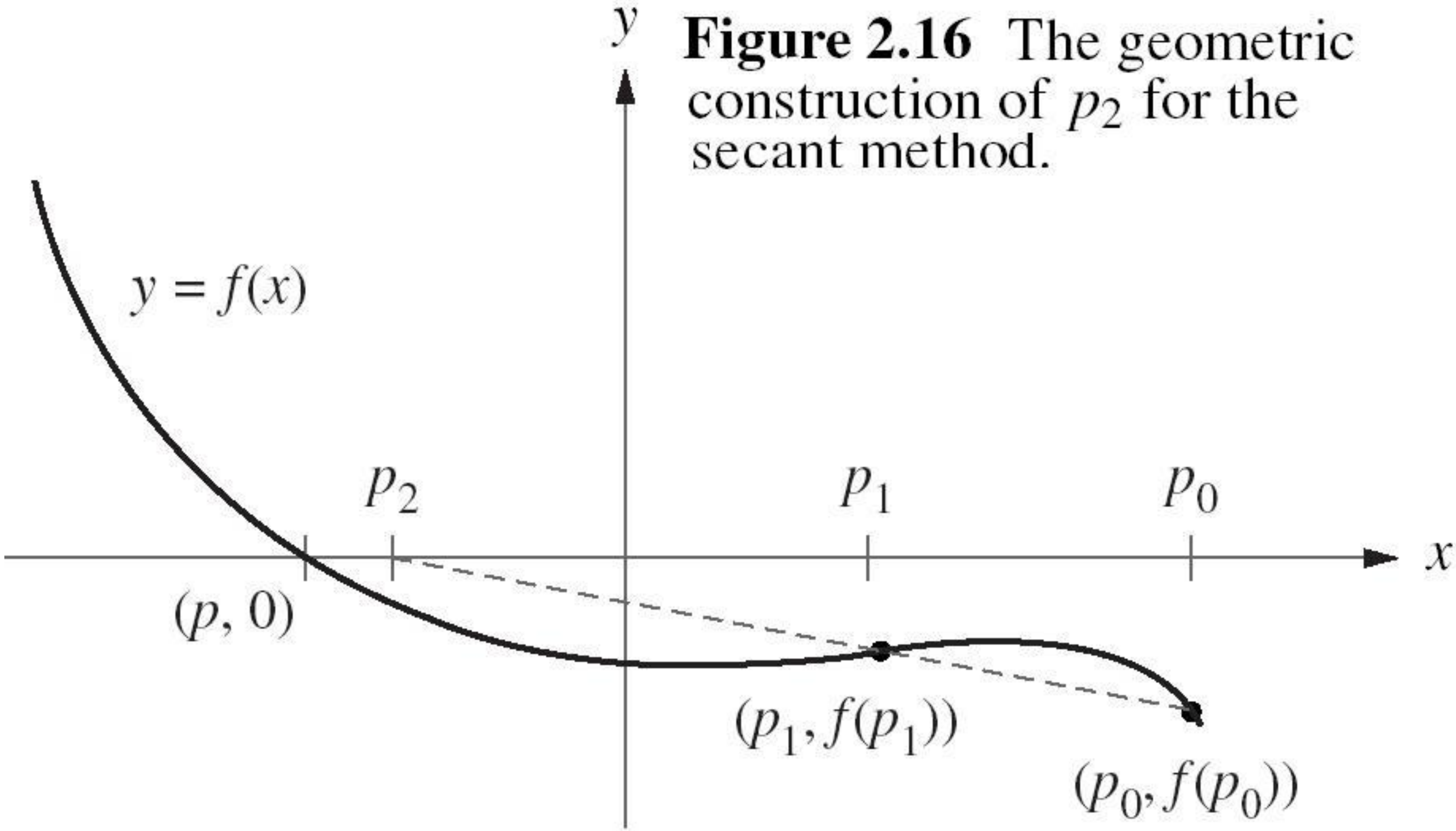


Figure 2.16 The geometric construction of p_2 for the secant method.

Secant method

$$p_2 = g(p_1, p_0) = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)}.$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$p_{k+1} = g(p_k, p_{k-1}) = p_k - \frac{f(p_k)(p_k - p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}.$$

$$\boxed{p_{k+1} = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}(p_k - p_{k-1}) \text{ ？等价不一定等效}}$$

the error terms satisfy the relationship

$$|E_{k+1}| \approx |E_k|^{1.618} \left| \frac{f''(p)}{2f'(p)} \right|^{0.618}$$

定理7-5 假设 $f(x)$ 在根 x^* 的邻域 $\Delta:|x-x^*|\le\delta$ 内具有二阶连续导数，且对任意 $x\in\Delta$ 有 $f'(x)\neq 0$，又初值 $x_0,x_1\in\Delta$，那么当 Δ 充分小时，两点弦截法按阶 $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ 收敛到 x^*.

