# 第四章 数值积分（和数值微分）

内容提要

# 4.1 数值积分概论

## 4.1.1 数值求积的基本思想

对定义在区间［$\boldsymbol{a, b}$］上的定积分

$$I=\int_a^b f(x)\mathbf{d}x=F(b)-F(a)$$

但实际使用这种积分方法时往往有困难，有时原函数不能用初等函数表示，有时原函数又十分复杂，难于求出或计算；另外如被积函数是由测量或数值计算给出的一张数据表示时，上述方法也不能直接运用。因此有必要研究积分的数值计算问题。

计算定积分有微积分基本公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

但很多函数找不到原函数，如

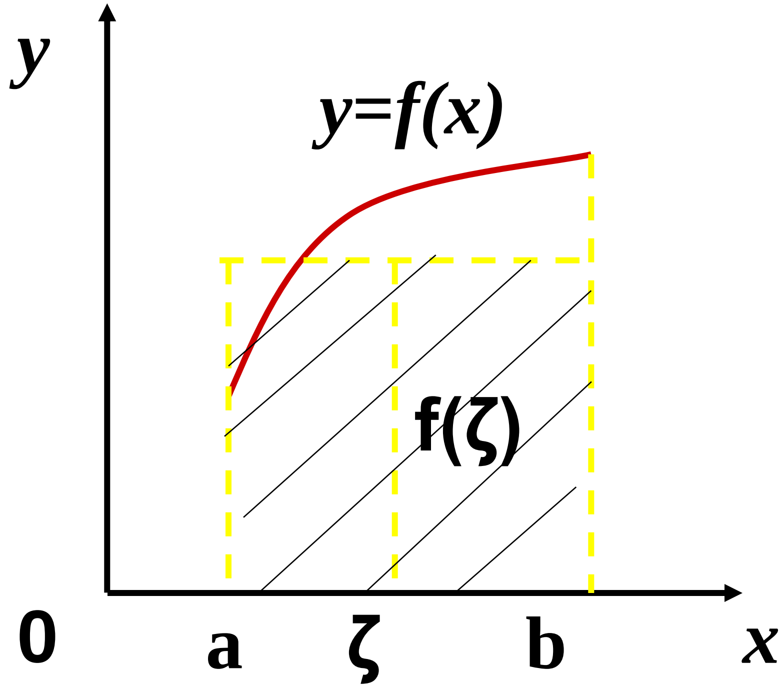
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad f(x) = e^{-x^2}$$

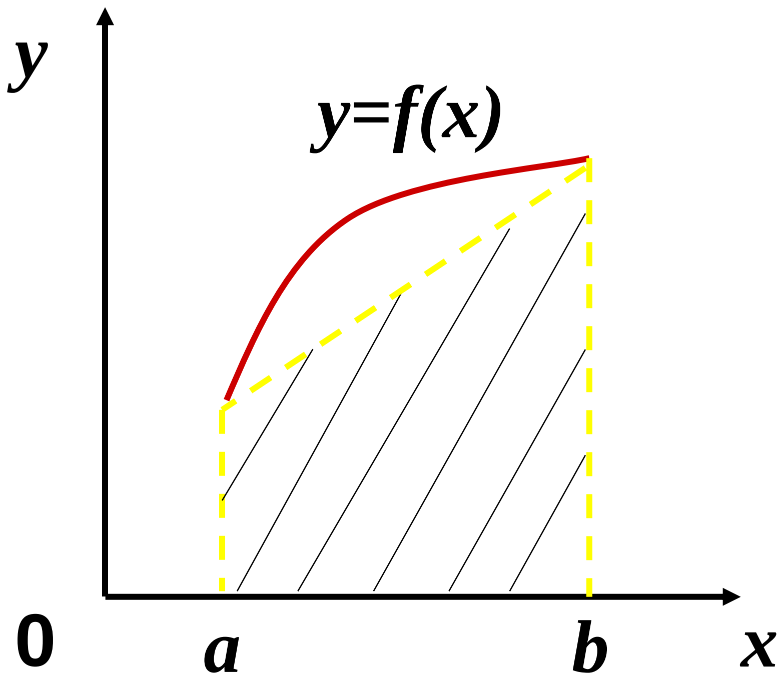
等。而实际上，有很多函数只知一些离散点的函数值，并无表达式，这就需要利用已知条件求出近似值。

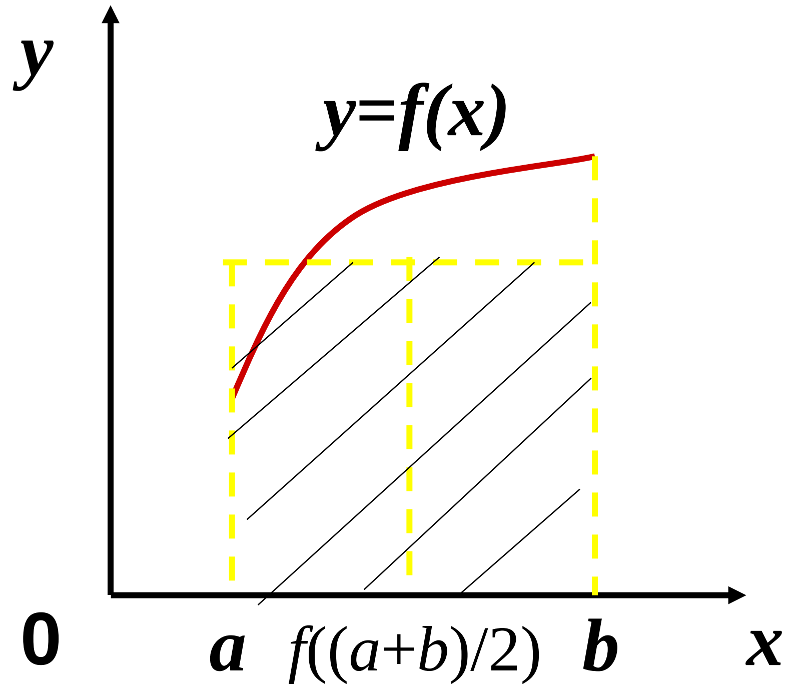
积分中值定理告诉我们：

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{f(\xi)}(b-a).$$

平均高度






$$T=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{[f(a)+f(b)]}{2}(b-a)$$

$$R=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

梯形公式

平均高度

中矩形公式

平均高度

如果简单地选取区间$[a,b]$的一个端点或区间中点的高度作为平均高度,这样建立的求积公式分别是:

左矩形公式: $I(f)\approx(b-a)f(a)$

右矩形公式: $I(f)\approx(b-a)f(b)$

中矩形公式: $I(f)\approx(b-a)f[(a+b)/2]$

**更一般地，我们构造具有下列形式的求积公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} \underbrace{A_k}_{\text{求积系数}} f(\underbrace{x_k}_{\text{求积节点}})$$

**这类数值积分方法通常称为机械求积，其特点是将积分求值问题归结为函数值的计算，这就避开了牛顿-莱布尼兹公式需要寻求原函数的困难。**

## 4.1.2 代数精度的概念

**定义4-1** 如果某个求积公式对于次数不超过 $m$ 的多项式均能准确地成立，但对于 $m+1$ 次的多项式就不准确成立，则称该求积公式具有 $m$ **次代数精度**。

梯形公式 $\left(T=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{[f(a)+f(b)]}{2}(b-a)\right)$ 代数精度

令$f(x)=1, x, \ldots.$

当$f(x)=1,$左边$=\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b-a$

$$\text{右边} = \frac{[1+1]}{2}(b-a) = b-a \qquad\qquad \text{左边}=\text{右边}$$

当$f(x)=x,$左边$=\int_a^b x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$

$$\text{右边} = \frac{[b+a]}{2}(b-a) = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2} \qquad\qquad \text{左边}=\text{右边}$$

当$f(x)=x^2,$左边$=\int_a^b x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3} = \frac{(b^2+ab+a^2)}{3}(b-a)$

$$\text{右边} = \frac{[b^2+a^2]}{2}(b-a) \qquad\qquad \text{左边}\neq\text{右边}$$

因此梯形公式具有一次代数精确度。

# 利用代数精度的概念构造求积公式

例4−1 确定下面公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式所具有的代数精度

$$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx Af(-h) + Bf(x_1)$$

解: 令$f(x)=1,\ x,\ x^2$，代入公式并令其相等，得

$$\begin{cases} A+B=2h \\ -hA+Bx_1=0 \\ h^2A+Bx_1^2=\dfrac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

课堂求解练习

解得 $x_1=\dfrac{1}{3}h,\ A=\dfrac{1}{2}h,\ B=\dfrac{3}{2}h.$ 于是

$$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[f(-h)+3f\left(\frac{1}{3}h\right)\right]$$

