线性代数 (Linear Algebra)

第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

§ 5.1 Eigenvalues and Eigenvectors

特征向量和特征值

衡 益

2021 年 12 月 7 日，中山大学南校区

引入

2

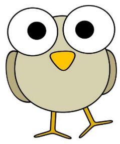
Warm-up

Question：矩阵的特征值和特征向量是什么?

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

"简单粗暴"的解释

A对x的作用竟然不过是和一个小小的数字对x的作用相同!



??

3

Warm-up

Question：特征值分解具有什么样的意义?

"特征"

首先给出概念上的一种解释。所谓的特征值和特征向量，最重要的是理解"特征"这两个字，特征向量翻译为eigen vector, eigen这个单词来自德语，本义是在"本身固有的，本质的"。纯数学的定义下，并不能很明白地理解到底为什么叫做特征值和特征向量。但是举一个应用例子，可能就容易理解多了。

介绍性实例(一)

图像处理

在图像处理中，有一种方法就是特征值分解。我们都知道图像其实就是一个个像素值组成的矩阵，假设有一个100x100的图像，对这个图像矩阵做特征值分解，其实是在提取这个图像中的特征，这些提取出来的特征是一个个的向量，即对应着特征向量。而这些特征在图像中到底有多重要，这个重要性则通过特征值来表示。

介绍性实例(一)

图像处理

比如这个100x100的图像矩阵A分解之后，会得到一个100x100的特征向量组成的矩阵Q，以及一个100x100的只有对角线上的元素不为0的矩阵E，这个矩阵E对角线上的元素就是特征值，而且还是按照从大到小排列的（取模，对于单个数来说，其实就是取绝对值），也就是说，**这个图像A提取出来了100个特征**，这100个特征的重要性由100个数字来表示，这100个数字存放在对角矩阵E中。

介绍性实例(一)

图像处理

在实际中我们发现，提取出来的这100个特征从他们的特征值大小来看，大部分只有前20（这个20不一定，有的是10，有的是30或者更多）个特征对应的特征值很大，后面的就都是接近0了，也就是说后面的那些特征对图像的贡献几乎可以忽略不计。我们知道，图像矩阵A特征值分解后可以得到矩阵Q和矩阵E：

$$A = QEQ^{-1}$$

7

介绍性实例(一)

图像处理

$$A = QEQ^{-1}$$

那么,把右边的三个矩阵相乘肯定也能得到矩阵A。

既然已经知道了矩阵E中只有前20个特征值比较重要，那么我们不妨试试把E中除了前20个后面的都置为0，即只取图像的前20个主要特征来恢复图像，剩下的全部舍弃，看看此时会发生什么。

8

介绍性实例(一)

原图

9

介绍性实例(一)

只取前10个特征值:

只取前20个特征值:

10

介绍性实例(一)

只取前50个特征值：　　只取前100个特征值：

11

介绍性实例(一)

图像处理

我们可以看到，在只取前20个特征值和特征向量对图像进行恢复的时候，基本上已经可以看到图像的大体轮廓了，而取到前50的时候，几乎已经和原图像无异了。这就是所谓的矩阵的特征向量和特征值的作用。

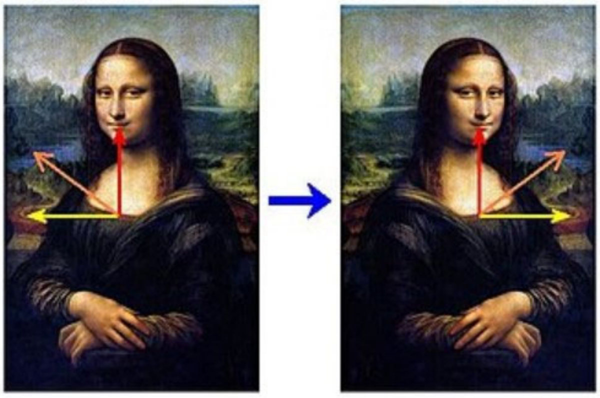
Next ↓

数学角度的定义

12

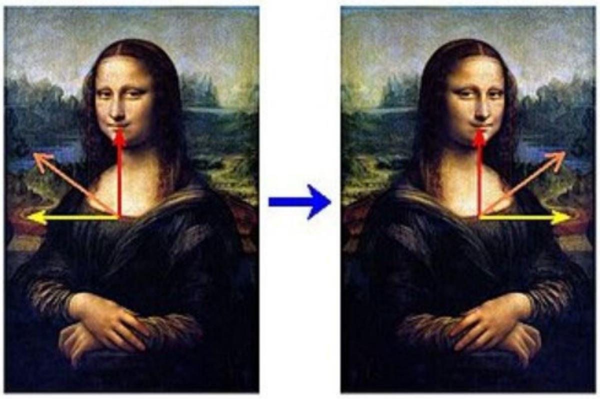
介绍性实例(二)

