一、重要概念

1. 图、简单图、图的同构、度序列与图序列、补图与自补图、两个图的联图、两个图的积图、偶图

- 图：一个图是一个有序对<V, E>，记为 G=(V, E)，其中： 1) V 是一个有限的非空集合，称为顶点集合，其元素称为顶点或点。用|V|表示顶点数；2) E 是由 V 中的点组成的无序对构成的集合，称为边集，其元素称为边，且同一点对在 E 中可以重复出现多次。用|E|表示边数

注：图 G 的顶点集记为 V(G)，边集记为 E(G)。图 G 的顶点数(或阶数)和边数可分别用符号 n(G)和 m(G)表示

- 简单图：无环无重边的图称为简单图。（除此之外全部都是复合图）

注：点集与边集均为有限集合的图称为**有限图**。只有一个顶点而无边的图称为**平凡图**。边集为空的图称为**空图**

- 图的同构：设有两个图 G1=(V1, E1)和 G2=(V2, E2)，若在其顶点集合间存在双射，使得边之间存在如下关系：

  设 u1↔u2, v1↔v2， u1, v1∈V1，u2, v2∈V2；u1v1∈E1 当且仅当 u2v2∈E2，且 u1v1 与 u2v2 的重数相同。称 G1 与 G2 同构，记为 G1≅G2

- 图的度序列：一个图 G 的各个点的度 d1, d2,..., dn 构成的非负整数组(d1, d2,..., dn)

  称为 G 的度序列

注：非负整数组(d1, d2, ….，dn)是图的度序列的**充分必要**条件是：**∑di 为偶数**。度序列的判定问题为重点！

- 图的图序列：一个非负数组如果是某简单图的度序列，称它为可图序列，简称图序列

- 补图：对于一个简单图 G=(V, E)，令集合 E1={uv|u≠v, u, v∈V}，则图 H=(V，E1\E)称为

  G 的补图

- 自补图：若简单图 G 与其补图同构，则称 G 为自补图

注：自补图的性质

（1）若 n 阶图 G 是自补的(即 $G \cong \overline{G}$)，则 $n = 0, 1 \pmod 4$

- 联图：设 G1，G2 是两个不相交的图，作 G1+G2，并且将 G1 中每个顶点和 G2 中的每个顶点连

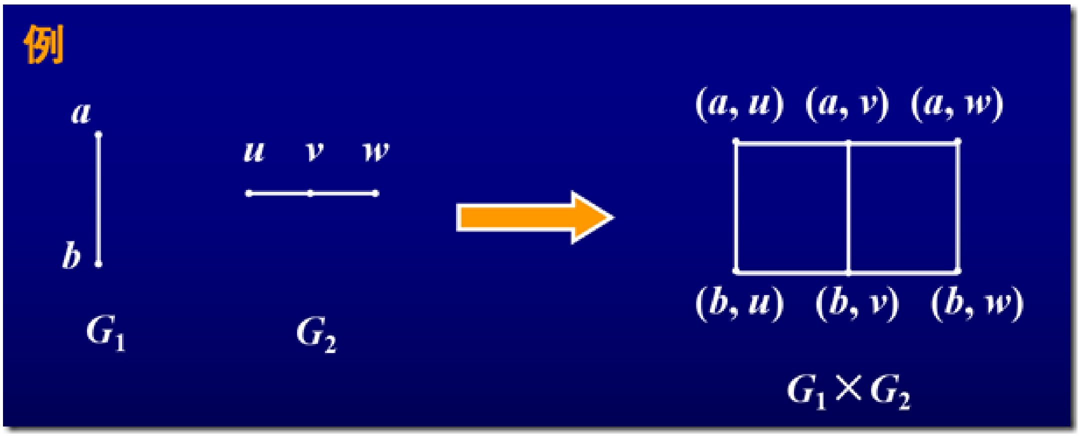
  接，这样得到的新图称为 G1 与 G2 的联图。记为 G1∨G2

- 积图：设 G1=(V1, E1)和 G2=(V2, E2)是两个图，对点集 V1×V2 中的任意两个点 u=(u1,

  u2)与 v=(v1, v2)，当(u1=v1 和 u2 adj v2)或(u2=v2 和 u1 adj v1)时，把 u 与 v 相连。如此

  得到的新图称为 G1 与 G2 的积图。记为记为 G1×G2

例如：



- 偶图：所谓具有二分类（X, Y）的偶图（或二部图）是指一个图，它的点集可以分解为两个非空子集 X 和 Y，使得每条边的一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中

注：偶图的判定定理：一个图是偶图当且当它不包含奇圈

2. 树、森林、生成树、最小生成树、根树、完全 m 元树

- **树**：不含圈的图称为无圈图，树是连通的无圈图

注：1、设 G 是具有 n 个点 m 条边的图，则下列命题等价：
（1）G 是树
（2）G 无环且任意两个不同点之间存在唯一的路
（3）G 连通，删去任一边便不连通
（4）G 连通，且 n = m + 1
（5）G 无圈，且 n = m + 1
（6）G 无圈，添加任何一条边可得唯一的圈
2、几个结论
（1）树和森林都是简单图
（2）树和森林都是偶图
（3）每棵非平凡树至少含有两片树叶
（4）树是含有边数最少的连通图，成为最小连通图
（5）树是含有边数最多的无圈图
（6）假定（n,m）图 G 是由 k 棵树组成的森林，则 m=n-k
（7）若 G 是树，且最大度大于等于 k，则 G 至少有 k 片叶子

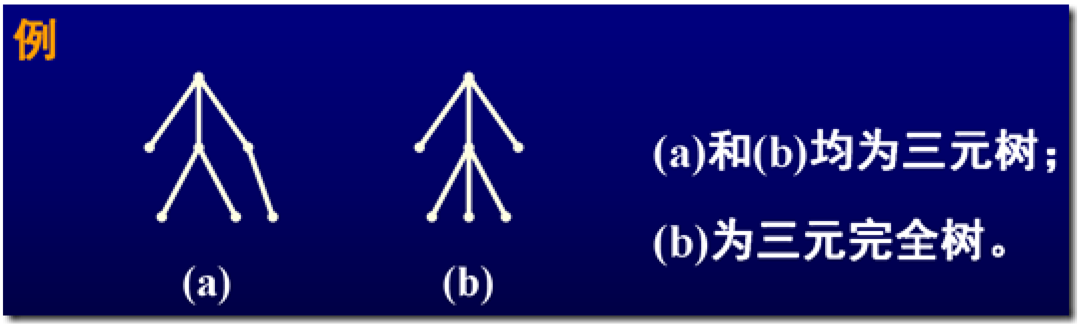
- **森林**：无圈图 G 为森林
- **最小生成树**：图 G 的一个生成子图 T 如果是树，称它为 G 的一棵生成树；若 T 为森林，称它为 G 的一个生成森林。 生成树的边称为树枝，G 中非生成树的边称为弦

