线性代数 (Linear Algebra)

第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§ 1.2 Row Reduction and Echelon Forms

行化简与阶梯形矩阵

衡益

2021 年 9 月 30 日，中山大学南校区

行化简与阶梯形矩阵

- 定义
- 主元位置
- 行化简算法
- 线性方程组的解
- 解集的参数表示
- 存在与唯一性问题

2

阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵

定义：若一个矩阵有如下三个性质，则称该矩阵为**阶梯形矩阵：**

- ✓ 所有非零行在每一零行之上；
- ✓ 某一行的先导元素所在的列位于前一行先导元素的右面；
- ✓ 某一先导元素所在列下方元素都是零。

定义：若一个阶梯形矩阵还满足以下性质，则称它为**简化阶梯形矩阵**：

- ✓ 每一非零行的先导元素是1；
- ✓ 每一先导元素1是该元素所在列的唯一非零元素。

3

阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵

下列矩阵是阶梯形矩阵（上三角阵）：

(a) $\begin{pmatrix} \blacktriangle & * & * & * \\ 0 & \blacktriangle & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & \blacktriangle & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacktriangle & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacktriangle & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacktriangle & * \end{pmatrix}$

先导元素用▲代替，可取任意非零值

*元素可取任意值，包括零值

下列矩阵是简化阶梯形矩阵：

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$

先导元素▲取1

4

阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵

练习：下列矩阵哪些是阶梯形矩阵，哪些更是简化阶梯形矩阵?

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 7 & -3/2 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5

简化阶梯形矩阵

定理1（简化阶梯形矩阵的唯一性）

✓ **每个矩阵行等价于唯一的简化阶梯形矩阵。**

- 若矩阵A等价于阶梯形矩阵U，称U为A的阶梯形；
- 若U是简化阶梯形，称U为A的简化阶梯形；
- RREF作为简化阶梯形的缩写，REF作为阶梯形的缩写。

行化简与阶梯形矩阵

- 定义
- 主元位置
- 行化简算法
- 线性方程组的解
- 解集的参数表示
- 存在与唯一性问题

7

主元

主元（Pivot）

- ✓ 主元是矩阵A对应于它的阶梯形中，每行从左起的第一个非零的元素。

主元位置

- ✓ 矩阵中的主元位置是A中对应于它的阶梯形中先导元素的位置。

主元列

- ✓ 主元列是A的含有主元位置的列。

8

主元

例1： 把下列矩阵A用行变换为阶梯形，确定主元列

$$A=\begin{pmatrix}0&-3&-6&4&9\\-1&-2&-1&3&1\\-2&4&0&3&-1\\1&4&5&-9&-7\end{pmatrix}$$

解：

主元

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&4&5&-9&-7\\-1&-2&-1&3&1\\-2&4&0&3&-1\\0&-3&-6&4&9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&4&5&-9&-7\\0&2&4&-6&-6\\0&5&10&-15&-15\\0&-3&-6&4&9\end{pmatrix}$$

主元列

下一个主元列

主元

9

主元

例1： 把下列矩阵A用行变换为阶梯形，确定主元列

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&4&5&-9&-7\\0&2&4&-6&-6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-5&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&4&5&-9&-7\\0&2&4&-6&-6\\0&0&0&-5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

主元

主元列

主元为1，2，-5

$$\text{原矩阵}A=\begin{pmatrix}0&-3&-6&4&9\\-1&-2&-1&3&1\\-2&4&0&3&-1\\1&4&5&-9&-7\end{pmatrix}$$

主元列为1，2，4

10

主元列

行化简与阶梯形矩阵

- 定义
- 主元位置
- 行化简算法
- 线性方程组的解
- 解集的参数表示
- 存在与唯一性问题

行化简和阶梯形

行化简算法

① 由最左的非零列开始。这是一个主元列，主元位置在该列顶端；

②在主元列中选取一个非零元作为主元。若有必要的话，对换两行使这个元素移到主元位置上；

③用倍加行变换将主元下面的元素化简为0；

④暂时不管包含主元位置的行以及它上面的各行，对剩下的子矩阵使用上述的三个步骤直到没有非零行需要处理为止；

⑤由最右面的主元开始，把每个主元上方的各元素变成0。若某个主元不是1，用倍乘变换将它变成1。(简化阶梯形时需要第五步)

