第四章 随机变量的数字特征

• 中山大学 • 计算机学院 • 郑培嘉 • Email：zhpj@mail.sysu.edu.cn

目录

1. 数学期望

数学期望

例：一射手进行打靶练习，规定射入区域e_2得2分；射入区域e_1得1分；脱靶(射入区域e_0得0分). 射手一次射击所得分数X是随机变量。X的分布律为:

$$P\{X = k\} = p_k, \qquad k = 0,1,2$$

现射击N次，其中得0分a_0次，得1分a_1次，得2分a_2次， $a_0 + a_1 + a_2 = N$. 射击N次得分总和为$a_0 \times 0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 2$. 平均射击得分为:

$$\frac{a_0 \times 0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 2}{N} = \sum_{k=0}^{2} k \frac{a_k}{N}$$

这里$\frac{a_k}{N}$为事件$\{X = k\}$的频率. 当N很大时， $\frac{a_k}{N}$在一定意义下接近于事件$\{X = k\}$的概率p_k. 即随机变量X的观察值的算数平均$\sum_{k=0}^{2} k \frac{a_k}{N}$在一定意义下接近于$\sum_{k=0}^{2} kp_k$，我们称$\sum_{k=0}^{2} kp_k$为随机变量$X$的**数学期望**或**均值**。

数学期望

◆ **定义**：设离散型随机变量X的分布律为:

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1,2, \ldots.$$

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$的和为随机变量X的**数学期望**，记为$E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$, 若积分$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$绝对收敛, 则积分$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$的值为随机变量$X$的**数学期望**，记为$E(X)$. 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

数学期望简称**期望**，又称为**均值**。

数学期望

例：某医院当新生儿诞生时，医生需要对婴儿的各方面情况进行评分，设新生儿的得分X是一个随机变量，X的分布律如下表：

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	0.002	0.001	0.002	0.005	0.02	0.04	0.18	0.37	0.25	0.12	0.01

试求X的数学期望$E(x)$.

解：$E(x) = 0 \times 0.002 + 1 \times 0.001 + 2 \times 0.002 + 3 \times 0.005 + 4 \times 0.02 + 5 \times 0.04 + 6 \times 0.18 + 7 \times 0.37 + 8 \times 0.25 + 9 \times 0.12 + 10 \times 0.01 = 7.15$（分）

即若考察1000个新生儿，则一个新生儿的平均得分为7.15，1000个新生儿共得分7150分。

数学期望

例：有两个相互独立的电子装置，他们的寿命$X_k\ (k=1,2)$服从同一指数分布，其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}, \theta>0$$

若将这两个电子装置串联成整机，求整机寿命 N 的数学期望。

解： X_k 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

而$N=\min\{X_1,X_2\}$的分布函数为

$$F_{min}(x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}1-e^{-\frac{2x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

数学期望

因而N的概率密度为：

$$f_{min}(x)=\begin{cases}\frac{2}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

于是N的数学期望为：

$$E(N)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_{min}(x)dx=\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}}dx=\frac{\theta}{2}$$

数学期望

例：某车站每天8: 00~9: 00，9: 00~10: 00都恰有一辆客车到站，但到站时刻是随机的，且两者到站时间相互独立，其规律为:

到站时刻	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

一旅客8：20到车站，求他候车时间的数学期望.

解：设旅客的候车时间为X，X的分布律为:

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

则候车时间的数学期望为:

$$E(X) = 10\times\frac{3}{6} + 30\times\frac{2}{6} + 50\times\frac{1}{36} + 70\times\frac{3}{36} + 90\times\frac{2}{36} = 27.22$$

数学期望

例：某商店对某种家电销售采取先使用后付款的方式，记使用寿命为X，规定：

$X \le 1$, 一台付款1500元；　$1 < X \le 2$, 一台付款2000元；

$2 < X \le 3$, 一台付款2500元；　$X > 3$, 一台付款3000元；

设寿命X服从指数分布，其概率密度如下：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x/10}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

试求该商店一台这种家电收费Y的数学期望。

解：先求寿命X落在各个时间区间的概率，有

$$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} \mathrm{e}^{-x/10} \, dx = 1 - \mathrm{e}^{-0.1} = 0.0952$$

