电路理论基础

时间：星期一上午8:00至9:40，星期五上午8:00至9:40

地点：南校园1506

任课教师：粟涛（电子与信息工程学院）

考试方式：闭卷

成绩评定：平时分40%，期末考试60%。

学分：4

一阶电路

- 无源 RC 电路
- 无源 RL 电路
- 奇异函数
- RC电路的阶跃响应
- RL电路的阶跃响应

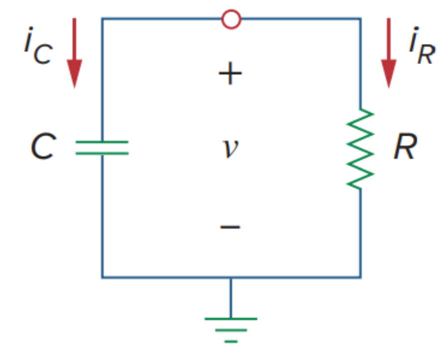
介绍

- 前面分别学习了电阻、电容和电感，这三种元件。
- 本章起，将上面的元件混合起来组成较复杂的电路。
- 求解混合电路仍然可以使用基尔霍夫定律。
  - 但是表达电压电流时，可能用到微分表达式。
- 所谓一阶电路就是用一阶微分方程求解的电路。
  - 主要适用于 RL 电路，RC 电路。
- 电路的电流电压随时间演化。

无源 RC 电路

介绍

- 考查右边的电路
  - 本来有个电源接在电容上，
  - 电容电压为V_0，电阻稳定电流；
  - 现在突然去掉电源，
  - 电容开始放电，电荷经过电阻流失。

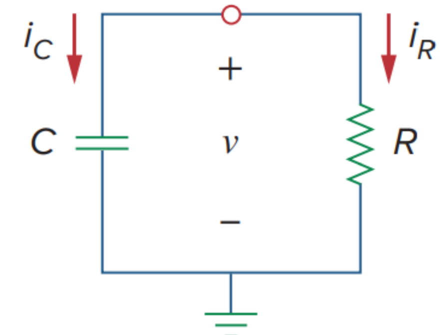


- 求解这个电路，要得到什么？
  - 去掉电源后，电容上的电压随时间的变化；
  - 最终会稳定在什么状态？
  - 去掉电源后，电阻上的电流随时间的变化；
  - 最终会稳定在什么状态？

电压响应

- 电路的初始电压及其储能

$$v(0)=V_0 \qquad w(0)=\frac{1}{2}CV_0{}^2$$



- 根据 KCL，电流守恒

$$i_C+i_R=0 \;\Rightarrow\; C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt}=-\frac{v}{RC}$$

- 进行数学推导

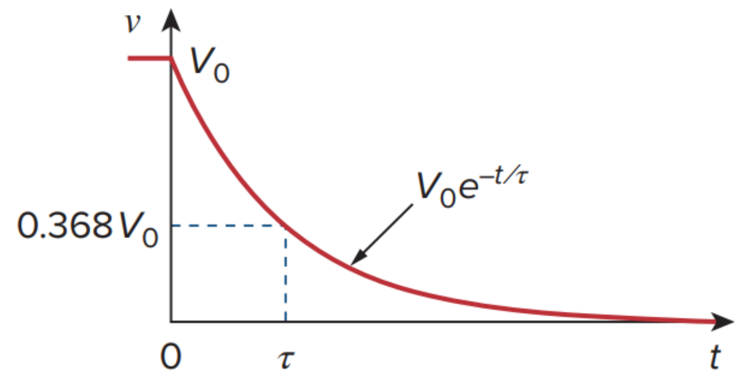
$$\frac{dv}{v}=-\frac{dt}{RC} \;\Rightarrow\; d(\ln v)=-\frac{1}{RC}dt \;\Rightarrow\; \ln v=-\frac{t}{RC}+const$$

- 继续推导，并代入初始条件

$$v(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}} \;\Rightarrow\; v(t)=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$$

自由响应

- 从电压的表达式可以看出，
  - 电压随着时间指数衰减，
  - 响应源是电容上的储能。



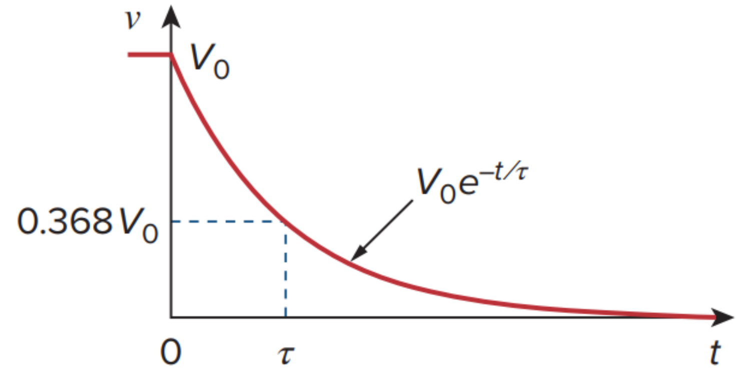
$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

- 这种没有外部电源（和激励），仅有自身的储能，在这个条件下发生的行为，称为电路的自由响应。

- 在RC电路中，电路状态变化的动力，来自于电容的初始存储。而变化的方式则由电容和电阻决定。

时间常数

- 电路的电压随时间指数衰减
  - 关键时间点τ，
  - 这个时刻，电压衰减到1/e。



- 这个关键时间参数称为RC电路的时间常数

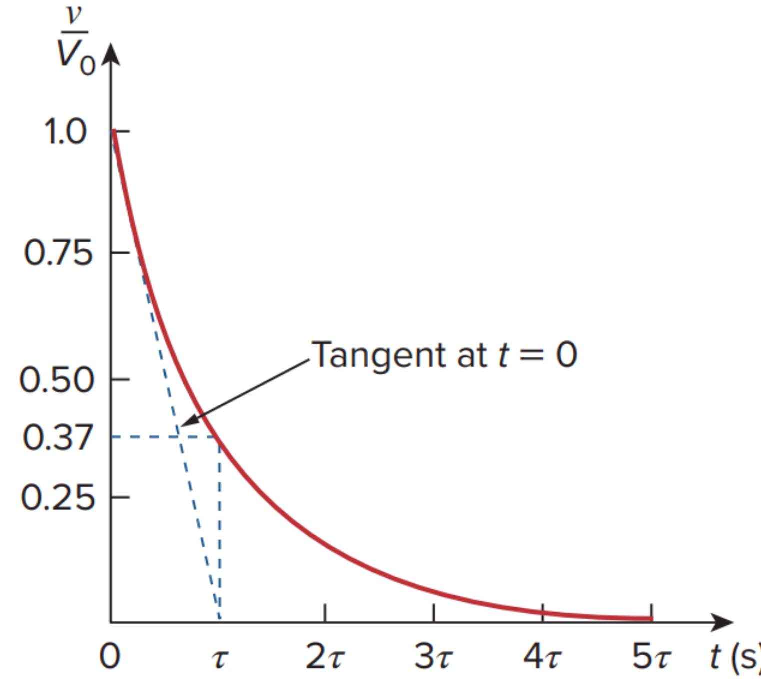
$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \tau = RC \qquad v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

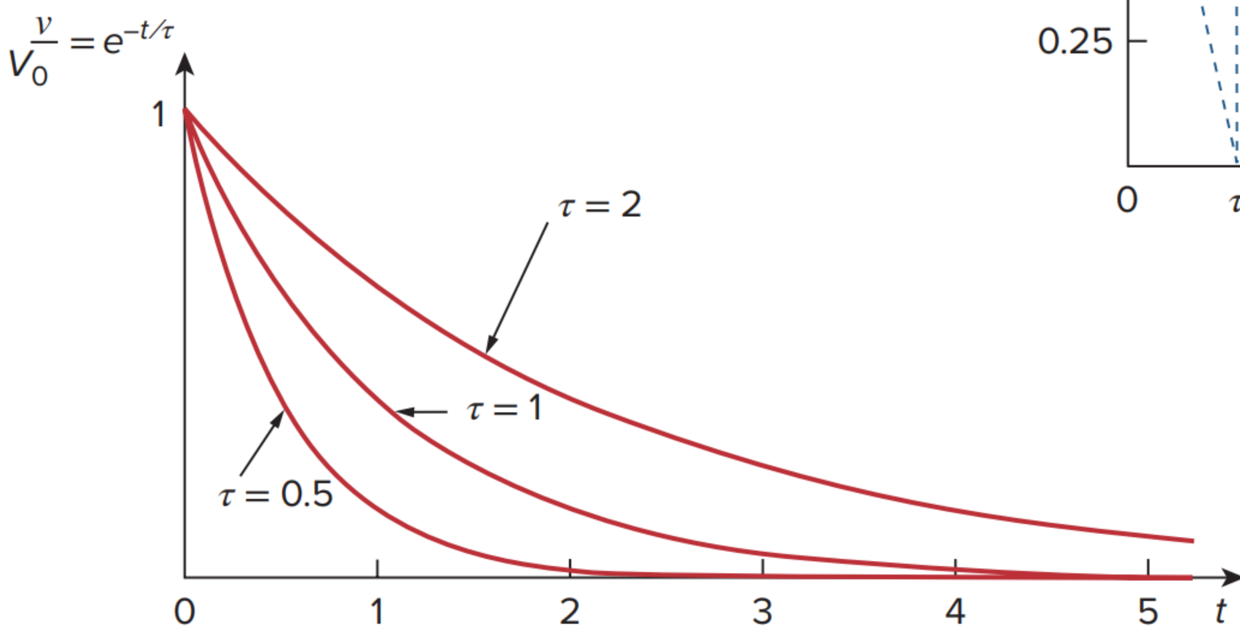
- 在自然响应过程中，
  - 每过一个τ，电压下降63.2%，
  - 经过若干个τ的时间后，
  - 电容的电量就弱到可以忽略。