注：最小生成树的求法：Kruskal 算法、破圈法、Prim 算法

- **根树**：一棵非平凡的有向树 T，如果恰有一个顶点的入度为 0，而其余所有顶点的入度为 1，这样的有向树称为根树。其中入度为 0 的点称为树根，出度为 0 的点称为树叶，入度为 1，出度大于 1 的点称为内点。又将内点和树根统称为分支点

- **m 元完全树：**对于根树 T，若每个分支点至多 m 个儿子，称该根树为 m 元根树；若每个分支点恰有 m 个儿子，称它为完全 m 元树

注：



3. **途径(闭途径)、迹(闭迹)、路(圈)、最短路、连通图、连通分支、点连通度与边连通度**

- 途径（闭途径）:给定图 G = (V, E)，w =v0e1v1e2...ekvk 是 G 中点边交替组成的序列，其中 vi∈V，ei∈E，若 w 满足 ei 的端点为 vi-1 与 vi，则称 w 为一条从顶点 v0 到顶点 vk 的途径（或通道或通路），简称(v0, vk)途径。顶点 v0 和 vk 分别称为 w 的起点和终点，其他点称为内部点，途径中的边数称为它的长度。起点和终点相同的途径就称为闭途径（环游）
- 迹（闭迹）:边不重复的途径称为迹,起点终点相同的迹为闭迹（回路）
- 路（圈）：点不重复的迹称为路，起点终点相同的路成为圈
- 最短路：连接 u、v 的长度最短的路的长度，也称 u 与 v 的距离，记作 d（u，v）
- 连通图：如果图 G 中任意两个点都是连通的，则 G 为连通图
- 连通分支：在非连通图 G 中，每一个极大的连通部分为 G 的连通分支，G 的连通分支的个数，称为 G 的分支数，记为 ω(G)。
- 点连通度：对 n 阶非平凡连通图 G，若 G 存在顶点割，则称 G 的最小顶点割中的点数为 G 的连通度；否则称 n-1 为其连通度。G 的连通度符号表示为κ(G)，简记为κ；非连通图或平凡图的连通度定义为 0。
- 边连通度：设 G 为连通图，称使 G-E ′不连通的 G 的边子集 E ′为 G 的边割，含有 k 条边的边割称为 k 边割。边数最少的边割称为最小边割

注：1、几个结论

（1）若图中两个不同点 u 与 v 间存在途径，则 u 与 v 间必存在路；若过点 u 存在闭迹，则过点 u 必存在圈。

（2）若过点 u 存在闭途径，则过点 u 不一定存在圈。

（3）在 n(n≥2)阶连通图中，至少有 n-1 条边；如果边数大于 n-1，至少有个圈

（4）若一个图 G 中的最小度大于等于 2，则 G 中必然有圈

（5）若图 G 是不连通的，则其补图一定是连通图

（6）设图 G 为 n 阶图，若 G 中任意两个不相邻顶点 u 与 v 满足 d(u)+d(v)≥n-1，则 G 是连通图且 d(G)≤2

（7）若 G 是非平凡连通图，则 v 是 G 的割点当且仅当{v}是 G 的 1 顶点割

（8）完全图没有顶点割，实际上也只有以完全图为生成子图的图没有顶点割

（9）κ(Kn)=n-1；κ(Cn)=2，其中 Cn 为 n 圈，n≥3

（10）非平凡连通图均是 1 连通的；图 G 是 2 连通的当且仅当 G 连通、无割点且至少含有 3 个点；K2 连通、无割点、但连通度为 1

（11）非连通图或平凡图的边连通度定义为 0

（12）λ(Kn)=n-1；λ(Cn)=2，其中 Cn 为 n 圈，n≥2

（13）非平凡连通图均是 1 边连通的；图 G 是 2 边连通的当且仅当 G 连通、无割边且至少含有两个点

（14）对任意的图 G，有 κ(G)≤λ(G)≤δ(G)

（15）设 G 是具有 m 条边的 n 阶连通图，则 $\kappa(G)\le\left\lfloor 2m/n \right\rfloor$。

（16）设 G 是 n 阶简单图，若 δ(G)大于等于(n/2)向下取整，则 G 必连通

（17）设 G 是 n 阶简单图，对正整数 k<n，若 $\delta(G)\ge\dfrac{n+k-2}{2}$，，G 是 k 连通的

（18）设 G 是 n 阶简单图，若 δ(G)≥（n/2）向下取整，则 λ(G)=δ(G)

4. 欧拉图、欧拉环游、欧拉迹、哈密尔顿圈、哈密尔顿图、哈密尔顿路、中国邮递员问题、最优 H 圈

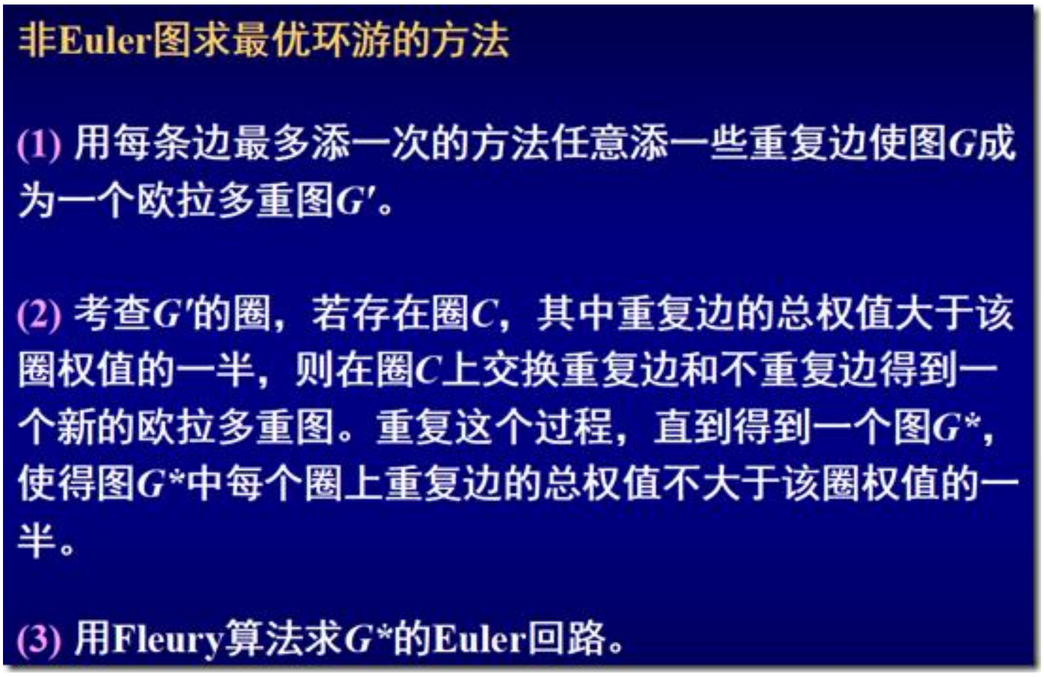
- 欧拉图：对于连通图 G，如果 G 中存在经过每条边的闭迹，则称 G 为欧拉图，简称 G 为 E 图
- 欧拉环游：欧拉闭迹又称为欧拉环游，或欧拉回路
- 欧拉迹：对于连通图 G，如果 G 中存在经过每条边的迹，则称该迹为 G 的一条欧拉迹
- 哈密尔顿图：如果经过图 G 的每个顶点恰好一次后能够回到出发点，即存在 H 圈的图称为哈密尔顿图，简称 H 图
- 哈密尔顿圈：经过图中每个点仅一次的圈是哈密尔顿圈
- 哈密尔顿路：图 G 的经过每个顶点的路称为哈密尔顿路
- 中国邮递员问题：图论模型为在一个连通的具有非负权的赋权图 G 中找一条包含每条边（允许重复）且边权之和最小的闭途径，称之为最优环游。

