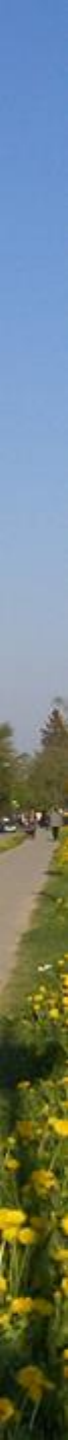


电路理论基础

时间：星期一上午8:00至9:40，星期五上午8:00至9:40

地点：南校园1506

任课教师：粟涛（电子与信息工程学院）

考试方式：闭卷

成绩评定：平时分40%，期末考试60%。

学分：4

交流功率分析

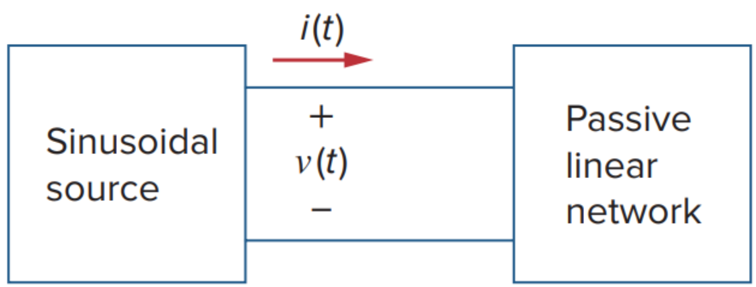
- 瞬时功率与平均功率
- 最大平均功率传输
- 有效值
- 视在功率与功率因数
- 复功率
- 交流功率守恒
- 功率因素校正

瞬时功率与平均功率

瞬时功率

- 元件的电压和电流都是随时间变化的。元件吸收的瞬时功率等于
  - 该元件两端的瞬时电压与
  - 流经该元件的瞬时电流的乘积。

$$p(t) = v(t) \times i(t)$$



- 注意：
  - 瞬时功率就是电压电流的单纯相乘；
  - 元件（或网络）用这个电功率干了什么，并不确定。
  - 如果是电热器，它把电能转换成了热能。
  - 如果是电动车电池，它把电能存储起来了。

正弦波的瞬时功率

- 考虑元件上的一对正弦电压和正弦电流
  - 这两个量的相位不一定相等

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

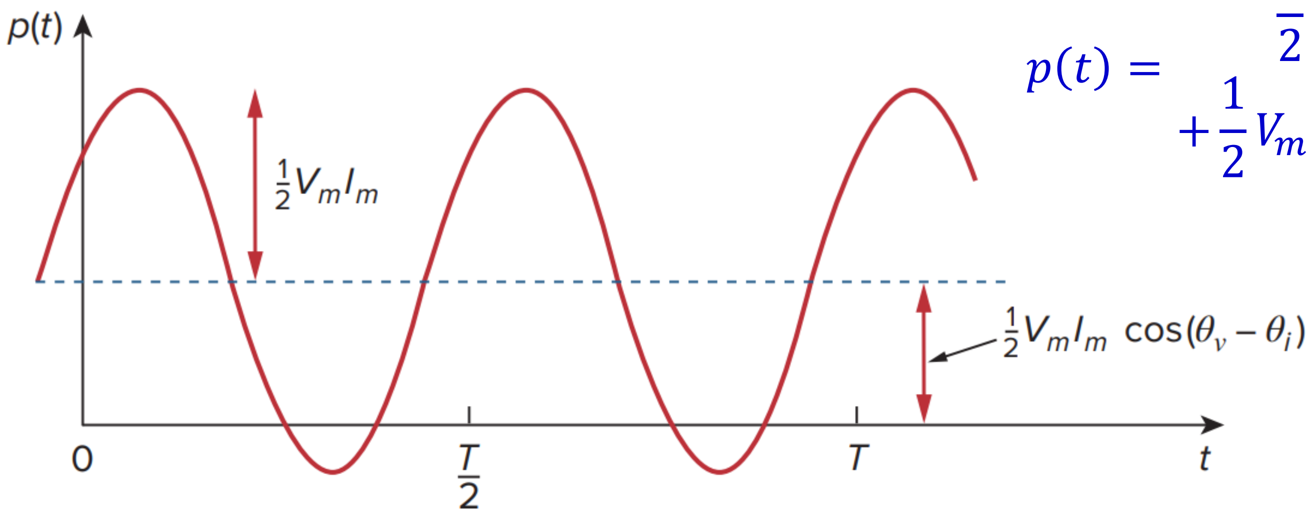
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v)\cos(\omega t + \theta_i)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

- 这个元件的瞬时功率为正弦函数

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i)$$



平均功率

- 对于周期性电压电流来说，平均功率就是在一个周期内的功率的平均值，它不再是个随时间变化的量。

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \quad \Rightarrow \quad p(t) = \begin{matrix} \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \\ +\frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i) \end{matrix}$$

- 对 p(*t*) 进行积分可以分成两部分

$$\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad \Rightarrow \quad T \times \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$\frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i) \quad \Rightarrow \quad 0$$

- 由此得到平均功率的表达式： $P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$

相量形式求平均功率

- 电压的相量表达式

$$\mathbb{V} = V_m e^{j\theta_v}$$

- 电流的相量表达式

$$\mathbb{I} = I_m e^{j\theta_i}$$

- 平均功率的表达式

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

- 平均功率与电压电流相量的关系

$$P = \frac{1}{2} Re\{V_m I_m e^{j(\theta_v - \theta_i)}\} \Rightarrow P = \frac{1}{2} Re\{\mathbb{V}\mathbb{I}^*\}$$

