第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§1.7 Linear Transformations 线性变换

2020 年 10 月 14 日，中山大学东校区

变换

变换

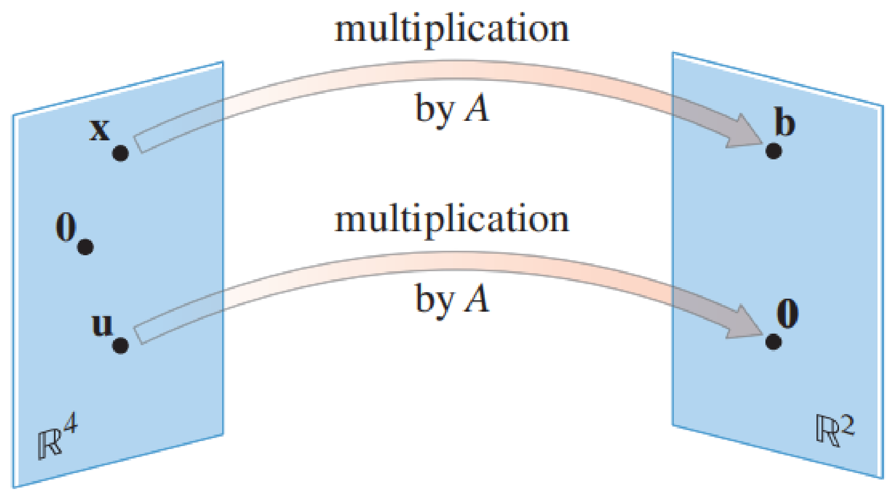
乘以矩阵A后，将x变成b，将u变成零向量。

Ax=b

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}}$$

Au=0

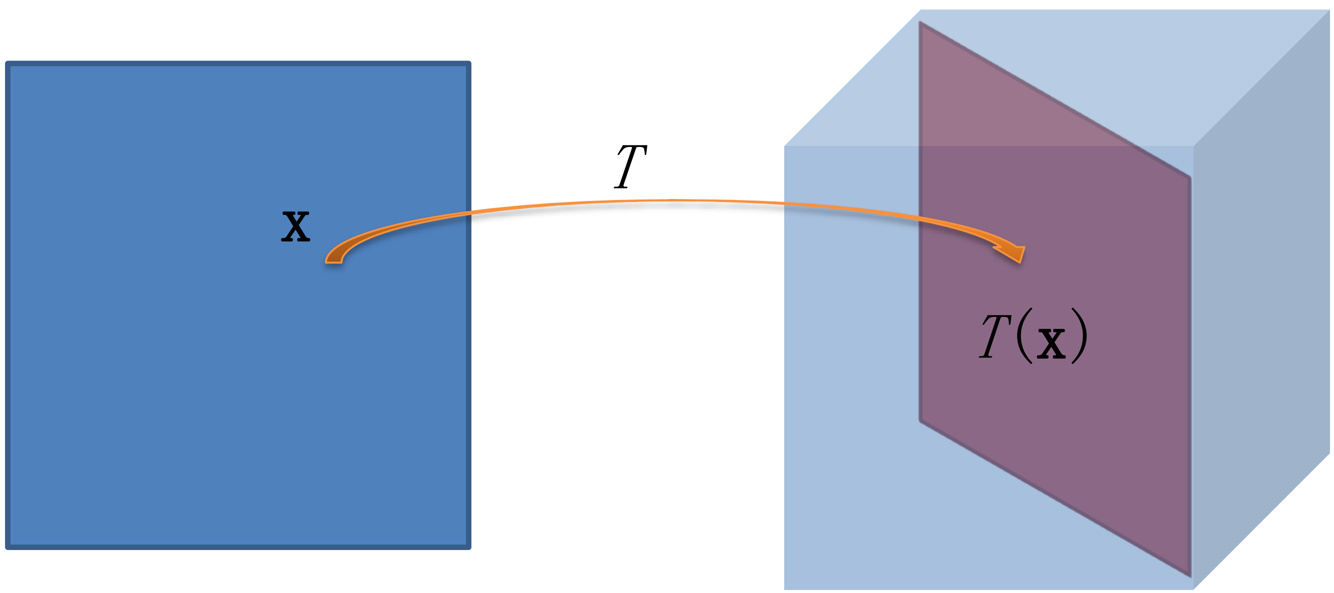
$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{0}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$



向量变换

变换

由$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的一个变换（或称函数、映射）T 是一个规则，它把$\mathbb{R}^n$中的每个向量$\mathbf{x}$对应到$\mathbb{R}^m$中的一个向量$T(\mathbf{x})$.



