

第7章 采样

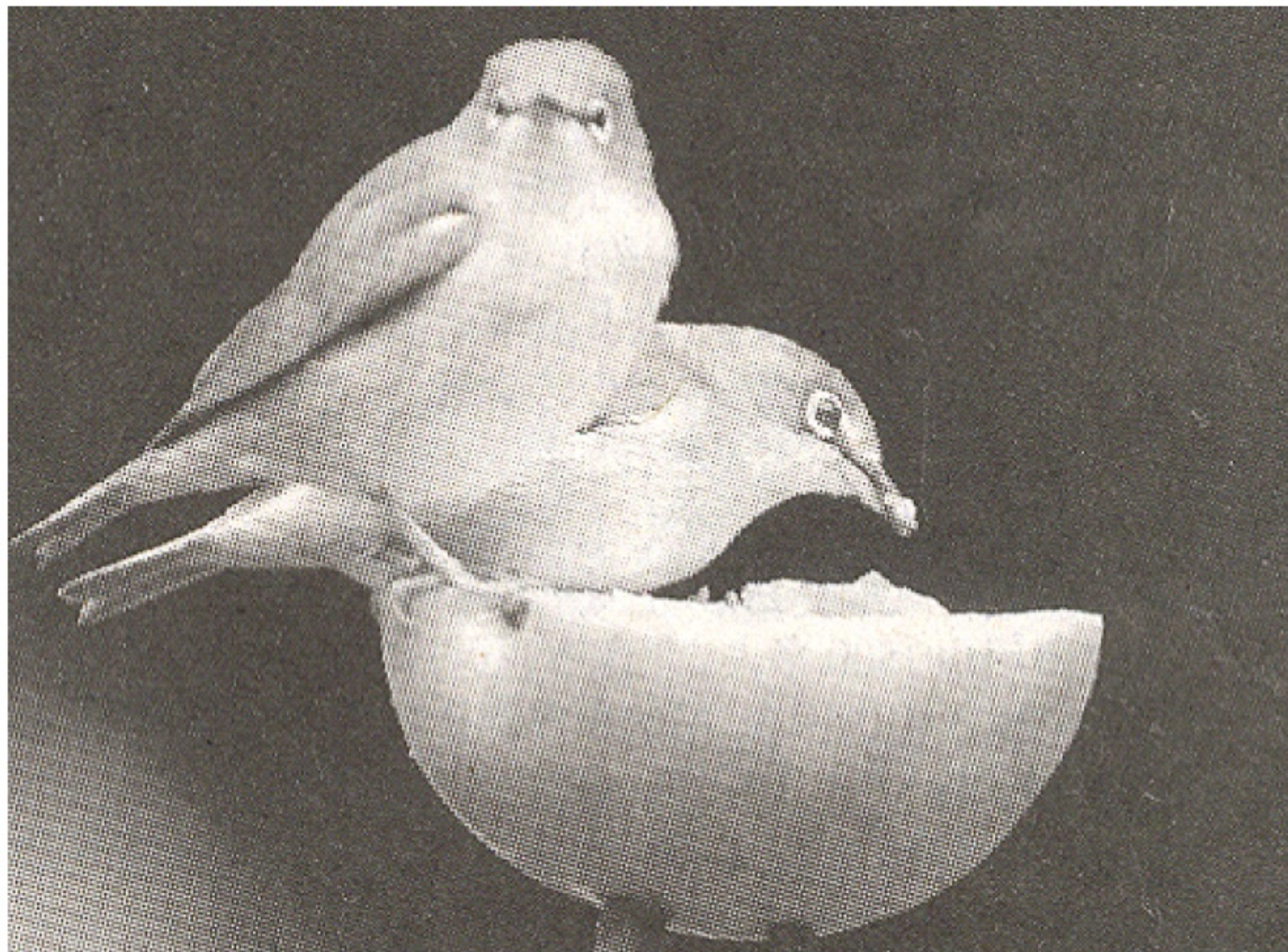
本章主要内容

1. 如何用连续时间信号的离散时间样本来表示连续时间信号——**采样定理**。
2. 如何从采样所得到的样本重建连续时间信号。
3. 欠采样导致的后果——**频谱混叠**。
4. 连续时间信号的离散时间处理。
5. 离散时间信号的采样、抽取及内插。

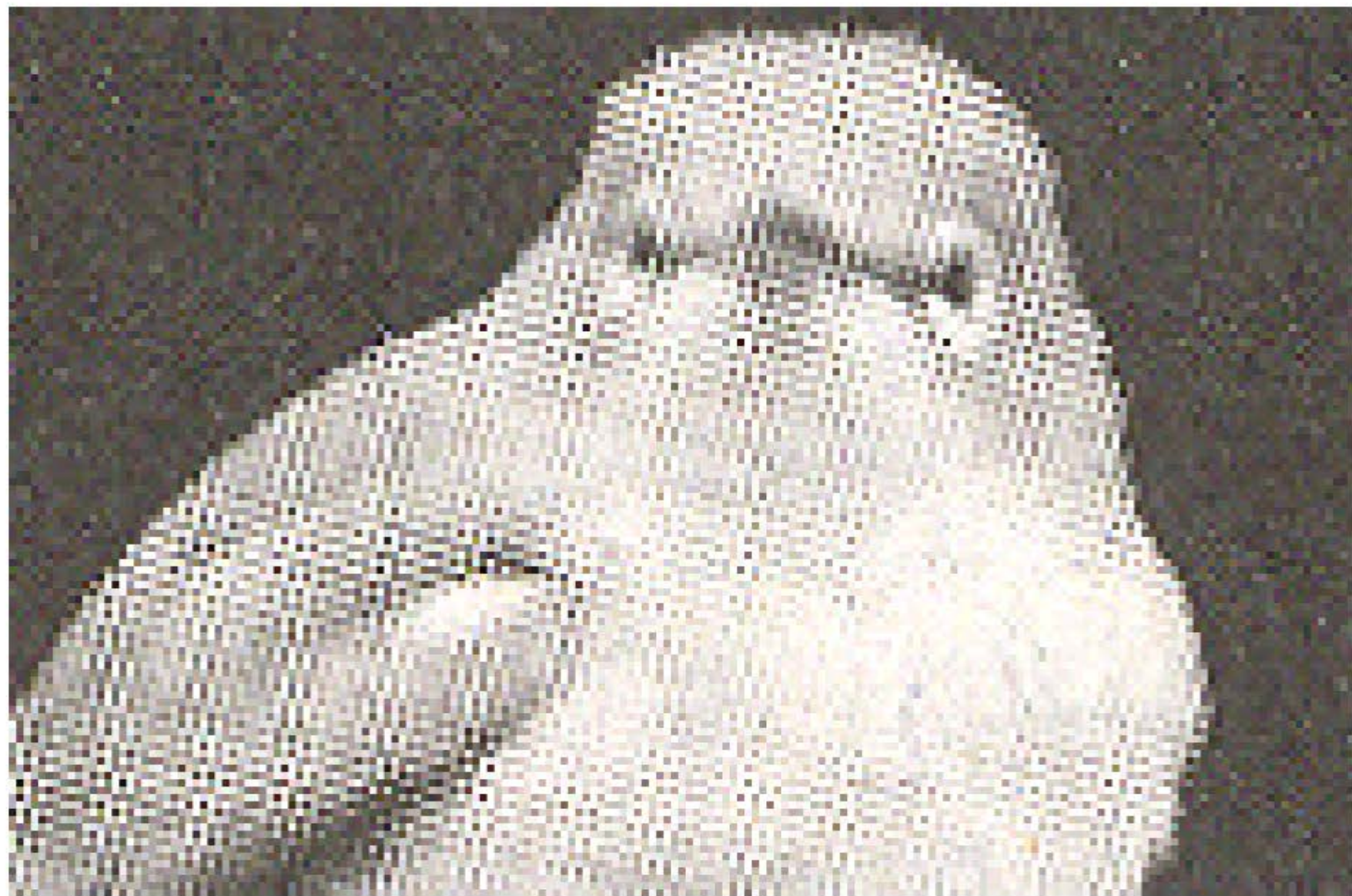
7.0 引言:(Introduction)

在日常生活中，常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如传真的照片、电视屏幕的画面、电影胶片等等，这些都表明连续时间信号与离散时间信号之间存在着密切的联系。在一定条件下，可以用离散时间信号代替连续时间信号而并不丢失原来信号所包含的信息。

例1. 一幅新闻照片



局部放大后的图片



例2. 另一幅新闻照片



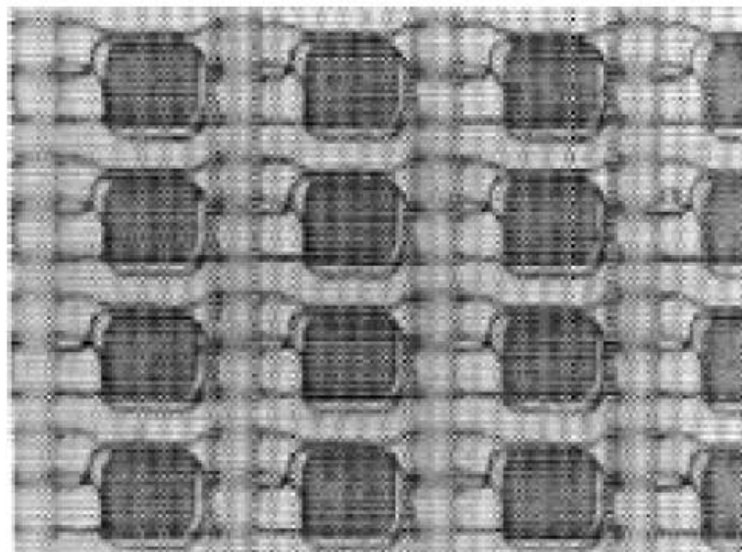
局部放大后的图片



例3. CCD芯片的光显微图

CCD芯片用VLSI技术制造。被分为许多微小区，每个小区的尺寸为 $13*11\ \mu\text{m}$ （对应一个象素），在 $10*9.3\text{mm}$ 面积上有 $500*582$ 个象素。

当光成象在CCD芯片上时，就在这些空间离散的象素点上被采样，而生成离散时间图象信号。



研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系

主要包括：

1. 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息。
2. 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号。
3. 如何对一个连续时间信号进行离散时间处理。
4. 对离散时间信号如何进行采样、抽取及内插。

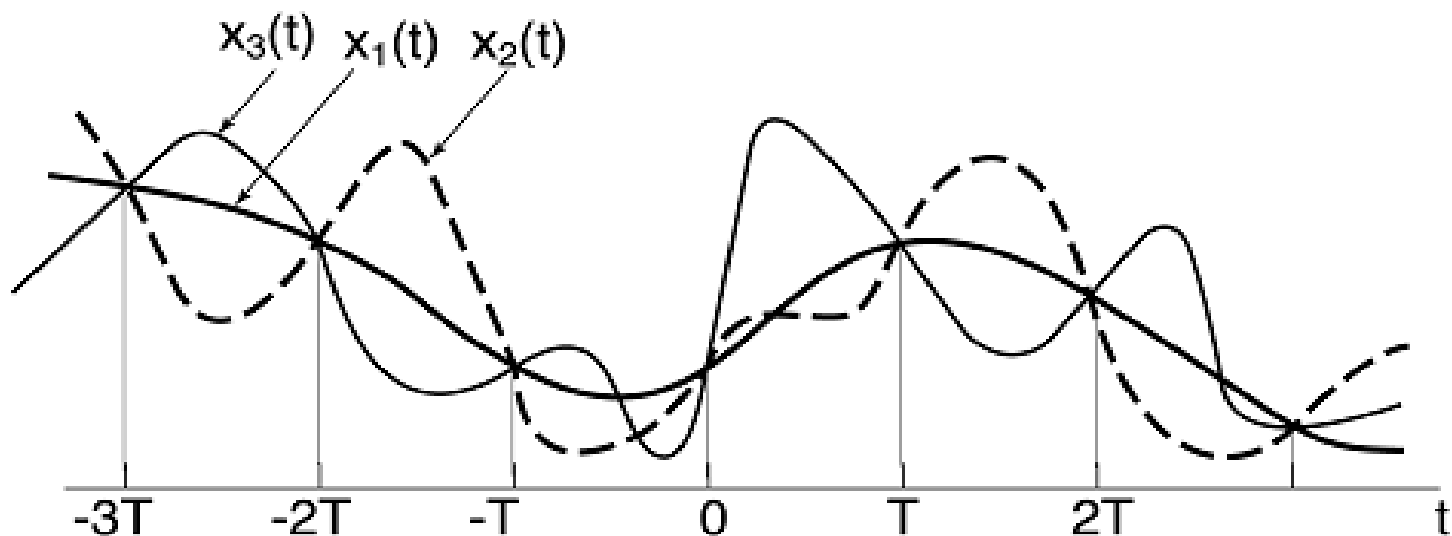
7.1 用样本表示连续时间信号: 采样定理

一. 采样

在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为**采样**。

是否任何信号都可以由它的离散时间样本来表示？

对一维连续时间信号采样的例子：



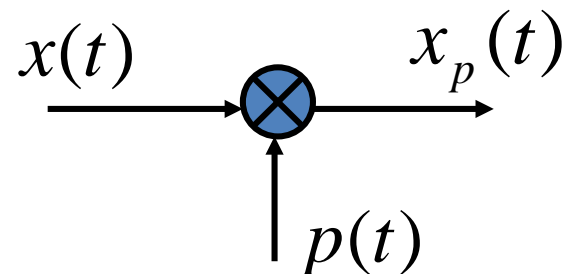
在没有任何条件限制的情况下，从连续时间信号采样所得到的样本序列不能唯一地代表原来的连续时间信号。

