电路理论基础

时间：星期一上午8:00至9:40，星期五上午8:00至9:40

地点：南校园1506

任课教师：栗涛（电子与信息工程学院）

考试方式：闭卷

成绩评定：平时分40%，期末考试60%。

学分：4

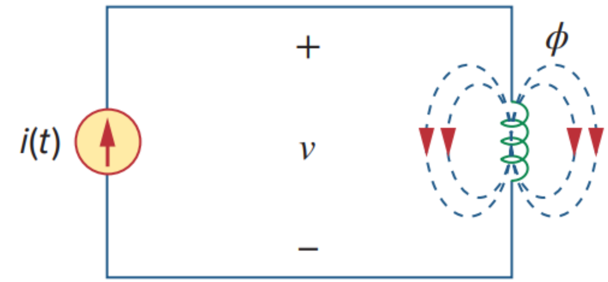
磁耦合电路

- 互感
- 耦合电路中的能量
- 线性变压器
- 理想变压器
- 理想自耦变压器

互感

自感

- 磁通量
  - 有一个 N 匝线圈构成的电感。
  - 当电流 i 通过线圈时，
  - 在周围产生磁通量 ϕ 。



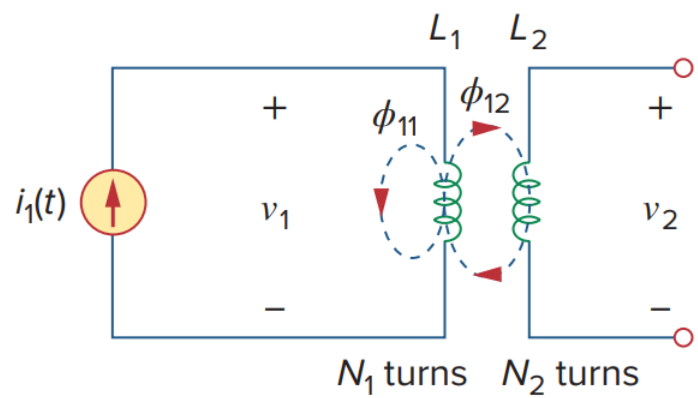
- 感应电压
  - 按照法拉第定律，线圈的感应电压正比于线圈的匝数N及磁通量关于时间的变化率。

$$v = N\frac{d\phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = N \times \frac{d\phi}{di} \times \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad L = N \times \frac{d\phi}{di}$$

- 电感器的电感值由磁通量与电流的关系决定。
  - 上面式中的 L 通常称为自感值。

磁耦合

- 互感（Mutual Inductance）现象
  - 当两个线圈距离较近时，
  - 一个线圈的电流引起的磁通量，
  - 会对另一个线圈产生影响，
  - 在另一个线圈产生感应电压。



- 互感原理分析
  - 线圈 1 的电流 i_1 产生的磁通量有两部分
    - 其中 ϕ_1 作用在线圈1自己身上
    - 其中 ϕ_2 作用在线圈2上

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

  - 磁通量 ϕ_2 的存在建立了线圈 1 影响线圈 2 的渠道
    - 以磁耦合的方式，形成了互感。
    - 当电流 i_1 变化时，会引起一定的 v_2。

$$\frac{di_1}{dt} \rightarrow \frac{d\phi_{12}}{dt} \rightarrow v_2$$

线圈间的感应电压

- 线圈 1 电流在线圈 1 上感应的电压

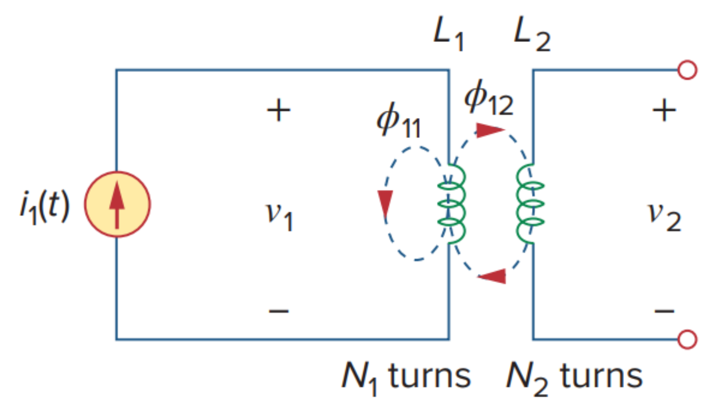
$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \Rightarrow v_1 = N_1 \times \frac{d\phi_1}{di_1} \times \frac{di_1}{dt} \Rightarrow v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

- 线圈 1 电流在线圈 2 上感应的电压

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \Rightarrow v_2 = N_2 \times \frac{d\phi_{12}}{di_1} \times \frac{di_1}{dt} \Rightarrow v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

- 两种电感
  - 参数 L_1 称为线圈 1 的自感
  - 参数 M_{21} 称为线圈 2 的
    - 相对线圈 1 的互感

$$L_1 = N_1 \times \frac{d\phi_1}{di_1} \qquad M_{21} = N_2 \times \frac{d\phi_{12}}{di_1}$$



线圈间的感应电压

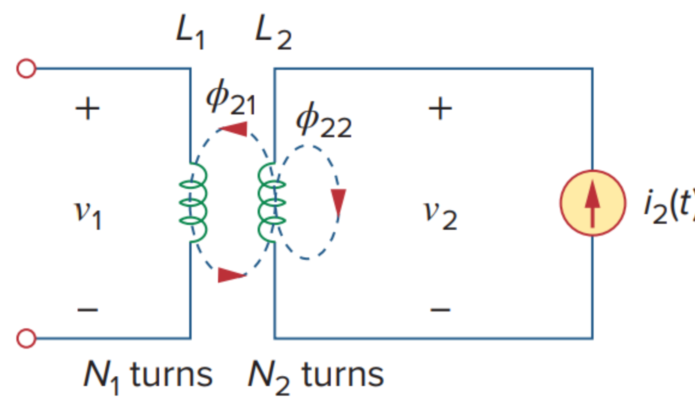
- 线圈 2 电流在线圈 2 上感应的电压

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} \Rightarrow v_2 = N_2 \times \frac{d\phi_2}{di_2} \times \frac{di_2}{dt} \Rightarrow v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

- 线圈 2 电流在线圈 1 上感应的电压

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} \Rightarrow v_1 = N_1 \times \frac{d\phi_{21}}{di_2} \times \frac{di_2}{dt} \Rightarrow v_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

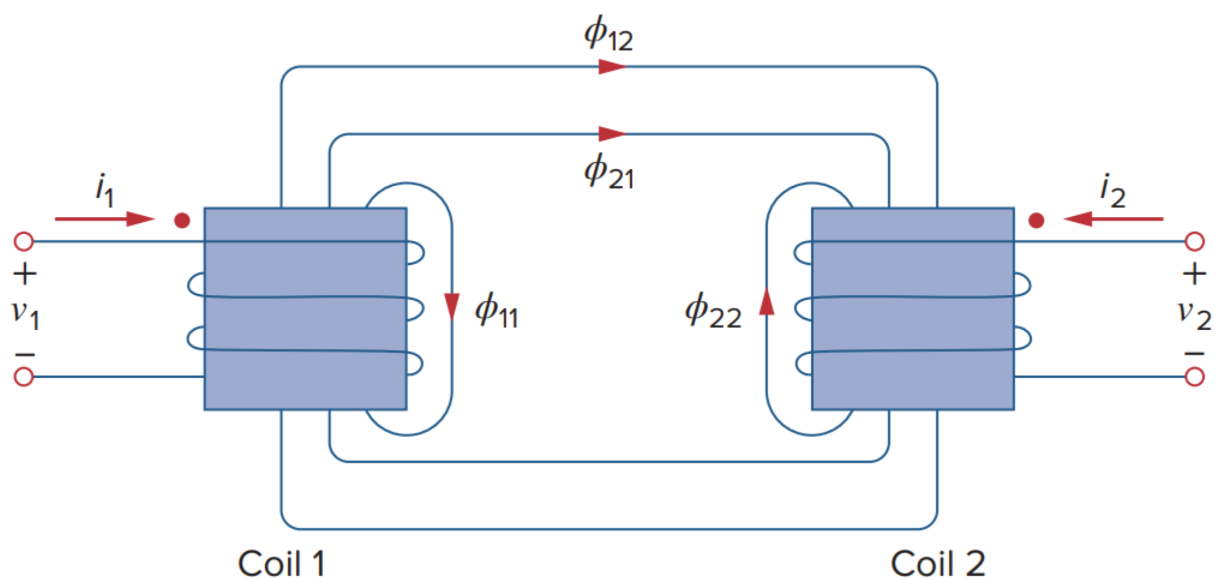
- 两种电感
  - 参数 L_2 称为线圈 2 的自感
  - 参数 M_{12} 称为线圈 1 的
    - 相对线圈 2 的互感



$$L_2 = N_2 \times \frac{d\phi_2}{di_2} \qquad M_{12} = N_1 \times \frac{d\phi_{21}}{di_2}$$

互感

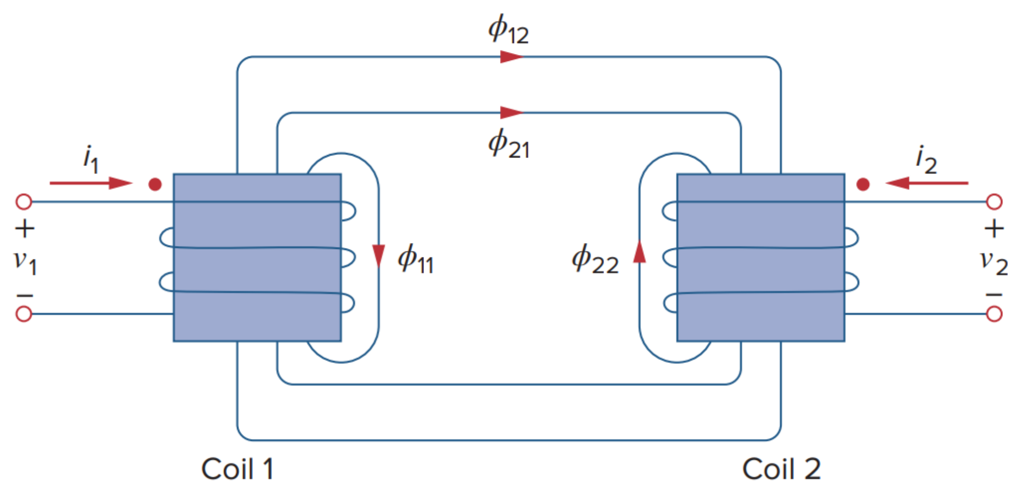
- 互感时指一个电感器在与其相邻的电感器两端感应出电压的能力，单位为亨利（H）。
- 互感总是正的，但互感电压的正负极性还与电流和电压的参考方向有关。



- 极性判断：检查两个线圈的物理缠绕方向，利用楞次定律与右手准则来判断感应电压的极性。

同名端规则

- 同名端（dot convention）
  - 在两个磁耦合线圈的各自一端标上一个圆点。
  - 关于磁通量方向关系的标注，当两边电流都流入各自端的圆点时，它们产生的磁通量的方向相同。

