第四章 Vector Spaces

§4.1 Vector Spaces and Subspaces

向量空间和子空间

2021 年 11 月 23 日，中山大学南校区

向量空间

向量空间的定义

定义

- 一个**向量空间**是由一些被称为向量的对象构成的**非空集合**V，在这个集合上定义两个运算，称为加法和标量乘法（标量取实数），服从以下公理（或法则），这些公理必须对V中所有**向量$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$**以及所有**标量$c$和$d$**均成立。

1.$\mathbf{u}, \mathbf{v}$之和表示为$\mathbf{u}+\mathbf{v}$，仍在V中

2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

$\vdots$

向量空间的定义

4. V中存在一个零向量$\mathbf{0}$，使得$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$

5.对V中每个向量$\mathbf{u}$，存在V中向量$-\mathbf{u}$，使得$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

6.$\mathbf{u}$与标量c的标量乘法记为$c\mathbf{u}$，仍在V中

7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$

8. $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$

9.$c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$

10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

$\Downarrow$

对V中每个向量$\mathbf{u}$和任意标量c，有

$$0\mathbf{u}=\mathbf{0} \qquad c\mathbf{0}=\mathbf{0} \qquad -\mathbf{u}=(-1)\mathbf{u}$$

向量空间举例

例1： 空间$\mathbb{R}^n(n\geq 1)$为向量空间的典型例子。

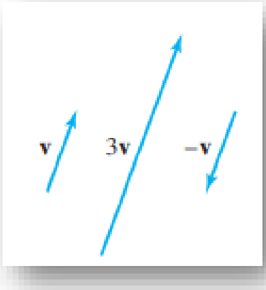


图1 空间$\mathbb{R}^3$

例2： 对 $(n\geq 0)$，次数最高为n的多项式集合$\mathbb{P}_n$由形如下列的多项式组成。

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

向量空间举例

例2：

解：

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$
$$q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n$$

- 由公理1：

$$(p+q)(t) = p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) t + \cdots + (a_n + b_n) t^n$$

- 由公理4：

$$\mathbf{0} = 0 + 0t + \cdots + 0t^n$$

$$(\mathrm{p} + \mathbf{0})(t) = \mathrm{p}(t) + \mathbf{0} = (a_0 + 0) + (a_1 + 0) t + \cdots + (a_n + 0) t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n = \mathrm{p}(t)$$

- 由公理6：

$$(c\mathrm{p})(t) = c\mathrm{p}(t) = ca_0 + (ca_1) t + \cdots + (ca_n) t^n$$

$\cdots$

$\Downarrow$

$\mathbb{P}_n$是一个向量空间

子空间

子空间

定义

- 向量空间V的一个子空间是V的一个满足以下三个性质的子集H：

a. V中的零向量在H中。

b. H对向量加法封闭，即对H中任意向量**u**, **v**, **u**+**v**仍在H中。

c. H对标量乘法封闭，即对H中任意向量**u**和任意标量c，向量c**u**仍在H中。

子空间

例3： 向量空间V中仅由零向量组成的集合是V的一个子空间，称为零子空间，写成$\{\mathbf{0}\}$。

例4： 向量空间$\mathbb{R}^2$不是$\mathbb{R}^3$的子空间，因为$\mathbb{R}^2$甚至不是$\mathbb{R}^3$的子集($\mathbb{R}^3$中的向量有3个分量，而$\mathbb{R}^2$中的向量仅有两个分量)，集合

$$H=\left\{\begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}: s, t\text{是实数}\right\}$$

是$\mathbb{R}^3$的一个子集，尽管从逻辑上讲它与$\mathbb{R}^2$不同，但看起来很像$\mathbb{R}^2$，如图2，证明H是$\mathbb{R}^3$的一个子空间。

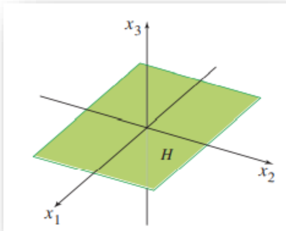


图2 作为$\mathbb{R}^3$的子空间平面

由一个集合生成的子空间

例5： 给定向量空间V中向量$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$，令$H=\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$，证明$H$是$V$的一个子空间。

