第三章 逼近与拟合

内容提要

3.1 基本概念

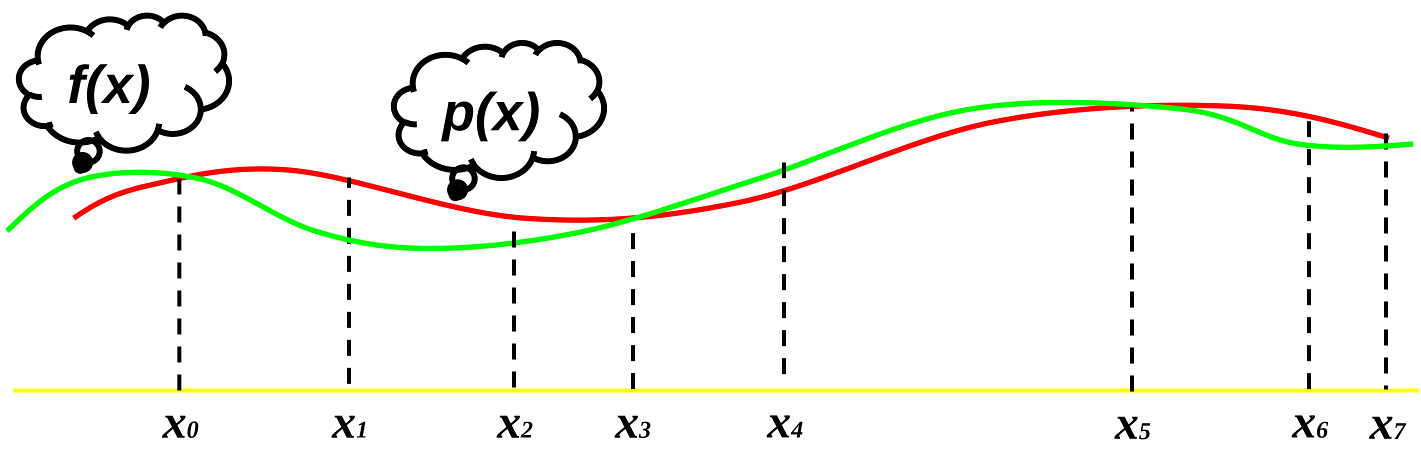
3.2 最佳平方逼近

3.3 曲线拟合的最小二乘法

函数逼近vs曲线拟合

3.1基本概念

1、**函数逼近问题**：对于函数类 A 中给定的函数 $f(x)$，记作$f(x)\in A$，要求在另一类简单的便于计算的函数类 C 中求函数 $p(x)\in C$，使 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的误差在某种度量意义下达到最小。



2、范数与赋范线性空间

定义3-1 设 S 是实数域上的线性空间，$x \in S$ ，如果存在唯一实数取值的函数 $\|\cdot\|$，满足条件：

(1) $\|x\| \geq 0$; 当且仅当 $x=0$ 时，$\|x\|=0$;　　(正定性)

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,　$\alpha \in \mathrm{R}$;　　(齐次性)

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,　$x, y \in S$;　　(三角不等式)

则称 $\|\cdot\|$ 为线性空间S上的**范数**，S 与 $\|\cdot\|$ 一起称为**赋范线性空间**，记为 X.

例如，对 $\mathbf{R}^n$ 上的向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，有 三种常用范数：

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|,$$ 称为 $\infty-$范数或最大范数，

∞最大

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| \ ,$$ 称为 $1-$范数，

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$ 称为 $2-$范数。

类似地，对连续函数空间 $C[a,b]$，若 $f\in C[a,b]$，可定义三种常用范数：

$$\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)|,$$ 称为 $\infty-$范数，

∞最大

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$ 称为 $1-$范数，

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$ 称为 $2-$范数。

例如　计算函数 $f(x)=(x-1)^3$ 关于$[0,1]$ 的 $\|f\|_\infty$、$\|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$

解　因 $f'(x)=3(x-1)^2>0$，$x\in(0,1)$，

故 $f(x)$ 单调增加，于是

$$\|f\|_\infty=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|=\max_{0\le x\le 1}|(x-1)^3|$$

$$=\max_{0\le x\le 1}\{|f(0)|,|f(1)|\}=1$$

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2=\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\int_0^1(1-x)^6\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$$

验算

3、内积与内积空间

定义3-2 设 X 是数域 K(R或C) 上的线性空间，对 $\forall u,v\in X$，有 K 中一个数与之对应，记为 (u,v)，并满足以下条件：

(1) $(u,v)=\overline{(v,u)}$，$\forall u,v\in X$；

(2) $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$，$\forall\alpha\in \mathrm{K}$，$\forall u,v\in X$；

(3) $(u+v,w)=(u,w)+(v,w)$，$\forall u,v,w\in X$；

(4) $(u,u)\geq 0$；当且仅当 $u=0$ 时，$(u,u)=0$.