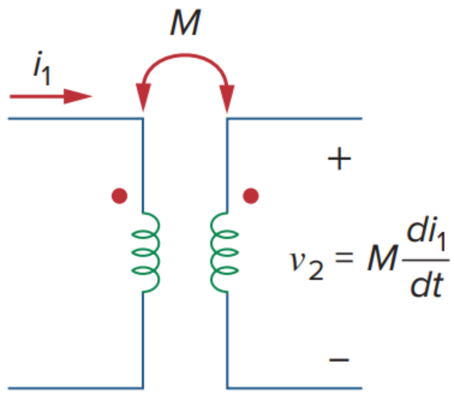


- 同名端规则
  - 如果电流进入一个线圈的同名端，则在第二个线圈的同名端处，互感电压的参考极性为正。

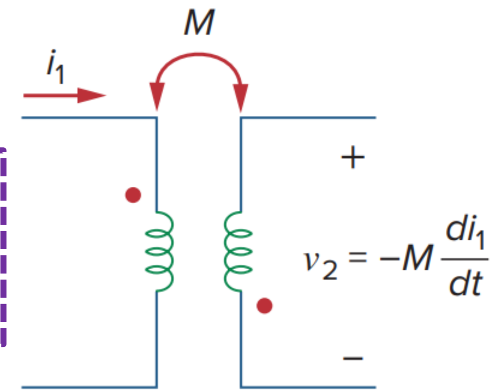
同名端规则

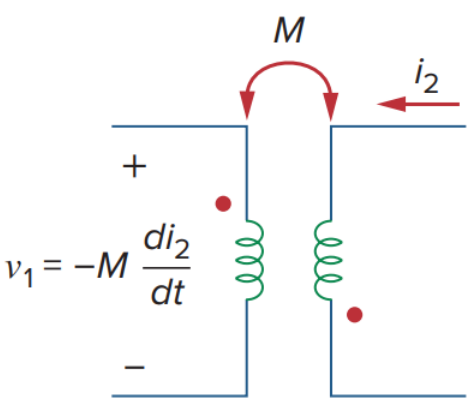
- 四种耦合场景对应的感应电压计算式

同名端位置
左：电流入
右：电压正

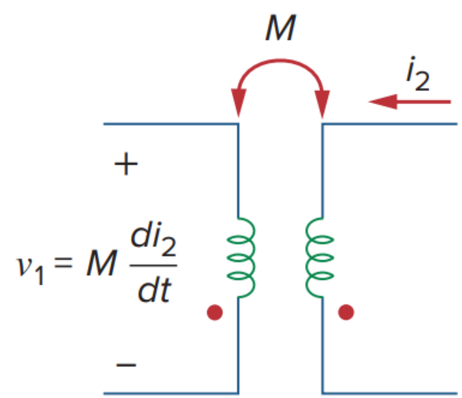


同名端位置
左：电流入
右：电压负





同名端位置
右：电流出
左：电压正

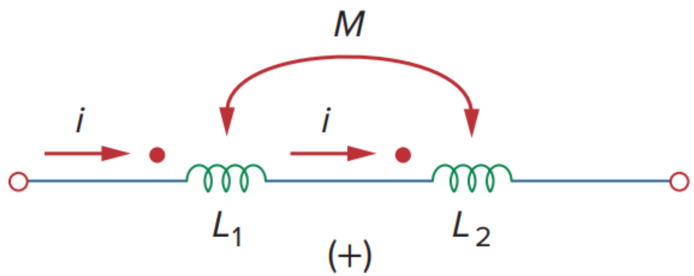


同名端位置
右：电流出
左：电压负

- 符号判断：入正/出负 +M；入负/出正 -M。

串联耦合线圈

- 同向串联连接

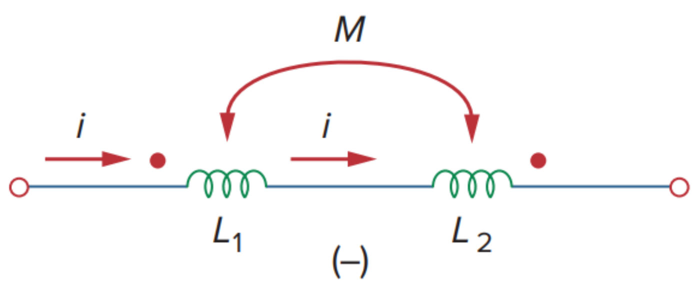


$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

(Series-aiding connection)

$$v = L_1 \times \frac{di_1}{dt} + M_{12} \times \frac{di_2}{dt} + L_2 \times \frac{di_2}{dt} + M_{21} \times \frac{di_1}{dt}$$

- 反向串联连接



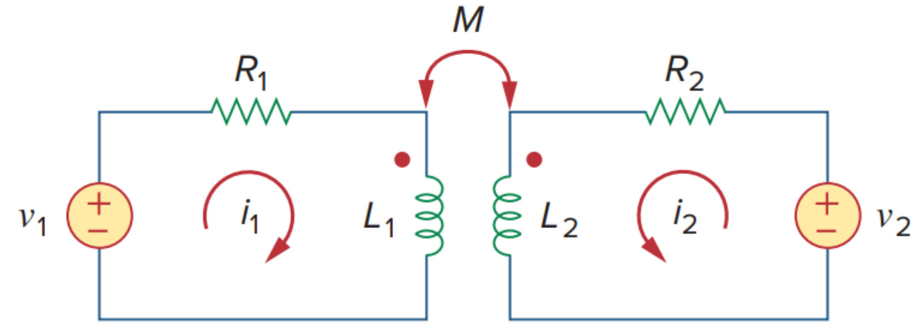
$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

(Series-opposing connection)

$$v = L_1 \times \frac{di_1}{dt} - M_{12} \times \frac{di_2}{dt} + L_2 \times \frac{di_2}{dt} - M_{21} \times \frac{di_1}{dt}$$

互感电路分析

- 使用 KVL 建立方程



时域分析

$$v_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \times \frac{di_2}{dt}$$

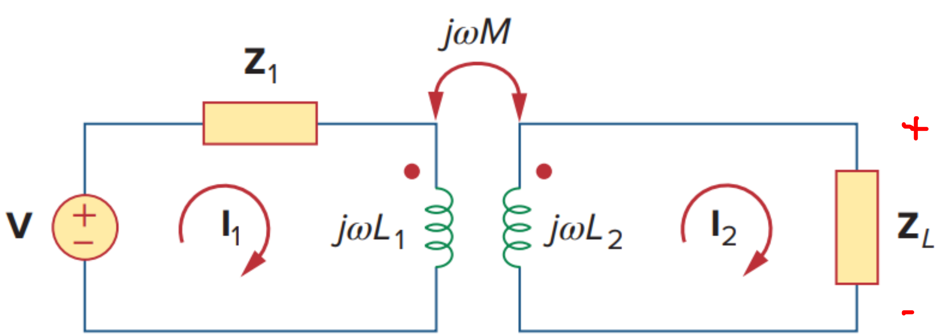
$$v_2 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \times \frac{di_1}{dt}$$

频域分析

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + j\omega M \mathbb{I}_2$$

$$\mathbb{V}_2 = \mathbb{I}_2(R_2 + j\omega L_2) + j\omega M \mathbb{I}_1$$

- 另一个例子：左边驱动右边



+

V_L

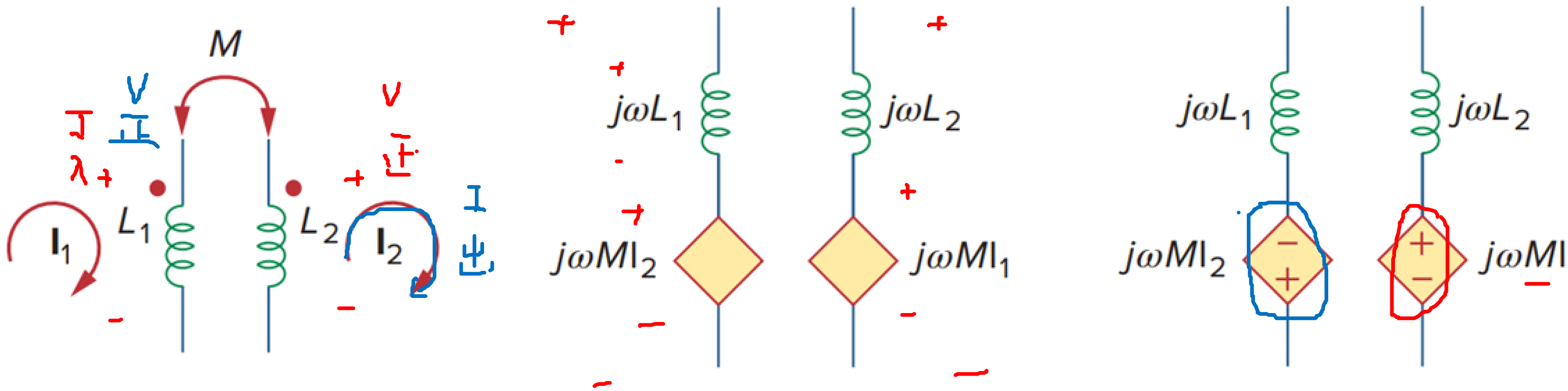
-

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{I}_1(Z_1 + j\omega L_1) - j\omega M \mathbb{I}_2$$

$$\underline{0 = \mathbb{I}_2(Z_L + j\omega L_2) - j\omega M \mathbb{I}_1}$$

等效模型

- 当存在互感效应时，可以用等效模型来简化思考。

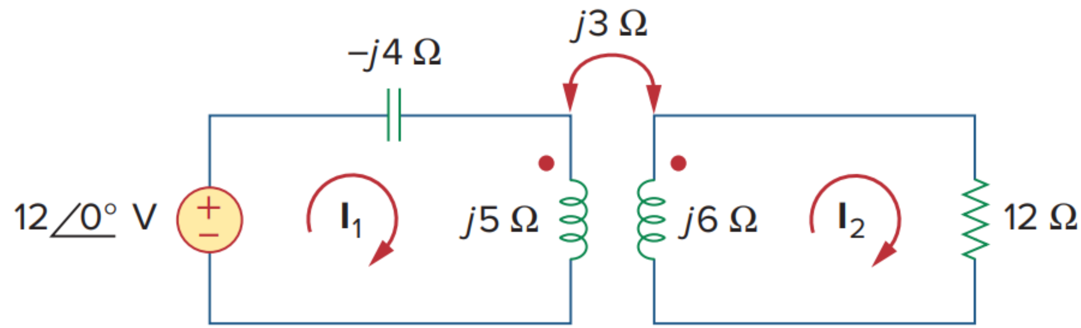


- 上图最左边是一对线圈
  - 左边线圈规定电流由上至下从圆点进入；
  - 右边线圈规定电流由下至上从圆点出去。

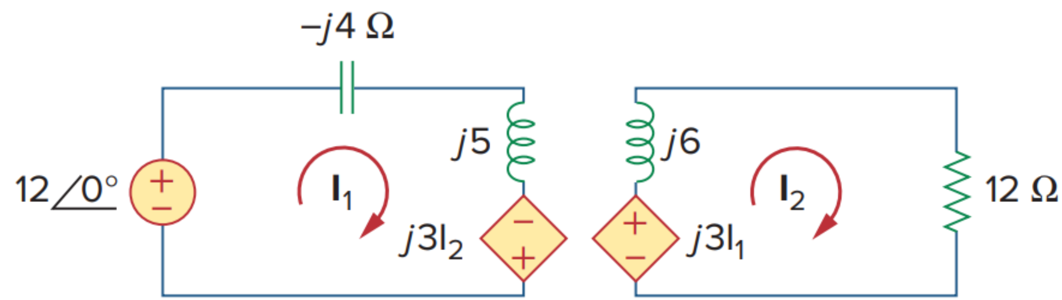
- 等效电路：自感（电压）+互感（电压）
  - 线圈 1→2 的互感电压（入正），使用 +M；
  - 线圈 2→1 的互感电压（出正），使用 –M。