证明：

- 由 $\mathbf{0}=0\mathbf{v}_1+0\mathbf{v}_2 \Rightarrow$ 零向量在H中
- 为证H对加法封闭，任取H中两向量即

$\boldsymbol{u}=s_1\mathbf{v}_1+s_2\mathbf{v}_2, \boldsymbol{w}=t_1\mathbf{v}_1+t_2\mathbf{v}_2,$

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}=(s_1+t_1)\mathbf{v}_1+(s_2+t_2)\mathbf{v}_2$

$\Rightarrow \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$在$H$中

- 为证H对标量乘法封闭，

由$c\boldsymbol{u}=c(s_1\mathbf{v}_1+s_2\mathbf{v}_2)=cs_1\mathbf{v}_1+c\,s_2\mathbf{v}_2$

$\Rightarrow c\boldsymbol{u}$在$H$中

定义

- 若$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$在向量空间中，则$H$=Span$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$是$V$的一个子空间.

a. V中的零向量在H中。

b. H对向量加法封闭，即对H中任意向量$\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$, $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$仍在$H$中。

c. H对标量乘法封闭，即对H中任意向量$\mathbf{v}_i$和任意标量c，向量$c\,\mathbf{v}_i$仍在H中。

由一个集合生成的子空间

举例：令H是所有形如$(a-3b, b-a, a, b)$的向量的集合，这里a, b是任意数，即$H=\{(a-3b, b-a, a, b): a, b \in \mathbb{R}\}$，证明$H$是$\mathbb{R}^4$的一个子空间.

证明：将H中向量写成列向量，则：

$$\begin{bmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\uparrow\ \mathbf{v}_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\uparrow\ \mathbf{v}_2}$$

故H=Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$，可知$H$是$\mathbb{R}^4$的一个子空间.

第四章 Vector Spaces

§4.2 Null Spaces, Column Spaces, and Linear Transformations

零空间，列空间和线性变换

衡益

2021 年 11 月 23 日，中山大学南校区

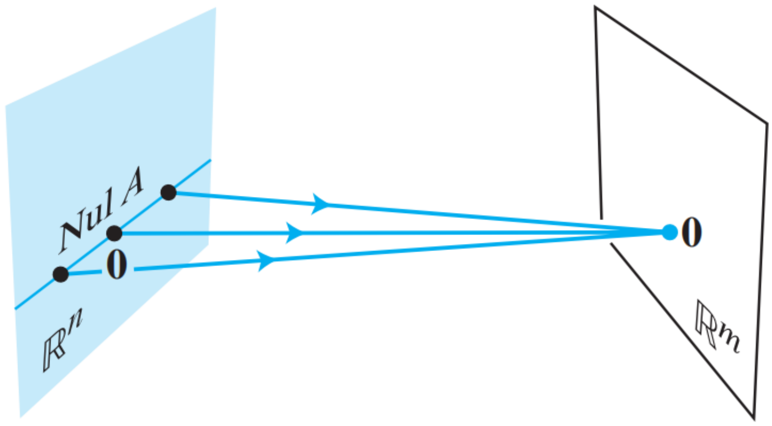
零空间

零空间的定义

定义 $m \times n$矩阵A的零空间写成NulA，是齐次方程$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的全体解的集合，用集合符号表示，即：

$\mathrm{Nul}A=\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Ax}=\mathbf{0}\}$

NulA的更进一步的描述为$\mathbb{R}^n$中在线性变换$\mathbf{x} \to \mathbf{Ax}$下映射到$\mathbb{R}^m$中的零向量的全体向量的集合，如下图.



零空间的定义

举例：设$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$，令$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$，

确定u是否属于A的零空间.

解：验证$\mathbf{Au}=\mathbf{0}$,

$$\mathbf{Au}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5-9+4 \\ -25+27-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以$\mathbf{u} \in \mathrm{Nul}A$

零空间的定义

定理 $m \times n$矩阵A的零空间是$\mathbb{R}^n$的一个子空间，等价地，m个方程、n个未知数的齐次线性方程组$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的全体解的集合是$\mathbb{R}^n$的一个子空间.

零空间的定义

证明：首先,$\mathbf{0}$当然在$\mathrm{Nul}A$中；

其次令$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$表示$\mathrm{Nul}A$中任意两个向量，则

$A\mathbf{u} = \mathbf{0}, A\mathbf{v} = \mathbf{0}$,

所以$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0}$,

所以$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{Nul}A$;

设c为任意实数，则

$A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

所以$c\mathbf{u} \in \mathrm{Nul}A$.