t	$v(t)/V_0$
τ	0.36788
2τ	0.13534
3τ	0.04979
4τ	0.01832
5τ	0.00674

时间常数

- 通过RC电路的响应曲线，可以确定 τ 的值。
  - 在 t=0 时作切线，与 t 轴相交；
  - 相交位置为 t = τ;
  - 作与v平行的线，与曲线相交；
  - 相交位置为 v = 0.37 V_0。





响应速度

当 τ 增加时，响应曲线趋平坦，响应变慢。当 τ 较小时，电压迅速坠落，响应快。

能量的变化

- 当电源从电容上撤离后，电路发生自然响应。电容上的电荷经过电阻流失，电容的储能减少。

- 在这个过程中，流经电阻的功率为

$$p = vi = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{{V_0}^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

- 此时流经电阻的总能量（做功）为

$$w = \frac{{V_0}^2}{R} \frac{RC}{-2} e^{-\frac{2t_s}{RC}} \Big|_0^t = \frac{1}{2} C{V_0}^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right)$$

电容上的储能

开始时的能量

$$w(0) = \frac{1}{2} C{V_0}^2$$

一段时间后的能量

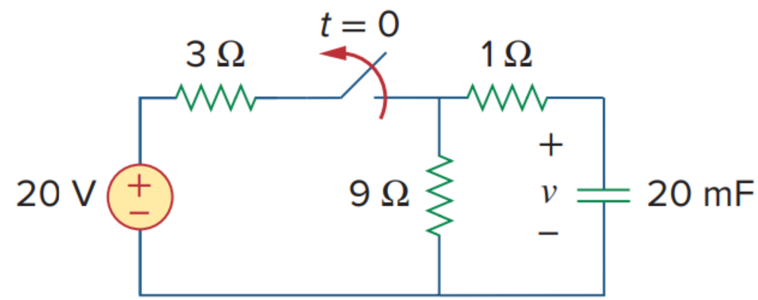
$$w(t) = \frac{1}{2} C{V_0}^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

最后的能量

$$w(\infty) = 0$$

例题

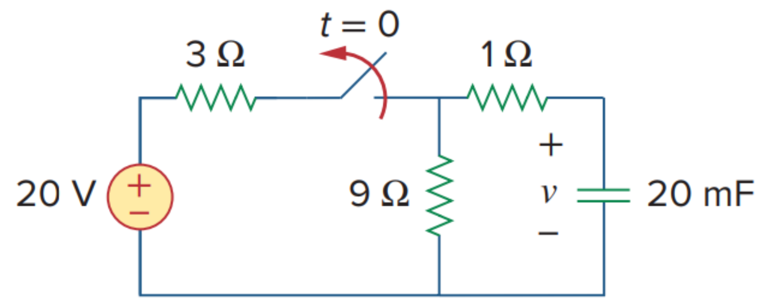
- 问题：下面电路中的开关已经闭合很长一段时间，在 t = 0 时断开，
  - 求 $t \geq 0$ 时的 v(t)，并计算
  - 存储在电容器中的初始能量。



- 求解：
  - 首先求解开关闭合时，电容上的电压，这就是初始条件；
  - 然后断开开关，移除左边部分元件；
  - 将剩下的电路等效变换为RC电路；
  - 按照 RC 分析的一般方法求解电压；
  - 最后求解电容的储能。

例题

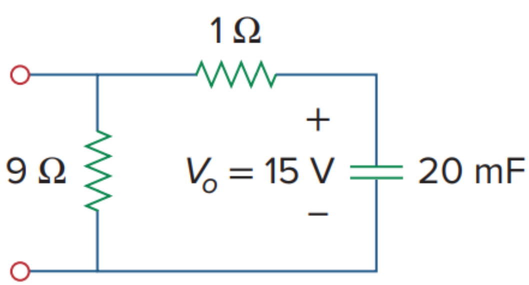
- 问题：下面电路中的开关已经闭合很长一段时间，在 t = 0 时断开，
  - 求 $t \geq 0$ 时的 v(t)，并计算
  - 存储在电容器中的初始能量。



- 求解：

$V_0 = 15\ \text{V}$

$\tau = RC = 10 \times 20 \times 10^{-3} = 0.2\ (\text{s})$



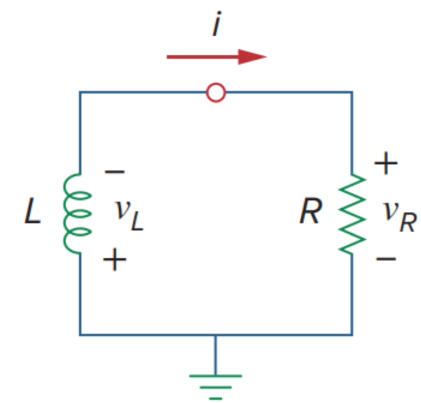
$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} = 15 e^{-\frac{t}{0.2}}$$

$$w(0) = \frac{1}{2} C V_0{}^2 = \frac{1}{2} \times C \times V_0{}^2$$

无源 RL 电路

介绍

- 考查右边的电路
  - 本来有个电流源接在电感和电阻之间，
  - 电感电流为I_0，电阻稳定电流；
  - 现在突然去掉电流源（短路），
  - 电感开始放电，电荷经过电阻流失。

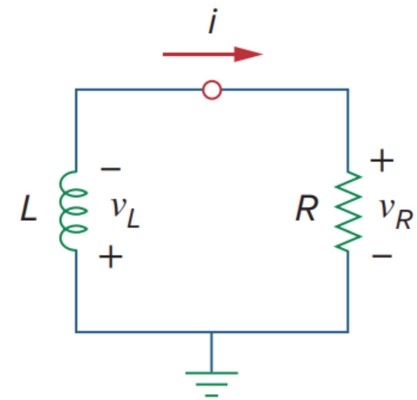


- 求解这个电路，要得到什么？
  - 去掉电流源后，电感上的电流随时间的变化；
  - 最终会稳定在什么状态？
  - 去掉电流源后，电阻上的电流随时间的变化；
  - 最终会稳定在什么状态？

电流响应

- 电路的初始电流及其储能

$$I(0) = I_0 \qquad w(0) = \frac{1}{2} L {I_0}^2$$



- 根据 KVL，电压守恒

$$v_L + v_R = 0 \;\Rightarrow\; L\frac{di}{dt} + iR = 0 \;\Rightarrow\; \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i$$

- 进行数学推导

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \;\Rightarrow\; d(\ln i) = -\frac{R}{L} dt \;\Rightarrow\; \ln i = -\frac{R}{L} t + const$$

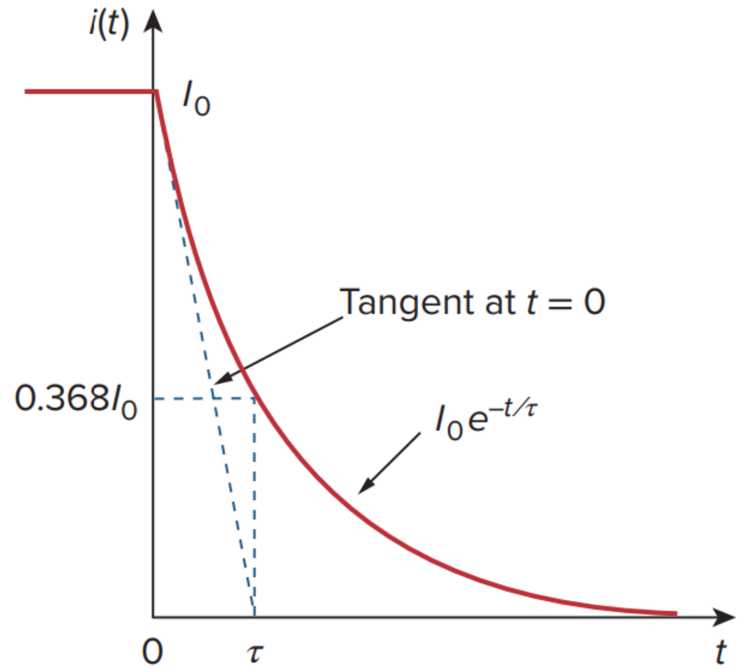
- 继续推导，并代入初始条件

$$i(t) = A e^{-\frac{R}{L} t} \;\Rightarrow\; i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

