本次课程提纲：树

- 树的概念与应用
- 树的性质
- 树的中心与形心

树的概念

- 不含圈的图称为无圈图
- 树是连通的无圈图
- 森林：无圈图

树的概念

- 不含圈的图称为无圈图
- 树是连通的无圈图
- 森林：无圈图

定理

树与森林都是偶图

树的概念

- 不含圈的图称为无圈图
- 树是连通的无圈图
- 森林：无圈图

定理

树与森林都是偶图

证明

由定理“一个图是偶图当且当它不包含奇圈”易证

习题

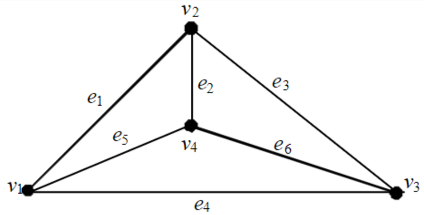
画出所有不同构的 6 阶树

树的应用

- 由于简单结构，图论研究的“试验田”
- 刻画家族繁衍情况：根树

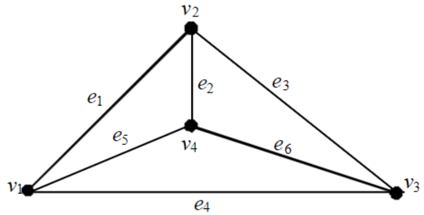
树的应用

- 由于简单结构，图论研究的“试验田”
- 刻画家族繁衍情况：根树
- 道路的铺设
  - 假设要在某地建造 4 个工厂，拟修筑道路连接这 4 处。道路可按下图的边铺设，我们要求铺设的道路总长度最短，如何铺设?
  - 最小生成树问题



树的应用

- 由于简单结构，图论研究的“试验田”
- 刻画家族繁衍情况：根树
- 道路的铺设
  - 假设要在某地建造 4 个工厂，拟修筑道路连接这 4 处。道路可按下图的边铺设，我们要求铺设的道路总长度最短，如何铺设?
  - 最小生成树问题



- 电网络中独立回路与图的生成树：Kirchhoff
  - 如果电路是 (n, m) 图，则独立回路的个数为 $m - n + 1$
  - 生成树添上生成树外的一条边，就得到一独立回路

树的性质

定理

每棵非平凡树至少有两片树叶

证明

- 设 $P = v_1 \cdots v_k$ 是非平凡树 T 中一条最长路,
- v_1 与 v_k 在 T 中的邻接点只能有一个,
- 否则，要么推出 P 不是最长路，要么推出 T 中存在圈，矛盾!

树的性质

定理

图 G 是树当且仅当 G 中任意两点都被唯一的路连接

证明

- 必要性
  - 若不然，设 P_1 与 P_2 是连接 u 与 v 的两条不同的路，则存在圈，矛盾!
- 充分性
  - 因 G 的任意两点均由唯一路相连，所以 G 是连通的
  - 若 G 中存在圈，则在圈中任取点 u,v，可得到连接它们的两条不同的路，矛盾!

树的性质

定理

设 T 是 (n,m) 树，有 $m=n-1$

证明：对 n 作数学归纳

- $n=1$ 时，显然
- 设 $n=k$ 时等式成立。考虑 $n=k+1$ 的树 T
- 我们已证明 T 中至少有两片树叶，设 u 是树叶，考虑 $T_1=T-u$
- T_1 为 k 阶树，于是 $m(T_1)=k-1$，故 $m(T)=k$

树的性质

定理

设 T 是 (n, m) 树，有 $m = n - 1$

证明：对 n 作数学归纳

- $n = 1$ 时，显然
- 设 $n = k$ 时等式成立。考虑 $n = k + 1$ 的树 T
- 我们已证明 T 中至少有两片树叶，设 u 是树叶，考虑 $T_1 = T - u$
- T_1 为 k 阶树，于是 $m(T_1) = k - 1$，故 $m(T) = k$

推论

具有 k 个分支的森林有 $n - k$ 条边

证明

- 易证

树的性质

习题

设 T 为 12 条边的树，其顶点度为 $1, 2, 5$。如果 T 恰有 3 个度为 2 的点，T 有多少片树叶

解答

- 设 T 有 x 片树叶。由 $m = n - 1$ 得 $n = 13$
- 由握手定理得
  - $1 \times x + 2 \times 3 + 5 \times (10 - x) = 2 \times 12$，$x = 8$

树的性质

习题

设 T 为 (n, m) 树，T 中有 n_i 个度为 i 的点，且 $\sum_i n_i = n$，求证

- $n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + \cdots + (k-2)n_k$

证明

- 由 $m = n - 1$ 得 $m = \sum n_i - 1$
- 由握手定理得 $2m = n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k$
- 以上两式联立即可

