线性代数 (Linear Algebra)

第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§ 1.1 Systems of Linear Equations 线性方程组

线性方程组的解

- ✓ 无解 → 不相容（Inconsistent）
- ✓ 有唯一解
- ✓ 有无穷多解

有唯一解和有无穷多解 → 相容（consistent）

若一个线性方程组有唯一解或者无穷多解，我们称该线性方程组是相容的；若它无解，则称为不相容。

2

线性方程组→矩阵

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

n 个未知数 n 个方程的线性方程组

矩阵 向量

Ax = b

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \cdots a_{1n}} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \boxed{b_1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A x b

3

矩阵的运算

矩阵与矩阵相乘

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times s}, B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{s\times n}$,

则规定其乘积为 $m \times n$ 的矩阵，记作 $C = (c_{ij}) = AB$。

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj},$$

$i = 1, 2, \cdots, m;\quad j = 1, 2, \cdots, n$

$m \times \cancel{s\ \ s} \times n \Rightarrow m \times n$

4

线性方程组的解法

行初等变换定义

倍加变换　把某一行换成它本身与另一行的倍数的和。

对换变换　把两行对换。

倍乘变换　把某一行的所有元素乘以同一个非零数。

若两个线性方程组的增广矩阵是行等价的，则它们具有相同的解集。

阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵

下列矩阵是阶梯形矩阵（上三角阵）：

(a) $\begin{pmatrix} \blacktriangle & * & * & * \\ 0 & \blacktriangle & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & \blacktriangle & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacktriangle & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacktriangle & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacktriangle & * \end{pmatrix}$

先导元素用▲代替，可取任意非零值

*元素可取任意值，包括零值

下列矩阵是简化阶梯形矩阵:

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$

先导元素▲取1

主元

主元（Pivot）

✓ 主元是矩阵A对应于它的阶梯形中，每行从左起的第一个非零的元素。

主元位置

✓ 矩阵中的主元位置是A中对应于它的阶梯形中先导元素的位置。

主元列

✓ 主元列是A的含有主元位置的列。

7

行化简和阶梯形

行化简算法

① 由**最左的非零列开始**。这是一个主元列，主元位置在该列顶端；

②在**主元列中选取一个非零元作为主元**。若有必要的话，对换两行使这个元素移到主元位置上；

③用倍加行变换将**主元下面的元素化简为0**；

④暂时不管包含主元位置的行以及它上面的各行，对剩下的子矩阵使用上述的三个步骤**直到没有非零行**需要处理为止；

⑤由**最右面的主元**开始，把**每个主元上方的各元素变成0**。若某个主元不是1，用倍乘变换将它变成1。(简化阶梯形时需要第五步）

8

线性方程组的解

行化简算法应用于方程组的增广矩阵时，可以得出线性方程组解集的一种显示描述

线性方程组的解

✓ 方程组所有解的显示描述称为该方程组的解集

基本变量 (Basic variable)　对应于主元列的变量称为基本变量。

自由变量 (Free variable)　其他变量，称为自由变量。

存在与唯一性问题

存在与唯一性定理

✓ 线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主元列。也就是说，增广矩阵的阶梯形没有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix} \quad b \neq 0$$

若线性方程相容，它的解集可能有两种情形：

(i) 当没有自由变量时，有唯一解；
(ii) 若至少有一个自由变量，有无穷多解。

行化简算法求解线性方程组

应用行简化算法解线性方程组（五步）

① 写出方程组的**增广矩阵**；

②应用行化简算法把增广矩阵化为**阶梯形**。确定方程组**是否有解**，若无解则停止，反之进行下一步；

③继续行化简算法得到它的**简化阶梯形**；

④写出由第3步得到矩阵对应的**方程组**；

⑤把第4步所得的每个方程改写为**用自由变量表示基本变量**的形式.

线性组合

定义 给定向量组 A：$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$， … ，$\boldsymbol{a}_m$，对于任何一组实数 k_1，k_2，… ，k_m，表达式 $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m$ 称为向量组 A 的一个**线性组合**，k_1，k_2，… ，k_m 称为这个**线性组合的权（系数）**。

给定向量组 A：$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$， … ，$\boldsymbol{a}_m$和向量 $\boldsymbol{b}$，如果存在一组数 k_1，k_2，… ，k_m，使 $\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m$，**则向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组A的线性组合**，这时称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A **线性表示**。

其中权 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 可为任意实数，包括0

线性组合

✓ 向量方程组

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

和增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b}\end{pmatrix}$$

的线性方程组有相同的解集。特别地，**b可表示为$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n$的线性组合**，当且仅当对应的方程组**有解**。

13

Span{v}与Span{u,v}的几何解释

定义：Span 扩张空间

✓若$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p$是$\mathbb{R}^n$中的向量，则$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p$的所有线性组合所称的集合用记号Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p\}$ 表示，称为由$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p$所生成的$\mathbb{R}^n$的子集，也就是说，Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p\}$是所有形如

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

的向量的集合，其中$c_1, c_2, \cdots, c_p \in \mathbb{R}$为标量。

14

矩阵方程Ax=b

定理3

✓ 若A是$m \times n$矩阵，它的各列为$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$，而b属于$\mathbb{R}^m$，则矩阵方程

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

与向量方程

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

有相同的解集。它又与增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

的线性方程组有相同的解集。

15

解的存在性

定理4

➢ 设**A**是$m \times n$矩阵，则下列命题是逻辑上等价的，也就是说，对于某个矩阵**A**，它们都成立或者都不成立：

① 对$\mathbb{R}^m$中每个**b**，方程**Ax=b**有解。

② $\mathbb{R}^m$中每个**b**都是**A**的列的一个线性组合。

③ **A**的各列生成$\mathbb{R}^m$。

④ **A**在每一行都有一个主元位置。

A是系数矩阵！！

16

齐次线性方程组

定义

若线性方程组可写成

$$Ax=0$$

的形式，则称它为齐次线性方程组。

$x=0$ **平凡解 Trivial solution** ✓

$x\neq 0$ **非平凡解 nontrivial solution** ?

齐次方程**Ax=0**有非平凡解，当且仅当方程至少有一个自由变量。

17

非齐次线性方程组

定理6

➢ 设方程**Ax=b**对某个**b**是相容的，**p**为一个特解，则**Ax=b** 的解集是所有形如

$$w=p+v_h$$

的向量的集，其中$\mathbf{v}_h$是齐次方程**Ax=0**的任意一个解。

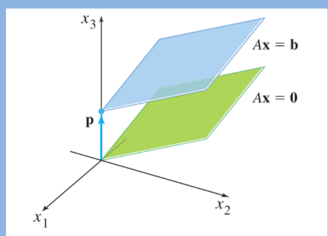


图4 **Ax=b**与**Ax=0**的解集平行

18

向量组的线性相关性

定义 给定向量组 A：$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$， …， $\mathbf{a}_m$，如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，使 $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m = 0$，则称向量组 A是线性相关，否则称它为线性无关。

几何描述：

1. 两个向量线性相关 → 分量对应成比
2. 三个向量线性相关 → 三向量共面

矩阵各列的线性独立

矩阵各列的线性相关性

- 设矩阵$\mathbf{A}=(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$，矩阵方程$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$可以写成

$$x_1\mathrm{a}_1 + x_2\mathrm{a}_2 + \cdots + x_n\mathrm{a}_n = \mathbf{0}$$

矩阵**A**的各列线性无关，当且仅当方程$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 仅有平凡解。

变换

符号：

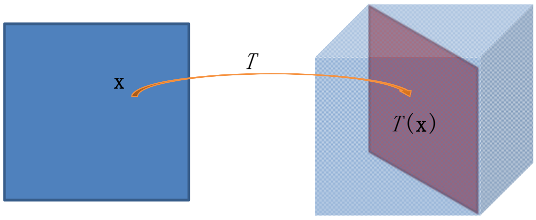
$\mathbb{R}^n$ ：定义域（domain of T）

$\mathbb{R}^m$ ：余定义域、陪域（codomain of T）

T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$的变换

$T(\mathbf{x})$ ：$\mathbf{x}$在$\mathbb{R}^m$的像（Image of $\mathbf{x}$）

所有$T(\mathbf{x})$的集合：值域（Range of T）



线性变换

定义

如果映射 T 满足

任意 α_1, α_2在T的定义域中，$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$，

有 $T(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = \lambda_1 T(\alpha_1) + \lambda_2 T(\alpha_2)$，

则 T 为线性映射或线性变换。

每个矩阵变换都是线性变换！

线性变换

线性变换保持向量加法运算与标量乘法运算

（i） $T(\alpha_1+\alpha_2)=T(\alpha_1)+T(\alpha_2)$

（ii） $T(\lambda_1\alpha_1)=\lambda_1 T(\alpha_1)$

线性空间

线性空间定义

设 V 是一个非空集合， $\mathbb{R}$ 为实数域。如果在 V 中定义了一个加法，即对于任意两个元素 $\alpha,\beta\in V$，总有唯一的一个元素 $v=\alpha+\beta\in V$ 与之对应；在 V 中又定义了一个数与元素的乘法（简称数乘），即对于任何一数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 与任一元素 $\alpha\in V$，总有唯一的一个元素 $\delta\in V$ 与之对应，称为 λ 与 α 的数量乘积，记作 $\delta=\lambda\alpha$，并且满足八条运算规律（设 $\alpha,\beta,v\in V$， $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$）：

…… ……

线性空间

… …

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\nu=\alpha+(\beta+\nu)$;

(3) 在 V 中存在零元素 0，对任何 $\alpha\in V$，都有 $\alpha+0=\alpha$;

(4) 对任何 $\alpha\in V$，都有 α 的负元素 $\beta\in V$，使 $\alpha+\beta=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$;

(7) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$;

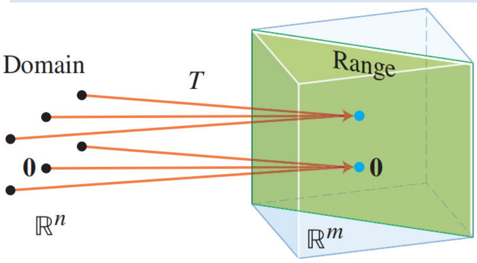
(8) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$