自由响应

- 从电流的表达式可以看出，
  - 电流随着时间指数衰减，
  - 响应源是电感上的储能。

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



- 在RL电路中，电路状态变化，
  - 动力来自于电感的初始存储。
  - 这是一种自然响应。

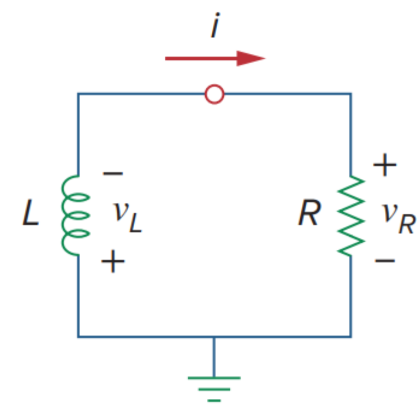
- 时间常数与电感成正比，与电阻成反比。

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \Rightarrow \quad i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电压与能量

- 电路的电压可以用电感算出，

$$v_L = L\frac{di}{dt} = -\frac{L}{\tau}I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad v_L = -I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}}$$



  – 也可以通过电阻算出。

$$v_R = iR = I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad v_R + v_L = 0$$

- 电流流经电阻产生的功耗为

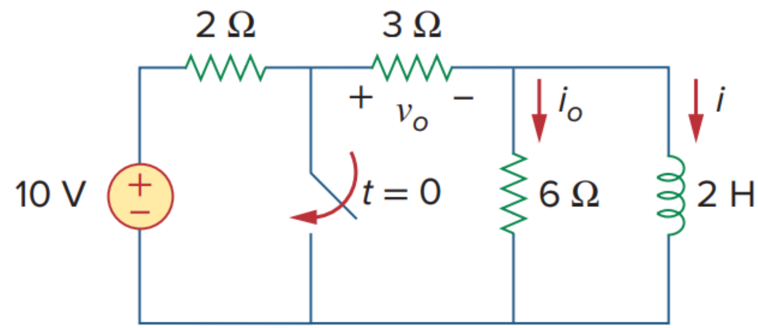
$$p = vi = i^2 R \quad \Rightarrow \quad p = I_0{}^2 R e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

- 电阻累计吸收的能量

$$w = I_0{}^2 R \frac{\tau}{-2} e^{-\frac{2t_s}{\tau}}\Big|_0^t = \frac{1}{2} L I_0{}^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

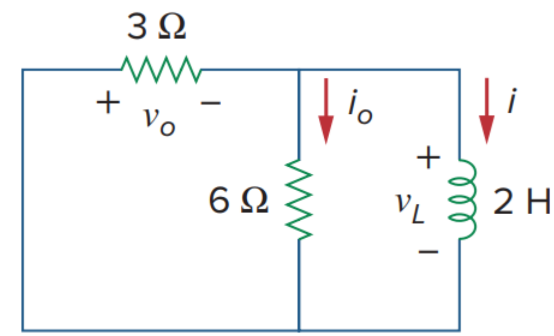
例题

- 问题：下面电路中的开关已经断开很长一段时间，在 t = 0 时闭合，
  - 求 i_0，v_0 和 i 的表达式。



- 求解：
  - 开关断开，并进入稳定状态后，

$$i(0) = 2\ \text{A} \qquad v_o = 6\ \text{V}$$



  - 开关闭合，电路状态开始变化
    - 参数 R = 2 Ω，L = 2 H，τ = 1 s；

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2e^{-t}\text{A}$$

$$v_o(t) = -v_L(t) = -L\frac{di(t)}{dt} = 4e^{-1}\text{V}$$

$$i_o(t) = \frac{v_o(t)}{6\ \Omega} = \frac{2}{3}e^{-t}\text{A}$$

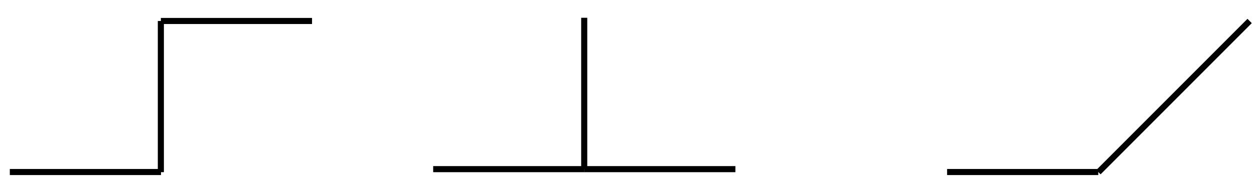
奇异函数

介绍

- 奇异函数，也称开关函数，它们近似于开关电路中的开关操作产生的信号，是一种很有用的波形函数。

- 奇异函数的函数本身或者导数是不连续的。

- 使用最广泛的三种奇异函数是
  - 单位阶跃函数；
  - 单位冲激函数；
  - 单位斜坡函数。



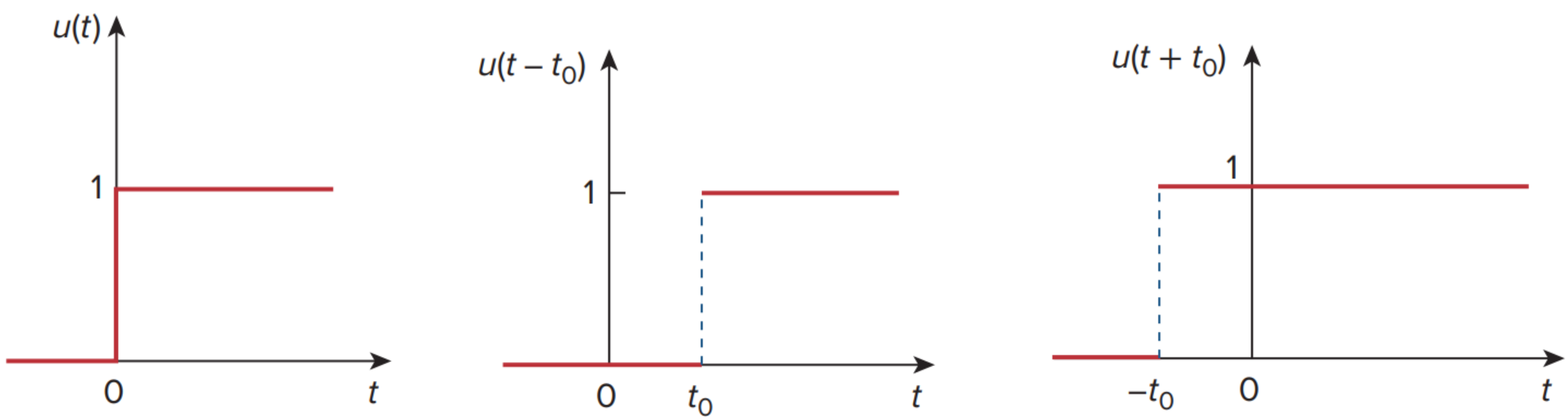
单位阶跃函数

- 单位阶跃函数，标记u(t)，
  - 在 $t < 0$ 时，$u = 0$;
  - 在 $t > 0$ 时，$u = 1$;
  - 在 $t = 0$时，函数的值不确定。

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- 当 u(t) 被延迟 t_0 时，得到 $u(t\text{-}t_0)$ 。

