线性代数 (Linear Algebra)

第二章 Matrix Algebra

§2.1 Matrix Operation 矩阵运算

衡益

2021 年 10 月 21 日，中山大学南校区

和与标量乘法

矩阵定义

定义 由 ***m* x *n*** 个数 a_{ij} 排成的 <u>***m*** 行</u>和 <u>***n*** 列</u>的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

a_{ij}，矩阵 A 的 (i, j) 元

矩阵简记作 $(a_{ij}), (a_{ij})_{m\times n}, A_{m\times n}$

行向量 (Row Vector) $v = \left(a_1, a_2, \dots, a_n\right) \in \mathbb{R}^{1\times n}$

列向量 (Column Vector) $w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \left(a_1, a_2, \dots, a_n\right)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

矩阵的运算

加减法

定义 设有两个 ***m* x *n*** 个同型矩阵 **A = (a_{ij})** 和 **B = (b_{ij})**，规定为：

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

(1) $A + B = B + A$ **交换律** (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ **结合律**

$-A = (-a_{ij})$ **负矩阵** → $A + (-A) = 0$ **零矩阵** → $A - B = A + (-B)$ **减法**

矩阵的运算举例

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&10\\10&10\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&8\\7&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&10\\10&10\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&-5\\-5&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-3\\-2&-1\end{pmatrix}$

矩阵的运算

标量乘法

定义 标量与矩阵的乘积，规定为：

$$\lambda A = A\lambda = \lambda\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\cdots&\lambda a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda a_{m1}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

与加法一起，统称为矩阵的线性运算

(1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ (2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

矩阵的运算举例

$$(1)\ \ 2\cdot 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 18 & 24\end{pmatrix}$$

$$(2)\ \ (2+3)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{pmatrix}$$

$$(3)\ \ 2\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 6\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 10\\ 10 & 10\end{pmatrix}$$

矩阵乘法

矩阵的运算

矩阵与矩阵相乘

$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times s}, B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{s\times n}$,

则规定其乘积为 $m\times n$ 的矩阵，记作 $C=(c_{ij})=AB$。

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

$i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$

$m\times \cancel{s\ \ s}\times n \Rightarrow m\times n$

矩阵的运算

$m\times s \qquad s\times n \qquad m\times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Row-column approach

矩阵的运算

矩阵与矩阵相乘

$$C = AB \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} AB_{\cdot,1} & AB_{\cdot,2} & \cdots & AB_{\cdot,n} \end{pmatrix}$$

$m \times 1$ $m \times 1$ $m \times 1$

$$\underset{m \times s}{A} \quad \underset{s \times n}{B} \rightarrow \underset{m \times n}{C}$$

Matrix-vector approach

矩阵的运算举例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = AB = ?$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 7 \\ 5 \cdot 5 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 27 & 34 \\ 43 & 23 \end{pmatrix}$$

Row-column approach

矩阵的运算举例

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&2\\3&7\end{pmatrix}$$

思路：$\begin{cases}x_1+2x_2=b_1\\3x_1+4x_2=b_2\\5x_1+6x_2=b_3\end{cases}\rightarrow AB_{\cdot,1}=b\rightarrow \boxed{B_{1,1}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+B_{2,1}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$B_{\cdot,1}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Matrix-vector approach

矩阵的运算举例

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}5\\3\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}2\\7\end{matrix}}\end{pmatrix},\quad C=AB=?$$

$$\begin{pmatrix}AB_{\cdot,1}&AB_{\cdot,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{5\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}}&\boxed{2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&16\\27&34\\43&23\end{pmatrix}$$

Matrix-vector approach

矩阵的运算

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(3) $A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$

对角矩阵

(4) $IA = AI = A, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

矩阵乘法的性质

矩阵的运算

乘法交换律

若 A,B 可以交换，即$AB = BA$

$$(AB)^k = A^kB^k \qquad (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

矩阵的运算

乘法交换律

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2.5 & 4 & -1.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