V 称为（实数域 $\mathbb{R}$ 上的）线性空间

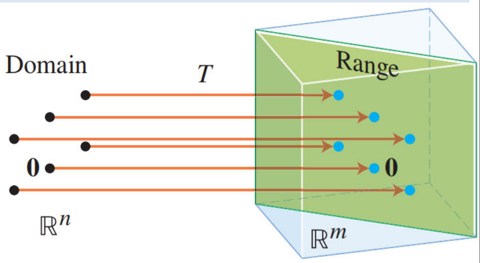
映射

定义

设有两个非空集合A, B，如果对于A 中任一元素α，按照一定的规则，B 中一个确定的元素 β 和它对应，那么，这个对应规则称为从集合 A 到集合 B 的一一映射，记作$\beta=T(\alpha)$。



非一一映射



一一映射

26

存在性问题和唯一性问题

定义

T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$称为到$\mathbb{R}^m$上的映射，若$\mathbb{R}^m$中每个b是$\mathbb{R}^n$中至少一个x的像。（也称为满射）

存在性问题

T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$称为一对一映射，若$\mathbb{R}^m$中每个b是$\mathbb{R}^n$中至多一个x的像。（也称为单射）

唯一性问题

27

线性代数 (Linear Algebra)

第二章 Matrix Algebra

§ 2.1 Matrix Operation 矩阵运算

矩阵的乘幂

矩阵的幂

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, k \in \mathbb{N}^{+}$

定义 $A^{1} = A, A^{2} = A^{1}A^{1}, \ldots, A^{2} = A^{1}A^{1}, A^{k+1} = A^{k}A^{1}$

$$A^{k+m} = A^{k}A^{m}, (A^{k})^{m} = A^{km}$$

29

转置矩阵

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，交换行列，定义为转置矩阵 $A^{T} \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^{T} = A$，则称 A 为对称矩阵

30

转置矩阵

运算规律

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ $\boxed{(4)\ (AB)^T = B^T A^T}$

矩阵的逆

$$ax = b,\quad a \neq 0 \Rightarrow x = a^{-1}b$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = b,\quad A\,? \Rightarrow x = A^{-1}b$$

定义 对于 n 阶矩阵 **A**，存在一个 n 阶矩阵 **B**，使 **AB = BA = I** (单元矩阵)，则矩阵 **A** 可逆，**B** 称为 **A** 的逆矩阵， **B** 记作 A^{-1} 且唯一。

也称为非奇异矩阵

矩阵初等变换的实质 ...

定义 下面三种变换称为矩阵的初等行变换

(1) 对换两行
(2) 以非零数 k 乘某一行的所有元
(3) 把某一行的所有元的 k 倍加到另一行对应的元上去

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B \qquad A \sim B$$

反身性 $A \sim A$
对称性 若 $A \sim B$ 则 $B \sim A$
传递性 若 $A \sim B$, $B \sim C$ 则 $A \sim C$

33

矩阵的初等变换

定理 设 **A** 与 **B** 为 ***m x n*** 矩阵, 那么

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 使 $PA = B$
(2) $A \overset{c}{\sim} B$ 的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 Q 使 $AQ = B$
(3) $A \sim B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使 $PAQ = B$

34

求A^{-1}的算法

把增广矩阵[A I]进行化简，若A行等价于I，则[A I]行等价于[I A^{-1}]，否则A没有逆.

证明

设A的可逆矩阵，则对任意b，方程Ax = b有解.
A在每一行有主元位置，因A是方阵，这n个主元位置必在对角线上. 这就是说A的简化阶梯形是I_n，即$A \sim I_n$.

35

线性代数 (Linear Algebra)

第二章 Matrix Algebra

§ 2.2 The Inverse of a Matrix 矩阵的逆

§ 2.3 Characterizations of Invertible Matrices 可逆矩阵的特征

可逆矩阵的特征

可逆矩阵的特征：

设A是$n \times n$的方阵，则下列所有表述都是等价的，即对某一特定的A，它们同时为真或同时为假.

a. A是可逆矩阵.

b. A等价于$n \times n$的单位矩阵.

c. A有n个主元位置.

d. 方程$A\mathbf{x} = 0$仅有平凡解.

37

可逆矩阵的特征

e. A的各列线性无关.

f. 线性变换$\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$是一对一的.

g. 对$\mathbb{R}^n$中任意b, 方程$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$至少有一个解.

h. A的各列生成$\mathbb{R}^n$.

i. 线性变换$\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$把$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^n$上.

j. 存在$n \times n$的矩阵使得$CA = I$.

k. 存在$n \times n$的矩阵使得$AD = I$.

l. A^T是可逆矩阵.

38

线性代数 (Linear Algebra)

第二章 Matrix Algebra

§ 2.4 Partitioned Matrix 分块矩阵

§ 2.5 Matrix Factorizations 矩阵分解

分块矩阵的转置

分块矩阵的转置:

$$\text{设}\ A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\ \text{则}\ A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

分外层、内层双重转置

40

分块矩阵的乘法

设 A 为 $m\times l$, B 为 $l\times n$ 矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{st}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{t1} & \cdots & B_{tr}\end{pmatrix}$$

其中 A 中各块的列数分别等于 B 中各块的行数，则

$$AB=\begin{pmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ C_{s1} & \cdots & C_{sr}\end{pmatrix}, C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad (i=1,\ldots,s;\ j=1,\ldots,r).$$

41

分块矩阵的逆

A 为 n 阶方阵和分块对角矩阵， $A=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_s\end{pmatrix}$,

子块都是方阵. 则 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

如果 $|A_i|\neq 0$, 则 $|A|\neq 0$, 有 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_s^{-1}\end{pmatrix}$

分块对角矩阵是一个分块矩阵，除了主对角线上各分块外，其余全是零分块.这样的一个矩阵是可逆的当且仅当主对角线上各分块都是可逆的.

42

行列式的数学定义

方形矩阵

行列式 (Determinants)

Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}^{+}$ 自然数

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \det(A)$$

$$|\cdot| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \det(A)$$

43

n 阶行列式定义

n 阶

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

3 阶特例

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

带正号的三项列标排列：123, 231, 312 $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$

带负号的三项列标排列：132, 213, 321 $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$

44

LU分解算法

$$Ax = b$$

$$\Downarrow$$

$$LUx = b$$

$$\Downarrow$$

$$Ly = b, Ux = y$$

一个方形系统 → 两个三角系统

45

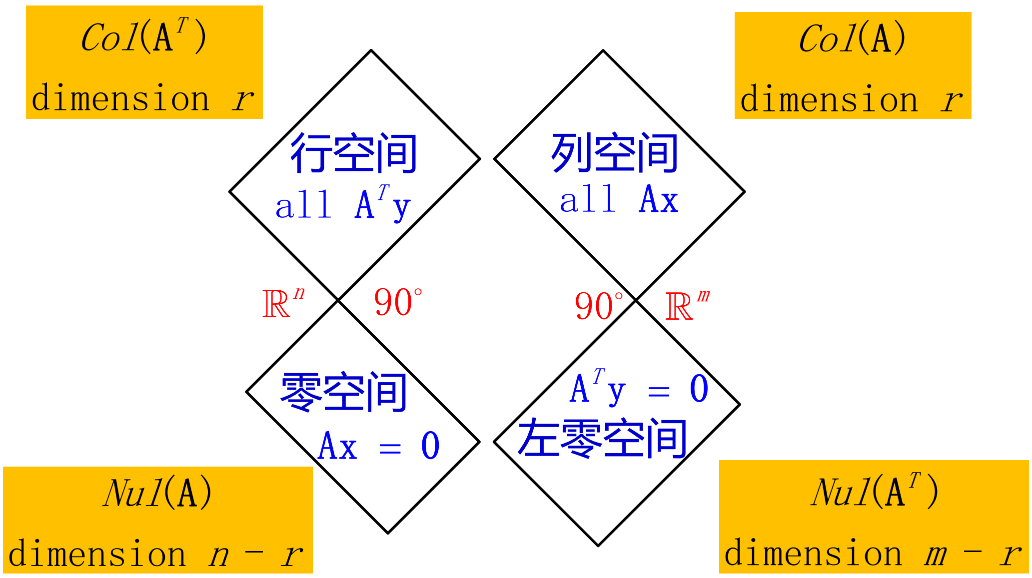
线性代数 (Linear Algebra)

第二章 Matrix Algebra

§ 2.6 Subspaces of $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$的子空间

§ 2.7 Dimension and Rank 维度和秩

“四个子空间”



子空间的基

定义

设有向量空间 V_1, V_2, 若 $V_1 \subseteq V_2$, 就称 V_1 是 V_2 的子空间。

定义

设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $a_1, a_2, \cdots, a_r \in V$, 且满足

(1) $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关

(2) V 中的任何一个向量都能用 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性表示

那么向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 称为向量空间 V 的一个基 (Basis)，r 称为 V 的维数 (Dimension)，V 称为 r 维向量空间

48

子空间的基

定理 矩阵A的主元列构成列空间.

【例题】求矩阵B $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的列空间的基.

【例题】矩阵A $= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\-2\\2\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\-2\\3\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\2\\0\\-1\end{matrix} & \begin{matrix}2\\-8\\7\\11\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-9\\2\\1\\-8\end{matrix}} \end{bmatrix}$,

A行等价于上例中的B，求A的列空间的基.

注意：要用A的主元列本身作为ColA的基，阶梯形B的列本身不在A的列空间内.

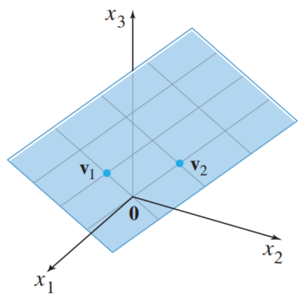
子空间的维数

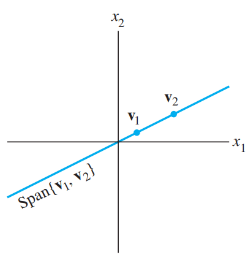
定义 非零子空间H的维数用 dim H表示，是H的任意一个基的向量个数. 零子空间 $\{0\}$ 的维数定义为零.

$\mathbb{R}^n$空间维数为n，$\mathbb{R}^n$的每个基由n个向量组成.

$\mathbb{R}^3$中一个经过0的平面是二维的，

一条经过0的直线是一维的.





$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$.

50

子空间的维数

定义 矩阵A的秩(记为rank A)是A的列空间的维数.
因为A的主元列形成ColA的一个基，A的秩正好是A的主元列的个数.

