第三章 多维随机变量及其分布

- 中山大学
- 计算机学院
- 郑培嘉
- Email：zhpj@mail.sysu.edu.cn

目录

1. 二维随机变量

二维随机变量

实际中，我们往往需要同时考察两个或两个以上的随机变量，如为了研究某地区学龄前儿童发育情况，对该地区儿童进行抽查，考察每个儿童的身高和体重；如考察炮弹着点位置的横、纵坐标两随机变量等。

- **定义**：设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$,设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个向量(X,Y)叫做**二维随机变量**或**二维随机向量**。

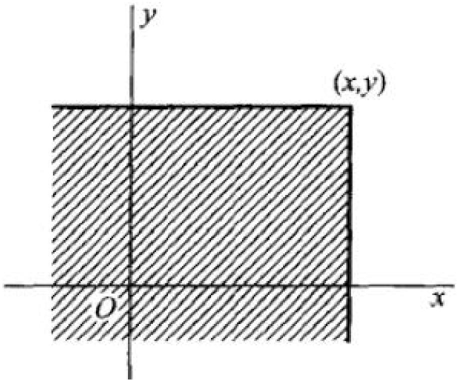
注：二维随机变量(X,Y)的性质不仅与X及Y有关，而且依赖这两个随机变量的相互关系，因此，不能像之前那样单独地研究X和Y，需将（X，Y）作为一个整体进行讨论。

二维随机变量

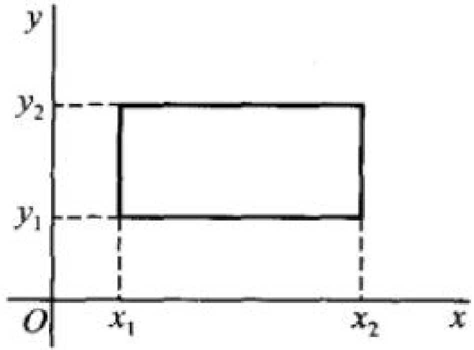
- 设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x, y，二元函数：

$$F(x,y)=P\{(X\leq x)\cap(Y\leq y)\}\xlongequal{\text{记成}}P\{X\leq x,\ Y\leq y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的**分布函数**或随机变量X和Y的**联合分布函数**。



$F(x,y)$在(x,y)处值为随机点(X, Y)落在阴影处概率。



$F(x,y)$落在矩形域中概率为：

$P\{x_1<X\leq x_2,y_1<Y\leq y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)$

◆ **联合分布函数性质：**

➢ $F(x,y)$是变量x和y的不减函数，即

对于任意固定的y，当$x_2 > x_1$时，$F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;

对于任意固定的x，当$y_2 > y_1$时，$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$;

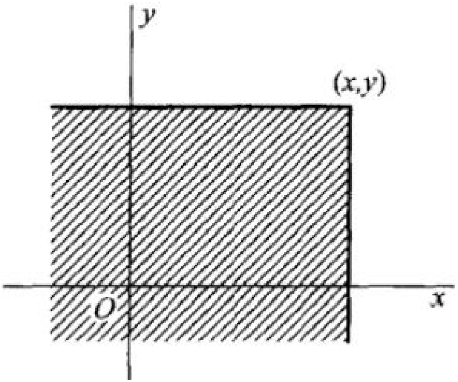
➢ $0 \leq F(x,y) \leq 1$，且

对于任意固定的y，$F(-\infty,y) = 0$;

对于任意固定的x，$F(x,-\infty) = 0$;

$F(-\infty,-\infty) = 0, \quad F(+\infty,+\infty) = 1$;

二维随机变量



如右图，将无穷矩阵的右面边界向左无限平移，则“随机点(X, Y)落在矩阵内”这一事件概率趋于不可能事件，即有$F(-\infty, y) = 0$；当$x \to \infty, y \to \infty$时，无穷矩形扩展到全平面，随机点(X, Y)落在其中趋于必然事件，即有$F(+\infty, +\infty) = 1$

- $F(x+0, y) = F(x, y)$, $F(x, y+0) = F(x, y)$，即$F(x, y)$关于x右连续，关于y也右连续。
- 对于任意(x_1, y_1), (x_2, y_2), $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$, 下述不等式成立：

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0$$

二维随机变量

- **定义：** 若二维随后变量（X，Y）全部可能取到的值是有限对或可列无限多对，则称（X，Y）是**二维离散型随机变量**。
- 二维离散型随机变量（X，Y）的**分布律**（又称随机变量X和Y的**联合分布律**）：

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

记$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},\ i,j = 1,2,\ldots$

其中有：$p_{ij} \geq 0,\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

二维随机变量

例：设随机变量X在1, 2, 3, 4四个整数中等可能取一个值，另一个随机变量Y在1~X中等可能地取一个整数值，试求（X, Y）的分布律。

解：易知$\{X=i,\ Y=j\}$的取值情况是：$i=1,2,3,4, j$取不大于i的正整数，且

$$P\{X=\mathrm{i},Y=j\}=P\{Y=j|X=\mathrm{i}\}P\{X=\mathrm{i}\}=\frac{1}{i}\times\frac{1}{4}$$

分布律为：

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

二维随机变量

◆ **定义**：对于二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(x,y)$, 如果存在非负可积函数$f(x,y)$使得对于任意x，y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

则称(X, Y)是**二维连续型随机变量**，函数$f(x,y)$称为二维连续型随机变量(X, Y)的**概率密度**，或称随机变量X和Y的**联合概率密度**。

二维随机变量

◆ **联合概率密度性质：**

➢ $f(x,y) \geq 0$.