变换

符号：

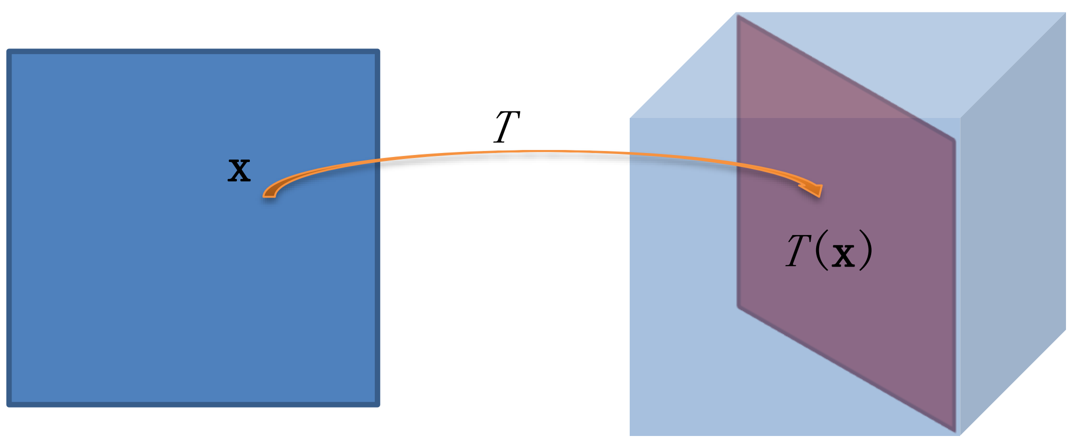
$\mathbb{R}^n$ ：定义域（domain of T）

$\mathbb{R}^m$ ：余定义域、陪域（codomain of T）

T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$的变换

$T(\mathbf{x})$ ：$\mathbf{x}$在$\mathbb{R}^m$的像（Image of $\mathbf{x}$）

所有$T(\mathbf{x})$的集合：值域（Range of T）



矩阵变换

矩阵变换

对于一个变换 T：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，$T$定义为$T(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}$.

其中 $T(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}$，$\mathbf{A}$是一个$m \times n$的矩阵.

则 T被称作是一个矩阵变换.

矩阵变换

例:

令$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

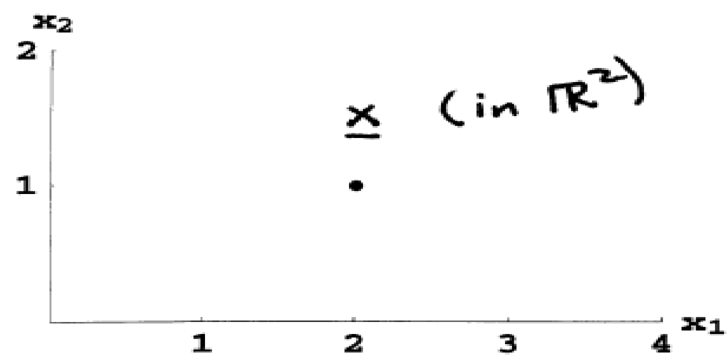
定义线性变换T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}$, 求$T(\mathbf{x})$.