例题

- 问题：计算下面电路中的相量电流 I_1 和 I_2。



- 解答：
  - 画出等效电路
  - 列方程
  - 解方程

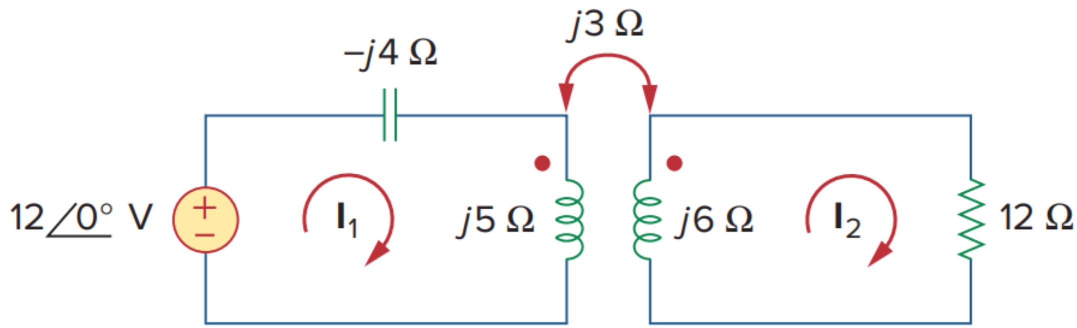


$$12 = \mathbb{I}_1(-j4 + j5) - j3\mathbb{I}_2 \qquad j\mathbb{I}_1 - j3\mathbb{I}_2 = 12$$

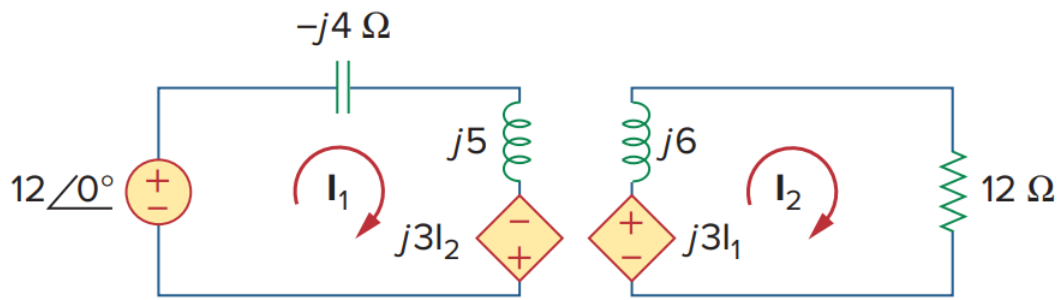
$$0 = \mathbb{I}_2(j6 + 12) - j3\mathbb{I}_1 \qquad -j\mathbb{I}_1 + (j2 + 4)\mathbb{I}_2 = 0$$

例题

- 问题：计算下面电路中的相量电流 I_1 和 I_2。



- 解答：
  - 画出等效电路
  - 列方程
  - 解方程



$$j\mathbb{I}_1 - j3\mathbb{I}_2 = 12$$

$$-j\mathbb{I}_1 + (j2 + 4)\mathbb{I}_2 = 0$$

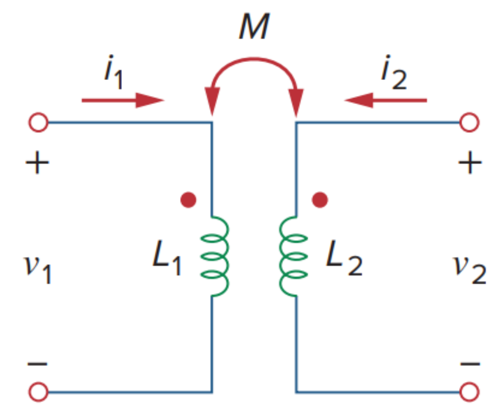
$$\mathbb{I}_1 = \frac{4 + j2}{4 - j} \times 12 = 13.01e^{-j49.39^o}\ (\mathrm{A})$$

$$\mathbb{I}_2 = \frac{12}{4 - j} = 2.91e^{j14.04^o}\ (\mathrm{A})$$

耦合电路中的能量

电流作功

- 考虑右边的电路，分析作功过程
  - 最开始，电流 i_1 和 i_2 都为 0;
  - 考虑一种 i_1、i_2 变到现值的过程;
  - 先是 i_1 由 0 增长到 I_1:



$$p_1(t) = i_1 \times v_1 = i_1 \times L_1 \frac{di_1}{dt}$$

  - 然后 i_2 由 0 增长到 I_2:
    - 对线圈 2 作功;

$$p_{22}(t) = i_2 \times v_2 = i_2 \times L_2 \frac{di_2}{dt}$$

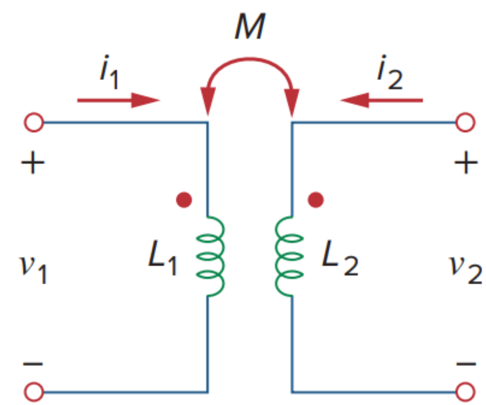
    - 并对线圈 1 作功。

$$p_{12}(t) = i_1 \times v_{12} = I_1 \times M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

- 电路最终状态的储能只与电路状态有关，而与过程无关。因此只需考虑一种合理过程。

电路的储能

- 考虑右边的电路，分析作功过程
  - 最开始，电流 i_1 和 i_2 都为 0；
  - 考虑一种 i_1、i_2 变到现值的过程；
  - 先是 i_1 由 0 增长到 I_1：
  - 然后 i_2 由 0 增长到 I_2：



$$w_1 = \int p_1(t)dt = L_1\int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2}L_1 I_1^2$$

$$w_{22} = \int p_{22}(t)dt = L_2\int_0^{I_2} i_2 di_2 = \frac{1}{2}L_2 I_2^2$$

$$w_{12} = \int p_{12}(t)dt = M_{12}I_1\int_0^{I_2} di_2 = M_{12}I_1 I_2$$

- 电路的总储能： $w = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12}I_1 I_2$

两种作功过程

- 考虑两种 i_1、i_2 变到现值的过程。

互感的互易特性

$$M_{21} = M_{12} = M$$

- 第一种
  - 先是 i_1 由 0 增长到 I_1：
  - 然后 i_2 由 0 增长到 I_2：

$$w_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

$$w_{22} = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$w_{12} = M_{12} I_1 I_2$$

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

- 第二种
  - 先是 i_2 由 0 增长到 I_2：
  - 然后 i_1 由 0 增长到 I_1：

$$w_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

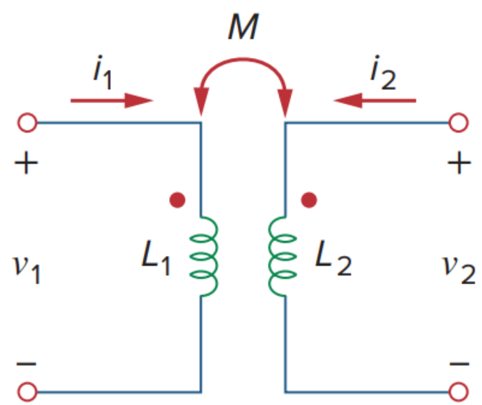
$$w_{11} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

$$w_{21} = M_{21} I_2 I_1$$

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_2 I_1$$

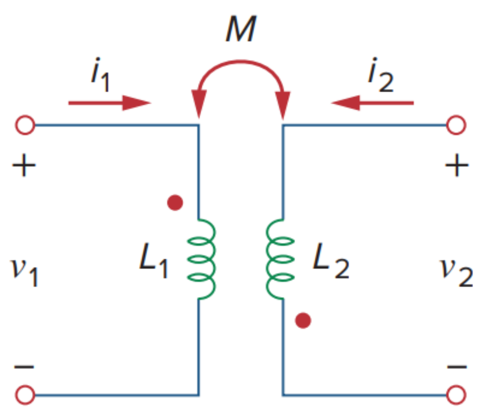
考虑同名端

- 下面两种情况中互感的能量是不一样的，是相反的。



线圈电流
两个都从同名端流入

$$w=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2$$



线圈电流
有一个从同名端流入
另一个从同名端流出

$$w=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2-MI_1I_2$$

互感值的上限

- 因为无源电路储存的能量不可能为负，

$$w=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2-Mi_1i_2\geq 0$$

- 所以互感系数存在一个范围。

$$w=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2-\sqrt{L_1L_2}i_1i_2+\sqrt{L_1L_2}i_1i_2-Mi_1i_2$$

$$w=\left(\sqrt{L_1}i_1-\sqrt{L_2}i_2\right)^2+\left(\sqrt{L_1L_2}-M\right)i_1i_2$$

- 上式对任意电流 i_1 和 i_2 都成立，因此有

$$M\leq\sqrt{L_1L_2}$$

耦合系数

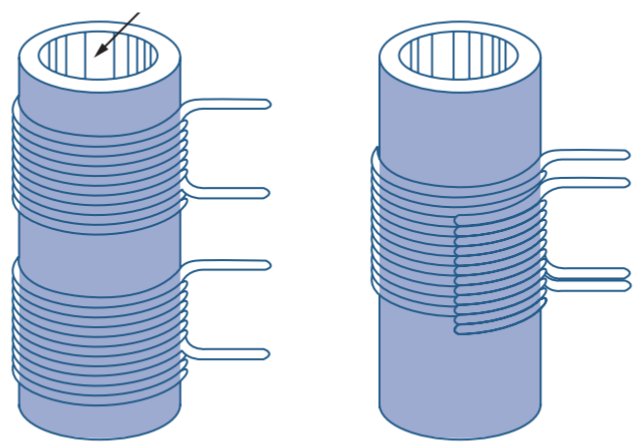
- 互感系数不会大于自感系数的方根积

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

- 定义一个归一化的系数，称为耦合系数

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \qquad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

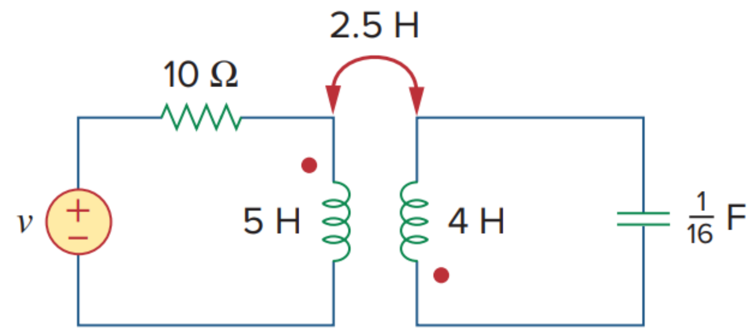
- 耦合系数是连个线圈间磁耦合程度的一种度量
  - 完全耦合 $k = 100\%$
  - 紧耦合 $k > 50\%$
  - 松耦合 $k < 50\%$



