线性代数 (Linear Algebra)

第四章 Vector Spaces

§4.6 Rank
秩

衡益

2021 年 12 月 2 日，中山大学南校区

行空间

行空间

定义

➢ 若**A**是一个$m\times n$矩阵，**A**的每一行具有n个数，即可以视为$\mathbb{R}^n$中的一个向量。其行向量的所有线性组合的集合称为A的行空间，记为Row **A**。

例1：令$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & -6 & -12 \\ 1 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

$$r_1 = (-1, 2, 3, 6)$$
$$r_2 = (2, -5, -6, -12)$$
$$r_3 = (1, -3, -3, -6)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Row } A = \text{Span}\{r_1, r_2, r_3\}$$

行空间

定理13

➢ 若两个矩阵**A**和**B**行等价，则它们的行空间相同。若**B**是阶梯形矩阵，则**B**的非零行构成**A**的行空间的一个基同时也是**B**的行空间的一个基。

行空间

例2： 分别求矩阵A的**行空间**、列空间和零空间的基。

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

解：
- 行化简A成阶梯形：

$$A \sim B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

- 由定理13，**B**的前三行构成**A**的行空间的一个基，Row **A**的基为：

$$\{(1, 3, -5, 1, 5)\}, \{(0, 1, -2, 2, -7)\}, \{(0, 0, 0, -4, 20)\}$$

行空间

例2： 分别求矩阵A的行空间、**列空间**和零空间的基。

- 主元列在第1, 2, 4列 $\Rightarrow$ **A**的第1, 2, 4列构成Col **A**的一个基

$$\text{Col } A\text{的基：}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$$

- **B**进一步行变换得

$$A \sim B \sim C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行空间

例2： 分别求矩阵A的行空间、列空间和**零空间**的基。

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_5 &= 0 \\ x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -x_3 - x_5 \\ x_2 &= 2x_3 - 3x_5 \\ x_4 &= 5x_5 \end{aligned}$$

x_3和x_5为自由变量

$$\text{Nul}\,A\text{的基：}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

注意：尽管**B**的前3行是线性无关的，但由此说**A**的前3行是线性无关则是错误的。因行变换对矩阵的行不保持线性相关关系。

秩定理

秩定理

定义

➢ **A**的秩即**A**的列空间维度。

$$\text{rank A} = \dim \text{Col A} = \text{A中主元列的个数} = \dim \text{Row A}$$

定理14（秩定理）

➢ $m \times n$矩阵**A**的列空间和行空间维度相等，这个公共的维度（即**A**的秩）还等于**A**的主元位置的个数，且满足方程。

$$\text{rank A} + \dim \text{Nul A} = n$$

{主元列个数} + {非主元列个数} = {列的个数}

秩定理

定理14证明

证明：

- 由4.3节课件定理，rank **A**是**A**中主元列的个数 ⇔ rank **A**是**A**的阶梯形**B**中主元位置的个数；
- 因**B**对每个主元有一个非零行，同时这些行对**A**的行空间而言构成一个基 ⇒ **A**的秩也等于**A**的行空间的维度。
- 由4.5节，Nul **A**的维度等于方程**A**x = **0**中自由变量的个数 ⇔ Nul **A**的维度是**A**中非主元列的个数 ⇒ {主元列个数}+{非主元列个数}={列的个数}

秩定理

例1： a. 若**A**是一个7×9矩阵，具有2维零空间，**A**的秩是多少？

b. 一个6×9矩阵能有2维零空间吗?

解： a. 因矩阵**A**有9列，(rank **A**)+2=9，从而rank **A**=7.

b. 不能。

- 若**B**为一个6×9矩阵，具有2维零空间，它的秩一定等于7（由秩定理）。
- 但**B**的列是$\mathbb{R}^6$中的向量 ⇒ Col **B**的维度不能超过6 ⇒ rank **B**不能超过6。

秩定理

例2： 若**A**是一个5×8的矩阵，且rank **A**=5，求dim Nul **A**, dim Row **A** 和 rank $\mathbf{A}^T$, Col A=?

解：

rank A	+	dim Nul A	=	n
$\updownarrow$	+	$\downarrow$		$\updownarrow$
5		?		8

$5 + \dim \mathrm{Nul}\, A = 8 \quad \Rightarrow \quad \dim \mathrm{Nul}\, A = 3$

$\dim \mathrm{Row}\, A = \mathrm{rank}\, A = 5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}\, A^T = \mathrm{rank}\, A = 5$

➢ 因rank **A**=**A**中主元列的个数=5 ⇒ 每一行都存在一个主元 ⇒ 由第43页的定理4 ⇒ **A**的列张成$\mathbb{R}^5$ ⇒ Col **A**张成$\mathbb{R}^5$

