线性代数 (Linear Algebra)

第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§1.1 Systems of Linear Equations 线性方程组

衡益

2021 年 9 月 30 日，中山大学南校区

线性方程组

2

线性方程组

线性方程

✓ 包含未知数$x_1, x_2, \cdots, x_n$的一个线性方程是形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

其中b 与系数$a_1, a_2, \cdots, a_n$是实数或复数，n是任意正整数。

非线性

$4x_1 - 6x_2 = x_1x_2$
或
$x_2 = 2\sqrt{x_1} - 7$

线性方程组 （由一个或几个包含相同变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的线性方程）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

3

线性方程组的解

- 线性方程组的解 **(Solution)**-
  - 所有可能解的集合称为解集**(Solution Set)**
  - 如果两个线性系统具有相同的解集，则它们等价 **(Equivalent)**

4

线性方程组的解

- ✓ 无解 → 不相容（Inconsistent）
- ✓ 有唯一解
- ✓ 有无穷多解

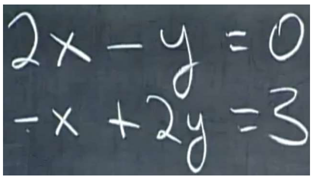
$\Big\}$ 相容（Consistent）

若一个线性方程组有唯一解或者无穷多解，我们称该线性方程组是相容的；若它无解，则称为不相容。

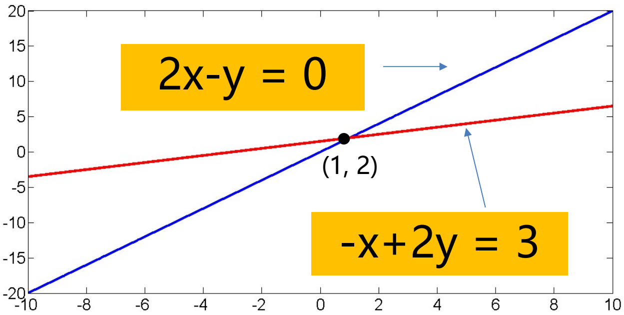
5

线性方程组的解

1



$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & & \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$



唯一解

相容

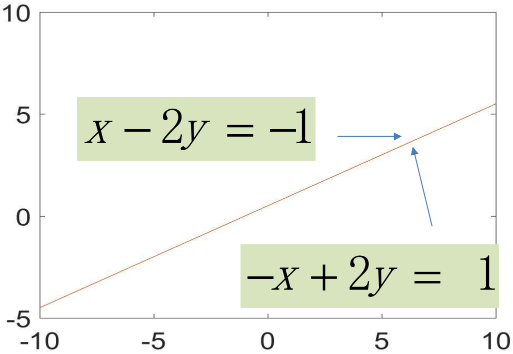
6

线性方程组的解

2

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & & \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



无穷多解

相容

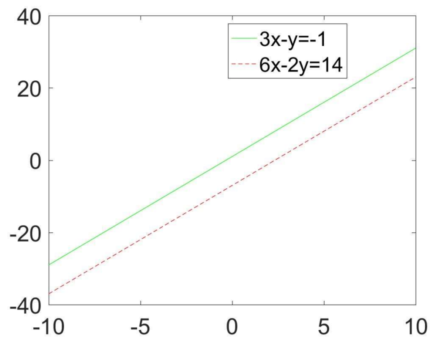
7

线性方程组的解

3

$$\begin{cases} 3x-y=-1 \\ 6x-2y=14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & & \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \end{pmatrix} \end{array}$$



无解

不相容

8

矩阵符号

矩阵的数学定义

定义 **由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行和 n 列的数表**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

a_{ij}，矩阵 A 的（i, j）元

矩阵简记作 $(a_{ij}), (a_{ij})_{m\times n}, A_{m\times n}$

行向量 (Row Vector) $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$

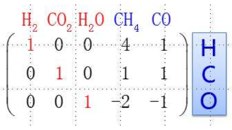
列向量 (Column Vector) $w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