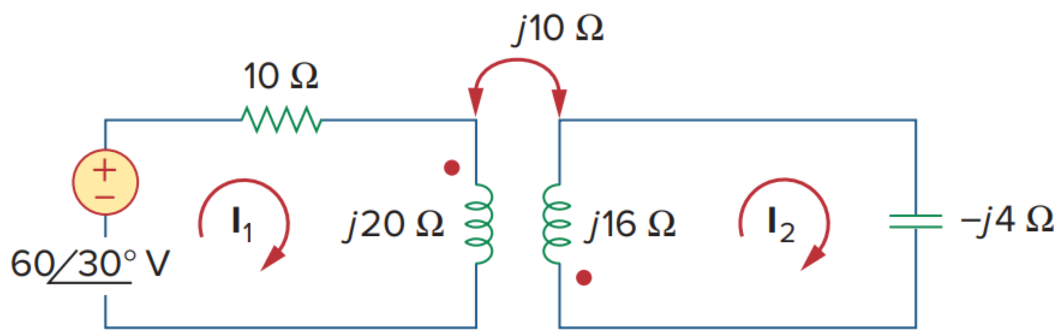
$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

例题

- 问题：对右图电路，计算耦合系数
  - 若电压 $v(t) = 60\cos(4t + 30^o)$，
  - 计算在 $t = 1s$ 时，线圈的储能。



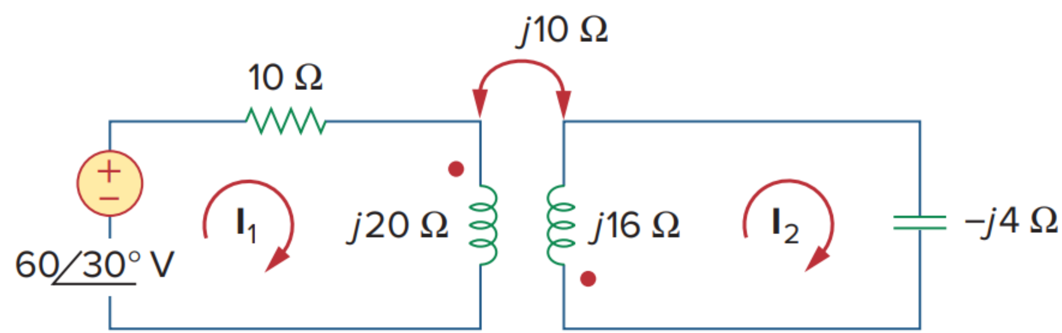
- 解答：
  - 计算耦合系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{2.5}{\sqrt{5\times 4}} = 0.559$
  - 电路存储的能量：
    - 要求电流
    - 频域求解再转时域
    - 先求各元件阻抗



$Z = j\omega L$ $\quad Z = j\omega M$ $\quad Z = \frac{1}{j\omega C}$

例题

- 问题：对右图电路，计算耦合系数
  - 若电压 $v(t) = 60\cos(4t + 30^o)$,
  - 计算在 $t = 1$s 时，线圈的储能。



- 解答：
  - 频域求解电流
  - 再转为时域

$$60e^{j30^o} = \mathbb{I}_1(10 + j20) + j10\mathbb{I}_2$$

$$0 = \mathbb{I}_2(j16 - j4) + j10\mathbb{I}_1$$

$$\mathbb{I}_1 = 3.905e^{-j19.4^o}\ (\text{A})$$

$$\mathbb{I}_2 = 3.2540e^{j106.6^o}\ (\text{A})$$

$$(1 + j2)\mathbb{I}_1 + j\mathbb{I}_2 = 6e^{j30^o}$$

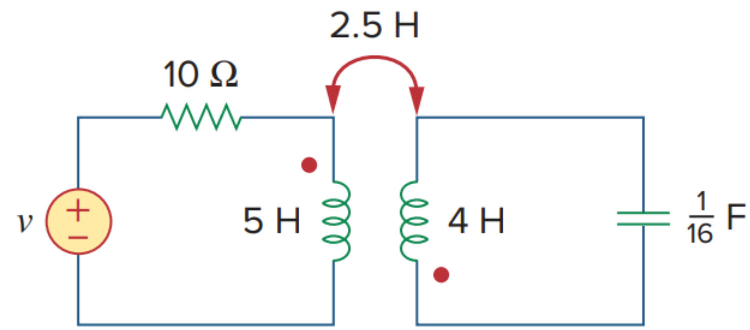
$$5\mathbb{I}_1 + 6\mathbb{I}_2 = 0$$

$$i_1(t) = 3.905\cos(4t - 19.4^o)\ (\text{A})$$

$$i_2(t) = 3.2540\cos(4t + 160.6^o)\ (\text{A})$$

例题

- 问题：对右图电路，计算耦合系数
  - 若电压 $v(t) = 60\cos(4t + 30^o)$，
  - 计算在 $t = 1s$ 时，线圈的储能。



- 解答：
  - 计算电流值
  - 计算能量

$$i_1(t) = 3.905\cos(4t - 19.4^o)\ (A)$$

$$i_2(t) = 3.2540\cos(4t + 160.6^o)\ (A)$$

$$i_1(1) = 3.905\cos 209.8^o = -3.389\ (A)$$

$$i_2(1) = 3.2540\cos 389.8^o = 2.824(A)$$

$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

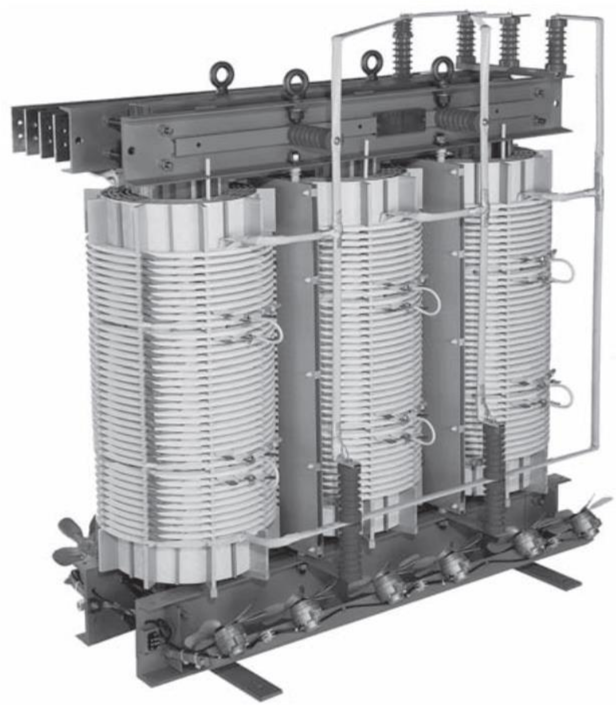
$$w = 28.71 + 15.95 - 23.93 = 20.73(J)$$

$$w = \frac{1}{2} \times 5 \times (-3.389)^2 + \frac{1}{2} \times 4 \times (2.824)^2 + 2.5 \times (-3.389) \times 2.824$$

线性变压器

线性变压器

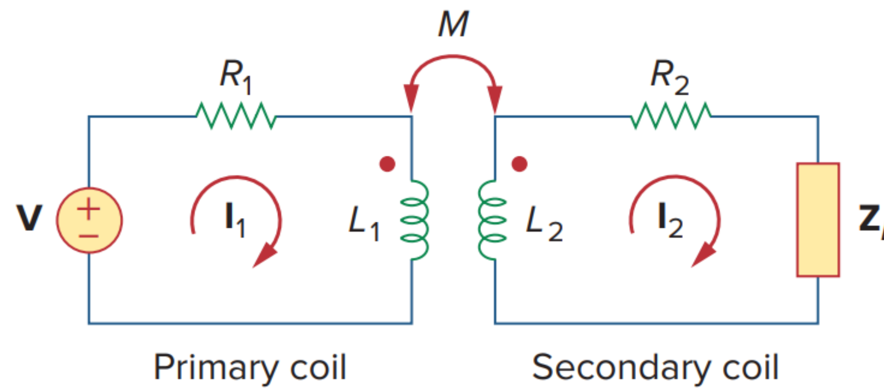
- 变压器一般是由两个（或多个）磁耦合线圈组成的四端器件。



- 绕组缠绕在磁性线性材料材料上制成的变压器称为线性变压器。磁通量与电流成正比。

工作原理分析

- 右图是变压器的电路模型
  - 与电源相接：一次绕组
  - 与负载相接：二次绕组
  - 两个R对应各种功耗



- 网孔电压

$$\mathbb{V} = (R_1 + j\omega L_1)\mathbb{I}_1 - j\omega M\mathbb{I}_2$$

$$0 = -j\omega M\mathbb{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)\mathbb{I}_2$$

$$\mathbb{V} = (R_1 + j\omega L_1)\mathbb{I}_1 + \frac{(\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L}\mathbb{I}_1$$

$$\mathbb{I}_2 = \frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L}\mathbb{I}_1$$

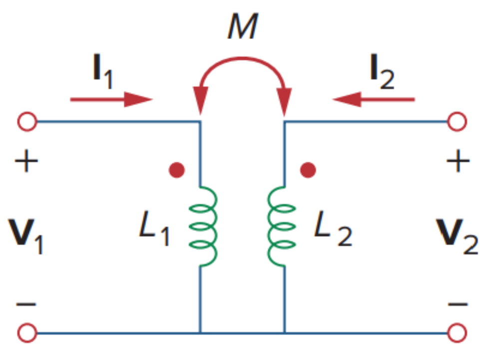
- 求得两个阻抗
  - 输入阻抗
  - 反射阻抗（耦合阻抗）

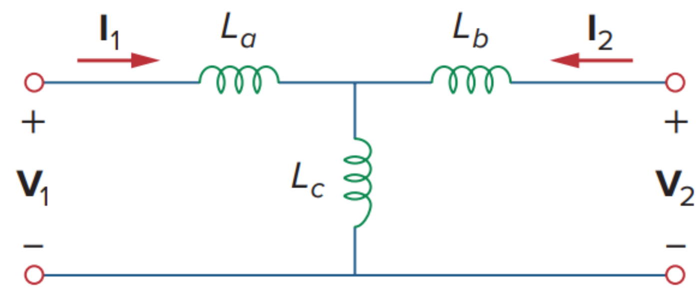
$$Z_{in} = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}_1} = (R_1 + j\omega L_1) + \frac{(\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L}$$

$$Z_R = \frac{(\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L}$$

T形等效电路

- 耦合线圈可以等效为T形网络。
  - 让它们的电压电流关系相同，进行证明和参数求解。





$$\begin{bmatrix}\mathbb{V}_1\\ \mathbb{V}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}j\omega L_1 & j\omega M\\ j\omega M & j\omega L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_1\\ \mathbb{I}_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbb{V}_1\\ \mathbb{V}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}j\omega(L_a+L_b) & j\omega L_c\\ j\omega L_c & j\omega(L_b+L_c)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_1\\ \mathbb{I}_2\end{bmatrix}$$