秩定理

例3：$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，求 A 和 B = (A, b) 的秩。

$$\text{解：}\quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank} A = 2, \quad \operatorname{rank} B = 3$$

存在与唯一性问题

存在与唯一性定理

✓ 线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主元列。也就是说，增广矩阵的阶梯形没有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix} \quad b \neq 0$$

若线性方程相容，它的解集可能有两种情形：

(i) 当没有自由变量时，有唯一解；
(ii) 若至少有一个自由变量，有无穷多解。

矩阵“秩”的一些性质

(1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$

(2) $R(A^T) = R(A)$

(3) 若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$

(4) 若 P, Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A)$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的转置

分块矩阵的转置：

设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$

分外层、内层双重转置

矩阵“秩”的一些性质

(5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

列线性无关

$$\max\{R(A), R(B)\} = 2 < R(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = R(A) + R(B)$$

列线性相关

$$\max\{R(A), R(C)\} = 2 = R(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < R(A) + R(C)$$

矩阵“秩”的一些性质

(6) $R(A + B) \le R(A) + R(B)$

证明： $\begin{pmatrix} A + B \\ B \end{pmatrix} \overset{r_i - r_{n+i}}{\sim} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

性质 (2)

$$R(A + B) \le R\begin{pmatrix} A + B \\ B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = R\left(A^T, B^T\right)^T = R\left(A^T, B^T\right)$$

$$\le R(A^T) + R(B^T) = R(A) + R(B) \qquad \blacksquare$$

性质 (5)

矩阵"秩"的一些性质

(7) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$

(8) $A_{m\times n}B_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$，则 $R(A)+R(B) \le n$

课后思考 ...

矩阵秩的基本性质

证明 ...

(7) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$

(8) $A_{m\times n}B_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$，则 $R(A)+R(B) \le n$

证明：设$AB = C$，知矩阵方程 $AX = C$ 有解 $X = B$，

定理* $\Rightarrow R(A) = R(A, C)$

而$R(C) \le R(A, C)$，所以 $R(C) \le R(A)$

又 $(AB)^T = C^T \Rightarrow B^T A^T = C^T$.

同上可得 $R(C^T) \le R(B^T) \Rightarrow R(C) \le R(B)$

$\Rightarrow R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$

秩和可逆矩阵定理

可逆矩阵的特征（回顾）

可逆矩阵的特征：

设A是$n \times n$的方阵，则下列所有表述都是等价的，即对某一特定的A，它们同时为真或同时为假.

a. A是可逆矩阵.

b. A等价于$n \times n$的单位矩阵.

c. A有n个主元位置.

d. 方程Ax = 0仅有平凡解.

可逆矩阵的特征（回顾）

e. A的各列线性无关.

f. 线性变换$x \to Ax$是一对一的.

g. 对$\mathbb{R}^n$中任意b, 方程$Ax = b$至少有一个解.

h. A的各列生成$\mathbb{R}^n$.

i. 线性变换$x \to Ax$把$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^n$上.

j. 存在$n \times n$的矩阵使得$CA = I$.

k. 存在$n \times n$的矩阵使得$AD = I$.

l. A^T是可逆矩阵.

秩和可逆矩阵定理（回顾）

定理（可逆矩阵定理（续））

➢ 令**A**是一个$n \times n$矩阵，则下列的命题中的每个均等价于**A**是可逆矩阵：

m. A的列构成$\mathbb{R}^n$的一个基.

n. $\mathrm{Col}\,A = \mathbb{R}^n$.

o. $\dim \mathrm{Col}\,A = n$.

p. $\mathrm{rank}\,A = n$.

q. $\mathrm{Nul}\,A = \{0\}$.

r. $\dim \mathrm{Nul}\,A = 0$.

秩和可逆矩阵定理（回顾）

定理证明

证明：

- 命题(m)从线性无关和生成的角度上看$\Rightarrow$命题(m)、命题(e)和命题(h)是逻辑上等价的。
- 在第2.3节中我们学到过可逆矩阵的特征，可以与早期的命题(g)、(d)联系起来

$$(g) \Rightarrow (n) \Rightarrow (o) \Rightarrow (p) \Rightarrow (r) \Rightarrow (q) \Rightarrow (d)$$

- 命题(g)是对$\mathbb{R}^n$中的每个**b**，方程$\mathbf{A}x=\mathbf{b}$至少有一个解$\Rightarrow$(n)（因Col **A**实际上就是使方程$\mathbf{A}x=\mathbf{b}$相容的所有**b**的集合。