故$\mathrm{Nul}A$是$\mathbb{R}^n$的一个子空间.

举例：令H是$\mathbb{R}^4$中坐标a, b, c, d满足方程$a-2b+5c=d$且$c-a=b$的所有向量的集合，证明H是$\mathbb{R}^4$的一个子空间.

证明：H即下列齐次线性方程组的解集：

$$a-2b+5c-d=0$$

$$-a-b+c=0$$

故H是$\mathbb{R}^4$的一个子空间.

举例：求矩阵A的零空间的生成集，其中

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

零空间的定义

解：将增广矩阵[A 0]化为简化阶梯型矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 即} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{故} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= x_2\mathbf{u} + x_4\mathbf{v} + x_5\mathbf{w}$$

u, **v**, **w**的每一个线性组合都是Nul**A**中的一个元素，
从而{**u**, **v**, **w**}是Nul**A**的一个生成集.

矩阵的列空间

矩阵的列空间

定义 $m\times n$矩阵A的列空间写成ColA，是由A的所有列的线性组合组成的集合，若A=$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$，则ColA=Span$\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\}$

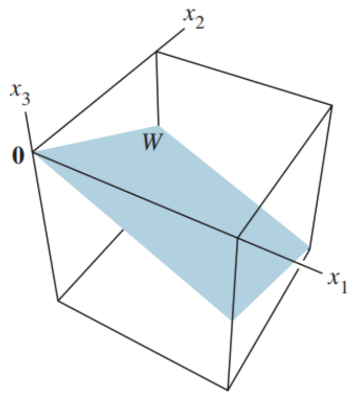
定理 $m\times n$矩阵A的列空间是$\mathbb{R}^m$的一个子空间

定理 $m\times n$矩阵A的列空间等于$\mathbb{R}^m$当且仅当$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$对$\mathbb{R}^m$中每个$\mathbf{b}$有一个解.

矩阵的列空间

举例：求矩阵A，使得W=ColA

$$W = \left\{\begin{bmatrix} 6a-b \\ a+b \\ -7a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$$



解：将W写成线性组合的集合

$$W=\left\{a\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\},$$

用生成集的向量作为A的列，A=$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$，$W$=ColA.

矩阵零空间、列空间小结

矩阵零空间、列空间小结

A is a m*n matrix

Nul **A**	Col **A**
1. Nul **A** is subspace of $\mathbb{R}^n$	1. Col **A** is a subspace of $\mathbb{R}^m$
2. Nul **A** is implicitly defined, that is you are given only a condition (**Ax**=**0**) that vectors in Nul **A** must satisfy	2. Col**A** is explicity defined; that is, you are told how to build vectors in Col **A**.
3. It take time to find vector in Nul **A**. Row operation on [**A 0**] are required	3. It is easy to find vectors in Col **A**, The columns of **A** are display. Others are formed from them
4. There is no obvious relation between Nul **A** and the entries in **A**	4.There is an obvious relation between Col **A** and the entries in **A**, since each columns of **A** is in Col **A**
5.**A** typical vector v in Nul **A** has the property that **Av = 0**	5.A typical vector **v** in Col **A** has the property that the equation **Ax**=**v** is consistent
6.Given a specific vector **v**, it is easy to tell if **v** is in Nul **A**, just compute **Av**	6. Given a specific vector **v**, it may take time to tell if **v** is in Col **A**. Row operation on [**A v**] is required.
7.Nul **A**={0} if and only if the equation **Ax=0** has only the trivial solution	7. Col **A** =$\mathbb{R}^m$ if and only if the equation Ax=b has a solution for every b in $\mathbb{R}^m$
8. Nul **A**={0} if and only if the linear transformation **x**|→**Ax** is one to one	8. Col **A** =$\mathbb{R}^m$ if and only if the linear transformation **x**|→**Ax** maps $\mathbb{R}^n$ onto $\mathbb{R}^m$

线性变换的核与值域

定义

由向量空间 V映射到向量空间 W内的线性变换 T是一个规则，它将 V中的每个向量**x**映射成 W中唯一向量 $T(\mathbf{x})$，且满足：

(i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$，对 V中所有**u**, **v**均成立.