为了理解这个概念，我们再看**维基百科**上关于特征向量给出的一个《蒙娜丽莎》的例子：



13

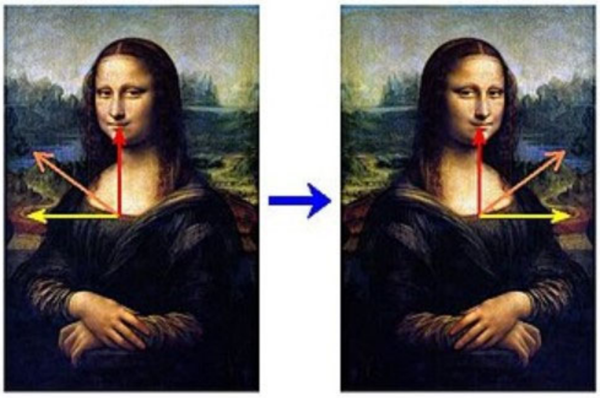
介绍性实例(二)



当蒙娜丽莎的图像左右翻转时，中间垂直的红色向量方向保持不变。而水平方向上黄色的向量的方向完全反转，因此它们都是左右翻转变换的特征向量。

14

介绍性实例(二)



红色向量长度不变，其特征值为1。黄色向量长度也不变但方向变了，其特征值为-1。橙色向量在翻转后和原来的向量不在同一条直线上，因此不是特征向量。

15

介绍性实例(三)

动力系统与斑点猫头鹰

1990年，在利用或滥用太平洋西北部大面积森林问题上，美国北方的斑点猫头鹰成为一个争论的焦点。环境保护学家试图说服联邦政府，如果采伐原始森林（长有200年以上的树木）的行为得不到制止的话，猫头鹰将濒临灭绝的危险，因为这些森林是猫头鹰的栖息地。

而木材行业却认为，猫头鹰不应被划分为“濒临灭绝动物”，并引用一些已发表的科学报告来支持其论点。对木材行业来说，如果政府出台新的伐木限制政策，那么，此行业预计失去3~10万个工作岗位。

16

介绍性实例(三)

动力系统与斑点猫头鹰

由于争论的双方都想游说数学家为其提供有力的理论支持，数学家们加快了对斑点猫头鹰种群的动力学研究。

猫头鹰的生命周期自然分为三个阶段：幼年期 (1岁以前)、半成年期 (1-2岁)、成年期 (2岁以后)。猫头鹰在半成年和成年期交配，开始生育繁殖，可活到20岁左右。每一对猫头鹰需要约1000公顷 (4平方英里) 的土地作为自己的栖息地。幼年猫头离开巢之时，为其生命周期的关键期，因为它们必须成功找到一个新的栖息地安家，才能继续生存下去。

17

介绍性实例(三)

动力系统与斑点猫头鹰

研究种群动力学的第1步是建立以每年的种群量为区间的种群模型，时间为$k=0,1,2\ldots$. 通常可以假设在每一个生命阶段，雄性和雌性的比例为1:1，而且只需要计算雌性猫头鹰即可。

我们设第k年的种群量可以用向量$\mathbf{x}=(j_k，s_k，a_k)$表示，其中j_k,s_k,a_k分别代表雌性猫头鹰在幼年期、半成年期、成年期的数量。

利用人口统计研究的实际现场数据，$R.Lamberson$及其同事设计了下面的“阶段矩阵模型”

$$\begin{bmatrix} j_{k+1} \\ s_{k+1} \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{bmatrix}$$

18

介绍性实例(三)