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$



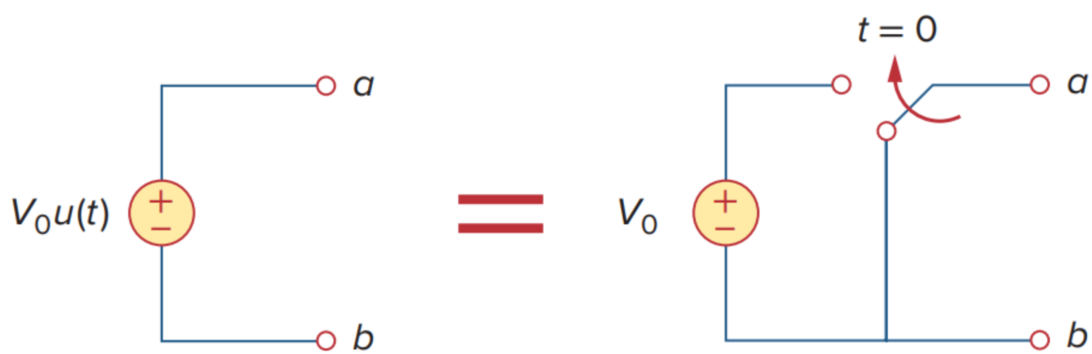
阶跃电源

- 电路分析中，阶跃电源等效为带开关的电源。

- 阶跃电压源

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_0 & t > 0 \end{cases}$$

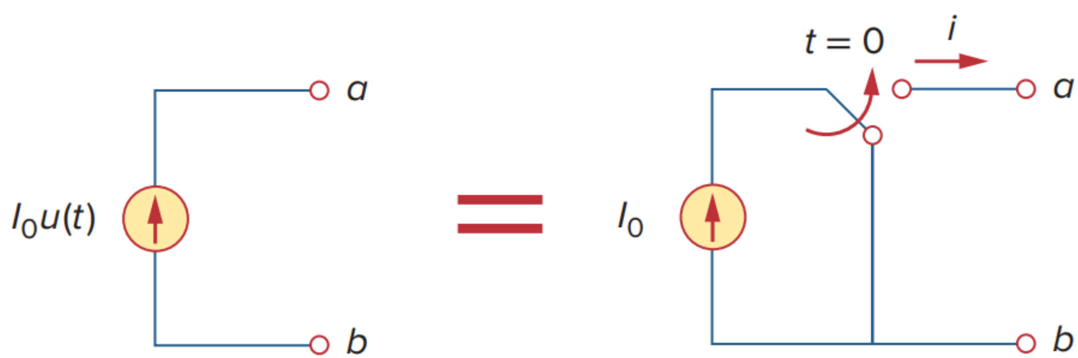
$$v(t) = V_0 u(t)$$



- 阶跃电流源

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_0 & t > 0 \end{cases}$$

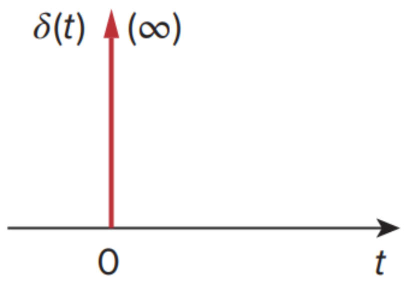
$$i(t) = I_0 u(t)$$



单位冲激函数

- 单位阶跃函数的导数就是单位冲激函数。

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ undefined & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$



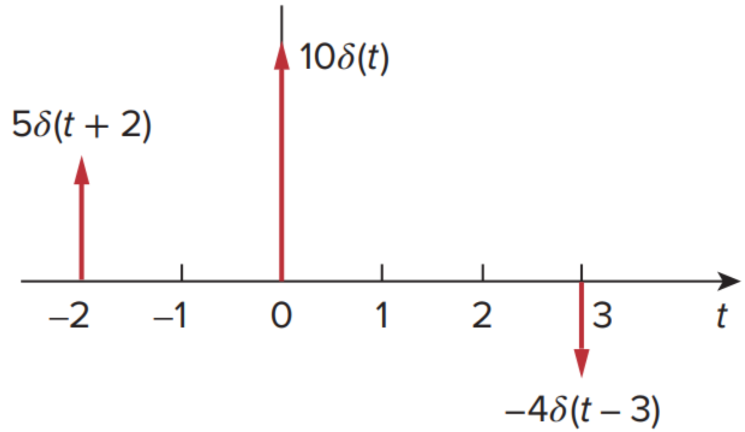
- 单位冲激函数的一个特性是：它的积分等于 1 。

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \qquad \int_{-1}^{+1} \delta(t)dt = 1$$

- 单位冲激函数背后的物理现象是电路开关或者脉冲电源产生的尖峰脉冲。

冲激函数的选择性

- 冲激函数的强度
  - 对冲激函数进行积分，
  - 若积分值为10，
  - 则它的强度为10。



- 冲激函数还可以用于对信号进行采样选择
  - 当 t_0 位于区间 (a, b) 中时；

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

  - 特殊情况：

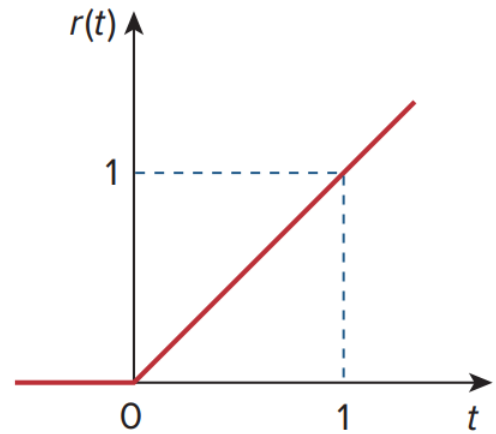
$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

单位斜坡函数

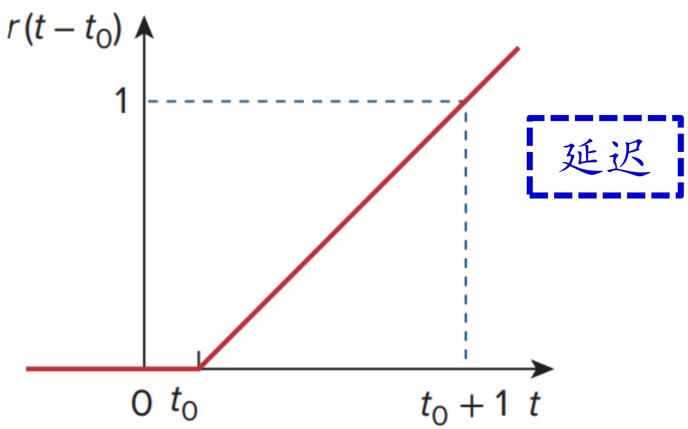
- 单位斜坡函数时阶跃函数的积分

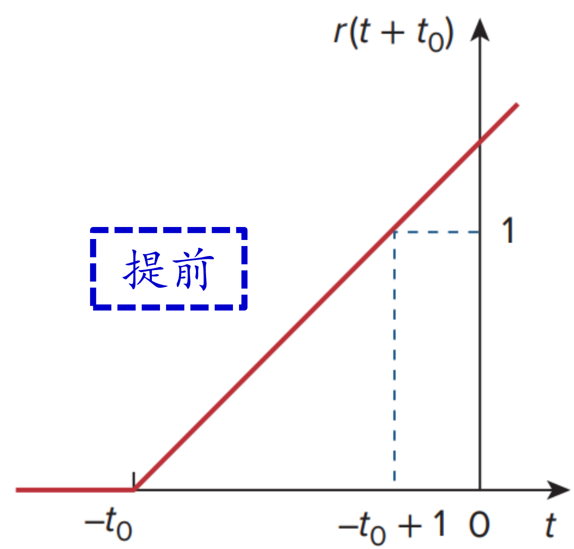
$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)dt = tu(t)$$

