线性代数课程
补充定理及证明

王晨*

2021 年 12 月 2 日

*2021 线性代数课程补充定理及证明

Chapter 2

2.3 可逆矩阵的特征

定理. *设 A 为 $n \times n$ 矩阵, 则下列命题是等价的, 即对某一特定的 A, 它们同时为真或同时为假.*

a. A 是可连矩阵.

b. A 等价于 $n \times n$ 单位矩阵.

c. A 有 n 个主元位置.

d. 方程 $Ax = 0$ 仅有平凡解.

e. A 的各列线性无关.

f. 线性变换 $x \mapsto Ax$ 是一对一的.

g. 对 R^n 中任意 b, 方程 $Ax = b$ 至少有一个解.

h. A 的各列生成 R^n.

i. 线性变换 $x \mapsto Ax$ 把 R^n 映上到 R^n 上.

j. 存在 $n \times n$ 矩阵 C 使 $CA = I$.

k. 存在 $n \times n$ 矩阵 D 使 $AD = I$.

1. $A^\top$ 是可逆矩阵.

m. A 的列构成 R'' 的一个基.

n. $\mathrm{ColA} = R^n$.

o. $dimColA = n$.

p. $rank\mathrm{A} = n$.

q. $\mathrm{NulA} = \{0\}$.

r. $dimNulA = 0$.

证明. 若 (a) 为真, 则 A^{-1} 可作为 (j) 中的 C, 故 $(a) \Rightarrow (j)$. 其次, 由 2.1 节 23 题可知 $(j) \Rightarrow (d)$, 又由 2.2 节 23 题可知 $(d) \Rightarrow (c)$. 若 A 是方阵且有 n 个主元位値, 则主元必定在主对角线上, 在这种情兄下, A 的简化阶梯形是 I_n, 因此 $(c) \Rightarrow (b)$. 同时由 2.2 节定理 7 知 $(b) \Rightarrow (a)$. 至此完成图 2-7 中的证明循环. 其次. 由于 A^{-1} 可作为 $D, (a) \Rightarrow (k)$. 又由 2.1 节习题 24 知 $(k) \Rightarrow (g)$, 而由 2.2 节习题 24 有 $(g) \Rightarrow (a)$, 因此 (g) 和 (k) 被链接进这个循环. 再根据 1.4 节定理 4 和 1.9 节定理 12 (a), 得到对任一矩阵来说,(g),(h) 和 (i) 是等价的。因此, 通过 (g) 使 (h) 和 (i) 被链接进这个循环。因 (d),(e),(f) 对任一矩阵 A 是等价的（参见 1.7 节及 1.9 节定理 12b, 而 (d) 在这个循环之中, 所以 (e) 和 (f) 也在这个循环中. 最后, 由 2.2 节定理 6 (c) 有 $(a) \Rightarrow (1)$, 再根据同一个定理，将 A 和 A^T 互换后得到 $(1) \Rightarrow (a)$. 命题 (m) 从线性无关和生成的角度看, 与命题 (e) 和 (h) 是逻辑上等价的. 至于上面其他五个命题, 可由下列常见的关系将它们与这个定理早

期的一个命题链接起来:

$$(\mathrm{g}) \Rightarrow (\mathrm{n}) \Rightarrow (\mathrm{o}) \Rightarrow (\mathrm{p}) \Rightarrow (\mathrm{r}) \Rightarrow (\mathrm{q}) \Rightarrow (\mathrm{d})$$

命题 (g) 称对 R^n 中的每个 b, 方程 $Ax = b$ 至少有一个解, 由此可以推出 (n), 因为 $ColA$ 实际上就是使方程 $Ax = b$ 相容的所有 b 的集合. 式 $(n) \Rightarrow (o) \Rightarrow (p)$ 由维数和秩的定义可以推出. 如果 A 的秩等于 n, 即 A 的列的个数, 则由秩定理有 $dim\{\mathrm{Nul}A = 0\}$, 也就是 $NulA = \{0\}$. 于是 $(p) \Rightarrow (r) \Rightarrow (q)$. 而且由 (q) 可以推出方程 $Ax = 0$ 只有平凡解, 即佮题 (d). 因为已经知道佮题 (d) 和 (g) 与 A 是可逆的命题是等价的, 于是定理证毕。

□

Chapter 4

4.6 秩

性质 (5)**.** $\max\{R(\mathrm{A}), R(\mathrm{B})\} \leq R(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq R(\mathrm{A}) + R(\mathrm{B})$

证明. 先证

$$\max\{R(\mathrm{A}), R(\mathrm{B})\} \leq R(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

.

