线性代数 (Linear Algebra)



第四章 Vector Spaces

§ 4.5 The Dimension of a Vector Space 向量空间的维度

衡益

2021 年 11 月 25 日,中山大学南校区

什么是向量空间的维度?





向量空间V的维度记 为dim V

> dim V = V的一组 基中的向量个数

is it well defined?



维度

3

维度



定理9

 \checkmark 若向量空间V具有一组基 $β = \{b_1, \dots, b_n\}$,则V中包含多于n 个向量的集合一定线性相关。

证: \diamondsuit $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ 是V中一个含有多于n个向量的集合

- 坐标向量 $\left[\mathbf{u}_{1}\right]_{\beta}$, ... , $\left[\mathbf{u}_{p}\right]_{\beta}$ 个数 $\left(p\right)$ 大于每个向量中数字的个数 $\left(n\right)$
- 存在 $c_1, \cdots c_p$ 不全为0,使得

$$c_{\scriptscriptstyle 1}\left[\mathbf{u_1}\right]_{\!\beta} + \dots + c_{\scriptscriptstyle p}\left[\mathbf{u}_{\scriptscriptstyle p}\right]_{\!\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^n$$
中的零向量

 c_i 不全为0 $\Rightarrow \{\mathbf{u_1, \cdots, u_p}\}$ 是线性相关的

• 坐标映射是线性变换 $\Rightarrow c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_p \mathbf{u}_p = 0 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{b}_n = \mathbf{0}$

维度



定理10

✓若向量空间V具有一组基含有n 个向量,则V 的每一组基一定 恰好含有n个向量。

证: $\phi \beta_1$ 是一个含n个向量的基, β_2 是V的任一另外的基

- 由基的定义 \Rightarrow $\beta_1 \pi \beta_2$ 是线性无关的
- 由定理9 ⇒ β₂不能含有多于n个向量
- β_2 是一个基,并且 β_1 是线性无关的 $\Rightarrow \beta_2$ 至少含有n个向量



β2恰好含有η个向量

维度



定义

 $\dim V$, 是V的基中含有向量的个数,零向量空间 $\{0\}$ 的维度定义 为零,如果1/不是由一有限集生成,则1/称为无穷维的。

例1: P_3 的标准基是 $\{1, t, t^2, t^3\} \Rightarrow \dim P_3 = 4$ 。

一般而言, $\dim \mathbf{P}_n = n+1$

例2: \mathbb{R}^n 的标准基是 $\{e_1,\ldots,e_n\}$, 其中 e_1,\ldots,e_n 是 I_n 的列向量 $\dim \mathbb{R}^3 = 3$



1

有限维度空间的子空间



定理*

不少于两个有编号的向量的集合 $\{v_1, \cdots, v_p\}$,如果有 $\{v_1, \cdots, v_p\} \neq \mathbf{0}$,则 $\{v_1, \cdots, v_p\}$ 是<mark>线性相关的,当且仅当 v_j (j > 1)是前面向量 v_1, \cdots, v_{j-1} 的线性组合。</mark>



定理11

✓ 令H是有限向量空间V的子空间,若有需要的话,H 中任一个 线性无关集均可以扩充成为H 的一个基,H 也是有限维的,并且

$\dim H \leq \dim V$

- 否则, 令S={u₁, ···, u_k}是H中任一线性无关集

 - 否则,存在H中某向量 \mathbf{u}_{k+1} 不在Span S中,但 $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+l}\}$ 将会是线性无关的(由定理* \Rightarrow 此集中没有一个向量可表示为其前面向量的线性组合)。

有限维度空间的子空间

定理11证明

证(续上页):

- 只要这个新集合不能生成H⇒我们就可以继续扩展S到H中一个 更大的线性无关集的过程
- 但由定理9 ⇒ S的线性无关扩充中向量的个数永远不能超过V的 维度
- $\Rightarrow S$ 继续扩展,最终会生成H,而且将成为H的一个基,同时 $\dim H \le \dim V$



例3: 设H=Span $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$, H是 \mathbb{R}^3 的子空间,并且 $\dim H \leq \dim \mathbb{R}^3$ 。



$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
扩展为
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ \text{从而形成} \mathbb{R}^3 \text{的一组基}$$

有限维度空间的子空间



定理12 (基定理)

✓ 若V是一个p维向量空间, $p \ge 1$,V中任意含有p个元素的线性无关集必然是V的一个基。任意含有p个元素且生成V的集合必然是V的一个基。



定理12 (基定理)

证:

- 由定理 $11 \Rightarrow$ 含p个元素的线性无关集S可以扩展为V的一个基
- 但由 $\dim V=p$, 基必须恰好包含p个向量 $\Rightarrow S$ 已经是V的一个基
- 假设S含有p个向量且生成V
 - 因V是非零的,由Spanning Set定理** \Rightarrow S的子集S'是V的一个基
 - 因 $\dim V=p$, S'-定包含p个向量 $\Rightarrow S=S'$

13

有限维度空间的子空间



定理**: Spanning Set 定理

 $\diamondsuit S = \{v_1, \dots, v_p\}$ 是 V 中的向量集,H=Span $\{v_1, \dots, v_p\}$.

- a. 若S 中某一个向量,比如说 v_k ,是S 中其余向量的线性组合,则S 中去掉 v_k 后形成的集合仍然可以生成H.
- b. 若 $H \neq \{0\}$,则S 的某一子集是H 的一个基。

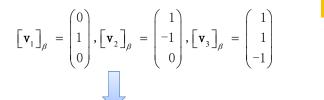


例4:证明 $\{t,1-t,1+t-t^2\}$ 是 P_2 的一组基。

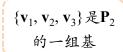
AF: \Rightarrow $\mathbf{v}_1 = t$, $\mathbf{v}_2 = 1 - t$, $\mathbf{v}_3 = 1 + t - t^2$, $\beta = \{1, t, t^2\}$

由dim **P**₂= 3

▶ 对应的坐标向量:







 $\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}_{\beta}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}_{\beta}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}_{\beta} \right\}$ 线性无关 $\Rightarrow \left\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \right\}$ 也是线性无关的

15



Nul A和Col A的维度



Nul A和Col A的维度

定义

dim Col A = A中主元列的个数

dim Nul A = A中自由变量的个数

例5: 设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
, 求dim Col A和dim Nul A。

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 \Rightarrow

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \text{ E Col A} \text{ on } -44 \text{ E dim Col A} = 2$$

17

Nul A和Col A的维度



定理11

▶ 通过行化简增广矩阵来求解Ax=0:

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\
2 & 4 & 7 & 8 & 0
\end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
x
\end{vmatrix} = x_2 \begin{pmatrix}
-2 \\
1 \\
0 \\
0
\end{pmatrix} +$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ \mathbb{E} Nul A in \mathbb{E} in \mathbb{E} Nul \mathbb{E} is \mathbb{E} in \mathbb{E} and \mathbb{E} is \mathbb{E} in $\mathbb{E}$$$

子空间的秩



定理

秩定理:如果一矩阵 A有 n列,则 rank A + dim Nul A = n. 基定理:设 H是 R n的 p维子空间,H 中的任何恰好由 p 个成员组成的线性无关集构成H的一个基.并且,H 中任何生成H的 p 个向量集也构成H的一个基。

19



Q&A