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$



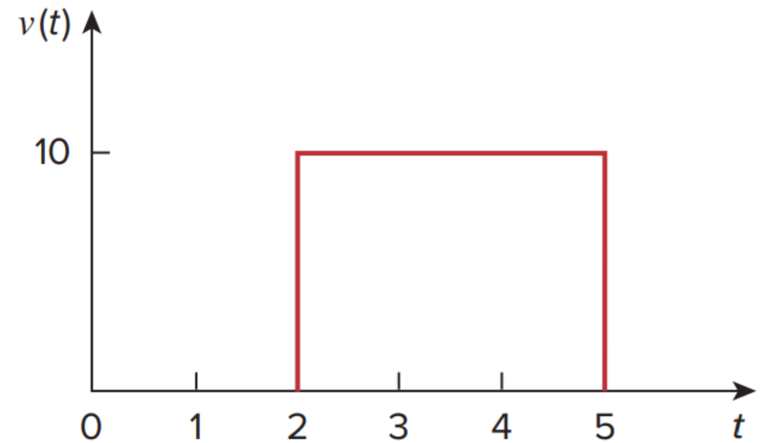
- 提前或者延迟的斜坡函数





例题-1

- 问题：求右边方形脉冲波形
  - 的代数表达式，
  - 和它的导数。



- 解答：
  - 这种方形脉冲又称为门函数，表示打开一段时间。
  - 它可以视为阶跃函数的组合：先升后降

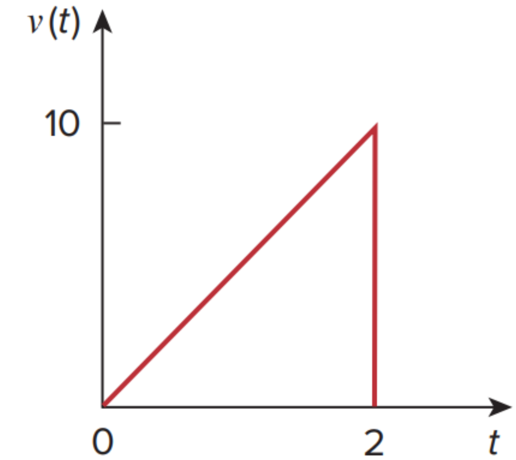
$$v(t) = 10[u(t-2) - u(t-5)]$$

  - 求解导数：

$$\frac{dv}{dt}(t) = 10[\delta(t-2) - \delta(t-5)]$$

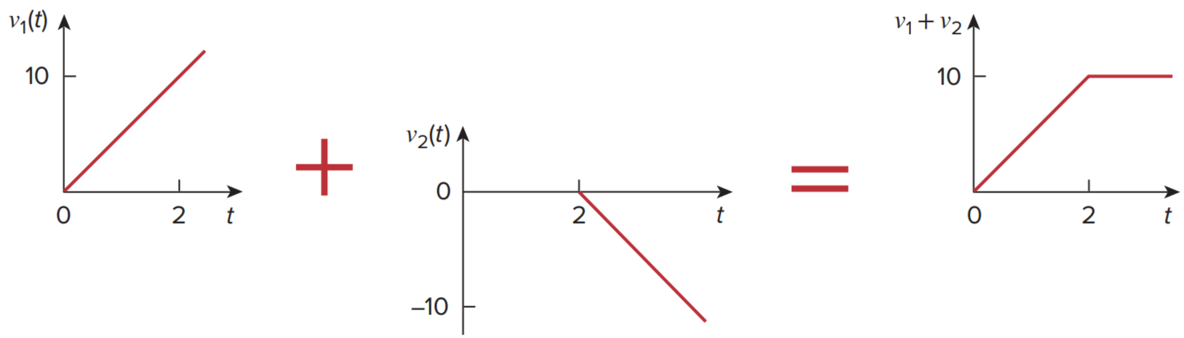
例题-2

- 问题：求右边锯齿波形
  - 的代数表达式。

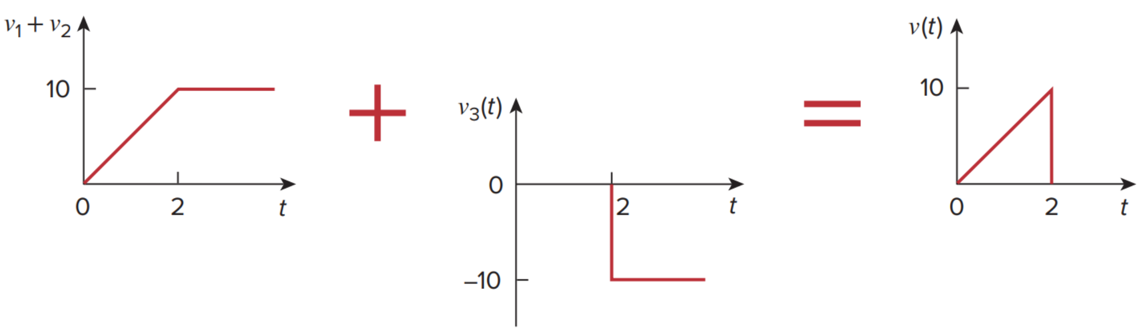


$$5[r(t) - r(t-2)] - 10u(t-2)$$

- 解答：组合方式



$$5[r(t) - r(t-2)]$$

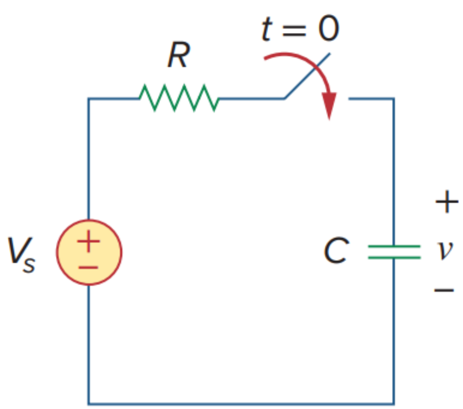


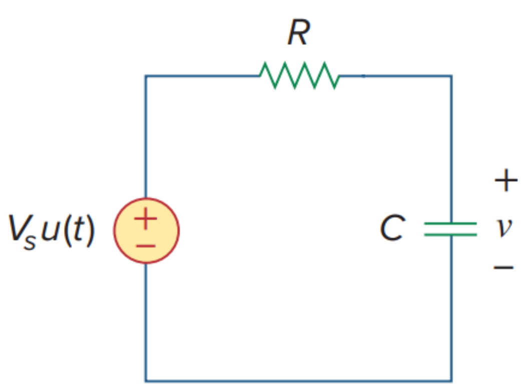
$$\cdots - 10u(t-2)$$

RC电路的阶跃响应

介绍

- 电路的阶跃响应是受到阶跃函数激励时的行为，激发它的可以是电压或电源。
- 阶跃响应的电路工作场景如左下图所示。
  - 使用奇异函数可以将它等效为右下图。

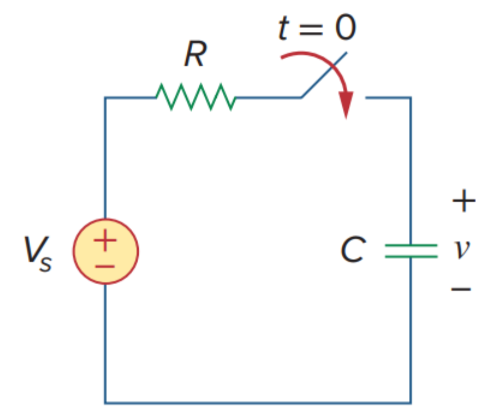




- 下面对这个工作场景进行分析。

响应分析

- 最开始电容电压 $v(0^-) = V_0$ 。



- 开关闭合的一瞬间，电压连续
  - 因此 $v(0^+) = V_0$ 。
- 然后就开始按照下面的公式进行推导
  - 电容充电，电阻限制电流：

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v - V_S u(t)}{R} = 0$$

  - 当时间大于0时，u=1，因此有：

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v - V_S}{R} = 0$$

响应分析

- 对常数的微分为0:

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v-V_S}{R}=0 \Rightarrow C\frac{d(v-V_S)}{dt}+\frac{v-V_S}{R}=0$$

- 移位整理

$$\frac{d(v-V_S)}{dt}=-\frac{v-V_S}{RC} \Rightarrow \frac{d(v-V_S)}{v-V_S}=-\frac{dt}{RC}$$

- 两边求积分

$$\ln(v-V_S)\Big|_{V_0}^{v(t)}=-\frac{t-0}{RC} \Rightarrow \ln\frac{v(t)-V_S}{V_0-V_S}=-\frac{t}{RC}$$

响应波形

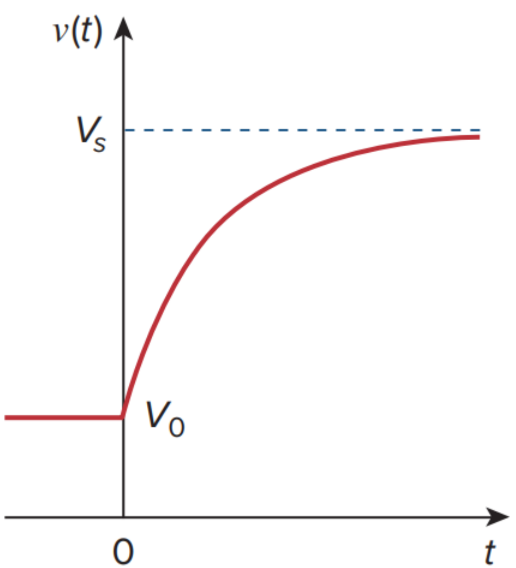
- 根据前面的推导可以得到

$$\ln\frac{v(t)-V_S}{V_0-V_S}=-\frac{t}{RC} \Rightarrow v(t)-V_S=(V_0-V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v(t)=V_S+(V_0-V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

- 前面计算了 t > 0 后的电压波形。
  - 再考虑 t < 0 的部分，
  - 就可以写出完整的波形表达式。

$$v(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ V_S+(V_0-V_S)e^{-\frac{t}{RC}} & t>0\end{cases}$$

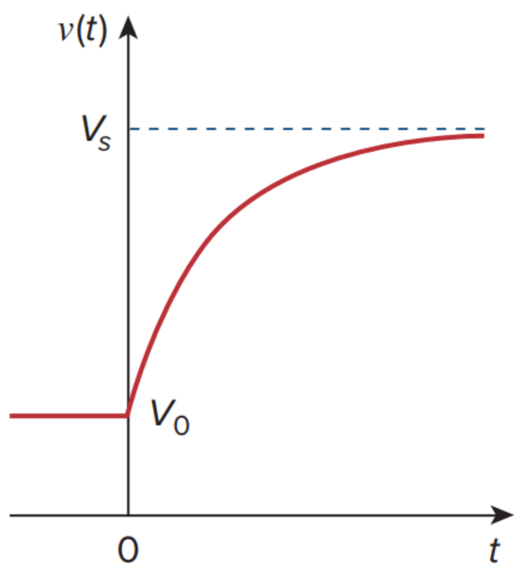


三要素表达式

- 在 t>0 时，电压表达式有几个特征参数
  - 符号 V_S 是电源电压，也是演变后的终态电压 v(∞);
  - 符号 V_0 是初始电压 v(0);
  - 符号RC是时间常数。