【举例】

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$，求A的秩

51

子空间的秩

定理

秩定理：如果一矩阵A有n列，则$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$.
基定理：设H是$\mathbb{R}^n$的p维子空间，H中的任何恰好由p个成员组成的线性无关集构成H的一个基. 并且，H中任何生成H的p个向量集也构成H的一个基。

52

秩与可逆矩阵定理

定理

可逆矩阵定理（续）

设A是一$n \times n$矩阵，则下面的每个命题与A是可逆矩阵的命题等价

m. A的列向量构成$\mathbb{R}^n$的一个基.

n. $Col(A) = \mathbb{R}^n$.

o. $\dim(Col(A)) = n$.

p. $rank(A) = n$.

q. $Nul(A) = \{0\}$.

r. $\dim(Nul(A)) = 0$.

53

线性代数 (Linear Algebra)

第三章 Determinants

§3.1 Introduction to Determinants

行列式

n 阶行列式计算

按A的第一行的代数余子式展开式

- 给定$\mathbf{A}=[a_{ij}]$，$\mathbf{A}$的(i,j)代数余子式C_{ij}由下式给出

$$C_{ij} = (-1)^{1+j} \det \mathrm{A}_{ij}$$

$$\det \mathrm{A} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot C_{1n}$$

定理1

✓ $n\times n$矩阵$\mathbf{A}$的行列式可按任意行或列的代数余子式展开式来计算。按第i行展开用上式给出的代数余子式写法可以写成：

$$\det \mathrm{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot C_{in}$$

✓ 按第j列的代数余子式展开式为：

$$\det \mathrm{A} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot C_{nj}$$

符号的棋盘模式

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

n 阶行列式定义

n 阶

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

3 阶特例

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

带正号的三项列标排列：123, 231, 312 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$

带负号的三项列标排列：132, 213, 321 $a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$

56

线性代数 (Linear Algebra)

第三章 Determinants

§ 3.2 Properties of Determinants

行列式的性质

行列式的性质

定理3（行变换）

✓ 令**A**是一个方阵：

a. 若**A**的某一行的倍数加到另一行得矩阵**B**，则det **B**= det **A**。

b. 若**A**的两行互换得矩阵**B**，则det **B**= -det **A**。

c. 若**A**的某行乘以k倍得矩阵**B**，则det **B**= k·det **A**。

行列式的性质

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

正规矩阵 $\det(A) \neq 0$

Regular matrix

奇异矩阵 $\det(A) = 0$

Singular matrix

59

行列式的性质

定理4

✓ **方阵A是可逆的当且仅当det A≠0**

推论： 若A的列或者行是线性相关的，则det **A**=0

⇩

当两行或者两列是相同的，或者一行或一列是0时，det A=0

$$\text{eg.}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix},\ \det A = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

60

列变换

定理5

✓ 若A为$n\times n$矩阵，则$\det A^T=\det A$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix} = a(ej - fi) - b(dj - fh) + c(di - eh)$$

$$\boxed{= aej + bfh + cdi - afi - bdj - ceh}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & d & h \\ b & e & i \\ c & f & j \end{pmatrix} = a(ej - fi) - d(bj - ic) + h(bf - ce)$$

$$\boxed{= aej + cdi + bhf - afi - bdj - ceh}$$

61

行列式与矩阵乘积

定理6

✓ 若A和B均为$n\times n$矩阵，则det AB=(det A)(det B)

若A不可逆

⇩

AB也不可逆

⇩

det A和det A·det B均为0

若A可逆

$\Rightarrow$ A与单位矩阵I_n行等价

- 存在初等矩阵$E_1, \cdots, E_p$使得

$$A = E_pE_{p-1}\cdots E_1I_n = E_pE_{p-1}\cdots E_1$$

- 反复应用定理3

$$|AB| = |E_pE_{p-1}\cdots E_1B| = |E_p||E_{p-1}\cdots E_1B|$$

$$= \cdots = |E_p|\cdots|E_1||B| = |A||B|$$

62

总结

基本性质（下述矩阵均为方阵）

- 矩阵**A**中两行互换位置后为**B**，则det **A**=-det **B**；
- 矩阵中某一行（列）倍加到另一行（列）后行列式不改变；
- 矩阵**A**中某一行（列）k倍乘后为**B**，则det(**B**)=k det(**A**)；
- 矩阵**A**转置后为**B**，则det **A**=det **B**；
- det **AB**=det **A**·det **B**，det **AB**=det **BA**；
- 若**A**为三角矩阵，则det **A**等于**A**主对角线上元素乘积；
- 若**A**中存在两行元素相同，则det **A** =0；
- 方阵**A**是可逆的，当且仅当det **A**≠0；

63

n 阶行列式的运算规律

Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\det(A^2) = (\det(A))^2$

$\cancel{\det(2A) = 2\det(A)}$

Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\det(A^2) = (\det(A))^2$

$\det(2A) = 2^n \det(A)$

64

n 阶行列式的运算规律

Let $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $\det(A^T)=\det(A)$

(2) $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$

(3) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

$\cancel{\det(A+B)=\det(A)+\det(B)}$

65

克莱姆法则

➢ 对任意$n\times n$矩阵**A**和任意的$\mathbb{R}^n$中向量**b**，令$\mathbf{A}_i(\mathbf{b})$表示**A**中第i列由向量**b**替换得到的矩阵

$$A_i(b) = [a_1 \cdots b \cdots a_n]$$

第i列

定理7（克莱姆法则）

✓ 设**A**是一个可逆的$n\times n$矩阵，对$\mathbb{R}^n$中任意向量**b**，方程**Ax=b**的唯一解可由下式给出：

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

66

矩阵的秩

定义 在 $m \times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行和 k 列（$k \le m$, $k \le n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式。

定义

设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如存在）全等于 0，那么 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵的 A 的秩，记作 $\boxed{R(A)}$。并规定零矩阵的秩等于 0。

67

方程组解的情况

n 元线性方程组 $Ax = b$

(1) 无解的充分必要条件 $R(A) < R(A, b)$

(2) 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$

(3) 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$

方程数和未知变量数不需要相同！！！

68

逆矩阵的运算

定理8

n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow \det A \neq 0, A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$,

A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵

$$A \text{ 的伴随矩阵定义为 } A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & \boxed{C_{21}} & \cdots & C_{n1} \\ \boxed{C_{12}} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

则 $AA^* = A^*A = |A|\,I$

代数余子式为矩阵元素!

69

用行列式表示面积或体积

定理9

- 若**A**是一个2×2矩阵，则由**A**的列确定的平行四边形的面积为$|\det \mathbf{A}|$;
- 若**A**是一个3×3矩阵，则由**A**的列确定的平行六面体的体积为$|\det \mathbf{A}|$;
- 行列式可用于描述平面和$\mathbb{R}^3$中线性变换的一个重要几何性质

70

n 阶行列式的一些特殊形式

下三角行列式 ①

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角行列式 ②

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n$$

71

n 阶行列式的一些特殊形式

反向上三角行列式 ③

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

反向对角行列式 ④

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$$

72

Vandermonde 行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (a_i - a_j)$$

$$\boxed{1 \le j < i \le n}$$

1735～1796

Vandermonde 是第一个对行列式理论进行系统的阐述（即把行列式理论与线性方程组求解相分离）的人。并且给出了一条法则，用二阶子式和它们的余子式来展开行列式。就对行列式本身进行研究这一点而言，他是这门理论的奠基人。

73

线性代数 (Linear Algebra)

第四章 Vector Spaces

§ 4.1 Vector Spaces and Subspaces

向量空间和子空间

向量空间的定义

定义

- 一个**向量空间**是由一些被称为向量的对象构成的**非空集合** V，在这个集合上定义两个运算，称为加法和标量乘法（标量取实数），服从以下公理（或法则），这些公理必须对 V 中所有**向量u, v, w**以及所有**标量 c 和 d** 均成立。

1.u, v之和表示为u+v，仍在 V 中

2. $u + v = v + u$

3. $(u + v) + w = u + (v + w)$

$\vdots$

75

向量空间的定义

4. V 中存在一个零向量0，使得 $u + 0 = u$

5.对 V 中每个向量u，存在 V 中向量 $-u$，使得 $u + (-u) = 0$

6.u与标量 c 的标量乘法记为 cu，仍在 V 中

7. $c(u + v) = cu + cv$

8. $(c + d)u = cu + du$

9. $c(du) = (cd)u$

10. $1u = u$

对 V 中每个向量u和任意标量 c，有

$$0u = 0 \qquad c0 = 0 \qquad -u = (-1)u$$

76

子空间

定义

- 向量空间V的一个子空间是V的一个满足以下三个性质的子集H：

a. V中的零向量在H中。

b. H对向量加法封闭，即对H中任意向量$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$仍在H中。

c. H对标量乘法封闭，即对H中任意向量$\mathbf{u}$和任意标量c，向量$c\mathbf{u}$仍在H中。

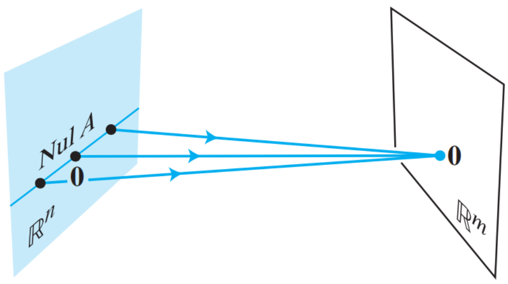
77

零空间的定义

定义 $m \times n$矩阵A的零空间写成Nul A，是齐次方程$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的全体解的集合，用集合符号表示，即：

$\text{Nul}\,A=\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

Nul A的更进一步的描述为$\mathbb{R}^n$中在线性变换$\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$下映射到$\mathbb{R}^m$中的零向量的全体向量的集合，如下图.



78

矩阵的列空间

定义 $m\times n$矩阵A的列空间写成ColA，是由A的所有列的线性组合组成的集合，若A=$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$，则ColA=Span{$a_1$, …, a_n}

定理 $m\times n$矩阵A的列空间是$\mathbb{R}^m$的一个子空间

定理 $m\times n$矩阵A的列空间等于$\mathbb{R}^m$当且仅当$Ax = b$对$\mathbb{R}^m$中每个b有一个解.

线性变换的核与值域

定义

由向量空间V映射到向量空间W内的线性变换T是一个规则，它将V中的每个向量x映射成W中唯一向量$T(x)$，且满足：

(i)$T(u+v) = T(u)+T(v)$，对V中所有u, v均成立.