树的性质

定理

每个 n 阶连通图的边数至少为 $n-1$

证明

- 如果没有一度顶点，由握手定理有
  - $m = \sum_{v \in V} d(v)/2 \geq n$
- 如果有一度顶点，对 n 作数学归纳
  - $n = 1$ 时，显然。若 $n = k$ 时，结论成立。当 $n = k + 1$ 时，
  - 设 u 是一度顶点，则 $G - u$ 为 k 个点的连通图
  - 若 $G - u$ 有一度顶点，由归纳假设，其边数至少 $k - 1$，于是 G 边数至少为 k
  - 若 $G - u$ 没有一度顶点，则由握手定理得 $m(G - u) = \sum_{v \in V(G-u)} d(v)/2 \geq k$
- 所以 G 至少有 $k + 1$ 条边

树也被称为最小连通图

树的性质

定理

任意树 T 两个不邻接顶点加一条边后，可得到唯一圈

证明

- 设 u 与 v 是不邻接顶点，因为有唯一路 P 连接 u,v，故 $P \cup \{uv\}$ 是个圈；由于 P 的唯一性，该圈也是唯一的

树的性质

定理

任意树 T 两个不邻接顶点加一条边后，可得到唯一圈

证明

- 设 u 与 v 是不邻接顶点，因为有唯一路 P 连接 u,v，故 $P \cup \{uv\}$ 是个圈；由于 P 的唯一性，该圈也是唯一的

定理

设 G 是树且 $\Delta \geq k$，G 至少有 k 个一度顶点

证明

若 G 至多 $k-1$ 个一度顶点，由于 $\Delta \geq k$，由握手定理得

- $2m = \sum d(v) \geq k - 1 + k + 2(n-k) = 2n - 1 > 2n - 2$
- 故 $m > n - 1$，与 G 是树矛盾

树的性质

定理

若森林 G 有 $2k$ 个奇数度顶点，则 G 中有 k 条边不重合的路 $P_1, \cdots, P_k$ 满足 $E(G) = \bigcup_i E(P_i)$

证明：对 n 作数学归纳

- 当 $k = 1$ 时，G 只有两个奇数度顶点，容易证明 G 是一条路
- 设当 $k = t$ 时，结论成立。考察 $k = t + 1$
- 在 G 中一个分支中取两个一度顶点 u, v，令 P 是连接它们的唯一路，
- 则 $G - P$ 是有 $2t$ 个奇数顶点的森林，由归纳假设，可以分解为 t 条边不重合的路之并
- 所以 G 可以分解为 $t + 1$ 条边不重合的路之并

树的六种等价定义

- T 是树
- T 是 $n-1$ 阶无圈图
- T 中任意两点连通，且有 $n-1$ 条边
- T 连通，且任意边都是割边
- 任意两点仅有一条路
- T 无圈，加入任意一条边后，T 有且仅有一个圈

树的度序列

定理：树的度序列的充分必要条件

设 $S = \{d_1, \cdots, d_n\}$ 满足：$d_1 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$，$\sum d_i = 2(n-1)$，存在树 T 度序列为 S

证明：对 n 作数学归纳

- 当 $n = 1, 2$ 时，结论显然。假设对 $n = k$ 时结论成立。设 $n = k + 1$
- 首先，序列中至少一个数为 1，否则，序列和大于 $2k$，与条件相矛盾！
- 所以，$d_{k+1} = 1$。从序列中删掉 d_1 和 d_{k+1}，将 $d^* = d_1 - 1$ 放在它应该在的位置，得到序列 S_1。
- 该序列含 k 个数，序列和为 $2(k-1)$，由归纳假设，存在树 T_1 度序列为 S_1
- 现在，增加结点 v，把它和 T_1 中点 d^* 相连得到树 T，树 T 为所求。

树的中心

- 图的顶点的离心率：$e(v) = \max\{d(u,v)|u \in V\}$
- 图的半径：$r = \min\{e(v)|v \in V\}$
- 图的中心点：离心率等于半径的点
- 图的中心：中心点的集合

定理

树的中心由一个点或两个相邻点组成

证明：对 n 作数学归纳

- 当 $n = 1, 2$ 时，结论显然成立。设对 $n < k$ 的树结论成立。设 T 是 k 阶树
- 删掉 T 所有叶，得到的树 T_1 每个点的离心率比它们在 T 中离心率少 1
- 又因 T 的叶不能是中心点，所以 T 的中心点在 T_1 中
- 若点 u 的离心率在 T 中最小，则在 T_1 中依然最小，说明 T 的中心点是 T_1 的中心点，反之亦然。

课后练习与思考题

- 证明恰有两个 1 度顶点的树是路
- T 是有 $k+1$ 个点的树，G 是 $\delta \geq k$ 的简单图，即每个节点度数至少为 k，证明 G 有一个子图与 T 同构
- 饱和烃分子形如 C_mH_n，碳原子和氢原子的价键分别为 4 和 1，且饱和烃分子无圈，证明 $n = 2m + 2$