特殊情况：电压与电流同相

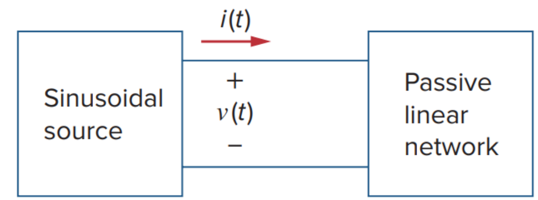
- **电阻** $P = \frac{1}{2} V_m I_m$

特殊情况：电压与电流差90度

- **电容/感** $P = 0$

例题-1

- 问题：已知电压与电流的表达式如下
  - 电压：$v(t) = 120\cos(377t + 45^o)$;
  - 电流：$i(t) = 10\cos(377t - 10^o)$;
  - 求无源网络所吸收的瞬时功率与平均功率。



- 解答：
  - 求解瞬时功率

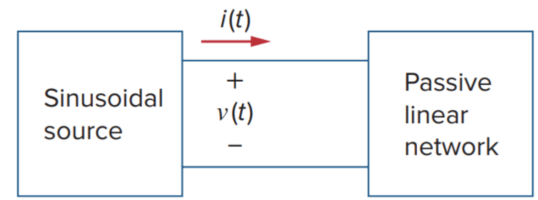
$$p(t) = \frac{1}{2}\times 120\times 10\times \cos 55^o + \frac{1}{2}\times 120\times 10\cos(2\omega t + 55^o)$$

  - 求解平均功率

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\times 120\times 10\times \cos 55^o$$

例题-1

- 问题：已知电压与电流的表达式如下
  - 电压：v(t) = 120 cos(377t + 45°)；
  - 电流：i(t) = 10 cos(377t - 10°)；
  - 求无源网络所吸收的瞬时功率与平均功率。



- 解答：
  - 求解瞬时功率

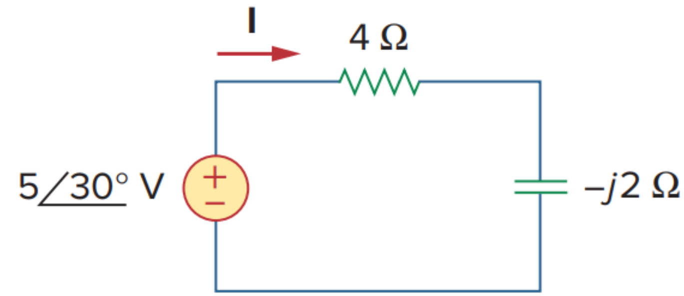
$$p(t) = \begin{matrix} 600\cos 55^{o} \\ +600\cos(2\omega t + 55^{o}) \end{matrix} = \begin{matrix} 344 \\ +600\cos(2\omega t + 55^{o}) \end{matrix} \ (\mathrm{W})$$

  - 求解平均功率

$$P_{ave} = 600\cos 55^{o} = 344\ (\mathrm{W})$$

例题-2

- 问题：对下面的电路，求电源提供的平均功率和电阻器吸收的平均功率。



- 解答：
  - 输入阻抗的值

$$Z_{in} = 4 - j2\ \Omega$$

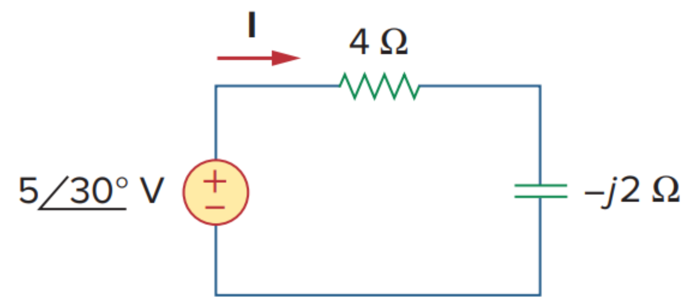
  - 得到电流相量

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}}{Z_{in}} = \frac{5e^{j30^o}}{4-j2} = \frac{5e^{j30^o}}{\sqrt{20}e^{-j26.57^o}}$$

$$\mathbb{I} = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{j56.57^o}$$

例题-2

- 问题：对下面的电路，求电源提供的平均功率和电阻器吸收的平均功率。



- 解答：
  - 电源提供的平均功率

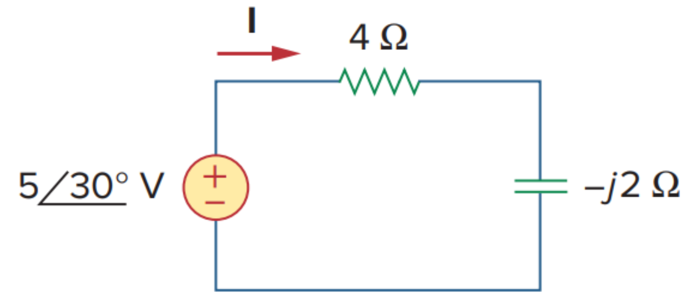
$$P_V=\frac{1}{2}Re[\mathbb{V}\mathbb{I}^*]=\frac{1}{2}Re\left[5e^{j30^o}\frac{\sqrt{5}}{2}e^{-j56.57^o}\right]$$

$$P_V=\frac{5\sqrt{5}}{4}\cos(-26.57^o)=2.5\ (\mathrm{W})$$

$$P_V=2.5\ (\mathrm{W})$$

例题-2

- 问题：对下面的电路，求电源提供的平均功率和电阻器吸收的平均功率。



- 解答：
  - 电阻上的电压相量

$$\mathbb{V}_R = \mathbb{I} \times R = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{j56.57^o} \times 4 = 2\sqrt{5} e^{j56.57^o}$$