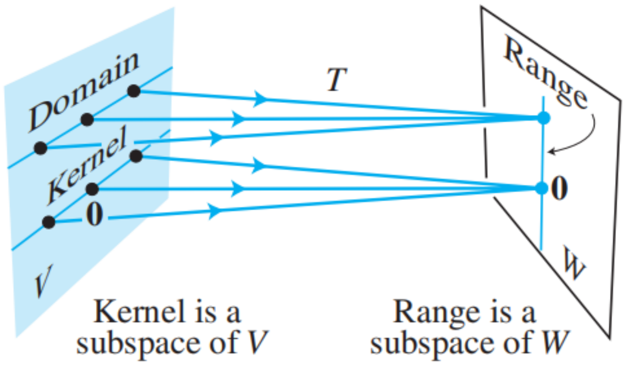
(ii) $T(cu)=cT(u)$，对V中所有u和数c均成立.

线性变换T的核（或零空间）是V中所有满足$T(u)=0$的向量u的集合；

T的值域是W中所有具有形式$T(x)$（任意$x\in V$）的向量的集合.

对矩阵A，则T的核与值域恰好是A的零空间和列空间.

线性变换的核与值域



线性无关集

定义

V中向量的一个指标集$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$是线性无关的，

若向量方程$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$只有平凡解，

即$c_1 = 0, \cdots, c_p = 0.$

集合$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$是线性相关的，

若方程$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$有非平凡解，

即存在某些权$c_1, \cdots, c_p$不全为0，此时称$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$

是$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p$之间的一个线性相关关系.

基

定义

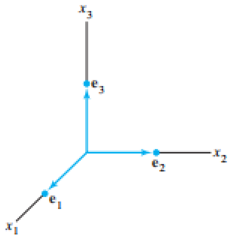
令H是向量空间V的一个子空间，V中向量的指标集 $B=\{b_1, \cdots, b_p\}$称为H的一个基，如果：

(i) B是一线性无关集

(ii) 由B生成的子空间与H相同，即$H=\mathrm{Span}\{b_1, \cdots, b_p\}$

EXAMPLE: Let $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Show that $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ is a basis for $\mathbb{R}^3$. The set $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ is called a **standard basis** for $\mathbb{R}^3$.



生成集定理

生成集定理

令$S=\{v_1, \cdots, v_p\}$是V中的向量集，$H=\mathrm{Span}\{v_1, \cdots, v_p\}$.

a.若S中某一个向量，如v_k是S中其余向量的线性组合，则S中去掉v_k后形成的集合仍可以生成H.

b.若$H \neq \{0\}$，则S的某一子集是H中的一个基.

定理

矩阵A的主元列构成ColA的一个基.

84

线性代数 (Linear Algebra)

第四章 Vector Spaces

§ 4.4 Coordinate Systems

坐标系统

坐标系统

定理（唯一表示定理）

令B={ b_1, $\cdots$, b_n }是向量空间 V 的一个基，

则对 V 中每个向量x, 存在唯一的一组数 $c_1, \cdots, c_n$,

使得：$x = c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n$

86

坐标系统

定义

假设集合B={ b_1, ⋯, b_n }是V的一个基，x在V中，x相对于基B的坐标(或x的B-坐标)是使得$x = c_1b_1 + \cdots + c_nb_n$的权$c_1, \cdots, c_n$.

若$c_1, \cdots, c_n$是x的B-坐标，则$\mathbb{R}^n$中的向量

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ 是x(相对于B)的坐标向量，

映射$x \to [x]_B$ 称为（由B确定的）坐标映射.

87

$\mathbb{R}^n$ 中的坐标

For a basis $\beta = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, let

$$P_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \text{ and } [\mathbf{x}]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Then

$$\mathbf{x} = P_\beta[\mathbf{x}]_\beta.$$

We call P_β the **change-of-coordinates matrix** from β to the standard basis in $\mathbf{R}^n$. Then

回到标准坐标

$$[\mathbf{x}]_\beta = P_\beta^{-1}\mathbf{x}$$

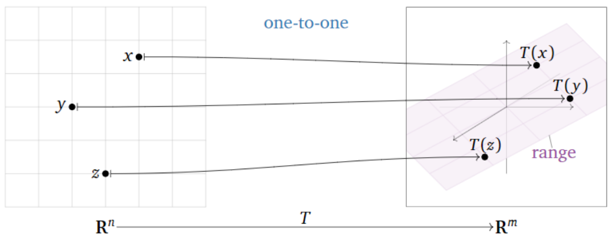
and therefore P_β^{-1} is a **change-of-coordinates matrix** from the standard basis in $\mathbf{R}^n$ to the basis β.

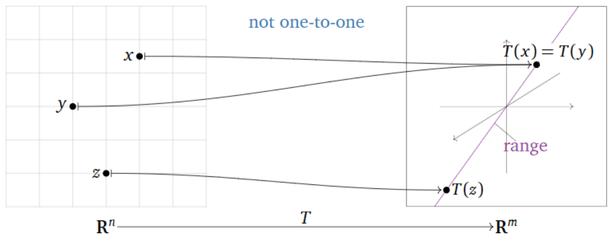
88

One-to-one Transformations 单射(也译作injective)

Definition (One-to-one transformations). A transformation $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is ***one-to-one*** if, for every vector b in $\mathbb{R}^m$, the equation $T(x) = b$ has *at most one* solution x in $\mathbb{R}^n$.

定义：映射T：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是单射，则对于任意$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$，方程$T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$在$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$中至多有一个解。

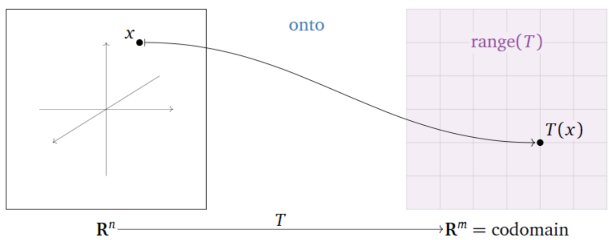


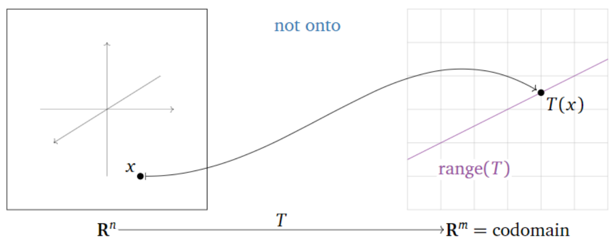


Onto Transformations 满射(也译作surjective)

Definition (Onto transformations). A transformation $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is ***onto*** if, for every vector b in $\mathbb{R}^m$, the equation $T(x) = b$ has *at least one* solution x in $\mathbb{R}^n$.

定义：映射T：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是满射，则对于任意$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$，方程$T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$在$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$中至少有一个解。



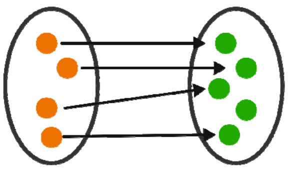


Bijective (双射)

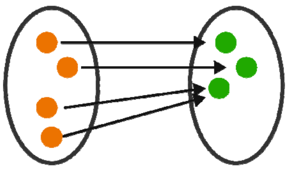
Definition: A transformation T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is bijective if it is injective and surjective; that is, every element $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ is the image of exactly one element $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

定义：映射T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$是双射，则映射$T$既为单射也为满射，即对于任意$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$，方程$T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$在$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$中有唯一解。

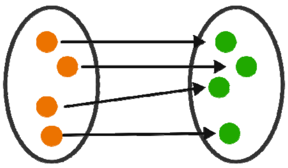
Injection (One-to-One)



Surjection (Onto)



Bijection (One-to-One and Onto)



Comparison

The above expositions of one-to-one and onto transformations were written to mirror each other. However, "one-to-one" and "onto" are complementary notions: neither one implies the other. Below we have provided a chart for comparing the two. In the chart, A is an $m \times n$ matrix, and $T: \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^m$ is the matrix transformation $T(x) = Ax$.

T is one-to-one	T is onto
$T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ has at most one solution for every $\mathbf{b}$. 对每个$\mathbf{b}$,方程$T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$在至多有一个解.	$T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ has at least one solution for every $\mathbf{b}$. 对每个$\mathbf{b}$,方程$T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$至少有一个解.
The columns of A are linearly independent. A的列向量线性独立.	The columns of A span $\mathbb{R}^m$. A的列向量张成$\mathbb{R}^m$空间.
A has a pivot in every column. A的每列都有主元.	A has a pivot in every row. A的每行都有主元.
The range of T has dimension n. T的陪域是n维的.	The range of T has dimension m. T的陪域是m维的.

Note that in general, a transformation T is bijective if it is injective and surjective; that is, every element $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ is the image of exactly one element $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
注意：映射T是双射，则映射T既为单射也为满射，即对于任意$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$，方程$T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$在$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$中有唯一解。

坐标映射

Standard basis for $\mathbf{P}_2$: $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\} = \{1, t, t^2\}$

Polynomials in $\mathbf{P}_2$ behave like vectors in $\mathbf{R}^3$. Since
$a + bt + ct^2 = \underline{\quad a \quad}\mathbf{p}_1 + \underline{\quad b \quad}\mathbf{p}_2 + \underline{\quad c \quad}\mathbf{p}_3$,

$$[a + bt + ct^2]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

We say that the vector space $\mathbb{R}^3$ is *isomorphic* to $\mathbf{P}_2$.