注：

（1） 若图 G 是一个欧拉图，则找出 G 的欧拉回路即可。

（2）对一般图，其解法为：添加重复边以使 G 成为欧拉图 G*，并使添加的重复边的边权之和为最小，再求 G*的欧拉回路。

（3）



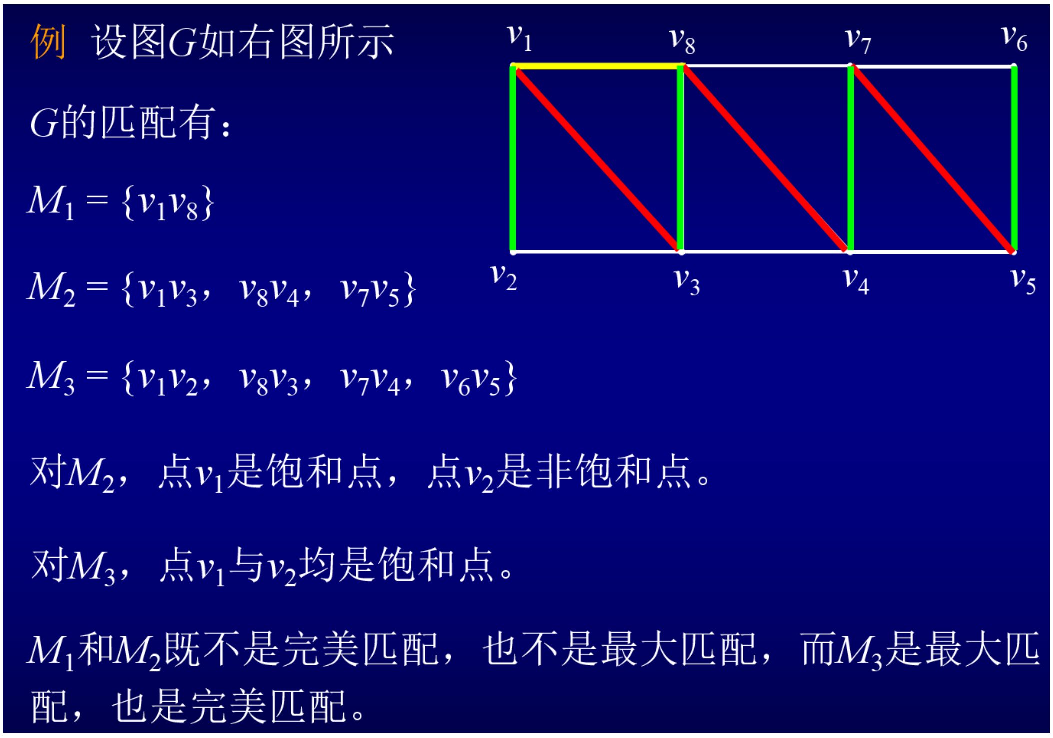
- 最优 H 圈（旅行售货员问题）：图论模型：在赋权完全图 G 中求具有最小权的哈密尔顿圈，这个圈称为最优圈。采用边交换技术求解最优 H 圈，详情见 PPT

5. 匹配、最大匹配、完美匹配、最优匹配、因子分解

- 匹配：如果 M 是图 G 的边子集(不含环)，且 M 中的任意两条边没有共同顶点，则称 M 是 G 的一个匹配或边独立集
- 最大匹配：如果 M 是图 G 的包含边数最多的匹配，称 M 是 G 的一个最大匹配
- 完美匹配：若最大匹配饱和了 G 的所有顶点，称它为 G 的一个完美匹配
- 最优匹配：设 G=(X, Y)是边赋权完全偶图，G 中的一个权值最大的完美匹配称为 G 的最优匹配
- 因子分解：所谓一个图 G 的因子分解，是指把图 G 分解为若干个边不重的因子之并。k-因子分解：每个因子均为 k-因子的因子分解，此时称 G 本身是 k-可因子化的

注：1、匹配、饱和点与非饱和点：设 M 是图 G 的边子集，若任意的 e∈M，e 都不是环，且属于 M 的边互不相邻，则称 M 为 G 的一个匹配。设 M 为 G 的一个匹配，对 v∈V(G)，若 v 是 M 中某边的一个端点，则称 v 为 M 饱和点，否则称为 M 非饱和点

2、



3、完美匹配必是最大匹配，而最大匹配不一定是完美匹配；最大匹配必存在，但完美匹配不一定存在；G 存在完美匹配的一个必要条件是 G 的点数必然为偶数

4、交错路与可扩路：设 M 为图 G 的一个匹配，G 的 M 交错路是指 G 中由 M 中的边与非 M 中的边交替组成的路。 M 可扩路是指其起点与终点均为 M 非饱和点的 M 交错路

5、K_{2n}和$K_{n,n}$的完美匹配的个数分别为：（2n-1）!!、n!

6、覆盖：图 G 的一个覆盖是指 V(G)的一个子集 K，使得 G 的每条边都至少有一个端点在 K 中。G 中点数最少的覆盖称为 G 的最小覆盖

7、设 K 是 G 的覆盖，M 是 G 的匹配，由于 M 中的边互不相邻，若要覆盖中 M 中的边，至少需要|M|个顶点，所以|M| ≤ |K|。特别地，若 M*是最大匹配，且$\tilde{K}$是最小覆盖，则$|M^*|\le|\tilde{K}|$。

8、设 M 是匹配，K 是覆盖，若|M| = |K|，则 M 是最大匹配，且 K 是最小覆盖

9、在偶图中，最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数

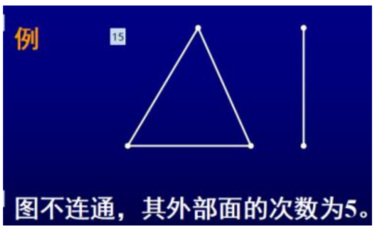
10、因子：图 G 的一个因子是指至少包含 G 的一条边的生成子图，即非空的生成子图就是一个因子(G 的生成子图是指满足 V(H) =V(G)的子图 H)