例7-11 用两点弦截法求方程 $x\mathrm{e}^x-1=0$ 在[0.5,0.6]内的根.

解：两点弦截法公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k\mathrm{e}^{x_k}-1}{x_k\mathrm{e}^{x_k}-x_{k-1}\mathrm{e}^{x_{k-1}}}(x_k-x_{k-1}),$$

k	x_k	k	x_k
0	0.5	3	0.567 09
1	0.6	4	0.567 14
2	0.565 32		

知识结构图

- 方程近似求根
  - 基本概念（单根、重根、有根区间、不动点、收敛阶）
  - 求根方法
    - 二分法及其收敛性
    - 不动点迭代法及其收敛性定理
    - （不动点迭代法的加速技巧）
    - 牛顿迭代法及其收敛性
    - 插值型迭代法（多点迭代）
      - 弦截法
      - 抛物线法

REPORT1：牛顿法反例（不成功示例）

REPORT2：收敛更好（如3阶）算法

复习与思考题(无需提交)

P237: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9

习题(如愿可做，无需提交)

P238: 10, 12, 13

习题(需提交)

P238: 2, 11

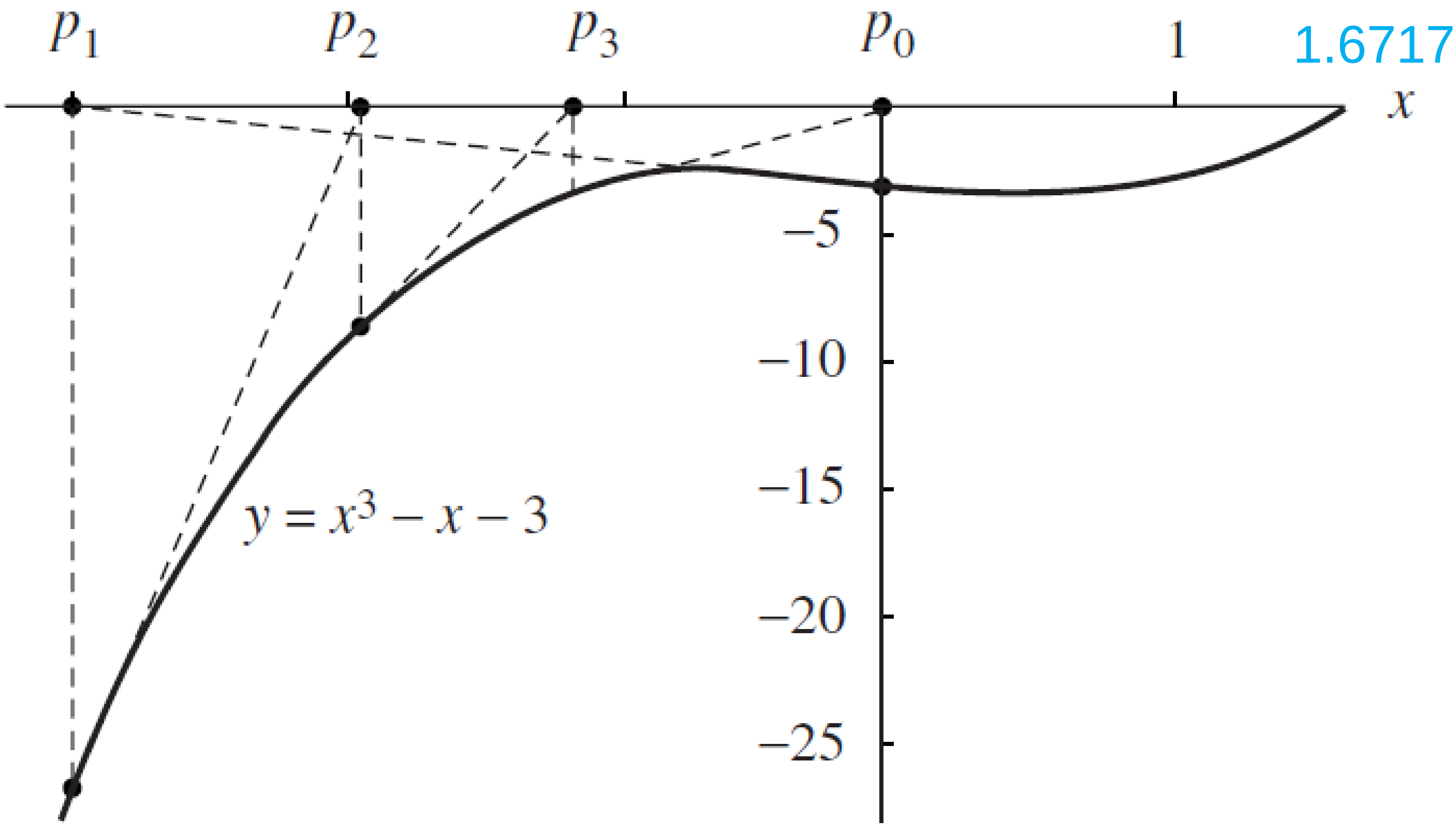


Figure 2.15 (b) Newton-Raphson iteration for $f(x) = x^3 - x - 3$ can produce a cyclic sequence.