则称(u,v)为X上的u与v 的**内积**。定义了内积的线性空间称为**内积空间**，$\overline{(v,u)}$为(u,v)的共轭，当$\mathrm{K}=\mathrm{R}$时 $(v,u)=(u,v)$。

例如线性代数中，R^n 中两个向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 及 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 的内积定义为

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

例如(1) 在$\mathbb{R}^n$上，$x, y \in \mathbb{R}^n$, $\rho_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$为权系数，可以定义带权内积与相应的范数为

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i y_i \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2 \right)^{1/2}$$

(2) 在$C[a,b]$上, $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\rho(x)$是$[a,b]$上的权函数，可以定义带权内积与相应的范数为

$$\big(f(x), g(x)\big) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x \qquad \|f(x)\|_2 = (f(x), f(x))^{1/2} = \left[\int_a^b \rho(x) f^2(x) \mathrm{d}x \right]^{1/2}$$

定理3-1 设 X 为一个内积空间，$u_1, u_2, \cdots, u_n \in X$ ，矩阵

$$G = \begin{bmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) & \cdots & (u_n, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) & \cdots & (u_n, u_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (u_1, u_n) & (u_2, u_n) & \cdots & (u_n, u_n) \end{bmatrix}$$

称为 Gram 矩阵，则 G 非奇异的充要条件是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 线性无关。

3.2 最佳平方逼近

1、最佳平方逼近

对 $f(x)\in C[a,b]$，及$C[a,b]$中的一个子集

$\phi=\mathrm{span}\{\phi_0(x),\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x)\}$，若存在$S^*(x)\in\phi$ 使

$$\|f(x)\text{-}S^*(x)\|_2^2=\min_{S(x)\in\phi}\|f(x)\text{-}S(x)\|_2^2$$

$$=\min_{S(x)\in\phi}\int_a^b\rho(x)[f(x)-S(x)]^2\mathrm{d}x,$$

则称$S^*(x)$为$f(x)$在子集$\phi\subset C[a,b]$ 中的$\boxed{\text{最佳平方逼近函数}}$。

2、最佳平方逼近的计算

求解$S^*(x)$问题$\Rightarrow$求多元函数 $I(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 最小值问题,

其中$I(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\int_a^b\rho(x)\left[\sum_{j=0}^n a_j\,\phi_j-f(x)\right]^2\mathrm{d}x$

利用多元函数求极值的必要条件

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0 \qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

得

$$\frac{\partial I(a_0,\cdots,a_n)}{\partial a_k}=2\int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n}\boxed{a_j}\phi_j(x)-f(x)\right]\phi_k(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\sum_{j=0}^{n}a_j\phi_j(x)-f(x),\phi_k(x)\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{n}(a_j\phi_j(x),\phi_k(x))-(f(x),\phi_k(x))=0$$

于是有

$$\sum_{j=0}^{n}(\phi_j(x),\phi_k(x))a_j=(f(x),\phi_k(x)) \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

推导

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & \cdots & (\phi_0,\phi_n) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & \cdots & (\phi_1,\phi_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\phi_n,\phi_0) & (\phi_n,\phi_1) & \cdots & (\phi_n,\phi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_0) \\ (f,\phi_1) \\ \vdots \\ (f,\phi_n) \end{bmatrix},$$

关于$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的线性方程组，称为法方程，由于ϕ_0 ，ϕ_1 ，$\cdots$ ，ϕ_n 线性无关，故系数$\det G(\phi_0，\phi_1,\cdots，\phi_n)\neq 0$，方程组有唯一解。从而得到

$$S^*(x)=a_0^*\phi_0(x)+\cdots+a_n^*\phi_n(x)$$

进一步可以证明 $\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2 \mathrm{d}x \le \int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2 \mathrm{d}x,\ \forall S\in\phi$.