动力系统与斑点猫头鹰

新的幼年雌性猫头鹰在$k+1$年中的数量是成年雌性猫头鹰在k年里数量的0.33倍 (根据每对猫头鹰的平均生殖率而定)。此外，18%的幼年雄性猫头鹰得以生存进入半成年期，71%的半成年雌性猫头鹰和94%的成年雌性猫头鹰生存下来被计为成年猫头鹰。

阶段矩阵模型是形式为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathrm{k}}$$

的差分方程，这种方程被称为**动力系统** (或离散线性动力系统)， 因为它描述的是系统随时间推移的变化。

介绍性实例(三)

动力系统与斑点猫头鹰

*Lamberson*阶段矩阵中，18%的幼年猫头鹰生存率是受原始森林中猫头鹰数目影响最大的。事实上，60%的幼年猫头鹰通常生存下来后就会离开自己的巢，但是在 *Lamberson* 和他的同事们所研究的加州 *willow Creek*地区，只有30%的幼年猫鹰在弃巢后能找到新的栖息地，其他的在寻找新家园过程中失踪了。

人类对原始森林分散区域的砍伐加剧了原始森林的分割，所以猫头鹰找不到新栖息地。当猫头鹰离开森林保护区并穿过一块滥伐地时，被捕食动物袭击的危险大增，但如果50%的幼年猫头鹰弃巢后能找到新的栖息地，猫头鹰种群将会兴旺起来。

介绍性实例(三)

动力系统与斑点猫头鹰

本章的**目的**是**剖析线性变换$x \to Ax$的作用，把它分解为容易理解的元素**。除了5.4节，整章中出现的矩阵都是方阵。

虽然这一部分知识点的主要应用是**离散动力系统**(包括上面的斑点猫头鹰案例)，但有关特征值和特征向量的基本概念对纯数学和应用数学也很有用，其理论背景也更加广泛。

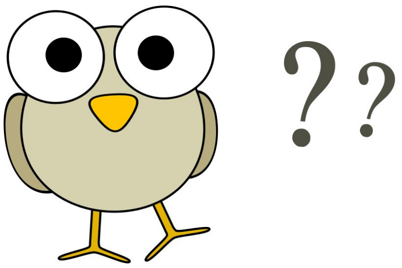
同样，特征值还被用来研究**微分方程**和**连续的动力系统**，为工程设计提供关键知识，在**物理**和**化学**等领域也有着更加实际的应用。

21

Warm-up

特征向量

We want "eigenvectors" $\mathbf{x}$ that don't change direction when you multiply by $\mathbf{A}$



22

Warm-up

几乎所有的向量乘上 A 都会改变方向。但有一些例外，称之为“特征向量”

⬇

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

23

定义

24

5.1 特征向量和特征值

例1 设$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$u=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$，$v=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$.计算u ，v 在线性变换A下的像。

解：

计算可得：

$$Au=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\ -1\end{bmatrix}$$

$$Av=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=2v$$

■

25

5.1 特征向量和特征值

例1

可以看出，向量v 在A 的作用下，“伸长”了！

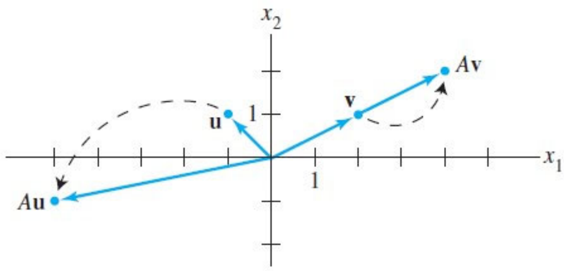


FIGURE 1 Effects of multiplication by A.

26

5.1 特征向量和特征值

学习目标

本节主要研究满足下列等式的特殊向量**x**，

$$\mathbf{Ax} = 2\mathbf{x} \text{ 或者 } \mathbf{Ax} = -4\mathbf{x}$$

这里的特殊向量**x**, 被线性变换**A**转换为其自身的标量倍数。

定义

若A是n 阶方阵，如果数λ 和n 维非零列向量满足

$$Ax = \lambda x$$

那么，这样的数λ称为方阵A 的特征值，x 称为方阵A 对应于特征值λ的特征向量。

27

5.1 特征向量和特征值

$Ax = \lambda x$ 等价于 $(A - \lambda I)x = 0$

获得非零解的充分必要条件是 $\boxed{\det(A - \lambda I)} = 0$

λ 的特征多项式

以 λ 为未知数的 n 次方程，称为矩阵 A 的特征方程

28

5.1 特征向量和特征值

定义

若线性方程组可写成

$Ax=0$

的形式，则称它为**齐次线性方程组**。

$$\begin{cases} x = 0 & \text{平凡解 Trivial solution } \checkmark \\ x \neq 0 & \text{非平凡解 nontrivial solution ?} \end{cases}$$

