线性代数 (Linear Algebra)

第二章 Matrix Algebra

§2.4 Partitioned Matrix 分块矩阵

§2.5 Matrix Factorizations 矩阵分解

衡益

2021 年 10 月 28 日，中山大学南校区

分块矩阵

分块矩阵

行数和列数较高的矩阵 ⇒ 矩阵分块

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

标记为

举例

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

分块矩阵的转置

分块矩阵的转置：

$$设\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, 则\ A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

分外层、内层双重转置

分块矩阵举例

EXAMPLE 1 The matrix

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

can also be written as the 2×3 **partitioned** (or **block**) **matrix**

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

whose entries are the *blocks* (or *submatrices*)

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -8 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$

加法与标量乘法

加法与标量乘法

(1) 设矩阵 A 与 B 的行数相同、列数相同，采用相同的分块法，A + B的每一块恰好是A 与 B对应分块的和.

有 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$

加法与标量乘法

(2) 分块矩阵乘以一个数也可以逐块计算

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \text{则 } \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

分块矩阵的乘法

设 A 为 $m \times l$, B 为 $l \times n$ 矩阵，分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中 A 中各块的列数分别等于 B 中各块的行数，则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}, C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, r).$$

分块矩阵的乘法

按行分块

$$A=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{pmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_m^T\end{pmatrix}$$

按列分块

$$B=(b_{ij})_{s\times n}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$1\times s$　　$s\times 1$

$$AB=\begin{pmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_m^T\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1^Tb_1&a_1^Tb_2&\cdots&a_1^Tb_n\\a_2^Tb_1&a_2^Tb_2&\cdots&a_2^Tb_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_m^Tb_1&a_m^Tb_2&\cdots&a_m^Tb_n\end{pmatrix}=(c_{ij})_{m\times n}$$

分块矩阵的乘法举例

举例

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc}2&-3&1&0&-4\\1&5&-2&3&-1\\\hline 0&-4&-2&7&-1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix},\quad B=\left[\begin{array}{cc}6&4\\-2&1\\-3&7\\\hline -1&3\\5&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$AB=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_1+A_{12}B_2\\A_{21}B_1+A_{22}B_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc}-5&4\\-6&2\\\hline 2&1\end{array}\right]$$

$$A_{11}B_1=\begin{bmatrix}2&-3&1\\1&5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&4\\-2&1\\-3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&12\\2&-5\end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_2=\begin{bmatrix}0&-4\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20&-8\\-8&7\end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_1+A_{12}B_2=\begin{bmatrix}15&12\\2&-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-20&-8\\-8&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&4\\-6&2\end{bmatrix}$$

分块矩阵的乘法举例

举例 Let $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$. Verify that

$$AB = \text{col}_1(A)\,\text{row}_1(B) + \text{col}_2(A)\,\text{row}_2(B) + \text{col}_3(A)\,\text{row}_3(B)$$

外积

$$\text{col}_1(A)\,\text{row}_1(B) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a & -3b \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\text{col}_2(A)\,\text{row}_2(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -4c & -4d \end{bmatrix}$$

$$\text{col}_3(A)\,\text{row}_3(B) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e & 2f \\ 5e & 5f \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \text{col}_k(A)\,\text{row}_k(B) = \begin{bmatrix} -3a + c + 2e & -3b + d + 2f \\ a - 4c + 5e & b - 4d + 5f \end{bmatrix}$$

分块矩阵的逆

分块矩阵的逆

A 为 n 阶方阵和分块对角矩阵， $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$,

子块都是方阵. 则 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

如果 $|A_i| \neq 0$, 则 $|A| \neq 0$, 有 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$

分块对角矩阵是一个分块矩阵，除了主对角线上各分块外，其余全是零分块.这样的一个矩阵是可逆的当且仅当主对角线上各分块都是可逆的.

行列式的数学定义

行列式 (Determinants)

方形矩阵

Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}^{+}$ **自然数**

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \det(A)$$

$$|\cdot| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \det(A)$$

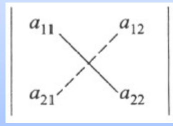
二阶行列式

$$\begin{cases} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} := b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} := a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \end{pmatrix}$$

对角线法

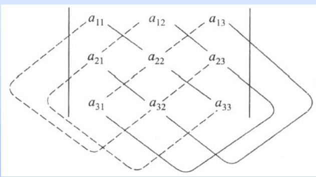
+ -



行列式 (Determinants)

三阶行列式

扩展对角线法



实线：正号；　虚线：负号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式 (Third Order Determinants)

n 阶行列式定义

n 阶

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

3 阶特例

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

带正号的三项列标排列：123, 231, 312 $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$

带负号的三项列标排列：132, 213, 321 $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$

思考：分块矩阵的逆举例

【举例】对于上三角矩阵A：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

A_{11}是$p\times p$的矩阵，A_{22}是$q\times q$的矩阵，A是可逆矩阵，求A^{-1}.