11、k-因子指 k 正则的因子

6.平面图、极大平面图、极大外平面图、平面图的对偶图

- 平面图：如果能把图 G 画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，称 G 可以嵌入平面，或称 G 是可平面图。可平面图 G 的边不交叉的一种画法，称为 G 的一种平面嵌入，G 的平面嵌入表示的图称为平面图
- 极大平面图：设 G 是简单可平面图，如果 G 是 K_i ($1\le i\le 4$)，或者在 G 的任意非邻接顶点间添加一条边后，得到的图均是非可平面图，则称 G 是极大可平面图。极大可平面图的平面嵌入称为极大平面图
- 极大外平面图：若一个可平面图 G 存在一种平面嵌入，使得其所有顶点均在某个面的边界上，称该图为外可平面图。外可平面图的一种外平面嵌入，称为外平面图
- 平面图的对偶图：给定平面图 G，G 的对偶图 G*如下构造：1) 在 G 的每个面 fi 内取一个点 vi*作为 G*的一个顶点；2) 对 G 的一条边 e，若 e 是面 fi 与 fj 的公共边，则连接 vi*与 vj*，且连线穿过边 e；若 e 是面 fi 中的割边，则以 vi 为顶点作环，且让它与 e 相交

注：1、设 f 是 G 的一个面，构成 f 的边界的边数(割边计算 2 次)称为面 f 的次数，记为 deg(f)

2、

3、设 G 是具有 m 条边的平面图，则 $\sum_{f\in\Phi}\deg(f)=2m.$

4、设 G 是具有 n 个点，m 条边，ϕ 个面的连通平面图，则有 $n-m+\phi=2$

5、设 G 是具有 n 个点，m 条边，ϕ 个面，k 个连通分支的平面图，则

$$n-m+\varphi=k+1.$$

6、设 G 是具有 n 个点，m 条边，ϕ 个面的连通平面图，如果对 G 的每个面 f，有 $\deg(f)\geqslant l\geqslant 3$，则 $m\leq\frac{l}{l-2}(n-2).$（注意：G 是平面图的必要条件，不是充分条件）

7、设 G 是具有 n 个点，m 条边的简单平面图且 $n\geqslant 3$，则 $m\leq 3n-6.$

8、若 G 是简单平面图，则 $\delta\leqslant 5$

9、一个连通平面图 G 是 2 连通的当且仅当 G 的每个面的边界是圈

10、一个图可嵌入平面当且仅当它可嵌入球面

11、设 G 是极大平面图，则 G 必连通；若 G 的阶数至少等于 3，则 G 无割边

12、设 G 是至少有 3 个顶点的平面图，则 G 是极大平面图的充分必要条件为 G 中各面的次数均为 3 且为简单图（**极大平面图的三角形特征，即每个面的边界为三角形**）

13、设 G 是一个有 n 个点，m 条边，ϕ 个面的极大平面图，且 $n\geqslant 3$，则(1) $m=3n-6$ (2) $\phi=2n-4$

14、如果在不可平面图 G 中任意删去一条边所得的图为可平面图，则称 G 为极小不可平面图。例如 K5 和 K3,3

15、设 G 是一个有 n ($n\geqslant 3$)个点，且所有点均在外部面上的外平面图，则 G 是极大外平面图当且仅当其外部面的边界是圈，内部面是三角形

16、设 G 是一个阶数为 n ($n\geqslant 4$)且所有点均在外部面上的极大外平面图，则 G 中存在两个度数均为 2 且不相邻的点

17、设 G 是一个有 n ($n\geqslant 3$)个点，且所有点均在外部面上的极大外平面图，则 G 有 $n-2$ 个内部面

18、设 G 是一个具有 n ($n\geqslant 4$)个点，m 条边的简单连通外平面图。若 G 不含三角形，则 $m\leqslant(3n-4)/2$

19、每个至少有 7 个顶点的外可平面图的补图不是外可平面图，且 7 是这个数目的最小者

20、图 G 是可平面的当且仅当它不含与 K5 或 K3,3 同胚的子图

7.边色数、点色数、色多项式

- 边色数：设 G 是图，对 G 进行正常边着色需要的最少颜色数，称为 G 的边色数，记为χ'(G)
- 点色数：对图 G 正常顶点着色需要的最少颜色数，称为图 G 的点色数，用χ(G)表示
- 色多项式：对图进行正常顶点着色，其方式数 Pk(G)是 k 的多项式，称为图 G 的色多项式

注：

1、边着色/k 边可着色：设 G 是图，对 G 的边进行着色，若相邻边着不同颜色，则称对 G 进行正常边着色； 如果能用 k 种颜色对图 G 进行正常边着色，称 G 是 k 边可着色的

2、在任何正常边着色中，与任一顶点关联的各边必须着不同色，由此推知：对无环图 $\chi' \geq \Delta.$

3、Km,n 的一个正常边着色为 χ′(Km, n)=Δ

4、设 G 是非空的简单图。若 G 中恰有一个度为Δ(G)的点，或 G 中恰有两个度为Δ(G)的点并且这两个点相邻，则χ′(G)=Δ(G)

5、设图 G=(V, E)是 n 阶简单图，若 n=2k+1 且边数 m>kΔ，则χ′=Δ+1

6、设 G 是奇阶Δ正则简单图。若Δ>0，则 χ′=Δ+1

7、对任意的无环图 G，均有χ ≤Δ+1

8、设 G 是简单连通图。假定 G 既不是完全图又不是奇圈，则χ ≤ Δ

9、设 G 是非空简单图，若 G 中度数最大的点互不相邻，则 $\chi \leq \Delta.$

10、对任意的简单平面图，均有χ≤5

11、若 k<χ(G)，则 Pk(G)=0; χ(G)=min{k | Pk(G)≥1}

12、若 G 为 n 阶空图，则 Pk(G)=k^n

13、$P_k(K_n)=k(k-1)\ldots(k-n+1)$

14、若图 G 含有 n 个孤立点，则 Pk(G)=k^n*Pk(G′)，其中 G′ 是 G 去掉 n 个孤立点后所得的图

15、若图 G 有环或有重边，则去掉环并将重边用单边代替之 后所得图的 k 着色数目与原图一样

16、设 e=uv 是图 G 的一条边，并且 d(u)=1，则 Pk(G)=(k-1)Pk(G-u)

17、对 n 阶简单图 G，Pk (G)是 k 的整系数 n 次多项式，首项为 k^n，常数项为零，并且各项系数的符号正负相间

8.强连通图、单向连通图、弱连通图

- 强连通图：若 D 的中任意两点是双向连通的，称 D 是强连通图
- 单向连通图：若 D 中任意两点是单向连通的，称 D 是单向连通图
- 弱连通图：若 D 的基础图是连通的，称 D 是弱连通图

