线性代数 (Linear Algebra)

第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

§ 5.2 The Characteristic Equation 特征方程

衡益

2021 年 12 月 9 日，中山大学南校区

引入

2

5.2 特征方程

$$(A - \lambda I)x = 0$$

A是方阵

方阵A的特征方程是一个数量方程，其中包含了有关特征值的有用信息。

Next，先从简单的例子开始，然后讨论一般情形。

3

5.2 特征方程

例1 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$，计算A的特征值。

解：

找到使得方程$(A - \lambda I)x = 0$有非平凡解的所有λ.

$$\Updownarrow$$

找到所有使得矩阵$A - \lambda I$ 不可逆的λ.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

当矩阵的行列式为0时，其不可逆

4

5.2 特征方程

例1 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$，计算A的特征值。

解:

因此，A 的特征值满足

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

则 $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda) \times (-6-\lambda) - (3) \times (3)$

$$= -12 + 6\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 7) = 0$$

则A的特征值为3和-7.

5

5.2 特征方程

注

例1的行列式把包含2个未知数λ 和x 的矩阵方程

$$(A - \lambda I)x = 0$$

转化为只含有一个未知数的代数方程

$$\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$$

这种思想对$n \times n$ 矩阵仍然适用。

6

特征方程

5.2 特征方程

方阵A特征方程

$$(A - \lambda I)x = 0$$

注：λ 是n阶方阵A的特征值，当且仅当λ是特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$ 的根

5.2 特征方程

例3

求方阵A的特征方程，$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解：

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

A的特征多项式

9

5.2 特征方程

例3

求方阵A的特征方程，$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解： 那么A的特征方程为

$$(5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

展开可得

$$\lambda^4 - 14\lambda^3 + 68\lambda^2 - 130\lambda + 75 = 0$$

多项式的次数与A的阶数有什么关系?

10

5.2 特征方程

注

例1 和例3 的 $\det(A-\lambda I)$ 是关于λ 的多项式。可以看出，如果A 是$n\times n$ 矩阵，那么$\det(A-\lambda I)$ 是n 次多项式，称为A的特征多项式。

在例3 中，由于因子$(\lambda-5)$ 在特征多项式中出现了2次，故称特征值5 有重数2 ，一般地，把特征值λ 作为特征方程根的重数称为λ 的(代数)重数。

11

5.2 特征方程

例4 6阶矩阵的特征多项式为$\lambda^6-4\lambda^5-12\lambda^4$. 求其特征值及重数。

解: 对上述特征多项式因式分解：

$$\lambda^6-4\lambda^5-12\lambda^4=\lambda^4(\lambda^2-4\lambda-12)$$
$$=\lambda^4(\lambda-6)(\lambda+2)$$

因此，其所有特征值为：

0（四重），6和-2.

12

5.2 特征方程

注

特征方程具有十分重要的理论意义，但在实际计算时，低阶矩阵的特征值应该用计算机取求，除非矩阵
式三角形或有其他特殊性质。虽然3×3矩阵的特征多项式容易手工计算，但是对其因式分解很多情况下不是容易的事。