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

- 使用上述三个参数，可以直接写出电压表达式。



$$v(t) = \underbrace{v(\infty)}_{\text{稳态响应}} + \underbrace{[v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{暂态响应}}$$

稳态响应

施加外部激励很长一段时间后电路的响应。

暂态响应

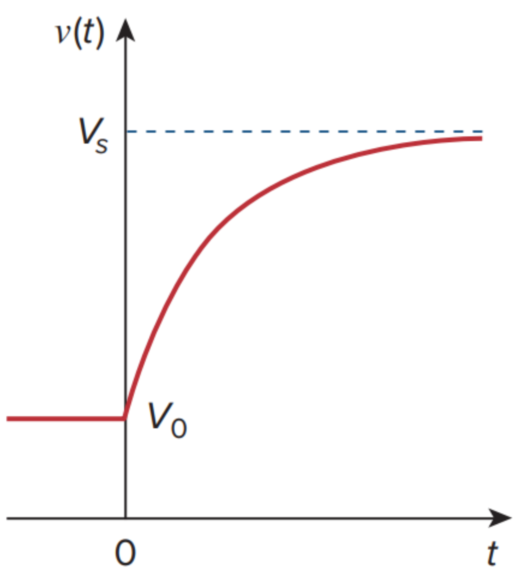
电路的暂时响应，随时间的推移会完全消失。

另一种分解方法

- 继续观察在 t>0 时电压的表达式
  - 有一部分与 V_S 有关
  - 另一部分与 V_0 有关
  - 这两个参数是完全独立的

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

- 因此可以把上面的表达式写为



$$v(t) = \underbrace{V_0 e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{V_S\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}_{\text{强迫响应}}$$

自由响应

自有能量的逐渐损耗，电压指数衰减。

强迫响应

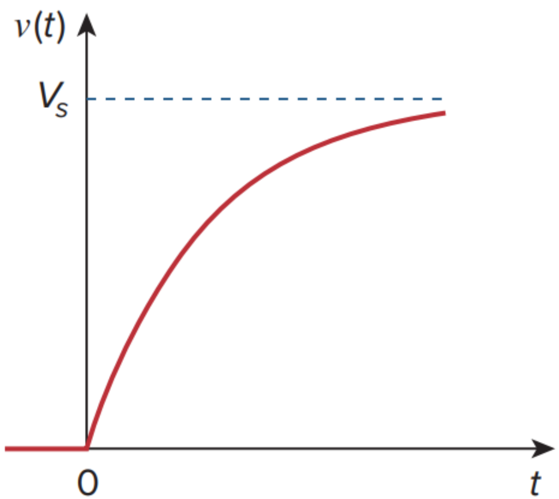
外部激励迫使电路响应，电压朝外部电压过渡。

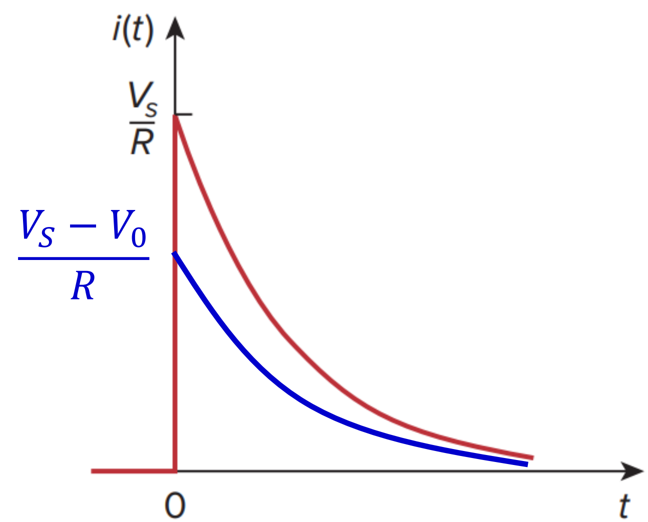
电流的波形

- 先考虑 $V_0 = 0$ 的情况，

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_S - V_S e^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{V_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}$$



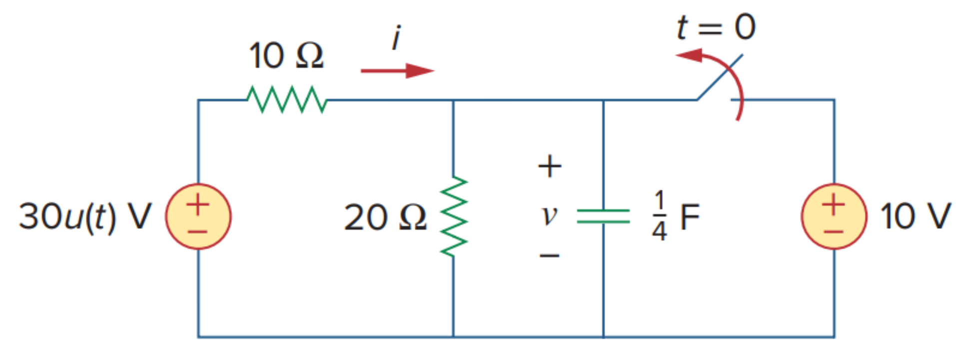


- 当 $V_0 \neq 0$ 时，
  - 还要考虑自由响应带来的电流。

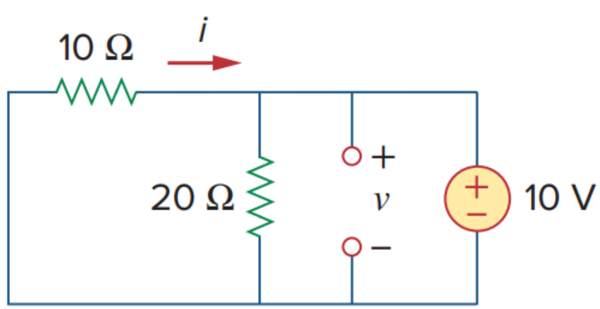
$$i(t) = \frac{V_S - V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

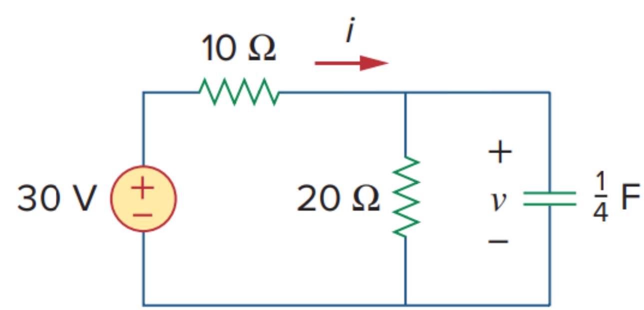
例题

- 问题：下图的电路种，开关本来处于关闭状态且电路已经达到稳态。当 $t = 0$ 时，开关断开。求所有时刻的 i 和 v。



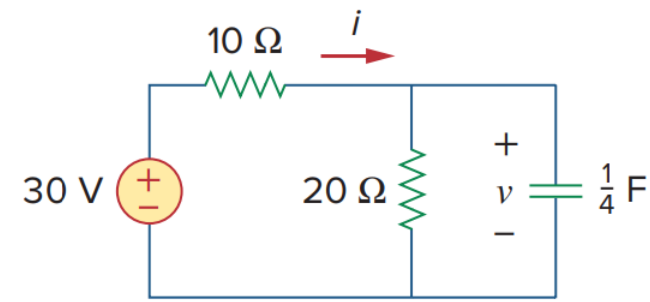
- 解答：
  - 当 $t < 0$ 时，右边 10 V 电源给电容充电，得 $V(0) = 10$ V。
  - 当 $t > 0$ 时，右边 10 V 电源断开，左边 30 V 电源接入。
  - 当 $t = \infty$ 时，电路稳定，电容电压应为 $V(\infty) = 20$ V。