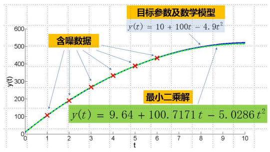
引入矩阵的概念

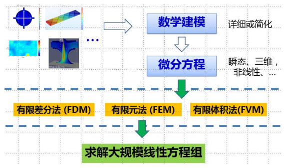
回顾第一讲 …

- 图像处理，人脸识别
- 模型参数估计
- 微分方程数值求解
- 化学反应工程


图片来源：bbs.duowan.com







11

引入矩阵的概念

案例1

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \end{array}$$

1, 2, 3是商店; I II III IV 是产品

A 矩阵中元素是发送产品的数量; B 矩阵中的两列是单价和单件质量

12

引入矩阵的概念

Further reading

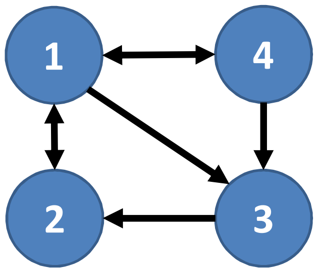
图论

Graph Theory

案例2：

- 交通航线

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



引入矩阵的概念

Further reading

线性变换

Linear transformation

案例3：

- 向量的几何意义

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

投影到 **x** 轴上

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

把向量依逆时针方向旋转一个角度

线性方程组→矩阵

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

n 个未知数 m 个方程的线性方程组

矩阵 向量

Ax = b

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A **x** **b**

15

系数矩阵与增广矩阵

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 + \boxed{a_{13}}x_3 + \cdots \boxed{a_{1n}}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

系数矩阵 增广矩阵

16

矩阵的运算

加减法

定义 设有两个 ***m* x *n*** 个同型矩阵 **A = (a_{ij})** 和 **B = (b_{ij})**，规定为：

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

(1) $A + B = B + A$ **交换律** (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ **结合律**

$-A = (-a_{ij})$ **负矩阵** → $A + (-A) = 0$ **零矩阵** → $A - B = A + (-B)$ **减法**

矩阵的运算

标量乘法

定义 标量与矩阵的乘积，规定为：

$$\lambda A = A\lambda = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

与加法一起，统称为矩阵的线性运算

(1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

矩阵的运算

矩阵与矩阵相乘

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times s}, B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{s\times n}$,

则规定其乘积为 $m \times n$ 的矩阵，记作 $C = (c_{ij}) = AB$。

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj},$$

$i = 1, 2, \cdots, m;\quad j = 1, 2, \cdots, n$

$m \times \cancel{s \quad s} \times n \Rightarrow m \times n$

19

矩阵的运算

矩阵与向量相乘

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times s}, x = (x_i) \in \mathbb{R}^{s\times 1}$,

则规定其乘积为 $m \times 1$ 的向量，记作 $b = (b_i) = Ax$。

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{is}x_s = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}x_k,$$

$i = 1, 2, \cdots, m$

$m \times \cancel{s \quad s} \times 1 \Rightarrow m \times 1$

20

线性方程组的解法

线性方程组的解法

思路

✓ 把方程组用一个更容易解的**等价方程组**（既有相同解集）代替。

化简线性方程组的三种基本变换:

1. 把某一个方程换成它与另一方程的倍数的和;
2. 交换两个方程的位置;
3. 把某一方程的所有的项乘以一个非零常数。

线性方程组的解法

例1：解线性方程组（消去法）

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & ① \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 & ② \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 & ③ \end{cases}$$

解：

③=① × 4+③

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & ① \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 & ② \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 & ③ \end{cases}$$

② × $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & ① \\ x_2 - 4x_3 = 4 & ② \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 & ③ \end{cases}$$

线性方程组的解法

例1：解线性方程组（消去法）

③=② × 3+③

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & ① \\ x_2 - 4x_3 = 4 & ② \\ x_3 = 3 & ③ \end{cases}$$

②=③ × 4+②

①=(−1) × ③+①

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 & ① \\ x_2 = 16 & ② \\ x_3 = 3 & ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 29 & ① \\ x_2 = 16 & ② \\ x_3 = 3 & ③ \end{cases}$$

线性方程组的解法

行初等变换定义

倍加变换　把某一行换成它本身与另一行的倍数的和。

对换变换　把两行对换。

倍乘变换　把某一行的所有元素乘以同一个非零数。

若两个线性方程组的增广矩阵行等价，则它们具有相同的解集。

25

线性方程组的解法

例1： 解线性方程组(行初等变换方法)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \quad ① \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \quad ② \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \quad ③ \end{aligned}$$

增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1\times 4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

26

线性方程组的解法

例1： 解线性方程组(行初等变换方法)

