第三章 Determinants

§ 3.1 Introduction to Determinants

行列式

衡益

2021 年 11 月 16 日，中山大学南校区

背景介绍

德国数学家莱布尼茨

- 行列式是一个数
- 由一些数字按一定方式排成的方阵所确定

瑞士数学家克莱姆

- 指出其在解析几何学中的重要作用
- 著名的用行列式求解$n \times n$方程组的克莱姆法则

法国数学家柯西

- 使用行列式给出计算多个多面体体积的行列式公式
- 将公式与早期行列式的工作联系起来

Cramer, Gabriel
1704～1752

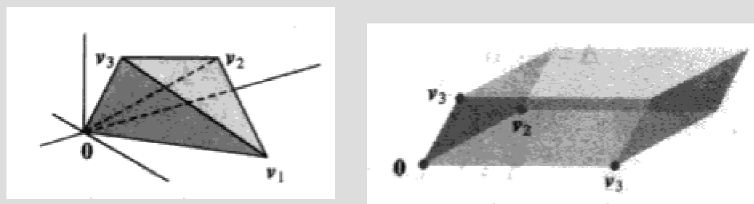


图1 四面体（左）和平行六面体（右）

行列式的数学定义

行列式 (Determinants)

方形矩阵

$$\text{Let } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad n \in \mathbb{N}^{+}$$

自然数

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

$$\mathbf{A} \mapsto \det(\mathbf{A})$$

$$|\ \cdot\ | : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

$$\mathbf{A} \mapsto \det(\mathbf{A})$$

低阶行列式

二阶行列式

$$
\begin{cases}
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\[2ex]
D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} := b_1 a_{22} - a_{12} b_2 \\[2ex]
D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} := a_{11} b_2 - b_1 a_{21}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{D_1}{D} \\[2ex] \dfrac{D_2}{D} \end{pmatrix}
$$

对角线法

+ **-**

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
$$

行列式 (Determinants)

二阶行列式应用举例

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

二阶行列式
(Second Order Determinants)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

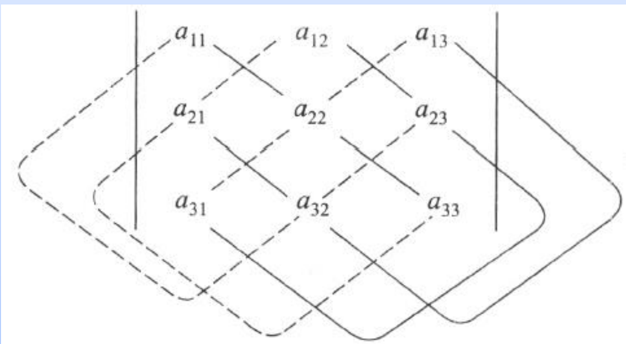
$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{7} \\ \frac{-21}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

三阶行列式

扩展对角线法



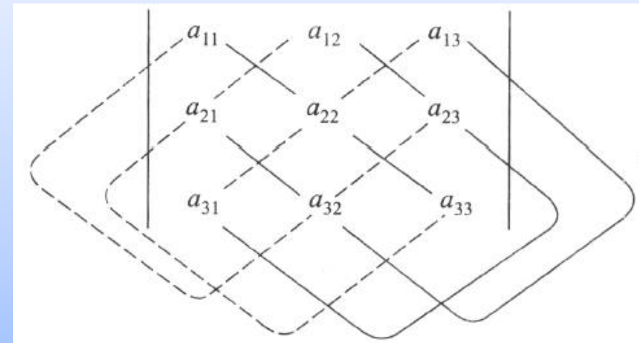
实线：正号；　虚线：负号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式 (Third Order Determinants)

三阶行列式应用举例

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= 1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times 4 \\ &\quad -1\times 1\times 4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times 2\times(-3) \\ &= -4-6+32-4-8-24=-14 \end{aligned}$$