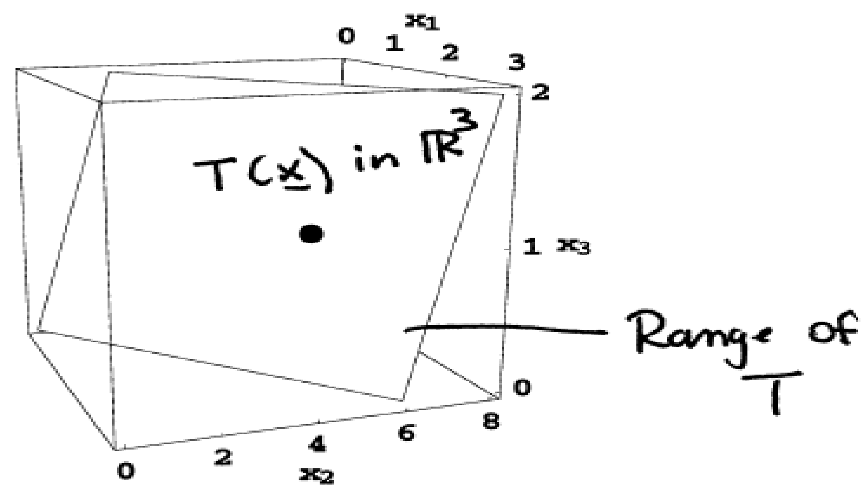
$$T(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & 5\\ -1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-3x_2\\ 3x_1+5x_2\\ -x_1+7x_2\end{bmatrix}.$$

矩阵变换

解析

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$





Domain : $\mathbb{R}^2$

Codomain : $\mathbb{R}^3$

矩阵变换

例:

令$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & 5\\ -1 & 7\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ -5\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 5\end{bmatrix}$,

定义线性变换T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}$, 使得:

$$T(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & 5\\ -1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-3x_2\\ 3x_1+5x_2\\ -x_1+7x_2\end{bmatrix}.$$

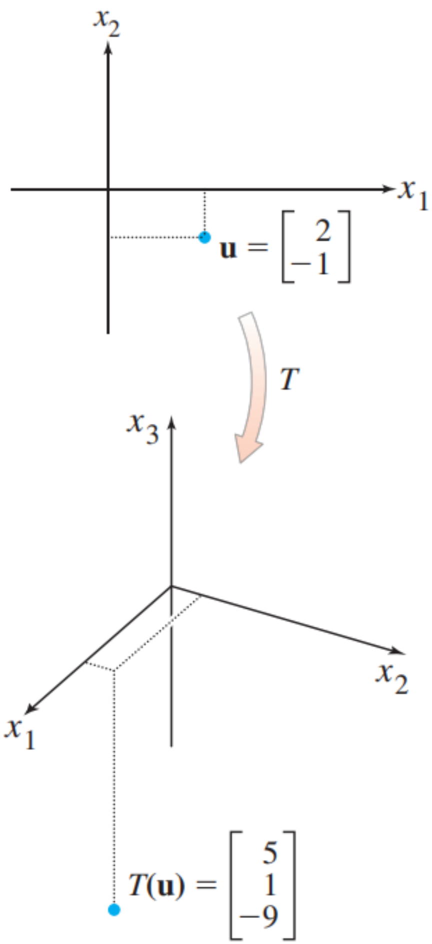
a. 求$T(\mathbf{u})$;

b. 已知$T(\mathbf{x})=\mathbf{b}$, 求$\mathbf{x}$;

c. $\mathbf{x}$是否唯一?

d. 确定$\mathbf{c}$是否在线性变化T 的值域内。

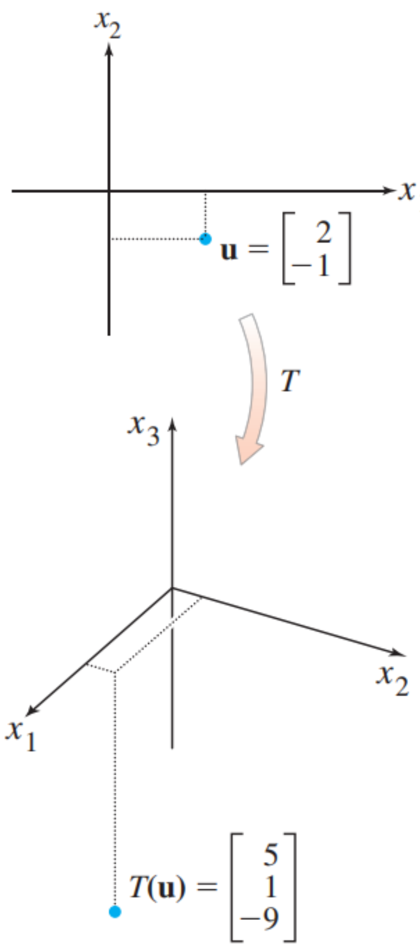
解析



$$a.\quad T(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}1 & -3\\3 & 5\\-1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\\-9\end{bmatrix};$$

$$b.\quad \begin{bmatrix}1 & -3\\3 & 5\\-1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-3x_2\\3x_1+5x_2\\-x_1+7x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}，解得\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1.5\\-0.5\end{bmatrix};$$