从而，$S^*(x)$是$f(x)$在ϕ 中的最佳平方逼近函数。

若令$\delta(x)=f(x)-S^*(x)$，则最佳平方逼近的误差为

$$\begin{aligned} \|\delta(x)\|_2^2 &= (f(x)-S^*(x),\ f(x)-S^*(x)) \\ &= (f(x),f(x))-(S^*(x),f(x)) \\ &= \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^*(\phi_k(x),\ f(x)) \end{aligned}$$

见教材68页

由于 $S^*(x)$的系数 a_k^* 是线性方程组(3.3)的解，故

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0,\quad k=0,1,\cdots,n$$

例3-1 求$f(x)=\sqrt{x}$在$\left[\frac{1}{4},1\right]$上的在$\phi=\text{span}\{1,x\}$中的关于$\rho(x)=1$的最佳平方逼近多项式，并求出平方逼近的误差。

解 已知$\phi_0=1$, $\phi_1=x$, 设所求$S_1^*(x)=a_0+a_1x$, 得法方程

$$\begin{bmatrix}(\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1)\\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\phi_0)\\ (f,\phi_1)\end{bmatrix},$$

$$(\phi_0,\phi_0)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x=\tfrac{3}{4},\quad (\phi_1,\phi_1)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}x^2\mathrm{d}x=\tfrac{21}{64}$$

$$(\phi_1,\phi_0)=(\phi_0,\phi_1)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}x\mathrm{d}x=\tfrac{15}{32}$$

$$(f,\phi_0)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{7}{12}$$

$$(f,\phi_1)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}x\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{31}{80}$$

验算

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{15}{32} \\ \frac{15}{32} & \frac{21}{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{31}{80} \end{bmatrix}, \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 = \frac{10}{27}, \\ a_1 = \frac{88}{135}. \end{cases}$$

$$S_1^*(x) = \frac{10}{27} + \frac{88}{135} x.$$

最佳平方逼近的误差

$$\| \delta(x) \|_2^2 = \int_{\frac{1}{4}}^{1} x \, \mathrm{d}x - \left(\tfrac{10}{27} \times \tfrac{7}{12} + \tfrac{31}{80} \times \tfrac{88}{135}\right) = 0.0001082$$

例3-2 设 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$，求 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式。

分析：本题可利用希尔伯特矩阵直接写出系数矩阵。详见教材p68关于希尔伯特矩阵的定义.

解：$$(f,\phi_0)=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$

$$(f,\phi_1)=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.609$$

得线性方程组

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.147\\ 0.609\end{bmatrix}$$

解得　$a_0=0.934,\quad a_1=0.426$

故　$S_1^*(x)=0.934+0.426x$

最佳平方逼近误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2=(f(x),f(x))-(S_1^*(x),f(x))$$

$$=\int_0^1(1+x^2)dx-（0.426(f,\phi_1)+0.934(f,\phi_0)）=0.0026$$

3.3 曲线拟合的最小二乘法

最小二乘法及其计算

测量数据的拟合是一个既古老，但又非常实用的问题。设已获得一组杂乱无章的实验数据

$$(x_i, y_i),\ i = 0,1,2,\cdots,m >> n$$

我们希望从中找出规律来，也就是构造一个近似函数 $s(x)$ 去逼近所求函数 $y = f(x)$ 。

最小二乘问题一般提法：对于给定的数据 (x_i, y_i) $(i = 0,1,\cdots,m)$，要求在给定函数类 $\phi = \mathrm{span}\{\phi_0,\cdots,\phi_n\}$ 中找一函数

$$s^*(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \phi_j, \quad n < m,$$

使$s^*(x)$满足

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{m} [s^*(x_i) - y_i]^2$$

$$= \min_{s(x)\in\phi} \sum_{i=0}^{m} [s(x_i) - y_i]^2.$$

更一般提法, 使$s^*(x)$ 满足

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)[s^*(x_i) - f(x_i)]^2$$

$$= \min_{s(x)\in\phi} \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)[s(x_i) - f(x_i)]^2$$

其中$\rho(x)$是$[a, b]$上的权函数。

问题归结为求 $s^*(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^* \phi_k(x)$, 即求系数 a_k^*, 使得

$$I(a_0,\cdots,a_n)=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)\left[\sum_{k=0}^{n}\boxed{a_k}\,\phi_k(x_i)-f(x_i)\right]^2$$

取得极小值.

