数值计算实验报告

牛顿法反例（不成功示例）

21307347 陈欣宇

（附 newtonMethod.m 用于测试牛顿迭代法）

1. 初始值选择不当

对于 f(x) = x^3 - x - 1 = 0

```
>> f = @(x) x^3 - x -3;
f_prime = @(x) 3*x^2 - 1;
x0 = 1;
newtonMethod(f, f_prime, x0);
k= 1  x= 1  偏差: 1.5
k= 2  x= 2.5  偏差: 0.57042
k= 3  x= 1.9296  偏差: 0.22171
k= 4  x= 1.7079  偏差: 0.035308
k= 5  x= 1.6726  偏差: 0.00085809
k= 6  x= 1.6717  偏差: 5.0029e-07
近似根的值: 1.6717
迭代次数: 6
```

x0=1 的时候收敛

X0=0 及以下的导数值为负，使得猜测值朝着负方向偏移，导致迭代过程发散

```
>> f = @(x) x^3 - x -3;
f_prime = @(x) 3*x^2 - 1;
x0 = 0 ;
newtonMethod(f, f_prime, x0);
k= 995  x= -1.9619  偏差: 0.8144
k= 996  x= -1.1475  偏差: 1.1401
k= 997  x= -0.0074461  偏差: 2.9931
k= 998  x= -3.0005  偏差: 1.0386
k= 999  x= -1.9619  偏差: 0.8144
k= 1000  x= -1.1475  偏差: 1.1401
近似根的值: -0.0074461
迭代次数: 1000
```

```
>> f = @(x) x^3 - x -3;
f_prime = @(x) 3*x^2 - 1;
x0 = -3 ;
newtonMethod(f, f_prime, x0);
k= 995  x= -1.1475  偏差: 1.1401
k= 996  x= -0.0074461  偏差: 2.9931
k= 997  x= -3.0005  偏差: 1.0386
k= 998  x= -1.9619  偏差: 0.8144
k= 999  x= -1.1475  偏差: 1.1401
k= 1000  x= -0.0074461  偏差: 2.9931
近似根的值: -3.0005
迭代次数: 1000
```

2. 多重根

对于 f(x) = (x - 1)^3 = 0

方程有一个三重根，导致迭代过程在根附近来回震荡，而无法快速逼近根。

```
>> f = @(x) (x - 1)^3;
f_prime = @(x) 3*(x - 1)^2;
x0 = 2;
newtonMethod(f, f_prime, x0);
```

```
k= 23  x= 1.0001  偏差：4.4552e-05
k= 24  x= 1.0001  偏差：2.9702e-05
k= 25  x= 1.0001  偏差：1.9801e-05
k= 26  x= 1  偏差：1.3201e-05
k= 27  x= 1  偏差：8.8005e-06
k= 28  x= 1  偏差：5.867e-06
k= 29  x= 1  偏差：3.9113e-06
k= 30  x= 1  偏差：2.6075e-06
k= 31  x= 1  偏差：1.7384e-06
k= 32  x= 1  偏差：1.1589e-06
k= 33  x= 1  偏差：7.7261e-07
近似根的值：1
迭代次数：33
```

3. 函数不可导或函数为零

如 f(x) = |x| = 0，在 x = 0 处不可导，无法使用牛顿迭代法

还有 f(x) = x^3 = 0，在 x = 0 处的导数为零

```
>> f = @(x) x^3;
f_prime = @(x) 3*x^2;
x0 = 0;
newtonMethod(f, f_prime, x0);
错误使用 newtonMethod (第 22 行)
迭代失败：导数为零
```

另外还有例子 f(x) = arctan(x) = 0 根为 0

在 x0 远离根情况下会出现发散，并且发散到一定程度导数小于 eps

```
>> f = @(x) atan(x);
f_prime = @(x) 1/(1+x^2);
x0 = 1;
>> newtonMethod(f, f_prime, x0);
k= 1  x= 1  偏差：1.5708
k= 2  x= -0.5708  偏差：0.68766
k= 3  x= 0.11686  偏差：0.11792
k= 4  x= -0.001061  偏差：0.001061
k= 5  x= 7.9631e-10  偏差：7.9631e-10
近似根的值：0
迭代次数：5
```

发散情况：

```
>> f = @(x) atan(x);
f_prime = @(x) 1/(1+x^2);
x0 = 1.5;
newtonMethod(f, f_prime, x0);
```

```
k= 1  x= 1.5  偏差：3.1941
k= 2  x= -1.6941  偏差：4.0152
k= 3  x= 2.3211  偏差：7.4352
k= 4  x= -5.1141  偏差：37.4098
k= 5  x= 32.2957  偏差：1607.6126
k= 6  x= -1575.317  偏差：3896551.3247
k= 7  x= 3894976.0078  偏差：23830292868528.13
错误使用 newtonMethod (第 22 行)
迭代失败：导数为零
```

通过以上反例可看到牛顿迭代法的适用情况和局限性，改善牛顿迭代法需要合适的初始猜测值，针对特殊情况改进算法，如使用割线法、修正的牛顿法等。