数学期望

$$P\{1<X\leq 2\}=\int_1^2 \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x/10}\,dx=\mathrm{e}^{-0.1}-\mathrm{e}^{-0.2}=0.0861$$

$$P\{2<X\leq 3\}=\int_2^3 \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x/10}\,dx=\mathrm{e}^{-0.2}-\mathrm{e}^{-0.3}=0.0779$$

$$P\{X>3\}=\int_3^\infty \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x/10}\,dx=\mathrm{e}^{-0.3}=0.7408$$

一台家用电器收费Y的分布律为：

Y	1 500	2 000	2 500	3 000
p_k	0.095 2	0.086 1	0.077 9	0.740 8

则$E(Y)=2732.15$，即平均一台收费2732.15元。

数学期望

例：在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此要抽验N个人的血，可以用两种方法进行.（i）将每个人的血分别去验，这就需验N次.（ii）按k个人一组进行分组，把从k个人抽来的血混合在一起进行检验. 如果这混合血液呈阴性反应，就说明k个人的血都呈阴性反应，这样，这k个人的血就只需验一次；若呈阳性，则再对这k个人的血液分别进行化验，这样，k个人的血总共要化验$k+1$次. 假设每个人化验呈阳性的概率为p，且这些人的试验反应是相互独立的. 试说明当p较小时，选取适当的k，按第二种方法可以减少化验的次数. 并说明k取什么值时最适宜.

解：各人的血呈阴性反应的概率为$q = 1 - p$.
因而k个人的混合血呈阴性反应的概率为q^k，k个人的混合血呈阳性反应的概率为$1 - \mathrm{q}^k$。

数学期望

设以k个人为一组时，组内每人化验次数为X，则X是一个随机变量，其分布律为：

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X的数学期望为$E(x)=\frac{1}{k}\mathrm{q}^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)1-\mathrm{q}^k=1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k}$.

N个人平均需化验次数为$N(1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k})$

因此只要选择k使$1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k}<1$

则N个人平均需化验次数$<\mathrm{N}$.当p固定时，选取k使得$\mathrm{L}=1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k}$小于1且取到最小值，此时为最好分组法。

如：$p=0.1; q=0.9; k=4$时，$\mathrm{L}=1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k}$取到最小值.

若$N=1000$，以$k=4$分组，按第二种方法化验只需$1000\left(1-0.9^4+\frac{1}{4}\right)=594$（次）。 **减少了40%工作量**

数学期望

例：设随机变量$X\sim\pi(\lambda)$,求$E(X)$。

X的分布律为$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\ldots,\ \lambda>0$

X的数学期望为：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

例：设随机变量$X\sim \mathrm{U}(\mathrm{a},\mathrm{b})$,求$E(X)$。

X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & others\end{cases}$$

X的数学期望为：$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$

数学期望

◆ **定理**：设Y是随机变量X的函数：$Y = g(X)$, g是连续函数

➢ 如果X是离散型随机变量，分布律为$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\ldots$,若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\, p_k$绝对收敛，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\, p_k$$

➢ 如果X是连续型随机变量，密度函数为$f(x)$,若$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x) dx$绝对收敛，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x) dx$$

注：定理意义在于我们求$E(Y)$时，不需要求Y的分布律或密度函数，只需要知道X的分布律或密度函数即可

数学期望

证明:(只对下述特殊情况加以证明)

X是连续型随机变量,且$y=g(x)$满足第二章第五节中的定理条件，则随机变量$Y=g(X)$的概率密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & others \end{cases}$$

于是$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)dy=\int_{\alpha}^{\beta} y\, f_X[h(y)]|h'(y)|dy.$

当$h'(y)>0$时,

$$E(Y)=\int_{\alpha}^{\beta} y\, f_X[h(y)]h'(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)dx$$

当$h'(y)<0$时,

$$E(Y)=-\int_{\alpha}^{\beta} y\, f_X[h(y)]h'(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)dx$$

综上所述，证毕。

数学期望

推广：

设Z是随机变量X,Y的函数$Z=g(X,Y)$（g是连续函数），则Z是一个一维随机变量。若二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)\,dxdy$$

这里设上式右边的积分绝对收敛。

若(X,Y)为离散型随机变量，其分布律为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\dots,$则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

这里设右边的级数绝对收敛。

数学期望

例：设风速V在$(0,a)$上服从均匀分布，即具有概率密度

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<v<a\\ 0, & others\end{cases}$$

设飞机机翼受到的正压力W是V的函数：$W=kV^2(k>0,$常数)，求W的数学期望。

解：$E(\mathrm{W})=\int_{-\infty}^{\infty}kv^2f(v)dv=\int_0^a kv^2\frac{1}{a}dv=\frac{1}{3}ka^2$