roots([1 0 -1 -3])

标量牛顿法反例（不成功示例）

$$\frac{\mathrm{d}\arctan x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g(x) = x - (1+x^2)\arctan(x)$$

$$g'(x) = -2x\arctan(x)$$

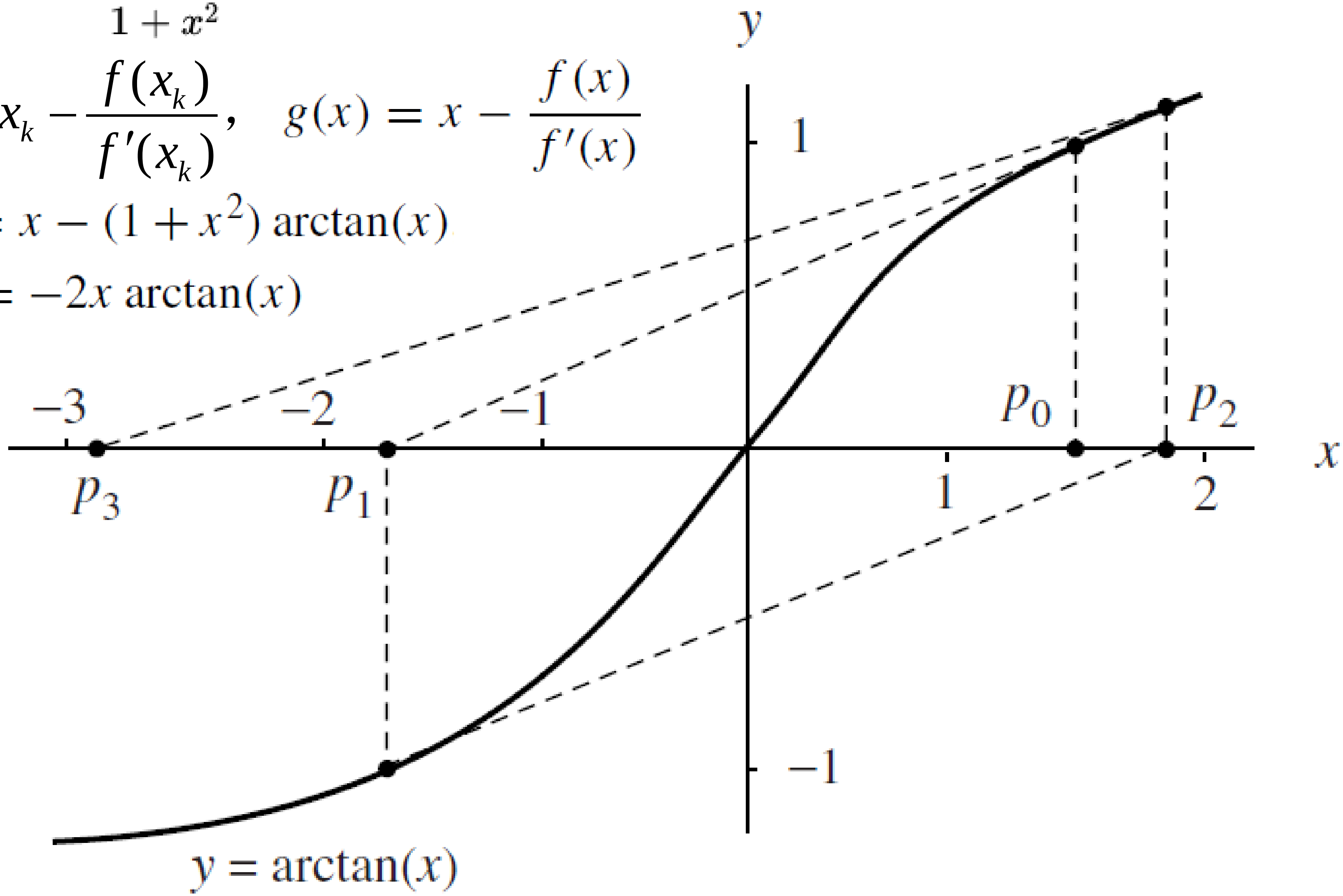


Figure 2.15 (c) Newton-Raphson iteration for $f(x) = \arctan(x)$ can produce a divergent oscillating sequence.