此外，对同一个连续时间信号，当采样间隔不同时也会得到不同的样本序列。

二.采样的数学模型：

在时域：

$$x_p(t) = x(t)p(t)$$



在频域：

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

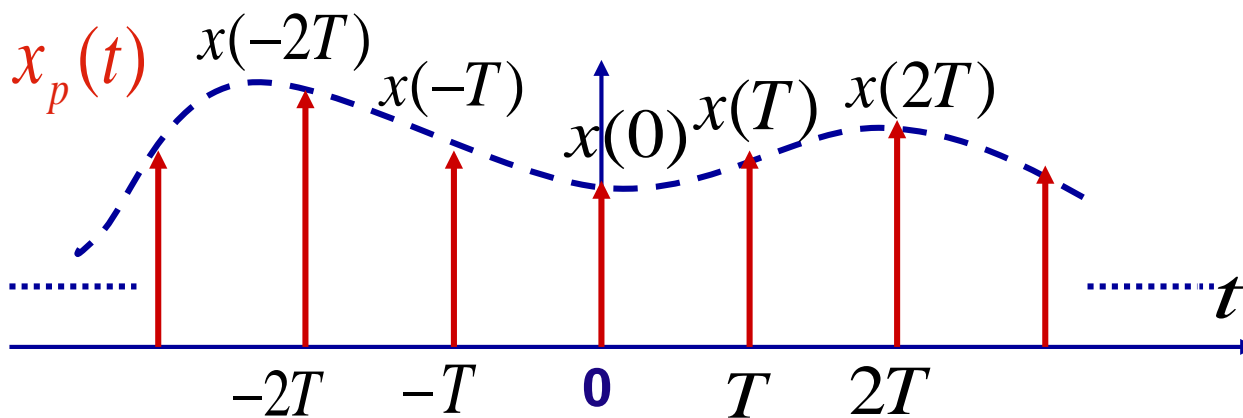
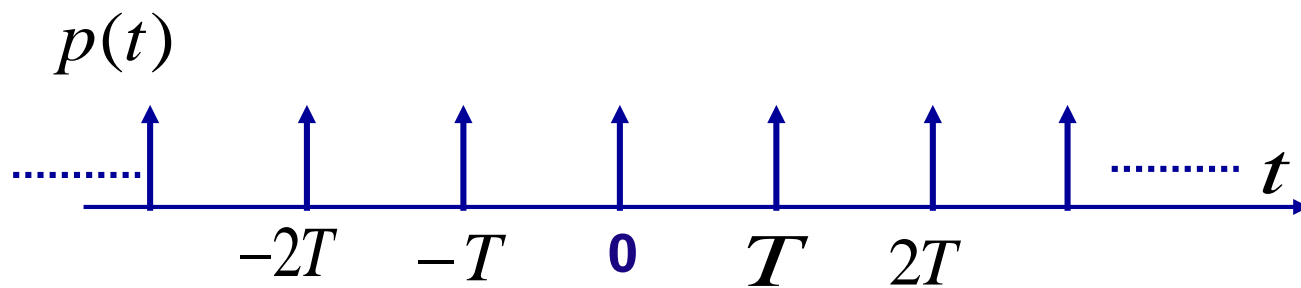
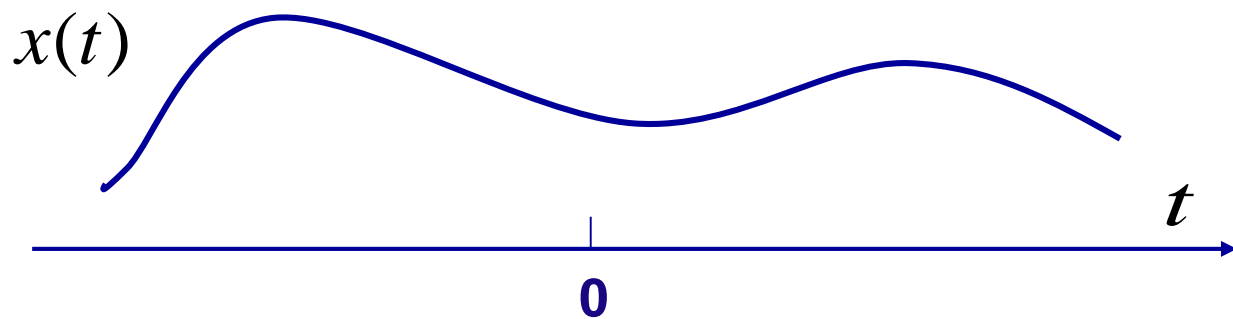
三.冲激串采样(理想采样):

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = x(t) p(t)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

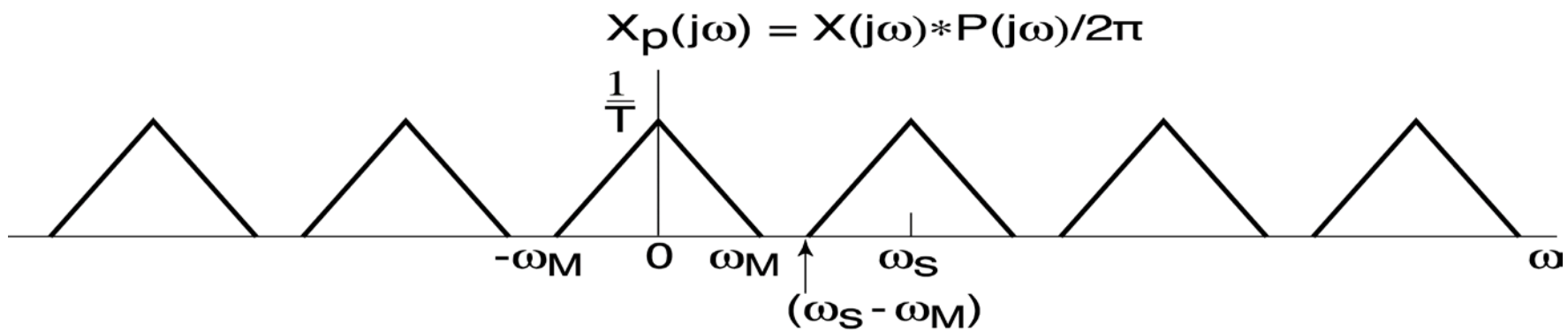
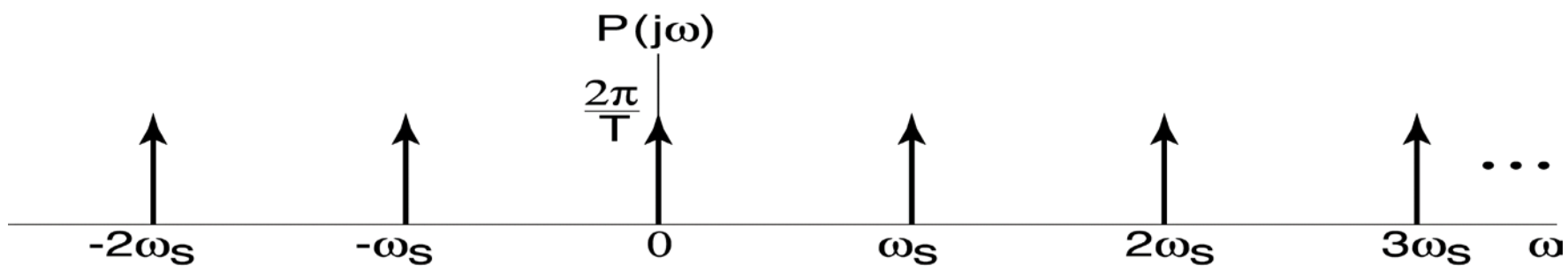
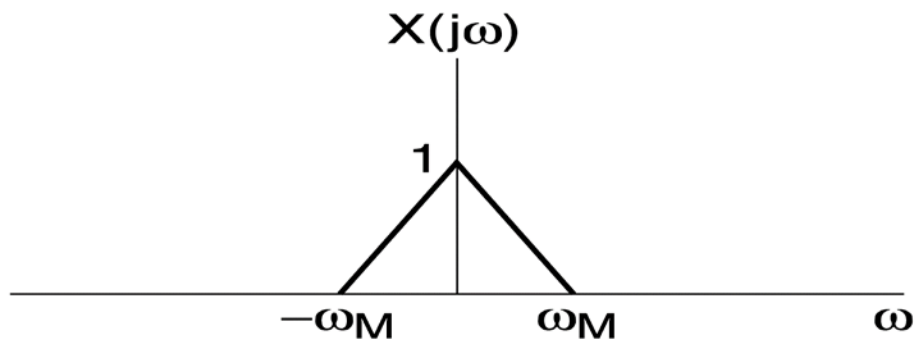
T 为采样间隔



在频域由于 $p(t) \leftrightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}k)$

所以
$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

可见，在时域对连续时间信号进行理想采样，就相当于在频域将连续时间信号的频谱以 ω_s 为周期进行延拓。

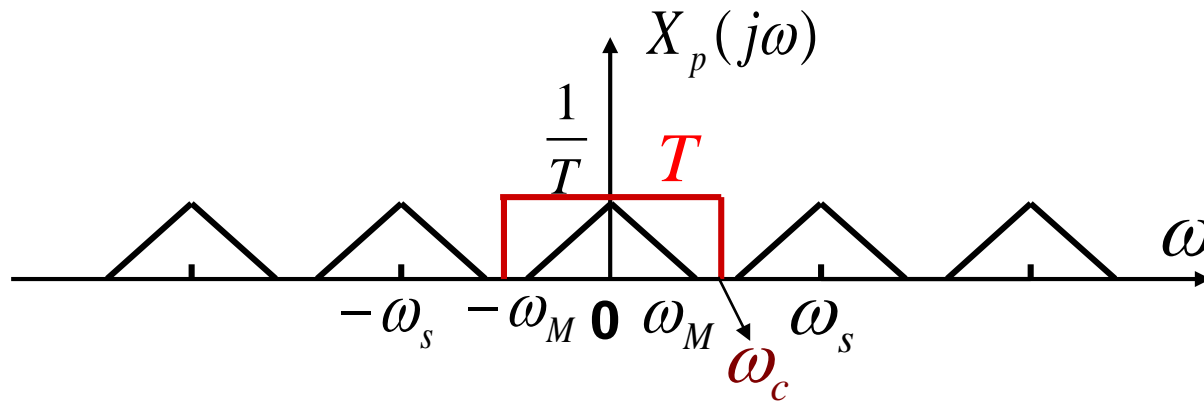


要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号，就意味着要能够从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$ 。这就要求 $X_p(j\omega)$ 在周期性延拓时不能发生频谱的混叠。为此必须要求：

1. $x(t)$ 必须是带限的，最高频率分量为 ω_M 。

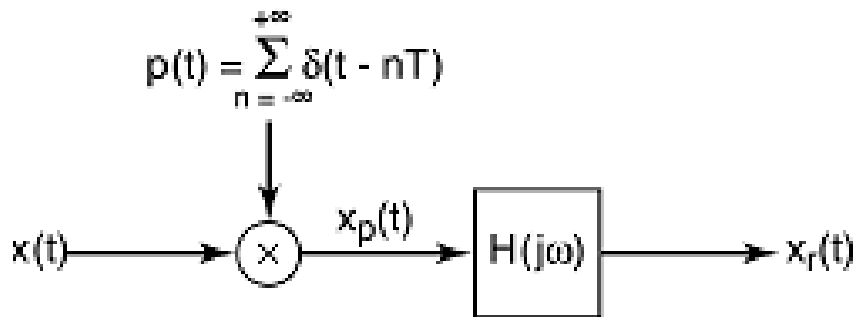
2. 采样间隔(周期)不能是任意的，必须保证采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_M$ 。其中 $\omega_s = 2\pi/T$ 为采样频率。

在满足上述要求时，可以通过理想低通滤波器从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$ 。

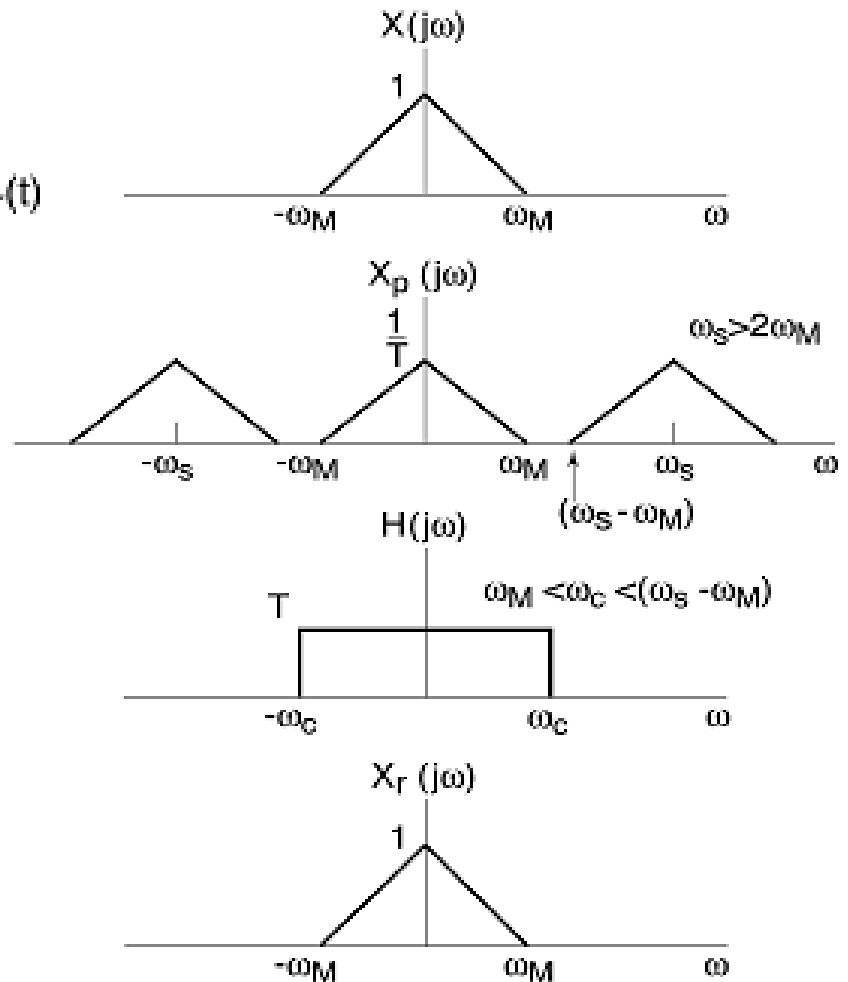


四. Nyquist 采样定理:

对带限于最高频率 ω_M 的连续时间信号 $x(t)$,
 如果以 $\omega_s \geq 2\omega_M$ 的频率进行理想采样, 则 $x(t)$ 可
 以唯一的由其样本 $x(nT)$ 来确定。



- 在工程实际应用中，理想滤波器是不可能实现的。而非理想滤波器一定有过渡带，因此，实际采样时， ω_s 必须大于 $2\omega_M$ 。

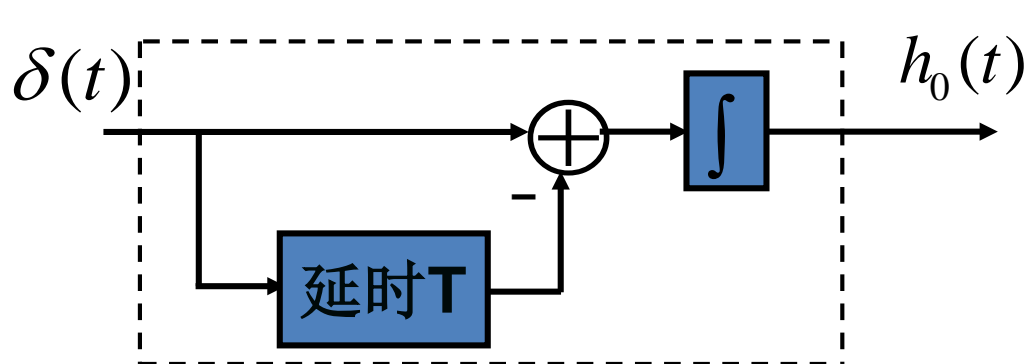


- 低通滤波器的截止频率必须满足:

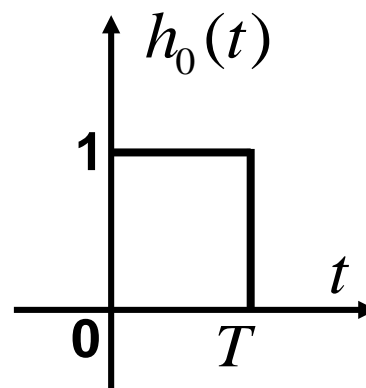
$$\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$$

- 为了补偿采样时频谱幅度的减小，滤波器应具有 T 倍的通带增益。

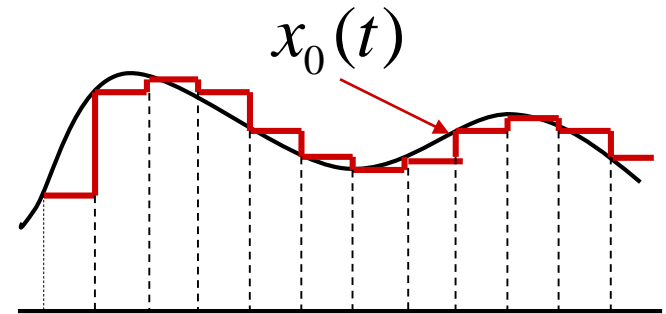
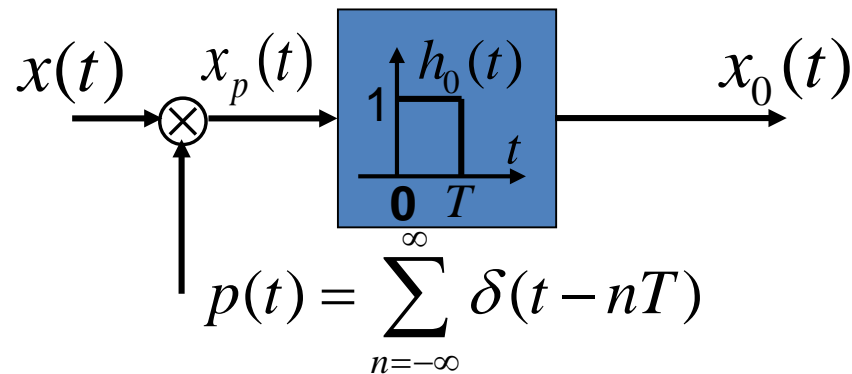
三. 零阶保持采样:



零阶保持系统



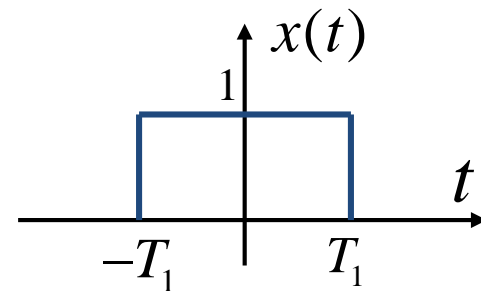
1. 零阶保持系统：是一个 $h(t)$ 为矩形脉冲的系统。
2. 零阶保持：信号的样本经零阶保持后，所得到的信号是一个阶梯形信号。



零阶保持采样相当于理想采样后，再级联一个零阶保持系统。

矩形脉冲:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} = \frac{2T_1 \sin \omega T_1}{\omega T_1} \\ &= 2T_1 \text{Sa}(\omega T_1) = 2T_1 \text{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) \end{aligned}$$

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ **则** $x(t - t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

为了能从 $x_0(t)$ 恢复 $x(t)$, 就要求零阶保持后再级联一个系统 $H_r(j\omega)$ 。 使得

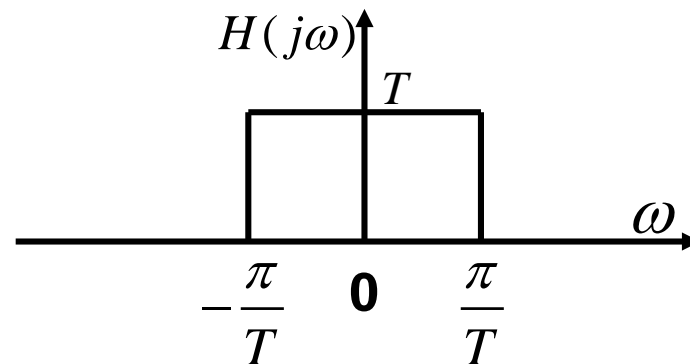
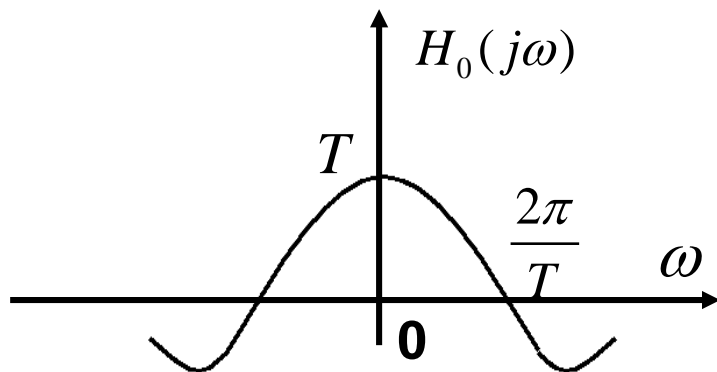
$$H_0(j\omega)H_r(j\omega) = H(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

其中 $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$

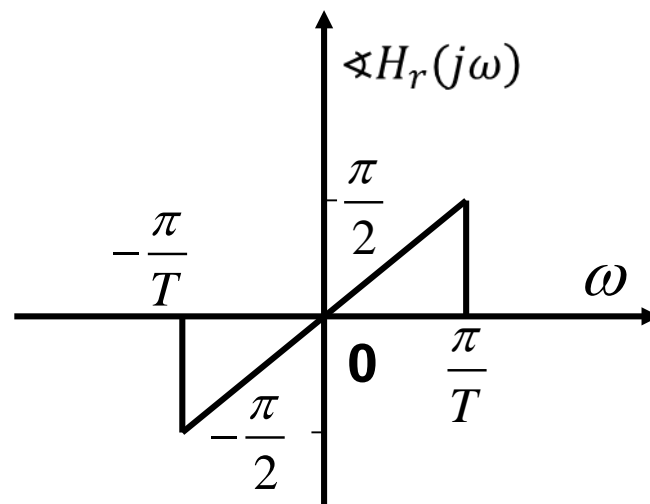
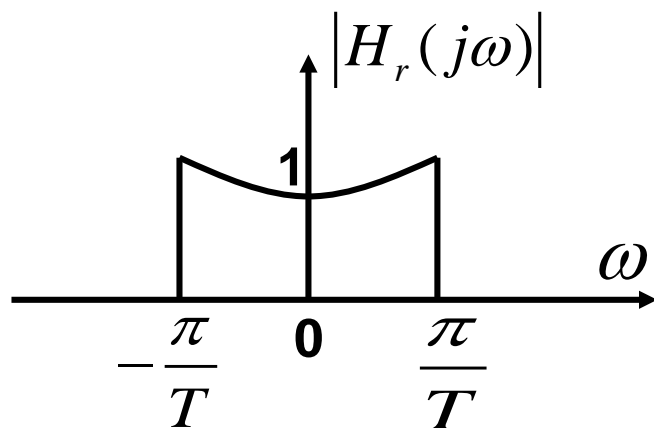
而
$$H_0(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega T / 2)}{\omega} e^{-j \frac{\omega T}{2}}$$

所以
$$H_r(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{\frac{2 \sin \omega T / 2}{\omega}} \cdot e^{j \frac{\omega T}{2}}$$

以 $H(j\omega)$ 表示理想低通滤波器的特性，则：



若 $\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s = \frac{\pi}{T}$ 则



7.2 利用内插从样本重建信号

内插： 由样本值重建某一函数的过程。

一. 理想内插：

若 $h(t)$ 为理想低通的单位冲激响应，则

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT) \end{aligned}$$

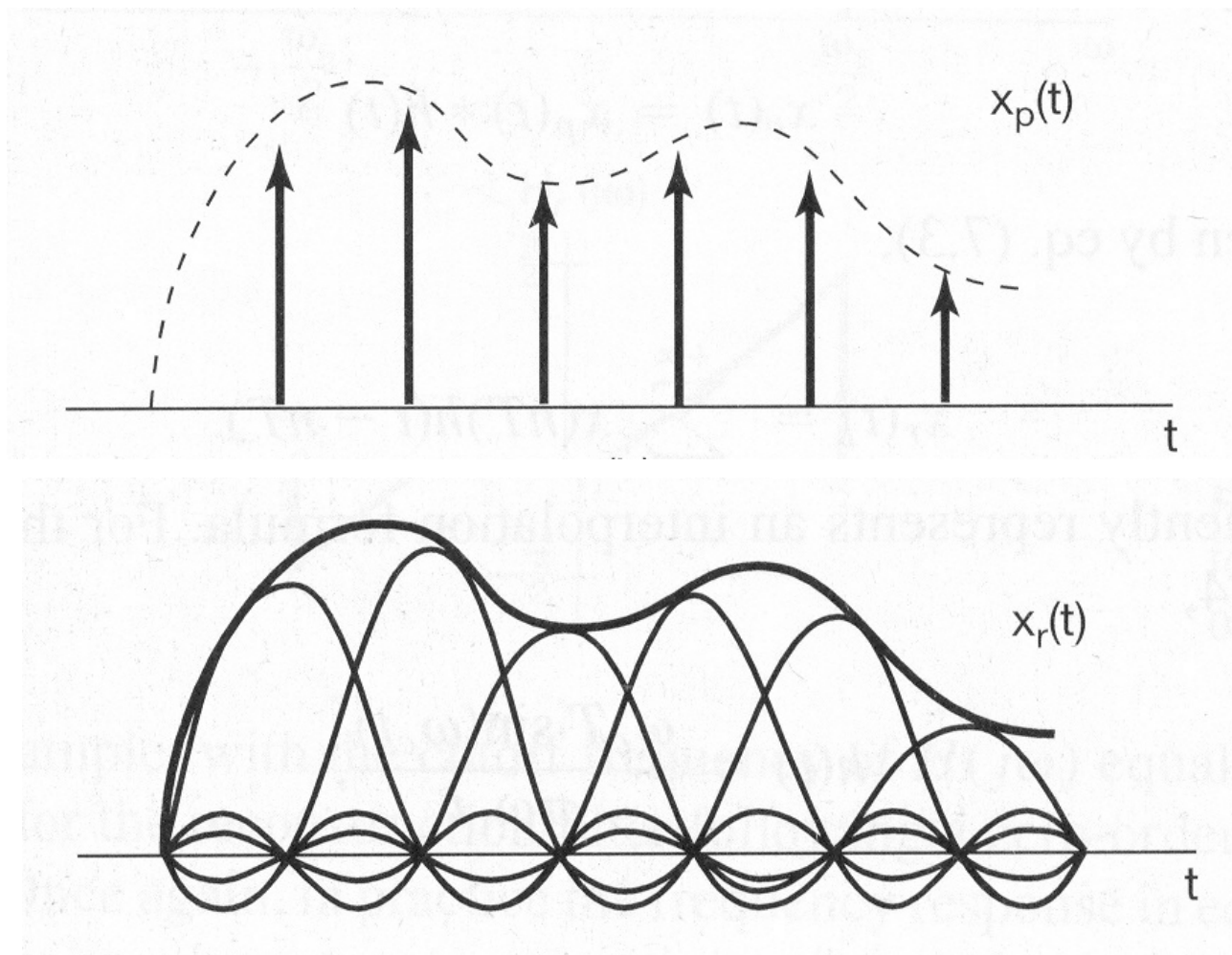
表明：理想内插以理想低通滤波器的单位冲激响应作为内插函数。

$$h(t) = \frac{T\omega_c}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}t\right) = \frac{T\omega_c}{\pi} \frac{\text{Sin } \omega_c t}{\omega_c t} = T \cdot \frac{\text{Sin } \omega_c t}{\pi t}$$

$$\therefore x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \frac{\omega_c T}{\pi} \frac{\text{Sin } \omega_c (t - nT)}{\omega_c (t - nT)}$$

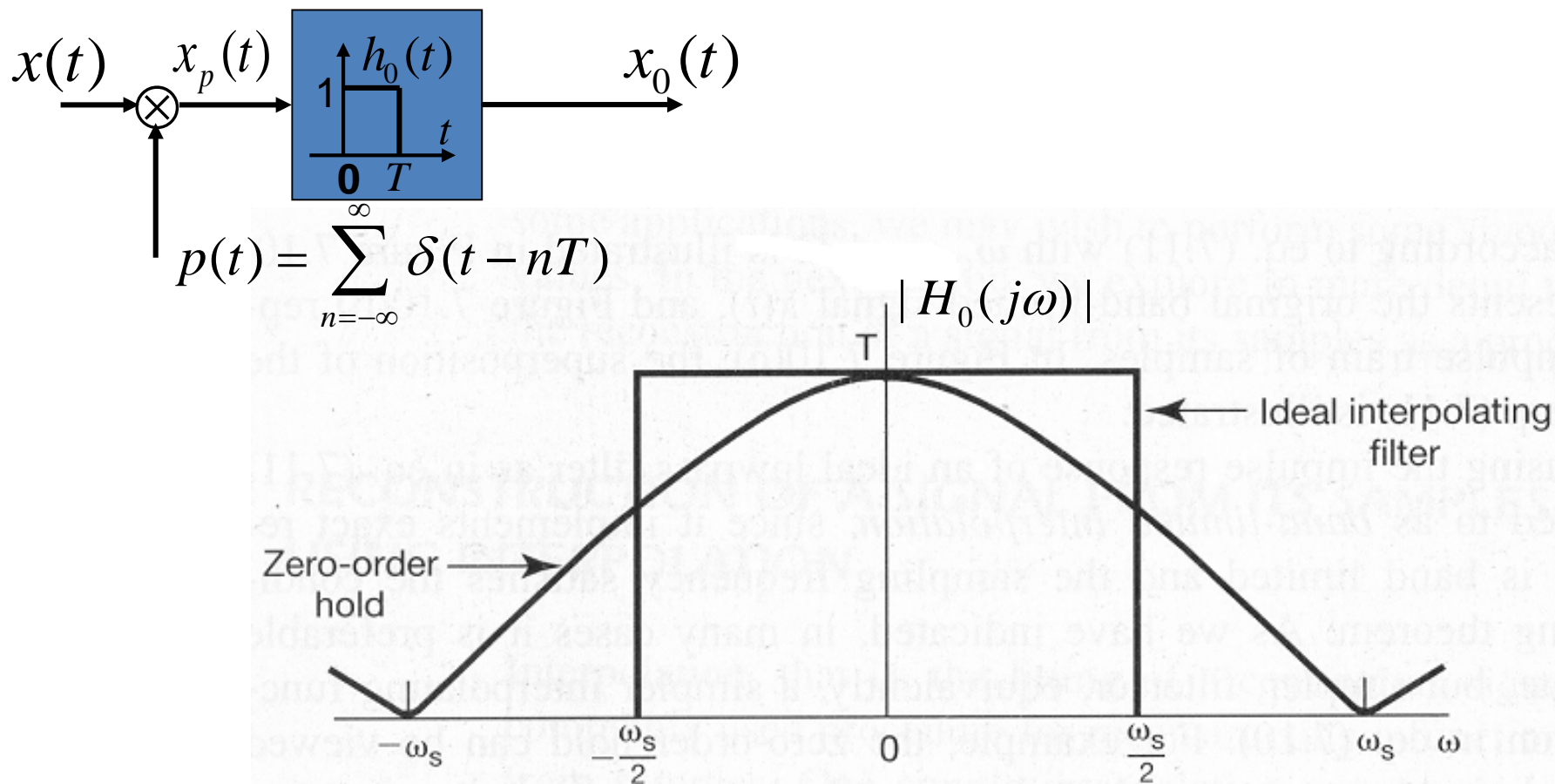
$$\text{当 } \omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \text{ 时 } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\text{Sin } \omega_c (t - nT)}{\omega_c (t - nT)}$$

这种内插称为**时域中的带限内插**。



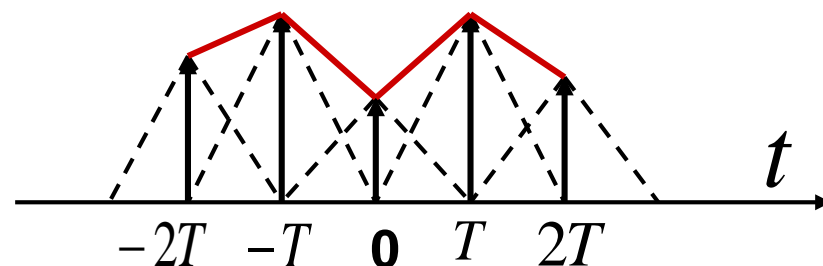
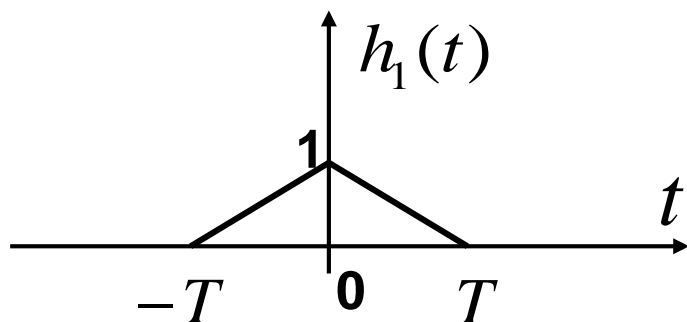
二. 零阶保持内插:

零阶保持内插的内插函数是零阶保持系统的单位冲激响应 $h_0(t)$ 。

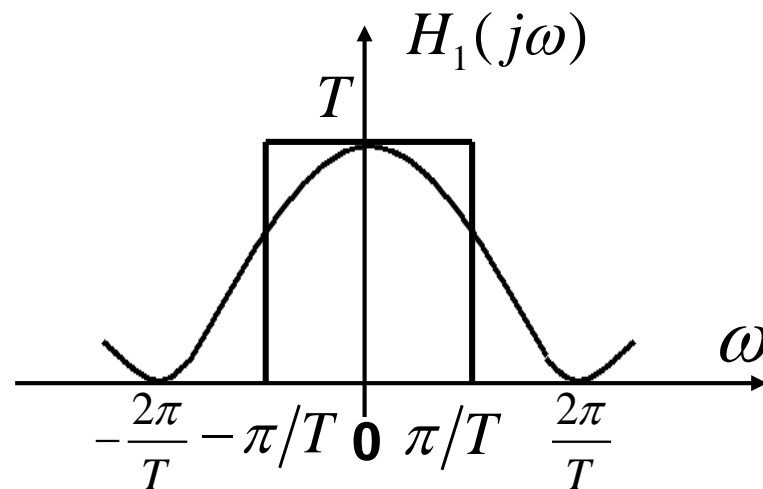


三. 一阶保持内插(线性内插)

线性内插时，其内插函数是三角形脉冲。



$$H_1(j\omega) = T \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T/2} \right]^2$$
$$= \frac{1}{T} \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega/2} \right]^2$$





零阶保持内插的结果



一阶保持内插的结果（采样间隔为 $T/4$ ）



一阶保持内插的结果（采样间隔为 $T/4$ ）

7.3 欠采样的效果—频谱混叠

一.欠采样与频谱混叠:

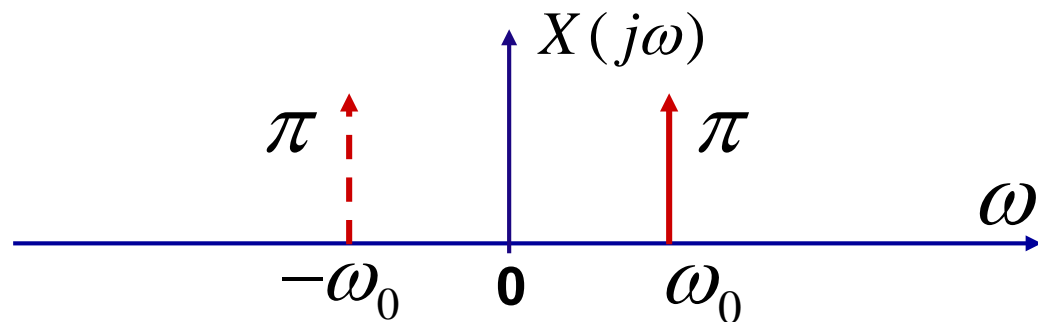
如果采样时，不满足采样定理的要求，就一定会在 $x(t)$ 的频谱周期延拓时，出现**频谱混叠**的现象。

此时，即使通过理想内插也得不到原信号。但是无论怎样，恢复所得的信号 $x_r(t)$ 与原信号 $x(t)$ 在采样点上将具有相同的值。

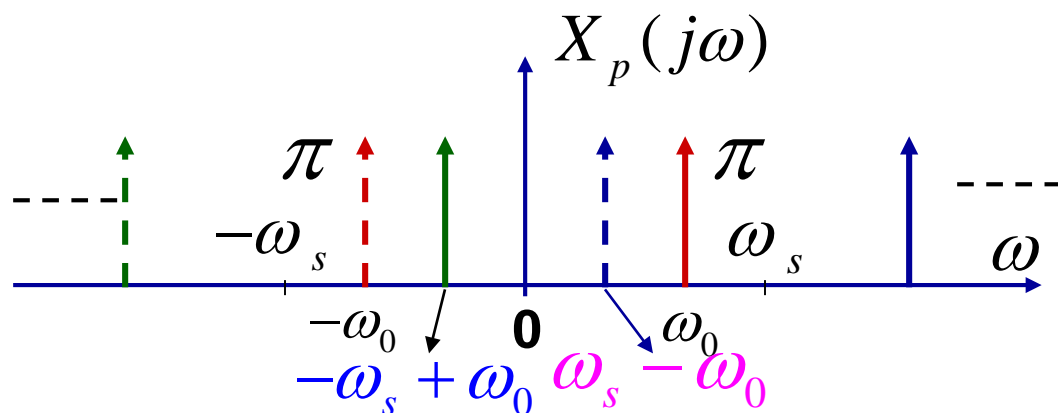
$$x_r(nT) = x(nT)$$

例: $x(t) = \cos \omega_0 t$

$x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$

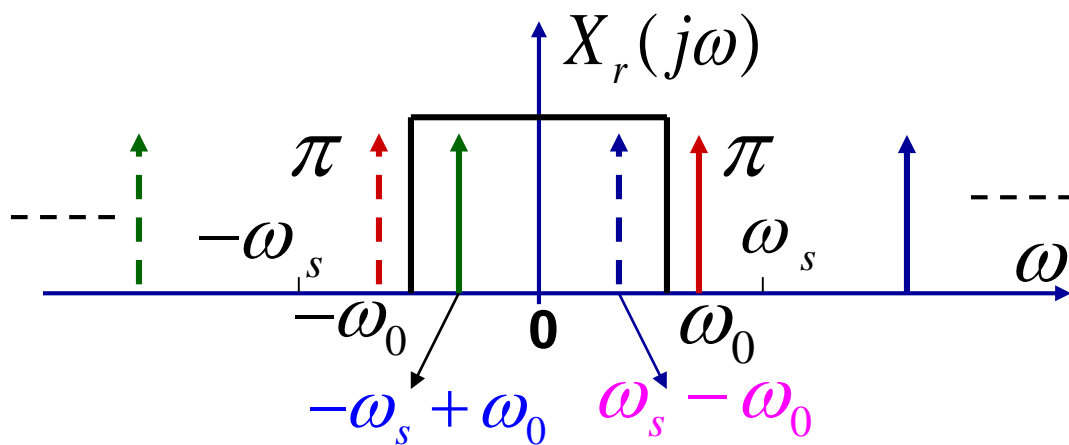


当 $\omega_0 < \omega_s < 2\omega_0$
时,产生频谱混叠。



恢复的信号为

$$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t$$



显然当 $t = nT$ 时有

$$\begin{aligned}x_r(nT) &= \cos(\omega_s - \omega_0)nT \\&= \cos \omega_s nT \cdot \cos \omega_0 nT + \sin \omega_s nT \cdot \sin \omega_0 nT \\&= \cos \omega_0 nT = x(nT)\end{aligned}$$

$$\omega_s = 2\pi / T$$

如果 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$, 则在上述情况下:

$$X_r(j\omega) = \pi \left\{ \delta[\omega - (\omega_s - \omega_0)] \cdot e^{-j\varphi} + \delta[\omega + (\omega_s - \omega_0)] \cdot e^{j\varphi} \right\}$$

$$\therefore x_r(t) = \cos[(\omega_s - \omega_0)t - \varphi]$$

表明恢复的信号不仅频率降低, 而且相位相反。

工程应用时，如果采样频率 $\omega_s = 2\omega_M$ 将不足以从样本恢复原信号。

例如 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ **在** $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_0$ **时**

$$x(t) = \cos \varphi \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t \sin \varphi$$

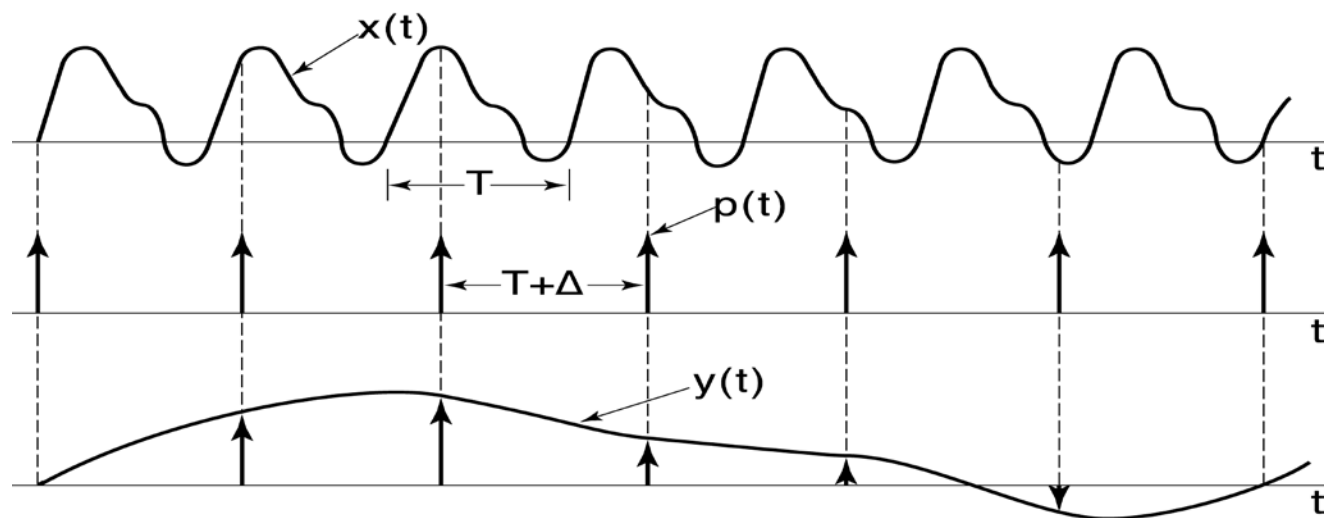
$$x(nT) = \cos \varphi \cos \omega_0 nT$$

这和对 $x_1(t) = \cos \varphi \cos \omega_0 t$ 采样的结果一样。

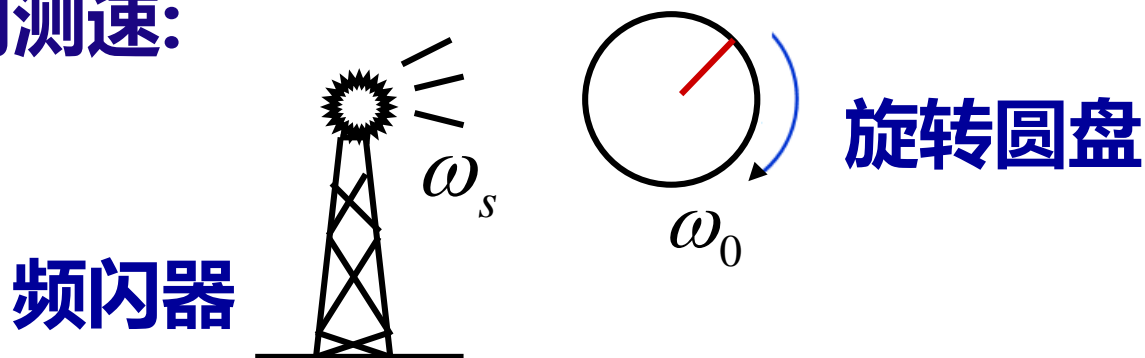
从用样本代替信号的角度出发，出现欠采样的情况是工程应用中不希望的。

二. 欠采样在工程实际中的应用

1. 采样示波器:



2. 频闪测速:



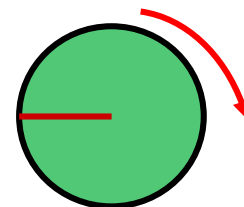
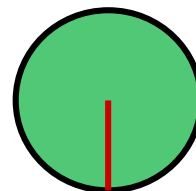
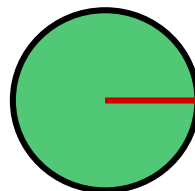
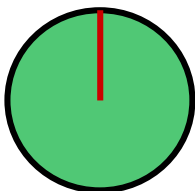
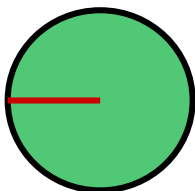
1

2

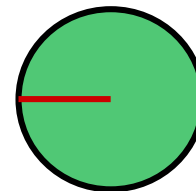
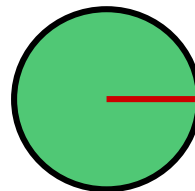
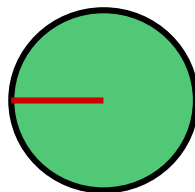
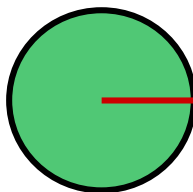
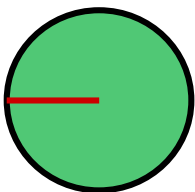
3

4

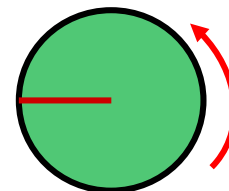
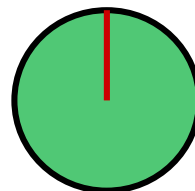
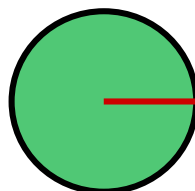
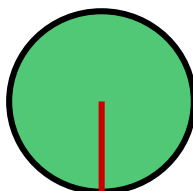
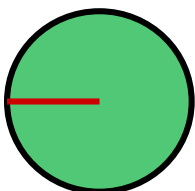
$$\omega_s = 4\omega_0$$



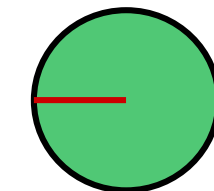
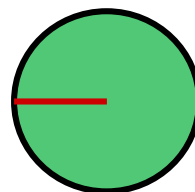
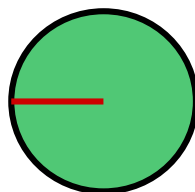
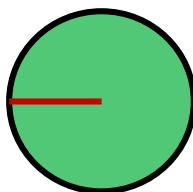
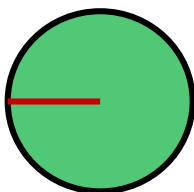
$$\omega_s = 2\omega_0$$



$$\omega_s = \frac{4}{3}\omega_0$$

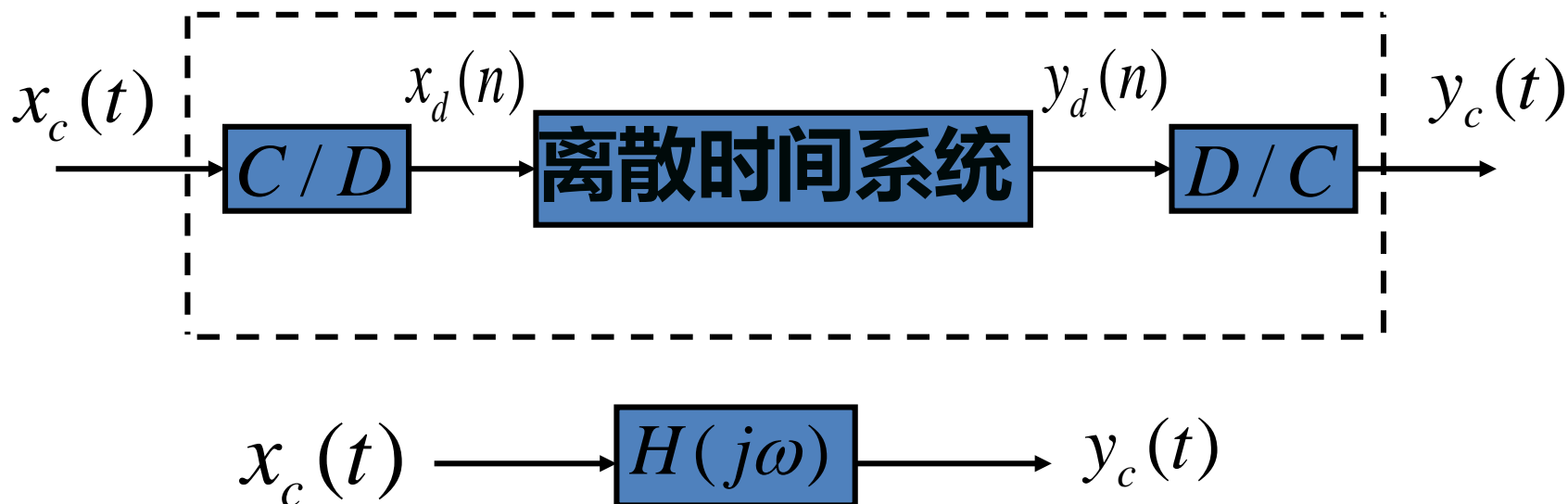


$$\omega_s = \omega_0$$



7.4 连续时间信号的离散时间处理

对连续时间信号进行离散时间处理的系统可视为三个环节的级连。



一. C/D 转换:



在时域：
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = x_c(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

$$x_d(n) = x_c(nT)$$

在频域：
$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega nT}$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)], \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n} \quad (\text{以 } \Omega \text{ 表示离散域频率})$$

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

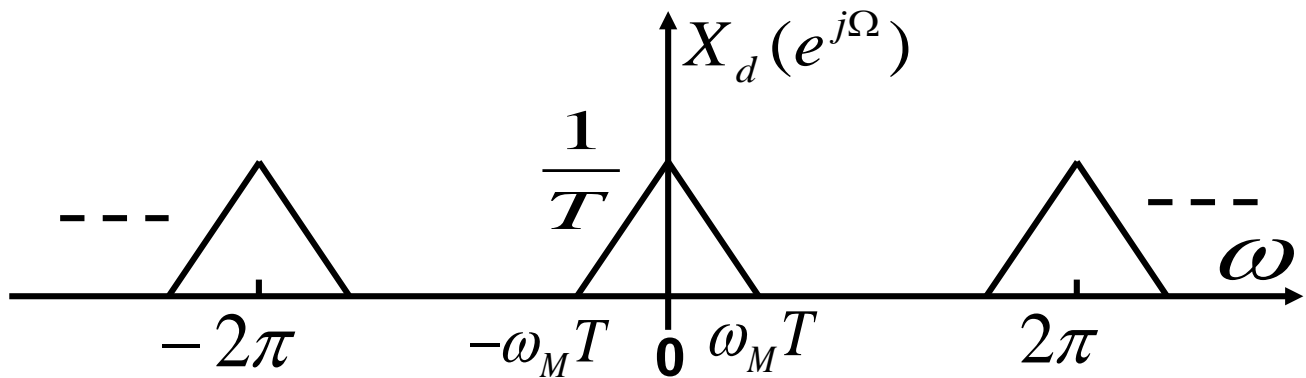
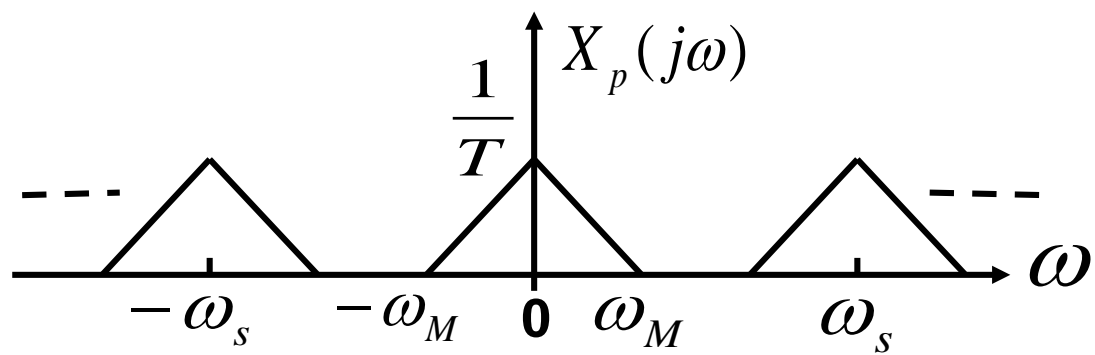
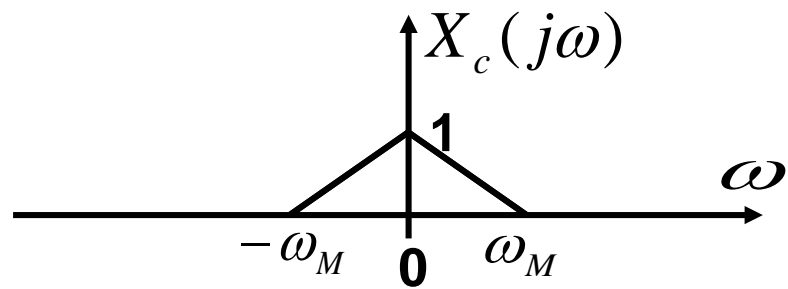
$$\Omega = \omega T$$

$$X_p(j\omega) = X_d(e^{j\omega T})$$

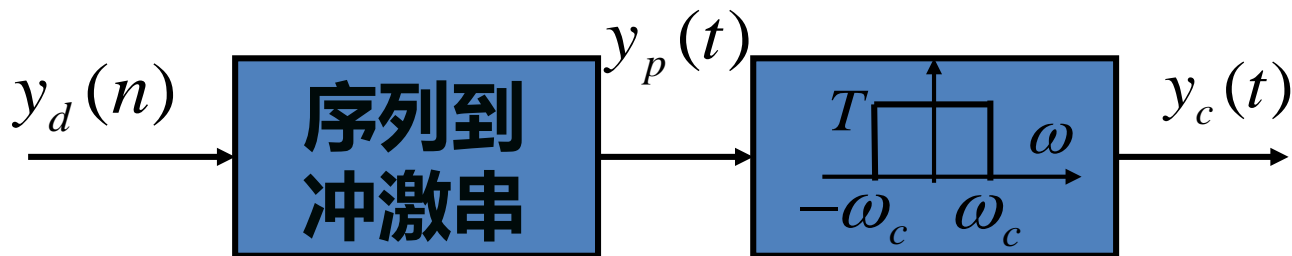
$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\frac{\Omega}{T})$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j\frac{1}{T}(\Omega - 2\pi k)]$$

可见，冲激串到序列的变换过程，在时域是一个对时间归一化的过程；在频域是一个频率去归一化的过程。



二. D/C 转换：



$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n) \delta(t - nT) \quad Y_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n) e^{-j\omega nT}$$

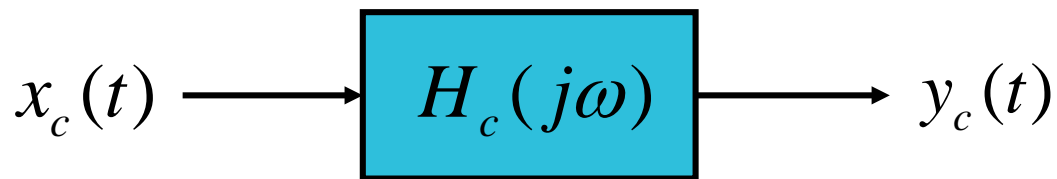
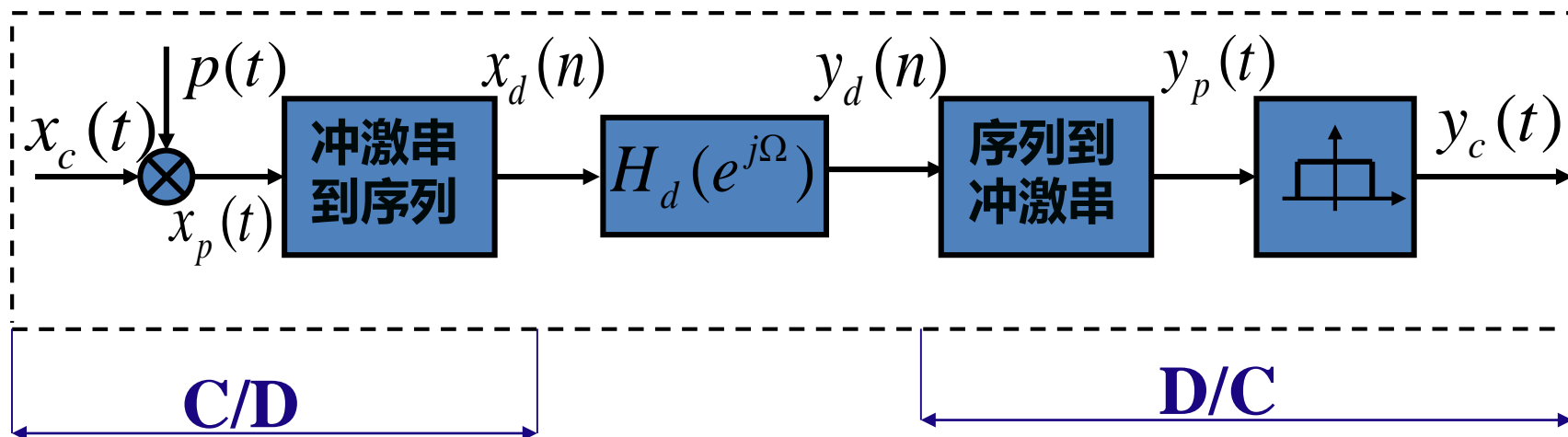
$$Y_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n) e^{-j\Omega n}$$

$$Y_d(e^{j\Omega}) = Y_p(j\frac{\Omega}{T})$$

$$Y_p(j\omega) = Y_d(e^{j\omega T})$$

可见，D/C转换是C/D转换的逆过程。

三. 连续时间信号的离散时间处理



假定 $H_d(e^{j\Omega}) = 1$ **，有** $y_d(n) = x_d(n)$ **，在满足采样定理时有** $y_p(t) = x_p(t)$ **，** $y_c(t) = x_c(t)$ **，整个系统是恒等系统，表明D/C转换是C/D转换的逆系统。**

对一般情况：

$$Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega}) \cdot H_d(e^{j\Omega})$$

$$Y_d(e^{j\omega T}) = X_d(e^{j\omega T}) H_d(e^{j\omega T})$$

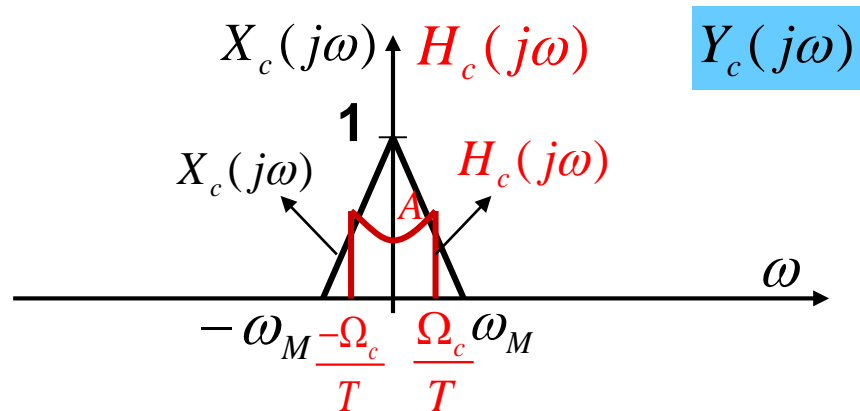
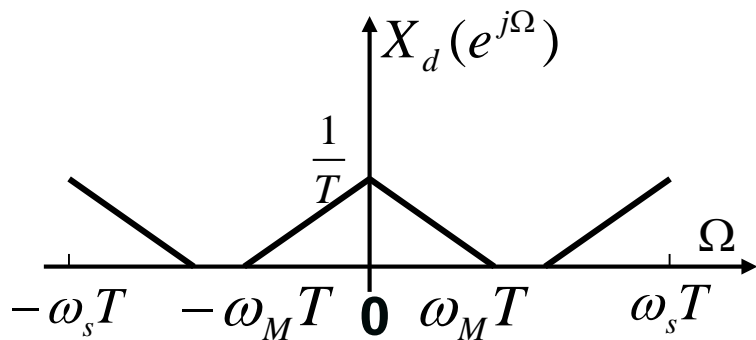
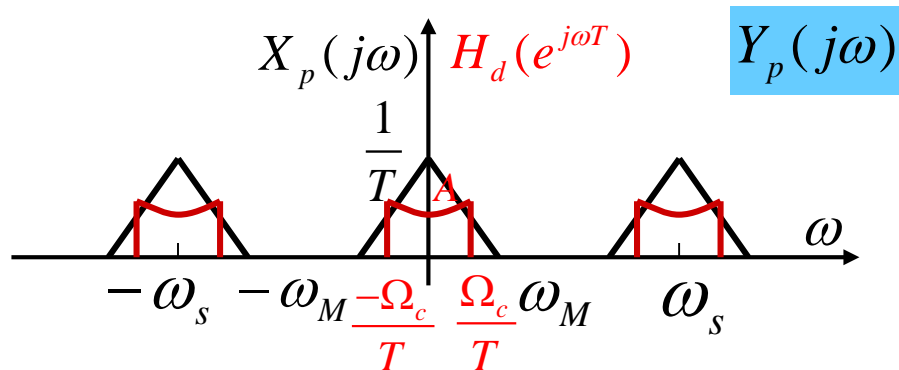
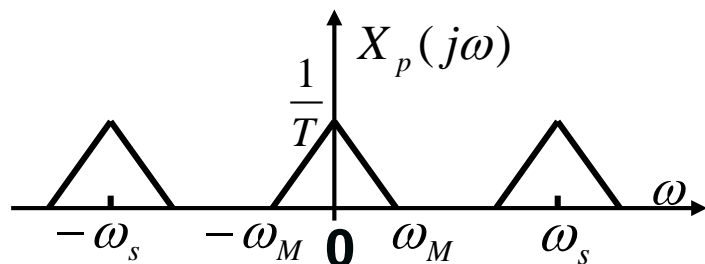
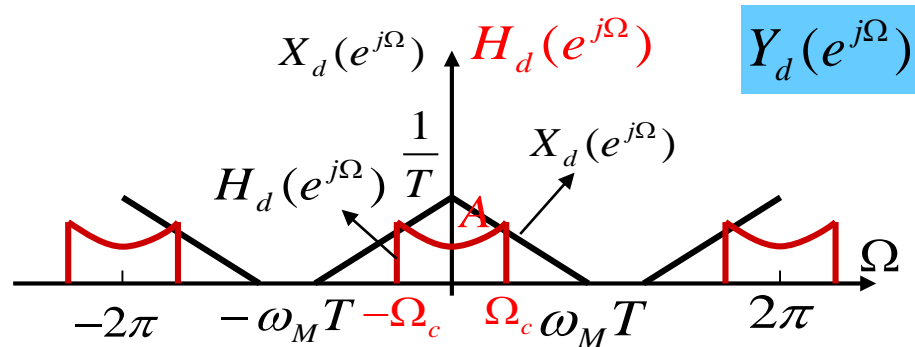
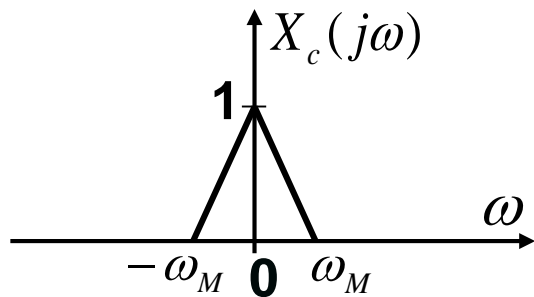
$$= X_p(j\omega) \cdot H_d(e^{j\omega T}) = Y_p(j\omega)$$