解析



c. 由上可知，**x**必唯一；

d. 求解**Ax** = **c**，增广矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix},$$

由第三个方程0=-35可知，**c**不在线性变化T 的值域内。

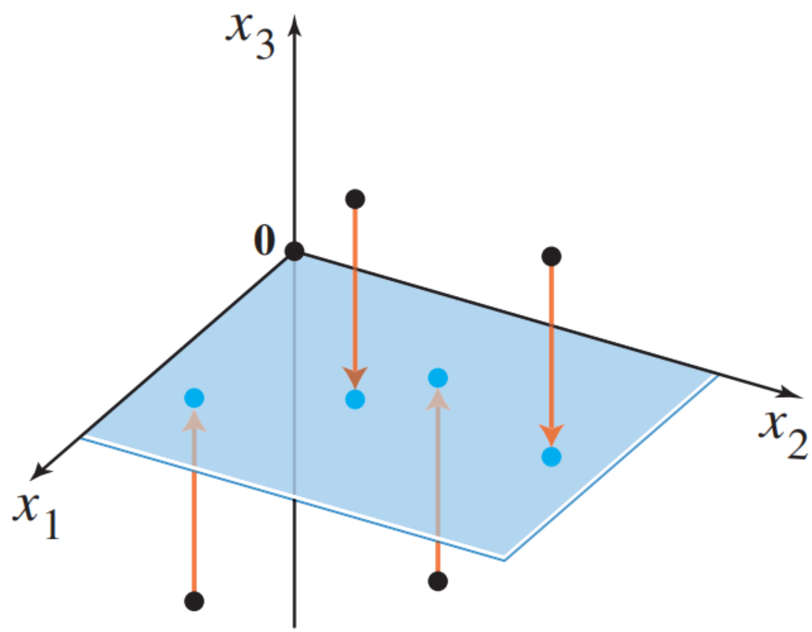
矩阵变换

矩阵变换有许多应用，比如在计算机图形学中。

举例

投影变换（Projection Transformation）

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$



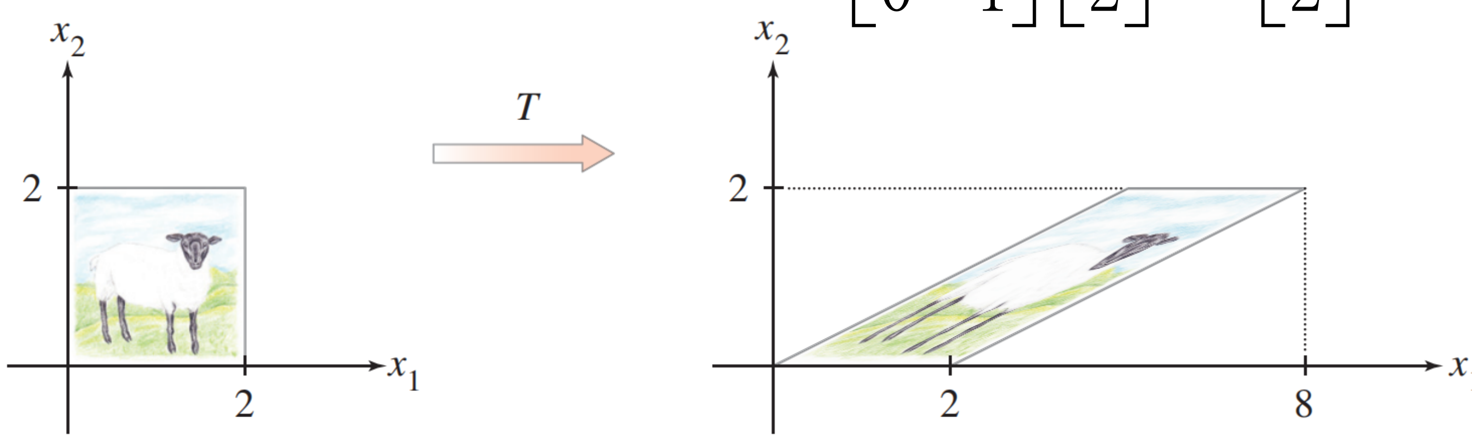
矩阵变换

举例 错切变换，剪切变换 (Shear transformation)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