齐次方程Ax=0有**非平凡解**，当且仅当方程至少有一个自由变量。

29

5.1 特征向量和特征值

例2

设$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$，$u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$，$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.判断u和v是否为A 的特征向量。

解:

$$设Au = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4u$$

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

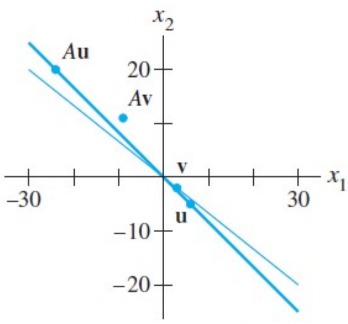
因此，u 是对应于特征值-4的特征向量，v 不是特征向量。■

30

5.1 特征向量和特征值

例2

设$A=\begin{bmatrix}1 & 6\\5 & 2\end{bmatrix}$，$u=\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix}$，$v=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$. 判断u和v是否为A的特征向量。



$A\mathbf{u}=-4\mathbf{u}$, but $A\mathbf{v}\neq\lambda\mathbf{v}$.

5.1 特征向量和特征值

例3

证明7是例2中矩阵A的一个特征值，并找到其对应的特征向量。

解:

若常数7是矩阵A 的一个特征值，当且仅当方程

$$Ax=7x$$

有非平凡解。上式等价于$Ax-7x=0$ ，即

$$(A-7I)x=0$$

对于上述线性方程，其系数矩阵

$$A-7I=\begin{bmatrix}1 & 6\\5 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 6\\5 & -5\end{bmatrix}$$

5.1 特征向量和特征值

例3

证明7是例2中矩阵A的一个特征值，并找到其对应的特征向量。

解

det(A-λI)=0，因此7是矩阵A 的一个特征值。为了求其相应的特征向量，对A-λI的增广矩阵进行行变换

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其通解的形式为$x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，当$x_2 \neq 0$时，所得到的向量都是特征值7的特征向量。

■ 33

5.1 特征向量和特征值

注： 在上述例3中使用了行变化求特征向量，但不能用行变换来求特征值。矩阵A的阶梯形通常不显示出A的特征值。

λ 是方阵A的特征值
$\Leftrightarrow$
方程 (A-λI)x=0 有非平凡解

方程 (A-λI)x=0 的所有解的集合就是矩阵 (A-λI) 的零空间

是$\mathbb{R}^n$的子空间，称为，A对应于λ的特征空间

34

5.1 特征向量和特征值

由例3可知：例2矩阵**A**对应λ=7的特征空间由(1,1)的所有倍数$x_2(1,1)$组成，因此特征空间是过(1,1)和原点的直线。

同理可验证，λ=-4的特征空间是经过(6,-5) 和原点的直线。

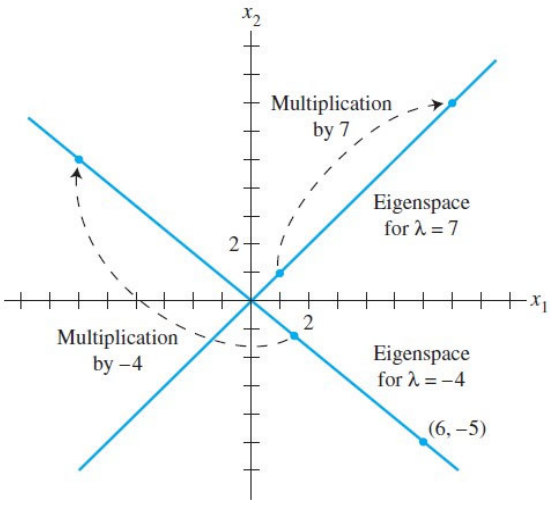


FIGURE 2 Eigenspaces for $\lambda = -4$ and $\lambda = 7$.