三阶行列式

2×2矩阵行列式重写3×3行列式

- 1×1矩阵 → $\mathbf{A}=[a_{11}]$ → 定义 $\det \mathbf{A}=a_{11}$
- 2×2矩阵 → $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ → $\det \mathbf{A}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

$$(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})-(a_{12}a_{21}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31})+(a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}-a_{12}\cdot\det\begin{pmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}+a_{13}\cdot\det\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}\cdot\det \mathrm{A}_{11}-a_{12}\cdot\det \mathrm{A}_{12}+a_{13}\cdot\det \mathrm{A}_{13}$$

三阶行列式

2×2矩阵行列式重写3×3行列式

- 对任意方阵**A**，$\mathbf{A}_{ij}$表示通过划掉**A**中第i行和第j列而得到的子矩阵

$$\text{eg.}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

当$n=3$：det A 由2×2子矩阵$\mathbf{A}_{1j}$的行列式定义

当$n=4$：det A 由3×3子矩阵$\mathbf{A}_{1j}$的行列式定义

对于$n\times n$：det A 由$(n-1)\times(n-1)$子矩阵行列式来定义

三阶行列式

例1： 计算行列式det **A**, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

解： 计算 $\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \cdot \det \mathbf{A}_{12} + a_{13} \cdot \det \mathbf{A}_{13}$

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=1 \cdot (0 - 2) - 5 \cdot (0 - 0) + 0 \cdot (-4 - 0) = -2$$

三阶行列式

课堂练习： 计算行列式det **A**, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解： 计算det **A**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

n 阶行列式

排列及其逆序数

把 n 个不同的元素排成一列 → 这 n 个元素的全排列

排列总数 $P_n = n!$

标准次序：如 $1, 2, \ldots, n-1, n$

逆序：
某一对元素的先后次序与标准次序不同

排列的逆序数：
一个排列中所有逆序的总数 $\xrightarrow{\text{奇数}}$ **奇排列**

$\xrightarrow{\text{偶数}}$ **偶排列**

排列及其逆序数

$p_1\,p_2\ldots\,p_n$ 自然数排列，由小到大为标准次序（从小到大）

元素 p_i 的逆序数：如果比它大的且排在它前面的元素有 t_i 个

全体元素的逆序数之总和： $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$

定理 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论 奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数.

n 阶行列式定义

n 阶

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

3 阶特例

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

带正号的三项列标排列：123, 231, 312 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$

带负号的三项列标排列：132, 213, 321 $a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$

n 阶行列式计算

定义

√ 当$n \geq 2$，$n \times n$矩阵$A = \left[a_{ij}\right]$的行列式是形如$\pm a_{1j}\det A_{1j}$ 的n个项的和，其中加号和减号交替出现，这里元素a_{11}，a_{12}，$\cdots$ a_{1n}来自A的第一行，即

$$\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + \cdots (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot \det A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det A_{1j}$$

n 阶行列式计算

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \mathrm{A}_{ij}$$

余子式

n 阶行列式计算

定义

元素 a_{ij} 的代数余子式 (Algebraic cofactor)

M_{ij}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式计算

按A的第一行的代数余子式展开式

- 给定$\mathbf{A}=[a_{ij}]$，$\mathbf{A}$的(i,j)代数余子式C_{ij}由下式给出

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathrm{A}_{ij}$$

$$\det \mathrm{A} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot C_{1n}$$

定理1

✓ $n\times n$矩阵$\mathbf{A}$的行列式可按任意行或列的代数余子式展开式来计算。按第i行展开用上式给出的代数余子式写法可以写成：

$$\det \mathrm{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot C_{in}$$

✓ 按第j列的代数余子式展开式为：

$$\det \mathrm{A} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot C_{nj}$$

符号的棋盘模式

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

n 阶行列式计算，n = 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

n 阶行列式计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n阶

$$D = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

n-1 阶

$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$

2 阶

行列式计算

例2： 利用按第三行的代数余子式展开式求det **A**, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