Isomorphic:同构的
Isomorphism:同构

线性代数 (Linear Algebra)

第四章 Vector Spaces

§ 4.5 The Dimension of a Vector Space

向量空间的维度

维度

定义

✓若V由一个有限集生成，则V称为有限维的, V 的维度写成$\dim V$, 是V的基中含有向量的个数，零向量空间$\{0\}$的维度定义为零，如果V不是由一有限集生成，则V 称为无穷维的。

例1： P_3的标准基是$\{1, \mathbf{t}, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$ $\Rightarrow \dim \mathbf{P}_3 = 4$ 。

一般而言，$\dim \mathbf{P}_n = n+1$

例2： $\mathbb{R}^n$的标准基是$\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$，其中$\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$是$\mathbf{I}_n$的列向量

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

有限维度空间的子空间

定理12（基定理）

✓若V是一个p维向量空间, $p \geq 1$, V中任意含有p个元素的线性无关集必然是V的一个基。任意含有p个元素且生成V 的集合必然是V的一个基。

96

有限维度空间的子空间

定理：Spanning Set 定理**

令$S=\{v_1,\cdots,v_p\}$是V 中的向量集，$H=\text{Span}\{v_1,\cdots,v_p\}$.

a. 若S 中某一个向量，比如说v_k，是S 中其余向量的线性组合，则S 中去掉v_k 后形成的集合仍然可以生成H.

b. 若$H\neq\{0\}$，则S 的某一子集是H 的一个基。

97

Nul A和Col A的维度

定义

$\dim \text{Col}\, A = A$中主元列的个数

$\dim \text{Nul}\, A = A$中自由变量的个数

例5： 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&7&8\end{pmatrix}$，求$\dim \text{Col}\, A$和$\dim \text{Nul}\, A$。

解：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&7&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\right\}$是Col A的一组基，$\dim \text{Col}\, A=2$

98

子空间的秩

定理

秩定理：如果一矩阵A有n列，则$\mathrm{rank}\,A + \dim \mathrm{Nul}\,A = n$.

基定理：设H是$\mathbb{R}^n$的p维子空间，H中的任何恰好由p个成员组成的线性无关集构成H的一个基．并且，H中任何生成H的p个向量集也构成H的一个基。

99

线性代数 (Linear Algebra)

第四章 Vector Spaces

§ 4.6 Rank

秩

行空间

定理13

- 若两个矩阵**A**和**B**行等价，则它们的行空间相同。若**B**是阶梯形矩阵，则**B**的非零行构成**A**的行空间的一个基同时也是**B**的行空间的一个基。

101

秩定理

定义

- **A**的秩即**A**的列空间维度。

rank A ＝ dim Col A = A中主元列的个数 ＝ dim Row A

定理14（秩定理）

- $m \times n$矩阵**A**的列空间和行空间维度相等，这个公共的维度（即**A**的秩）还等于**A**的主元位置的个数，且满足方程。

$$\underbrace{\text{rank } A}_{\{主元列个数\}} + \underbrace{\text{dim Nul } A}_{\{非主元列个数\}} = \underbrace{n}_{\{列的个数\}}$$

102

矩阵“秩”的一些性质

(1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$

(2) $R(A^T) = R(A)$

(3) 若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$

(4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

103

矩阵“秩”的一些性质

(5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

列线性无关

$$\max\{R(A), R(B)\} = 2 < R(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = R(A) + R(B)$$

列线性相关

$$\max\{R(A), R(B)\} = 2 = R(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < R(A) + R(B)$$

104

矩阵“秩”的一些性质

(6) $R(A+B) \le R(A)+R(B)$

证明思路：$\begin{pmatrix} A+B \\ B \end{pmatrix} \overset{r_i - r_{n+i}}{\sim} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

性质 (2)

$$R(A+B) \le R\begin{pmatrix} A+B \\ B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = R\left(A^T, B^T\right)^T = R\left(A^T, B^T\right)$$

$$\le R(A^T) + R(B^T) = R(A) + R(B) \quad \blacksquare$$

性质 (5)

105

矩阵“秩”的一些性质

(7) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$

(8) $A_{m\times n}B_{n\times l} = 0_{m\times l}$，则 $R(A)+R(B) \le n$

106

线性代数 (Linear Algebra)

第四章 Vector Spaces

§ 4.7 Change of Basis

基的变换

定义

定理15

✓若设 $\beta=\{b_1,\cdots,b_n\}$ 和 $\eta=\{c_1,\cdots,c_n\}$ 是向量空间 V 的基，则存在一个 $n\times n$ 矩阵 $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 使得

$$[x]_\eta = \underset{\eta\leftarrow\beta}{P}[x]_\beta \qquad (4)$$

$\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的列是基β中向量的η - 坐标向量，即

$$\underset{\eta\leftarrow\beta}{P} = \left[[b_1]_\eta\ [b_2]_\eta\ \cdots [b_n]_\eta\right] \qquad (5)$$

108

定义

➢ 定理15中矩阵 $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 称为由β到η的坐标变换矩阵，乘以 $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的运算将β-坐标变为η-坐标，图2中给出坐标变换方程(4)的说明

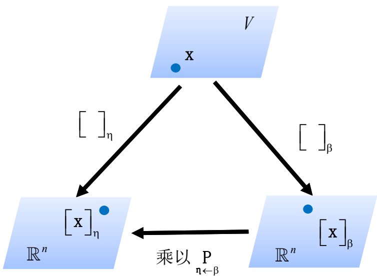


图2 V的两个坐标系

因为 $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的列是线性无关集β的坐标向量（见4.4节习题25）$\Rightarrow$ $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的列是线性无关的 $\Rightarrow$ $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 是可逆的

将(4)两边左乘以 $\left(\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}\right)^{-1}$

$$\left(\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}\right)^{-1}[x]_\eta = [x]_\beta \Rightarrow \left(\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}\right)^{-1} = \underset{\beta\leftarrow\eta}{P} \qquad (6)$$

109

线性代数 (Linear Algebra)

第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

§ 5.1 Eigenvalues and Eigenvectors

特征向量和特征值

几乎所有的向量乘上 A 都会改变方向。但有一些例外，称之为“特征向量”

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

5.1 特征向量和特征值

$Ax = \lambda x$ 等价于 $(A - \lambda I)x = 0$

获得非零解的充分必要条件是 $\det(A - \lambda I) = 0$

λ 的特征多项式

以 λ 为未知数的 n 次方程，称为矩阵 A 的特征方程

5.1 特征向量和特征值

如何求特征值

x必须是非零向量

↓

$(A-\lambda I)x=0$ 必须有非平凡解

↓

$(A-\lambda I)$ 是不可逆矩阵

↓

从方程 $\det(A-\lambda I)=0$ 中解出 λ

113

5.1 特征向量和特征值

推论 1

设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两不同特征值，$a_1, a_2, \cdots, a_s$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 分别是对应于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量，则

$$a_1, a_2, \cdots, a_s, b_1, b_2, \cdots, b_t$$

线性无关。

114

相似矩阵的特性

推论 若n 阶矩阵A与对角阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

相似，则λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n是A 的n个特征值。

证明

因为λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n是Λ的n个特征值，由上述定理可知其也是A 的n个特征值。

115

因此，同一部“电影”，不同“座位”就是不同的视觉感受

同一个线性变换，不同基下的矩阵，称为相似矩阵

怎么得到不同基下的矩阵，看看变换的细节：

Next

116

线性代数 (Linear Algebra)

第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

§ 5.3 Diagonalization

对角化

Motivation

思考

可否用其他方法得到方阵A的特征值信息?

若A与一个对角矩阵相似，$A = PDP^{-1}$，那么D的对角线元素都是A的特征值

优势??

对角矩阵便于计算

118

概念

定义 **对角化**

若方阵A与一个对角矩阵相似，那么A 是可对角化 的。

定理1 **对角化定理**

若n 阶方阵A是可对角化的，即$A = PDP^{-1}$，其中D 是对角矩阵，其充分必要条件是，A 有n 个线性无关的特征向量。

事实上，$A = PDP^{-1}$，D为对角阵的充要条件为：P的列向量是A的n个线性无关的特征向量。此时D的主对角线上的元素分别是A对应于P中特征向量的特征值。

换而言之，A可对角化的充要条件是有足够的特征向量形成R^n的基，我们称这样的基为特征向量基。

119

举例

矩阵对角化

例3 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$，将A 对角化，$A = PDP^{-1}$.

解：

Step1：计算A的特征值 → Step2：计算A的特征向量 → Step3：构造P

→ Step4：构造对角阵D

120

可对角化条件

矩阵可对角化的充分条件

定理

若n 阶方阵A 有n 个不同的特征值，那么A 是可对角化的。

定理

λ_1 ，⋯ ，λ_r是n 阶方阵A相异的特征值，$v_1, \cdots, v_r$是对应的特征向量，那么向量集$\{v_1, \cdots, v_r\}$线性无关。

121

不可对角化矩阵

定义

代数重度 Algebraic Multiplicity 等于特征值 λ 的重复次数

$\geq$

几何重度 Geometric Multiplicity 等于对应特征值 λ 的线性独立的特征向量个数，或 (A – λI) 对应的零空间的维数

几何重数严格小于代数重度（即该零空间的维数严格小于特征值的重复次数）→ 方阵不能对角化

方程 (A-λI)x=0 的所有解的集合就是矩阵 (A-λI) 的零空间

是$\mathbb{R}^n$的子空间，称为，A对应于λ的特征空间

122

举例

不可对角化矩阵 **若尔当形**

定理

任何复数域上的 n 阶方阵 A 都和一个若尔当标准形相似

$$A \sim \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{pmatrix}$$

Jordan Canonical Block

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

123

若尔当形

定理

设A，B为n 阶复矩阵，则A 与B 相似的充要条件 是A 与B 具有相同的若尔当标准形。

124

对角化

定理3

若n 阶方阵A 有p个不同的特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_p$.

(1) 当$1 < k < p$ 时，λ_k对应的特征空间的维数小于等于λ_k 的重数。

(2) 矩阵A是可对角化的，其充要条件是其特征空间的维数之和等于n .

$\Leftrightarrow$ 1. 特征多项式因子完全转换为线性因子

2. λ_k对应的特征空间的维数等于λ_k 的重数

(3) 若A是可对角化的，B_k表示λ_k 对应的特征空间的基，那么$\{B_1, \cdots, B_p\}$中的所有向量构成了$\mathbb{R}^n$ 的特征向量基。

对称矩阵的对角化

对称矩阵的对角化

Question ：若A为特殊形式的矩阵时，其对角化过程有没有什么特殊性？

Next
讨论当A为对称矩阵时的情形

对称矩阵的对角化

定理4 对称阵的特征值为实数。

定理5 设λ_1，λ_2是对称矩阵A 的两个特征值，p_1, p_2是对应的特征向量，若$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，则p_1与p_2正交。

定理6 设A为n 阶对称矩阵，则必有正交阵P，使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

其中Λ是以A 的n个特征值为对角元素的对角阵。

127

对称矩阵的对角化

将对称阵A对角化的步骤

Step1

求出A 的全部互不相等的特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$,它们的重数依次为$k_1, \cdots, k_s$,

$$k_1 + \cdots + k_s = n.$$

Next

128

对称矩阵的对角化

将对称阵A对角化的步骤

Step2

对每个k_i重特征值λ_i, 求方程$(A-\lambda_i I)x=0$ 的基础解系，得k_i个线性无关得特征向量。再把他们正交化、单位化，得k_i个两两正交的单位特征向量。因为 $k_1+\cdots+k_s=n$ ，故总共可得n个两两正交的单位特征向量。

Next

对称矩阵的对角化

将对称阵A对角化的步骤

Step3

把这n个两两正交的单位特征向量构成一个正交阵P ，便有

$$P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$$

注意Λ对角元素的排列依次序应与P 中列向量的排列依次序相对应。

End

第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

§ 5.4 Eigenvectors and Linear Transformations

特征向量和线性变换

在本节，我们将矩阵分解

$$A = PDP^{-1}$$

理解为线性变换。我们还将看到变换$x \mapsto Ax$ 实质上是简单的映射 $u \mapsto Du$. 即使D不是对角矩阵，对矩阵A 和D 仍有相似的解释。

之前的内容中曾讲到，任意一个从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^m$ 的线性变换 T 可通过左乘矩阵A来实现，矩阵A 称为T 的标准矩阵。现在，我们对两个有限维向量空间之间的线性变换也作同样的描述。

要点一：线性变换的矩阵表示

要点二：从线性变换的角度来看$A = PDP^{-1}$，意义?