交换律检查

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

矩阵的运算

乘法交换律 $(A+B)^2 \overset{?}{=} A^2+2AB+B^2$

$$=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1.5 & 6 & 2.5 \\ 1.5 & 2 & 9.5 \end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix} 22 & -16 & 22 \\ -11.25 & 44 & 35.75 \\ 17.25 & 28 & 98.25 \end{pmatrix}$$

矩阵的运算

乘法交换律 $(A+B)^2 \overset{?}{=} A^2+2AB+B^2$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 7 & 17 & 45 \\ 13 & 34 & 94 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 17 & -22 & 8 \\ -18.25 & 25 & -9.25 \\ 4.25 & -6 & 2.25 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 22 & -16 & 22 \\ -11.25 & 44 & 35.75 \\ 17.25 & 28 & 98.25 \end{pmatrix}$$

矩阵的运算

乘法交换律

$$(A-B)(A+B) \stackrel{?}{=} A^2-B^2$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3.5 & -2 & 5.5 \\ 0.5 & 4 & 8.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1.5 & 6 & 2.5 \\ 1.5 & 2 & 9.5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -14 & 28 & 6 \\ 25.25 & -8 & 54.25 \\ 8.75 & 40 & 91.75 \end{pmatrix}$$

矩阵的运算

乘法交换律

$$(A-B)(A+B) \stackrel{?}{=} A^2-B^2$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 7 & 17 & 45 \\ 13 & 34 & 94 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 & -22 & 8 \\ -18.25 & 25 & -9.25 \\ 4.25 & -6 & 2.25 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -14 & 28 & 6 \\ 25.25 & -8 & 54.25 \\ 8.75 & 40 & 91.75 \end{pmatrix}$$

矩阵的运算

注意

交换律检查

$AB \neq BA$

举例

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}:$$

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 3\\ -2 & -6\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 2\\ 29 & -2\end{bmatrix}.$$

矩阵的运算

注意

消去律对矩阵运算不成立！

$$AB=AC \xrightarrow{\text{不能推得}} B=C$$

举例

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 5 & 5\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}:$$

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 4\\ 5 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -7\\ -2 & 14\end{bmatrix},$$

$$AC=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -7\\ -2 & 14\end{bmatrix}.$$

矩阵的运算

注意

$$AB=0 \xrightarrow{\text{不能推得}} A=0 \text{ 或 } B=0$$

举例

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}:$$

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0.$$

矩阵的乘幂

矩阵的乘幂

矩阵的幂

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, k \in \mathbb{N}^{+}$

定义 $A^1 = A, A^2 = A^1A^1, \dots, A^2 = A^1A^1, A^{k+1} = A^kA^1$

$$A^{k+m} = A^kA^m, (A^k)^m = A^{km}$$

矩阵的乘幂

矩阵的幂举例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^5 &= A^1A^1A^1A^1A^1 \\ &= A^2A^2A^1 \\ &= A^3A^2 \\ &= \cdots \end{aligned}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 2457 & 6309 & 17269 \\ 7679 & 19726 & 54006 \\ 15899 & 40847 & 111839 \end{pmatrix}$$

矩阵的转置

转置矩阵

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，交换行列，定义为转置矩阵 $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^T = A$，则称 A 为对称矩阵

转置矩阵：应用回顾→第一讲

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=1 \Rightarrow -\frac{1}{(\Delta x)^2}(u(x+\Delta x)-2u(x)+u(x-\Delta x))=1$$

用矩阵形式表示

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\Delta x)^2 \\ (\Delta x)^2 \\ \vdots \\ (\Delta x)^2 \end{pmatrix}$$

转置矩阵

运算规律

(1) $(A^T)^T=A$

(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(3) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ $\boxed{(4)\ (AB)^T=B^TA^T}$

（4）的证明思路

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$、$B=(b_{ij})_{s\times n}$，

记 $C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$，$D=B^TA^T=(d_{ij})_{n\times m}$