图像像素点(0,2)的变换：$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

图像像素点(2,2)的变换：$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$



线性变换

定义

如果映射 T 满足

任意 α_1, α_2在T的定义域中, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

有 $T(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = \lambda_1 T(\alpha_1) + \lambda_2 T(\alpha_2)$,

则 T 为线性映射或线性变换。

每个矩阵变换都是线性变换！

线性变换

线性变换保持向量加法运算与标量乘法运算

(i) $T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2)$

(ii) $T(\lambda_1\alpha_1) = \lambda_1 T(\alpha_1)$

线性变换的性质

$$(1)\quad T(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\quad T(-\alpha) = -T(\alpha)$$

由(i i) $T(\lambda_1\alpha_1) = \lambda_1 T(\alpha_1)$可知:

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

$$T(-\alpha) = T(-1\cdot\alpha) = -T(\alpha).$$

线性变换的性质

(2) 若 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$,

则 $T(\beta) = k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + \cdots + k_mT(\alpha_m)$

由（i） $T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2)$可推广得到.

线性变换的性质

(3) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关,

则 $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_m)$ 也线性相关.

$\Downarrow$

满足

(i) $T(\alpha_1+\alpha_2)=T(\alpha_1)+T(\alpha_2)$

(ii) $T(\lambda_1\alpha_1)=\lambda_1 T(\alpha_1)$

线性变换的性质

(4) 线性变换 T 的像集 $T(V_n)$是一个$\boxed{\text{线性空间}}$,

称为线性变换 T 的像空间

(5) 使 $T(\alpha)=\mathbf{0}$ 的 α 的全体 $N_T=\{\alpha \mid \alpha\in V_n, T(\alpha)=\mathbf{0}\}$

也是一个$\boxed{\text{线性空间}}$，并成为是线性变换 T 的一个核.

线性空间

线性空间定义

设 V 是一个非空集合，$\mathbb{R}$ 为实数域。如果在 V 中定义了一个**加法**，即对于任意两个元素 $\alpha, \beta \in V$, 总有唯一的一个元素 $v = \alpha + \beta \in V$ 与之对应；在 V 中又定义了一个数与元素的**乘法（简称数乘）**，即对于任何一数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 与任一元素 $\alpha \in V$, 总有唯一的一个元素 $\delta \in V$ 与之对应，称为 λ 与 α 的数量乘积，记作 $\delta = \lambda\alpha$,

并且满足**八条运算规律**（设 $\alpha, \beta, v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$）：

… …

线性空间

… …

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) 在 V 中存在零元素 $\mathbf{0}$, 对任何 $\alpha \in V$, 都有 $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;

(4) 对任何 $\alpha \in V$, 都有 α 的负元素 $\beta \in V$, 使 $\alpha + \beta = \mathbf{0}$;

(5) $1\alpha = \alpha$;

(6) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;

(7) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;

(8) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$

V 称为（实数域 $\mathbb{R}$ 上的）线性空间

线性空间举例

次数不超过 n 的多项式的全体，记作 $P[x]_n$， 即

$$P[x]_n = \left\{ p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \;\middle|\; a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

运算封闭性：

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)$$

$$= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \in P[x]_n,$$

$$\lambda(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = (\lambda a_n) x^n + \cdots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in P[x]_n$$

$P[x]_n$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间

线性空间举例

n 次多项式的全体，记作 $Q[x]_n$， 即

$$Q[x]_n = \left\{ q = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \right\}$$

运算封闭性：

$$0q = 0 \cdot a_n x^n + \cdots + 0 \cdot a_1 x + 0 \cdot a_0 \notin Q[x]_n,$$

即 $Q[x]_n$ 运算不封闭。

$Q[x]_n$ 不是线性空间

线性空间的性质

1. 零元素是唯一的

证明：

设 0_1 和 0_2 是线性空间 V 中的两个零元素，即对任何 $\alpha \in V$，有 $\alpha + 0_1 = \alpha, \alpha + 0_2 = \alpha$, 于是特别的有

$0_2 + 0_1 = 0_2, 0_1 + 0_2 = 0_1$, 所以 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$.

