线性代数 (Linear Algebra)

第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§1.3 Vector Equations 向量方程组

衡益

2021 年 10 月 9 日，中山大学南校区

向量方程组

- $\mathbb{R}^2$中的向量
- $\mathbb{R}^3$中的向量
- $\mathbb{R}^n$中的向量
- 线性组合
- Span{**v**}与Span{**u**,**v**}的几何解释

2

$\mathbb{R}^2$中的向量

向量

✓ 仅含一列的矩阵称为列向量，或简称**向量**。

$\mathbb{R}^2$

✓ 所有两个元素的向量集记为$\mathbb{R}^2$，例如：

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

（其中，w_1和w_2是任意实数）

$\mathbb{R}^2$中的向量

$\mathbb{R}^2$中的向量

✓ 符号表示：

v（粗体），$\vec{v}$（使用箭头）

✓ $\mathbb{R}^2$中两个向量相等，当且仅当对应元素相等

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$中的向量

向量的一些性质

向量加法

$$\mathrm{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathrm{w}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}，\text{定义}\ \mathrm{v}+\mathrm{w}=\begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{pmatrix}$$

纯量乘法

$$2\mathrm{v}=\begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix}, -\mathrm{v}=\begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$$

标量与向量的乘法

线性组合 (Linear Combination)

$$c\mathrm{v}+d\mathrm{w}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{v}+\mathrm{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c=1 和 d=1 的特例

$\mathbb{R}^2$中的向量

例1：设$\mathrm{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$和$\mathrm{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$，求4u，(−3) v 以及4u+(−3) v

解：

$$4\mathrm{u}=\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}, (-3)\,\mathrm{v}=\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$4\mathrm{u}+(-3)\,\mathrm{v}=\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+(-6) \\ -8+15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$中的向量

点积（Dot product）

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}，定义\ v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

向量互相垂直 $v \cdot w = 0$ **这里 0 是一个数，不是向量！**

向量的长度 定义 $\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

向量的夹角 $\cos\theta = \dfrac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$

7

$\mathbb{R}^2$中的向量

单位向量（Unit Vector）

$$u = \frac{v}{\|v\|}\ 是与\ v\ 方向相同的单元向量$$

施瓦尔兹不等式（Schwarz inequality）

$$|v \cdot w| \le \|v\|\|w\|$$

三角不等式（Triangle inequality）

$$\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$$

8

$\mathbb{R}^2$中的向量

$\mathbb{R}^2$的几何表示

✓向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 的几何表示是点(a, b)，或者是一条由$(0, 0)$指向点(a, b)的有向线段。

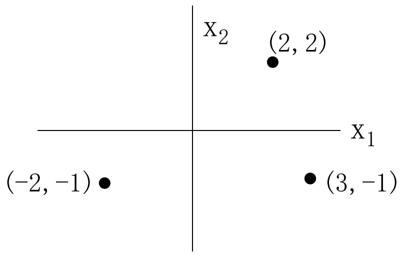


图1 用点表示向量

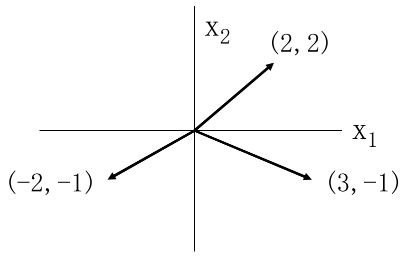


图2 用箭头表示向量

$\mathbb{R}^2$中的向量

例2：设$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$，在图上表示向量u，2u 和 $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$。

解：

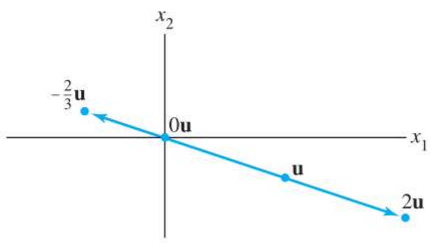


图3 u，2u 和 $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$

$\mathbb{R}^2$中的向量

向量加法的平行四边形法则

✓若$\mathbb{R}^2$中向量u和v用平面上的点表示，则u + v 对应于以u，0和v为三个顶点的平行四边形的第4个顶点。

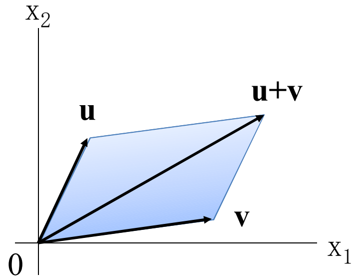


图4 平行四边形法则

向量方程组

- $\mathbb{R}^2$中的向量
- $\mathbb{R}^3$中的向量
- $\mathbb{R}^n$中的向量
- 线性组合
- Span{**v**}与Span{**u**,**v**}的几何解释