13

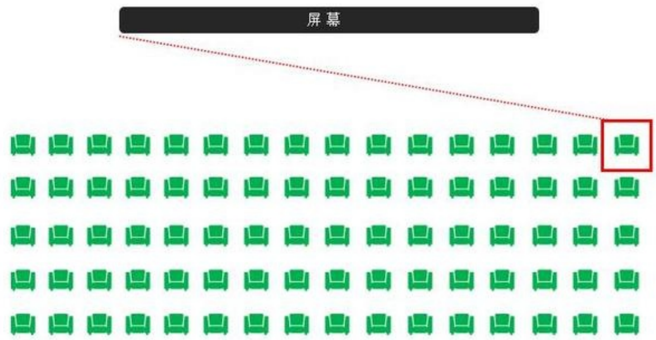
相似性

14

5.2 特征方程

相似性

先给出一个通俗的解释，假设坐在第一排看电影，

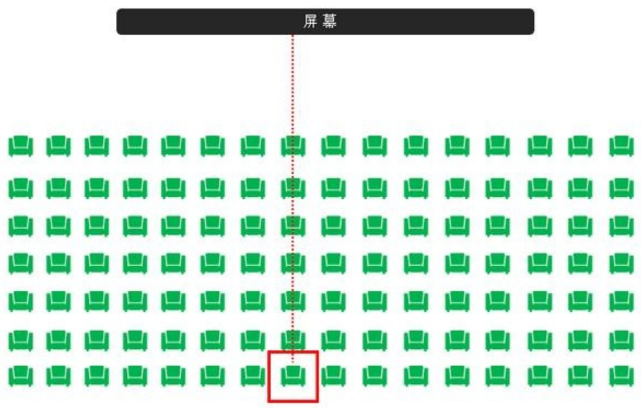


15

5.2 特征方程

相似性

而你坐在最后一排看电影，



16

5.2 特征方程

相似性

我们看的是同一部电影，但是我们各自眼中看到的画面却因位置不同而有所不同，比如：清晰度，角度等，因此可以说：

第一排看到的电影 ～ 最后一排看到的电影

相似于

Next

17

5.2 特征方程

相似性

设A, B 都是n 阶矩阵，若有可逆矩阵P ，使得

$$P^{-1}AP = B$$

则称，B是A的相似矩阵，即A 与B 相似。

相似变换 对A进行运算$P^{-1}AP$ 称对A 进行相似变换。

相似变换 $\xrightarrow{\text{可以理解为}}$ 先行变换再列变换

但不等同于！！！

18

5.2 特征方程

定理3

若n 阶矩阵A 与B 相似，则A与B 的特征多项式相同，从而A与B 的特征值亦相同。

证明

因A与B相似，即有可逆矩阵P 使得$P^{-1}AP = B$ ，故

$$
\begin{aligned}
\det(B-\lambda I) &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P)\\
&= \det(P^{-1}(A-\lambda I)P)\\
&= \det(P^{-1})\det(A-\lambda I)\det(P)\\
&= \det(A-\lambda I)
\end{aligned}
$$

19

5.2 特征方程

注

1、矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

拥有相同的特征值，但是并非相似矩阵。

2、相似变换并不等同于行等价。假如A 行等价于B，则存在可逆矩阵E，使得B = EA. 因为单纯的行变换通常会改变矩阵的特征值。

20

5.2 特征方程

推论3 若n 阶矩阵A与对角阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

相似，则λ_1，$\lambda_2, \cdots$，λ_n是A 的n个特征值。

证明

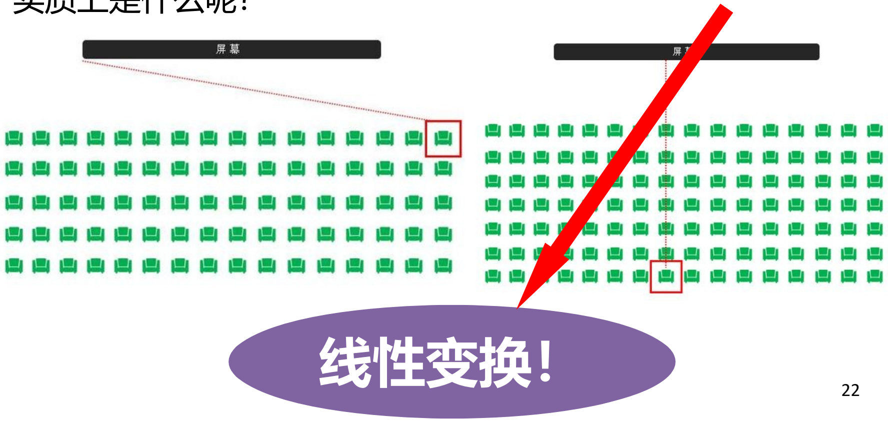
因为λ_1，$\lambda_2, \cdots$，λ_n是Λ的n个特征值，由定理3可知其也是A 的n个特征值。

21

5.2 特征方程

相似性vs线性变换

回顾刚才看电影的例子，同一部电影，在不同的位置会有不同的效果，因此“电影”是不变的，那么“电影”实质上是什么呢?