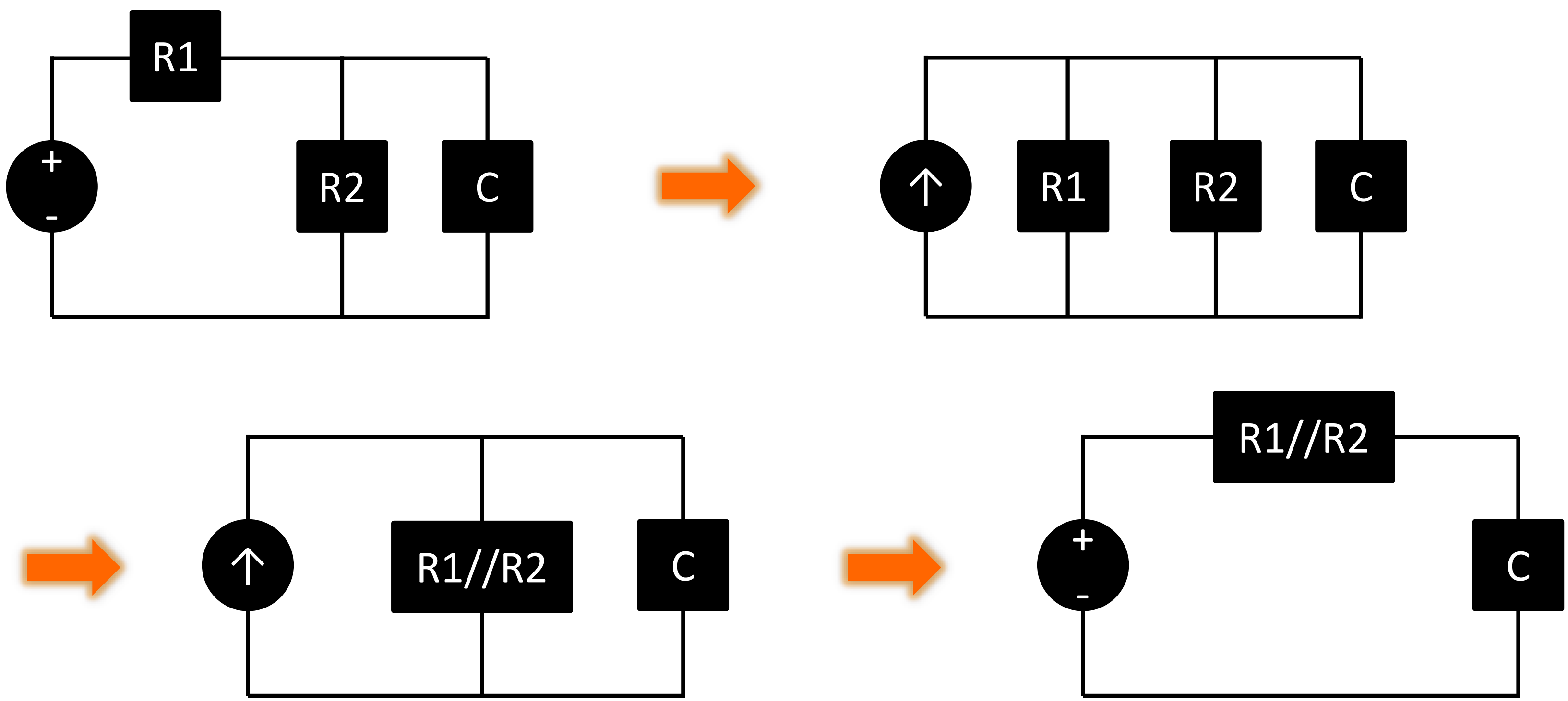




例题

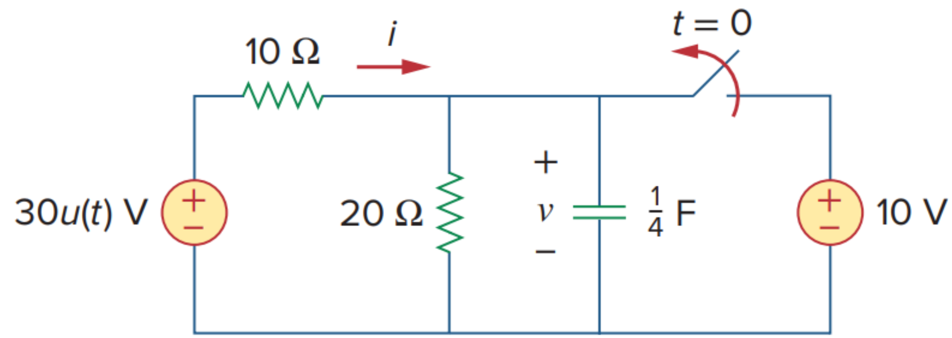
- 插曲：右边这个电路
  - 可以通过诺顿和戴维南定理
  - 进行等效替换
  - 由此可得时间常数





例题

- 问题：下图的电路种，开关本来处于关闭状态且电路已经达到稳态。当 t = 0 时，开关断开。求所有时刻的 i 和 v。

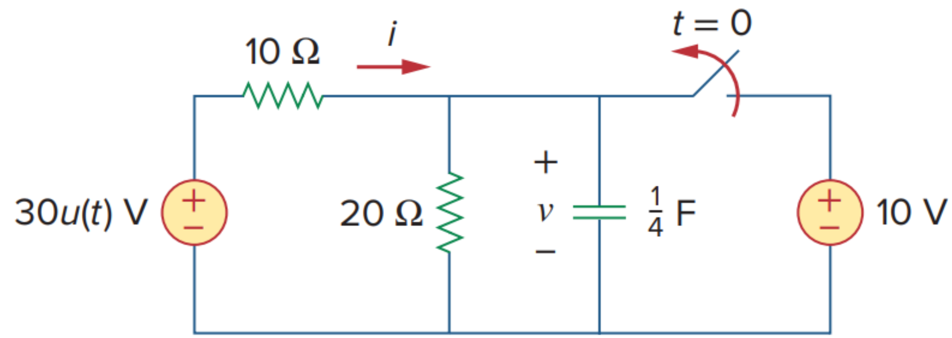


- 解答：
  - 当 t < 0 时，右边 10 V 电源给电容充电，得 V(0) = 10 V。
  - 当 t > 0 时，右边 10 V 电源断开，左边 30 V 电源接入。
  - 当 t = ∞ 时，电路稳定，电容电压应为 V(∞) = 20 V。
  - 时间常数为 20/3 × 1/4 = 5/3 (s) 。

$$v(t) = 20 + [10 - 20]e^{-\frac{t}{5/3}} \quad \Rightarrow \quad v(t) = 20 - 10e^{-0.6t}$$

例题

- 问题：下图的电路种，开关本来处于关闭状态且电路已经达到稳态。当 t = 0 时，开关断开。求所有时刻的 i 和 v 。

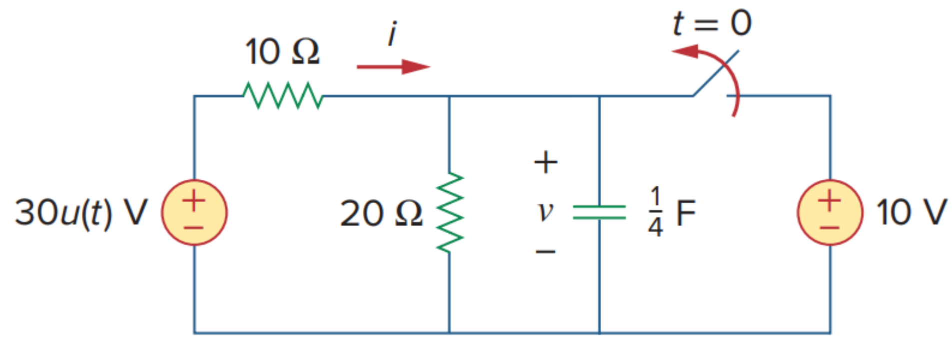


- 解答：
  - 当 t < 0 时，右边 10 V 电源给电容充电，得 V(0) = 10 V。
  - 当 t > 0 时，右边 10 V 电源断开，左边 30 V 电源接入。
  - 当 t = ∞ 时，电路稳定，电容电压应为 V(∞) = 20 V。
  - 时间常数为 20/3 × 1/4 = 5/3 (s) 。
  - 使用三要素法得到电压，然后求电流。

$$i = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = 1 - e^{-0.6t} + 1.5e^{-0.6t} = 1 + 0.5e^{-0.6t}$$

例题

- 问题：下图的电路种，开关本来处于关闭状态且电路已经达到稳态。当 t = 0 时，开关断开。求所有时刻的 i 和 v。



- 解答：
  - 综合 t < 0 和 t < 0 两个时间段得结果。

$$v(t) = \begin{cases} 10 & t < 0 \\ 20 - 10e^{-0.6t} & t > 0 \end{cases}$$

因为电容的存在，电压在 t = 0 处是连续的。

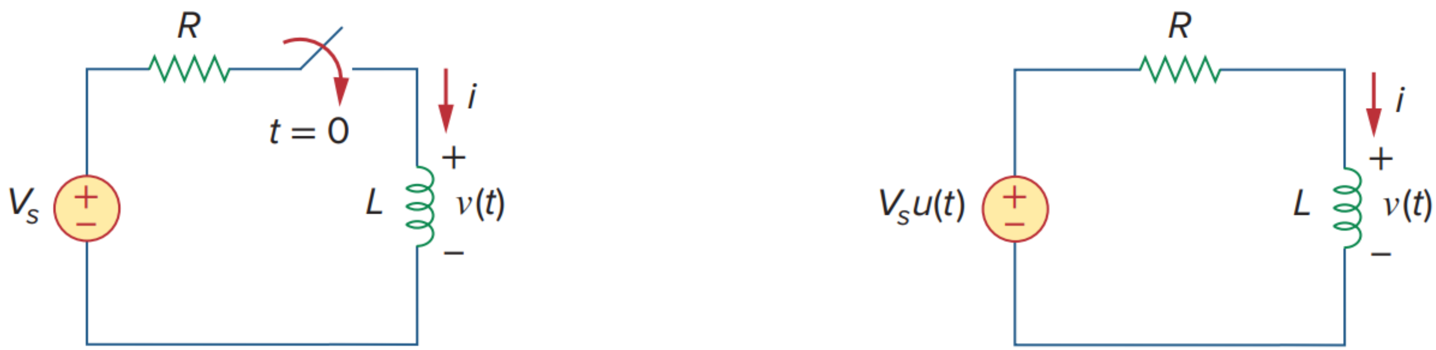
$$i(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 - 0.5e^{-0.6t} & t > 0 \end{cases}$$