5.1 特征向量和特征值

例4 设$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.其一个特征值为2，求其特征子空间的一组基。

解：

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

对其增广矩阵行变换

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.1 特征向量和特征值

例4

设$A=\begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}$.其一个特征值为2，求其特征子空间的一组基。

解： 显然2是A 的一个特征值，因为方程$(A-2I)x=0$ 有自由向量。其通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}1/2\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix},\ x_2\text{和}x_3\text{是任意值}$$

次特征子空间为$\mathbb{R}^3$ 空间的二维子空间，其一组基为

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

■ 37

5.1 特征向量和特征值

例4

设$A=\begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}$.其一个特征值为2，求其特征子空间的一组基。

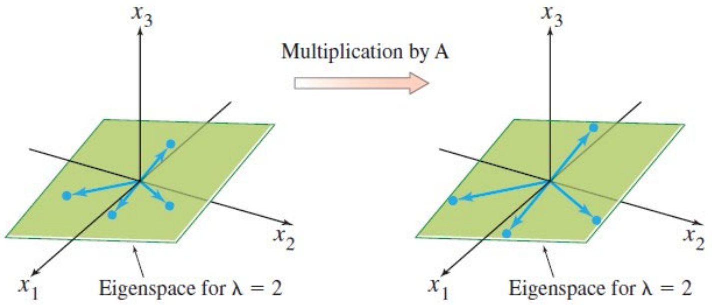


FIGURE 3 A acts as a dilation on the eigenspace.

38

5.1 特征向量和特征值

数值计算的注解：

在已知特征值的条件下，例4提供了手工计算特征向量的方法，虽然也可以利用矩阵程序和行化简来找出特征空间，但这不完全可靠。舍入误差有时会使简化的阶梯形矩阵出现错误的主元素。如果矩阵不是很大，最好的计算程序可按要求的精度同时算出特征值和特征向量的近似值。随着计算能力和软件的改善，可分析矩阵的阶数规模也逐渐增大。

39

5.1 特征向量和特征值

如何求特征值

x必须是**非零向量**

↓

$(A-\lambda I)x=0$必须有非平凡解

↓

$(A-\lambda I)$是不可逆矩阵

↓

从方程$\det(A-\lambda I)=0$中解出λ

40

5.1 特征向量和特征值

例5 设$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & 5\end{bmatrix}$, 计算A的特征值。

解: $A-\lambda I=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ -6 & 5-\lambda\end{bmatrix}$

等式 $\det(A-\lambda I)=0$ 变成

$$-\lambda(5-\lambda)+6=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0$$

因式分解可得:

$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

因此，特征值是2和3. ■

41

5.1 特征向量和特征值

例6 求 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量

解: $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=4$ 或 $\lambda=2$

$$\lambda_1=2 \Rightarrow \begin{pmatrix}3-2 & -1\\ -1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, k\neq 0$ 是对应 λ_1 的特征向量

$$\lambda_2=4 \Rightarrow \begin{pmatrix}3-4 & -1\\ -1 & 3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, $k\neq 0$ 是对应 λ_2 的特征向量 ■

42

5.1 特征向量和特征值

例7 求 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量

解:

$\det(A-\lambda I)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)((-1-\lambda)(3-\lambda)+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3+4)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda-1)^2=0$$

所以特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=1$

■ 43

5.1 特征向量和特征值

例7 求 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量

解:

$\lambda_1=2$ 时，解方程 $(A-2I)x=0$

$$A-2I\overset{r}{\sim}\cdots\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{得到基础解系 } p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$kp_1(k\neq 0)\to\lambda_1$

$\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(A-I)x=0$

$$A-I\overset{r}{\sim}\cdots\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{得到基础解系 } p_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$kp_2(k\neq 0)\to\lambda_2,\lambda_3$