由多元函数求极值的必要条件

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=2\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)\left[\sum_{j=0}^{n}\boxed{a_j}\phi_j(x_i)-f(x_i)\right]\phi_k(x_i)=0$$

$$(k=0,1,\cdots,n)$$

引进内积

$$(\phi_k,\phi_j)=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)\phi_k(x_i)\phi_j(x_i)$$

$$(f,\phi_j)=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)f(x_i)\phi_j(x_i)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & \cdots & (\phi_0,\phi_n) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & \cdots & (\phi_1,\phi_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\phi_n,\phi_0) & (\phi_n,\phi_1) & \cdots & (\phi_n,\phi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_0) \\ (f,\phi_1) \\ \vdots \\ (f,\phi_n) \end{bmatrix}$$

称为法方程. 但是$\phi_0(x),\cdots,\phi_n(x)$在$C[a,b]$上线性无关，

不能保证其系数矩阵非奇异.

例如， $\phi_0=\sin x,\phi_1=\sin 2x, x\in[0,2\pi], x_k=k\pi, k=0,1,2.$

$$G=\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) \end{bmatrix}=0$$

定义3-3 设$\phi_0(x),\cdots,\phi_n(x)\in C[a,b]$的任意线性组合在点集$\{x_i, i=0,1,\cdots,m\}(m\geq n)$上至多只有$n$个不同的零点，则称$\phi_0(x),\cdots,\phi_n(x)$在点集$\{x_i, i=0,1,\cdots,m\}$上满足**Haar条件**。

显然$1, x, \cdots, x^n$在任意$m(m \ge n)$个点上满足Haar**条件**。

可证，若$\phi_0(x), \cdots, \phi_n(x) \in C[a,b]$在$\{x_i\}_0^m$上满足Haar**条件**，则$\det(G_n) \ne 0.$

可求出a_j^*，得到 $$s^*(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \phi_j.$$

进一步可以证明 $$\sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)[s^*(x_i) - f(x_i)]^2 \le \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)[s(x_i) - f(x_i)]^2, \ \forall s \in \phi .$$

从而，$s^*(x)$是最小二乘解.

常用多项式拟合：$\phi = \mathrm{span}\{\phi_0, \cdots, \phi_n\} = \mathrm{span}\{1, x, \cdots, x^n\}$,

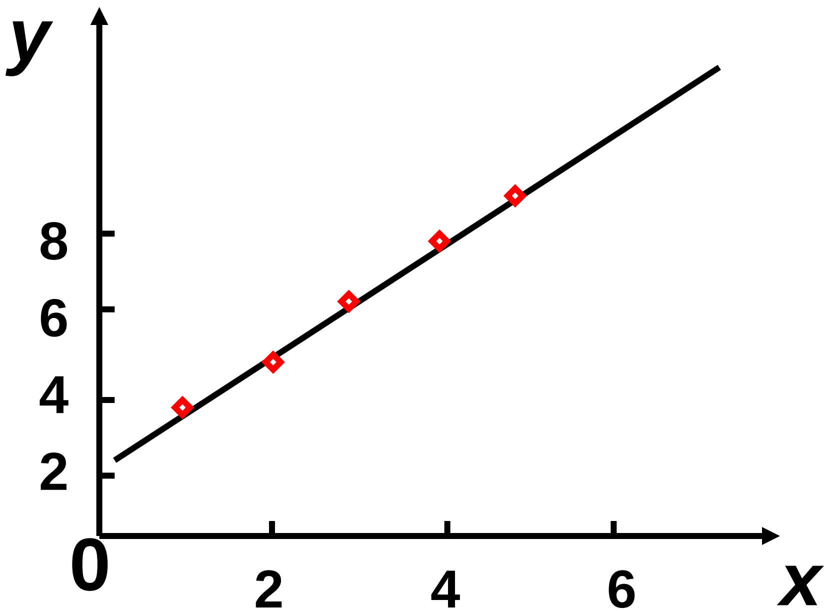
$s^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x^k$. 法方程为

$$\begin{bmatrix} \sum \rho_i & \sum \rho_i x_i & \cdots & \sum \rho_i x_i^n \\ \sum \rho_i x_i & \sum \rho_i x_i^2 & \cdots & \sum \rho_i x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum \rho_i x_i^n & \sum \rho_i x_i^{n+1} & \cdots & \sum \rho_i x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \rho_i y_i \\ \sum \rho_i x_i y_i \\ \vdots \\ \sum \rho_i x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