2. 任一元素的负元素是唯一的，α的负元素记作 $-\alpha$

证明：

设 α 的负元素不唯一，有不同的 β 和 γ，即 $\alpha + \beta = 0, \alpha + \gamma = 0$。

于是有 $\beta = \beta + 0 = \beta + (\alpha + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma = \gamma$，矛盾

线性空间的性质

3. $0\alpha = \mathbf{0}, (-1)\alpha = -\alpha, \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$

证明：

$$\alpha + 0\alpha = 1\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha = \alpha \Rightarrow 0\alpha = \mathbf{0}$$

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = [1+(-1)]\alpha = 0\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow (-1)\alpha = -\alpha$$

$$\lambda\mathbf{0} = \lambda[\alpha + (-1)\alpha] = \lambda\alpha + (-\lambda)\alpha = [\lambda + (-\lambda)]\alpha = 0\alpha = \mathbf{0}$$

4. $\lambda\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$ 或 $\alpha = \mathbf{0}$

证明：

1. 若 $\lambda = 0$, $\lambda\alpha = \mathbf{0}$

2. 若 $\lambda \neq 0$, $\lambda\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow (\frac{1}{\lambda}\lambda)\alpha = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow 1\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \mathbf{0}$$

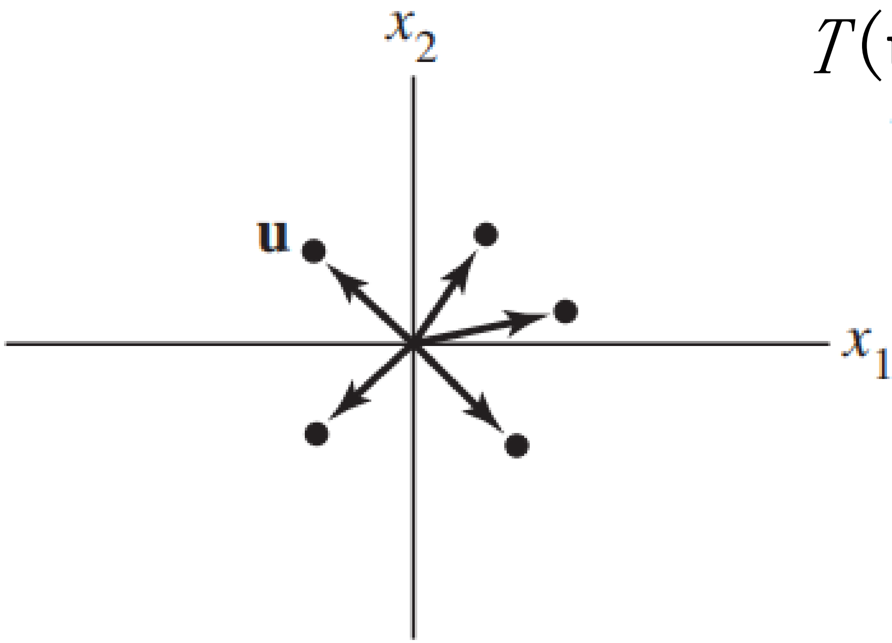
矩阵变换的性质

$(1) T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

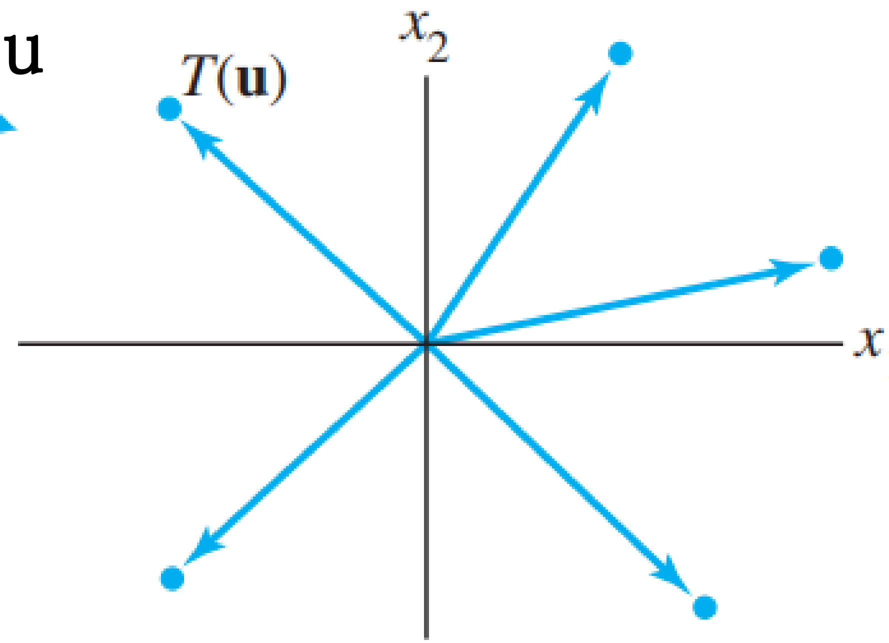
$(2) T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

$(3) T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

$$T(c\mathbf{u}+d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$$



$$T(\mathbf{u}) = 3\mathbf{u}$$



矩阵变换的性质

例题

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

求$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$在 T变化下的图像。

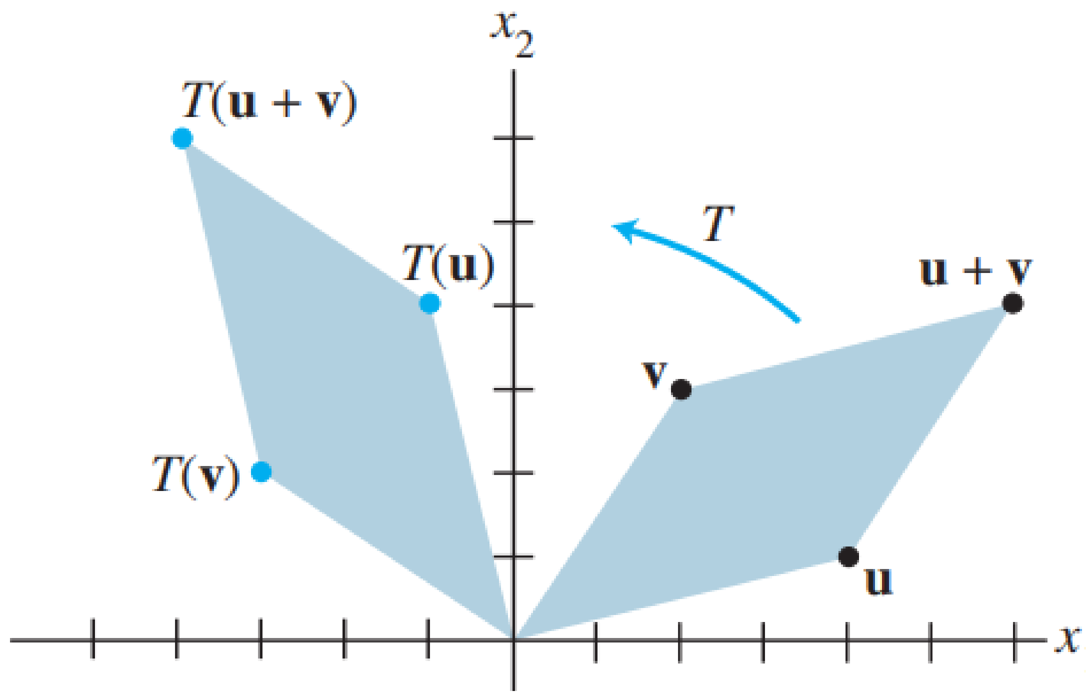
矩阵变换的性质

解析

$$T(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{v})=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}.$$



回家作业

P61：9，15，16，17，18，19，20

Q & A