注：1、有向图 D=(V, E)是强连通的当且仅当 D 中存在含有所有顶点的有向闭途径

2、设 D'是有向图 D=(V, E)的一个子图。如果 D'是强连通的(单向连通的、弱连通的)，且 D 中不存在真包含 D'的子图是强连通的(单向连通的、弱连通的)，则称 D'是 D 的一个强连通分支(单向连通分支、弱连通分支)

3、有向图 D=(V, E)的每个点位于且仅位于 D 的一个强(弱)连通分支中

4、若 G 是 2 边连通的，则 G 存在强连通定向图

5、若有向图 D 的基础图是树，则称 D 为有向树

6、恰有一个顶点的入度为 0，其余顶点的入度均为 1 的非平凡有向树称为根树。根树中入度为 0 的顶点称为树根，出度为 0 的顶点称为树叶，其余点称为内点，内点和根统称为分支点。

7、根树 T 中，若每个分支点至多有 m 个儿子，则称 T 为 m 元树；若每个分支点恰有 m 个儿子，则称 T 为 m 元完全树

8、设 m 元完全树 T 的树叶数为 t，分支点数为 i，则(m-1)i=t-1

二、重要结论

1、握手定理及其推论

定理 1　图 G 中所有顶点的度数和等于边数的 2 倍。

推论 1　在任何图中，奇点个数为偶数。

推论 2　正则图的阶数和度数不同时为奇数。

2、Turan 定理

定理 2 若 n 阶简单图 G 不包含 K_{l+1}，则 G 度弱于某个完全 l 部图 H，且若 G 具有与 H 相同的度序列，则 G≅H

3、树的性质

定理 3 设 T 是(n, m)树，则 m=n-1

4、最小生成树算法

Kruskal 算法，Prim 算法，破圈法。

5、偶图判定定理

定理 4 图 G 是偶图当且仅当 G 中没有奇圈

6、Menger 定理

定理 5 (1) 设 x 与 y 是图 G 中的两个不相邻点，则 G 中分离点 x 与 y 的最小点数等于独立的(x, y)路的最大数目；(2) 设 x 与 y 是图 G 中的两个不相邻点，则 G 中分离点 x 与 y 的最小边数等于 G 中边不重的(x, y)路的最大数目。

7、欧拉图、欧拉迹的判定

定理 6 下列命题对于非平凡连通图 G 是等价的：

(1) G 是欧拉图；

(2) G 的顶点度数为偶数；

(3) G 的边集合能划分为圈。

推论 连通非欧拉图 G 存在欧拉迹当且仅当 G 中只有两个顶点度数为奇数。

8、H 图的判定

定理 7 (必要条件) 若 G 为 H 图，则对 V(G)的任一非空顶点子集 S，成立：ω(G - S) ≤|S|。

定理 8 (充分条件) 对于 n≥3 的简单图 G，如果δ(G) ≥n/2，则 G 是 H 图。

定理 9 (充分条件) 对于 n≥3 的简单图 G，如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 与 v，有 d(u)+d(v) ≥ n，则 G 是 H 图。

定理 10 (闭包定理) 图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图。

定理 11 (度序列判定法) 设简单图 G 的度序列是(d1, d2,...,dn)，其中 d1≤d2≤...≤dn，并且 n≥3。若对任意的 m<n/2，或者 $d_m>m$，或者 $d_{n-m}\geq n-m$，则 G 是 H 图。

定理 12　设 G 是 n 阶简单图。若 n≥3 且 $|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1,$ 则 G 是 H 图；并且具有 n 个顶点 $\binom{n-1}{2}+1$ 条边的非 H 图只有 C1,n 以及 C2,5

9、偶图匹配与因子分解

定理 13　设 G=(X, Y)是偶图，则 G 存在饱和 X 的每个顶点的匹配的充要条件是：

对 $\forall S \subseteq X$，有 $|N(S)| \geq |S|$。

推论　若 G 是 k (k>0)正则偶图，则 G 存在完美匹配。

定理 14　在偶图中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数。

定理 15　K2n 可一因子分解。

定理 16　具有 H 圈的三正则图可一因子分解。

定理 17　K2n+1 可 2 因子分解。

定理 18　K2n 可分解为一个 1 因子和 n-1 个 2 因子之和。

定理 19　每个没有割边的 3 正则图是一个 1 因子和 1 个 2 因子之和。

10、平面图及其对偶图

1)平面图的次数公式

定理 20　设 G 是平面图，则次数之和等于 2 倍的边数。

2)平面图的欧拉公式

定理 21 (欧拉公式) 设 G=(n, m)是连通平面图， φ是 G 的面数，则 n-m+φ=2。

3)几个重要推论

推论 1　设 G 是具有 n 个点 m 条边φ个面的连通平面图，如果对 G 的每个面 f，有 deg (f)≥l ≥3，则：$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$。

推论 2　设 G=(n,m)是简单平面图，则 m≤3n-6。

推论 3　设 G 是简单平面图，则δ(G)≤5。

注：推论 2 的证明

推论 设G是具有n个点，m条边的简单平面图且$n \geq 3$，则

$$m \leq 3n-6.$$

证明 情形1：G连通。

因为G是简单图，所以每个面的次数至少为3。于是，

$$m \leq \frac{3}{3-2}(n-2) = 3n-6.$$

情形2：G不连通。

若G存在至少有三个点的连通分支，因为对G的这些连通分支，结论成立。将各不等式相加也得类似不等式，设为$m_1 \leq 3n_1-6$。

再设G的所有少于3个点的连通分支的总边数为m_2，总点数为n_2。

此时有 $m_2 \leq n_2 \leq 3n_2$，于是

$$m_1+m_2 \leq 3(n_1+n_2)-6。$$

从而有 $m \leq 3n-6$。

若G没有多于两个点的连通分支。此时$m \leq n$。

因$n \geq 3$时，$n \leq 3n-6$，所以有$m \leq 3n-6$。

4)对偶图的性质

定理 22　平面图 G 的对偶图必然连通。

5)极大平面图的性质

定理 23　设 G 是至少有 3 个顶点的平面图，则 G 是极大平面图，当且仅当 G 的每个面的次数是 3 且为简单图。

11、着色问题

1)边着色

定理 24　完全二部图的边色数等于顶点度数的最大值。

定理 25　二部图的边色数等于顶点度数的最大值。

定理 26 若 G 是简单图，则边色数要么为最大度，要么等于最大度+1。

定理 27　设 G 是简单图且Δ(G)>0。若 G 中只有一个最大度点或恰有两个相邻的最大度点，则边色数等于最大度。

定理 28　设 G 是简单图。若点数 n=2k+1 且边数 m>kΔ，则边色数等于最大度+1。

定理 29　设 G 是奇数阶Δ正则简单图，若Δ>0，则边色数等于最大度+1。

2)点着色

定理 30　对任意的图 G，$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

定理 31 若 G 是连通的简单图，并且它既不是奇圈，又不是完全图，则 $\chi(G) \leq \Delta(G)$。

3)色多项式

a)递推计数法

定理 32 设 G 为简单图，则对任意 e∈E(G)，有 $P_k(G)=P_k(G-e)-P_k(G \cdot e)$。

b)、理想子图计数方法

理想子图法：先求出G的补图的伴随多项式，再将多项式中的x^i换为$[k]_i$便能得到简单图G的色多项式$P_k(G)$。

12 根树问题

定理 32 在完全 m 元树 T 中，若树叶数为 t，分支点数为 i，则(m-1)i = t-1

补充内容

1、关于正则与完全图的一些理解：k 正则图，指的是每个点都有 k 度，n 阶 k 正则图就是 n 个顶点的度数都为 k，而完全图是最大的正则，因此完全图中每个顶点的度数为 n-1，为 n-1 正则图。