- 当左右两边参数满足如下关系时，两边电路等效。

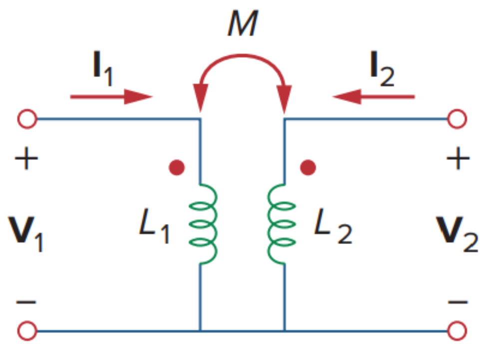
$$L_1 = L_a + L_b \qquad M = L_c$$

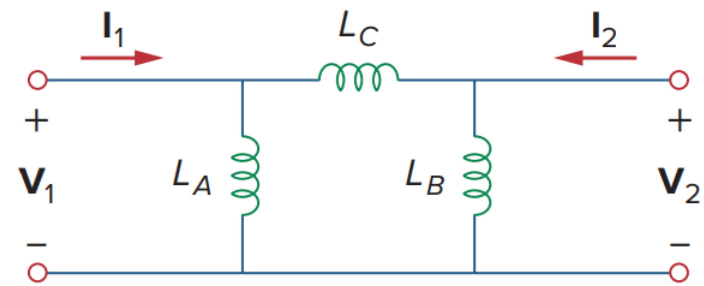
$$M = L_c \qquad L_2 = L_b + L_c$$

$$\Rightarrow \quad L_a = L_1 - M,\quad L_c = M,\quad L_b = L_2 - M$$

π形等效电路

- 耦合线圈也可以等效为π形网络。
  - 让它们的电压电流关系相同，进行证明和参数求解。





$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \dfrac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \\ \dfrac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \dfrac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

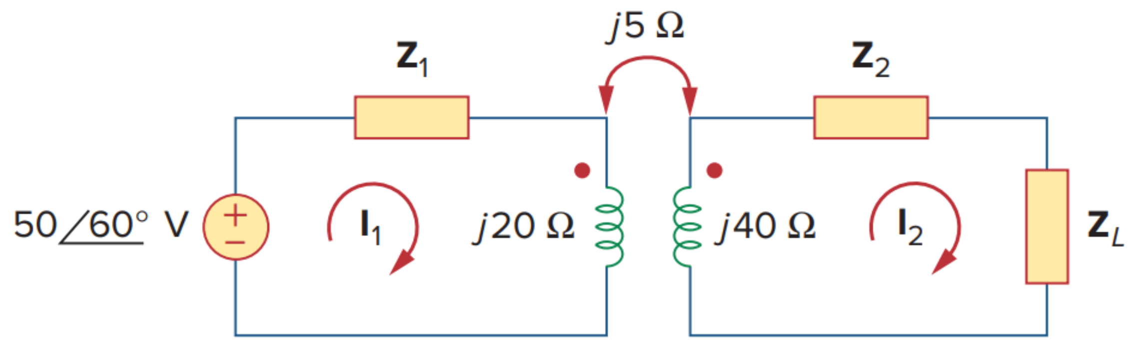
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{j\omega L_A} + \dfrac{1}{j\omega L_C} & -\dfrac{1}{j\omega L_C} \\ -\dfrac{1}{j\omega L_C} & \dfrac{1}{j\omega L_B} + \dfrac{1}{j\omega L_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

- 等效电路参数的计算式

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M} \qquad L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M} \qquad L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{M}$$

例题-1

- 问题：对下面的电路，计算输入阻抗和电流 I_1。
  - $Z_1 = 60 - j100\ \Omega$
  - $Z_2 = 30 + j40\ \Omega$
  - $Z_L = 80 + j60\ \Omega$



- 解答：
  - 输入阻抗

$$Z_{in} = (60 - j100 + j20) + \frac{(5)^2}{30 + j40 + j40 + 80 + j60}$$

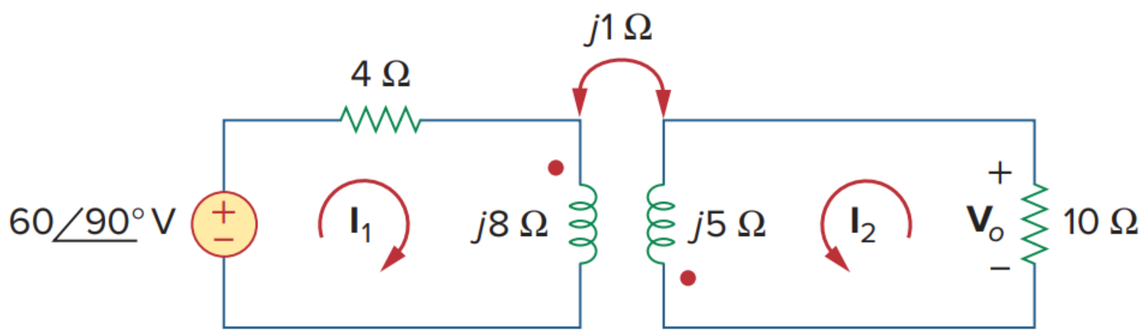
$$Z_{in} = 60 - j80 + \frac{25}{110 + j140} = 100.14e^{-j53.1^o}\ (\Omega)$$

  - 电流

$$\mathbb{I}_1 = \frac{\mathbb{V}}{Z_{in}} = 0.503e^{j113.1^o}\ (\Omega)$$

例题-2

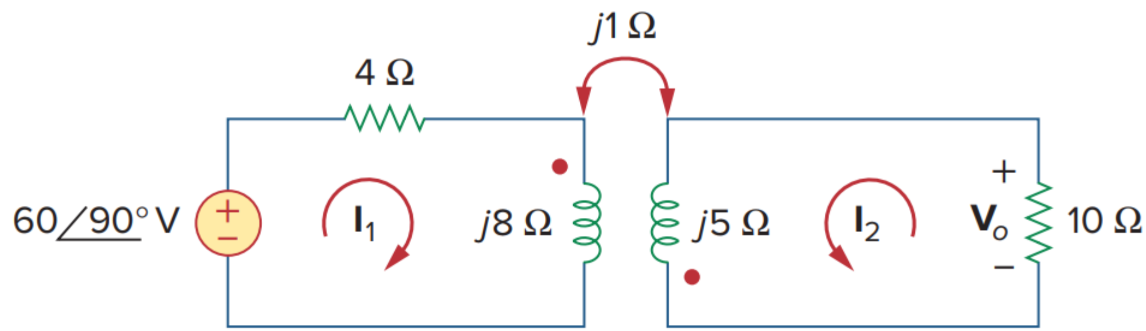
- 问题：利用线性变压器的T形等效电路求解下图所示电路中的 I_1、I_2 和 V_o。

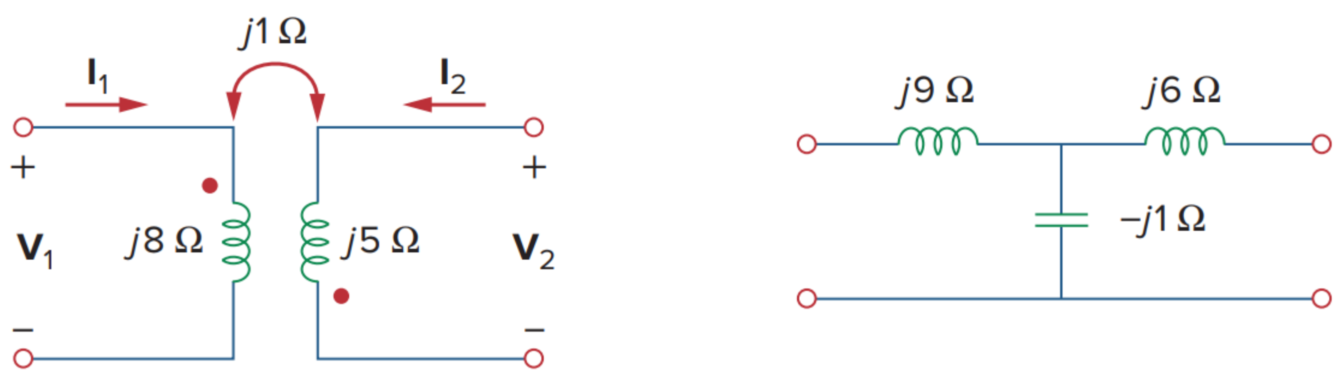


- 解答：
  - 首先画出线圈组的T形等效电路
  - 然后画出整个电路的等效电路
  - 按照常规方法求解电路
  - 得到结果

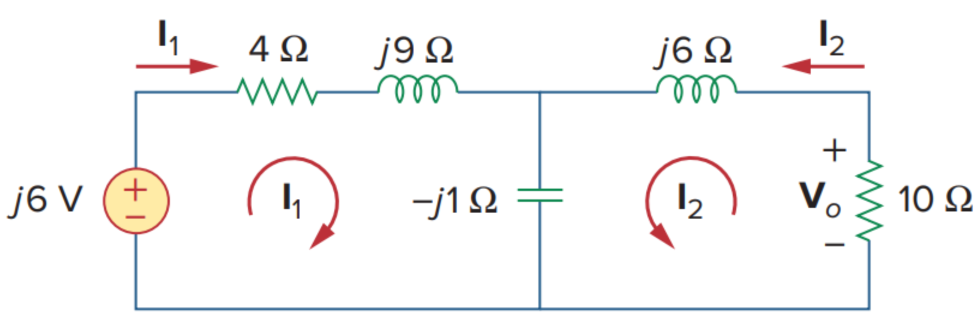
例题-2

- 电路等效替换





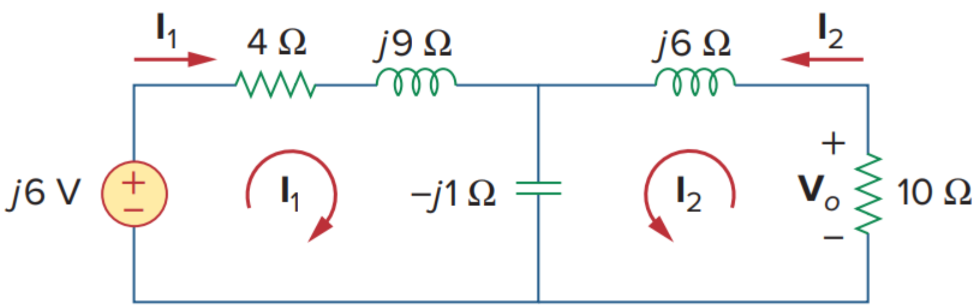
T 型等效电路



代入求解

例题-2

- 求解电压电流



$$j6 = (4 + j9 - j1)\mathbb{I}_1 - j1\mathbb{I}_2$$

$$0 = -j1\mathbb{I}_1 + (10 + j6 - j1)\mathbb{I}_2$$

$$j6 = (4 + j8)\mathbb{I}_1 - j1\mathbb{I}_2$$

$$0 = -j1\mathbb{I}_1 + (10 + j5)\mathbb{I}_2$$

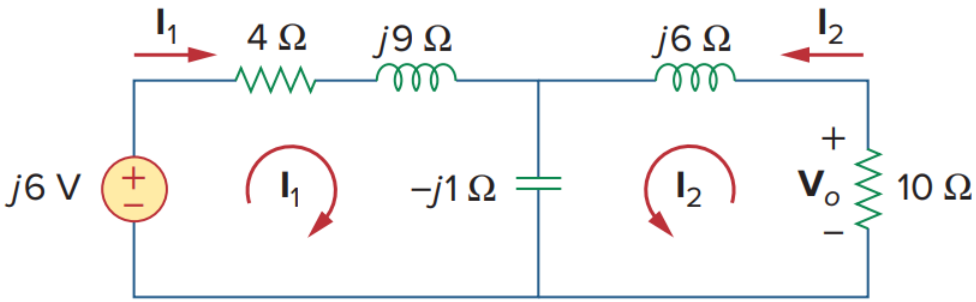
– 消元去 I_1: $j1\mathbb{I}_1 = (10 + j5)\mathbb{I}_2$ ➡ $\mathbb{I}_1 = (5 - j10)\mathbb{I}_2$