22

5.2 特征方程

我们记：

$$y=\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可以得到更简单的记法：

$$y= Ax$$

y，x都是指代平面上所有的点，简化认为：

线性变换通过矩阵A来表示

而y=x不过是这个A的一种特殊情况

23

5.2 特征方程

因此，让我们补充之前的结论

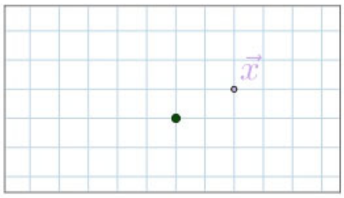
线性变换通过矩阵A来表示

指定基下的

在别的基下是什么情况？
知道线性变换，让我们回到文章开头的隐喻：看电影。

24

5.2 特征方程



线性变换=电影

不同的座位=基

25

5.2 特征方程

因此，同一部“电影”，不同“座位”就是不同的视觉感受

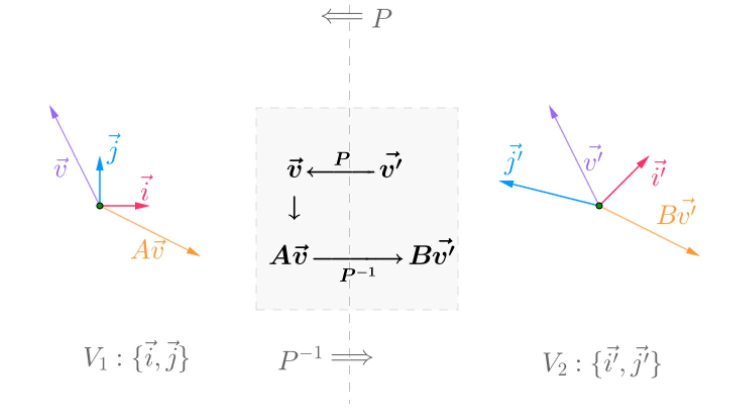
同一个线性变换，不同基下的矩阵，称为相似矩阵

怎么得到不同基下的矩阵，看看变换的细节：

Next

26

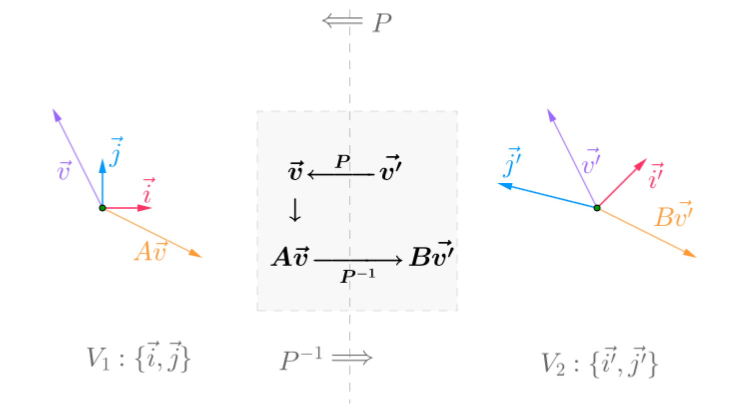
5.2 特征方程



$V_1 = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ 和 $V_2 = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$ 是两个基； $V_1 \to V_2$，可以通过P^{-1} 转换 $V_2 \to V_1$，可以通过P 转换

27

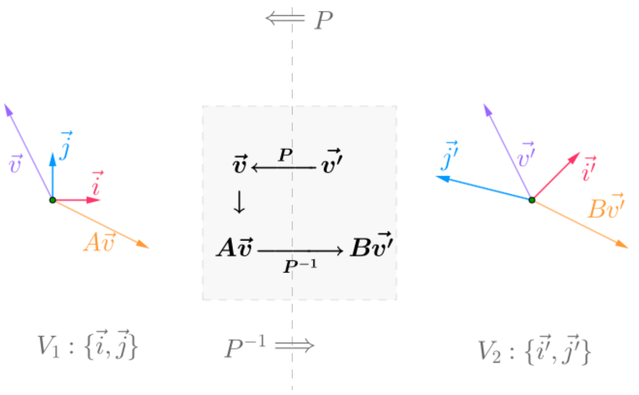
5.2 特征方程



$\vec{v}'$是V_2下的点，$\vec{v}'$通过P 变成V_1下的点，即$P\vec{v}'$. 在V_1 下，通过A矩阵完成线性变换，即$AP\vec{v}'$，通过P^{-1} 从变回V_2下的点，即 $P^{-1}AP\vec{v}'$.