  - 电阻提供的平均功率

$$P_R = \frac{1}{2} Re[\mathbb{V}_R \mathbb{I}^*] = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times 2\sqrt{5} \cos 0^o$$

$$P_R = 2.5\ (\mathrm{W}) = P_V$$

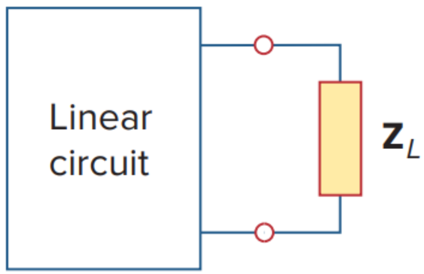
最大平均功率传输

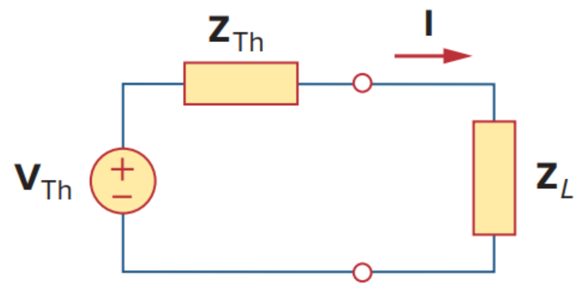
介绍

- 在由电阻组成的电路中，当负载的电阻值与网络戴维南电阻相等时，负载的功率达到最大。
- 在包含电容电感的电路中，同样存在使负载功率到达最大的问题。
- 因为电流电压和电阻都是复数形式，而复数有实部和虚部两个变量，因此求解最大功率位置的过程会更复杂一些。

负载功率

- 以戴维南电路等效原网络。





- 负载上的电流和电压

$$\mathbb{I} = \mathbb{V}_{Th} \times \frac{1}{Z_{Th} + Z_L} \qquad \mathbb{V}_L = \mathbb{V}_{Th} \times \frac{Z_L}{Z_{Th} + Z_L}$$

- 负载上的功率

$$P_L = \frac{1}{2} Re[\mathbb{V}_L \mathbb{I}^*]$$

一个有用的计算式

- 电压相量和电流相量共轭的乘积

$$\mathbb{V}_L\mathbb{I}^* = \mathbb{V}_{Th} \times \frac{Z_L}{Z_{Th}+Z_L} \times \left(\mathbb{V}_{Th} \times \frac{1}{Z_{Th}+Z_L}\right)^*$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{V}_L\mathbb{I}^* = \mathbb{V}_{Th}\mathbb{V}_{Th}^* \times Z_L \times \frac{1}{Z_{Th}+Z_L}\left(\frac{1}{Z_{Th}+Z_L}\right)^*$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{V}_L\mathbb{I}^* = |\mathbb{V}_{Th}|^2 \times \frac{1}{|Z_{Th}+Z_L|^2} \times Z_L$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{V}_L\mathbb{I}^* = |\mathbb{V}_{Th}|^2 \times \frac{1}{(R_{Th}+R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2} \times (R_L + jX_L)$$

- 乘积的实部为

$$Re[\mathbb{V}_L\mathbb{I}^*] = \frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2 R_L}{(R_{Th}+R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2}$$

最大功率条件

- 功率的表达式为

$$P_L = Re[\mathbb{V}_L \mathbb{I}^*] = \frac{1}{2}\frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}$$

- 功率是个二元函数

$$P_L = f(R_L, X_L)$$

- 它的极值的位置由两个导数决定

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \qquad \frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0$$

最大功率条件

- 功率对负载虚部的导数

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2 R_L}{(R_{Th}+R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2}\right)}{\partial X_L}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2}{2}\left[-\frac{2(X_{Th}+X_L)R_L}{[(R_{Th}+R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2]^2}\right]$$

- 令这个导数为0:

$$\frac{2(X_{Th}+X_L)R_L}{[(R_{Th}+R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2]^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$X_{Th}+X_L = 0 \quad \Rightarrow \quad X_L = -X_{Th}$$

最大功率条件

- 功率的表达式改写为

$$P_L = \frac{1}{2}\frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2 R_L}{(R_{Th}+R_L)^2}$$

- 功率对负载实部的导数

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2}{2}\left[\frac{1}{(R_{Th}+R_L)^2} - \frac{2R_L}{(R_{Th}+R_L)^3}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2}{2}\frac{R_{Th}-R_L}{(R_{Th}+R_L)^3}$$