– 代入得到: $j6 = (4 + j8)(5 - j10)\mathbb{I}_2 - j1\mathbb{I}_2$

– 化简得到: $j6 = (100 - j)\mathbb{I}_2$ ➡ $\mathbb{I}_2 = \dfrac{j6}{100 - j}(\mathrm{A})$

例题-2

- 求解电压电流



$$\mathbb{I}_2 = \frac{j6}{100-j}\,(\mathrm{A})$$

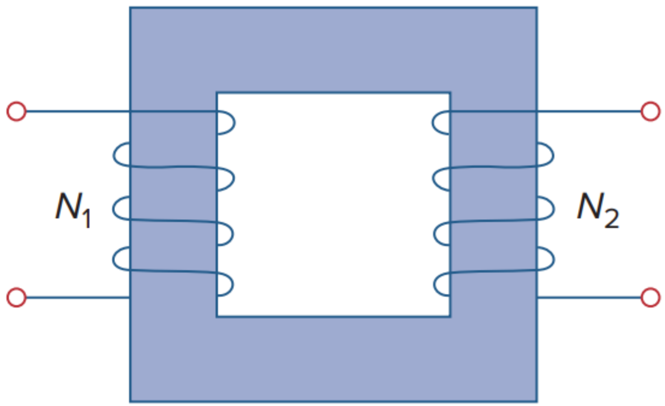
$$\mathbb{I}_1 = (5-j10)\mathbb{I}_2$$

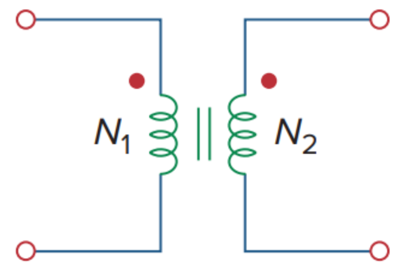
- 电流 I_2: $\mathbb{I}_2 = \dfrac{j6}{100-j}\ \mathrm{A} = 0.060e^{j90.6^o}\ \mathrm{A}$
- 电流 I_1: $\mathbb{I}_1 = (5-j10)\times\dfrac{j6}{100-j}\ \mathrm{A} = 0.671e^{j27.1^o}\ \mathrm{A}$
- 电压 V_o: $\mathbb{V}_o = -\mathbb{I}_2 \times 10\ \Omega = 0.600e^{-j89.4^o}\ \mathrm{V}$

理想变压器

介绍

- 理想变压器是一种完全耦合（k = 1）的变压器。
  - 两个绕组的自感无穷大，并且无损耗。

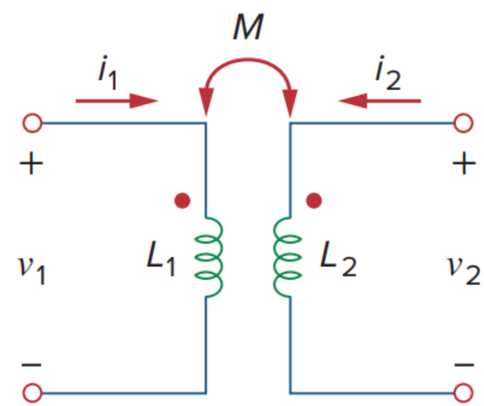




- 完全耦合变压器的实现
  - 由大量缠绕在高磁导率的磁芯上的线圈，
  - 构成得两个（或多个）绕组组成。
  - 由于磁心得磁导率高，
  - 所以磁通量与两个绕组得所有线圈铰链。

完全耦合

- 当变压器具有完全耦合特性时电压间的关系较简单。
- 参考右图，计算
  - 左右两线圈的电压比率



$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\mathbb{V}_1 = j\omega L_1 \mathbb{I}_1 + j\omega M \mathbb{I}_2$$

$$\mathbb{V}_2 = j\omega M \mathbb{I}_1 + j\omega L_2 \mathbb{I}_2$$

$$\mathbb{I}_1 = \frac{\mathbb{V}_1 - j\omega M \mathbb{I}_2}{j\omega L_1}$$

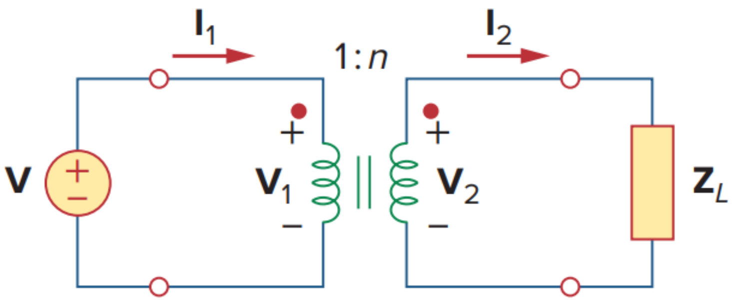
$$\mathbb{V}_2 = \frac{j\omega M}{j\omega L_1}\mathbb{V}_1 + j\omega M \frac{-j\omega M \mathbb{I}_2}{j\omega L_1} + j\omega L_2 \mathbb{I}_2$$

$$\mathbb{V}_2 = \frac{M}{L_1}\mathbb{V}_1 + \left(-\frac{j\omega M^2}{L_1} + j\omega L_2\right)\mathbb{I}_2$$

$$\mathbb{V}_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\mathbb{V}_1 = n\mathbb{V}_1$$

电压电流比率

- 两绕组匝数分为 N_1 和 N_2 的理想变压器，线圈共享同一磁通量。



$$v_1 = N_1\frac{d\phi}{dt}$$

$$v_2 = N_2\frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

- 因为损耗为0，因此输入功率等于输出功率。

$$v_1 i_1 = v_2 i_2$$

$$\frac{\mathbb{I}_2}{\mathbb{I}_1} = \frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}$$

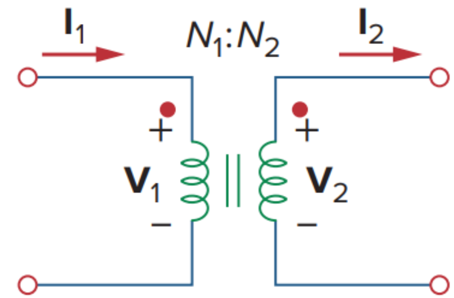
匝数比 $n = N_2 / N_1$	变压器类型	电压关系
n = 1	隔离变压器	二次电压等于一次电压
n > 1	升压变压器	二次电压大于一次电压
n < 1	降压变压器	二次电压小于一次电压

谁的圈数多，谁的电压就高！

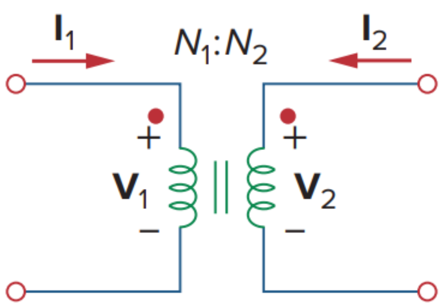
电压电流的极性

- 电压比有时为正有时为负，取决于绕线方向。

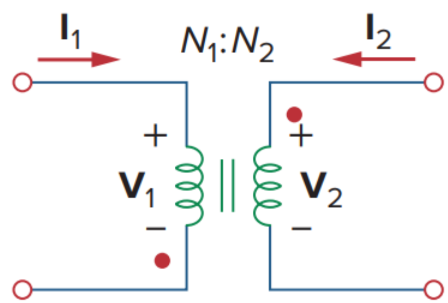
- 如果同名端处的 V1 和 V2 均为正，或者均为负，则 n 取正值，否则取负值。
- 如果 I1 和 I2 均流入同名端，或者流出同名端，则 n 取正值，否则则 n 取负值。



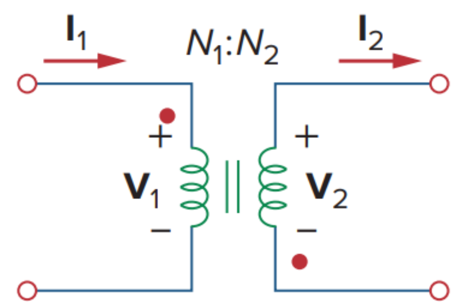
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2}$$



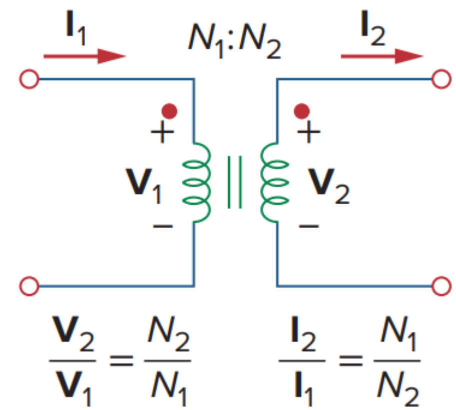
$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$



$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2}$$

输入阻抗

- 考虑右边面的电路
  - 电流 I_2 是流向负载的电流；
  - 电流 I_1 是输入变压器的电流。



- 电流电压的比率

$$\frac{\mathbb{I}_2}{\mathbb{I}_1}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{1}{n} \qquad \frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{V}_1}=\frac{N_2}{N_1}=n$$

- 从端口2看出去的负载阻抗为

$$Z_L=\frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{I}_2}$$

- 从端口1看进去的输入阻抗为

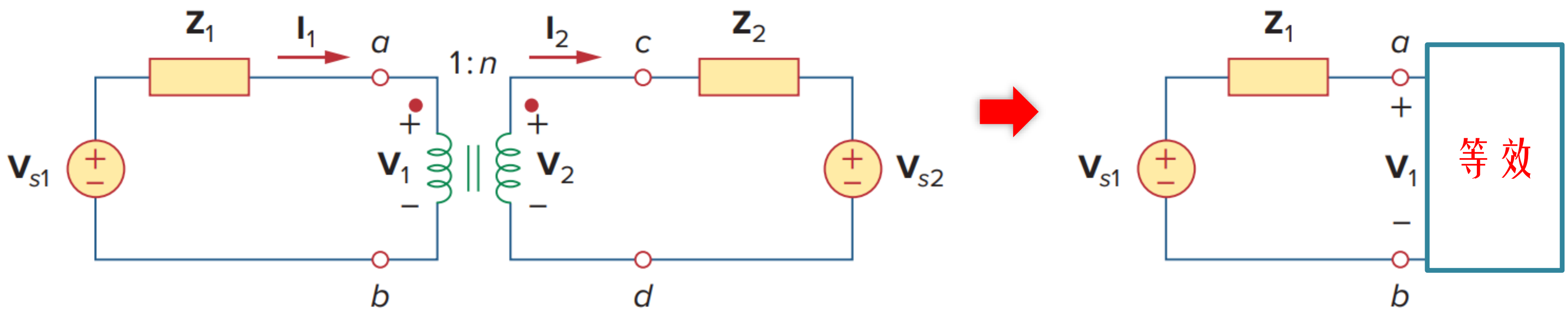
$$Z_{in}=\frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{I}_1}=\frac{\mathbb{V}_2/n}{n\mathbb{I}_2}=\frac{1}{n^2}\frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{I}_2}=\frac{1}{n^2}Z_L$$