例：设随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x,x>1\\ 0, & others\end{cases}$$

求数学期望$E(\mathrm{Y}),E\left(\frac{1}{XY}\right)$

数学期望

解:

$$E(\mathrm{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\,dydx = \int_{1}^{\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^3y}\,dydx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}[\ln y]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = 3\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx = [-\frac{3}{2}\frac{\ln x}{x^2}]_{1}^{\infty} + \frac{3}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{xy} f(x,y)\,dydx = \int_{1}^{\infty} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^4y^3}dy = \frac{3}{5}$$

数学期望

例：某公司计划开发一种新产品市场，并试图确定该产品的产量。他们估计出售一件产品可获利m元，积压一件产品损失n元，他们预测销售量Y服从指数分布，其概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}, \quad \theta > 0$$

问若要获利的数学期望最大，应生产多少件产品。

解： 设生产x件，则获利Q是x的函数

$$Q = Q(x) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & Y < x \\ mx, & Y \ge x \end{cases}$$

Q 是随机变量，它是Y的函数，其数学期望为

数学期望

$$E(\mathrm{Q}) = \int_0^{\infty} Q\, f_Y(y)dy$$

$$= \int_0^{x} [my - n(x-y)]\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}\, dy + \int_x^{\infty} mx\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}dy$$

$$= (m+n)\theta - (m+n)\theta e^{-\frac{x}{\theta}} - nx$$

令$\frac{\mathrm{d}}{dx}E(Q) = (m+n)e^{-x/\theta} - n = 0$

得$x = -\theta\ln\frac{n}{m+n}$

而$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E(Q) = \frac{-(m+n)}{\theta}e^{-x/\theta} < 0$

故知当$x = -\theta\ln\frac{n}{m+n}$时$E(Q)$取极大值，且可知也是最大值。

数学期望

例：甲与其他三人参与竞拍，价格高者获胜，若甲中标则将此项目以10千美金转让给他人，可以认为其他三人竞价相互独立，且都在7~11千美金之间均匀分布，问甲应该如何报价才能使获利期望最大。

解：设X_1, X_2, X_3是其他三人得报价，按题意X_1, X_2, X_3相互独立，且在区间(7,11)上服从均匀分布。其分布函数为

$$F(u) = \begin{cases} 0, & u < 7 \\ \dfrac{u-7}{4}, & 7 \le u < 11 \\ 1, & u \ge 11 \end{cases}$$

以Y为三人得最高出价,即$Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$,$Y$的分布函数为

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0, & u < 7 \\ \left(\dfrac{u-7}{4}\right)^3, & 7 \le u < 11 \\ 1, & u \ge 11 \end{cases}$$

数学期望

若甲报价为x, 按题意$7 \le x \le 10$, 知甲能赢这一项目得概率为

$$p = P\{Y \le x\} = F_Y(x) = \left(\frac{u-7}{4}\right)^3$$

以$G(X)$为甲赚钱数， $G(X)$的分布律为

$G(x)$	$10-x$	0
概率	$\left(\frac{x-7}{4}\right)^3$	$1-\left(\frac{x-7}{4}\right)^3$

则甲的赚钱数的数学期望为$E[G(X)] = \left(\frac{u-7}{4}\right)^3 (10-x)$

令$\frac{\mathrm{d}}{dx} E[G(X)] = \frac{1}{4^3}[(x-7)^2(37-4x)] = 0$

得$\mathrm{x} = \frac{37}{4}, x = 7$(舍去)， 又$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} E[G(X)]|_{x=37/4} < 0$

故当甲报价为$\mathrm{x} = \frac{37}{4}$千美元时，数学期望达到最大值。

数学期望

◆ **数学期望性质**：

- 设C是常数，则有$E(C) = C$.
- 设X是一个随机变量，C是常数，则有$E(CX) = CE(\mathrm{X})$.
- 设X, Y是两个随机变量，则有$E(\mathrm{X} + Y) = E(X) + E(Y)$

（可推广到任意有限个随机变量之和的情况）

- 设X, Y是相互独立的随机变量，则有$E(\mathrm{XY}) = E(X)E(Y)$

（可推广到任意有限个随机变量之积的情况）

数学期望

证3： 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 其边缘概率密度为$f_X(x), f_Y(y)$.

$$E(\mathrm{X}+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\,dxdy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