解： 计算

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}C_{31} + a_{32} \cdot C_{32} + a_{33} \cdot C_{33} \\ &= (-1)^{3+1} a_{31}\det A_{31} + (-1)^{3+2} a_{32}\det A_{32} + (-1)^{3+3} a_{33}\det A_{33} \\ &= 0\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2(-1) + 0 = -2 \end{aligned}$$

行列式计算

例3： 计算det **A**, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

解： 按**A**的第一列的代数余子式展开

$$\det A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 0C_{21} + 0C_{31} - 0C_{41} + 0C_{51} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -12$$

行列式计算

定理2

✓ 若**A**为三角阵，则$\det \mathbf{A}$ 等于**A**的主角线上元素的乘积。

三角矩阵：

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

上三角　　下三角

行列式计算

定理2

✓ 若A为三角阵，则det A 等于A的主角线上元素的乘积。

三角矩阵：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 4 = -24$$

第三章 Determinants

§ 3.2 Properties of Determinants

行列式的性质

衡益

2021 年 11 月 16 日，中山大学南校区

行列式的性质

行列式的性质

定理3（行变换）

✓ 令A是一个方阵：

a. 若A的某一行的倍数加到另一行得矩阵**B**，则det **B**= det **A**。

b. 若A的两行互换得矩阵**B**，则det **B**= -det **A**。

c. 若A的某行乘以k倍得矩阵**B**，则det **B**= k·det **A**。

行列式的性质

性质a 对换行列式的两行（列），行列式变号。

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

行列式的性质

性质a 对换行列式的两行（列），行列式变号。

证明

设行列式$D_1=\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

设行列式D_1是由D对换i,j两行得到的，即当$k\neq i,j$时，$b_{kp}=a_{kp}$；当k=i,j时，$b_{ip}=a_{jp},b_{jp}=a_{ip}$

行列式的性质

性质a **对换行列式的两行（列），行列式变号。**

因此，$D_1=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$

$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},$$

其中$1\cdots i\cdots j\cdots n$为自然排列，$t$为排列$p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$的逆序数。设排列$p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$的逆序数为$t_1$，则

$(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故$D=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D$

行列式的性质

性质a（下述矩阵均为方阵）

- 矩阵**A**中两行互换位置后为**B**，则det **A**=-det **B**；

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 1 \times 3 = -7$$

行列式的性质

性质b 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘同一数 k，等于用数 k 乘此行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。

行列式的性质

性质b **行列式的某一行（列）中所有的元素都乘同一数 *k*，等于用数 *k* 乘此行列式。**

证明

设行列式$D=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$的第$i$行所有元素乘以$k$得行列式$D_1$。因此

$$D_1=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots k a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$
$$=k\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$
$$=kD$$

行列式的性质

推论 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。

证明

$$D_1=\det\begin{array}{c}\begin{matrix} 1 & i & & j & & n \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\end{array}$$

$$=k\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

行列式的性质

推论 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。

$$
\overset{c_j - c_i}{=} k \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & & i & & j & & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = 0
$$

行列式的性质

性质b（下述矩阵均为方阵）

- 矩阵**A**中某一行（列）k倍乘后为**B**，则det(**B**)=$k$det(**A**)；

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 \times 2 & 1 \times 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (1 \times 2) - (-2) \times (2 \times 2) = 14$$

行列式的性质

性质c 把行列式的某一行（列）的各元素乘同一数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_j = r_j + kr_i}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

证明

设行列式$D=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$

$$D_1=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

行列式的性质

$$\text{因此 } D_1 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1i} & \cdots & a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{2i} & \cdots & a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{ni} & \cdots & a_{nj} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\det\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}}}_{=0} = D$$

行列式的性质

性质c（下述矩阵均为方阵）

➢ 矩阵中某一行（列）倍加到另一行（列）后行列式不改变；

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2+3 & 1+(-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (-1) - 5 \times (-2) = 7$$

行列式的性质

其它性质

若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，例如第 i 行的元素都是两数之和：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