2、邻接矩阵的概念

定义 设 n 阶标定图 G = (V, E)，V = {v1, v2,…, vn}，则 G 的邻接矩阵是一个 n×n 矩阵 A(G) = [aij] (简记为 A)，其中若 vi 邻接 vj，则 aij =1；否则 aij =0

若 aij 取为连接 vi 与 vj 的边的数目，则称 A 为推广的邻接矩阵。

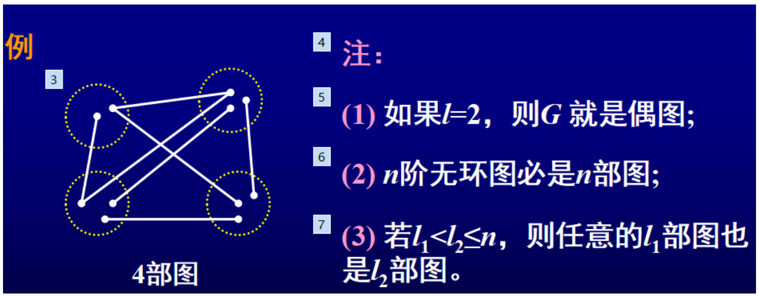
性质：邻接矩阵是一个对称方阵；简单标定图的邻接矩阵的各行（列）元素之和是该行（列）对应的点的度

定理 令 G 是一个有推广邻接矩阵 A 的 p 阶标定图，则 An 的 i 行 j 列元素 aij(n)等于由 vi 到 vj 的长度为 n 的通道的数目

推论 设 A 为简单图 G 的邻接矩阵，则(1) A^2的元素$a_{ii}^{(2)}$是 vi 的度数。A3 的元素$a_{ii}^{(3)}$是含 vi 的三角形的数目的两倍 (2) 若 G 是连通的，对于 i≠j，vi 与 vj 之间的距离是使 An 的 aij(n) ≠0 的最小整数 n

3、l 部图概念及特征

定义 若简单图 G 的点集 V 有一个划分：$V=\bigcup_{i=1}^{l}V_i,\ V_i\cap V_j=\Phi,\ i\neq j$且所有的 Vi 非空，Vi 内的点均不邻接，称 G 是一个 l 部图。



定义 如果在一个 l 部图 G 中，|Vi|=ni，任何两点 u∈Vi，v∈Vj，i ≠ j，i, j =1, 2,..., l 均邻接，则称 G 为完全 l 部图。记作 $G=K_{n_1,n_2,\ldots,n_l}$。

4、生成树：若图 G 的生成子图 T 是树，则称 T 为 G 的生成树；若 T 为森林，称它是 G 的生成森林。生成树的边称为树枝，G 中非生成树的边称为弦。

定理 每个连通图至少包含一棵生成树

计数：用τ(G) 表示 G 的生成树的个数，若e是图G的边，则 $\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)$。

一个定理：定理 $\tau(K_n)=n^{n-2}$

5、单调不增正整数序列(d1, d2,..., dn)是一棵非平凡树的度序列当且仅当∑di=2(n-1)

6、定理 n 阶完全偶图K_{n_1,n_2}的边数$m=n_1n_2$，且 $m\le\lfloor n^2/4\rfloor$。

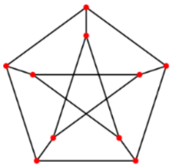
7、简单图一定存在度数相同的顶点

8、k 正则二部图（k 正则偶图）G 的相关结论：

（1）若 k≥2，则 G 无割边

（2）存在完美匹配

（3）可 1-因子化

9、彼得森图:  ，其相关结论有:

- 点连通度为 3，边连通度为 3
- 是一个 3 正则图
- 点色数为 3，边色数为 4
- 半径与直径均为 2
- 不是 H 图（删去任意顶点后为 H 图）
- 是不可平面图
- 存在完美匹配
- 虽然该图无割边，但也不可 1-因子分解（3 正则图有割边，不能 1-因子分解）
- 是一个 1-因子和一个 2-因子的并

10、欧拉图相关等价命题:

- 每个点的度为偶数
- 是连通图
- 边集可以划分为边不重的圈的并

11、欧拉迹相关结论:

- 连通图存在欧拉迹当且仅当 G 最多有两个奇度顶点
- 有向图中存在欧拉迹，当且仅当 D 连通且除了两个点外，每个点出度与入度相等。而这两个点中，一个点入度比出度大 1，另一个点出度比入度大 1

12、完全偶图：是指具有二分类(X, Y)的简单偶图，其中 X 的每个顶点与 Y 的每个顶点相连，若 |X|=m，|Y|=n，则这样的偶图记为 $K_{m,n}$

13、相关结论（从平时作业中的选择题提炼出来）:

- 有割边的图不一定有割点，比如 K2
- 有割点的图不一定有割边，比如 8 字形的图
- 割点至少属于图的两个块
- 割边不在图的任意一个圈之中
- 阶数至少是 3 的连通图中，图的割点也是子图的割点
- G 为 n 阶简单图，若 δ(G) ≥n/2，则 G 连通且 λ(G)=δ(G)
- 非平凡树不一定存在割点，但一定存在割边，比如 K2
- 完全图不一定没有割边，比如 K2

- 2 连通图一定没有割边
- 若图 G 是块，则块中不一定有圈，比如 K2；块中不一定无环，比如自环
- 非平凡树 T，最多包含一个完美匹配
- 非平凡树 T 是只有一个面（外平面）的平面图
- 非平凡树 T 的对偶图不一定是简单图，比如 K2 的对偶图为自环，自环不是简单图
- 无割边的三正则图一定存在完美匹配，有割边的三正则图不一定有完美匹配
- 有完美匹配的三正则图不一定没有割边
- 三正则哈密尔顿图存在完美匹配，可 1-因子分解
- 任意非平凡正则偶图包含完美匹配且能够 1-因子分解
- 只有一个面的连通平面图一定是树
- 存在一种方法，总可以把平面图中任意一个内部面转为外部面
- 无环图是 2 连通的平面图，一定不包含割点，同时不包含割边，一定不包含只属于一个面的边，边界均为圈
- 若（n,m）图是极大外平面图且 n 大于等于 3，则 m=2n-3
- 阶数至少为 3 的极大外平面图一定是 H 图