秩和可逆矩阵定理（回顾）

定理证明（续上页）

证明：

•由维度和秩的定义$\Rightarrow$ $(n) \Rightarrow (o) \Rightarrow (p)$

•若**A**的秩等于n，即**A**的列的个数$\Rightarrow$由秩定理，有dim Nul **A**=0 $\Leftrightarrow$ Nul **A**=$\{\mathbf{0}\}$，即

$$(p) \Rightarrow (r) \Rightarrow (q)$$

•由命题(q)$\Rightarrow$方程$\mathbf{A}x=\mathbf{0}$只有平凡解，即命题(d)。

•在第2.3节中，我们已证明过，命题(d) 和(g)，与**A**是可逆的命题等价。

第四章 Vector Spaces

§ 4.7 Change of Basis

基的变换

衡益

2021 年 12 月 2 日，中山大学南校区

定义

定义

例1： 对一个向量空间V，考虑两个基$\beta=\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$和$\eta=\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$，

满足 $$\mathbf{b}_1 = 4\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{b}_2 = -6\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \qquad (1)$$

假设 $$\mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \qquad (2)$$

即假设$[\mathbf{x}]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，求 $[\mathbf{x}]_\eta$.

解：

- 对(2)中$\mathbf{x}$应用由η确定的坐标映射（坐标映射是一个线性变换）：

$$[\mathbf{x}]_\eta = [3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2]_\eta = 3[\mathbf{b}_1]_\eta + [\mathbf{b}_2]_\eta$$

定义

例1：

解：

- 将线性组合中的向量看做矩阵的列，我们可以将这个向量方程写成一个矩阵方程：

$$[\mathbf{x}]_\eta = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_\eta & [\mathbf{b}_2]_\eta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

- 由（1）：

$$[\mathbf{b}_1]_\eta = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{b}_2]_\eta = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由（3）

$$[\mathbf{x}]_\eta = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

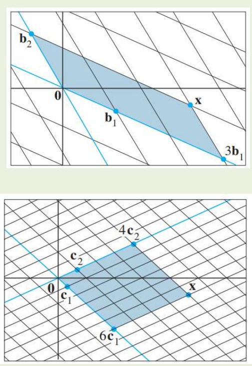

图1 同一向量空间的两个坐标系

定义

定理15

✓若设 $\beta=\{b_1,\cdots,b_n\}$ 和 $\eta=\{c_1,\cdots,c_n\}$ 是向量空间 V 的基，则存在一个 $n\times n$ 矩阵 $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 使得

$$[x]_\eta = \underset{\eta\leftarrow\beta}{P}[x]_\beta \qquad (4)$$

$\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的列是基β中向量的η - 坐标向量，即

$$\underset{\eta\leftarrow\beta}{P} = \left[[b_1]_\eta\ [b_2]_\eta \cdots [b_n]_\eta\right] \qquad (5)$$

$\mathbb{R}^n$ 中的坐标

For a basis $\beta = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, let

$$P_\beta = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix} \text{ and } [\mathbf{x}]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Then

$$\boxed{\mathbf{x} = P_\beta[\mathbf{x}]_\beta.}$$

We call P_β the **change-of-coordinates matrix** from β to the standard basis in $\mathbf{R}^n$. Then

回到标准坐标

$$[\mathbf{x}]_\beta = P_\beta^{-1}\mathbf{x}$$

and therefore P_β^{-1} is a **change-of-coordinates matrix** from the standard basis in $\mathbf{R}^n$ to the basis β.

定义

➢ 定理15中矩阵 $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 称为由β到η的坐标变换矩阵，乘以 $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的运算将β-坐标变为η-坐标，图2中给出坐标变换方 程(4)的说明

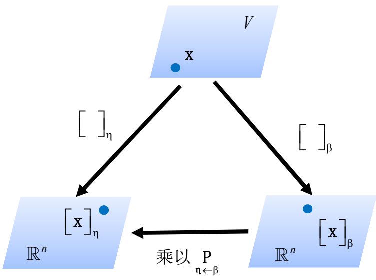

图2 V的两个坐标系

因为 $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的列是线性无关集β的坐标向量（见4.4节习题25）$\Rightarrow$ $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的列是线性无关的 $\Rightarrow$ $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 是可逆的

将(4)两边左乘以 $\left(\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}\right)^{-1}$

$$\left(\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}\right)^{-1}[x]_\eta=[x]_\beta \quad\Rightarrow\quad \left(\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}\right)^{-1}=\underset{\beta\leftarrow\eta}{P} \qquad (6)$$

$\mathbb{R}^n$中基的变换

坐标系统（回顾）

定理（唯一表示定理）

令B={ $\mathbf{b}_1$， ⋯， $\mathbf{b}_n$ }是向量空间 V的一个基，
则对 V中每个向量x, 存在唯一的一组数 $c_1, \cdots, c_n$,
使得：$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$

坐标系统

定义　假设集合B={ $\mathbf{b}_1$， ⋯， $\mathbf{b}_n$ }是 V的一个基，
x在 V中，x相对于基B的坐标(或x的B-坐标)是
使得$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$的权$c_1, \cdots, c_n$.
若$c_1, \cdots, c_n$是x的B-坐标，则$\mathbb{R}^n$中的向量

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ 是x(相对于B)的坐标向量，

映射$\mathbf{x} \to [\mathbf{x}]_B$ 称为（由B确定的）坐标映射.