行化简举例

例2： 用行变换把下列矩阵先化为阶梯形，再化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

解：

$$\underset{①}{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}} \xrightarrow{R_1 \longleftrightarrow R_3} \underset{②}{\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}}$$

行化简举例

例2： 用行变换把下列矩阵先化为阶梯形，再化为简化阶梯形

$$\xrightarrow{R_2+(-1)*R_1} \underset{③}{\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}} \xrightarrow{R_3+(-3/2)*R_2} \underset{④}{\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow[R_1+(-6)*R_3]{R_1+(-6)*R_3} \underset{⑤}{\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}} \xrightarrow{R_2*(1/2)} \underset{⑤}{\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

行化简举例

例2： 用行变换把下列矩阵先化为阶梯形，再化为简化阶梯形

$$\xrightarrow{R_1+9*R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1*(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5 5

第1~4步称为行化简算法的前推阶段，产生唯一的简化阶梯形的第5步，称为回溯阶段

15

行化简与阶梯形矩阵

- 定义
- 主元位置
- 行化简算法
- 线性方程组的解
- 解集的参数表示
- 存在与唯一性问题

16

线性方程组的解

行化简算法应用于方程组的增广矩阵时，可以得出线性方程组解集的一种显示描述

线性方程组的解

✓ 方程组所有解的显示描述称为该方程组的解集

基本变量 (Basic variable) 对应于主元列的变量称为基本变量。

自由变量 (Free variable) 其他变量，称为自由变量。

17

线性方程组的解

例3： 求方程组的解，该方程的增广矩阵已经化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

18

线性方程组的解

例3： 求方程组的解，该方程的增广矩阵已经化为

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \quad + 3x_4 \quad &= 0 \\ x_3 - 4x_4 \quad &= 5 \\ x_5 &= 7 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2\text{为自由变量} \\ x_3 = 5 + 4x_4 \\ x_4\text{为自由变量} \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

解集

19

行化简与阶梯形矩阵

- 定义
- 主元位置
- 行化简算法
- 线性方程组的解
- 解集的参数表示
- 存在与唯一性问题

20

解集的参数表示

解集的参数表示

- ✓ 解方程组是求出解集的参数表示或确定它无解。
- ✓ 我们使用自由变量作为参数来表示解集。
- ✓ 当方程组不相容，解集是空集，无参数表示。

21

行化简与阶梯形矩阵

- 定义
- 主元位置
- 行化简算法
- 线性方程组的解
- 解集的参数表示
- 存在与唯一性问题

22

存在与唯一性问题

存在与唯一性定理

✓ 线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主元列。也就是说，增广矩阵的阶梯形没有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix} \quad b \neq 0$$

若线性方程相容，它的解集可能有两种情形：

(i) 当没有自由变量时，有唯一解；
(ii) 若至少有一个自由变量，有无穷多解。

23

存在与唯一性问题

例4： 确定下列线性方程组的解是否存在且唯一

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \end{aligned}$$

解：

基本变量：x_1, x_2, x_5；自由变量：x_3, x_4
方程组有无穷多解

24

行化简算法求解线性方程组

应用行简化算法解线性方程组（五步）

① 写出方程组的增广矩阵；

②应用行化简算法把增广矩阵化为阶梯形。确定方程组是否有解，若无解则停止，反之进行下一步；

③继续行化简算法得到它的简化阶梯形；

④写出由第3步得到矩阵对应的方程组；

⑤把第4步所得的每个方程改写为用自由变量表示基本变量的形式.

回家作业

回家作业1

作业1 确定哪些矩阵是简化阶梯形，哪些仅是阶梯形。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5

27

回家作业2

作业2 将下列矩阵化简为简化阶梯形，在最终的矩阵和原始矩阵中圈出主元位置，指出主元列。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

28

回家作业3

作业3 已给出线性方程组的增广矩阵，求其通解。

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

预习

- 预习向量方程组

Q & A