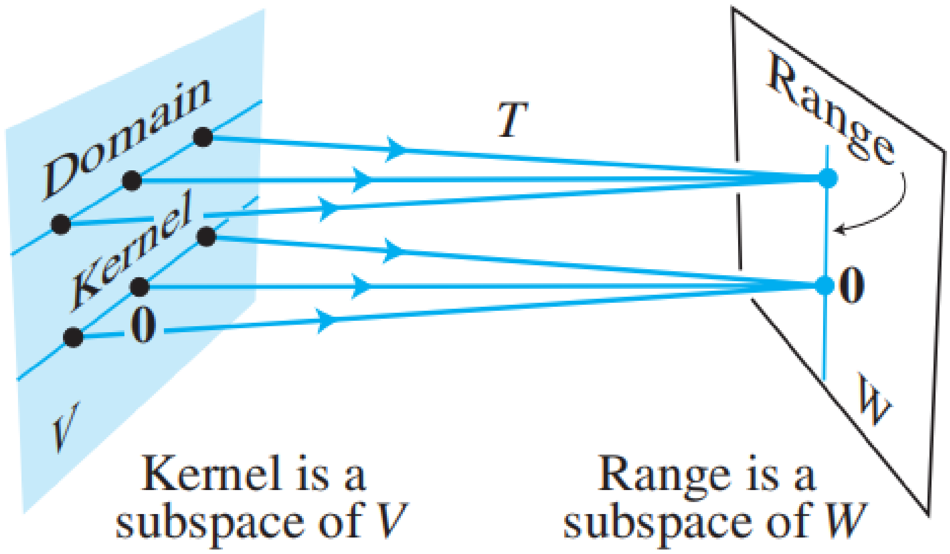
(ii) $T(c\mathbf{u})=cT(\mathbf{u})$，对 V中所有**u**和数 c均成立.

线性变换 T的核（或零空间）是 V中所有满足 $T(\mathbf{u})=\mathbf{0}$的向量**u**的集合；

T的值域是 W中所有具有形式 $T(\mathbf{x})$（任意$\mathbf{x} \in V$）的向量的集合.

对矩阵A，则 T的核与值域恰好是A的零空间和列空间.

线性变换的核与值域



线性变换的核与值域

连续函数定义：

设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果有$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数在点$x_0$处连续，且称$x_0$为函数的的连续点。

设函数在区间$(a,b]$内有定义，如果$f(x)$在$x=b$的左极限存在且等于$f(b)$，即

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$，那么就称函数在点$b$左连续。

设函数在区间$[a,b)$内有定义，如果$f(x)$在$x=a$处右极限存在且等于$f(a)$，即

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ ，那么就称函数$f(x)$在点a右连续。

一个函数在开区间(a,b)内每点连续，则为在(a,b)连续，若又在a点右连续， b点左连续，则在闭区间$[a,b]$连续，如果在整个定义域内连续，则称为连续函数。

连续可导函数定义：

函数可微且导数连续。

设函数$y=f(x)$在$U(x_0,\delta_0)$内有定义，若存在常数A使得：

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)\qquad(\Delta x\to 0),$$

则称$f(x)$在x_0处**可微**，并称$A\Delta x$为$f(x)$在x_0处的微分。

由定义可知，函数的微分有两个特点：

①它是自变量增量Δx的线性函数；

②它与函数的增量Δy之差是较Δx高阶的无穷小量$(\Delta x\to 0)$

线性变换的核与值域

举例（需要微积分的知识）：

令V是定义在区间$[a,b]$上的所有连续可导的实函数构成的向量空间，令W是$[a,b]$上的所有连续函数构成的向量空间，且令$D: V\to W$是将V中f变为其导数f'的变换，由微积分中的微分法则有：

$D(f+g)=D(f)+D(g)$, $D(cf)=cD(f)$

于是D是一个线性变换，D的核是$[a,b]$上的常函数的集合，D的值域是$[a,b]$上所有连续函数集合W.

第四章 Vector Spaces

§ 4.3 Linearly Independent Sets; Bases

线性独立集；基

衡益

2020 年 12 月 23 日，中山大学南校区

线性代数 (Linear Algebra)

线性无关集

线性无关集

定义

V中向量的一个指标集$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$是线性无关的，

若向量方程$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$只有平凡解，

即$c_1 = 0, \cdots, c_p = 0$.