14、块的定义：没有割点的连通图称为块图，简称块。若图 G 的子图 B 是块，且 G 中没有真包含 B 的子图也是块，则称 B 是 G 的块

相关性质：

- 仅有一条边的块，要么是割边，要么是环
- 仅有一个点的块，不是孤立点就是自环
- 至少两个点的块无环
- 阶数至少为 3 的块无割边
- 阶数至少为 3 的块中的任意两点都位于同一个圈上
- 阶数至少为 3 的块中的任意两条边都在同一个圈上

15、欧拉图的相关结论：

- 一定是连通图
- 欧拉图不一定没有割点，比如 8 字形的图
- 欧拉图一定没有割边
- 非平凡的欧拉图中一定有圈
- 至少具有两个点的无环欧拉图一定是 2 边连通的

16、闭图：在 n 阶简单图 G 中，若对 d(u)+d(v)≥n 的任何一对点 u 和 v 都是相邻的，则称 G 是闭图

17、闭包：若一个与 G 有相同点集的闭图 $\hat{G}$，使 G$\subset\hat{G}$，且对异于$\hat{G}$的任何图 H，若有 G$\subset$H$\subset\hat{G}$，则 H 不是闭图，则称$\hat{G}$是 G 的闭包

18、H 图相关结论：（举反例想到长度为 5 的圈）

- 一定没有割边
- 不一定没有割点，比如 H 图+自环（也是 H 图，而自环让该点成为了割点）
- 一个简单图是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图
  - G 是 n≥3 的简单图，若 G 的闭包是完全图，则 G 是 H 图
  - 若 G 是阶数至少为 3 的简单图，其中任何两个不邻接的点 u 和 v 均有 d(u)+d(v)≥n，则 G 是 H 图
- 若 G 是阶数至少为 3 的简单图，若 G 中每个点的度 d(v)≥n/2，则 G 是 H 图
- 图 G 的闭包是 Kn，则 G 是 H 图
- G 为阶数至少为 3 的非 H 的简单图，G 度弱于某个 Cm,n 图（度极大的 H 图）
- H 图不一定是完全图，比如长度为 5 的圈
- G 为阶数至少为 3 的 H 简单图，若 n 为奇数，则 G 一定不是偶图

19、G 为 n 阶简单图，若任意两个顶点存在 d(u)+d(v)大于等于 n-1，则该图 G 存在 H 路

20、n 方体：超立方体 Qn 简称为 n 方体，(1) 1方体：$Q_1=K_2$。(2) n方体定义为：$Q_n=Q_1\times Q_{n-1}$。其构造方式为：n 方体有 2^n 个顶点，每个顶点可以用长度为 n 的二进制码来表示，两个顶点连线当且仅当代表两个顶点的二进制码只有一位坐标不同

其相关结论有：

- 超立方体Q_n是具有2^n个顶点，$n2^{n-1}$条边的n正则二部图
- 每个 n 方体都有完美匹配（n 大于等于 1）

21、因子分解相关结论

- 若 G 有一个 1-因子(其边集为完美匹配)，则显然 G 的阶数是偶数。所以，奇数阶图不能有 1-因子。
- 完全图K_{2n}是可以 1-因子化
- k 正则偶图(k>0)是 1-可因子化
- 具有 Hamilton 圈的 3 正则图是 1-可因子化的（注意：1-可因子分解的 3 正则图不一定有 Hamilton 圈）
- 若 3 正则图有割边，则不可 1-因子分解（注意：无割边的 3 正则图可能也没有 1-因子分解，比如彼得森图）
- K4 有唯一的 1-因子分解
- 一个图 2-可因子化，则每个 2-因子是边不重圈的并

- 2-可因子化的图的所有点的度一定是偶数，所以完全图K_{2n}不是 2-可因子化的

- 若一个 2-因子是连通的，则它是一个 H 圈
- 图K_{2n+1}是 n 个 H 圈的并
- 完全图K_{2n}是一个 1-因子和 n-1 个 H 圈的并
- 每一个没有割边的 3 正则图是一个 1-因子和一个 2-因子的并
- 若没有割边的 3 正则图中的 2-因子是一些偶圈，则该图也是 1-可因子化的
- 一个连通图是 2-可因子化的当且仅当它是偶数度正则图
- K_{2n}的不同 1-因子数目为(2n-1)!!

22、存在且只存在 5 种正多面体：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体

23、一个有 n 个顶点，m 条棱和φ个面的凸多面体的棱数与面数满足：n–m+φ=2。设每个面的次数为 l，每个点的度数为 r，则

序号	r	l	n	m	φ	相应的正多面体
1	3	3	4	6	4	正四面体
2	3	4	8	12	6	正六面体
3	3	5	20	30	12	正十二面体
4	4	3	6	12	8	正八面体
5	5	3	12	30	20	正二十面体

24、对偶图相关结论：

- 平面图 G 的对偶图 G*也是平面图，且 G*的点数 = G 的面数；G*的边数 = G 的边数；G*的面数 = G 的点数(G 连通)；d(vi*) = deg (fi)
- 设 G*是平面图 G 的对偶图，则 G*必连通
- 假定 G 是平面图，则(G*)* = G 当且仅当 G 是连通图
- 若 G1≌G2，在一般条件下，只存在非同构的对偶图 G1*与 G2*

25、2 度顶点的扩充与收缩：在图 G 的边上插入一个新的 2 度顶点，使一条边分成两条边，则称将图 G 在 2 度顶点内扩充；去掉图 G 的一个 2 度顶点，使这个 2 度顶点关联的两条边合成一条边，则称将 G 在 2 度顶点内收缩

同胚：两个图 G1 和 G2，如果 G1≌G2，或者通过反复在 2 度顶点内扩充和收缩它们能变成同构的，则称 G1 和 G2 是同胚的或 G1 和 G2 在 2 度顶点内是同构的

26、初等收缩/收缩边 uv 运算：设 uv 是简单图 G 的一条边。去掉该边，重合其端点，再删去由此产生的环和重边。这一过程称为图 G 的初等收缩或收缩边 uv 运算，并记所得之图为 G/uv。一个图 G 可收缩到 H，是指 H 可从 G 通过一系列初等收缩而得到