再令$f(x)=x^3$，得

$$0=\int_{-h}^{h} x^3\mathrm{d}x \neq \frac{h}{2}\left[(-h)^3+3\left(\frac{1}{3}h\right)^3\right]=-\frac{4}{9}h^4$$

故求积公式具有2次代数精度。

例4−2 确定下面公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式所具有的代数精度

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx Af(0)+Bf(x_1)+Cf(1)$$

解：令$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$，代入公式两端并令其相等，得

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ Bx_1+C=\dfrac{1}{2} \\ Bx_1^2+C=\dfrac{1}{3} \\ Bx_1^3+C=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

课堂求解练习

解得，$x_1=\frac{1}{2}, A=\frac{1}{6}, B=\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}$. 于是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}f(0)+\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}f(1)$$

再令$f(x)=x^4$，得

$$\frac{1}{5}=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x \neq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$$

故求积公式具有3次代数精度。

## 4.1.3 插值型的求积公式

设给定一组节点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

且已知 函数 $f(x)$ 在这些节点上的值 $f_k$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$，作拉格朗日插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)f_k$$

于是, 得到积分 $I=\int_a^b f(x)dx$ 的近似值

$$I_n=\int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{a}}^b \sum_{k=0}^n l_k(x)f_k\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^n\left[\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x\right]f_k=\sum_{k=0}^n A_k f_k$$

这样构造的求积公式称为插值型的求积公式。 点数（条件数目）阶导

它的余项为 $$R[f]=I-I_n=\int_a^b[f(x)-L_n(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\mathrm{d}x$$

这时的求积公式至少具有 $n$ 次代数精度 点数（条件数目）阶乘

梯形公式余项：$R[f]=\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\quad,\eta\in(a,b)$

同理，辛普森公式余项：$R[f]=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)\quad,\eta\in(a,b)$

定理4-1 形如 $I_n=\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 的积分公式至少有$n$ 次代数精度的充分必要条件是：它是插值型的。

**辛普森(Simpson)公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

**Theorem 1.11 (Weighted Integral Mean Value Theorem).** Assume that $f, g \in C[a, b]$ and $g(x) \geq 0$ for $x \in [a, b]$. Then there exists a number $c$, with $c \in (a, b)$, such that

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{14}$$

**Theorem 1.10 (Mean Value Theorem for Integrals).** Assume that $f \in C[a, b]$. Then there exists a number $c$, with $c \in (a, b)$, such that

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

The value $f(c)$ is the average value of $f$ over the interval $[a, b]$.

**Theorem 1.8 (First Fundamental Theorem).** If $f$ is continuous over $[a, b]$ and $F$ is any antiderivative of $f$ on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{where } F'(x) = f(x). \tag{12}$$

**Theorem 1.6 (Mean Value Theorem).** Assume that $f \in C[a, b]$ and that $f'(x)$ exists for all $x \in (a, b)$. Then there exists a number $c$, with $c \in (a, b)$, such that

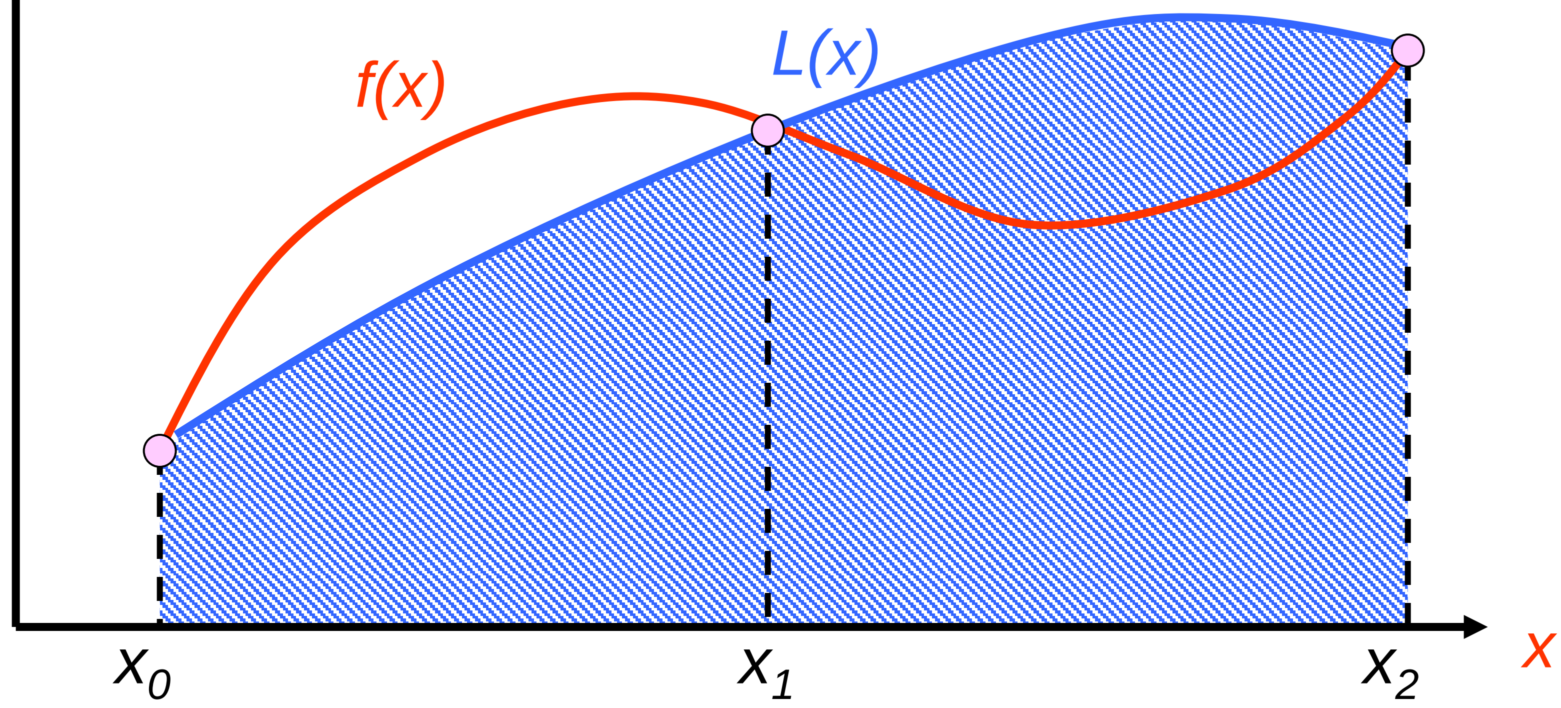
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{11}$$

# Simpson's Rule

## Approximate the function by a parabola

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{(b-a)}{6}\left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$



## 4.2 牛顿-柯特斯公式

### 一、柯特斯系数

设将求积区间$[a,b]$做$n$等分，步长$h=\dfrac{b-a}{n}$,在等距节点$x_k=a+kh$构造出的插值型求积公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}\mathbf{C}_k^{(n)}f(x_k),$$

称为 牛顿-柯特斯公式（**Newton-Cotes公式**），

$\mathbf{C}_k^{(n)}$称为 柯特斯**系数.**

由插值型求积公式：$I_n=\int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\left[\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x\right]f_k$ 知

求积系数 $A_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x,\ k=0,1,\cdots,n$

引入变换 $x=a+th$

写开推导

则有

$$C_k^{(n)} = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)\mathrm{d}t.$$

当$n=1$时，得到梯形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx T = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

当$n=2$时，得到**辛普森(Simpson)公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx S = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$n$=3呢？推导

当$n=4$时，得到**柯特斯(Cotes)公式**（英文书称Boole公式）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx C = \frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)],$$

其中$x_k = a+kh$，$h = \dfrac{b-a}{4}$

柯特斯系数表. $n \geq 8$ 时$C_k^{(n)}$ 出现负值，N-C 公式不稳定

**Report: Cotes公式？还是Boole公式？数值积分历史**

由于构造Newton-Cotes公式需要Cotes系数,将其列表如下:

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | | | | | |
| 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | | | | | | |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | | | | | |
| 4 | $\frac{7}{90}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{7}{90}$ | | | | |
| 5 | $\frac{19}{288}$ | $\frac{25}{96}$ | $\frac{25}{144}$ | $\frac{25}{144}$ | $\frac{25}{96}$ | $\frac{19}{288}$ | | | |
| 6 | $\frac{41}{840}$ | $\frac{9}{35}$ | $\frac{9}{280}$ | $\frac{34}{105}$ | $\frac{9}{280}$ | $\frac{9}{35}$ | $\frac{41}{840}$ | | |
| 7 | $\frac{751}{17280}$ | $\frac{3577}{17280}$ | $\frac{1323}{17280}$ | $\frac{2989}{17280}$ | $\frac{2989}{17280}$ | $\frac{1323}{17280}$ | $\frac{3577}{17280}$ | $\frac{751}{17280}$ | |
| 8 | $\frac{989}{28350}$ | $\frac{5888}{28350}$ | $\frac{-928}{28350}$ | $\frac{10496}{28350}$ | $\frac{-4540}{28350}$ | $\frac{10496}{28350}$ | $\frac{-928}{28350}$ | $\frac{5888}{28350}$ | $\frac{989}{28350}$ |

**例1** 设$f(x)\in C^2[a,b]$，求$n=1$时的Newton-Cotes公式并估计误差.

**解** 计算Cotes系数

$$C_0^{(1)}=-\int_0^1(t-1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2},\quad C_1^{(1)}=\int_0^1 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2},$$

于是有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$R[f]=\frac{1}{2!}\int_a^b f''(\xi_x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

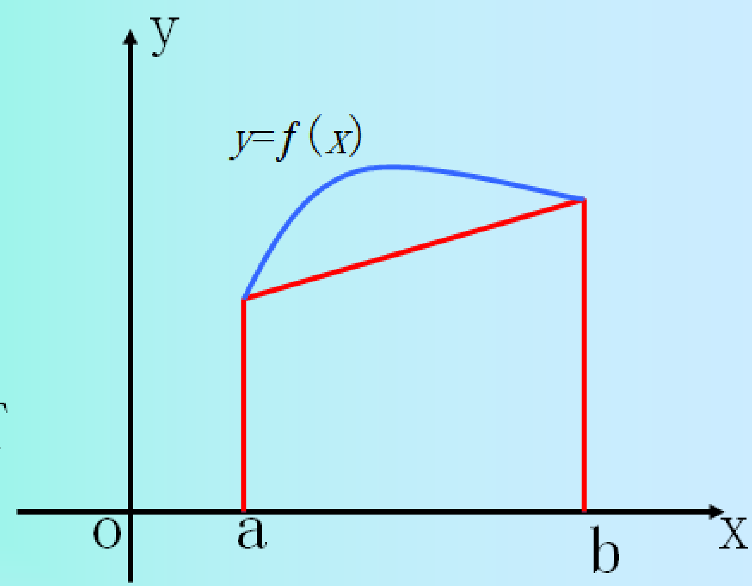
$$=\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

课堂推导

若记 $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$ ，则有误差估计

$$|R[f]| \le \frac{M_2}{12}(b-a)^3$$

从几何上看：




所以公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = \mathrm{T}$$

也称为梯形公式，记为T.

**例2** 设 $f(x) \in C^4[a, b]$，求 $n=2$ 时的Newton-Cotes公式并估计误差.

**解** 计算Cotes系数

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{1}{6},$$

课堂推导

$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)dt = \frac{4}{6},$$

$$C_2^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^2 t(t-1)dt = \frac{1}{6},$$

于是有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)] = S.$$

称之为**Simpson公式或抛物线公式**，记为$S$.

容易证明Simpson公式对不高于三次的多项式精确成立，即

$$\int_a^b p_3(x)dx = \frac{b-a}{6}[p_3(a)+4p_3(\frac{a+b}{2})+p_3(b)]$$

构造三次多项式$H_3(x)$，使满足 $H_3(a)=f(a)$ ，$H_3(b)=f(b)$，

$H_3(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2}), H_3'(\frac{a+b}{2}) = f'(\frac{a+b}{2})$，这时插值误差为

见教材36页

不做要求

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b),\quad \xi_x\in(a,b)$$

于是有

$$\begin{aligned}R[f]&=\int_a^b f(x)dx-S\\&=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b H_3(x)dx\\&=\frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx\\&=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx\\&=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)\qquad,\eta\in(a,b)\end{aligned}$$

若记 $M_4=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$, 则有

$$\left|R[f]\right|\le\frac{M_4}{2880}(b-a)^5$$

不做要求

**例3** 求$n$=4的Newton-Cotes公式及误差.

**解** 查表可得

$$C_0^{(4)}=\frac{7}{90},\quad C_1^{(4)}=\frac{16}{45},C_2^{(4)}=\frac{2}{15},\quad C_3^{(4)}=\frac{16}{45},\quad C_4^{(4)}=\frac{7}{90}$$

于是有

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

其中, $x_k=a+kh$ , $k=0,1,2,3,4$ , $h=(b-a)/4$ .

称之为**Cotes公式**，记为C。其误差为

$$R[f]=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta)$$

$$=-\frac{(b-a)^7}{1935360}f^{(6)}(\eta)\qquad,\eta\in(a,b)$$

例4－3 运用梯形公式、辛普森公式分别计算积分$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$ ，并估计误差。

解： 运用梯形公式

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}[e^0 + e^1] = 1.8591409$$

其误差为 $$|R[f]| = \left| -\frac{1}{12} e^{\eta} (1-0)^3 \right| \le \frac{e}{12} = 0.2265235, \quad \eta \in (0,1)$$

运用辛普森公式

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}\left[ e^0 + 4e^{\frac{1}{2}} + e^1 \right] = 1.7188612$$

其误差为

$$|R[f]| = \left| -\frac{1}{180} e^{\eta} \left( \frac{1-0}{2} \right)^4 \right| = \left| -\frac{1}{2880} e^{\eta} \right| \le \frac{e}{2880} = 0.00094385, \quad \eta \in (0,1)$$

## 牛顿-柯特斯公式的代数精度

**定理4－2** 若$n$为偶数, 则$n$阶 N-C 公式至少有$n+1$次代数精度.

# §2 求积公式的代数精度

**定义4.1** 若求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对$f(x)=x^j$（$j$=0, 1, 2, ..., $m$)都精确成立, 但对$f(x)=x^{m+1}$不精确成立, 即

$$\int_a^b x^j dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^j \qquad , j = 0,1,2,\ldots,m$$

$$\int_a^b x^{m+1} dx \neq \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^{m+1}$$

则称此公式**具有$m$次代数精度.**

可见, 若公式具有$m$次代数精度, 则公式对所有次数不超过m的多项式都精确成立. n+1个节点的插值型求积公式至少具有n次代数精度, n是偶数时具有n+1次代数精度.

若求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ ，具有$n$次代数精度，则

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \ldots + A_n = b - a \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = \dfrac{b^2 - a^2}{2} \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_0^n A_0 + x_1^n A_1 + \ldots + x_n^n A_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{cases} \tag{4.1}$$

这是关于$A_0, A_1, \ldots, A_n$的线性方程组，其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \ne 0$$

所以方程组(4.1)有唯一解。

**例5** 确定形如

$$\int_0^3 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(3)$$

的求积公式，使其代数精度尽可能高。

**解** 令公式对 $f(x)=1, x, x^2$ 都精确成立, 则

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=3 \\ A_1+3A_2=4.5 \\ A_1+9A_2=9 \end{cases}$$ ,解之得: $A_0=0, A_1=9/4, A_2=3/4.$

数值求积公式为

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{4}[3f(1)+f(3)]$$

**例6** 试确定参数 $A_0, A_1, A_2$, 使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

具有尽可能高的代数精度,并问代数精度是多少?

**解** 令公式对 $f(x)=1, x, x^2$ 都精确成立,则

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=2 \\ -A_0+A_2=0 \\ A_0+A_2=2/3 \end{cases}$$

,解得: $A_0=A_2=1/3$, $A_1=4/3$.

求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$$

当 $f(x)=x^3$ 时,左=0,右=0,公式也精确成立.

当 $f(x)=x^4$ 时,左=2/5,右=2/3,公式不精确成立.

所以,此公式的代数精度为3.

**例7** 试确定参数$A_0, A_1, A_2$, 使求积公式

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

具有尽可能高的代数精度, 并问代数精度是多少?

**解** 令公式对$f(x)=1, x, x^2$都精确成立, 则

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=2/3 \\ -A_0+A_2=0 \\ A_0+A_2=2/5 \end{cases}, \text{解得}: A_0=A_2=1/5,\quad A_1=4/15.$$

求积公式为

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \approx \frac{1}{15}[3f(-1)+4f(0)+3f(1)]$$

经验证公式对$f(x)=x^3$精确成立, 但对$f(x)=x^4$不精确成立, 公式的代数精度为3.

课堂练习

**例8** 试确定参数$A_0$, $A_1$和$x_0$, $x_1$, 使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

具有尽可能高的代数精度, 并问代数精度是多少?