1 $c_{ji}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$ C^T

B^T 的第 i 行为 $(b_{1i},\cdots,b_{si})$，A^T 的第 j 列是 $(a_{j1},\cdots,a_{js})^T$

2 $d_{ij}=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}$ 1 = 2 $\Rightarrow$ $(AB)^T=B^TA^T$

转置矩阵举例

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7\\4&2\\2&0\end{pmatrix},\text{ 求 }(AB)^T$$

解： $$(AB)^T=\left[\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7\\4&2\\2&0\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}4&14\\17&13\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4&17\\14&13\end{pmatrix}$$

或者

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&17\\14&13\end{pmatrix}$$

线性代数 (Linear Algebra)

第二章 Matrix Algebra

§ 2.2 The Inverse of a Matrix 矩阵的逆

§ 2.3 Characterizations of Invertible Matrices

可逆矩阵的特征

衡益

2021 年 10 月 21 日，中山大学南校区

矩阵的逆

矩阵的逆

$$ax = b,\quad a \neq 0 \Rightarrow x = a^{-1}b$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b},\quad \mathrm{A}\,? \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{b}$$

定义 对于 n 阶矩阵 **A**，存在一个 n 阶矩阵 **B**，使 **AB = BA = I** (单元矩阵)，则矩阵 **A** 可逆，**B** 称为 **A** 的逆矩阵， **B** 记作 $\mathbf{A}^{-1}$ 且唯一。

也称为非奇异矩阵

逆矩阵的性质

推论：$AB = I$ 或 $BA = I$，则 $B = A^{-1}$

(1) 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) 若 A 可逆，数 $\lambda \neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

(3) 若 A, B 为同阶矩阵且均可逆，则 AB 也可逆，
且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(4) 若 A 可逆，则 A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

A 可逆，可定义 $A^0 = I$，$A^{-k} = (A^{-1})^k$，$k \in \mathbb{N}^+$

A 可逆，$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}$，$(A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}$，$\lambda, \mu \in \mathbb{N}^+$

初等矩阵

Warm-up

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

… 消元 …

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_4 = -6 \\ x_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Warm-up

$$M = (A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

增广矩阵

augmented matrix

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

矩阵初等变换的实质 ...

定义 下面三种变换称为矩阵的初等行变换

(1) 对换两行
(2) 以非零数 k 乘某一行的所有元
(3) 把某一行的所有元的 k 倍加到另一行对应的元上去

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行/列变换}} B \qquad A \sim B$$

反身性 $A \sim A$
对称性 若 $A \sim B$ 则 $B \sim A$
传递性 若 $A \sim B$，$B \sim C$ 则 $A \sim C$

矩阵初等变换的实质 ...

定义 行阶梯矩阵、行最简形矩阵 、...

对于 $m \times n$ 矩阵 A，总可以经过初等变换化为$\boxed{\text{标准型}}$

$$F = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{c4 \leftarrow c4+c1+c2 \\ c5 \leftarrow c5-4c1-3c2+3c3}}{\overset{c3 \leftrightarrow c4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

举例说明

初等矩阵

定义 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

1

$$
(1)\ \ I' = \begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\ 行 \\ \\ \\ \\ j\ 行 \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

初等矩阵
是正则方阵！！！

43

初等矩阵

定义 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

k <> 0

2

$$
(1)\ \ I' = \left(\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & k & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\ 行 \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

初等矩阵
是正则方阵！！！

44

初等矩阵

定义 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

i 行

$$
(1)\quad I' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
$$

j 行

3

初等矩阵
是正则方阵！！！

矩阵的初等变换

性质 1 设 **A** 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 **A** 施行一次初等行变换，相当于在 **A** 的左边乘相应的 m 阶初等矩阵；对 **A** 施行一次初等列变换，相当于在 **A** 的右边乘相应的 n 阶初等矩阵.