因为电源的切换，电流在 t = 0 处是不连续的。

RL电路的阶跃响应

介绍

- 电阻电感的阶跃响应的工作场景如左下图所示。
  - 使用奇异函数可以将它等效为右下图。



- 工作原理分析
  - 当 t < 0 时，开关断开，电感的电流为0;
  - 在 t = 0 时，开关闭合，电源 V_S 试图往电感灌入电流;
    - 此时电流有增长的趋势，但仍然为0，因为电感电流要连续。
  - 当 t > 0 时，电感电流持续增加，电阻上电压也增加;
  - 当 t > 0 时，电感电流恒定，电感电压归0。

响应分析

- 电感电流满足方程

$$L\frac{di}{dt}+iR=V_S \;\Rightarrow\; L\frac{di}{dt}=-R\left(i-\frac{V_S}{R}\right) \;\Rightarrow$$

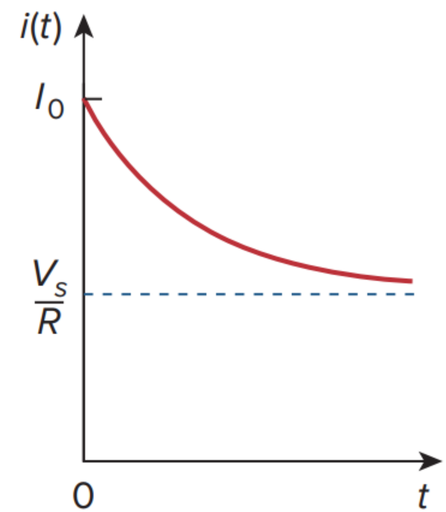
$$\frac{d\left(i-\frac{V_S}{R}\right)}{dt}=-\frac{R}{L}\left(i-\frac{V_S}{R}\right) \;\Rightarrow\; i-\frac{V_S}{R}=Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow\; i=\frac{V_S}{R}+Ae^{-\frac{t}{L/R}}$$

- 因此我们仍然可以用三要素法求解

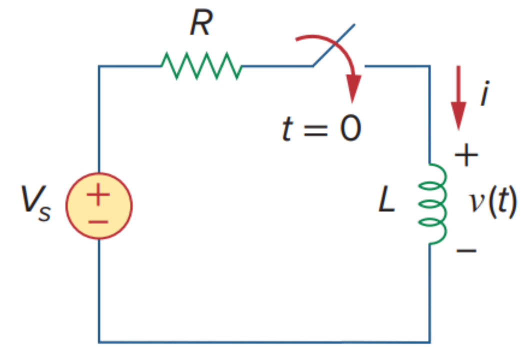
$$i=i(\infty)+[i(0)-i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i=\frac{V_S}{R}+\left(I_0-\frac{V_S}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$



电感上的电压

- 开关闭合的时候，电感的电流为 0，
  - 因此电阻上的电流为 0，压降为 0；
  - 此时电感上的电压就是 V_S。



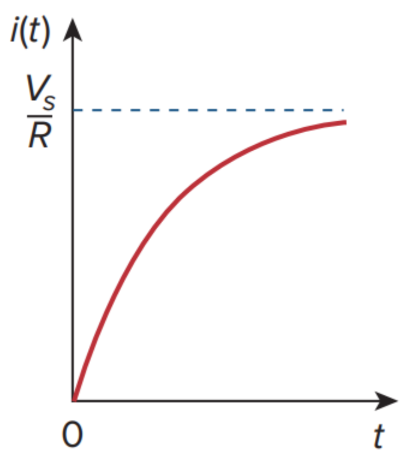
- 当电流越来越大时，
  - 电阻压降就越来越大，
  - 最后稳定在直流状态。

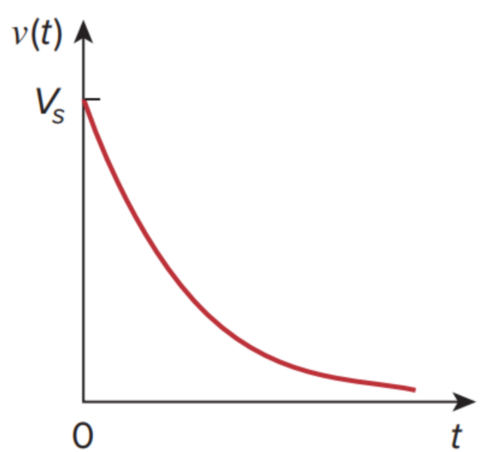
$$i = \frac{V_S}{R} + \left(0 - \frac{V_S}{R}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v = V_S - iR$$

$$iR = V_S - V_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

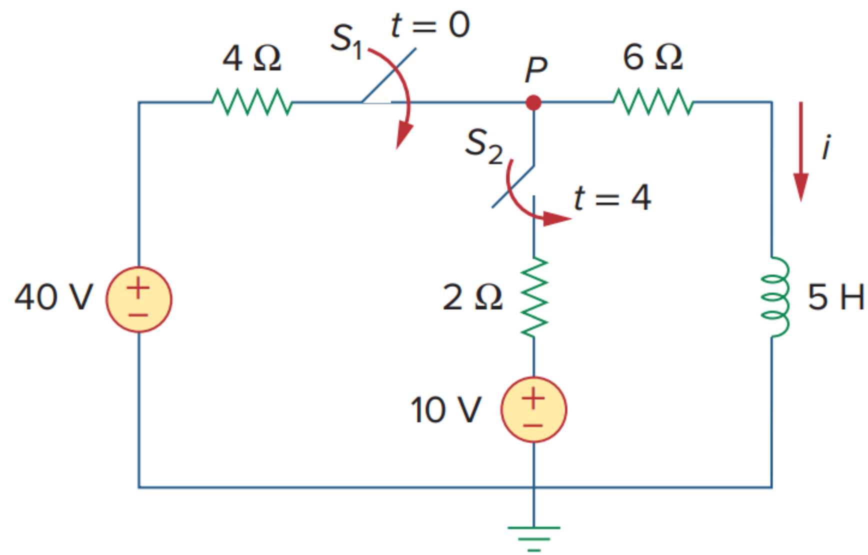
$$v = V_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$





例题

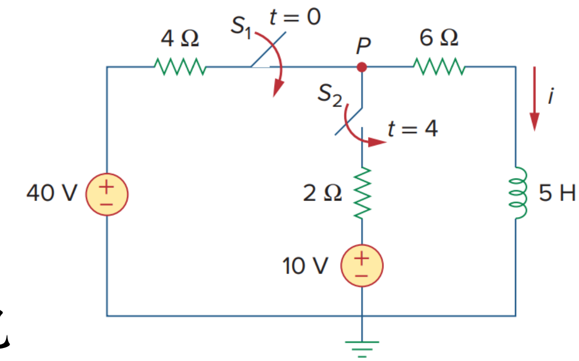
- 问题：参考右边的电路，
  - 当时 t = 0 时，开关 1 闭合；
  - 过 4 s 之后，开关 2 闭合；
  - 求 t > 0 时电流表达式 i(t)；
  - 求t = 2s 和 5s 时电流的值。



- 解答：
  - 时间区（-∞ , 0）：电流 i 为 0；
  - 时间区（0 , 4）：电源 40 V 对电感送电；
    - 通过 10 Ω 电阻，持续 4 s，电流会达到一定的值。
  - 时间区（4 , +∞）：电源 10 V 和 40 V 同时对电感送电。
    - 通过 4 Ω // 2 Ω + 6 Ω 等效电阻，一直到稳定。

例题

- 解答：
  - 时间区（-∞ , 0）： 电流 i 为 0;



  - 时间区（0 , 4）： 电源 40 V 对电感送电
    - 通过 10 Ω 电阻，持续 4 s，电流会达到一定的值。

$$i(t) = 4 + (0 - 4)e^{-\frac{t}{0.5}}$$

$$i(4) = 4 + (0 - 4)e^{-\frac{4}{0.5}} = 4 - 4e^{-8} = 3.998$$

  - 时间区（4 , +∞）： 电源 10 V 和 40 V 同时对电感送电。
    - 通过 4 Ω // 2 Ω + 6 Ω 等效电阻，一直到稳定。

$$i(4) = 2.727 + (3.998 - 2.727)e^{-\frac{t-4}{0.6818}}$$

$$i(4) = 2.727 + 1.271e^{-\frac{t-4}{0.6818}}$$

作业

- 画出本章思维导图
- 7.44
- 7.48
- 7.49
- 7.53