$$Y_c(j\omega) = Y_p(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

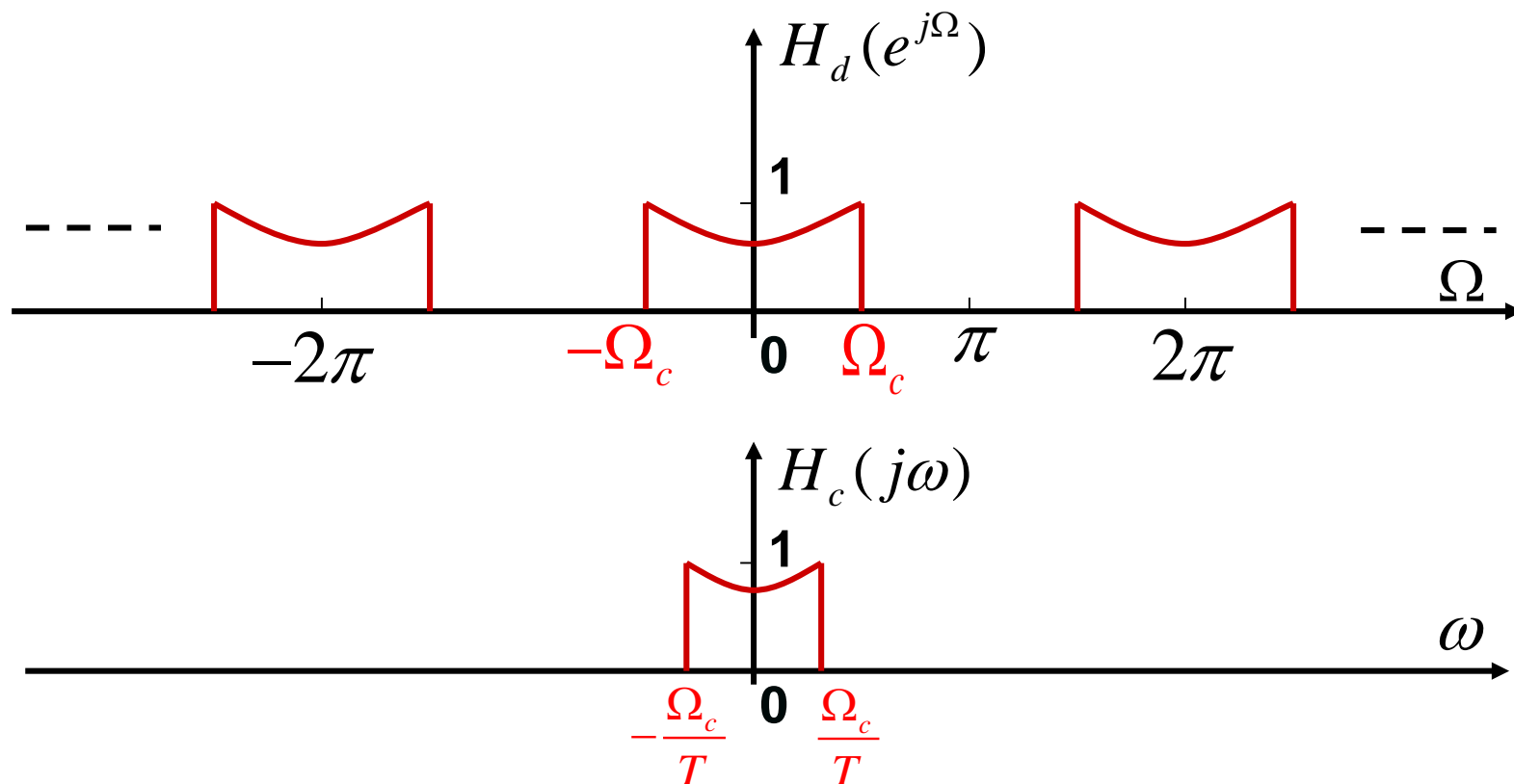
$$= \begin{cases} \mathbf{0} & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \\ \underbrace{TX_p(j\omega) \cdot H_d(e^{j\omega T})}_{\text{即 } X_c(j\omega) \cdot H_c(j\omega)} & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ \mathbf{0} & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

$$\text{或 } H_c(j\frac{\Omega}{T}) = H_d(e^{j\Omega}) \quad |\Omega| < \pi$$



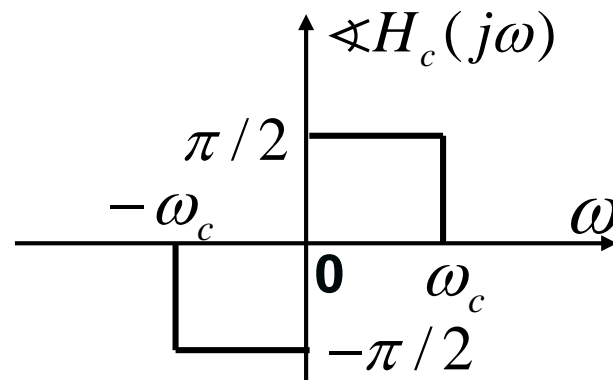
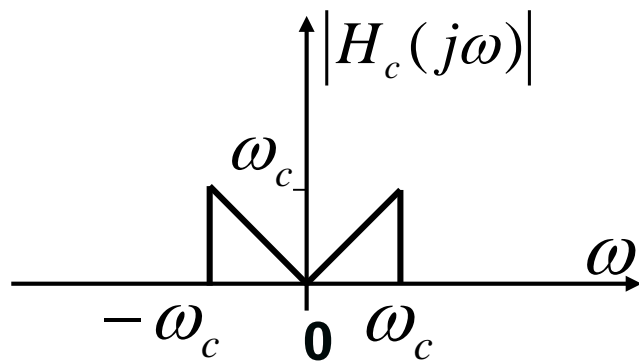
可见，等效连续时间系统的频率响应，就是离散时间系统频率响应在一个周期内的特性，只不过在频率上有一个尺度变换。



对连续时间信号进行离散时间处理的系统只在 $x_c(t)$ 带限，且采样频率满足采样定理的要求时才能等效为一个LTI系统。

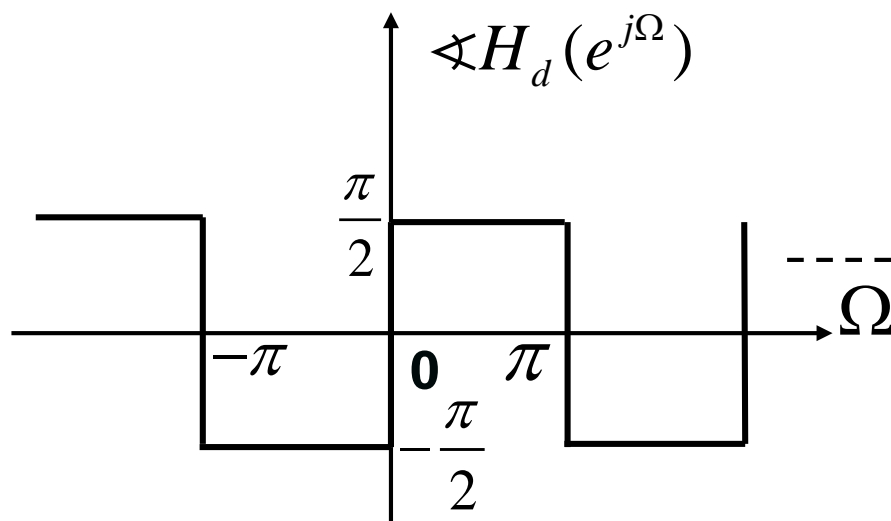
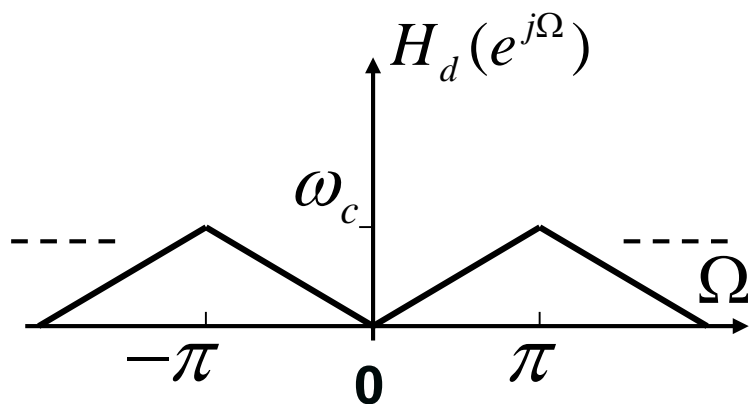
例：数字微分器：

带限微分器 $H_c(j\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$



由 $H_c(j\frac{\Omega}{T}) = H_d(e^{j\Omega})$ 可得 , $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ 时有 :

$$H_d(e^{j\Omega}) = j\frac{\Omega}{T} \quad |\Omega| < \pi$$





7.5 离散时间信号采样

一. 脉冲串采样

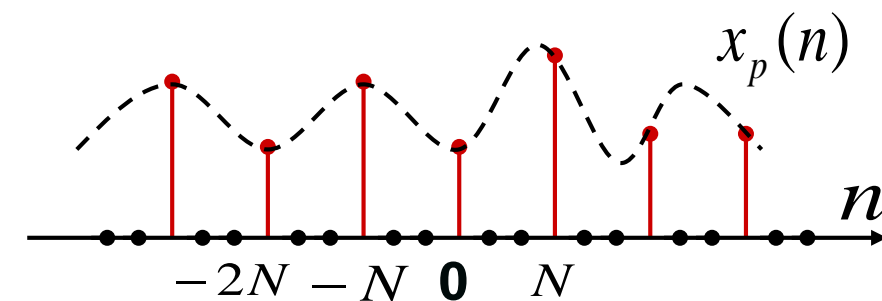
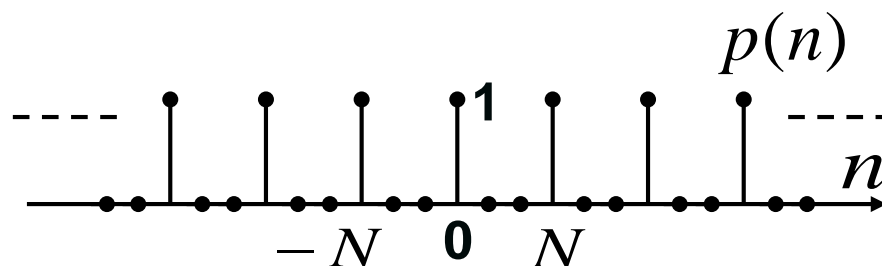
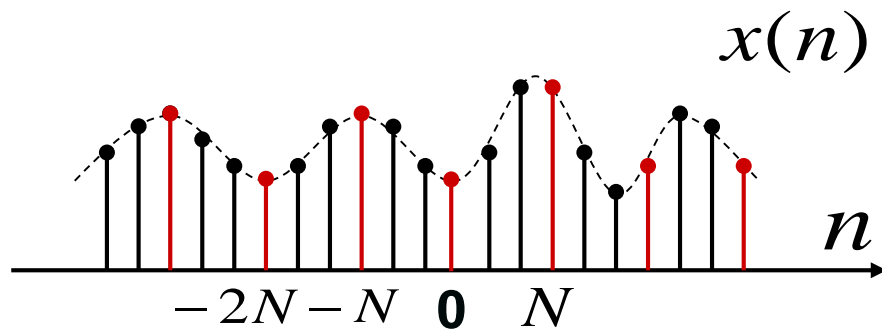
$$x(n) \rightarrow \otimes \rightarrow x_p(n)$$

$$p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$$

$$x_p(n) = x(n) \cdot p(n)$$

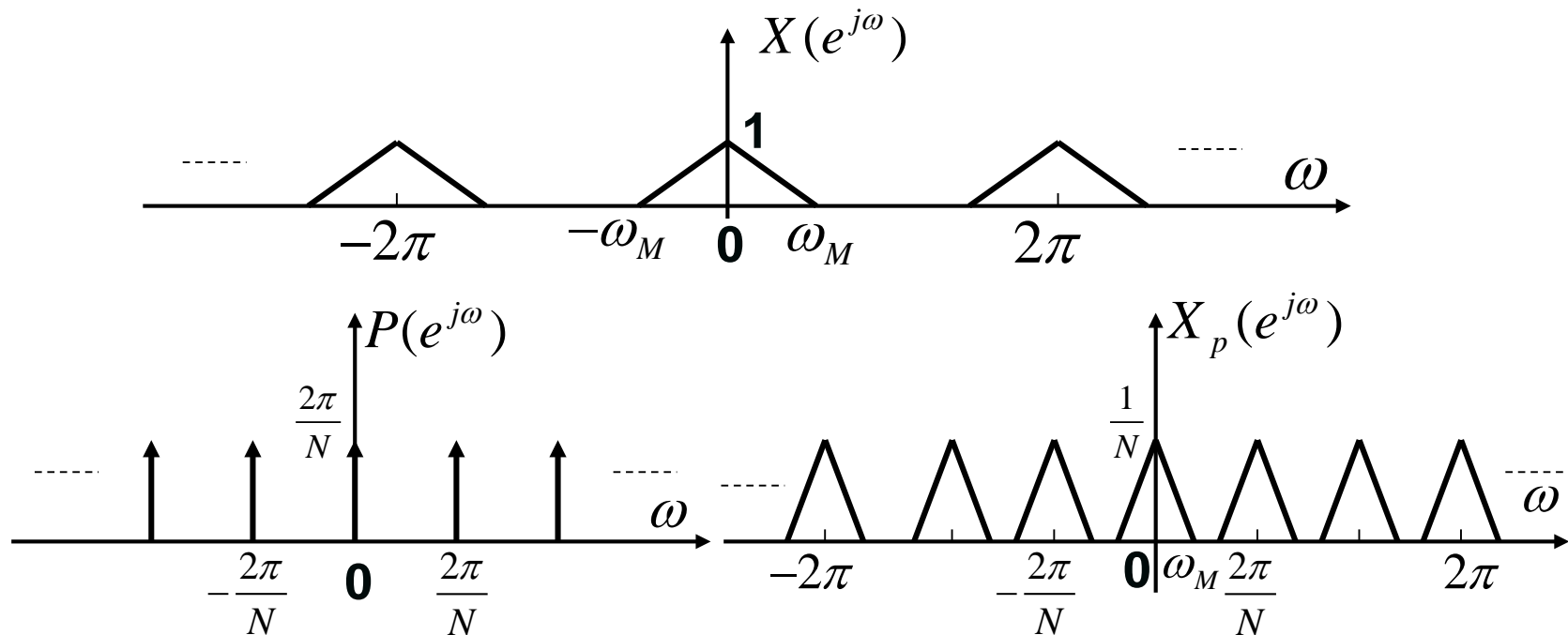
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kN) \delta(n - kN)$$

$$P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$



$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * P(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) P(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

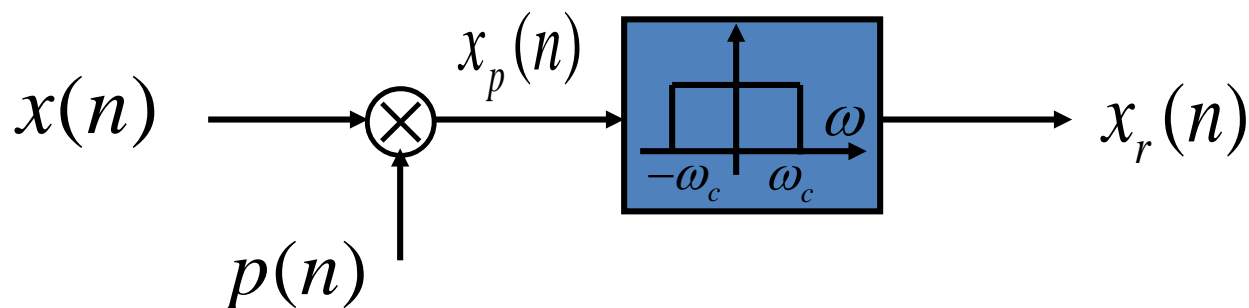
$$= \frac{1}{N} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \theta - \frac{2\pi}{N}k) d\theta = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)})$$