性质 2 方阵 **A** 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$，… ， $\mathbf{P}_l$，使 $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_l$

矩阵的初等变换

定理 设 **A** 与 **B** 为 ***m x n*** 矩阵, 那么

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 使 $PA = B$

(2) $A \overset{c}{\sim} B$ 的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 Q 使 $AQ = B$

(3) $A \sim B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使 $PAQ = B$

求A^{-1}的算法

矩阵的初等变换

推论：方阵 **A** 可逆的充分必要条件是通过行初等变换使 **A** ～ **I**

我们获得什么信息？

$$PA = B \overset{P=A^{-1}}{\Leftrightarrow} PA = I \Leftrightarrow A^{-1}A = I$$

$$\Leftrightarrow (A, I) \overset{r}{\sim} (I, A^{-1})$$

我们可以通过这种方法求解 **A** 的逆矩阵

求A^{-1}的算法

把增广矩阵**[A I]**进行化简，若**A**行等价于**I**，则**[A I]**行等价于**[I A^{-1}]**，否则**A**没有逆.

证明

设A的可逆矩阵，则对任意b，方程$Ax = b$有解.
A在每一行有主元位置，因A是方阵，这n个主元位置必在对角线上. 这就是说A的简化阶梯形是I_n，即$A \sim I_n$.

求A^{-1}的算法

反之，若$A \sim I_n$，则存在初等矩阵$E_1, \dots, E_p$使：

$A \sim E_1 A \sim E_2(E_1 A) \sim \cdots \sim E_p(E_{p-1} \cdots E_1 A) = I_n$

即$E_p E_{p-1} \cdots E_1 A = I_n$

因为$E_p E_{p-1} \cdots E_1$是可逆矩阵的乘积，因此也是可逆矩阵，

故：$(E_p E_{p-1} \cdots E_1)^{-1}(E_p E_{p-1} \cdots E_1)A = (E_p E_{p-1} \cdots E_1)^{-1} I_n$

$A = (E_p E_{p-1} \cdots E_1)^{-1}$,

由于A是可逆的,故$A^{-1} = E_p E_{p-1} \cdots E_1$

这就是说A^{-1}可由依次以$E_1, \cdots E_p$作用于I_n而得到.

例 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$，证明 A 可逆，并求 A^{-1}

证明及求解： 目标为 $(A, I) \sim (I, A^{-1})$

A 的逆矩阵

$$(A, I) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

A 可逆

例 2

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

单位矩阵

$A^{-1}b$

解：

增广矩阵为（A, b）= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

逆矩阵的另一个描述

用$e_1,...,e_n$表示I_n的各列.则把[A I]行变换成[I A^{-1}]的过程可看作解n个方程组:

$Ax=e_1, Ax=e_2, \cdots, Ax=e_n$ (1)

其中这些方程组的“增广列”都放在A的右边，构成矩阵:

$$\begin{bmatrix} A & e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$$

方程$AA^{-1}=I$及矩阵乘法的定义说明A^{-1}的列正好是方程(1)的解.这一点是很有用的，因为在某些应用中，只需要A^{-1}的一列或两列.这时只需要求解(1)中的相应方程.

可逆矩阵的特征

可逆矩阵的特征

可逆矩阵的特征：

设A是$n \times n$的方阵，则下列所有表述都是等价的，即对某一特定的A，它们同时为真或同时为假.

a. A是可逆矩阵.

b. A等价于$n \times n$的单位矩阵.

c. A有n个主元位置.

d. 方程$Ax = 0$仅有平凡解.

可逆矩阵的特征

e. A的各列线性无关.

f. 线性变换$x \to Ax$是一对一的.

g. 对$\mathbb{R}^n$中任意b, 方程$Ax = b$至少有一个解.

h. A的各列生成$\mathbb{R}^n$.

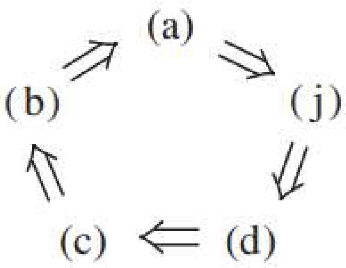
i. 线性变换$x \to Ax$把$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^n$上.

j. 存在$n \times n$的矩阵使得$CA = I$.

k. 存在$n \times n$的矩阵使得$AD = I$.

l. A^T是可逆矩阵.