$\mathbb{R}^3$中的向量

几何表示

✓ $\mathbb{R}^3$中的几何表示为三维空间的点，或者起点为原点的箭头。

向量a与2a

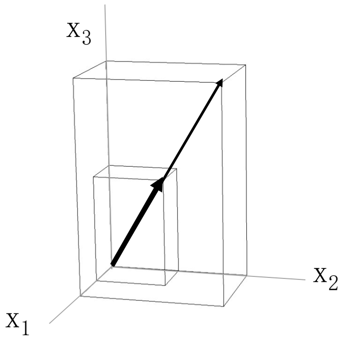


图5 $\mathbb{R}^3$中向量的几何表示

向量方程组

- ➢ $\mathbb{R}^2$中的向量
- ➢ $\mathbb{R}^3$中的向量
- ➢ $\mathbb{R}^n$中的向量
- ➢ 线性组合
- ➢ Span{**v**}与Span{**u**,**v**}的几何解释

$\mathbb{R}^n$中的向量

定义 n 个有次序的数 a_1，a_2，…，a_n 所组成的数组称为 **n 维向量**，这 n 个数称为该向量的 **n 个分量**，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量。

n 维（实）列向量

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

n 维（实）行向量

$$a^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

n 维向量空间 $\mathbb{R}^n = \left\{ \mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \right\}$

n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的 $n-1$ 维超平面

$$\left\{ \mathrm{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T \,\middle|\, a_1 x_1 + \cdots a_n x_n = b, a_i, x_i, b \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \right\}$$

总结

$\mathbb{R}^n$中向量的代数性质

对$\mathbb{R}^n$中一切向量**u**, **v**, **w** 以及实数系数c和d,

(i)	$u + v = v + u$	(V)	$c(u + v) = cu + cv$
(ii)	$(u + v) + w = u + (v + w)$	(Vi)	$(c + d)u = cu + du$
(iii)	$u + 0 = 0 + u = u$	(Vii)	$c(du) = (cd)(u)$
(iV)	$u + (-u) = -u + u = 0$	(Viii)	$1u = u$

其中 $-u$表示 $(-1)u$

注释：一般用$\mathbf{u}+(-1)\mathbf{v}$代替$\mathbf{u}-\mathbf{v}$。

向量方程组

- $\mathbb{R}^2$中的向量
- $\mathbb{R}^3$中的向量
- $\mathbb{R}^n$中的向量
- 线性组合
- Span{**v**}与Span{**u**,**v**}的几何解释

17

向量组

定义 若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合叫做向量组.

例 1： n 个维数为 m 的列向量

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

18

线性组合

m 个 n 维列向量 $\qquad$ $n \times m$ 的矩阵

$$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_m \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow A_{n\times m} = \left(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_m\right)$$

$$\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \cdots, \mathrm{b}_m \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1^T \\ \mathrm{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathrm{b}_m^T \end{pmatrix}$$

$m \times n$ 的矩阵

线性组合

定义 给定向量组 A：$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$，对于任何一组实数 k_1，k_2，…，k_m，表达式 $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m$ 称为向量组 A 的一个线性组合，k_1，k_2，…，k_m 称为这个线性组合的权（系数）。

⇓

给定向量组 A：$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$和向量 $\boldsymbol{b}$，如果存在一组数 k_1，k_2，…，k_m，使 $\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组A的线性组合，这时称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示。

其中权 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 可为任意实数，包括0

线性组合

例3：图6选择性给出向量$v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$和$v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$的某些线性组合。估计由$v_1$和$v_2$的线性组合生成的向量 u 和 w 。

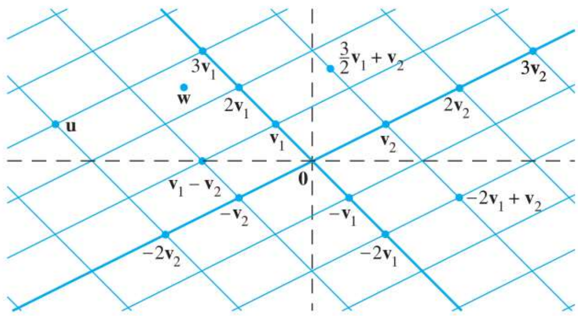
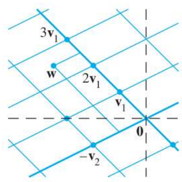


图6 v_1与v_2的线性组合



$$u = 3v_1 - 2v_2$$

$$w = \frac{5}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$$

线性组合

例4：设$a_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$和$a_2=\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix}$，确定b 能否写成$a_1$和$a_2$的线性组合，也就是说，确定是否存在权$x_1$ 和x_2 使

$$x_1a_1 + x_2a_2 = b \qquad (1)$$

若向量方程（1）有解，求它的解。

解：

$$x_1\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{向量加法 数乘}} \begin{pmatrix}x_1+2x_2\\-2x_1+5x_2\\-5x_1+6x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix} \qquad (2)$$