阻抗反射
阻抗映射

变压器将给定的阻抗变换为另一个阻抗。在阻抗匹配中有用。

等效电路

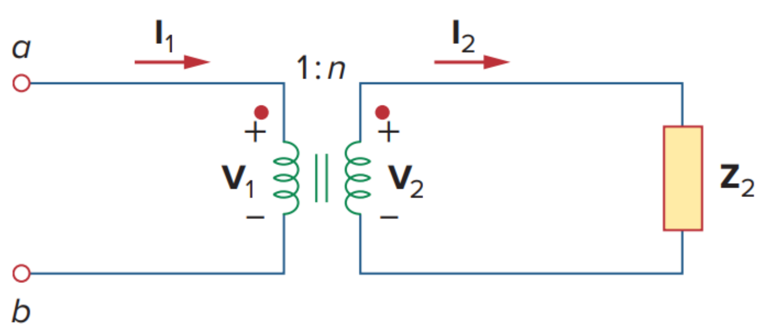
- 求解下面的电路时，可以将二次电路映射到一次侧。



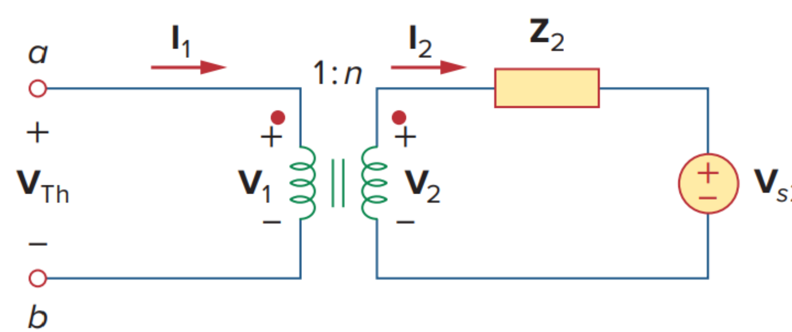
- 方法就是构建戴维南等效电路
  - 变压器 + 二次侧

$\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 = 0 \qquad \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_{s2}$

$$\mathbb{V}_{Th} = \mathbb{V}_1 = \frac{\mathbb{V}_2}{n} = \frac{\mathbb{V}_{s2}}{n}$$

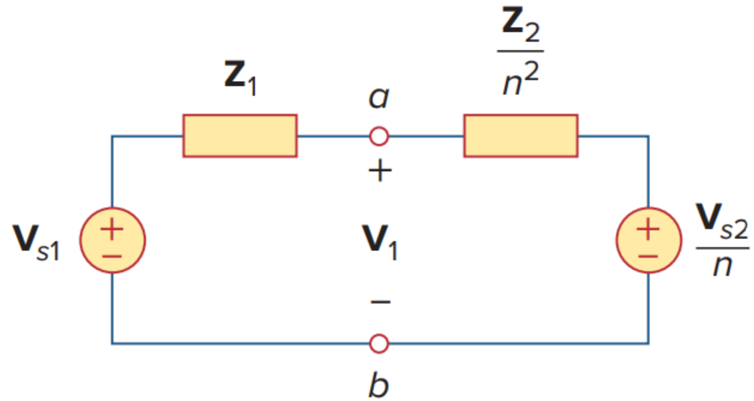


$$Z_{Th} = \frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{I}_1} = \frac{1}{n^2} Z_L$$

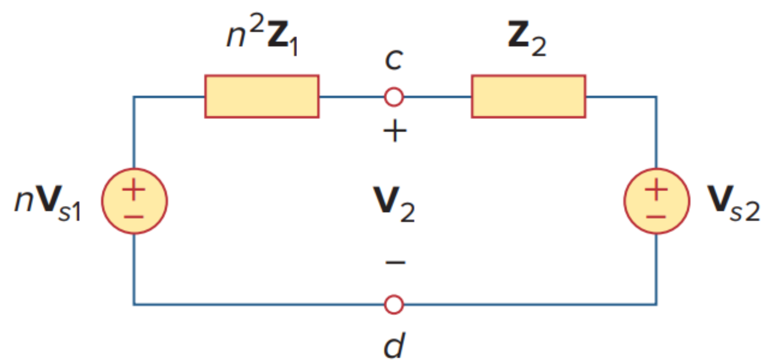


等效电路总结

- 将二次电路映射到一次侧从而消去变压器的一般规则是：
  - 二次阻抗除以 n，
  - 二次电压除以 n，
  - 并且二次电流乘以 n。

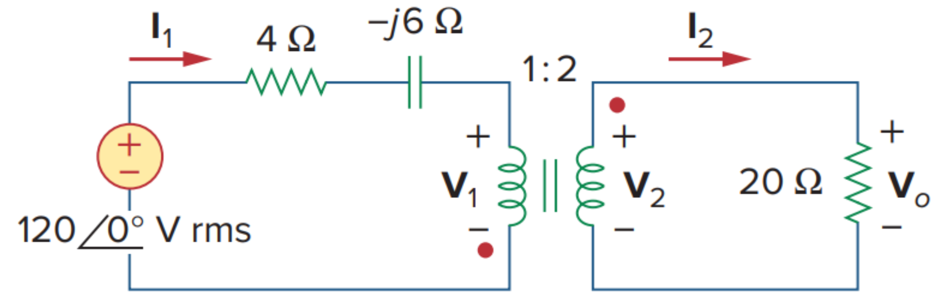


- 将一次电路映射到二次侧从而消去变压器的一般规则是：
  - 一次阻抗乘以 n，
  - 一次电压乘以 n，
  - 并且一次电流除以 n。



举例-1

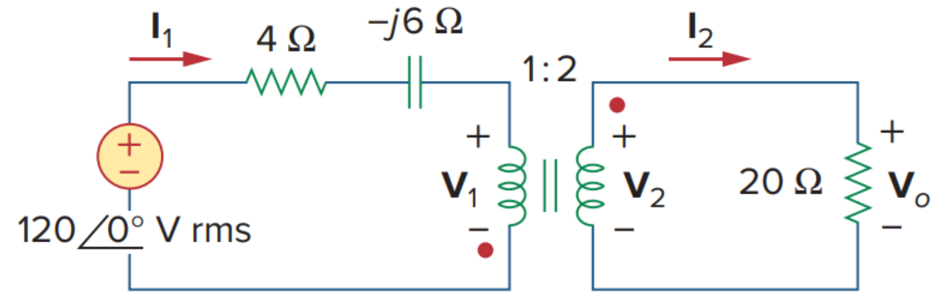
- 问题：对右图的理想变压器，试求
  - 电源电流 I_1；
  - 输出电压 V_o；
  - 电源提供的复功率。



- 解答：
  - 负载阻抗为 $Z_L = 20\ \Omega$　反射阻抗为 $Z_R = \dfrac{20}{4} = 5\ (\Omega)$
  - 输入阻抗为 $Z_{in} = 4 - j6 + 5 = 9 - j6 = 10.82e^{-j33.69^o}\ (\Omega)$
  - 电源电流为 $\mathbb{I}_{1rms} = \dfrac{120}{9-j6} = \dfrac{40}{3-j2} = 11.09e^{j33.69^o}\ (\mathrm{A})$

举例-1

- 问题：对右图的理想变压器，试求
  - 电源电流 I_1；
  - 输出电压 V_o；
  - 电源提供的复功率。



- 解答：
  - 输出电压为

$$\mathbb{V}_{orms} = 20 \times \mathbb{I}_2 = 20 \times \frac{-\mathbb{I}_1}{2} = 20 \times \frac{-1}{2} \times \frac{40}{3-j2} = 110.9e^{j213.69^o}\ (\mathrm{V})$$

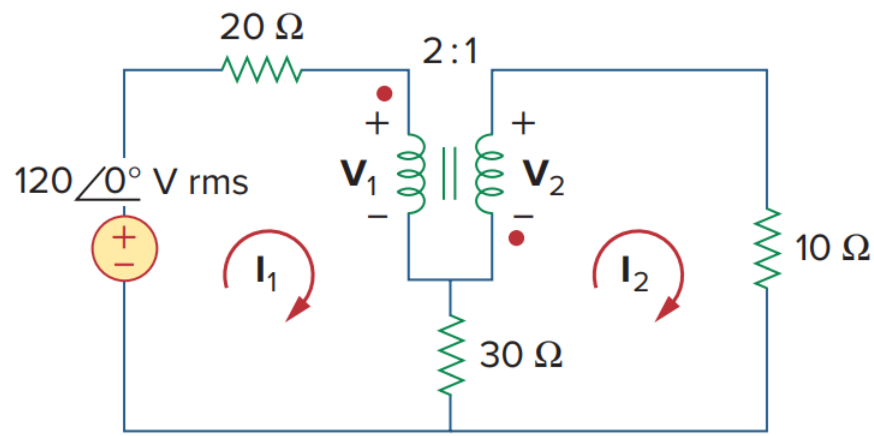
  - 电源提供的复功率为

$$\mathbb{S} = |\mathbb{I}_{1rms}|^2 Z_{in} = |11.09|^2(9-j6) = 1107.7 - j738.46\ (\mathrm{V}\cdot\mathrm{A})$$

$$\mathbb{S} = 1331.3e^{-j33.69^o}(\mathrm{V}\cdot\mathrm{A})$$

举例-2

- 问题：计算下图所示的理想变压器电路中提供给负载 10 Ω 的功率。



- 解答：
  - 建立 KVL 方程组

$$120 = 20 \times \mathbb{I}_{1rms} + \mathbb{V}_{1rms} + 30 \times (\mathbb{I}_{1rms} - \mathbb{I}_{2rms})$$

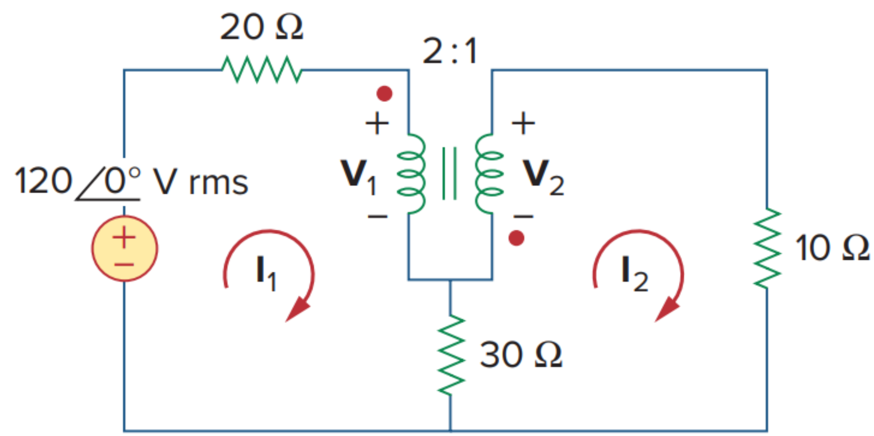
$$0 = 30 \times (\mathbb{I}_{2rms} - \mathbb{I}_{1rms}) - \mathbb{V}_{2rms} + 10 \times \mathbb{I}_{2rms}$$

  - 变压器的电压电流关系

$$\mathbb{V}_{1rms} = -2\mathbb{V}_{2rms} \qquad \mathbb{I}_{1rms} = -\frac{1}{2}\mathbb{I}_{2rms}$$