可逆矩阵的特征



(a) => (j)表示命题(a)为真，则命题(j)也真，左图表示这五个命题之一为真可推出其他命题也为真.

可逆矩阵的特征

证明：

若(a)为真,则A^{-1}可作为(j)中的C，故(a) $\Rightarrow$(j).

其次，由2.1节思考可知(j) $\Rightarrow$(d).

由2.2节思考可知(d) $\Rightarrow$(c).

若A是方阵且有n个主元位置，则主元必定在主对角线上，在这种情况下,A的简化阶梯形是I_n，因此(c) $\Rightarrow$(b).

同时由P68页定理可知(b) $\Rightarrow$(a).

2.1节

思考

设$CA = I_n$($n \times n$单位矩阵)，证明$Ax = 0$只有平凡解.解释为什么A的列数不可以多于行数.

2.2 节

思考

设对$n \times n$矩阵A，方程$Ax = b$对任意$\mathbb{R}^n$中的b有解，说明A必为可逆（提示：A是否行等价于I_n）

可逆矩阵的特征

尝试证明右图的循环成立

$$
\begin{array}{ccc}
 & (k) & \\
\nearrow & & \searrow \\
(a) & \Leftarrow & (g)
\end{array}
$$

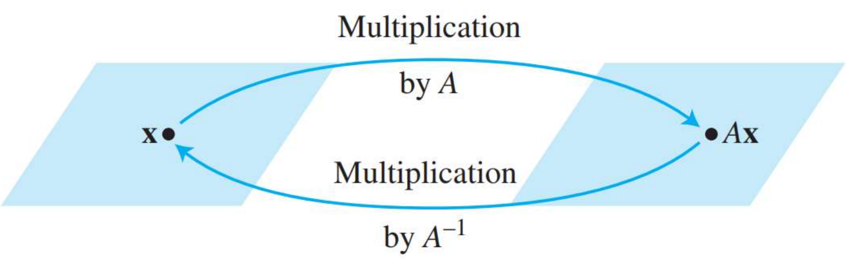
$$(g) \Leftrightarrow (h) \Leftrightarrow (i)$$

$$(d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f)$$

$$(a) \Leftrightarrow (l)$$

可逆线性变换

当矩阵A可逆时，方程$A^{-1}Ax = x$可看作线性变换的一个命题.



可逆线性变换

线性变换 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 称为可逆的，若存在函数 $S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得

$$\text{对所有 } \mathbb{R}^n \text{ 中的 } \boldsymbol{x}, \quad S(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x} \qquad (1)$$

$$\text{对所有 } \mathbb{R}^n \text{ 中的 } \boldsymbol{x}, \quad T(S(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x} \qquad (2)$$

下列定理说明若这样的 S 存在，它是惟一的而且必是线性变换．我们称 S 是 T 的逆，把它写成 T^{-1}．

定理 9 设 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性变换，A 为 T 的标准矩阵．则 T 可逆当且仅当 A 是可逆矩阵．这时由 $S(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$ 定义的线性变换 S 是满足（1）和（2）的惟一函数．

证 设 T 是可逆的，则（2）说明 T 是从 $\mathbb{R}^n$ 映上到 $\mathbb{R}^n$ 的映射，因若 $\boldsymbol{b}$ 属于 $\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{b})$，则 $T(\boldsymbol{x}) = T(S(\boldsymbol{b})) = \boldsymbol{b}$，所以每个 $\boldsymbol{b}$ 属于 T 的值域，于是由可逆矩阵定理命题（i），A 为可逆的．

反之，若 A 是可逆的，令 $S(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$，则 S 是线性变换，且显然 S 满足（1）和（2），例如

$$S(T(\boldsymbol{x})) = S(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

回家作业

P109: 17, 21, 22, 23

P118: 21, 31, 32, 35

P123: 27, 28

Q & A