■ 44

5.1 特征向量和特征值

例6在matlab中的实现，其中，B矩阵的对角线元素是特征值，X矩阵的列是相应的特征向量

Input

```
clc;
A=[-1,1,0;-4,3,0;1,0,2];
[X,B]=eig(A)
```

Output：X,B

Untitled*

```
clc;
A=[-1,1,0;-4,3,0;1,0,2];
[X,B]=eig(A)
```

令行窗口

```
X =

        0    0.4082    0.4082
        0    0.8165    0.8165
   1.0000   -0.4082   -0.4082


B =

     2     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

45

5.1 特征向量和特征值

例8 设 λ 是方阵 A 的特征值，证明

(1) λ^2 是 A^2 的特征值；

(2) 当 A 可逆时，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值。

解：

λ 是 A 的特征值 $\Rightarrow Ap = \lambda p, p \neq 0$

(1) $A^2p = A(Ap) = A(\lambda p) = \lambda Ap = \lambda^2 p$

(2) A 可逆, $Ap = \lambda p \Leftrightarrow p = \lambda A^{-1}p \overset{\lambda\neq 0}{\Rightarrow} A^{-1}p = \dfrac{1}{\lambda}p$

■

46

相关定理

5.1 特征向量和特征值

定理 1 三角矩阵的特征值是其主对角线上的元素。

证明 为了便于描述，考虑3 × 3的矩阵。若A 是上对角矩阵，A − λI 为

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda\end{bmatrix}$$

常数λ是A的特征值 $\Leftrightarrow$ $(A-\lambda I)x=0$有非奇异解

$\Leftrightarrow$ $(A-\lambda I)x=0$有自由向量

由于矩阵$A-\lambda I$中有0元素，那么

$(A-\lambda I)x=0$有自由向量 $\Leftrightarrow$ $A-\lambda I$ 对角线上至少一个元素为0

$\Leftrightarrow$ λ等于a_{11}, a_{22}, a_{33}中的一个

同理可证，A是下对角阵的情形。 ■

5.1 特征向量和特征值

例9

设$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -8\\0 & 0 & 6\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\5 & 3 & 4\end{bmatrix}$.A的特征值为3, 0和2

B的特征值为4和1.

思考 矩阵A具有0特征值意味着什么？

矩阵A具有0特征值

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$有非零解

$\Leftrightarrow$ 矩阵A不可逆

5.1 特征向量和特征值

定理 2

$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$是$n$阶方阵A相异的特征值，$v_1, \cdots, v_r$是对应的特征向量，那么向量集$\{v_1, \cdots, v_r\}$线性无关。

证明

反证：设$\{v_1, \cdots, v_r\}$不是线性独立的。由v_1是非零向量，设v_{p+1}可以由$v_1, \cdots, v_r$的线性组合表示。即存在常数$c_1, \cdots, c_p$，使得

$$c_1v_1 + \cdots + c_pv_p = v_{p+1} \qquad (*)$$

将(*)式两边同时左乘矩阵A

$$c_1Av_1 + \cdots + c_pAv_p = Av_{p+1}$$

5.1 特征向量和特征值

定理 2

λ_1 ，⋯ ，λ_r是n 阶方阵A相异的特征值，v_1 ，⋯，v_r是对应的特征向量，那么向量集 $\{\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_r\}$ 线性无关。

证明

由$A\mathrm{v}_k = \lambda_k \mathrm{v}_k$，可得

$$c_1\lambda_1\mathrm{v}_1 + \cdots + c_p\lambda_p\mathrm{v}_p = \lambda_{p+1}\mathrm{v}_{p+1}$$

对(∗)两边同时乘λ_{p+1}再两边同减可得

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\mathrm{v}_1 + \cdots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})\mathrm{v}_p = 0$$

由于 $\{\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_p\}$ 是线性独立的，因此上式左端的系数全部为0.

51

5.1 特征向量和特征值

定理 2

λ_1 ，⋯ ，λ_r是n 阶方阵A相异的特征值，v_1，⋯，v_r是对应的特征向量，那么向量集 $\{\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_r\}$ 线性无关。

证明

由于特征值互不相同，则$\lambda_i - \lambda_{p+1}$不为0，因此

$c_i = 0$对于$i = 1, \cdots, p$ 成立，由

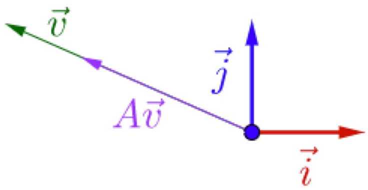
$$c_1\mathrm{v}_1 + \cdots + c_p\mathrm{v}_p = \mathrm{v}_{p+1}$$

可得$\mathrm{v}_{p+1} = 0$，由于特征向量不可能为0，因此假设不成立。

综上所述，向量集 $\{\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_r\}$ 是线性独立的。 ■ 52

5.1 特征向量和特征值

理解



几何视角

特征向量表示的是矩阵变换中，只有伸缩变换没有旋转变换的**方向向量**，特征值是这个方向的**伸缩系数**，一个方向当然只有一个伸缩系数。

物理视角

在量子力学里，特征向量是一组**正交基**，特征值是**能级**，不同能级的波函数不可能有耦合，所以线性无关，当然这是共轭矩阵下的情况。

5.1 特征向量和特征值

推论 1

设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两不同特征值，$a_1, a_2, \cdots, a_s$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 分别是对应于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量，则