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p)$, 向量组 A 的极大无关组为 $A_{r_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1})$，向量组 B 的极大无关组为 $B_{r_2} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r_2})$ 若向量组 A_{r_1} 与向量组 B_{r_2} 等价，即两个向量组中任意一个向量均能由另一个向量组线性表示，则此时向量组 (A, B) 的极大无关组为 A_{r_1} 与 B_{r_2} 中更大的那一个, 即 $r_3 = \max\{r_1, r_2\}$; 若向量组 A_{r_1} 与向量组 B_{r_2} 不等价，即两个向量组中至少存在一个向量不能由另一个向量组线性表示，则此时向量组 (A, B) 的最大无关组中的向量个数必定多于 A_{r_1} 中向量个数，也多于 B_{r_2} 中向量个数，即 $r_3 > r_1$, 且 $r_3 > r_2$, 故 $r_3 > \max\{r_1, r_2\}$. 综合上述，$\max\{R(\mathrm{A}), R(\mathrm{B})\} \leq R(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

再证

$$R(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq R(\mathrm{A}) + R(\mathrm{B})$$

由分块矩阵的性质可知，

$$(A, B) = (E \quad E) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

那么，

$$R(A, B) \leq R \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = R(A) + R(B)$$

由此可知命题成立。 $\square$

性质 (7). $R(\mathrm{AB}) \leq \min\{R(\mathrm{A}), R(\mathrm{B})\}$

方法一. 设 $A=(a_{ij})_{m\times p}, B=(b_{ij})_{p\times n}$, 由

$$AB=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

可知，AB 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示，因此 $R(AB)\leq R(A)$. 同理，由

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}.$$

可知,AB 的列向量组可由 B 的列向量组线性表示,因此 $R(AB)\leq R(B)$. 综上,$R(\mathrm{AB}) \leq \min\{R(\mathrm{A}), R(\mathrm{B})\}$. $\square$

方法二. 设 $R(A)=r$, 则存在可逆矩阵 P,Q, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$$

$$AB=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}QB,$$

$$QB=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

$B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ 依次为 $r\times r, r\times(s-r), (n-r)\times r, (n-r)\times(s-r)$,

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}QB=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$R(AB)=R\left(P\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}\right)=R\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}\leq r=R(A)$$

同理有 $R(AB)\leq R(B)$，因此，$R(\mathrm{AB}) \leq \min\{R(\mathrm{A}), R(\mathrm{B})\}$. $\square$

性质 (8). $\mathrm{A}_{m\times n}\mathrm{B}_{n\times 1}=0_{m\times 1}$，则 $R(\mathrm{A})+R(\mathrm{B})\leq n$

证明. 对 $\begin{bmatrix} A & O \\ E_n & B \end{bmatrix}$ 作初等变换,

$$\begin{bmatrix} A & O \\ E_n & B \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} O & -AB \\ E_n & B \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} O & -AB \\ E_n & O \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} E_n & O \\ O & AB \end{bmatrix}$$

又显然 $R(A)+R(B)=R\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) \leq R\left(\begin{bmatrix} A & O \\ E_n & B \end{bmatrix}\right)$ (局部 $\leq$ 整体)

则

$$R(A)+R(B) \leq R\left(\begin{bmatrix} E_n & O \\ O & AB \end{bmatrix}\right) = R\left(E_n\right)+R(AB)=n+R(AB)$$

所以 $R(AB) \geq R(A)+R(B)-n$. 由于 $AB=0$, 则 $R(AB)=R(0)=0$, 因此 $R(\mathrm{A})+R(\mathrm{B}) \leq n$. □