举例-2

- 问题：计算下图所示的理想变压器电路中提供给负载 10 Ω 的功率。



- 解答：
  – 方程组求解

$$120 = -55 \times \mathbb{I}_{1rms} - 2\mathbb{V}_{2rms}$$

$$0 = 55 \times \mathbb{I}_{1rms} - \mathbb{V}_{2rms}$$

$$\mathbb{V}_{2rms} = -40\ \text{V}$$

$$\mathbb{I}_{2rms} = -\frac{40}{55} = -0.727\ (\text{A})$$

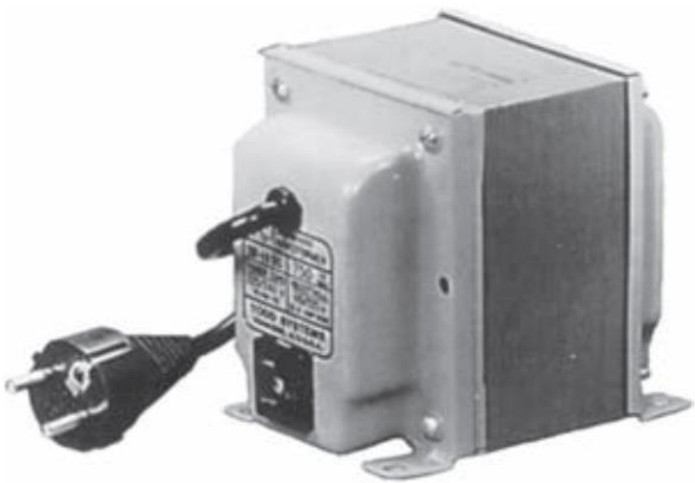
  – 计算负载的功率

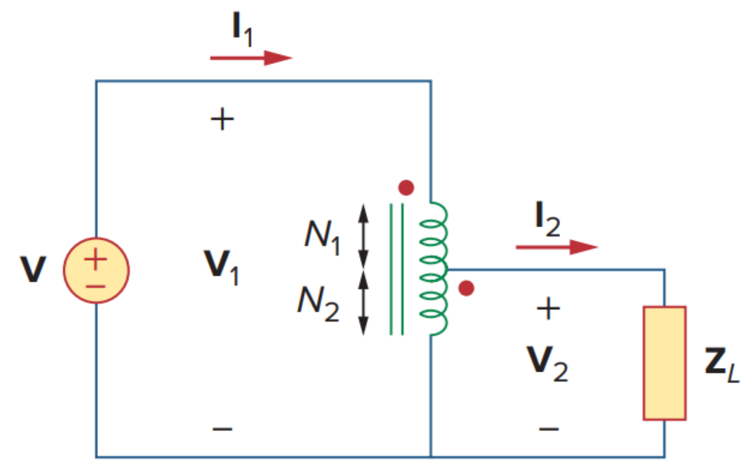
$$|\mathbb{I}_{2rms}|^2 R_L = |-0.727|^2 \times 10 = 5.289\ (\text{W})$$

理想自耦变压器

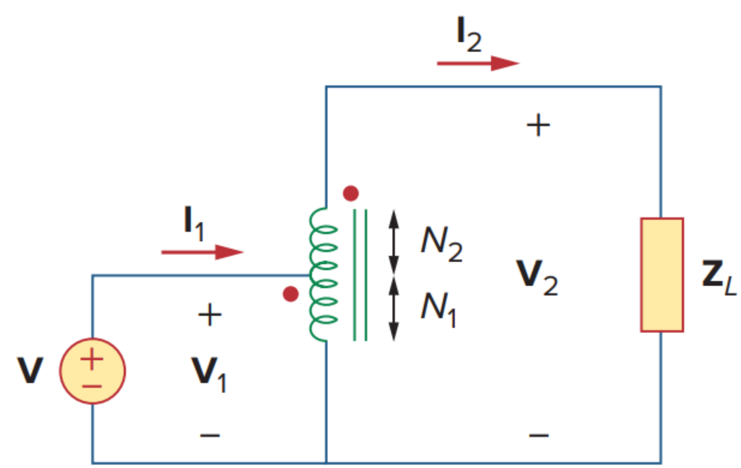
介绍

- 自耦变压器是指一次侧与二次侧为同一绕线组的变压器。



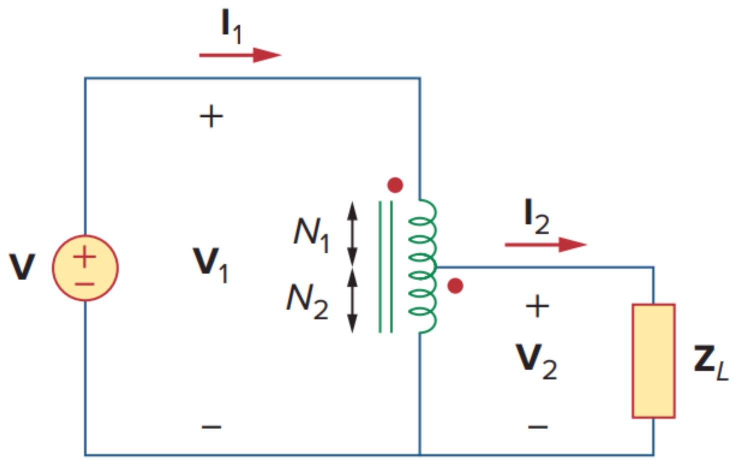


- 自耦变压器
  - 可以工作在升压模式；
  - 也可以工作在降压模式；
  - 理想下它们都是无耗的。



电压比例

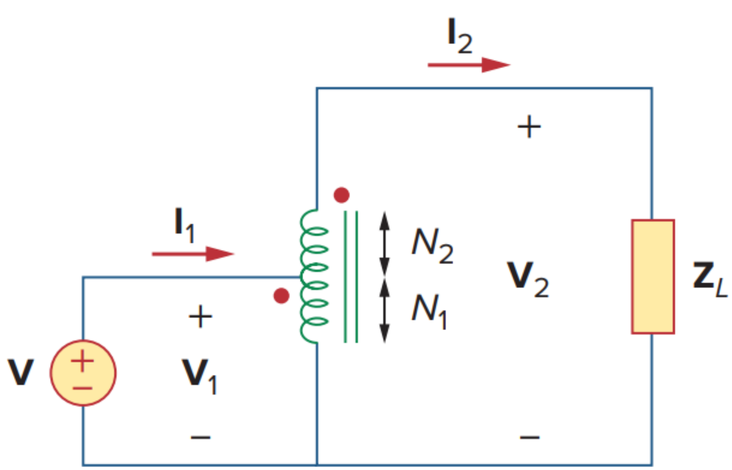
- 对于降压变压器来说，两边电压满足的关系是



$$\frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{\mathbb{I}_1}{\mathbb{I}_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$$

- 对于升压变压器来说，两边电压满足的关系是

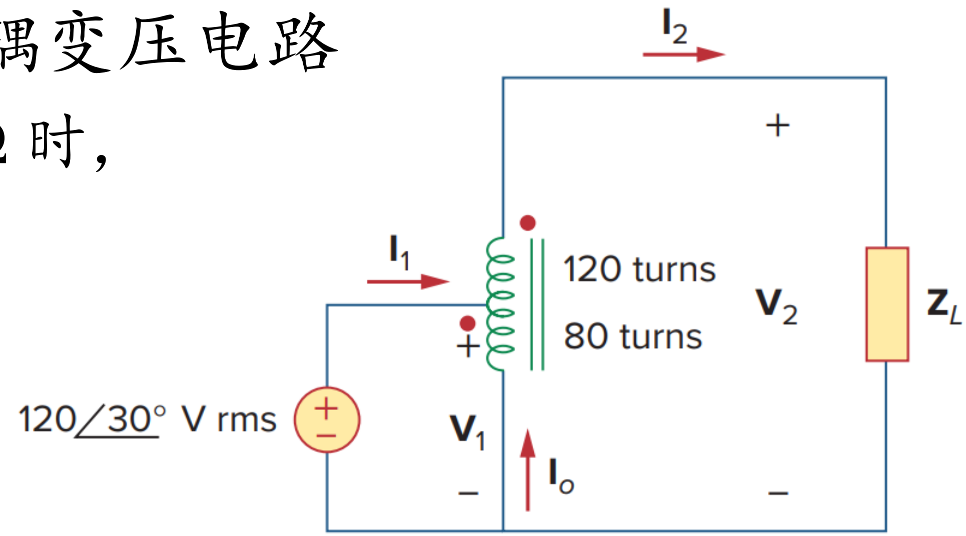


$$\frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

$$\frac{\mathbb{I}_1}{\mathbb{I}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + \frac{N_1}{N_2}$$

例题

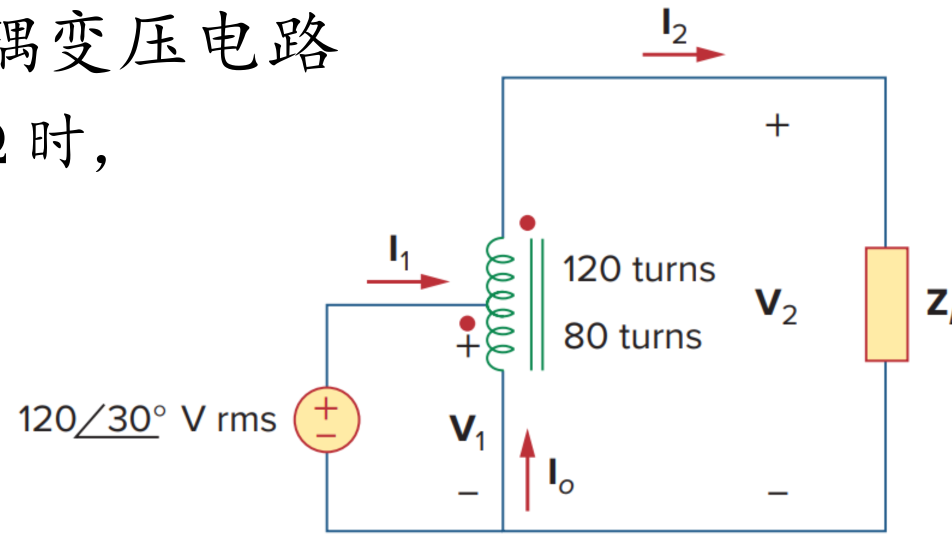
- 问题：参见右边的自耦变压电路
  - 计算当 $Z_L = (8 + j6)\,\Omega$ 时，
  - 电流 I_1、I_2、I_o；
  - 提供给负载的复功率。



- 解答：
  - 负载电压 $\dfrac{\mathbb{V}_{1rms}}{\mathbb{V}_{2rms}} = \dfrac{80}{80+120} = 0.4$ ➡ $\mathbb{V}_{2rms} = \dfrac{120e^{30^o}}{0.4} = 300e^{30^o}$ (V)
  - 负载电流 $\mathbb{I}_{2rms} = \dfrac{300e^{30^o}}{8+j6} = 30e^{-6.87^o}$ (V)
  - 源端电流 $\mathbb{I}_{1rms} = 30e^{-6.87^o} \times \dfrac{120+80}{80} = 75e^{-6.87^o}$ (V)

例题

- 问题：参见右边的自耦变压电路
  - 计算当 $Z_L = (8 + j6)\,\Omega$ 时，
  - 电流 I_1、I_2、I_o；
  - 提供给负载的复功率。



- 解答：
  - 负载电流 $\mathbb{I}_{2rms} = 30e^{-6.87^o}$ V 源端电流 $\mathbb{I}_{1rms} = 75e^{-6.87^o}$ V
  - 共有电流 $\mathbb{I}_{orms} = \mathbb{I}_{2rms} - \mathbb{I}_{1rms} = 40e^{-173.13^o}$ V
  - 负载的复功率 $\mathbb{S} = |\mathbb{I}_{2rms}|^2 Z_L = |30|^2(8 + j6) = 7.2 - j5.4\ (\mathrm{kV \cdot A})$

$$\mathbb{S} = 9e^{36.87^o}(\mathrm{kV \cdot A})$$

作业

- 画出本章思维导图
- 13.7
- 13.11
- 13.33
- 13.53
- 13.93