28

5.2 特征方程



综上所述，我们有，$B\vec{v}' = P^{-1}AP\vec{v}'$。我们可以认为：

$$B = P^{-1}AP$$

那么B和A互为相似矩阵。

29

动力系统中的应用

30

5.2 特征方程

特征值和特征向量在动力系统中的应用

特征值和特征向量是我们剖析动力系统的离散演变的关键点

例5 设

$$A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix},$$

分析动力系统

$$x_{k+1} = Ax_k,\ k = 0, 1, 2, \cdots;\ x_0 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}^T$$

的长期发展趋势。

31

5.2 特征方程

例5 设

$$A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix},$$

分析动力系统

$$x_{k+1} = Ax_k,\ k = 0, 1, 2, \cdots;\ x_0 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}^T$$

的长期发展趋势。

Step1：计算特征值 → Step2：用特征向量表示x_0 → Step3：计算x_k

32

5.2 特征方程

Step1：计算特征值

A的特征方程为

$$0 = \det\begin{bmatrix} 0.95-\lambda & 0.03 \\ 0.05 & 0.97-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (0.95-\lambda)(0.97-\lambda) - (0.03)(0.05)$$
$$= \lambda^2 - 1.92\lambda + 0.92$$

由求根公式可知λ=1或0.92. 易知λ=1和λ=0.92 所对应的特征向量分别为

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

33

5.2 特征方程

Step2：用特征值表示x_0

已知$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$是$\mathbb{R}^2$空间的一组基（*Why*？），因此$\mathrm{x}_0$可以由其表示：

$$\mathrm{x}_0 = c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

那么

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2]^{-1}\mathrm{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.225 \end{bmatrix}$$

34

5.2 特征方程

Step3: 计算x_k

由$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$是A的特征向量，那么$A\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2=0.92\mathbf{v}_2$，那么容易计算出每个$\mathbf{x}_k$，

$$\mathbf{x}_1=A\mathbf{x}_0=c_1A\mathbf{v}_1+c_2A\mathbf{v}_2 \quad \text{利用}\mathbf{x}\mapsto A\mathbf{x}\text{的线性性质}$$

$$=c_1\mathbf{v}_1+c_2(0.92)\mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_1\text{和 }\mathbf{v}_2\text{是特征向量}$$

$$\mathbf{x}_2=A\mathbf{x}_1=c_1A\mathbf{v}_1+c_2(0.92)A\mathbf{v}_2$$

$$=c_1\mathbf{v}_1+c_2(0.92)^2\mathbf{v}_2$$

以此类推

$$\mathbf{x}_k=c_1\mathbf{v}_1+c_2(0.92)^k\mathbf{v}_2 \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

35

5.2 特征方程

Step3: 计算x_k

代入c_1，c_2可知

$$\mathbf{x}_k=0.125\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}+0.225(0.92)^k\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

差分方程$x_{k+1}=Ax_k$的解

当k→∞时， $x_k\to 0.125v_1$

36

5.2 特征方程

数值计算注解

1. 像Mathematica和Maple这样的计算机软件能利用符号计算求出一个中等规模矩阵的特征多项式。但对于$n \geq 5$ 的一般$n \times n$ 矩阵，没有公式或有限算法来求解其特征方程。

2. 最佳的求特征值的数值方法完全避开特征多项式。事实上，*Matlab* 通过先求出矩阵A的特征值$\lambda_1 \cdots \lambda_n$，然后通过展开

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

的积来得到A 的特征多项式。

37

Q & A

线性代数 (Linear Algebra)

第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

§ 5.3 Diagonalization

对角化

衡 益

2021 年 12 月 9 日，中山大学南校区

5.3 对角化

引入

40

5.3 对角化

思考 可否用其他方法得到方阵A的特征值信息?