坐标系统（回顾）

- Example: The entries in the vector $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ are the coordinates of x relative to the standard basis $\varepsilon = (e_1 \quad e_2)$, since

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \bullet e_1 + 6 \bullet e_2$$

$$\varepsilon = \{e_1 \quad e_2\}, \text{则} \left[x\right]_{\varepsilon} = x$$

坐标映射（回顾）

Standard basis for $\mathbf{P}_2$: $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\} = \{1, t, t^2\}$

Polynomials in $\mathbf{P}_2$ behave like vectors in $\mathbf{R}^3$. Since
$a + bt + ct^2 = \underline{\quad a \quad}\mathbf{p}_1 + \underline{\quad b \quad}\mathbf{p}_2 + \underline{\quad c \quad}\mathbf{p}_3$,

$$[a + bt + ct^2]_{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

We say that the vector space $\mathbb{R}^3$ is *isomorphic* to $\mathbf{P}_2$.

Isomorphic:同构的
Isomorphism:同构

$\mathbb{R}^n$中基的变换

$\mathbb{R}^n$中基的变换

✓若 $\beta=\{b_1,\cdots,b_n\}$，ε是$\mathbb{R}^n$中的标准基$\{e_1,\cdots,e_n\}$，则$[b_1]_\varepsilon = b_1$，β中其他向量也类似。在此情形下，$\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 与4.4节中引入的坐标变换矩阵P_β相同，即

$$\underset{\varepsilon\leftarrow\beta}{P} = P_\beta = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_n]$$

$\mathbb{R}^n$中基的变换

例2： 设$b_1 = \begin{pmatrix}-9\\1\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$, $c_1 = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$, 考虑$\mathbb{R}^2$中基$\beta=\{b_1, b_2\}$，$\eta=\{c_1, c_2\}$，求由$\beta$到$\eta$的坐标变换矩阵。

解：
- 矩阵$\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$涉及$b_1$和$b_2$的$\eta$-坐标向量，设$[b_1]_\eta = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$[b_2]_\eta = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，由定义可知

$$b_1 = x_1c_1 + x_2c_2 = [c_1\ c_2]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad b_2 = y_1c_1 + y_2c_2 = [c_1\ c_2]\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

- 将$\mathbf{b}_1$和$\mathbf{b}_2$扩大到系数矩阵中并行化简：

$$[c_1\ c_2 \vdots b_1\ b_2] = \left(\begin{array}{cc:cc}1 & 3 & -9 & -5\\-4 & -5 & 1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 6 & 4\\0 & 1 & -5 & -3\end{array}\right) \qquad (7)$$

秩定理

例2：

解：

$$[b_1]_\eta = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, [b_2]_\eta = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow$所要求得坐标变换矩阵：　① 下一页进行推导

$$\underset{\eta\leftarrow\beta}{P} = \left[[b_1]_\eta\ [b_2]_\eta\right] = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

- $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的第1列是行化简$\left[c_1\ c_2 \vdots b_1\right]$到$\left[I \vdots [b_1]_\eta\right]$的结果
- 对 $\underset{\eta\leftarrow\beta}{P}$ 的第2列也是类似的

$$\Rightarrow \left[c_1\ c_2 \vdots b_1\ b_2\right] \sim \left[I \vdots \underset{\eta\leftarrow\beta}{P}\right]$$

- 求$\mathbb{R}^n$中任意两个基之间的坐标变换矩阵具有类似的步骤

秩定理

① 推导

定理15 $\Rightarrow$

$$[b_1]_\eta = \underset{\eta\leftarrow\varepsilon}{P}[b_1]_\varepsilon = \underset{\eta\leftarrow\varepsilon}{P}\, b_1 =$$

$$\underset{\varepsilon\leftarrow\eta}{P^{-1}}\, b_1 = \left[[c_1]_\varepsilon\ [c_2]_\varepsilon\right]^{-1} b_1$$

$$\Rightarrow \left[c_1\ \ c_2\right]^{-1} b_1 = [b_1]_\eta$$

$$\Rightarrow \left[c_1\ \ c_2\right]^{-1}\left[c_1\ \ c_2\ \ b_1\right] = \left[I\ \ \left[c_1\ \ c_2\right]^{-1} b_1\right] = \left[I\ \ [b_1]_\eta\right]$$

证明可以$\left[c_1\ c_2 \vdots b_1\right]$到$\left[I \vdots [b_1]_\eta\right]$

Q & A