分块矩阵的逆举例

举例：设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&\boxed{\begin{matrix}3&1\\2&1\end{matrix}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&\boxed{A_2}\end{pmatrix}$

$A_1=(5),A_1^{-1}=(\frac{1}{5})$， $A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$， $A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0.2&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$

LU分解

LU分解算法

$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

$$Ly = b, Ux = y$$

一个方形系统 → 两个三角系统

高斯消元 – LU 矩阵分解

$$P_k \cdots P_3 P_2 P_1 A = U$$

上三角矩阵

$$A = (P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} \cdots P_k^{-1}) U$$

$$A = LU$$

下三角矩阵

高斯消元 – LU 矩阵分解举例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix} \overset{r_2 - 2r_1 \to r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix} \quad P_1A \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix} \overset{r_3 - 3r_1 \to r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix} \quad P_2P_1A \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2P_1A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix} \overset{r_3 - 4r_2 \to r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = P_3P_2P_1A$$

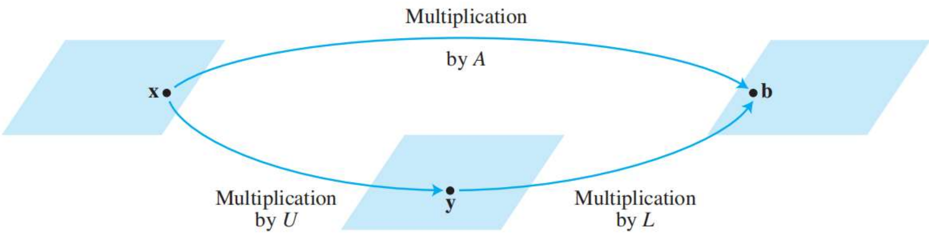
高斯消元 – LU 矩阵分解举例

$$U = P_3P_2P_1A \to A = P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}U \quad A = LU, L = P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU \longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Doolittle algorithm (杜尔里特算法)

LU 矩阵分解求解方程总结



【举例】

$$A=\begin{bmatrix}3&-7&-2&2\\-3&5&1&0\\6&-4&0&-5\\-9&5&-5&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\2&-5&1&0\\-3&8&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-7&-2&2\\0&-2&-1&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}=LU,$$

用LU分解求解$Ax=b$，其中$b=\begin{bmatrix}-9&5&7&11\end{bmatrix}^T$.

LU 矩阵分解求解方程总结

【解析】

$$\begin{bmatrix}L&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-9\\-1&1&0&0&5\\2&-5&1&0&7\\-3&8&3&1&11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&-9\\0&1&0&0&-4\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&y\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}U&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-7&-2&2&-9\\0&-2&-1&2&-4\\0&0&-1&1&5\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&4\\0&0&1&0&-6\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}3\\4\\-6\\-1\end{bmatrix}$$

LU分解算法

LU分解算法

LU分解算法

1. 如果可能的话，用一系列的倍加变换把**A**化为阶梯形.

2. 填充**L**的元素使相同的行变换把**L**变为**I**.

说明：步骤1并不是总是可行（并不是所有矩阵可以进行LU分解）；步骤2说得比较笼统，实际中应该如何做呢？

LU分解算法

- Example： Find an LU factorization of

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solution:

Since A has four rows, L should be 4×4

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

LU分解算法

- Row reduction of A to an echelon form U:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} = A_1$$

$$\sim A_2=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

LU分解算法

- At each pivot column, divide the highlighted entries by the pivot and place the result into

L:

$$
\begin{bmatrix}2\\-4\\2\\-6\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}3\\-9\\12\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\div 2 & \div 3 & \div 2 & \div 5\\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -3 & 1 & \\ -3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}
$$

LU 矩阵分解MATLAB代码

```
% find the LU factorization of the matrix
% input: a: the matrix need to be factorize; n: the number of the low or column in the matrix
function LU(a,n)
m = zeros(n,n);          % initial the n*n matrix m zeros
for i = 1:n;     m(i,i) = 1;  end   % let the diagonal elements be 1
for j = 1 : n-1
   if abs(a(j,j))<eps;
      error('zero pivot encountered');    % when the zero pivot happens,end the process
   end
   for i = j+1 : n
      mult = a(i,j)/a(j,j);
      m(i,j) = mult;
      for k = j:n
         a(i,k) = a(i,k) - mult*a(j,k);
      end
   end
end
disp('  L='); disp(m);
disp('  U='); disp(a);
disp('  LU='); disp(m*a);        % to check if the result is right
```