- 令这个导数为0:

$$R_{Th} - R_L = 0 \quad \Rightarrow \quad R_L = R_{Th}$$

最大功率

- 条件：当负载阻抗为戴维南阻抗的共轭复数时，

$$R_L = R_{Th} \qquad X_L = -X_{Th}$$

$$Z_L = {Z_{Th}}^*$$

- 网络对外输出最大功率。并且功率值为：

$$P_L = Re[\mathbb{V}_L \mathbb{I}^*] = \frac{1}{2}\frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}$$

$$\Downarrow$$

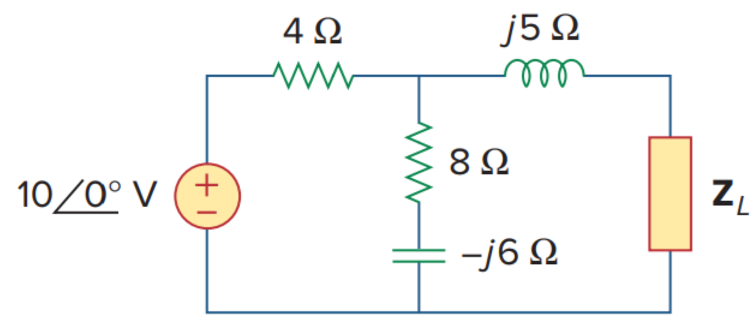
$$P_L = Re[\mathbb{V}_L \mathbb{I}^*] = \frac{1}{2}\frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2 R_{Th}}{(R_{Th} + R_{Th})^2}$$

$$\Downarrow$$

$$P_L = Re[\mathbb{V}_L \mathbb{I}^*] = \frac{1}{8}\frac{|\mathbb{V}_{Th}|^2}{R_{Th}}$$

例题

- 问题：求图中所示电路负载Z_L的值，使其吸收的平均功率最大，并计算相应的最大平均功率。

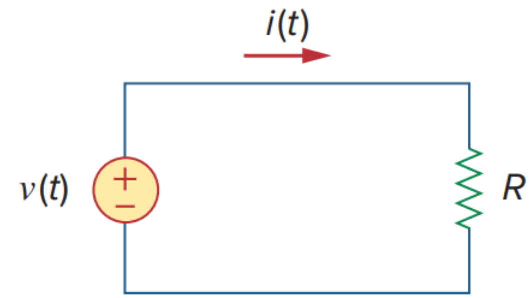


- 解答：
  - 先求负载两端对应电路的戴维南等效电路
    - 戴维南等效电阻 $Z_{Th} = j5 + 4 \parallel (8 - j6) = 2.933 + j4.467\ (\Omega)$
    - 戴维南等效电压 $V_{Th} = 10 \times \dfrac{8 - j6}{4 + 8 - j6} = 7.454e^{-j10.3^o}\ (\mathrm{V})$
  - 再求最佳负载阻抗 $Z_L = 2.933 - j4.467\ (\Omega)$
  - 然后求最大功率 $P_L = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{7.454^2}{2.933} = 2.368\ (\mathrm{W})$

有效值

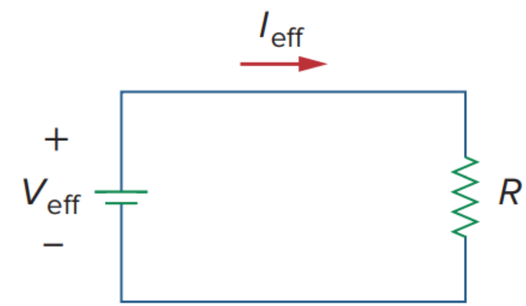
介绍

- 周期性电流的有效值是指
  - 与该周期性电流传递给电阻器的
  - 平均功率相等的直流电流值。



- 电阻从交流电吸收的功率

$$P_L = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt\right) R$$



- 电流等效值，又称为方均根（rms）值。

$$P_L = I_{eff}^2 R \qquad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

均方根值

- 电压的均方根值

$$V_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2dt}$$

- 任意信号的均方根值

$$X_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2dt}$$

- 正弦信号的均方根值

$$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T(\cos\omega t)^2dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\times\int_0^T\frac{1+\sin(2\omega t)}{2}dt}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

正弦电压和电流的有效值

- 电压的有效值

$$v(t) = V_m \cos(\omega t) \qquad V_{eff} = V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

- 电流的有效值

$$v(t) = V_m \cos(\omega t) \qquad V_{eff} = V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

- 使用有效值表达平均功率

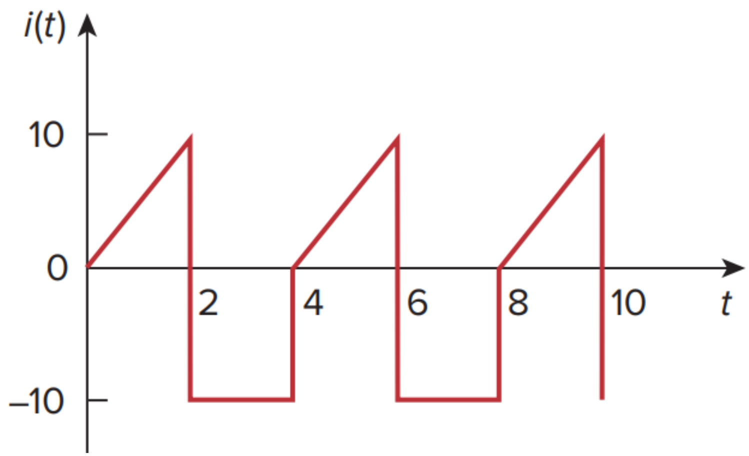
$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \qquad P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