线性组合

例4:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned} \quad (3)$$

行化简算法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

实为直接求解增广矩阵 $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{b})$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{pmatrix} \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ \mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{b} \end{array}$$

- 方程组解为 $x_1=3,\ x_2=2$
- $\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{a}_2$ 的线性组合
- 权为 $x_1=3,\ x_2=2$

23

线性组合

✓ 向量方程组

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

和增广矩阵为

$$(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\ \ \mathbf{b})$$

的线性方程组有相同的解集。特别地，b可表示为$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n$**的线性组合**，当且仅当对应的方程组**有解**。

24

线性组合

课堂练习：设$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$，$a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$和$a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$，确定b能否写成$a_1$，$a_2$，$a_3$的线性组合。

解： **行化简算法化简增广矩阵：**

增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{matrix}$

25

向量方程组

- $\mathbb{R}^2$中的向量
- $\mathbb{R}^3$中的向量
- $\mathbb{R}^n$中的向量
- 线性组合
- Span{**v**}与Span{**u**,**v**}的几何解释

26

Span{v}与Span{u,v}的几何解释

定义：Span 扩张空间

✓若$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p$是$\mathbb{R}^n$中的向量，则$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p$的所有线性组合所称的集合用记号Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p\}$表示，称为由$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p$所生成的$\mathbb{R}^n$的子集，也就是说，Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p\}$是所有形如

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

的向量的集合，其中$c_1, c_2, \cdots, c_p \in \mathbb{R}$为标量。

27

Span{v}与Span{u,v}的几何解释

Span{v}与Span{u, v}的几何解释

- Span{v} 是通过v和0的直线上所有点的集合
- Span{**u**, **v**}是$\mathbb{R}^3$中通过**u**, **v**, **0**的平面。

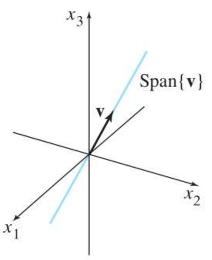


图7 Span{v}是通过原点的直线

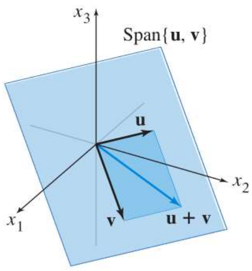


图8 Span{**u**, **v**}是通过原点的平面

28

Span{v}与Span{u,v}的几何解释

例5：设$a_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$和$a_2=\begin{pmatrix}5\\-13\\-3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-3\\8\\1\end{pmatrix}$，则$\mathrm{Span}\{a_1, a_2\}$是$\mathbb{R}^3$中通过原点的一个平面，问b 是否在该平面内？

解： **行化简算法化简增广矩阵：**

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\-2 & -13 & 8\\3 & -3 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\0 & -3 & 2\\0 & -18 & 10\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\0 & -3 & 2\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

方程组无解

⇓

b不属于Span{a_1, a_2}

29

回家作业

30

回家作业1

作业1 用箭头在图1中*xy*平面上表示下列向量：

u, **v**, -**v**, -2**v**, **u**+**v**, **u**-**v**, **u**-2**v**

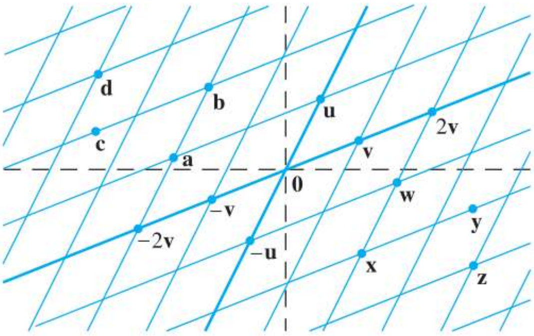


图1 *xy*平面

回家作业2

作业2 确定**b**是否为矩阵**A**的各列向量的线性组合。

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 3 & 5\\ -2 & 8 & -4\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}3\\ -7\\ -3\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -6\\ 0 & 3 & 7\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}11\\ -5\\ 9\end{pmatrix}$

回家作业3

作业3 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$，以$a_1$，$a_2$，$a_3$表示A的各列，

并设W=**Span**$\{a_1, a_2, a_3\}$.

a) **b**是否属于$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$？在$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$中有多少个向量?

b) **b**是否属于**W**? **W**中有多少个向量?

c) 证明：$\mathbf{a}_1$属于**W**（提示：不必作行变换）。

33

Q & A

34