➢ $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$.

➢ 设G是xOy平面上的区域，点(X, Y)落在G内的概率为：

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_{G} f(x,y)dxdy$$

➢ 若$f(x,y)$在点（x,y）连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

二维随机变量

例：设二随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & other.\end{cases}$$

求：(1)分布函数$F(x,y)$；(2)概率$P\{Y\le X\}$；

解：(1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x}2e^{-(2x+y)}dxdy, & x>0,\ y>0\\ 0, & other.\end{cases}$$

即有$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,\ y>0\\ 0, & other.\end{cases}$

二维随机变量

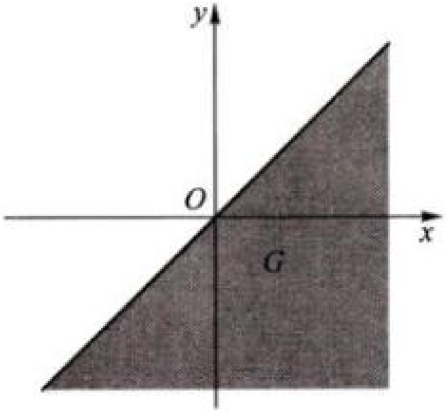
(2)将(X, Y)看作平面上随机点的坐标，即有

$$\{Y \le X\} = \{(X, Y) \in G\},$$

其中G为xOy平面上直线$y = x$及其下方的部分，如图所示：
则

$$P\{Y \le X\} = P\{(X, Y) \in G\} = \iint\limits_{G} f(x, y)dxdy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dxdy = \frac{1}{3}$$



二维随机变量

推广：（n维随机变量的情况）

- 设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$, 设$X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \ldots, X_n=X_n(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个n维向量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$称为**n维随机变量**或**n维随机向量**。
- 对于任意n个实数$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，n元函数

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n)=P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n\}$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的**分布函数**或随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$的**联合分布函数**。

2. 边缘分布

边缘分布

◆ **定义：** 二维随机变量$(X，Y)$作为一个整体，具有分布函数$F(X,Y)$，而X和Y都是随机变量，各自也有分布函数，记为$F_X(x)$, $F_y(y)$, 依次称为二维随机变量$(X，Y)$关于X和关于Y的**边缘分布函数**。

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x,\infty)$$

即：

$$F_X(x) = F(x,\infty)$$

同理有：

$$F_Y(y) = F(\infty,\ y)$$

边缘分布

对于离散型随机变量有：$F_X(x) = F(x,\infty) = \sum_{x_i \le x}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$

而X的分布律为：$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$， $i = 1,2,\ldots.$

同理Y的分布律为：

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j = 1,2,\ldots.$$

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1,2,\ldots.$$

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, j = 1,2,\ldots.$$

$p_{i\cdot}$和$p_{\cdot j}$为$(X，Y)$关于X和关于Y的边缘分布律。

边缘分布

对于连续型随机变量$(X，Y)$，设它的概率密度为$f(x,y)$，则

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}\right]dx$$

X为一个连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}$$

同理，对于Y的概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

分别称$f_X(x)$，$f_Y(y)$为关于X和关于Y的边缘概率密度。

边缘分布

例：整数N等可能地在1, 2...10十个值中去一个值，设D=D(N)是能整除N的正整数的个数，F=F(N)是能整除N的素数的个数，试写出D和F的联合分布律及边缘分布律。

解：样本空间及D, F取值情况如下：

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

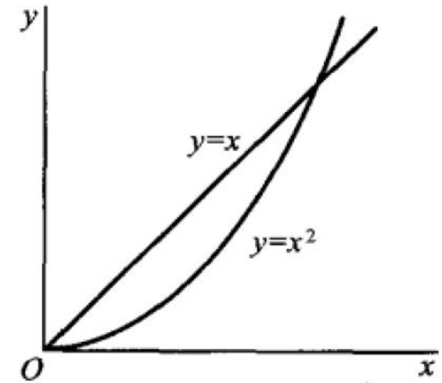
D所有可能取值为1, 2, 3, 4;F所有可能取值为0, 1, 2;
易得D和F的联合分布律及边缘分布如下表：

联合分布

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$
2	0	0	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$
$P\{D=i\}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

边缘分布

边缘分布



例:设随机变量X和Y具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & other\end{cases}$$

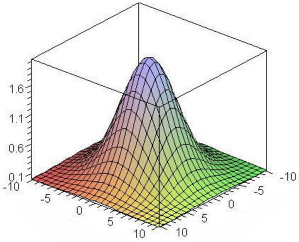
求边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$。

解:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dx}=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

边缘分布



例： 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数，且$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$，$-1<\rho<1$, 称(X, Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布，记$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,{\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2,\rho)$. 试求二维正态随机变量的边缘概率密度。

解：

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{dy}$，由于

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

边缘分布

于是

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}dy$$

令

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$$

则有

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

即

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}$$

其中$-\infty<x<\infty$，$-\infty<y<\infty$。

边缘分布

上题结论：

- 二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，且都不依赖参数ρ；
- 单由关于X和关于Y的边缘分布，一般来说不能确定随机变量X和Y的联合分布。