集合$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$是线性相关的，

若方程$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$有非平凡解，

即存在某些权$c_1, \cdots, c_p$不全为0，此时称$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$

是$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p$之间的一个线性相关关系.

线性无关集

定理　与$\mathbb{R}^n$中一样，一个仅含一个向量$\mathbf{v}$的集是线性无关的，当且仅当$\mathbf{v} \neq 0$;

一个仅含两个向量的集合是线性相关的当且仅当其中一个向量是另一个的倍数.

举例：

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}\right\}$$ 是线性相关集合

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 6\\9 & 11\end{bmatrix}\right\}$$ 是线性无关集合

线性无关集

定理 不少于两个有编号的向量的集合$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$，如果有$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$，则$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$是线性相关的，当且仅当某$\mathbf{v}_j (j > 1)$是其前面向量$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{j-1}$的线性组合.

EXAMPLE: Let $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ be a set of vectors in $\mathbf{P}_2$ where $\mathbf{p}_1(t) = t$, $\mathbf{p}_2(t) = t^2$, and $\mathbf{p}_3(t) = 4t + 2t^2$. Is this a linearly dependent set?

Solution: Since $\mathbf{p}_3 =$ __**4**__ $\mathbf{p}_1 +$ __**2**__ $\mathbf{p}_2$, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ is a linearly ____**dependent**____ set.

线性无关集

举例：

令$p_1(t) = 1, p_2(t) = t, p_3(t) = 4 - t$.

由于$\mathbf{p}_3 = 4\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$，故$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$线性相关.

举例：

$\{\sin t, \cos t\}$在$C[0,1]$线性无关

因为不存在数c使得$\cos t = c * \sin t$

基

基

定义

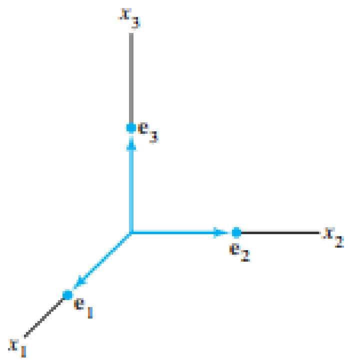
令H是向量空间V的一个子空间，V中向量的指标集 $B=\{b_1, \cdots, b_p\}$称为H的一个基，如果：

(i) B是一线性无关集

(ii) 由B生成的子空间与H相同，即$H=\text{Span}\{b_1, \cdots, b_p\}$

EXAMPLE: Let $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Show that $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ is a basis for $\mathbb{R}^3$. The set $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ is called a **standard basis** for $\mathbb{R}^3$.

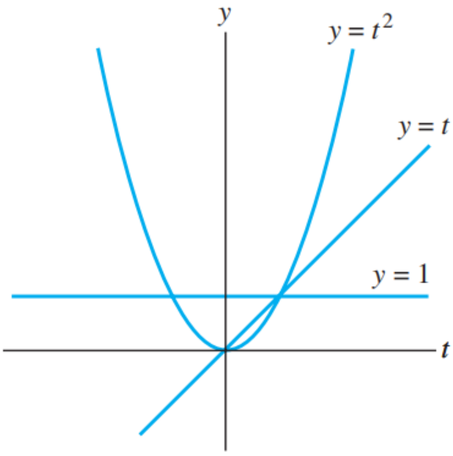


基

EXAMPLE: Let $S = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Show that S is a basis for $\mathbf{P}_n$.

Solution: Any polynomial in $\mathbf{P}_n$ is in span of S. To show that S is linearly independent, assume $c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot t + \cdots + c_n \cdot t^n = \mathbf{0}$

Then $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Hence S is a basis for $\mathbf{P}_n$.



生成集定理

生成集定理

一个基可以通过由一个生成集去掉不需要的向量构造出来.

举例：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad H = \text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.$$

Note that $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$, and show that $\text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Then find a basis for the subspace H.