速记

例3-3 已知实测数据表如下, 求它的拟合曲线

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4	4.5	6	8	8.5
p_i	2	1	3	1	1



解： 设$s_1(x)=a_0+a_1x$,， $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$, 故

$$(\varphi_0(x),\varphi_0(x))=\sum_{i=0}^{4}\rho_i=8$$

$$(\varphi_0(x),\varphi_1(x))=(\varphi_1(x),\varphi_0(x))=\sum_{i=0}^{4}\rho_i x_i=22$$

$$(\varphi_1(x),\varphi_1(x))=\sum_{i=0}^{4}\rho_i x_i^2=74$$

$$(\varphi_0(x),f)=\sum_{i=0}^{4}\rho_i f_i=47,\ (\varphi_1(x),f)=\sum_{i=0}^{4}\rho_i x_i f_i=145.5$$

法方程组为

验算

$$\begin{bmatrix}8 & 22\\ 22 & 74\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47\\ 145.5\end{bmatrix},$$

解得$a_0=2.5648$, $a_1=1.2037$

于是所求拟合曲线为 $s_1^*(x)=2.5648+1.2037x.$

例3-4 已知实测数据表如下，确定数学模型 $y=ae^{bx}$，用最小二乘法确定a，b。

i	0	1	2	3	4
x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

分析：根据给定数据描图也可确定拟合曲线方程，但它不是线性形式。因此首先要将经验曲线线性化。本题可以采取等式两边取对数的形式线性化。数据表中的数值也相应的转化为取对数之后的数值，见下表。

解：曲线方程不是线性形式，两边取对数得

$$\ln y = \ln a + bx,$$

若令 $\underline{y} = \ln y$, $A = \ln a$, 则得 $\underline{y} = A + bx$, $\phi = \{1, x\}$.

i	0	1	2	3	4
x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
$\underline{y}_i$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

根据最小二乘法，$\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$, $\rho(x)\equiv 1$,

$$(\varphi_0(x),\varphi_0(x)) = \sum_{i=0}^{4} 1 = 5$$

$$(\varphi_0(x),\varphi_1(x)) = (\varphi_1(x),\varphi_0(x)) = \sum_{i=0}^{4} x_i = 7.5$$

验算

$$(\varphi_1(x),\varphi_1(x)) = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 11.875$$

$$(\varphi_0(x),\underline{y}) = \sum_{i=0}^{4} \underline{y_i} = 9.404,\ (\varphi_1(x),\underline{y}) = \sum_{i=0}^{4} x_i\,\underline{y_i} = 14.422.$$

法方程组为

$$\begin{bmatrix} 5 & 7.50 \\ 7.50 & 11.875 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.404 \\ 14.422 \end{bmatrix},$$

解得 $A = 1.122,\ b = 0.505,\ a = \mathrm{e}^{A} = 3.071,$

于是最小二乘拟合曲线为

$$y = 3.071\mathrm{e}^{0.505x}$$

例 3-5 已知实验数据如下表所示，用最小二乘法求形如$y=a+bx^2$的经验公式，并计算拟合误差。

i	0	1	2	3	4
x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解：$\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x^2$，$\rho(x)\equiv 1$，

$$(\varphi_0(x),\varphi_0(x))=\sum_{i=0}^{4}1=5\text{，}(\varphi_0(x),\varphi_1(x))=(\varphi_1(x),\varphi_0(x))=\sum_{i=0}^{4}x_i^2=5327$$

$$(\varphi_1(x),\varphi_1(x))=\sum_{i=0}^{4}x_i^4=7277699$$

$$(\varphi_0(x),y)=\sum_{i=0}^{4}y_i=271.4,\ (\varphi_1(x),y)=\sum_{i=0}^{4}x_i^2y_i=369321.5$$

验算

法方程组为

$$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{bmatrix},$$

得 $a = 0.972579,\ b = 0.050035$

于是最小二乘拟合曲线为

$$y = 0.972579 + 0.050035x^2$$

误差$\delta = \left(\sum_{i=0}^{4} [y(x_i) - y_i]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.1226$

例12 用最小二乘法求如下超定方程组的近似解.