**解** 令公式对$f(x)=1, x, x^2, x^3$都精确成立, 则

$$\begin{cases} A_0+A_1=2 \\ A_0x_0+A_1x_1=0 \\ A_0x_0^2+A_1x_1^2=2/3 \\ A_0x_0^3+A_1x_1^3=0 \end{cases} \text{，解得：} \begin{cases} A_0 = A_1 = 1 \\ -x_0 = x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

课堂练习

求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

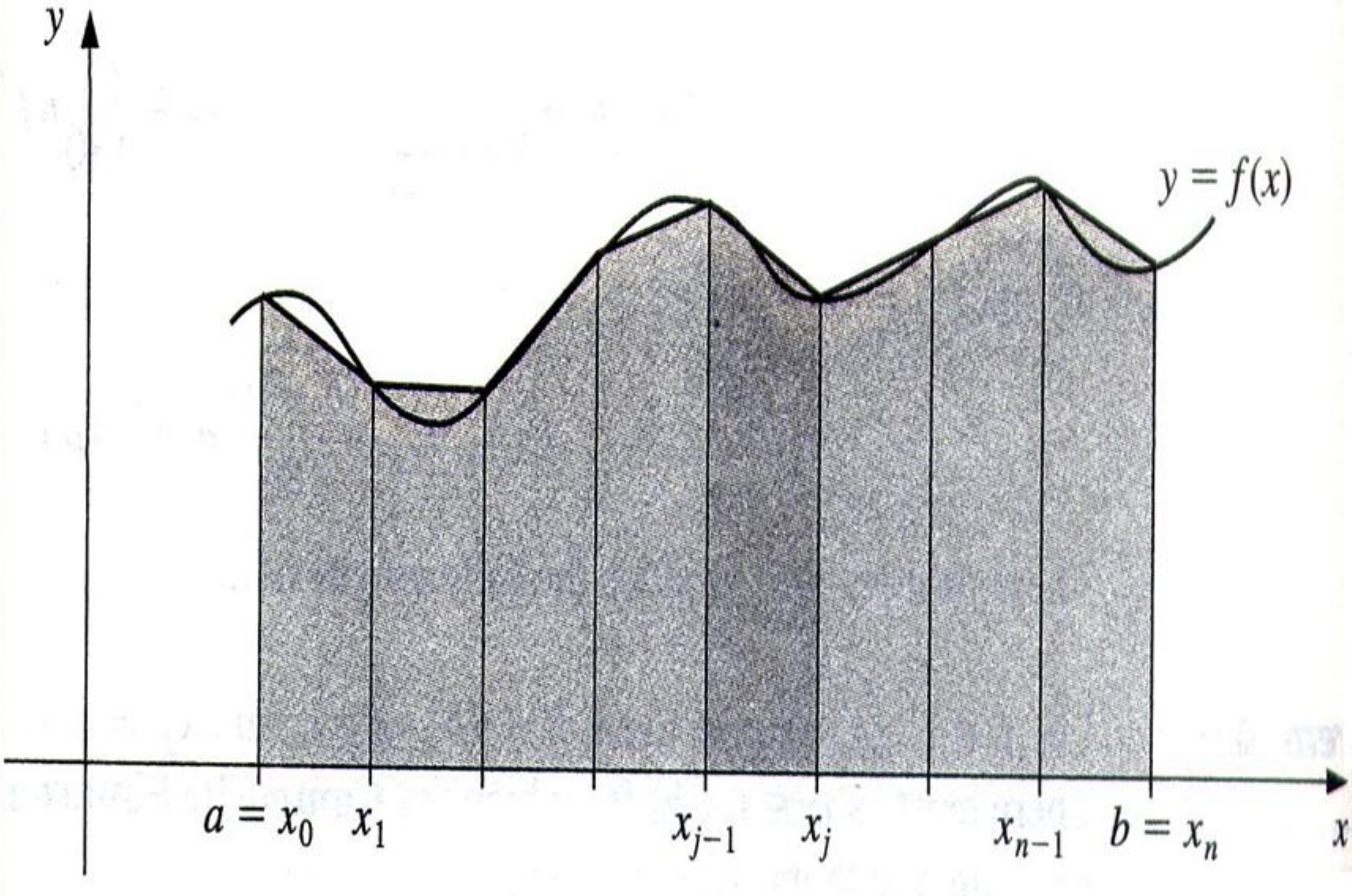
求积公式的代数精度为3。

课堂练习

# 4.3 复合求积公式

## 一、问题与基本思想

在使用牛顿-柯特斯公式时将导致求积系数出现负数(当$n≥8$时,牛顿.柯特斯求积系数会出现负数)，因而不可能通过提高阶的方法来提高求积精度。为了提高精度通常采用将积分区间划分成若干个小区间，在各小区间上采用低次的求积公式(梯形公式或辛普森公式)，然后再利用积分的可加性，把各区间上的积分加起来，便得到新的求积公式，这就是复化求积公式的基本思想。本节只讨论复化的梯形公式和复化的辛普森公式。




复化梯形公式积分法

## 二、复合梯形公式

将区间 $[a,b]$ 等分为 $n$ 个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$, 其中

$$x_k = a + kh, \quad \left( h = \frac{b-a}{n}, k = 0,1,\cdots,n-1 \right),$$

并在每个小区间上应用梯形公式, 则得复合梯形公式

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] + R_n[f]$$

记 $T_n = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k) + f(x_{k+1})] = \frac{h}{2}\left[ f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$

称为复合梯形公式，余项为

$$R_n[f] = I - T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[ -\frac{h^3}{12} f''(\eta_k) \right], \quad \eta_k \in (x_k, x_{k+1})$$

$$= -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \qquad \eta \in (a,b)$$