- 电阻的平均功率

$$P = I_{rms}^2 R = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

例题

- 问题：求右图电流波形的rms值。若该电流流过一个2Ω 的电阻器，试求该电阻器吸收的平均功率。



$$i(t)=\begin{cases}5t & 0<t<2\\ -10 & 2<t<4\end{cases}$$

$$I_{rms}=\sqrt{\frac{1}{4}\int_0^4 i^2dt}$$

$$I_{rms}=\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^2(5t)^2dt+\int_2^4(-10)^2dt}$$

$$I_{rms}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{200}{3}+200}=10\sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{(A)}$$

$$P=I_{rms}^2R=\frac{200}{3}\times 2=\frac{400}{3}\ \text{(A)}$$

- 解答：
  - 写出电流在一个周期的表达式
  - 计算电流的均方根值
  - 计算电阻的平均功耗

视在功率与功率因数

介绍

- 前面谈到，电压和电流和平均功率的关系

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

- 定义两个新参数
  - 视在功率（apparent power） $S = V_{rms} I_{rms}$
  - 功率因数（因子，power factor） $\mathrm{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i)$

- 则平均功率可以写为

$$P = S\cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$\mathrm{pf} = \frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

功率因数角

- 功率因素是功率因数角 $\theta_v - \theta_i$ 的余弦。

$$\mathrm{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

- 功率因数角就是电压相量和电流相量的角度差，
  - 也就是等于阻抗的相位： $Z = \dfrac{\mathbb{V}_{rms}}{\mathbb{I}_{rms}} = \dfrac{V_{rms}e^{j\theta_v}}{I_{rms}e^{j\theta_i}} = \dfrac{V_{rms}}{I_{rms}}e^{j(\theta_v-\theta_i)}$
  - 也可以用均方根值来表达： $Z = \dfrac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \dfrac{V_m e^{j\theta_v}}{I_m e^{j\theta_i}} = \dfrac{V_m}{I_m}e^{j(\theta_v-\theta_i)}$
- 因数角的几种情况

$(\theta_v - \theta_i)$	-90º	(-90º , 0)	0	(0 , 90º)	90º
行为	pf = 0	电流超前	pf =1	电压超前	pf = 0
元件	纯容性	电容性	阻性	电感性	纯感性

例题

- 问题：当激励电压为 $v(t)=120\cos(100\pi t-20^o)$ V 时，流过某负载的电流为 $i(t)=4\cos(100\pi t+10^o)$ A，求该负载的视在功率与功率因数，并确定构成该串接负载的元件值。

- 解答：
  - 视在功率：$S=V_{rms}I_{rms}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}\times\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\times 120\times 4=240\ (\mathrm{W})$
  - 功率因数：$\mathrm{pf}=\cos(\theta_v-\theta_i)=\cos(-20^o-10^o)=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$
  - 阻抗值：$Z=\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}}=\frac{120e^{-j20^o}}{4e^{j10^o}}=30e^{-j30^o}=25.98-j15\ (\Omega)$

例题

- 问题：当激励电压为 $v(t)=120\cos(100\pi t-20^o)$ V 时，流过某负载的电流为 $i(t)=4\cos(100\pi t+10^o)$ A，求该负载的视在功率与功率因数，并确定构成该串接负载的元件值。

- 解答：
  - 阻抗值：$$Z=\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}}=\frac{120e^{-j20^o}}{4e^{j10^o}}=30e^{-j30^o}=25.98-j15\ (\Omega)$$
  - 负载实部 → 电阻：$R=Re\{Z\}=25.98\ \Omega$
  - 负载虚部 → 电容：$X=Im\{Z\}=-15\ \Omega=-\dfrac{1}{\omega C}$

$$C=\frac{1}{15\times 100\pi}=2.122\times 10^{-4}\ (\text{F})$$

复功率

介绍

- 复功率（complex power）是电压相量与电流相量共轭的乘积。

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2}\mathbb{V}\mathbb{I}^*$$

- 假设电压电流为

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta_v) \qquad i(t) = I_m\cos(\omega t + \theta_i)$$

- 代入计算复功率

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2} \times V_m e^{j\theta_v} \times I_m e^{-j\theta_i} \qquad \mathbb{S} = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\theta_v - \theta_i)}$$

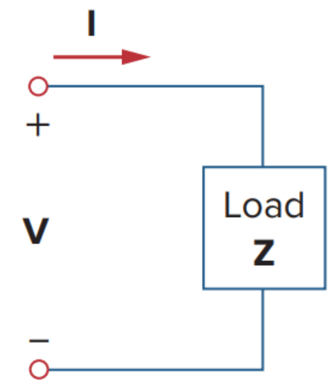
- 复功率的展开表达式

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + j\frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i)$$

功率成分

- 复功率可以分为实部和虚部
  - P称为有功（resistive）功率
  - Q称为无功（reactive）功率

$$\mathbb{S} = P + jQ$$



- 可以引入阻抗来表达复功率

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2} \times (\mathbb{I} \times Z) \times \mathbb{I}^* = \frac{1}{2}|\mathbb{I}|^2 Z = \frac{1}{2}|\mathbb{I}|^2 (R + jX)$$

- 有功功率由电阻性部件产生

$$P = \frac{1}{2}|\mathbb{I}|^2 R = \frac{1}{2} I_m^2 R = I_{rms}^2 R$$

- 无功功率由电抗性部件产生

$$P = \frac{1}{2}|\mathbb{I}|^2 X = \frac{1}{2} I_m^2 X = I_{rms}^2 X$$

功率三角形

- 复功率包含额负载所有功率信息

$$\text{Complex Power} = \mathbf{S} = P + jQ = \mathbf{V}_{\text{rms}}(\mathbf{I}_{\text{rms}})^* = |\mathbf{V}_{\text{rms}}|\,|\mathbf{I}_{\text{rms}}|\underline{/\theta_v - \theta_i}$$

$$\text{Apparent Power} = S = |\mathbf{S}| = |\mathbf{V}_{\text{rms}}|\,|\mathbf{I}_{\text{rms}}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