V→V的线性变换

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(\mathbf{x}) \arrow[d] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{Multiplication}", "\text{by } [T]_{\mathcal{B}}"'] & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}}}
\end{tikzcd}
$$

若取W = V，C = B时，那么矩阵M 称作：线性变换T 相对于B的矩阵，记作$\left[T\right]_{B}$，或简称为T 的B - 矩阵。V ↦ V 的线性变换T 的B - 矩阵对于所有V 中的x ，有

$$\left[T(\mathrm{x})\right]_{B} = \left[T\right]_{B}\left[\mathrm{x}\right]_{B}.$$

133

矩阵表示的相似性

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "\text{Multiplication}", "\text{by } A"'] \arrow[d, "\text{Multiplication}"', "\text{by } P^{-1}"] & A\mathbf{x} \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{Multiplication}", "\text{by } C"'] & {[A\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[u, "\text{Multiplication}"', "\text{by } P"]
\end{tikzcd}
$$

若A相似于C，即

$$A = PCP^{-1}$$

那么当B 是由P 的列向量构成时，C 是线性变换x ↦ Ax的B-矩阵。

134

矩阵表示的相似性

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "\text{Multiplication}", "\text{by } A"'] \arrow[d, "\text{Multiplication}"', "\text{by } P^{-1}"] & A\mathbf{x} \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{Multiplication}", "\text{by } C"'] & {[A\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[u, "\text{Multiplication}"', "\text{by } P"]
\end{tikzcd}
$$

相反，若 $T: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ 由

$$T(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$$

定义，并且若B是$\mathbb{R}^n$ 的任意一组基，那么 T 的B－矩阵与A 相似。

其实，在（＊）的计算中已经证明，若P 是以B 的向量作为列构成的矩阵，那么$[T]_B$ = $P^{-1}AP$. 因此，所有相似于A 的矩阵的集合与变换x $\mapsto$ Ax 的所有矩阵表示的集合是同一集合。

135

线性代数 (Linear Algebra)

第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

§ 5.5 Complex Eigenvalues

复数特征值

数学分析→展现物理系统特征

若一个实矩阵A的特征方程中解出了**复根**，那么，这些**复根**也包含了矩阵A的重要信息。

应用于动力系统

周期性运动

振 动

空间旋转

137

空间扩展

实数空间R^n

复数空间C^n

一个复数λ满足 $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow$ 在$\mathbb{C}^n$空间存在一个非零向量使得

$$Ax=\lambda x$$

称λ为A 的复特征值，x为λ所对应的复特征向量。

138

线性代数 (Linear Algebra)

第六章 Orthogonality and Least Squares

§6.1 Inner Product，Length and Orthogonality

内积，长度和正交性

内积

定义

设有 n 维向量 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

定义 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n$ 为向量 x 与 y的内积。

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

140

内积

设有 n 维向量 $x, y, z \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

(1) $[x, y] = [y, x]$;

(2) $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$;

(3) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$;

(4) $x = 0, [x, x] = 0; x \neq 0, [x, x] > 0$

施瓦茨 (Schwarz) 不等式

$$[x, y]^2 \leq [x, x][y, y]$$

141

长度

定义 $\|x\| = \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$,

$\|x\|$ 称为 n 维向量 x 的长度（或范数）

某向量

$a \to x = \dfrac{a}{\|a\|}$

单位化

性质 (1) 非负性　当 $x \neq 0$ 时，$\|x\| > 0$;

当 $x = 0$，$\|x\| = 0$;

(2) 齐次性　$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

$$-1 \leq \frac{[x, y]}{\|x\| \|y\|} \leq 1 \quad (\|x\|, \|y\| \neq 0 \text{ 时})$$

正交

$[x, y] = 0$

$x \neq 0$ 与 $y \neq 0$ 的夹角 $\theta = \arccos \dfrac{[x, y]}{\|x\| \|y\|}$

142

向量的距离

定义 设u，v ∈ $\mathbb{R}^n$，记 dist (u, v)是向量u和v的距离
则, dist (u, v)= $\|u - v\|$

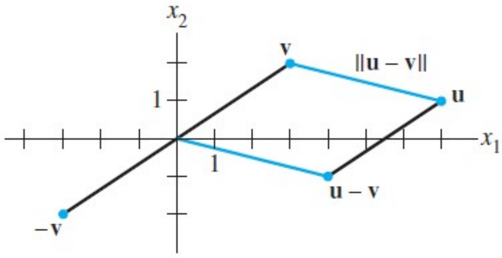


FIGURE 4 The distance between **u** and **v** is the length of **u** − **v**.

正交性

定义 设向量u, v ∈ $\mathbb{R}^n$，若u · v = 0，那么向量u, v是正交的。

零向量与$\mathbb{R}^n$中的每个向量v正交，因为$0^T \cdot v = 0$.

定理 两个向量u和v正交，当且仅当$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

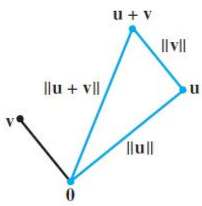


FIGURE 6

正交性

定义 若向量z与$\mathbb{R}^n$子空间W 中的所有向量正交，那么称z与W 正交。所有与z具有相同性质的向量组成的集合，称作子空间W 的正交补空间，记作$W^{\perp}$.

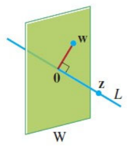


FIGURE 7
A plane and line through **0** as orthogonal complements.

设W是经过原点的平面，L 是过原点且垂直于W 的直线。若z ∈ L ，w ∈ W，那么，直线L 上的向量与平面W中的所有向量w正交。L与W 互为正交补，即$L = W^{\perp}$，且$W = L^{\perp}$.

（1）若向量$x \in W^{\perp}$，当且仅当x 与张成W 的向量集中的每个向量正交；

（2）$W^{\perp}$是$\mathbb{R}^n$的子空间。

145

线性代数 (Linear Algebra)

第六章 Orthogonality and Least Squares

§ 6.2 Orthogonal Sets

正交集

6.2 正交集

定义 一组$\mathbb{R}^n$中的向量$\{u_1, \cdots, u_p\}$，如果对任意两个不同向量有$u_i \cdot u_j = 0, i \neq j$，那么这组向量被称为正交集。

例1 证明$\{u_1, u_2, u_3\}$是正交集，其中

$$u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

147

6.2 正交集

定理 若S= $\{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$是$\mathbb{R}^n$中非零的正交集，那么S线性无关，并且是由S张成的子空间的基。

证明 设有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_p$ 使 $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$

$$\Rightarrow [u_1, (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p)] = [u_1, 0]$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \|u_1\|^2 = 0 \overset{u_1\text{非零}}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0$$

类似可证 $\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_p = 0$

$\Rightarrow$ 向量组 $u_1, u_2, \cdots, u_p$ 线性无关 ■

$\Rightarrow$ 向量组 $u_1, u_2, \cdots, u_p$ 是子空间的基

148

6.2 正交集

定理 若 $\{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ 是$\mathbb{R}^n$子空间W的一组正交基，那么W中的每个向量y都可由$u_1, u_2, \cdots, u_p$唯一表示。即

$$y = c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p$$

则

$$c_j = \frac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j} \quad (j = 1, \cdots, p)$$

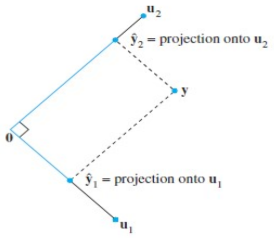


FIGURE 4 A vector decomposed into the sum of two projections.

几何意义

$$y = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

149

6.2 正交集

定义 设 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是向量空间 V（$V \subseteq \mathbb{R}^n$）的一个基，如果 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是V 的一个标准正交基

设 $a \in V, a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r$

$$e_i^T a = \lambda_i e_i^T e_i = \lambda_i \Rightarrow \lambda_i = [a, e_i]$$

给向量空间取标准正交基方便计算

150

6.2 正交集

定义 如果 $m \times n$ 阶矩阵 U 的向量是标准正交的 $\Leftrightarrow$ $U^TU = I$.