课堂推导

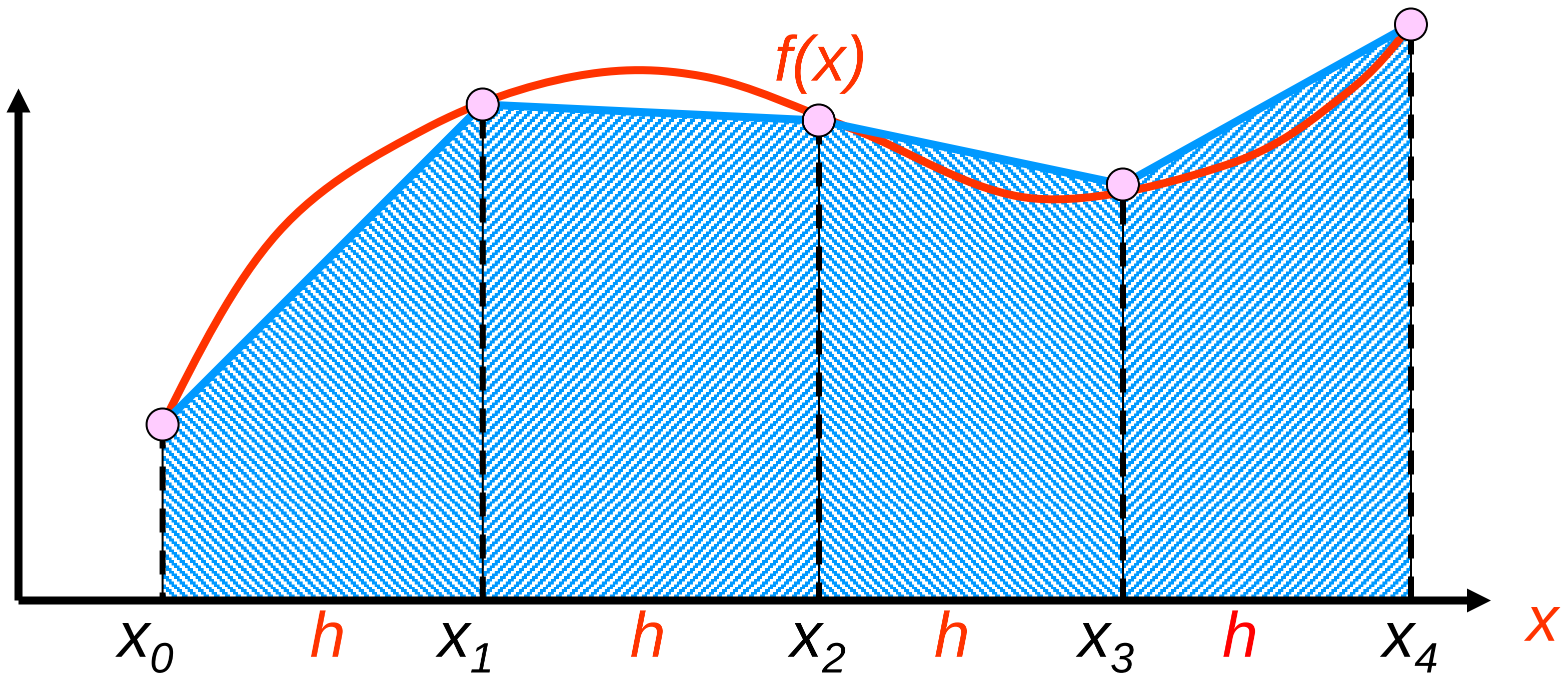
# Composite Trapezoid Rule

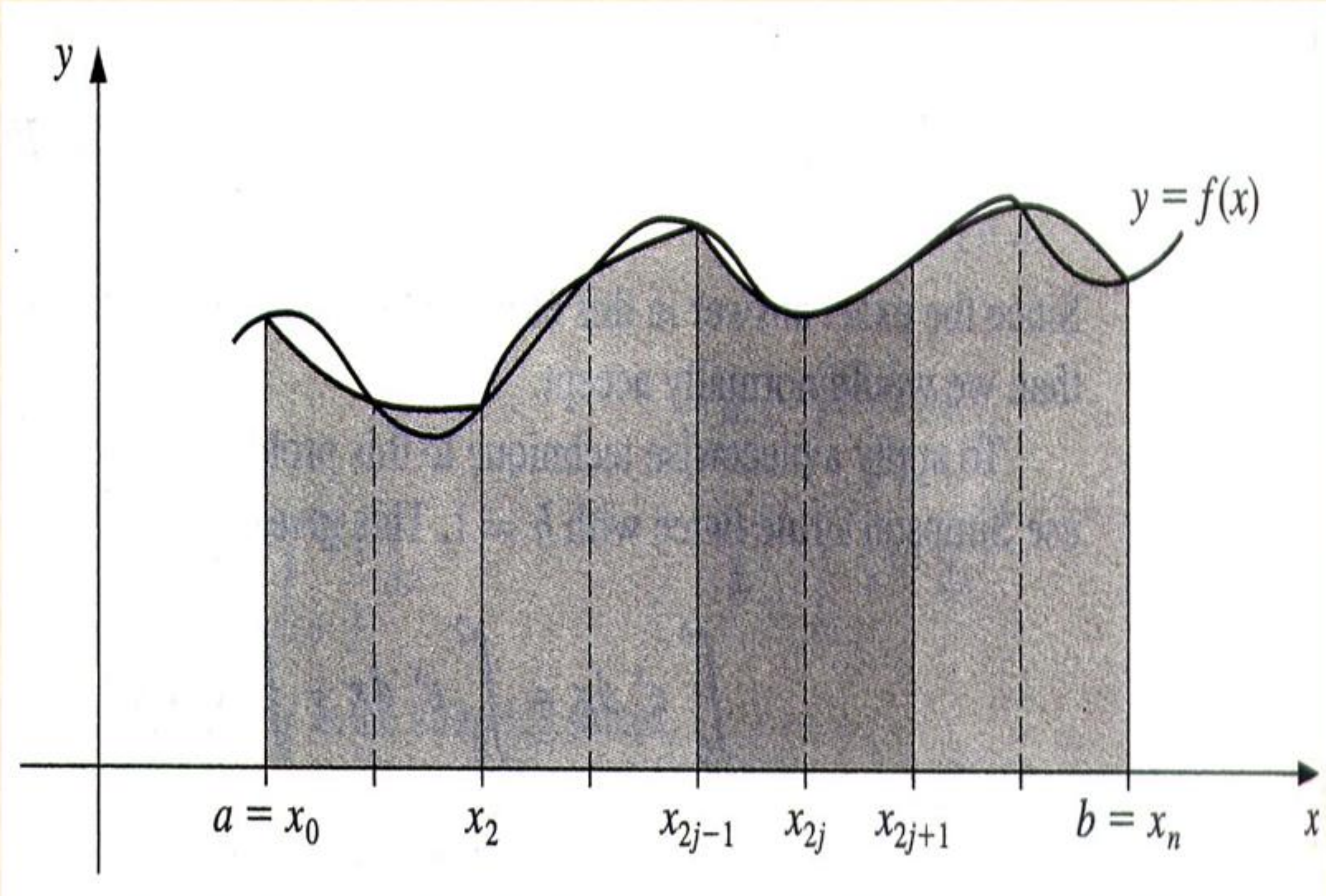
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$






复化Simpson公式积分法

## 三、复合辛普森公式

记 $[x_k, x_{k+1}]$ 的中点为 $x_{k+\frac{1}{2}}$，在每个小区间上应用辛普森公式, 则得复合辛普森公式

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]+R_n[f],$$

记 $$S_n=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

称为复合辛普森公式。

1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 2, 4, 1

# Composite Simpson's Rule

**Multiple applications of Simpson's rule**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$+ \cdots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots$$

$$+ 4f(x_{2i-1}) + 2f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + \cdots$$

$$+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$$

注意中英文讲法之区别

余项为 $R_n[f]=I-S_n=-\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_k),\qquad \eta_k\in(x_k,x_{k+1})$

$$=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta),\qquad \eta\in(a,b)$$

**例4－4** 对于函数$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，给出$n=8$时的函数表，试用复合梯形公式及复合辛普森公式计算积分 $I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 。

| $x_i$ | 0 | 1/8 | 1/4 | 3/8 | 1/2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1 (极限) | 0.9973978 | 0.9896158 | 0.9767267 | 0.9588510 |
| $x_i$ | 5/8 | 3/4 | 7/8 | 1 | |
| $f(x_i)$ | 0.9361556 | 0.9088516 | 0.8414709 | 0.8414709 | |

$$T_8=\frac{1}{8}\left[\frac{f(0)}{2}+f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)+\frac{f(1)}{2}\right]$$
$$\approx 0.945\ 690\ 9.$$

$$S_4=\frac{1}{4\times 6}\left\{f(0)+4\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\right.$$
$$\left.+2\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]+f(1)\right\}\approx 0.946\ 083\ 2$$

例4－5 计算积分$I=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$, 若用复合梯形公式, 问区间$\left[0,\pi/2\right]$应分多少等份才能使误差不超过$10^{-3}/2$, 若取同样的求积节点，改用复合辛普森公式，截断误差是多少？（辛普森公式需引入半个节点值）

解：　由于$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f^{(4)}(x)=\sin x,\ b-a=\dfrac{\pi}{2}$。

故复合梯形公式, 要求

$$\left|R_n[f]\right|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\right|\le\frac{1}{12}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\le\frac{1}{2}\times10^{-3},\ \eta\in\left(0,\pi/2\right)$$

即$n^2\ge\dfrac{\pi^3}{48}\times10^3,\ n\ge25.416,$ 取$n=26$, 即将区间$\left[0,\pi/2\right]$分为26等份时，用复合梯形公式计算，截断误差不超过$10^{-3}/2$。

用复合辛普森公式(考虑引入半个节点值)，截断误差为

$$\left|R_S[f]\right|=\left|-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)\right|\le\frac{\pi}{180\times2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^4\le0.1162608\times10^{-7}$$

例4－6 计算积分I=$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$, 若用复合梯形公式，问区间[0, 1]应分多少等份才能使误差不超过$10^{-5}/2$；若改用复合普森公式，要达到同样精度，区间[0, 1]应该分多少等份。

解： 由于$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ f^{(4)}(x)=e^x,\ b-a=1,$ 对复合梯形公式$T_n$ 余项

$$|R[f]|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)\right|\le\left|-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 e\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

由此有$n^2\ge\dfrac{e}{6}\times10^5,\ n\ge212.85,$ 可取$n=213,$ 即将区间[0,1]分为213等份，则可使误差不超过$10^{-5}/2$。

复合辛普森公式计算积分，则由余项公式可知要满足精度要求，必须使

$$|R[f]|=\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4\left|f^4(\xi)\right|\le\frac{1}{180}\left(\frac{1}{2n}\right)^4 e\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

由此得 $n^4\ge\dfrac{e}{144}\times10^4,\ n\ge3.707$取4, $2n\ge2*3.707=7.414$取8 ， 也即，复合辛普森公式可达到精度要求，此时区间[0,1] 实际上应分为8 等份。

课堂练习与确认

# Error Analysis

**Corollary 7.3 (Simpson's Rule: Error Analysis).** Suppose that $[a, b]$ is subdivided into $2M$ subintervals $[x_k, x_{k+1}]$ of equal width $h = (b - a)/(2M)$. The composite Simpson rule

$$(14) \qquad S(f, h) = \frac{h}{3}(f(a) + f(b)) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1})$$

is an approximation to the integral

$$(15) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = S(f, h) + E_S(f, h).$$