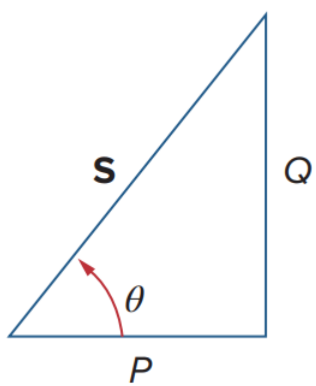
$$\text{Real Power} = P = \text{Re}(\mathbf{S}) = S\cos(\theta_v - \theta_i)$$

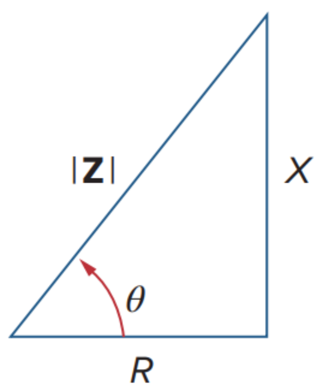
$$\text{Reactive Power} = Q = \text{Im}(\mathbf{S}) = S\sin(\theta_v - \theta_i)$$

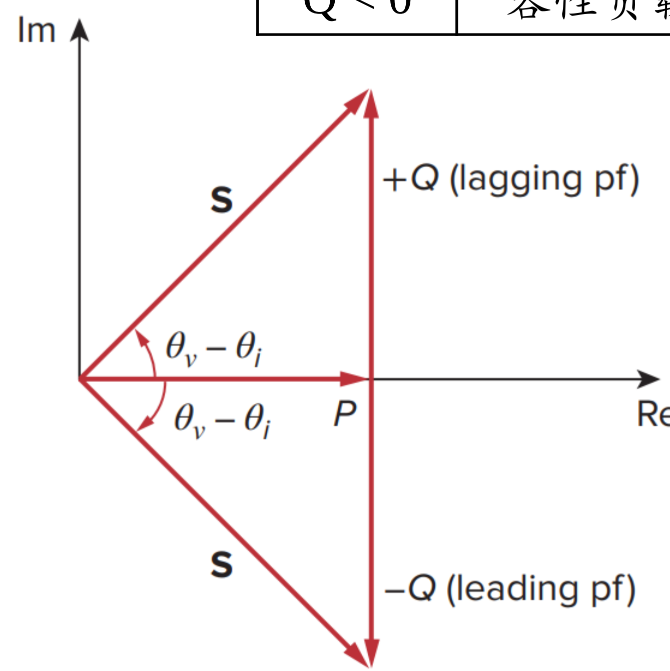
$$\text{Power Factor} = \frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Q > 0	感性负载
Q = 0	阻性负载
Q < 0	容性负载

- 功率三角形







例题

- 问题：某负载两端电压为 $v(t) = 60\cos(\omega t - 10^o)$ V，而沿电压降落方向流过该负载的电流为 $i(t) = 1.5\cos(\omega t + 50^o)$ A。试求 (a) 复功率与视在功率；(b) 有功功率与无功功率；(c) 功率因数与负载阻抗。

- 解答：
  - 电压相量和电流相量为： $\mathbb{V} = 60e^{-j10^o}$ V $\quad \mathbb{I} = 1.5e^{j50^o}$ A
  - 复功率为： $\mathbb{S} = \frac{1}{2} \times 60e^{-j10^o} \times 1.5e^{-j50^o} = 45e^{-j60^o}$ (W)
  - 视在功率： $S = |\mathbb{S}| = 45$ W

中山大学 - 电子与信息工程学院 - 粟涛

例题

- 问题：某负载两端电压为 $v(t) = 60\cos(\omega t - 10^o)$ V，而沿电压降落方向流过该负载的电流为 $i(t) = 1.5\cos(\omega t + 50^o)$ A。试求 (a) 复功率与视在功率；(b) 有功功率与无功功率；(c) 功率因数与负载阻抗。

$$\mathbb{S} = 45e^{-j60^o}\ \text{W}$$

- 解答：
  - 有功功率： $P = 45\cos 60^o = 22.5\ (\text{W})$
  - 无功功率： $Q = 45\sin 60^o = 38.97\ (\text{var})$
  - 功率因数： $\text{pf} = \cos 60^o = 0.5$
  - 负载阻抗： $Z = \dfrac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \dfrac{60e^{j-10^o}}{1.5e^{j50^o}} = 40e^{-j60^o} = 20 - j34.64\ (\Omega)$

