线性代数 (Linear Algebra)

第三章 Determinants

§3.1 Introduction to Determinants

行列式

衡益

2021 年 11 月 11 日，中山大学南校区

背景介绍

德国数学家莱布尼茨

- 行列式是一个数
- 由一些数字按一定方式排成的方阵所确定

瑞士数学家克莱姆

- 指出其在解析几何学中的重要作用
- 著名的用行列式求解$n\times n$方程组的克莱姆法则

法国数学家柯西

- 使用行列式给出计算多个多面体体积的行列式公式
- 将公式与早期行列式的工作联系起来

Cramer, Gabriel
1704～1752

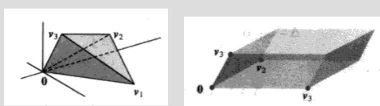


图1 四面体（左）和平行六面体（右）

行列式的数学定义

行列式 (Determinants)

方形矩阵

Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}^{+}$ 自然数

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \det(A)$$

$$|\cdot| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \det(A)$$

低阶行列式

二阶行列式

$$\begin{cases} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} := b_1 a_{22} - a_{12} b_2 \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} := a_{11} b_2 - b_1 a_{21} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \end{pmatrix}$$

行列式 (Determinants)

对角线法

+ -

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

二阶行列式应用举例

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

二阶行列式 (Second Order Determinants)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

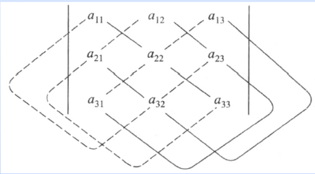
$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{7} \\ \frac{-21}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

三阶行列式

扩展对角线法



实线：正号；　虚线：负号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

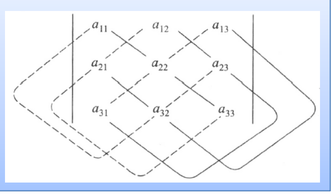
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式 (Third Order Determinants)

7

三阶行列式应用举例

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4 \\ &\quad - 1 \times 1 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) - (-4) \times 2 \times (-3) \\ &= -4 - 6 + 32 - 4 - 8 - 24 = -14 \end{aligned}$$

8

三阶行列式

2×2矩阵行列式重写3×3行列式

- 1×1矩阵 → $\mathbf{A}=[a_{11}]$ → 定义 det $\mathbf{A}=a_{11}$
- 2×2矩阵 → $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ → det $\mathbf{A}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

$$(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})-(a_{12}a_{21}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31})+(a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}-a_{12}\cdot\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{pmatrix}+a_{13}\cdot\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}\cdot\det \mathrm{A}_{11}-a_{12}\cdot\det \mathrm{A}_{12}+a_{13}\cdot\det \mathrm{A}_{13}$$

9

三阶行列式

2×2矩阵行列式重写3×3行列式

- 对任意方阵**A**，$\mathbf{A}_{ij}$表示通过划掉**A**中第i行和第j列而得到的子矩阵

eg. $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&-2&5&0\\2&0&4&-1\\3&1&0&7\\0&4&-2&0\end{bmatrix}$ ⇒ $\mathrm{A}_{32}=\begin{bmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}$

当$n=3$：det A 由2×2子矩阵A_{1j}的行列式定义

当$n=4$：det A 由3×3子矩阵A_{1j}的行列式定义

对于$n\times n$：det A 由$(n-1)\times(n-1)$子矩阵行列式来定义

10

三阶行列式

例1：计算行列式det **A**, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

解： 计算 $\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + a_{13} \cdot \det A_{13}$

$$\det A = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= 1 \cdot (0-2) - 5 \cdot (0-0) + 0 \cdot (-4-0) = -2$$

三阶行列式

课堂练习：计算行列式det **A**, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解： 计算det **A**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

n 阶行列式

排列及其逆序数

把 n 个不同的元素排成一列 → 这 n 个元素的全排列

排列总数 $P_n = n!$

标准次序：如 $1, 2, \ldots, n-1, n$

逆序：
某一对元素的先后次序与标准次序不同

排列的逆序数：
一个排列中所有逆序的总数 $\xrightarrow{\text{奇数}}$ **奇排列**，$\xrightarrow{\text{偶数}}$ **偶排列**

排列及其逆序数

$p_1\, p_2 \dots p_n$ 自然数排列，由小到大为标准次序（从小到大）

元素 p_i 的逆序数：如果比它大的且排在它前面的元素有 t_i 个

全体元素的逆序数之总和： $t = t_1 + t_2 + \dots + t_n$

定理 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论 奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数.

15

n 阶行列式定义

n 阶

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

3 阶特例

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

带正号的三项列标排列：123, 231, 312 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$

带负号的三项列标排列：132, 213, 321 $a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$

16

n 阶行列式计算

定义

√ 当$n \geq 2$，$n \times n$矩阵$A = \left[a_{ij}\right]$的行列式是形如$\pm a_{1j} \det A_{1j}$ 的n个项的和，其中加号和减号交替出现，这里元素a_{11}，a_{12}，$\cdots a_{1n}$来自A的第一行，即

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + \cdots (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot \det A_{1n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det A_{1j}
\end{aligned}
$$

17

n 阶行列式计算

余子式

$$
M_{ij} = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = \det A_{ij}
$$

18

n 阶行列式计算

定义

元素 a_{ij} 的代数余子式 (Algebraic cofactor)

M_{ij}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

19

n 阶行列式计算

按A的第一行的代数余子式展开式

➢ 给定$\mathbf{A}=[a_{ij}]$，$\mathbf{A}$的(i,j)代数余子式C_{ij}由下式给出

$$C_{ij} = (-1)^{1+j}\det A_{ij}$$

$$\det A = a_{11}\cdot C_{11} + a_{12}\cdot C_{12} + \cdots + a_{1n}\cdot C_{1n}$$

定理1

✓ $n\times n$矩阵$\mathbf{A}$的行列式可按任意行或列的代数余子式展开式来计算。按第i行展开用上式给出的代数余子式写法可以写成：

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}\cdot C_{i2} + \cdots + a_{in}\cdot C_{in}$$

✓ 按第j列的代数余子式展开式为：

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}\cdot C_{2j} + \cdots + a_{nj}\cdot C_{nj}$$

符号的棋盘模式

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

n 阶行列式计算，n = 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

n 阶行列式计算

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n阶

$$D = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

n-1 阶

… … …

2 阶

行列式计算

例2： 利用按第三行的代数余子式展开式求det **A**, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

解： 计算

$$\det A = a_{31}C_{31} + a_{32} \cdot C_{32} + a_{33} \cdot C_{33}$$
$$= (-1)^{3+1} a_{31}\det A_{31} + (-1)^{3+2} a_{32}\det A_{32} + (-1)^{3+3} a_{33}\det A_{33}$$
$$=0\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2(-1) + 0 = -2$$

23

行列式计算

例3： 计算det **A**, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

解： 按**A**的第一列的代数余子式展开

$$\det A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 0C_{21} + 0C_{31} - 0C_{41} + 0C_{51} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -12$$

行列式计算

定理2

✓ 若$\mathbf{A}$为三角阵，则$\det \mathbf{A}$ 等于$\mathbf{A}$的主角线上元素的乘积。

三角矩阵：

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

上三角 下三角

行列式计算

定理2

✓ 若$\mathbf{A}$为三角阵，则$\det \mathbf{A}$ 等于$\mathbf{A}$的主角线上元素的乘积。

三角矩阵：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 4 = -24$$