$3x-2y=1$， $2x+y=2$， $x-4y=-1$， $3x+2y=-3$

解 记$r(x,y)=(3x-2y-1)^2+(2x+y-2)^2+(x-4y+1)^2+(3x+2y+3)^2$

令 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\partial r}{\partial y}=0$

则有

$$\begin{cases}6(3x-2y-1)+4(2x+y-2)+2(x-4y+1)+6(3x+2y+3)=0\\-4(3x-2y-1)+2(2x+y-2)-8(x-4y+1)+4(3x+2y+3)=0\end{cases}$$

即

有无更简单解法?

$$\begin{cases}23x-2y=-3\\-2x+25y=-2\end{cases}$$

解得 $x=-0.138354$, $y=-0.091068$

知识结构图

- 函数逼近理论
  - 预备知识
    - 范数（定义、常用范数）
    - 内积（定义、柯西-施瓦茨不等式、内积诱导范数）
    - 正交多项式（性质、正交化方法、常用正交多项式的定义和性质）
  - 函数逼近与曲线拟合
    - 最佳一致逼近多项式
      - 定义
      - 存在唯一性定理
      - 切比雪夫定理
      - 最佳一致一次逼近多项式
    - 最佳平方逼近
      - 定义
      - 法方程组和逼近误差
      - 基于正交基的最佳平方逼近
    - 最小二乘拟合
      - 离散内积定义
      - 法方程组及哈尔条件
      - 基于正交基的最小二乘拟合

复习与思考题(无需提交)

P92: 1, 2, 4, 5

习题(需提交)

P95: 16, 17

A3.2 正交多项式

定理A3　若$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$为$C[a, b]$上的一组线性无关函数，则可得到$C[a, b]$上一组两两正交的函数组$g_0(x), g_1(x), \ldots, g_n(x)$满足

(1) $g_k(x)$为$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_k(x)$的线性组合；

(2) $f_k(x)$为$g_0(x), g_1(x), \ldots, g_k(x)$的线性组合.

证　只要按**Schemite正交化过程**构造

$$g_0(x) = f_0(x),$$

$$g_1(x) = f_1(x) - \frac{(f_1, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0(x),$$

$$\vdots$$

$$g_n(x) = f_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f_n, g_i)}{(g_i, g_i)} g_i(x).$$

$g_0(x), g_1(x), \ldots, g_n(x)$ 两两正交且满足(1), (2). 再令

$$e_k(x) = \frac{1}{\|g_k\|_2} g_k(x) \qquad , k = 0,1,\ldots,n$$

称函数组 $e_0(x), e_1(x), \ldots, e_n(x)$ 为**规范正交组**.

P_n上由线性无关函数$1, x, x^2, \ldots, x^n$ 经过Schemite正交化过程得到的多项式$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$称为$[a, b]$上的**正交多项式**.

例9 求区间$[-1, 1]$上, 权函数$\rho(x)=1$的正交多项式.

解 按Schemite正交化过程有

$$p_0(x)=1,$$

$$p_1(x) = x - \frac{(x,1)}{(1,1)} \times 1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} dx} = x$$

推算

$$p_2(x) = x^2 - \frac{(x^2,1)}{(1,1)} \times 1 - \frac{(x^2,x)}{(x,x)} x$$

$$= x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x \ = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$p_3(x) = x^3 - \frac{(x^3,1)}{(1,1)} \times 1 - \frac{(x^3,x)}{(x,x)} x - \frac{(x^3, x^2 - \frac{1}{3})}{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})} (x^2 - \tfrac{1}{3})$$

$$= x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^4 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x - \frac{\int_{-1}^{1} x^5 - \frac{1}{3} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} (x^2 - \tfrac{1}{3})^2$$

$$= x^3 - \frac{3}{5} x$$

$$\vdots$$

推算

若$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$是$[a, b]$上权函数为$\rho(x)$的正交多项式,则有下列性质:

(1) $p_k(x)$是首项系数不为零的k次多项式;

(2) $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$构成$P_n$上的一组正交基;

(3) $p_n(x)$与任一不高于n-1次的多项式正交, $p_n(x) \perp P_{n-1}$

(4) 方程$p_n(x)=0$在$[a, b]$上有n个单根;

下面介绍四组常用的正交多项式(见教材59页):

1. Legendre多项式(见教材61页)

2. Chebyshev多项式

3. Laguerre多项式

4. Hermite多项式

重要知识(数值积分需用)