证4： 若X和Y相互独立

$$E(\mathrm{XY})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\,dxdy$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy\right]=E(X)E(Y)$$

数学期望

例：一民航送客车载有20位旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以X表示停车的次数，求$E(X)$ (设旅客在各车站下车是等可能的、且相互独立)。

解：引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}0, \text{在第i站没有人下车}\\1, \text{在第i站有人下车}\end{cases}，\quad i=1,2\ldots 10$$

易知$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$, 现求$E(X)$。

任一旅客在第i站不下车的概率为9/10，因此20位旅客都不在第i站下车的概率为$(\frac{9}{10})^{20}$,在第i站有人下车的概率为$1-(\frac{9}{10})^{20}$

即$P\{X_i=0\}=(\frac{9}{10})^{20}, P\{X_i=1\}=1-(\frac{9}{10})^{20}$

由此$E(X_i)=1-(\frac{9}{10})^{20}$

数学期望

进而$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784$(次)

例：设一电路中电流I与电阻R是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$g(i)=\begin{cases}2i,0\le i\le 1\\0,others\end{cases},h(r)=\begin{cases}\frac{r^2}{9},0\le r\le 3\\0,others\end{cases}$$

试求电压$V=IR$的均值。

解：$E(V)=E(IR)=E(I)E(R)=$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}ig(i)di\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}rh(r)dr\right]=\left(\int_0^1 2i^2di\right)\left(\int_0^3\frac{r^3}{9}dr\right)=\frac{3}{2}(V)$$

2. 方差

方差

例：有一批灯泡，知其平均寿命是$E(X)=1000$（小时）。仅由这一指标我们还不能判定这批灯泡的质量好坏。事实上，有可能其中绝大部分灯泡的寿命都在950～1050小时；也有可能其中约有一半是高质量的，它们的寿命大约有1300小时，另一半却是质量很差的，其寿命大约只有700小时，为要评定这批灯泡质量的好坏，还需进一步考察灯泡寿命X与其均值$E(X)=1000$的偏离程度。容易看到

$$E\{|X-E(X)|\}$$

能度量偏离程度，但由于绝对值运算不便，通常使用

$$E\{[X-E(X)]^2\}$$

◆ 定义：设X是一个随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称$E\{[X-E(X)]^2\}$为X的方差，记为$D(X)$或$Var(X)$，即

$$D(X)=Var(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

方差

在应用上还引入量$\sqrt{D(X)}$，记为$\sigma(X)$，称为标准差或均方差。随机变量X的方差表达了X的取值与其数学期望的偏离程度，若$D(X)$较小意味着X的取值比较集中在$E(X)$的附近，反之，若$D(X)$较大则表示X的取值较分散。由定义知，方差实际上就是随机变量X的函数$g(X)=(X-E(X))^2$的数学期望。

对于离散型随机变量，有

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k$$

其中$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$是$X$的分布律

对于连续型随机变量，有

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x,$$

其中$f(x)$是X的概率密度

方差

随机变量X的方差可按下列公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证： 由数学期望的性质

$$\begin{aligned} D(X) &= E\{[X-E(X)]^2\} = E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\} \\ &= E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2 \\ &= E(X^2)-[E(X)]^2 \end{aligned}$$

方差

例：设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2\neq 0$.

记
$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$$
则
$$E(X^*)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0;$$
$$D(X^*)=E(X^{*2})-[E(X^*)]^2=E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

即$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 的数学期望为0，方差为1。

X^*称为X的**标准化变量**。

方差

例：设随机变量X具有$(0-1)$分布，其分布律为

$P\{X=0\}=1-p, P\{X=1\}=p$。求$D(X)$。

解：

$$E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p,$$

$$E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

方差

例：设随机变量$X \sim \pi(\lambda)$，求$D(X)$。

解：X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots, \lambda>0.$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

所以方差$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2= \lambda$，泊松分布的数学期望和方差相等，都等于参数$\lambda$。

方差

例：设随机变量$X \sim U(a,b)$，求$D(X)$.

解：X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & others\end{cases}$

已算得$E(X)=\frac{a+b}{2}$，方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}$$

方差

例：设随机变量X服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, \qquad x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$，求$E(X)$，$D(X)$。

解:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x$$

$$=-x\mathrm{e}^{-x/\theta}|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x=\theta$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x^2\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x=-x^2\mathrm{e}^{-x/\theta}|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2x\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x=2\theta^2$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2.$$