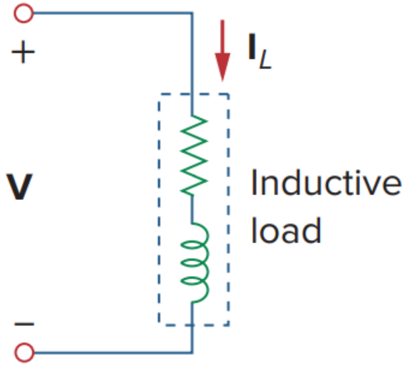
功率因数的校正

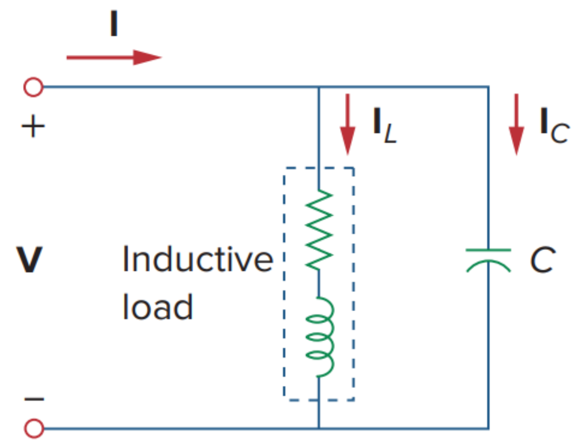
介绍

- 大多数家电负载和工业负载通常呈现电感性负载特性且功率因数较小。负载的电感性不能变，但可以设法提高其功率因数。
- 不改变原始负载的电压或电流，提供功率因数的过程称为功率因数校正（power factor correction）。
- 对于负载呈感性的情况，可以通过增加以一个并联的电抗元件（一般是电容），从而使功率因数接近于单位 *1* 。

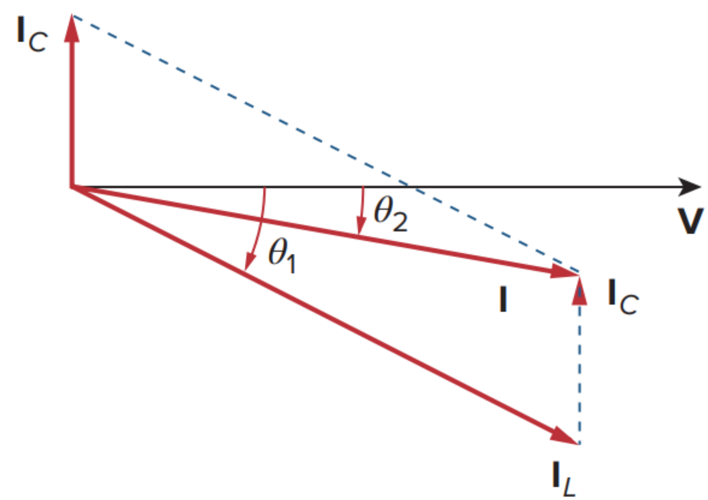
校正原理

- 左边为原始负载，右边在负载边并联了一个电容。
  - 感性负载可以表示为
  - 电阻和电感的串联，
  - 负载电流相位比电压落后。



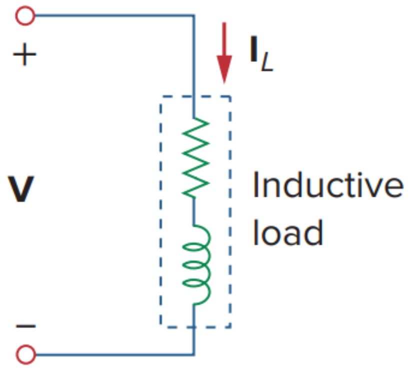


- 电容的存在增加了一个 I_C，
  - 相位比电压超前。
  - 总电流 $I_L + I_C$ 的相位接近电压。



校正分析

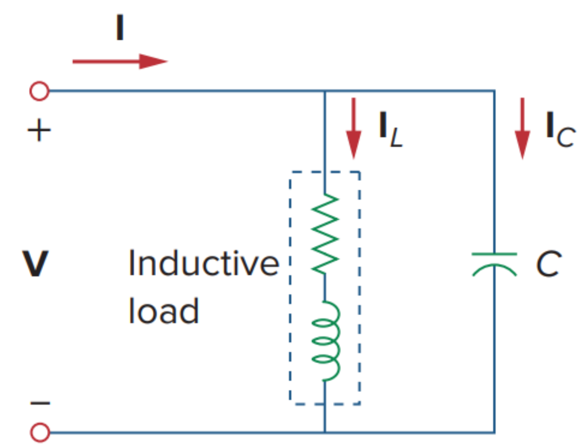
- 考虑复功率的计算式



$$\mathbb{S}=\frac{1}{2}\times\mathbb{V}\times\mathbb{I}^*$$

$$\mathbb{S}=\frac{1}{2}\times\mathbb{V}\times(\mathbb{V}\times Y)^*$$

$$\mathbb{S}=\frac{1}{2}\times|\mathbb{V}|^2\times Y^*$$



- 原负载复功率的虚部是正的。

$$\mathbb{S}_1=\frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\left(\frac{1}{R+j\omega L}\right)^*=\frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\frac{R+j\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$$

- 电容为复功率带来一个负增量。

$$\mathbb{S}_2=\frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\left(\frac{1}{R+j\omega L}+j\omega C\right)^*=\frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\left(\frac{R+j\omega L}{R^2+(\omega L)^2}-j\omega C\right)$$

复功率的组成

- 标注复功率的参数

原始负载

视在功率：S_1
有功功率：$P_1 = S_1 \times \cos\theta_1$
无功功率：$Q_1 = S_1 \times \sin\theta_1$

校正后负载

视在功率：S_2
有功功率：$P_2 = S_2 \times \cos\theta_1$
无功功率：$Q_2 = S_2 \times \sin\theta_1$