证明 设$U = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots u_n]$，且$u_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \ldots, n$.那么，

$$U^TU = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} [u_1 \quad u_2 \quad \cdots u_n] = \begin{bmatrix} u_1^Tu_1 & u_1^Tu_2 & u_1^Tu_3 & \\ u_2^Tu_1 & u_2^Tu_2 & u_2^Tu_3 & \\ u_3^Tu_1 & u_3^Tu_2 & u_3^Tu_3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

U是正交矩阵当且仅当

$u_i^Tu_j = u_j^Tu_i = 0$，$i \neq j$

$u_i^Tu_j = 1$，$i = j$， $\Rightarrow U^TU = I$

6.2 正交集

性质 如果U是 $m \times n$ 阶矩阵，其向量是标准正交的，$x, y \in \mathbb{R}^n$，那么，

(1) $\|Ux\| = \|x\|$ **长度**

(2) $(Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$

(3) $(Ux) \cdot (Uy) = 0$当且仅当$x \cdot y=0$ **正交性**

映射$Ux \mapsto x$保留了其长度和正交性！

6.2 正交集

定义 如果 n 阶方阵 A 满足 $A^TA = I$，即 $A^{-1} = A^T$，则 A 称之为正交矩阵。

A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$
A 的列向量都是单位向量，且两两正交

单位向量

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = I \Rightarrow a_i^T a_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

两两正交

153

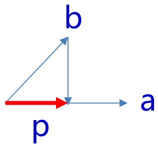
线性代数 (Linear Algebra)

第六章 Orthogonality and Least Squares

§ 6.3 Orthogonality Projection

正交投影

6.3 正交投影



将 b 向量投影到 a 向量的方向上

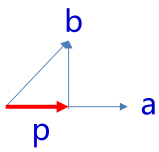
$$p = \frac{a^T b}{a^T a} a$$

系数 λ

155

6.3 正交投影

$$p = \lambda a, \quad e = b - p = b - \lambda a$$



$$< b - \lambda a, a >= 0$$

$$\Rightarrow < b, a > - < \lambda a, a >= 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{< b, a >}{< a, a >} = \frac{< a, b >}{< a, a >}$$

$$p = Pb$$

$$e = b - p, \quad b - \frac{< a, b >}{< a, a >} a$$

$$p = a\frac{a^T b}{a^T a} = \frac{aa^T}{a^T a} b$$

6.3 正交投影

定理 **正交分解定理**

设W 是$\mathbb{R}^n$空间的子空间，那么每个$y \in \mathbb{R}^n$ 都有可以唯一的表示为如下形式

$$y = \hat{y} + z \tag{1}$$

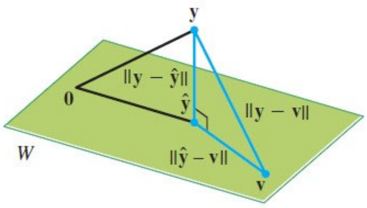
其中$\hat{y} \in W$，$z \in W^{\perp}$.事实上，若$\{u_1, \cdots, u_p\}$是W 的一组正交基，那么

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \cdots + \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p \tag{2}$$

且$z = y - \hat{y}$.

6.3 正交投影

性质 若$y \in W = \mathrm{Span}\{u_1, \cdots, u_p\}$，那么$\mathrm{proj}_W\, y = y$.



定理 **最佳逼近定理**

设W 为的子空间，y是$\mathbb{R}^n$ 中的任一向量，$\hat{y}$ 为y 在W 上的正交投影。那么$\hat{y}$ 是W 中最接近y 的点，即

$$\|y - \hat{y}\| < \|y - v\|$$

对于所有的$v \in W$ 成立，v 不同于$\hat{y}$.

Gram-Schmidt 过程

- 什么是**Gram – Schmidt** 过程?

前提：已知该空间的一组非正交基

目标：找到给定空间W的一组正交基

159

Gram-Schmidt 过程

Gram-Schmidt过程是用于产生$\mathbb{R}^n$的任何非零子空间的正交或标准正交基的算法。

向量形式

矩阵形式

标准正交化

QR分解

160

Gram-Schmidt 过程

定理 对$\mathbb{R}^n$中子空间W的一个基$\{x_1, \ldots, x_p\}$，定义：

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$$

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$

$$\vdots$$

$$v_p = x_p - \frac{x_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_p \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \cdots - \frac{x_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}} v_{p-1}$$

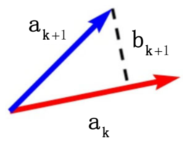
那么$\{v_1, \ldots, v_p\}$是W的一个正交基，此外

$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_p\} = \mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_p\}$，其中$1 \le k \le p$

161

Gram-Schmidt 过程

$$a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_r$$



$$b_{k+1} = a_{k+1} - \mathrm{proj}(a_{k+1})$$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$[b_1, b_1] = \|b_1\|^2$$

$$\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1}$$

Schmidt orthogonalization

162

线性代数 (Linear Algebra)

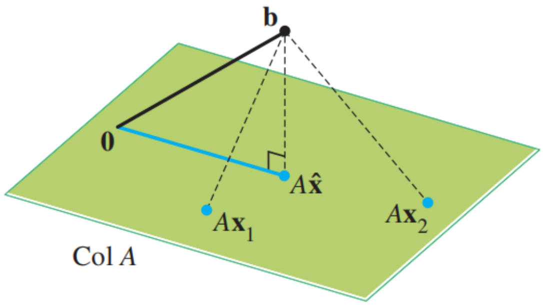
第六章 Orthogonality and Least Squares

§ 6.5 Least Squares Problems

最小二乘问题

最小二乘估计

定义 对于$A_{m\times n}$和$b \in R^m$，方程$Ax = b$的最小二乘解是$\hat{x}$，使得：
$\|b - A\hat{x}\| \le \|b - Ax\|$.



164

最小二乘估计

推导

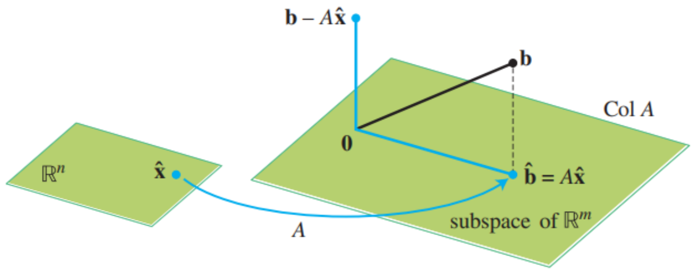
假设$\hat{x}$满足$A\hat{x} = \hat{b}$.

由正交分解定理可知 $b-\hat{b}$ 正交于 A 的列向量，

即 $b-A\hat{x}$ 正交于 A 的所有列向量，故

$A^T(b-A\hat{x}) = 0.$

$\Rightarrow A^TA\hat{x} = A^Tb$



165

最小二乘估计

定理

由上页推导可知，

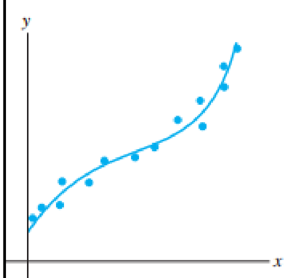
$Ax = b$ 的最小二乘解与$A^TA\hat{x} = A^Tb$的非空解集一致

$A^TA\hat{x} = A^Tb$

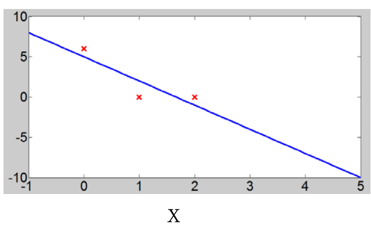
$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$

对于QR分解：

$\hat{x} = R^{-1}Q^Tb$



非线性方程



线性方程

166

最小二乘估计

定理

矩阵A^TA是可逆的充分必要条件是：
A的列是线性无关的，在这种情形下，
方程$Ax=b$有唯一最小二乘解$\hat{x}$且它有下面的表示：
$\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$

167

最小二乘估计

非线性方程

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

观测向量　　设计矩阵　　系数矩阵

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & v_k^n \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

168

最小二乘估计

非线性方程

现在只需解方程

$$X\vec{a} = \vec{b}$$

但是基于数据组， $X\vec{a} = \vec{b}$ 可能矛盾，因此我们尝试寻找一个最佳拟合的多项式（也就是当 $||X\vec{a} - \vec{b}||$ 被最小化时的多项式）。

根据之前提到的正则系引理，我们看到 $||X\vec{a} - \vec{b}||$ 被最小化当且仅当

$$X^T X\vec{a} = X\vec{b}$$

169

最小二乘估计

最小二乘与QR分解法

给定一个$m \times n$矩阵A，且具有线性无关的列，取A $=$ QR，那么对每一个属于$\mathbb{R}^m$的b，矩阵Ax $=$ b有唯一的最小二乘解，其解为：

$\hat{x}=R^{-1}Q^{T}b$

取$\hat{x} = R^{-1}Q^{T}b$，

那么$A\hat{x} = QR\hat{x} = QRR^{-1}Q^{T}b = QQ^{T}b$

170

内积空间

定义

内积空间是具有内积运算的线性空间。

在向量空间V中，对向量u, v内积运算满足下列公理：

1.<u, v>=<v, u>

2. <u + v, w>=<u, w>+<v, w>

3. <cu, v>=c<u, v>

4. <u, u> ≥ 0， 当且仅当u=0时<u, u>=0

171

内积空间

定义

内积空间中：

1. 范数(norm)：$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$

2.u, v间距离(distance) ：$\|u - v\|$

3.u ⊥ v：< u, v >= 0

172

内积空间性质

性质　Cauchy-Schwarz不等式: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$

性质　三角不等式: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

173

线性代数 (Linear Algebra)

第七章 Symmetric Matrices and Quadratic Forms

§ 7.1 Diagonalization of Symmetric Matrices

对称矩阵的对角化

7.1 对称矩阵的对角化

定理 对称阵的特征值为实数。

定理 设A为n 阶对称矩阵，则必有正交阵P，使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

其中Λ是以A 的n个特征值为对角元素的对角阵。

推论

设A为n 阶对称阵，λ 是A 的特征方程的k 重根，则矩阵$A - \lambda I$ 的秩

$$R(A - \lambda I) = n - k$$

从而对应特征的值λ 恰有k 个线性无关的特征向量。

175

7.1 对称矩阵的对角化

定理2 若n 阶矩阵**A** 是正交可对角化的，当且仅当 **A** 是对称矩阵。

↓

每一个对称矩阵都是可正交对角化的！

176

7.1 对称矩阵的对角化

谱定理 (Spectral Theorem)

矩阵A的特征值的集合可以称为A的谱

定理4 对称矩阵的谱定理

若n 阶数对称矩阵$\mathbf{A}$ 有如下性质：

(1) $\mathbf{A}$有n个实特征值；

(2) λ特征子空间的维数等于特征根λ 的重数；

(3) 特征子空间是相互正交的；

(4) $\mathbf{A}$是可正交对角化矩阵。

177

7.1 对称矩阵的对角化

谱分解

设$\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^{-1}$,其中$\mathbf{P}$ 的列向量$u_1,\cdots,u_n$是标准正交的特征向量，其所对应的特征值为$\lambda_1\cdots\lambda_n$ ，构成了对角阵$\mathbf{D}$. 那么由于$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^T$,

$$\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^T=\begin{bmatrix}u_1 & \cdots & u_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^T\\ \vdots\\ u_n^T\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_n u_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^T\\ \vdots\\ u_n^T\end{bmatrix}$$