Further reading

Ax = b求解其他方法

$$Ax = b \Longrightarrow (S - T)x = b \Longrightarrow Sx = Tx + b$$

$Sx_{k+1} = Tx_k + b$ with any x_0 to start

1. 当矩阵 A 维数巨大时，稀疏矩阵
2. $Ax_\infty = b$，实际应用中的目标：$r_k = b - Ax_k$ 接近零
3. 拆分 $A = S - T$ 目的是加速 x_k 收敛
4. S 通常可以选择对角型或三角型矩阵

迭代法

$$e_k = x - x_k \to 0$$

$$\begin{cases} Sx = Tx + b \\ Sx_{k+1} = Tx_k + b \end{cases} \Rightarrow S(x - x_{k+1}) = T(x - x_k)$$

误差方程：$Se_{k+1} = Te_k$，即 $e_{k+1} = S^{-1}Te_k$

$B = S^{-1}T$ 会趋近于零 $\Leftrightarrow$ B 矩阵的每个特征值都满足 $|\lambda| < 1$

即表明收敛速度取决于 B 谱半径：$\rho = \max|\lambda(B)|$

举例

$$Ax = b,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Jacobi Iteration

1. $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $Sx_{k+1} = Tx_k + b \Rightarrow \begin{cases} 2u_{k+1} = v_k + 4 \\ 2v_{k+1} = u_k - 2 \end{cases},\ x_0 = \begin{pmatrix} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/4 \end{pmatrix},$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 15/8 \\ 0 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/16 \end{pmatrix}, \ldots, \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Further reading

- 直接法
  - LU 分解
  - …

  优点：鲁棒性强
  缺点：内存开销大

- 迭代法
  - Jacobi, Gauss-Seidel, Incomplete LU
  - GMRES, FGMRES, Conjugate Gradient, BiCGSTAB
  - …

  特点：占用内存少，更多的选择，需要预处理器，平滑器等等。

- 特征值求解
  - QR Method + 并行计算

§ 2.4

思考1

设A_{11}可逆，求出X与Y使

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

其中$S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$，矩阵S称为$A_{11}$的舒尔补，这样的表达式常在系统工程和其他地方出现.

§ 2.4

思考2

用A, B, C求出X, Y, Z的表达式（提示：计算组变得乘积并使它等于右边）

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ Z & 0 \end{bmatrix}$$

§ 2.4

思考3

设A_{11}是可逆矩阵，求出矩阵X和Y使下列的积有所说的形式，并计算B_{22}.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ X & I & 0 \\ Y & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{bmatrix}$$

§ 2.5

思考1

用所给的A的LU分解来解方程Ax = b，同时用通常的行变换解方程Ax = b.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

§ 2.5

思考2

设A = QR，其中Q和R都是$n \times n$矩阵，R是可逆上三角矩阵，Q满足$Q^TQ = I$，证明对任意属于$\mathbb{R}^n$的b，方程Ax = b有唯一解，叙述求解的算法.

§ 2.5

思考3

下列带状矩阵可用来估计一根梁中的非稳态热传导，其中梁上的各点 $p_1,\cdots,p_5$ 的温度随时间变化.

矩阵中的常数 C 依赖于梁的物理性质，Δx 为各点之间距离，时间间隔 Δt 的长度是两次温度测量的间隔.

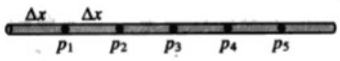
设对 $k=0,1,2,\cdots,\mathbb{R}^5$ 中向量 t_k 表示在 $k\Delta t$ 时刻

§ 2.5

思考3

各点的温度．若梁的两端保持于 0°，则温度向量满足方程 $At_{k+1}=t_k(k=0,1,\cdots)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}(1+2C) & -C & & & \\ -C & (1+2C) & -C & & \\ & -C & (1+2C) & -C & \\ & & -C & (1+2C) & -C \\ & & & -C & (1+2C)\end{bmatrix}$$



a. 求出当 $C=1$ 时，A 的 LU 分解．有三条非零对角线的矩阵称为三对角矩阵，因子 L 和 U 为双对角矩阵．

b. 设 $C=1$ 及 $t_0=(10,12,12,12,10)$，应用 A 的 LU 分解求温度分布 t_1，t_2，t_3 和 t_4．

回家作业

2.4：P130：23； P131：25
2.5：P138：9,14,19

Q & A