$$a_1, a_2, \cdots, a_s, b_1, b_2, \cdots, b_t$$

线性无关。

54

5.1 特征向量和特征值

证明 $A\mathbf{a}_i = \lambda_1\mathbf{a}_i,\ i = 1,2,\ldots,r;\ A\mathbf{b}_j = \lambda_2\mathbf{b}_j,\ j = 1,2,\ldots,s$

$$k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r + k_{r+1}\mathbf{b}_1 + \cdots + k_{r+s}\mathbf{b}_s = 0 \quad (1)$$

两边乘以 A得到

$$\lambda_1(k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r) + \lambda_2(k_{r+1}\mathbf{b}_1 + \cdots + k_{r+s}\mathbf{b}_s) = 0 \quad (2)$$

$(2) - \lambda_2(1)$得： $(\lambda_1 - \lambda_2)(k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r) = 0$

$\because\ \lambda_1$ 和 λ_2 不相等，$\therefore\ k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r = 0$

又 $\because\ \mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_r$ 线性无关，$\therefore\ k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$

(1) 式简化为 $k_{r+1}\mathbf{b}_1 + \cdots + k_{r+s}\mathbf{b}_s = 0$

$\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_s$ 线性无关 $\Rightarrow k_{r+1} = \cdots = k_{r+s} = 0$

$\therefore\ k_1 = \cdots = k_r = k_{r+1} = \cdots = k_{r+s} = 0,$ ■

$\therefore\ \mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r,\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_s$ 线性无关

55

5.1 特征向量和特征值

例 10

设 λ_1,λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$. 证明：$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ 不是 A 的特征向量。

证明 $A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1,\ A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2$

$\Rightarrow A(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = A\mathbf{p}_1 + A\mathbf{p}_2 = \lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2$

反证, 假设 $A(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \lambda(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$, 则

$$\lambda(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2$$

即 $(\lambda_1 - \lambda)\mathbf{p}_1 + (\lambda_2 - \lambda)\mathbf{p}_2 = 0$。

因 $\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$ 线性无关，$\lambda_2 - \lambda = \lambda_1 - \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, ■

与题设矛盾

56

5.1 特征向量和特征值

几个特殊矩阵的特征值

例 1：

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = \frac{1}{2}$$

例 2：

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 0$$

例 3：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = -1$$

57

5.1 特征向量和特征值

思考

A 有特征值 α，B 有特征值 β，则 $\alpha\beta$ 是 AB 的特征值

证明：

$$ABx = A\beta x = \beta Ax = \beta\alpha x = \alpha\beta x$$

$\Rightarrow \alpha\beta$ 是 AB 的特征值

Wrong!!!

A 和 B 是否含有同样的特征向量 x?

58

5.1 特征向量和特征值

思考

A 有特征值 α，B 有特征值 β，则 $\alpha+\beta$ 是 A + B 的特征值?

No !!!

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

A 的特征值是 0，B 的特征值是 0，

A + B 的特征值是 1，−1。

59

5.1 特征向量和特征值

AB,A+B的特征值和特征向量

$$A=\begin{pmatrix}0.8&0.3\\0.2&0.7\end{pmatrix}\Rightarrow\cdots\Rightarrow A^{10}=\begin{pmatrix}0.6004&0.5994\\0.3996&0.4006\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\cdots\Rightarrow A^{100}=\begin{pmatrix}0.6&0.6\\0.4&0.4\end{pmatrix}$$

特征向量 $\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}$ **特征值** 1

60

Q & A