Furthermore, if $f \in C^4[a, b]$, there exists a value $c$ with $a < c < b$ so that the error term $E_S(f, h)$ has the form

$$(16) \qquad E_S(f, h) = \frac{-(b - a) f^{(4)}(c) h^4}{180} = \boldsymbol{O}(h^4).$$

# 4.4 龙贝格求积公式

## 一、梯形法的递推化 (变步长求积法)

把区间 $[a,b]$ 作 $n$ 等分得 $n$ 个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$, $h=\dfrac{b-a}{n}$,

则复合梯形公式

$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right].$$

把区间 $[a,b]$ 作 $2n$ 等分，记 $[x_k, x_{k+1}]$ 的中点 $x_{k+\frac{1}{2}}=\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}$,

则复合梯形公式

$$T_{2n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)[f(x_k)+2f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}}).$$

于是可以逐次对分形成一个序列$\{T_1,T_2,T_4,T_8,\ldots\}$, 此序列收敛于积分真值 $I$。当 $|T_{2n}-T_n|<\varepsilon$时，取$T_{2n}$为 $I$ 的近似值。以上算法称为变步长求积法。 但由于此序列收敛太慢 。下节我们将其改造成为收敛快的序列。

例如 利用变步长的梯形法求$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的近似值。

解：
$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355$$
$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=0.9397933$$
$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=0.9445135$$
$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]=0.956909$$
$\cdots$

## 二、龙贝格算法 (1955)

**如何提高收敛速度以节省计算量是龙贝格算法要讨论的中心问题。**

Richardson外推extrapolation: 1910

$$I - T_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta_1) \quad \eta_1 \in (a,b)$$

$$I - T_{2n} = -\frac{b-a}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_2) \quad \eta_2 \in (a,b)$$

假定$f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则有

$$\frac{I - T_n}{I - T_{2n}} \approx 4$$ 整理，移项得

于是 $I \approx \dfrac{4T_{2n} - T_n}{4-1}$ 和 $I - T_{2n} \approx \dfrac{1}{3}（T_{2n} - T_n）$

记 $S_n = \dfrac{4T_{2n} - T_n}{4-1}$

这样我们从收敛较慢的$\{T_n\}$序列推出了收敛较快的$\{S_n\}$序列。

可以证明$\{S_n\}$序列实际上就是逐次分半的复化辛普森公式序列。

同理， $I - S_{2n} \approx \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$ 和 $I \approx \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n$

复化柯特斯公式 $$C_n = \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1}$$

龙贝格求积公式 $$R_n = \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n = \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3 - 1}$$

这样我们从$\{C_n\}$序列又推出了收敛更快的$\{R_n\}$序列. $\{R_n\}$序列也称为龙贝格序列。

总结：我们从收敛较慢的$\{T_n\}$序列只用了一些四则运算，便推出了收敛更快的$\{S_n\}$序列, $\{C_n\}$序列和$\{R_n\}$序列。

推导细节

$$I - S_n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta) \qquad ,\eta \in (a,b)$$

$$I - S_{2n} = -\frac{(b-a)^5}{2880(2n)^4} f^{(4)}(\overline{\eta}) \qquad ,\overline{\eta} \in (a,b)$$

所以有

$$\frac{I - S_n}{I - S_{2n}} \approx 16$$

由此得

$$I \approx \frac{16S_{2n} - S_n}{15} \qquad 或 \qquad I - S_{2n} \approx \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$$

一方面，若$|S_{2n}-S_n|<15\varepsilon$，则有近似误差$|I-S_{2n}|<\varepsilon$ .

另一方面, $(16S_{2n}-S_n)/15$应比$S_n$和$S_{2n}$的近似程度更好.

事实上, 有 $(16S_{2n}-S_n)/15=C_n$

类似地，由于

$$I - C_n = -\frac{(b-a)^7}{1935360 n^6} f^{(6)}(\eta) \qquad ,\eta \in (a,b)$$

$$I - C_{2n} = -\frac{(b-a)^7}{1935360 (2n)^6} f^{(6)}(\bar{\eta}) \qquad ,\bar{\eta} \in (a,b)$$

所以有

$$\frac{I - C_n}{I - C_{2n}} \approx 64$$

由此得

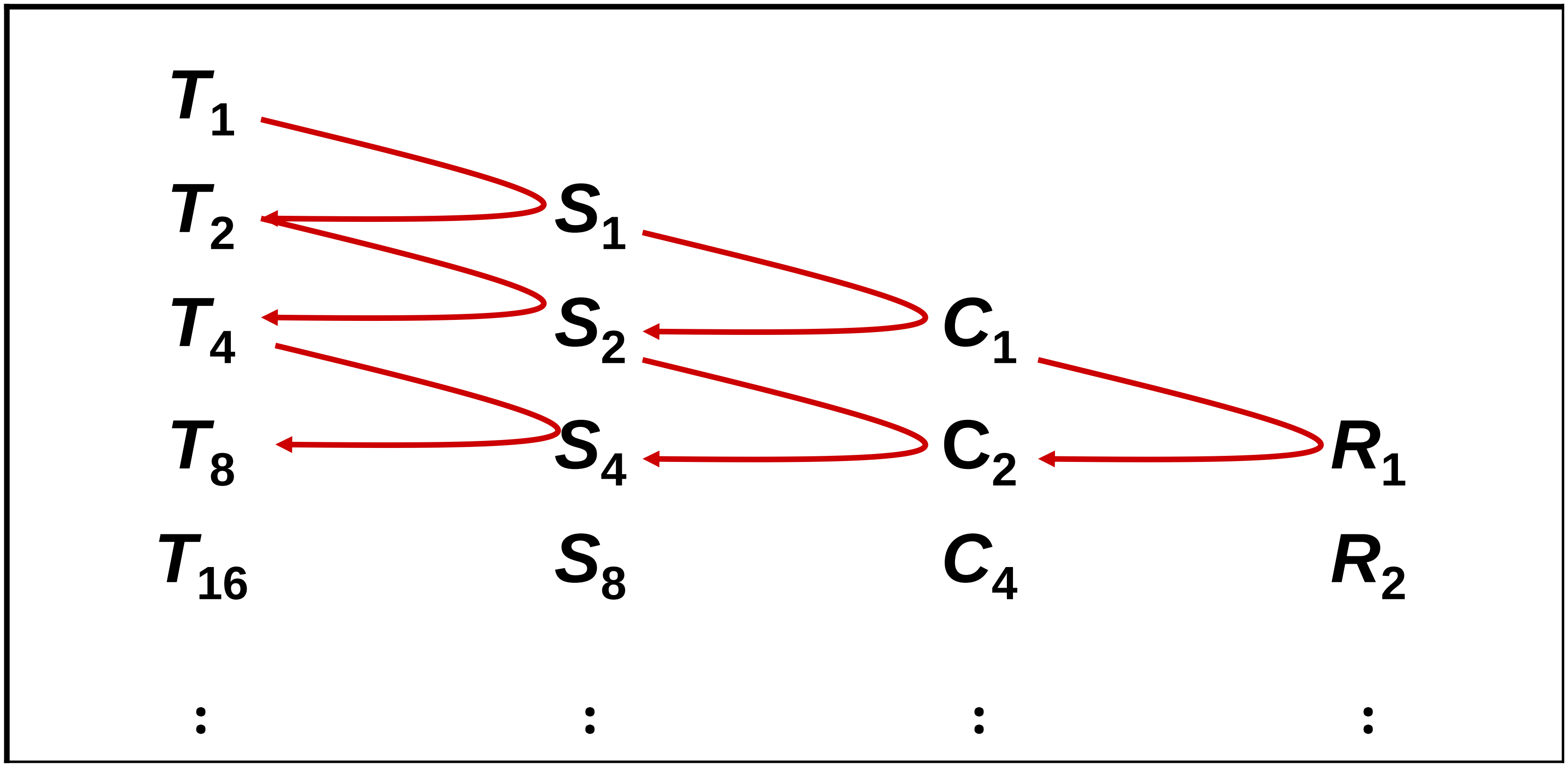
$$I \approx \frac{64 C_{2n} - C_n}{63} \qquad \text{或} \qquad I - C_{2n} \approx \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n)$$