行列式的性质

定理3可重新叙述如下：

✓ 若A是一个$n \times n$矩阵，E是一个$n \times n$初等矩阵，则：

$$\det EA = (\det E)(\det A)$$

$$\text{其中，} \det E = \begin{cases} 1 & \text{若E是一个行倍加} \\ -1 & \text{若E是一个交换} \\ r & \text{若E是一个}r\text{倍乘} \end{cases}$$

定理3证明（归纳法）

① 对于2×2矩阵，$\det \mathbf{EA} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$已被证明(参考习题3.1中33-36)

行列式的性质

例1： 计算det **A**, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

解：

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 \cdot (-5) = 15$$

行列式的性质

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

正规矩阵 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Regular matrix

奇异矩阵 $\det(\mathbf{A}) = 0$

Singular matrix

行列式的性质

- 若一个方阵A被行倍加和行交换简化为阶梯形**U**，且此过程经过了r次交换，则

$$\det A = (-1)^r \det U$$

- 由于**U**为阶梯形，它是三角阵 $\Rightarrow$ det **U**是主对角线上的元素的乘积。

$$U = \begin{pmatrix} \blacktriangle & * & * & * \\ 0 & \blacktriangle & * & * \\ 0 & 0 & \blacktriangle & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacktriangle \end{pmatrix} \qquad \det U \neq 0$$

$$U = \begin{pmatrix} \blacktriangle & * & * & * \\ 0 & \blacktriangle & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacktriangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det U = 0$$

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r \cdot (\text{U的主元乘积}) & \text{当A可逆} \\ 0 & \text{当A不可逆} \end{cases}$$

标准的阶梯形方阵

行列式的性质

定理4

✓ **方阵A是可逆的当且仅当det A≠ 0**

推论： 若A的列或者行是线性相关的，则det **A**=0

⇩

当两行或者两列是相同的，或者一行或一列是0时，det A=0

eg. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$，$\det A=\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}=0$

列变换

列变换

定理5

✓ 若A为$n\times n$矩阵，则$\det A^T=\det A$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix} = a(ej-fi) - b(dj-fh) + c(di-eh)$$

$$\boxed{= aej + bfh + cdi - afi - bdj - ceh}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & d & h \\ b & e & i \\ c & f & j \end{pmatrix} = a(ej-fi) - d(bj-ic) + h(bf-ce)$$

$$\boxed{= aej + cdi + bhf - afi - bdj - ceh}$$

行列式与矩阵乘积

行列式与矩阵乘积

定理6

✓ 若A和B均为$n\times n$矩阵，则det AB=(det A)(det B)

若**A**不可逆

⇩

AB也不可逆

⇩

det **A**和det **A**·det **B**均为0

若**A**可逆

$\Rightarrow$ **A**与单位矩阵$\mathbf{I}_n$行等价

- 存在初等矩阵$\mathbf{E}_1,\cdots,\mathbf{E}_p$使得

$$A = E_pE_{p-1}\cdots E_1I_n = E_pE_{p-1}\cdots E_1$$

- 反复应用定理3

$$|AB| = |E_pE_{p-1}\cdots E_1B| = |E_p||E_{p-1}\cdots E_1B|$$
$$= \cdots = |E_p|\cdots|E_1||B| = |A||B|$$

行列式与矩阵乘积

定理6

- $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$;

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \quad \det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -8 \\ 25 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{AB} = \begin{vmatrix} 34 & -8 \\ 25 & -3 \end{vmatrix} = 34 \times (-3) - (-8) \times 25 = 98$$

总结

基本性质（下述矩阵均为方阵）

- 矩阵**A**中两行互换位置后为**B**，则det **A**=-det **B**；
- 矩阵中某一行（列）倍加到另一行（列）后行列式不改变；
- 矩阵**A**中某一行（列）k 倍乘后为**B**，则det(**B**)=k det(**A**)；
- 矩阵**A**转置后为**B**，则det **A**=det **B**；
- det **AB**=det **A**·det **B**，det **AB**=det **BA**；
- 若**A**为三角矩阵，则det **A**等于**A**主对角线上元素乘积；
- 若**A**中存在两行元素相同，则det **A** =0；
- 方阵**A**是可逆的，当且仅当det **A**≠0；