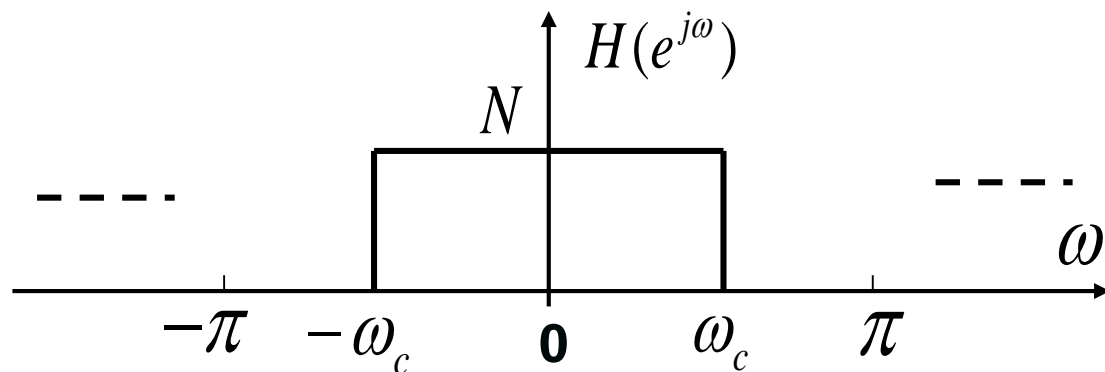
在时域，对离散时间信号以 N 为间隔采样，在频域，信号的频谱就在一个周期内以 $\frac{2\pi}{N}$ 为间隔周期性延拓。

要使 $x_p(n)$ 能恢复成 $x(n)$ ，则频谱在周期性延拓时不能发生混叠。为此要求：

1. $x(n)$ 带限于 ω_M 。
2. $\omega_s = \frac{2\pi}{N} \geq 2\omega_M$ 。



此时可以通过离散时间理想低通滤波器实现对信号 $x(n)$ 的恢复。理想低通的通带增益为 N ，截止频率满足： $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$ 。



恢复 $x(n)$ 的过程也是一种带限内插过程，其内插函数为理想低通的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

$$h(n) = \frac{N\omega_c}{\pi} \text{SinC}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right) = N \cdot \frac{\text{Sin } \omega_c n}{\pi n}$$

$$x_r(n) = x_p(n) * h(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kN) \frac{N\omega_c}{\pi} \text{Sinc} \frac{\omega_c (n - kN)}{\pi}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kN) \frac{N\omega_c}{\pi} \frac{\text{Sin } \omega_c (n - kN)}{\omega_c (n - kN)}$$

当 $\omega_c = \pi / N$ 时 ,

$$x_r(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kN) \frac{\text{Sin } \omega_c (n - kN)}{\omega_c (n - kN)}$$

二. 离散时间抽取与内插

如果 $x_d(n) = x_p(nN) = x(nN)$, 则把由 $x(n)$ 经过 $x_p(n)$ 到 $x_d(n)$ 的过程称为**抽取**。

若直接从 $x(n)$ 抽取得到 $x_d(n)$, 这个过程是不可逆的。但当 $x(n)$ 满足采样定理的要求时, 先经过 $x_p(n)$ 再到 $x_d(n)$, 则抽取过程是可逆的。

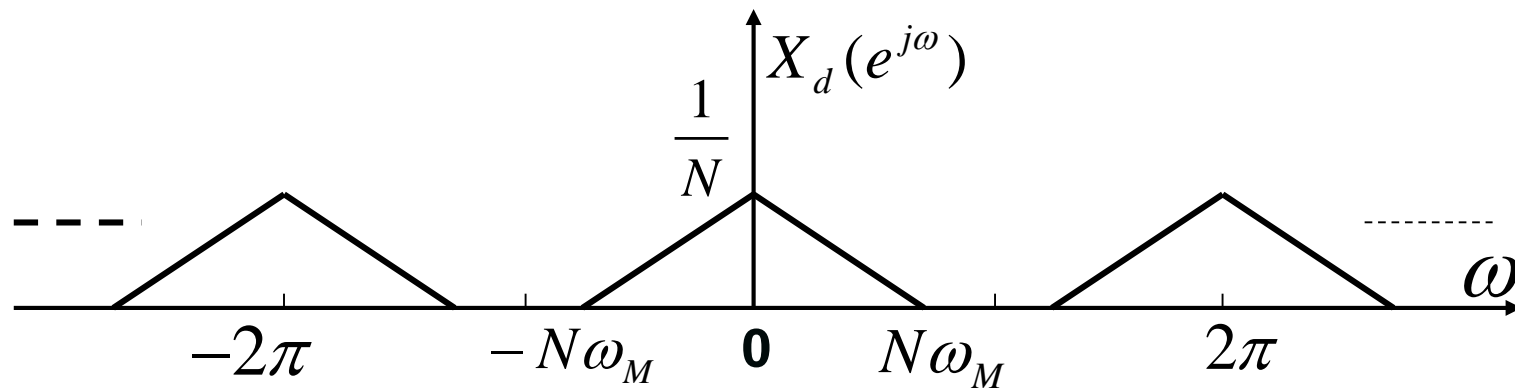
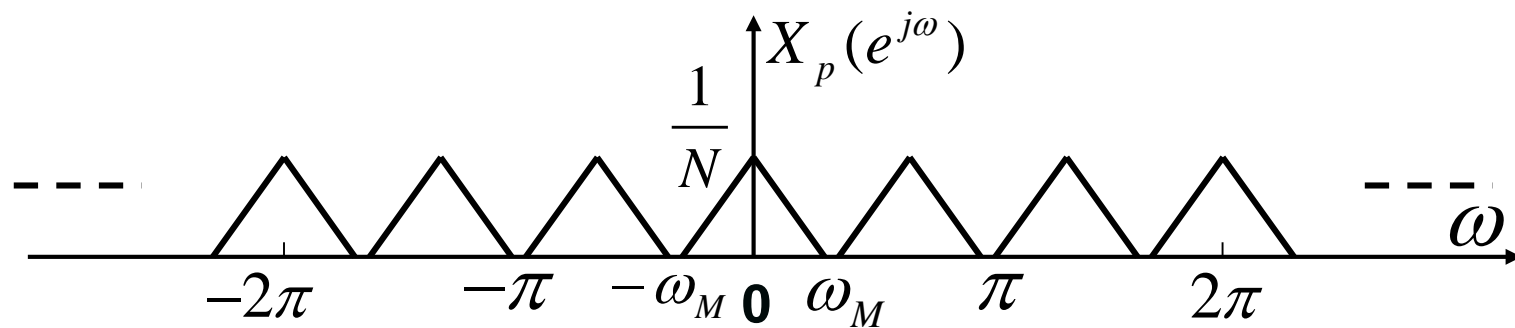
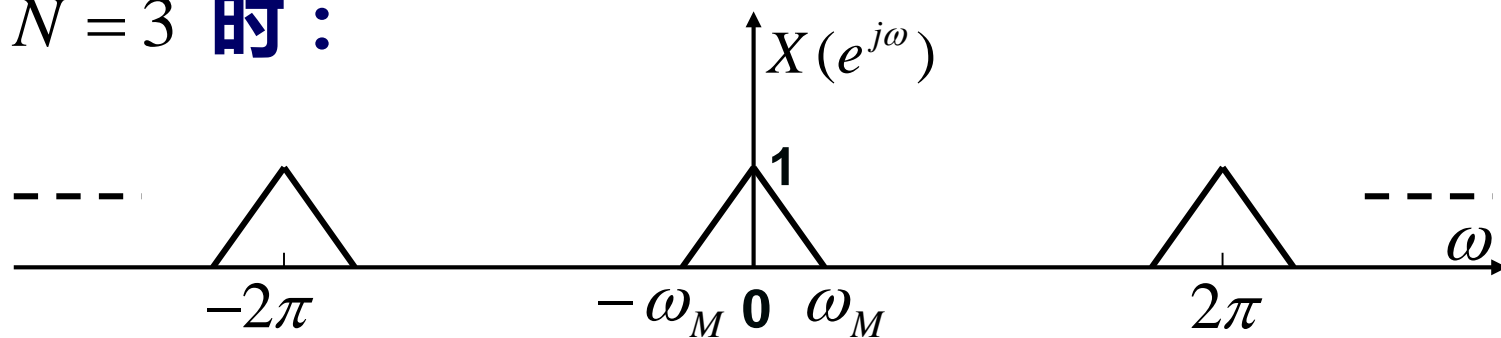
抽取过程在频域的反映：

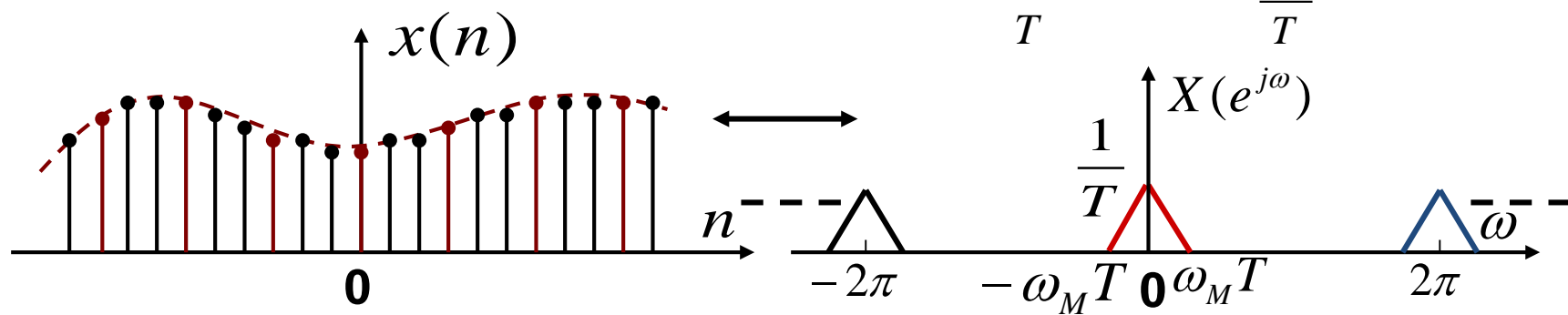
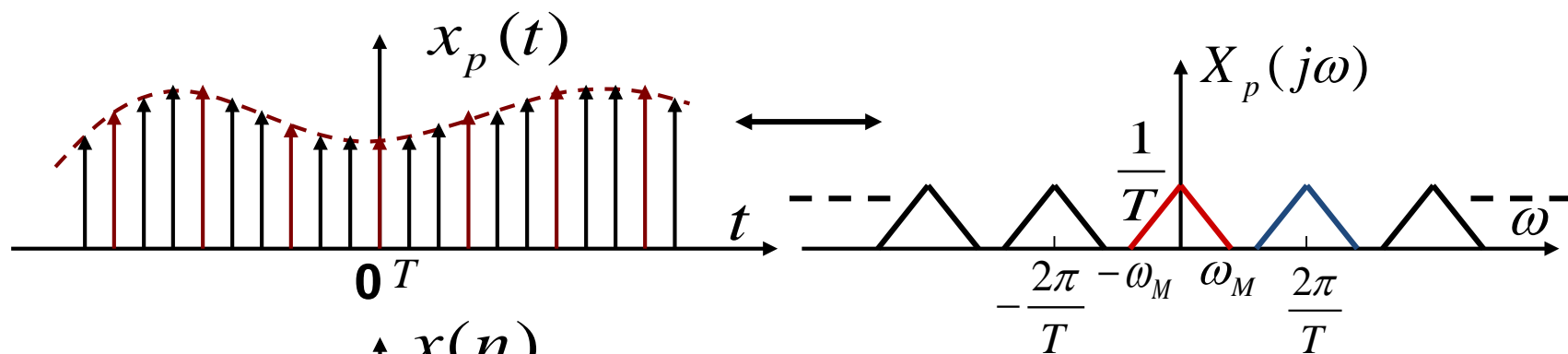
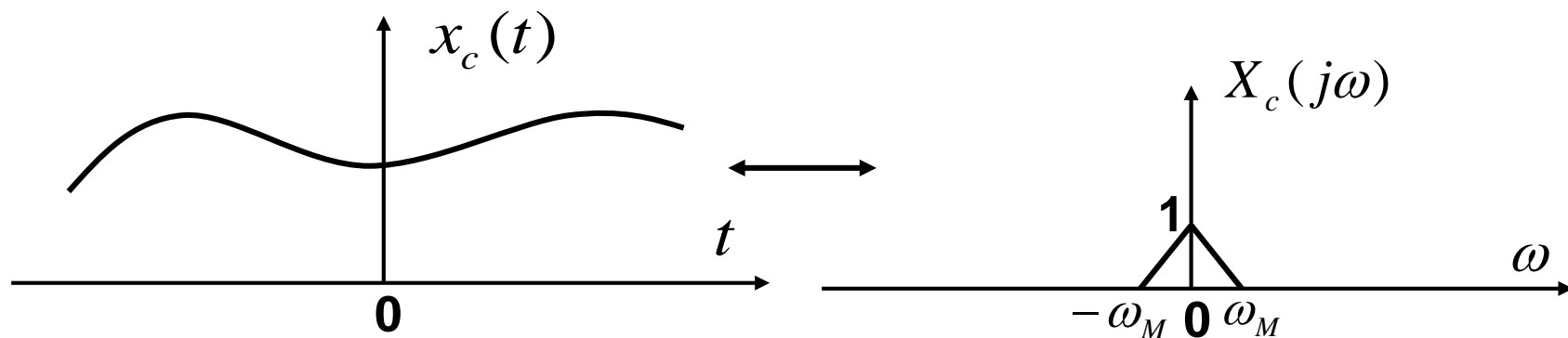
$$\begin{aligned}
X_d(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nN)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty, n=rN}^{\infty} x_p(n)e^{-j\omega \frac{n}{N}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(n)e^{-jn\frac{\omega}{N}} = X_p(e^{j\frac{\omega}{N}})
\end{aligned}$$