27、基础简单图：给定图 G，去掉 G 中的环(若有的话)，将 G 中的重边(若有的话)用单边代替，称这样所得的图为 G 的基础简单图

与可平面性的关系：（1）图 G 是可平面图当且仅当其基础简单图是可平面图（2）图 G 是可平面图当且仅当它的每个块是可平面图

28、瓦格纳定理（平面图的判定定理）：简单图 G 是可平面图当且仅当它不含可收缩到 K5 或 K3,3 的子图（还是必要条件，不是充要条件）

29、临界图：若对图 G 的任意真子图 H 都有$\chi(H)<\chi(G)$，则称 G 是临界图；色数为 k 的临界图称为 k 临界图

相关性质：k 色图均有 k 临界子图；每个临界图均为简单连通图；若 G 是 k 临界图，则$\delta\geq k-1$；临界图没有割点

30、每个 k 色图至少有 k 个度不小于 k-1 的顶点

31、唯一可着色图：设简单标号图 G 的色数是 k，如果在任意的 k 正常点着色方案下，导出的顶点集合划分唯一，称 G 是唯一 k 可着色图，简称唯一可着色图

相关结论：

- $\delta\geq k-1$；
- 在 G 的任意一种 k 着色中，G 的任意两个色组的并导出的子图是连通的；
- 每个唯一 k ($k\geq 2$)可着色图是($k-1$)连通的；
- 设 G 是唯一 n($n\geq 2$)可着色图，π 是任意一种 n 着色方案，则由 π 的任意 k 个色组导出的子图是($k-1$)连通的
- 唯一 1 可着色图是空图
- 唯一 2 可着色图是连通的偶图
- 每个唯一 4 可着色可平面图都是极大可平面图

32、团：图 G 的一个团是指 G 的顶点子集 S，使得导出子图 G[S]是完全图。G 的 k 团是指 G 的含 k 个点的团；G 的最大团的点数称为 G 的团数记为 cl(G)，即 cl(G)=max{|S| | S 是 G 的团}。图 G 的色数与团数的关系为 $\chi(G)\geq cl(G).$

33、完美图：设 G 是一个图，若对 G 的每个点导出子图 H，均有 $\chi(H)=cl(H)$，则称 G 为完美图。图 G 是完美图当且仅当 G 的补图是完美图

相关结论：

- 完全图、偶图均为完美图，而不含三角形但含奇圈的图不是完美图

- 偶图的补图是完美图
- 长度至少为 5 的奇圈及其补图均不是完美图

34、理想子图：设 H 是图 G 的生成子图。若 H 的每个分支均为完全图，则称 H 是 G 的一个理想子图。用 Nr (G)表示 G 的具有 r 个分支的理想子图的个数。设 G 是具有 n 个点 m 条边的图，则有(1) Nn(G)=1;

(2) Nn-1(G)=m;(3) 若 k<ω(G)，则 Nk(G)=0

35、独立数:一个图的点独立集，简称独立集，是指图中一些互不相邻的点构成的点子集。图 G 中含点数最多的独立集称为 G 的最大独立集；最大独立集所含的顶点数称为 G 的点独立数，简称独立数，记为α(G)，简记为α

36、图 G 的最大独立集中包含的顶点个数与 G 的最小覆盖中包含的顶点个数之和等于 G 的阶数

37、覆盖数：G 的一个包含顶点数最少的覆盖称为 G 的最小覆盖。G 的最小覆盖包含的顶点数，称为 G 的点覆盖数，简称覆盖数，记为β(G)

38、拉姆齐数：设 m 和 n 是两个正整数，令 R(m, n)是最小的正整数 l 使得任意的 l 阶图要么包含 m 个顶点的团，要么包含 n 个顶点的独立集。R(m, n)称为(m, n)Ramsey 数。R(2, n)=n，R(3, 3)=6，

R(m, n)=R(n, m)，R(1, n)=R(n, 1)=1

39、高为 h 的完全二元树至少有 h+1 片树叶

40、最优树：设 T 是一棵有 t 片树叶的二元树，若对 T 的所有 t 片树叶赋以权值(实数) w1, w2,..., wt，则称 T 为带权二元树；若带有权 wi 的树叶的层数为 l(wi)，则称$W(T)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(w_i)$为 T 的权，给定实数 w1, w2,..., wt，在所有树叶带有权 w1, w2,..., wt 的二元树中，W(T)最小的二元树称为最优树。

41、频序列：设 n 阶图 G 的各点的度取 s 个不同的非负整数 d1, d2,..., ds。又设度为 di 的点有 bi 个(∑bi=n)，则称 (b1, b2,..., bs) 为 G 的频序列

相关结论：

- 一个 n 阶图 G 和它的补图有相同的频序列
- 一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同

42、完全图 Kn 相关结论

- 点色数为 n

- 边色数为：n（n 为奇数时）；n-1（n 为偶数时）
- 点连通度为 n-1
- 边连通度为 n-1
- 是临界图
- 是唯一可着色图

43、关联矩阵：无环图 G 的关联矩阵 B(G) = [bij] (简记为 B)是一个 n×m 矩阵，当点 vi 与边 ej 关联时 bij =1，否则 bij =0。其性质为：关联矩阵的每列和为 2；其行和为对应顶点的度数。

44、有向图的邻接矩阵、关联矩阵：设 D=(V, E)是一个标定有向图，其中设 V={v1, v2,..., vn}, E={e1, e2,..., em}：

(1) 称矩阵 A(D)=(ai j)n×n 为 D 的邻接矩阵，其中 ai j 是以 vi 作为始点，vj 作为终点的边的数目，1≤ i ≤n, 1≤ j ≤n

(2) 若 D 无环，称矩阵 M(D)=(mi j)n×m 为 D 的关联矩阵，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{ 是边 }e_j\text{ 的始点,}\\ -1, & v_i\text{ 是边 }e_j\text{ 的终点,}\quad 1\le i\le n, 1\le j\le m,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

。由定义可知，邻接矩阵 A(D)的所有元素之和等于边数。关联矩阵中列和等于 0；一行中 1 的和等于出度之和，-1 的和等于入度之和；其全部元素之和等于 0。

45、有向图相关结论

- 有向图 D 的任意一个顶点只能处于 D 的某一个强连通分支中
- 有向图 D 中，顶点 v 可能处于 D 的不同的单向连通分支中
- 有向连通图中顶点间的关系是等价关系
- 强连通图的所有顶点必然处于某一有向闭途径之中

46、假定 G*是在图 G 中添加一些重复边得到的欧拉图，则 G*具有最小权值的充要条件是（1）G 的每一条边最多被添加一次（2）对于 G*的每个圈来说，新添加的边的总权值不超过该圈总权值的一半

47、5 阶度极大非哈密尔顿图族有 C_2^5, ___ C_1^5

48、设树 T 中度数为 i 的顶点的个数为 ni (1≤ i ≤k) ，则

$$n_1=2+n_3+2n_4+\cdots+(k-2)n_k\text{。}$$

49、图兰定理： 若 G 是 n 阶简单图，并且不包含 Kl+1，则边数 m(G) ≤ m(Tl, n)。 此外，仅当 G ≅ Tl, n 时，m(G) = m(Tl, n)。