n 阶行列式的一些特殊形式

任何 n 阶行列式总能利用运算化为上三角形行列式或下三角形行列式

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

n 阶行列式的运算规律

Let $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\det(\mathbf{A}^2) = (\det(\mathbf{A}))^2$$

$$\cancel{\det(2\mathbf{A}) = 2\det(\mathbf{A})}$$

Let $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\det(\mathbf{A}^2) = (\det(\mathbf{A}))^2$$

$$\det(2\mathbf{A}) = 2^n\det(\mathbf{A})$$

n 阶行列式的运算规律

Let $\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \lambda \in \mathbb{R}.$

(1) $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$

(2) $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$

(3) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

$$\cancel{\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})}$$

n 阶行列式的计算举例

方法一

计算 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{c1 \leftrightarrow c2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算举例

方法一

r2=r2 – r1
r4=r4+5r1

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算举例

方法一

r3=r3+(1/4)r2
r4=r4+2r2

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算举例

方法一

r4=r4-3r3

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix}$$

$$= 40$$

n 阶行列式的计算举例

方法二

计算 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}^{(1)} + (-1)\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}^{(2)}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}^{(3)} + (-2)\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}^{(4)}$$

n 阶行列式的计算举例

方法二

1

$$3\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -15$$

2

$$(-1)\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

n 阶行列式的计算举例

方法二

3 $$(-1)\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -70$$

4 $$(-2)\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 120$$

n 阶行列式的计算举例

方法二

计算 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \overset{1}{-15} + \overset{2}{5} - \overset{3}{70} + \overset{4}{120} = 40$$

Q & A

行列式的性质

定理3证明（归纳法）

② 假设定理3对$k\times k$矩阵的行列式成立，$k\geq 2$

③ 令$n=k+1$，$\mathbf{A}$为$n\times n$矩阵。

- 对于第i行，令$\mathbf{A}_{ij}$是由$\mathbf{A}$中划掉第i行第j列得到的矩阵，则$\mathbf{B}_{ij}$的行由$\mathbf{A}_{ij}$的行通过实行与$\mathbf{E}$作用$\mathbf{A}$相同类型的初等行变换得到。
- 这些子矩阵仅是$k\times k$矩阵

⇩

$$\det \mathrm{B}_{ij} = \alpha \cdot \det \mathrm{A}_{ij}$$

（其中$\alpha=1$，-1，r）

行列式的性质

定理3证明（归纳法）

- det **EA**沿第i行的代数余子式展开式为

$$\begin{aligned}\det \mathrm{EA} &= a_{i1}\left(-1\right)^{i+1}\det \mathrm{B}_{i1} + \cdots + a_{in}\left(-1\right)^{i+n}\det \mathrm{B}_{in}\\ &=\alpha a_{i1}\left(-1\right)^{i+1}\det \mathrm{A}_{i1} + \cdots + \alpha a_{in}\left(-1\right)^{i+n}\det \mathrm{A}_{in}\\ &=\alpha\cdot\det \mathrm{A}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$当定理对n成立时能证明对n+1也成立

✓ **定理对$n\geq 2$均成立**（n=1时，定理也明显成立）

列变换

定理5证明

✓ 若A为$n\times n$矩阵，则$\det A^T=\det A$

证明（归纳法）：

① 当$n=1$时，定理显然成立。

② 假设定理对$k\times k$行列式成立。

③ 令$n=k+1$，则A中a_{1j}的代数余子式等于A^T中a_{j1}的代数余子式

$$\det A = \det A^T$$

$\Rightarrow$定理对n成立时可以推出对$n+1$成立

定理对任意$n\geq 1$均成立

行列式的性质

其它性质 **若A转置得矩阵B，则det B= det A**

证明

设行列式$D=\det(a_{ij})$的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

。即D^{T}的(i,j)元为b_{ij}，

则$b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{t}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=D$$

回家作业

3.1：P182：9，41

课后完成：39-45（不用交）

3.2：P189：5，11；P190：31，35