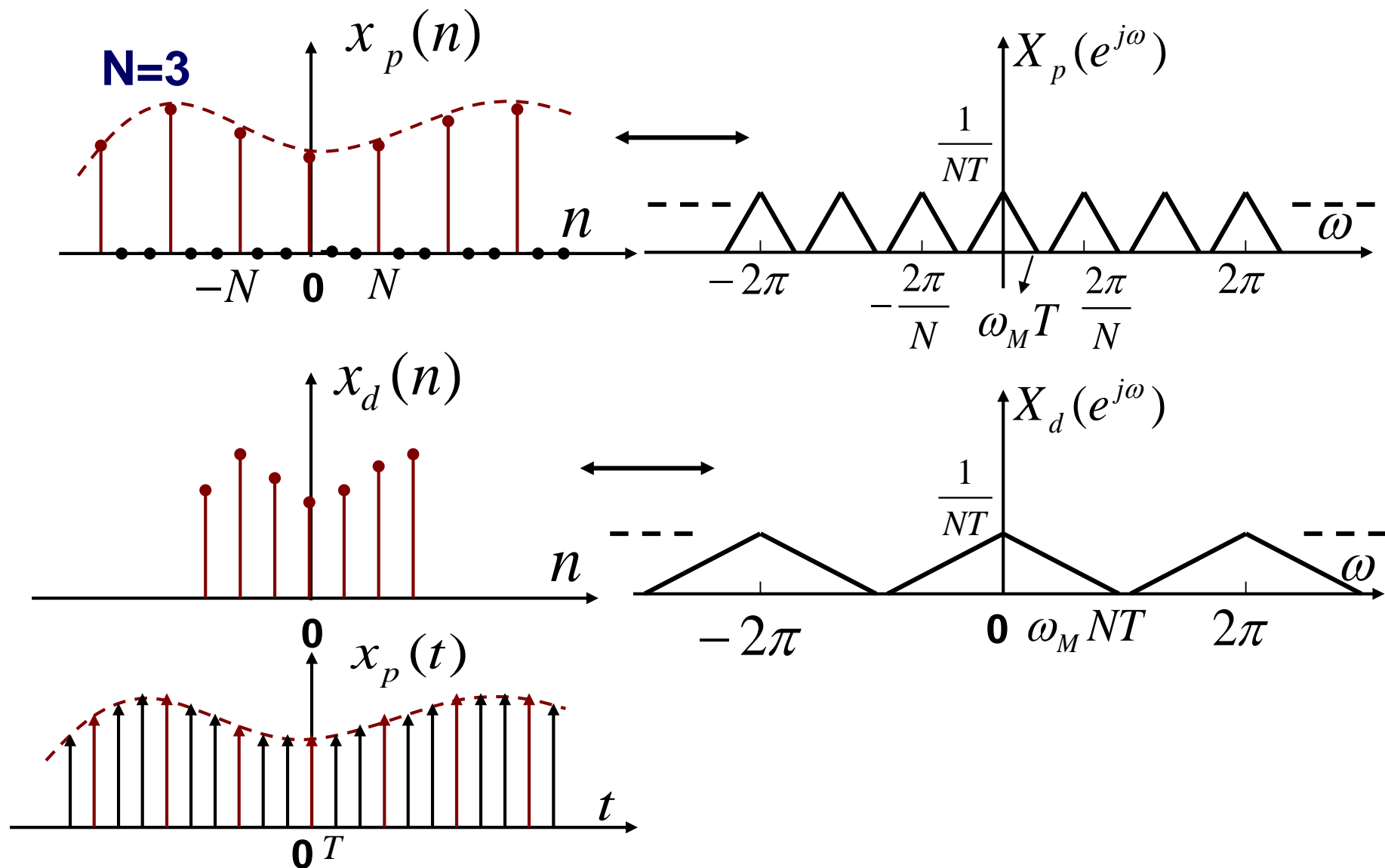
即 $X_d(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\frac{\omega}{N}})$

这表明，在时域对带限序列进行抽取，相当于在频域对采样序列的频谱进行尺度变换。

$N = 3$ 时：



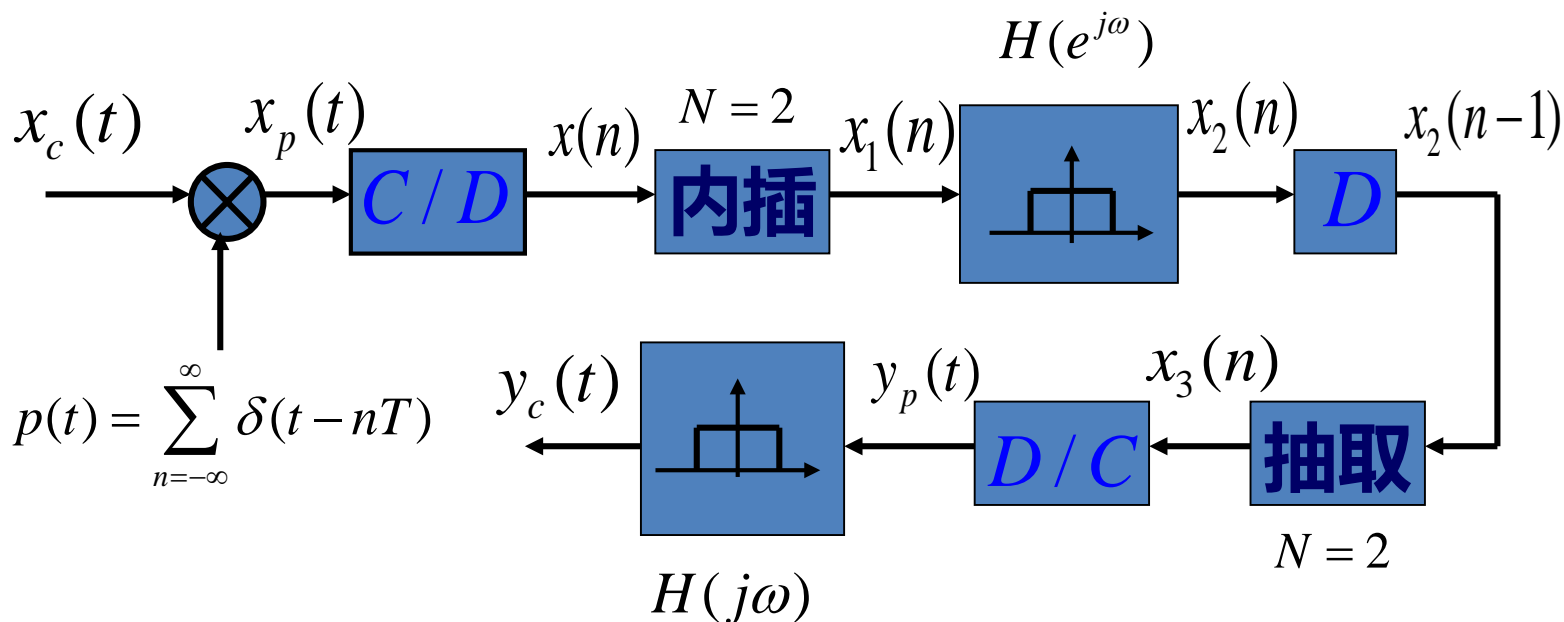


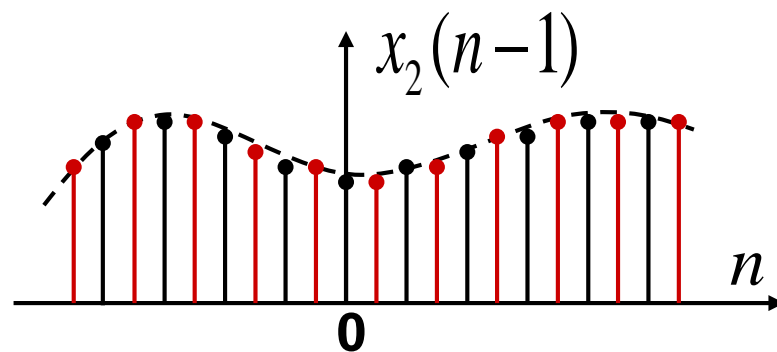
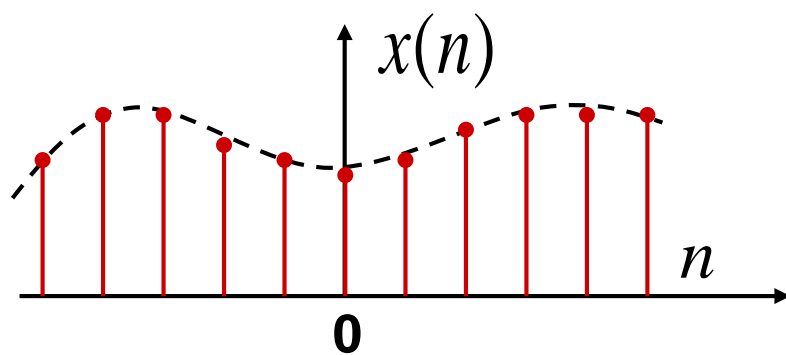
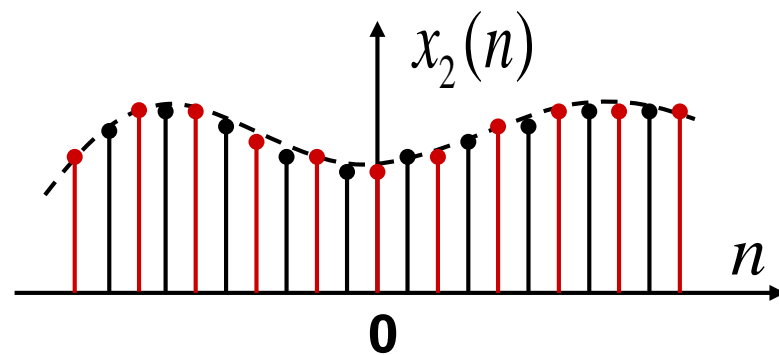
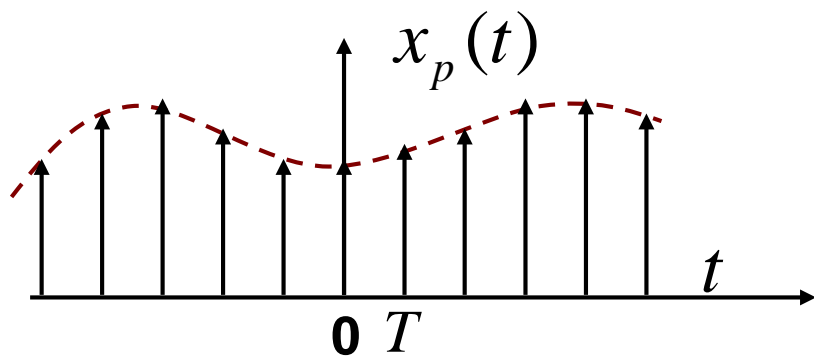
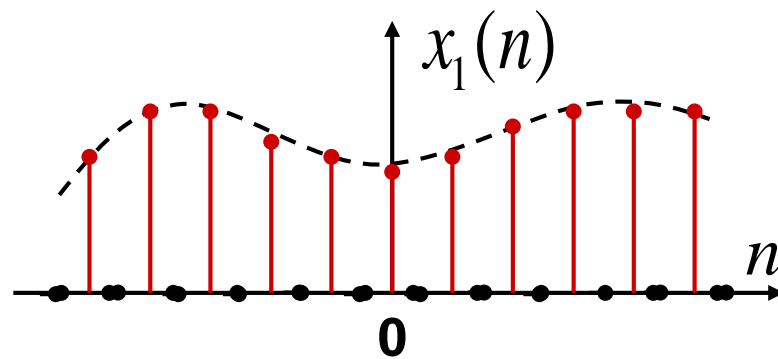
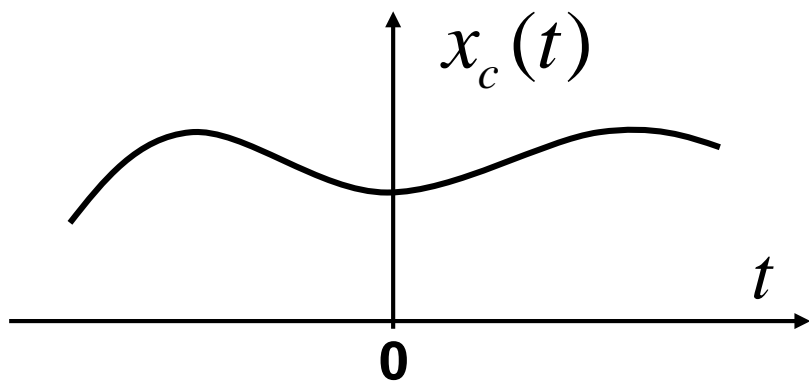


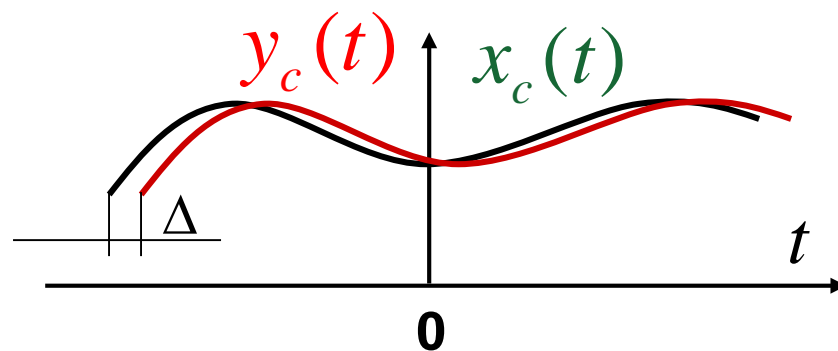
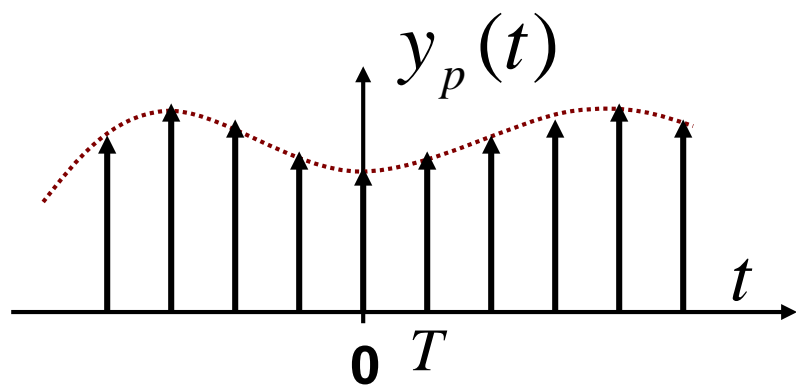
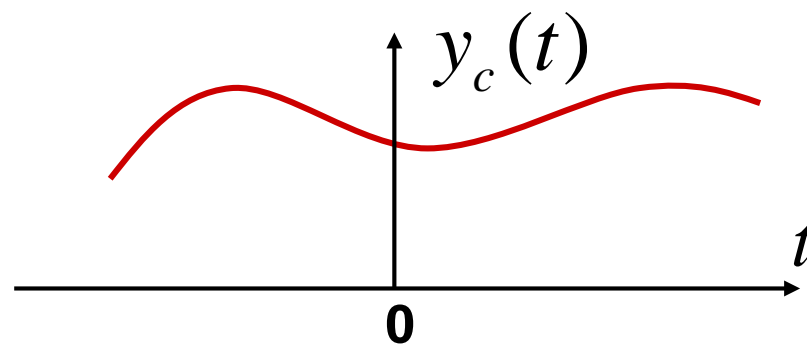
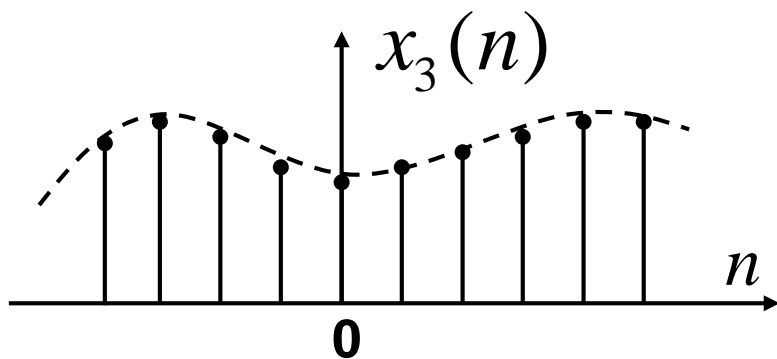
对 $x_c(t)$ 以 T 为间隔采样后再以 N 为间隔抽取，相当于直接对 $x_c(t)$ 以 NT 为间隔采样。

三. 抽取与内插的应用

半抽样间隔延时：







$$y_c(t) = x_c(t - \Delta)$$

$$\Delta = \frac{T}{2}$$

7.6 小结

1. 连续时间信号的时域采样，采样定理。
2. 从样本通过内插重建信号。
3. 欠采样引起的频谱混叠，及欠采样在工程实际中的某些应用。
4. 连续时间信号的离散时间处理。
5. 离散时间信号的时域采样、抽取与内插。