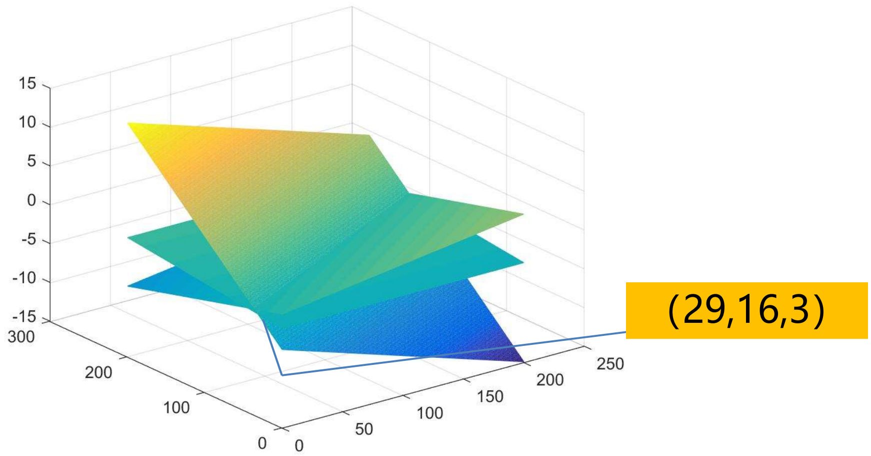
$$\xrightarrow{R_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-4&4\\0&-3&13&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2\times 3}\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-4&4\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1+R_3\times(-1)]{R_2+R_3\times 4}\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\0&1&0&16\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2\times 2}\begin{pmatrix}1&0&0&29\\0&1&0&16\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

线性方程组的解法

例1： 解线性方程组



28

存在与唯一性问题

存在与唯一性问题

线性方程组的两个基本问题

1. 方程组是否**相容**，即它是否至少有一个解？

2. 若有解，解是否**唯一**？

线性方程组的解法

例2： 确定下列方程组是否有解

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \quad ① \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \quad ② \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \quad ③ \end{aligned}$$

解：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \quad ① \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \quad ② \\ x_3 &= 3 \quad ③ \end{aligned}$$

x_1由方程①唯一确定

x_2由方程②唯一确定

x_3已确定

有解

31

行初等变换

例3： 确定下列方程组是否相容

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \quad (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \quad (2) \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

要求：对增广矩阵进行行初等变换

32

行初等变换

例3： 确定下列方程组是否相容

解：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

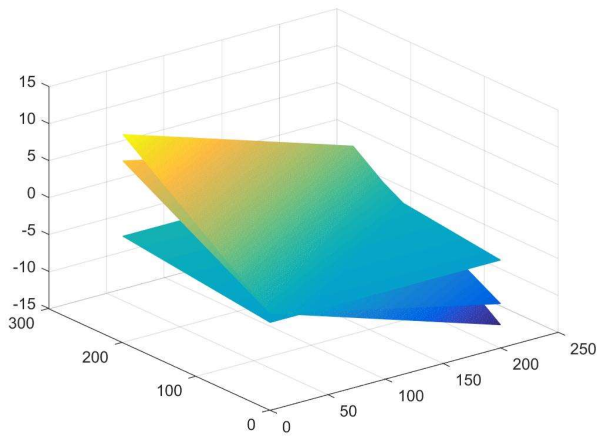
无解

$$\xrightarrow{R_3+R_1\times(-\frac{5}{2})} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

33

行初等变换

例3： 确定下列方程组是否相容



没有交点

34

回家作业

回家作业1

作业1 求出把第一个矩阵变成第二个矩阵的行初等变换，并求出把第二个矩阵变为第一个矩阵的逆初等变换。

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

回家作业2

作业2 对于a的取值，讨论下述线性方程组解的情况：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - ax_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6. \end{cases}$$

要求：使用行初等变换方法。

37

回家作业3

作业3 在平面内三条直线分别为：

$$\begin{aligned} l_1 &= x + y = 1; \\ l_2 &= 3x - y = 1; \\ l_3 &= 4x - 10y = -3. \end{aligned}$$

a) 上述三条直线有没有公共点？有多少个公共点？

b) 改变直线l_3的方程中的某一个系数，得到直线l_4的方程，使得l_1，l_2，l_4没有公共点。

38

Q & A