矩阵A的谱分解

可以将A表示为：

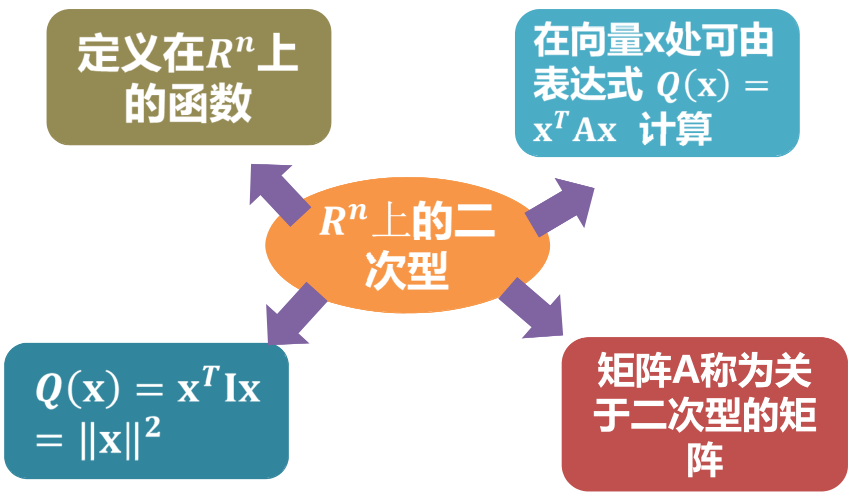
$$\mathbf{A}=\lambda_1 u_1 u_1^T+\lambda_2 u_2 u_2^T+\cdots+\lambda_n u_n u_n^T$$

178

第七章 Symmetric Matrices and Quadratic Forms

§ 7.2 Quadratic Forms

二次型



7.2 二次型

定义

含有 n 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

当 $j > i$ 时，取 $a_{ji} = a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

7.2 二次型

二次型的变量代换

若$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，那么变量代换为下面的等式形式：

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y} \quad 或 \quad \mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

此处$\mathbf{P}$是可逆矩阵，$\mathbf{y}$是$\mathbb{R}^n$ 中的另一个变量，此处$\mathbf{P}$ 的列向量可以确定$\mathbf{R}^n$的一个基。y是相对于该基向量x 的坐标向量。

若用变量代换处理二次型，那么

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{y}$$

新的二次型矩阵是

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$$

若$\mathbf{P}$可将$\mathbf{A}$正交对角化，那么$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$，且$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$，新的二次型矩阵是对角矩阵。

7.2 二次型

$$\mathbf{x}^T\boxed{\mathbf{A}}\mathbf{x}=(\mathbf{P}\mathbf{y})^T\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\boxed{(\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P})}\mathbf{y}$$

定义

设**A**和**B**是n阶矩阵，若由可逆矩阵**P**，使$\mathbf{B}=\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$，则称矩阵**A**与**B**合同。

注：如果 A 是对称矩阵，$B^T=(C^TAC)^T=C^TA^TC=C^TAC=B$，$R(B)=R(A)$

183

7.2 二次型

定理1

任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换 $x=Py$，使

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$$

是对应矩阵 (a_{ij}) 的特征值。

推论

任意给出 n 元二次型 $f(x)=x^TAx$ $(A^T=A)$，总有可逆变换

$$x=Cz$$

使 $f(x)$ 为规范形。

184

7.2 二次型

这就是例3中$Q(\mathbf{x})$在$x=(2,-2)$处的值，如所示：

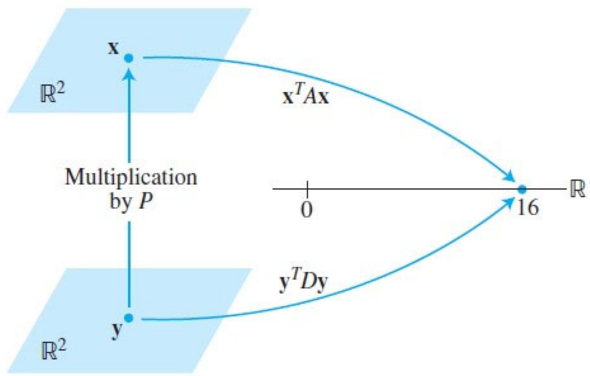


FIGURE 1 Change of variable in $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

7.2 二次型

定理3 **主轴定理**

设$\mathbf{A}$是一个n 阶对称阵，那么存在一个正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$, 它将二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 变换成不含交叉项的二次型$\mathbf{y}^T\mathbf{D}\mathbf{y}$.

注：

定理中矩阵$\mathbf{P}$ 的列称为二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的主轴。向量$\mathbf{y}$是$\mathbf{x}$在这些主轴构造的$\mathbb{R}^n$空间的单位正交基下的坐标向量。

7.2 二次型

定义

一个二次型Q是：

(1) 正定的，如果对所有的$\mathbf{x} \neq 0$，有$Q(\mathbf{x}) > 0$.

(2) 负定的，如果对所有的$\mathbf{x} \neq 0$，有$Q(\mathbf{x}) < 0$.

(3) 不定的，如果$Q(\mathbf{x})$ 既有正值又有负值。

Q被称为半正定的，如果对所有$\mathbf{x}$，$Q(\mathbf{x}) \geq 0$;

Q被称为半负定的，如果对所有$\mathbf{x}$，$Q(\mathbf{x}) \leq 0$.

187

7.2 二次型

定理4

设$\mathbf{A}$是n 阶对称矩阵，那么一个二次型是：

(1) 正定，当且仅当$\mathbf{A}$ 的所有特征值都是正数；

(2) 负定，当且仅当$\mathbf{A}$ 的所有特征值都是负数；

(3) 不定，当且仅当$\mathbf{A}$ 既有正特征值，又有负特征值。

由主轴定理，存在一个正交变换$x = Py$, 使得

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{D}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

此处$\lambda_1 \cdots \lambda_n$是$\mathbf{A}$ 的特征值，由于P 是可逆的，非零向量$\mathbf{x}$ 和非零向量$\mathbf{y}$之间存在一个一一映射，这样，$\mathbf{x} \neq 0$ 时，$Q(\mathbf{x})$ 的值与上式右边的表达式的值完全对应。显然，像定理所描述的三类方式一样，它由特征值$\lambda_1 \cdots \lambda_n$的符号所确定。

188

7.2 二次型

正定二次型

定理5

设二次型 $f = x^T A x$ 的秩是 r，且有两个可逆变换 $x = Cy$ 及 $x = Pz$ 使 $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2\ (k_i \neq 0)$ 及 $f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2\ (\lambda_i \neq 0)$

则 k_i 中的正数个数与 λ_i 中的正数个数相同 **惯性定理**

正系数的个数 → **正惯性指数**

负系数的个数 → **负惯性指数**

189

7.2 二次型

如果 S 和 T 是对称正定矩阵，S + T 也是对称正定矩阵。

测试：对于所有非零向量，$x^T(S+T)x = x^T S x + x^T T x > 0$

如果一个对称矩阵 S 满足以下任一性质，则满足其它全部性质

(1) S 矩阵所有的主元为正数

(2) S 矩阵所有 n 个左上行列式为正数

(3) S 矩阵所有 n 个特征值为正数

(4) 针对所有非零向量，$x^T S x$ 为正数

(5) $S = A^T A$，A 的所有列向量线性无关

判断方法

190

Q & A

7.4 奇异值分解

什么是SVD?

n x n

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

普通情况 → 对称矩阵

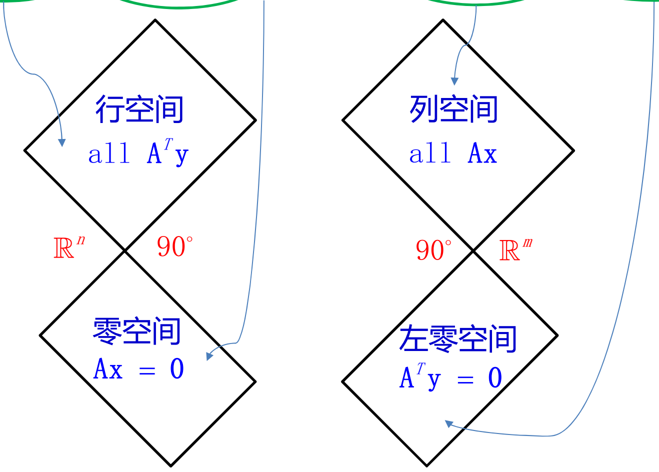
$$A = Q\Lambda Q^{T}$$

m x n

$$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times m}{U}\,\underset{m \times n}{\Sigma}\,\underset{n \times n}{V^{T}}$$

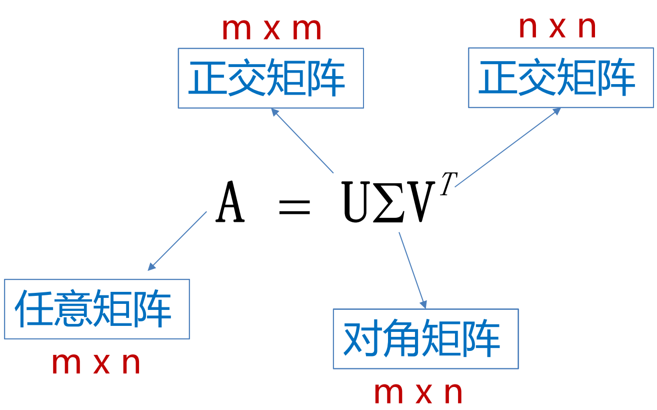
7.4 奇异值分解

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r & v_{r+1} & \cdots & v_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_r & u_{r+1} & \cdots & u_m \end{pmatrix}$$



193

7.4 奇异值分解

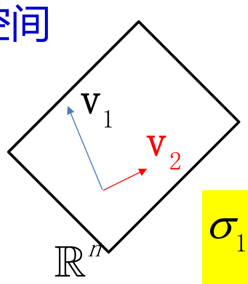


194

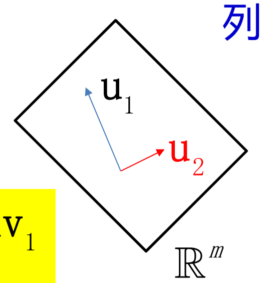
7.4 奇异值分解

如何获得SVD?

行空间



列空间



$$\sigma_1 u_1 = Av_1$$

$$\sigma_2 u_2 = Av_2$$

$\dots$

一组正交基 → **另一组正交基**