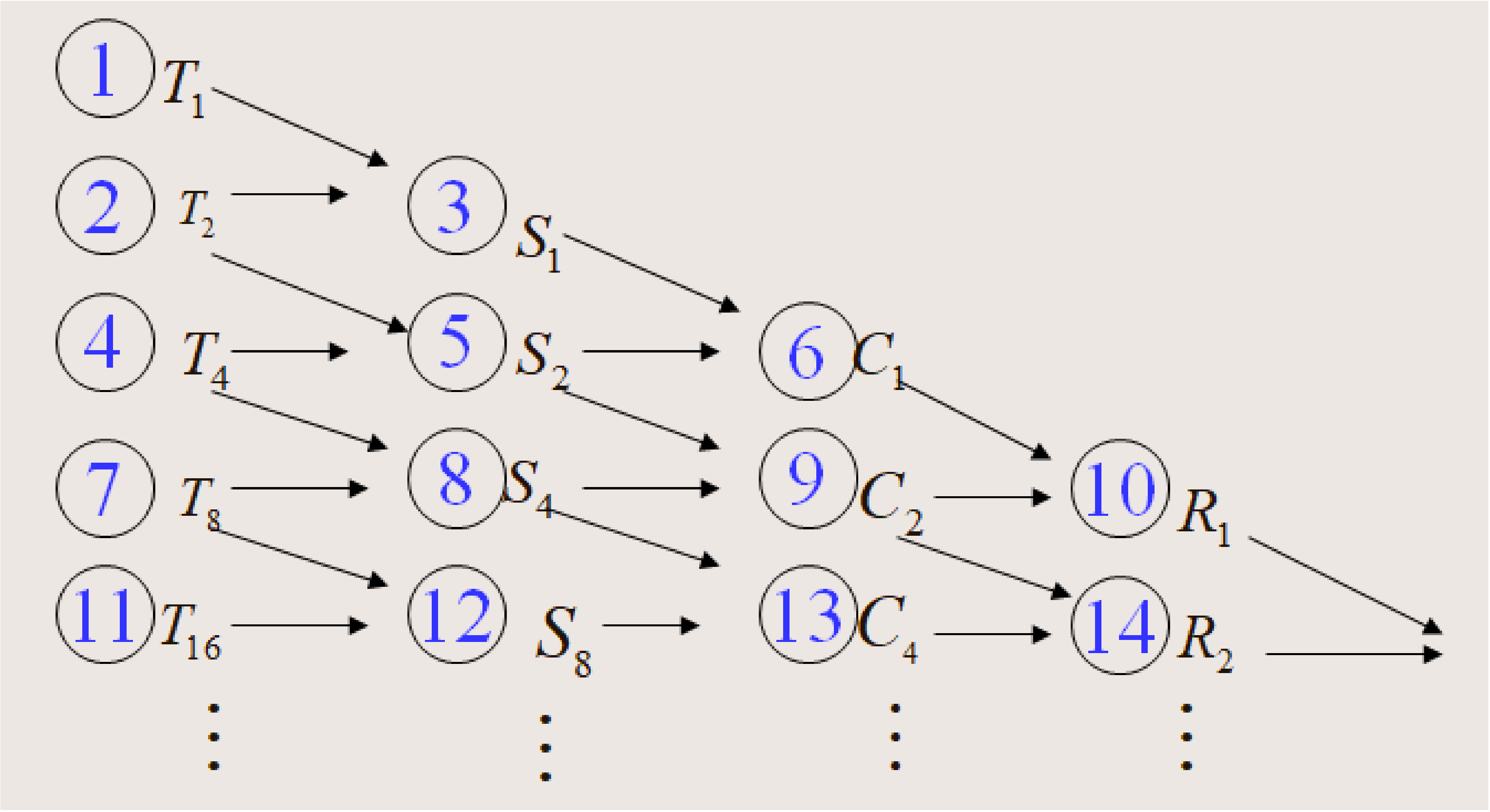
一方面，若 $|C_{2n}-C_n|<63\varepsilon$，则有近似误差 $|I-C_{2n}|<\varepsilon$ .

另一方面，$(64C_{2n}-C_n)/63$ 应比 $C_n$ 和 $C_{2n}$ 的近似程度更好.

记 $(64C_{2n}-C_n)/63=R_n$，称为**Romberg求积公式**.

# 运算顺序表





1
$T_1$
2
$T_2$
3
$S_1$
4
$T_4$
5
$S_2$
6
$C_1$
7
$T_8$
8
$S_4$
9
$C_2$
10
$R_1$
11
$T_{16}$
12
$S_8$
13
$C_4$
14
$R_2$

实际计算可按下表顺序进行

| $k$ | 区间等分数 $n=2^k$ | 梯形公式 $T_1^{(k)}$ | Simpson公式 $T_2^{(k)}$ | Cotes公式 $T_3^{(k)}$ | Romberg公式 $T_4^{(k)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $T_1^{(0)}$ | | | |
| 1 | 2 | $T_1^{(1)}$ | $T_2^{(0)}$ | | |
| 2 | 4 | $T_1^{(2)}$ | $T_2^{(1)}$ | $T_3^{(0)}$ | |
| 3 | 8 | $T_1^{(3)}$ | $T_2^{(2)}$ | $T_3^{(1)}$ | $T_4^{(0)}$ |
| 4 | 16 | $T_1^{(4)}$ | $T_2^{(3)}$ | $T_3^{(2)}$ | $T_4^{(1)}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

**例11** 利用Romberg积分公式计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

解 按递推公式计算,结果如下

| $k$ | $n=2^k$ | $T_1^{(k)}$ | $T_2^{(k)}$ | $T_3^{(k)}$ | $T_4^{(k)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3.0000000 | | | |
| 1 | 2 | 3.1000000 | 3.1333333 | | |
| 2 | 4 | 3.1311765 | 3.1415687 | 3.1421177 | |
| 3 | 8 | 3.1389885 | 3.1415925 | 3.1415941 | 3.1415858 |
| 4 | 16 | 3.1409416 | 3.1415926 | 3.1415926 | 3.1415926 |

可见,由于$|T_1^{(4)}-T_1^{(3)}|=0.0019531$,应有$|I-T_1^{(4)}|<0.000651033$.

由于$|T_2^{(3)}-T_2^{(2)}|=0.0000001$,应有$|I-T_2^{(3)}|<0.00000000666$.

由于$|T_3^{(2)}-T_3^{(1)}|=0.0000015$,应有$|I-T_3^{(2)}|<0.0000000238$.

由于$|T_4^{(1)}-T_4^{(0)}|=0.0000068$,应有$|I-T_4^{(1)}|<0.0000002666$.

**例4－7** 利用龙贝格求积算法求$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的近似值

| $k$ | $T_2^k$ | $S_2^{k-1}$ | $C_2^{k-2}$ | $R_2^{k-3}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.9207355 | | | |
| 1 | 0.9397933 | 0.9461459 | | |
| 2 | 0.9445135 | 0.9460869 | 0.9460830 | |
| 3 | 0.9456909 | 0.9460833 | 0.9460831 | 0.9460831 |

这里利用二分3次的数据（它们的精度都很差，只有两三位有效数字）通过三次加速求得$R_1$=0.9460831,这个结果的每一位数字都是有效数字，可见加速效果是十分显著的。

# 4.5 高斯求积公式

## 一般理论

机械求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

含有 $2n+2$ 个待定参数，$x_k$ 和 $A_k (k=0,1,\cdots,n)$ 。插值型求积公式的代数精度至少 $n$ 次。如果适当选取 $x_k$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 有可能使求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，这类求积公式称为高斯（Gauss）求积公式。

一般地，我们研究带权积分

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \ ,$$

**定义4-2** 若一组节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，使插值型求积公式具有$2n+1$次代数精度，则称此组节点为**高斯点**，并称此求积公式为**高斯求积公式** 。

构造高斯求积公式方法（一）

利用代数精度的定义，只要求解方程组

$$\int_a^b x^m \rho(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^m \text{ , } m = 0,1,\cdots,2n+1.$$

例4-8 试构造高斯求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) \text{ .}$$

解：令公式对于$f(x) = 1, x, x^2, x^3$准确成立，得

课堂推导

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \dfrac{2}{3} \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 = \dfrac{2}{5} \\ x_0^2 A_0 + x_1^2 A_1 = \dfrac{2}{7} \\ x_0^3 A_0 + x_1^3 A_1 = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

解得

Report

$$x_0 = 0.821\,162,\quad A_0 = 0.389\,111$$

$$x_1 = 0.289\,949,\quad A_1 = 0.277\,556$$

于是， 高斯公式为

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x \approx 0.389111 f(0.821162) + 0.277556 f(0.289949)$$