- 这些功率参数的计算式

$$P_1 = \frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$P_2 = \frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$Q_1 = \frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$Q_2 = \frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\left[\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} - \omega C\right]$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left\{\frac{\omega L}{R} - \frac{\omega C}{R}\left[R^2 + (\omega L)^2\right]\right\}$$

复功率的变化

- 标注复功率的参数

原始负载

视在功率：S_1
有功功率：$P_1 = S_1 \times \cos\theta_1$
无功功率：$Q_1 = S_1 \times \sin\theta_1$

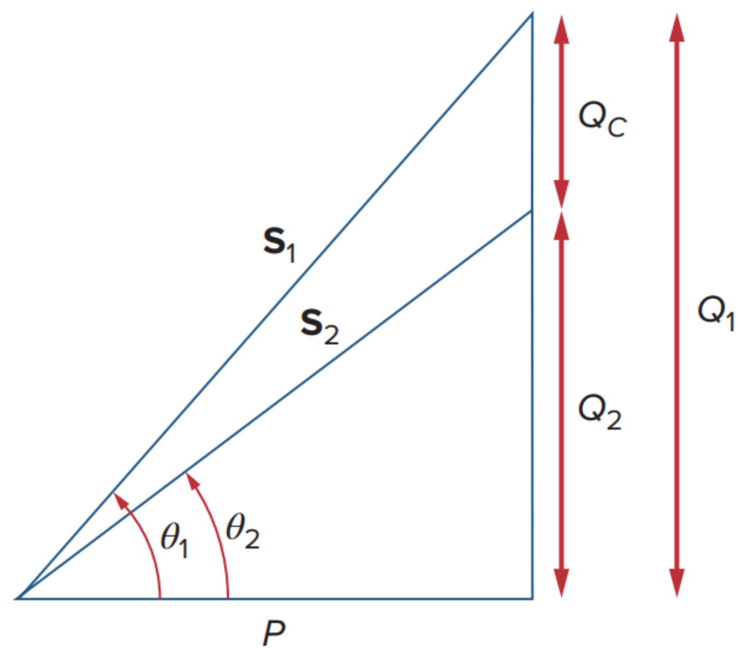
校正后负载

视在功率：S_2
有功功率：$P_2 = S_2 \times \cos\theta_1$
无功功率：$Q_2 = S_2 \times \sin\theta_1$

- 两个复功率之间的关系

$$P_1 = P_2 = P = \frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = \frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\omega C$$



功率三角形分析

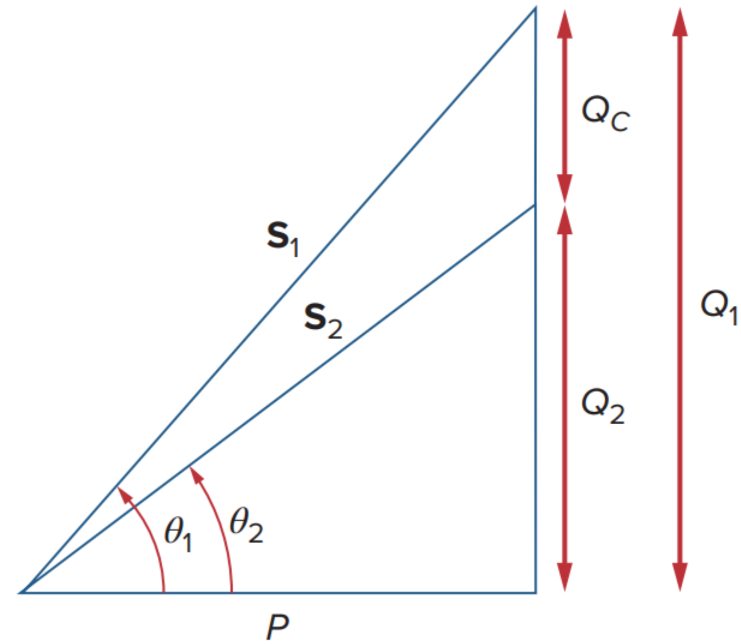
- 考虑下面的功率三角形

$$P_1 = P_2 = P$$

$$Q_1 = P\tan\theta_1$$

$$Q_2 = P\tan\theta_2$$

$$Q_C = P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)$$



- 由 Q_C 表达式的另一种形式

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = \frac{|\mathbb{V}|^2}{2}\omega C = V_{rms}^2\omega C$$

$$P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2) = V_{rms}^2\omega C$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)}{\omega V_{rms}^2}$$

例题

- 问题：某负载与 120 Vrms、60 Hz 电力线相连后，在滞后因数为 0.8 时，该负载吸收的功率为 4 kW。求将 pf 提高到 0.95 所需并联的电容值。

- 解答：
  – 先求功率因数角正切值
    - 优化前的 $\cos\theta_1 = 0.8$ ➡ $\tan\theta_1 = \dfrac{\sqrt{1-(\cos\theta_1)^2}}{\cos\theta_1} = 0.75$
    - 优化后的 $\cos\theta_2 = 0.95$ ➡ $\tan\theta_2 = \dfrac{\sqrt{1-(\cos\theta_2)^2}}{\cos\theta_2} = 0.329$

  – 根据计算式得到电容值

$$C = \frac{P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)}{\omega V_{rms}^2} = \frac{4000 \times (0.75 - 0.329)}{2\pi \times 60 \times 120 \times 120} = 3.10 \times 10^{-4}\ (\mathrm{F})$$

作业

- 画出本章思维导图
- 11.12
- 11.19
- 11.51
- 11.56
- 11.74