生成集定理

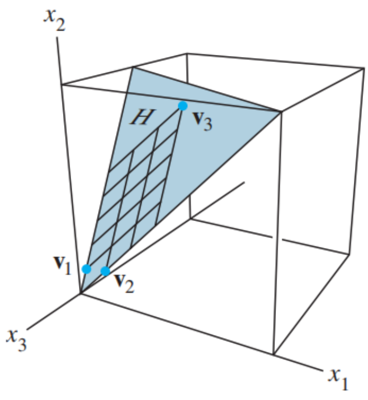
SOLUTION Every vector in $\text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ belongs to H because

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$$

Now let $\mathbf{x}$ be any vector in H—say, $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$. Since $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$, we may substitute

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3(5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) \\ &= (c_1 + 5c_3)\mathbf{v}_1 + (c_2 + 3c_3)\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Thus $\mathbf{x}$ is in $\text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, so every vector in H already belongs to $\text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. We conclude that H and $\text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ are actually the same set of vectors. It follows that $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ is a basis of H since $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ is obviously linearly independent. ■



生成集定理

生成集定理

令$S=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_p\}$是$V$中的向量集，$H=\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_p\}$.

a.若S中某一个向量，如$\mathbf{v}_k$是S中其余向量的线性组合，则S中去掉$\mathbf{v}_k$后形成的集合仍可以生成H.

b.若$H\neq\{\mathbf{0}\}$，则S的某一子集是H中的一个基.

零空间和列空间的基

1. 零空间的基:

举例:

求NulA的基，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 12 & 13 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

解：行化简 $\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 13 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -15 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -2x_2 - 13x_4 - 33x_5$

$x_3 = 6x_4 + 15x_5$

x_2, x_4和x_5是自由变量

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - 13x_4 - 33x_5 \\ x_2 \\ 6x_4 + 15x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{u}}}{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_4 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{v}}}{\begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_5 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{w}}}{\begin{bmatrix} -33 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\{u, v, w\}$ 是NulA的基

2. 列空间的基：

- Example： Find a basis for Col B, where

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Solution： By the Spanning Set Theorem, we may discard $\mathbf{b}_2$ and $\mathbf{b}_4$, and $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5\}$ will still span Col **B**. Let

$$S = \{b_1, b_3, b_5\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

S is a basis for Col **B**.

零空间和列空间的基

2. 列空间的基：

EXAMPLE: Find a basis for $\mathrm{Col}\,A$, where

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 22 \\ 4 & 8 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Solution: Row reduce:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \end{bmatrix}$$

2. 列空间的基：

Note that

$$\mathbf{b}_2 = \underline{\ 2\ }\,\mathbf{b}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{a}_2 = \underline{\ 2\ }\,\mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{b}_4 = 4\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_3 \quad \text{and} \quad \mathbf{a}_4 = 4\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_3$$

$\mathbf{b}_1$ and $\mathbf{b}_3$ are not multiples of each other

$\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_3$ are not multiples of each other

> Elementary row operations on a matrix do not affect the linear dependence relations among the columns of the matrix.

Therefore Span$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ =Span$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ and $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ is a basis for Col A .

零空间和列空间的基

> 定理
>
> 矩阵A的主元列构成ColA的一个基.

证明：令B是A的简化阶梯型，由于B的主元列中的任一个向量都不是前面主元列的线性组合，故B中的主元列是线性无关的. 又由A行等价于B, A中列的任何线性相关关系对应B中列的线性相关关系，所以A中的主元列也是线性无关的.同理，A中每个非主元列是A中主元列的线性组合，由生成集定理，A中非主元列可以从ColA的生成集中去掉，剩下的A的主元列是ColA的一个基.

零空间和列空间的基

EXAMPLE: Let $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Find a basis for Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Solution: Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ and note that

Col A = Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

By row reduction, $A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Therefore a basis

for Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is $\left\{ \underset{\underline{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}}, \underset{\underline{v}_3}{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}} \right\}$.

零空间和列空间的基

Review:

1. To find a basis for Nul A, use elementary row operations to transform $\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}$ to an equivalent reduced row echelon form $\begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}$. Use the reduced row echelon form to find parametric form of the general solution to $Ax = 0$. The vectors found in this parametric form of the general solution form a basis for Nul A.

2. A basis for Col A is formed from the pivot columns of A.
Warning: Use the pivot columns of A, not the pivot columns of B, where B is in reduced echelon form and is row equivalent to A.

回家作业

4.1：P211：2 ； P212：8，11，16

4.2：P222：9，15 ； P223：30，32

Q & A