## 非线性方程(组)：MATLAB内置函数 solve, vpasolve, fsolve, fzero, roots [MATLAB]

MATLAB函数 solve, vpasolve, fsolve, fzero, roots 功能和信息概览

| 求解函数 | 多项式型 | 非多项式型 | 一维 | 高维 | 符号 | 数值 | 算法 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| solve | 支持，得到全部符号解 | 若可符号解则得到根 | 支持 | 支持 | 支持 | 当无符号解时 | 符号解方法：利用等式性质得到标准可解函数的方法<br>基本即模拟人工运算 |
| vpasolve | 支持，得到全部数值解 | （随机初值）得到一个实根 | 支持 | 支持 | × | 支持 | 未知 |
| fsolve | 由初值得到一个实根 | 由初值得到一个实根 | 支持 | 支持 | × | 支持 | **优化方法**，即用优化方法求解函数距离零点最近，具体方法为信赖域方法。<br>包含预处理共轭梯度(PCG)、狗腿(dogleg)算法和Levenberg-Marquardt算法等 |
| fzero | 由初值得到一个实根 | 由初值得到一个实根 | 支持 | × | × | 支持 | **一维解非线性方程方法**，二分法、二次反插和割线法的混合运用<br>具体原理见数值求解非线性方程的二分法、不动点迭代和牛顿法和插值方法 |
| roots | 支持，得到全部数值解 | × | 支持 | × | × | 支持 | **特征值方法**，即将多项式转化友矩阵(companion matrix)<br>然后使用求矩阵特征值的算法求得所有解（那是另外一个问题了） |

https://www.cnblogs.com/gentle-min-601/p/9672221.html

**注：同学可整该网页为PPT后课堂开讲**

## 构造高斯求积公式方法（二）

先确定了节点 $x_k$ ，后利用方程组求解系数$A_k$ 。

**定理4-3** 插值型求积公式的节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 是高斯点$\Leftrightarrow$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

与任何次数不超过$n$ 的多项式$P(x)$ 带权$\rho(x)$ 正交, 即

$$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)P(x)\mathrm{d}x = 0.$$

定理 4-3 表明在$[a,b]$上带权的$n+1$次正交多项式的零点就是求积公式的高斯点，有了求积节点$x_k$ （$0, 1,\cdots$ ，$n$ ），再利用代数精度概念得到一组关于求积系数$A_0$ ，$A_1$ ，$\cdots$ ，$A_n$ 的线性方程组。解此方程组的系数$\{A_k\}$ 。也可直接由插值多项式求出求积系数。

如愿可看书119页证明

此处$(n+1)$个节点

## § 5.2 多种Gauss型求积公式

### (1) Gauss-Legendre求积公式

区间[-1, 1]上权函数$\rho(x)$=1的Gauss型求积公式, 称为**Gauss-Legendre求积公式**,其Gauss点为Legendre多项式的零点. 公式的Gauss点和求积系数可在数学用表中查到 .

| $n$ | $x_k$ | $A_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | ±0.5773502692 | 1 |
| 3 | ±0.7745966692 | 0.5555555556 |
| | 0 | 0.8888888889 |
| 4 | ±0.8611363116 | 0.3478548451 |
| | ±0.3399810436 | 0.6521451549 |
| 5 | ±0.9061798459 | 0.2369268851 |
| | ±0.5384693101 | 0.4786286705 |
| | 0 | 0.5688888889 |
| 6 | ±0.9324695142 | 0.1713244924 |
| | ±0.6612093865 | 0.3607615730 |
| | ±0.2386191861 | 0.4679139346 |
| 7 | ±0.9491079123 | 0.1294849662 |
| | ±0.7415311856 | 0.2797053915 |
| | ±0.4058451514 | 0.3818300505 |
| | 0 | 0.4179591837 |
| 8 | ±0.9602898565 | 0.1012285363 |
| | ±0.7966664774 | 0.2223810345 |
| | ±0.5255324099 | 0.3137066459 |
| | ±0.1834346425 | 0.3626837834 |

**注意：此表中*n*为点数【非以前的*n*，相当于以前的(*n*+1)】。**

Gauss-Legendre求积公式的余项为

$$R[f]=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}f^{(2n)}(\eta)\quad,\eta\in(-1,1)$$

例13　用3点Gauss公式计算积分 $I=\int_{-1}^{1}\cos x dx$.

解　查表得 $x_1$=−0. 7745966692, $x_2$=0, $x_3$=0. 7745966692, $A_1$=$A_3$=0. 5555555556, $A_2$=0. 8888888889, 所以有

$$I\approx A_1\cos x_1+A_2\cos x_2+A_3\cos x_3=1.68300355$$

误差为

$$R[f]=\left|\frac{2^7\times 6^4}{(6!)^3\times 7}(-\cos\eta)\right|\le 6.3492\times 10^{-5}$$

实际上,$I$=2sin1=1.68294197, 误差为$|R[f]|=6.158\times10^{-5}$.

用Simpson公式,则有$I\approx1.69353487$, 误差为$|R[f]|=1.06\times10^{-2}$.

推导

由于

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)dt \quad (x=\frac{(a+b)+(b-a)t}{2})$$

因此,[a,b]上权函数$\rho(x)=1$的Gauss型求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_i)$$

求积误差可表示为

注意：此处下标从1开始

$$R[f]=\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)} f^{(2n)}(\eta) \quad ,\eta\in(a,b)$$

**例14** 用3点Gauss公式计算积分 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx.$

**解** 这里Gauss点和积分系数与上例相同, 所以

$$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{4}{1+[(1+x_i)/2]^2} = 3.141068$$

结果远比Simpson公式的结果精确.

等价不一定等效

课堂练习

## (2) Gauss-Laguerre求积公式

区间$[0, +\infty)$上权函数$\rho(x)=e^{-x}$的Gauss型求积公式，称为**Gauss-Laguerre求积公式**,其Gauss点为Laguerre多项式的零点. 公式的Gauss点和求积系数可在数学用表中查到 .

| $n$ | $x_k$ | $A_k$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.5858864376 | 0.8535533905 |
| | 3.4142135623 | 0.1464466094 |
| 3 | 0.4157745567 | 0.7110930099 |
| | 2.2942803602 | 0.2785177335 |
| | 602899450829 | 0.0103892565 |
| 4 | 0.3225476896 | 0.6031541043 |
| | 1.7457611011 | 0.3574186924 |
| | 4.5366202969 | 0.0388879085 |
| | 9.3950709123 | 0.0005392947 |

| $n$ | $x_k$ | $A_k$ |
|---|---|---|
| 5 | 0.2635603197 | 0.5217556105 |
| | 1.4134030591 | 0.3986668110 |
| | 3.5964257710 | 0.0759424497 |
| | 7.0858100058 | 0.0036117587 |
| | 12.6408008442 | 0.0000233700 |
| 6 | 0.2228466041 | 0.4589646793 |
| | 1.1889321016 | 0.4170008307 |
| | 2.9927363260 | 0.1133733820 |
| | 5.7751435691 | 0.0103991975 |
| | 9.8374674183 | 0.0002610172 |
| | 15.9828739806 | 0.0000008985 |

**注意：此表中*n*为点数【非以前的*n*，相当于以前的(*n*+1)】。**

## (3) Gauss-Hermite求积公式

区间$(-\infty,+\infty)$上权函数$\rho(x)=e^{-x^2}$的Gauss型求积公式，称为**Gauss-Hermite求积公式**，其Gauss点为Hermite多项式的零点. 公式的Gauss点和求积系数可在数学用表中查到 .

| $n$ | $x_k$ | $A_k$ | $n$ | $x_k$ | $A_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | ±0.7071067811 | 0.8862269254 | 6 | ±0.4360774119 | 0.7246295952 |
| 3 | ±1.2247448713 | 0.2954089751 | | ±1.3358490704 | 0.1570673203 |
| | 0 | 1.8163590006 | | ±2.3506049736 | 0.0045300099 |
| 4 | ±0.5246476232 | 0.8049140900 | 7 | ±0.8162878828 | 0.4256072526 |
| | ±1.6506801238 | 0.0813128354 | | ±1.6735516287 | 0.0545155828 |
| 5 | ±0.9585724646 | 0.3936193231 | | ±2.6519613563 | 0.0009717812 |
| | ±2.0201828704 | 0.0199532421 | | 0 | 0.8102646175 |
| | 0 | 0.9453087204 | | | |

Gauss-Hermite求积公式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \quad 或 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i e^{x_i^2} f(x_i)$$

**注意：此表中*n*为点数【非以前的*n*，相当于以前的(*n*+1)】。**

知识结构图

数值积分

基本概念

牛顿-柯特斯公式

复合求积公式

龙贝格求积公式

高斯求积公式

复习与思考题(无需提交)

**P134: 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10**

习题(如愿可做，无需提交)

**P135: 1, 4, 5, 10**

习题(需提交)

**P135: 2, 11**