若A与一个**对角矩阵**相似，$A = PDP^{-1}$，
那么D的对角线元素都是A的特征值

目的？？

对角矩阵便于计算

41

5.3 对角化

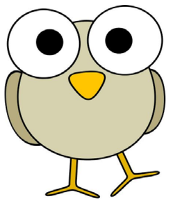
Q：什么是对角矩阵？？

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

42

5.3 对角化

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



??

矩阵对角化

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

43

5.3 对角化

例1 若$\mathrm{D}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，那么计算$\mathrm{D}^2$和$\mathrm{D}^3$.

解： 计算可知

$$\mathrm{D}^2=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}^3=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

那么，以此类推可知

$$\mathrm{D}^k=\begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}, k\ge 1$$

44

5.3 对角化

例2 设$A=\begin{bmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$，已知$A=PDP^{-1}$，计算$A^k$

$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

解： 计算可知

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

那么

$$A^2=(PDP^{-1})(PDP^{-1})=PD(P^{-1}P)DP^{-1}=PDDP^{-1}$$

$$=PD^2P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^2 & 0\\ 0 & 3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

5.3 对角化

例2 设$A=\begin{bmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$，已知$A=PDP^{-1}$，计算$A^k$

$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

解： 那么

$$A^3=(PDP^{-1})A^2=(PDP^{-1})PD^2P^{-1}=PDD^2P^{-1}=PD^3P^{-1}$$

以此类推，对于$k\geq 1$,

$$A^k=PD^kP^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^k & 0\\ 0 & 3^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot 5^k-3 & 5^k-3^k\\ 2\cdot 3^k-2\cdot 5^k & 2\cdot 3^k-5^k\end{bmatrix}$$

5.3 对角化

以上两个例题使我们感受到了对角化的好处!

Next

满足

$$P^{-1}AP = D$$

我们来讨论P应该满足什么关系。

47

5.3 对角化

Question 1：A满足什么条件时是可对角化的?

Question 2：P中的列向量是否线性相关性如何?

48

5.3 对角化

把P用其列向量表示为：

$$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

由$P^{-1}AP = \Lambda$可得，$AP = P\Lambda$，即

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$$

于是有

$$Ap_i = \lambda_i p_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

可见，λ_i是A的特征值，而P 的列向量p_i 是A的对应于特征值λ_i 的特征向量。

49

5.3 对角化

可对角化矩阵

50

5.3 对角化

定义 **对角化**

若方阵A与一个对角矩阵相似，那么A 是可对角化 的。

定理1 **对角化定理**

若n 阶方阵A是可对角化的，即$A = PDP^{-1}$，其中D 是对角矩阵，其充分必要条件是，A 有n 个线性无关的特征向量。

事实上，$A = PDP^{-1}$，D为对角阵的充要条件为：P的列向量是A的n个线性无关的特征向量。此时D的主对角线上的元素分别是A对应于P中特征向量的特征值。

换句话说，A可对角化的充要条件是有足够的特征向量形成R^n的基，我们称这样的基为特征向量基。

5.3 对角化

证明：

必要性：

设$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$，D 对角线上的元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，那么

$$AP = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix}$$

$$PD = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

52

5.3 对角化

证明:

现假设A是可对角化的，$A = PDP^{-1}$. 给此等式两边同时右乘P 可得

$$AP = PD.$$

那么

$$\begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

可得

$$Av_1 = \lambda_1 v_1,\ Av_2 = \lambda_2 v_2, \cdots, Av_n = \lambda_n v_n$$

由于P 可逆，那么$v_1, \cdots, v_n$是线性无关且非零的，那么可知$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是A的特征值，$v_1, \cdots, v_n$是对应的特征向量。

53

5.3 对角化

证明:

最后，给定任意n 个特征向量$v_1, \cdots, v_n$，用它们作为矩阵P 的列向量，并用相应的特征值来构造矩阵D，那么等式

$$AP = PD$$

的成立不需要特征向量有任何条件。若特征向量是线性无关的，则P 是可逆的（由可逆矩阵定理），由$AP = PD$ 可推出

$$A = PDP^{-1}$$

54

5.3 对角化

矩阵对角化

例3

设$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -3 & -5 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$，将A 对角化，$A=PDP^{-1}$.

解：

Step1：计算A的特征值 → Step2：计算A的特征向量 → Step3：构造P

→ Step4：构造对角阵D

5.3 对角化

Step1：计算A的特征值

特征方程为：

$$0=\det(A-\lambda I)=-\lambda^3-3\lambda^2+4$$
$$=-(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

因此，其特征值为

$$\lambda=1，\lambda=-2(二重)$$

5.3 对角化

Step2：计算A的特征向量

由于A是3阶方阵，因此需要找到A的3个特征向量：

对于λ=1，找到的特征向量为$v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

对于λ=2，找到的特征向量为$v_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$v_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

若找不到三个线性独立的特征向量，说明A不能对角化！！

5.3 对角化

Step3:构造P

利用上一步骤中计算的特征向量构造可逆矩阵P，向量的顺序可以打乱。

$$P=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5.3 对角化

Step4：构造对角阵D

利用特征值构造对角矩阵，需要注意的是，特征值的排列顺序应该与P中特征向的顺序一致。

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

5.3 对角化

接下来可以验证计算结果，为了避免计算P^{-1}，只需验证 $AP = PD$ 即可

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

5.3 对角化

例4

设$A=\begin{bmatrix}2&4&3\\-4&-6&-3\\3&3&1\end{bmatrix}$，将A 对角化.

解：

A 的特征方程为：

$0=\det(A-I)=-\lambda^3-3\lambda^2+4=-(\lambda-1)(\lambda+2)^2$

可得其特征值为

$\lambda=1$ 和 $\lambda=-2$(二重)

然而，通过计算特征值可知，每个特征空间都是一维的，即

61

5.3 对角化

例4

设$A=\begin{bmatrix}2&4&3\\-4&-6&-3\\3&3&1\end{bmatrix}$，将A 对角化.

解：

当$\lambda=1$时， $v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$； 当$\lambda=-2$时， $v_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

因此，三阶方阵A没有三个线性独立的特征向量，故不可对角化。

62

5.3 对角化

矩阵可对角化的**充分条件**

定理2

若n 阶方阵A 有n 个不同的特征值，那么A 是可对角化的。

证明:

设A是n 阶方阵，其有n个不同的特征值，$v_1, \cdots, v_n$ 是对应的n个特征向量，那么$\{v_1, \cdots, v_n\}$是线性独立的，由定理1可知，A是可对角化的。

63

5.3 对角化

例5 设$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，请判断A 是否可以对角化。

解:

经过简单的计算可知，A 有3个特征值，

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=6,\quad \lambda_3=1,$$

那么A一定有3个线性无关的特征向量，因此A 是可对角化的。

64

5.3 对角化

例6

设$A=\begin{bmatrix}5 & -8 & 1\\ 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，判断A是否可以对角化。

值得注意!

解:

显然，A是可对角化的。因为A 是三角矩阵，可知其特征值是5,0和-2，由于A是3 阶方阵且拥有3个不同的特征值，所以A是可对角化的。

65

5.3 对角化

例7

设 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$，问 A 能否对角化？ 若能，则求可逆矩阵 P 和对角矩阵Λ，满足$P^{-1}AP=\Lambda$

解:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$\Rightarrow$ A 的特征值是 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=2$。

定理2不能应用!

66

5.3 对角化

解:

……

求特征向量：$\lambda_1 = -1$, 解方程 $(A + I)x = 0$

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{得到对应的特征向量 } p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 解方程 $(A - 2I)x = 0$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}。$$

67

5.3 对角化

解:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

检查行列式

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

注意次序!

p_2 p_3 p_1

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

68

Q & A