4. 等可能概型（古典概型）

等可能概型（古典概型）

◆ **定义：**

1）实验的样本空间只包含有限个元素

2）实验中每个基本事件发生的可能性相同

具有以上两个特点的试验成为**等可能概型**或**古典概型**。

设实验样本空间为$S=\{e_1,e_2,\ldots e_n\}$. 由古典概型条件可知,

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) \ldots = P(\{e_n\})$$

又因基本事件是两两互不相容的，于是

$$1 = P(S) = P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \ldots \cup \{e_n\})$$

$$= P(\{e_1\}) + P(\{e_1\}) + \ldots P(\{e_n\}) = nP(\{e_i\}),$$

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n},\ i = 1,2,\ldots,n.$$

等可能概型（古典概型）

若事件A包含k个基本事件，即$A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\ldots\cup\{e_{i_k}\}$,

这里$i_1, i_2, \cdots$，i_k是1, 2, ⋯, n中某k个不同的数，则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P\left(\{e_{i_j}\}\right)=\frac{k}{n}=\frac{\text{A包含的基本事件数}}{\text{S中基本事件的总数}}$$

此为等可能概型中事件A的概率计算公式

等可能概型（古典概型）

例1：将一枚硬币抛掷三次，（1）设事件A_1为“恰有一次出现正面”，求$P(A_1)$.（2）设事件A_2为“至少有一次出现正面”，求$P(A_2)$.

解： 设H为出现正面，T为出现反面，则

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$,

而$A_1 = \{HTT, THT, TTH\}$, 得$P(A_1) = \frac{N(A_1)}{N(S)} = \frac{3}{8}$.

由于$\overline{A_2} = \{TTT\}$，于是

$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

等可能概型（古典概型）

乘法原理：若完成一件事情要经过两个步骤，其中第一步中有n_1种不同的方式，第二步中有n_2种不同的方式，则完成这件事情共有$n_1 \times n_2$种方式。

排列：从n个不同的元素中按顺序取r个排成一列$(0 < r \leq n)$称为一个排列。所有可能得排列记为A_n^r 。由乘法原理得

$$A_n^r = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\ldots(\mathrm{n}-\mathrm{r}+1)$$

当$n = r$时，称排列为一个全排列，所有全排列得个数为

$$A_n^{\mathrm{n}} = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\ldots 3 \times 2 \times 1 = n!$$

等可能概型（古典概型）

组合：从n个不同的元素中任意取r个组成一组$(0 < r \le n)$，称为一个组合。所有可能得组合数为C_n^r，由乘法原理，从n个元素种取r个生成得排列可分为两步进行，首先从n个元素种取r个组成一组，共有C_n^r种方式，然后再取r个元素进行全排列，共有r!种方式，从而$A_n^r = C_n^r \times \mathrm{r}!$。

故从n个元素种取r个组成得组合数为

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{\mathrm{r}!} = \frac{\mathrm{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}}{\mathrm{r}!} = \frac{n!}{(n-r)! \times \mathrm{r}!}$$

当$n = r$时， $C_n^n = 1$，且$C_n^r = C_n^{n-r}$.

等可能概型（古典概型）

例2：一个口袋装有6只球。其中4只白球、2只红球。从袋中取球两次，每次随机取一只，考虑两种取球方式:(a)第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球。这种取球方式叫做**放回抽样**。(b)第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球。这种取球方式叫做**不放回抽样**。分别就上面两种情况求：(1)取到的两只球都是白球的概率。(2)取到的两只球颜色相同的概率。(3)取到的两只球中至少有一只是白球的概率。

等可能概型（古典概型）

解： (a)放回抽样的情况

以A, B, C分别表示事件“取到的两只球都是白球”，“取到的两只球都是红球”，“取到的两只球中至少有一只是白球”。则“取到的两只球颜色相同”即为$A \cup B$, 而$C = \overline{B}$。两次都有6只球可供抽取，由组合的乘法原理，共6×6种取法。对事件A两次都有4只白球可供抽取，即共4×4种取法，同理B共有2×2种取法。故

$$P(A) = \frac{4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{4}{9}, P(B) = \frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{9}$$

由于$AB = \emptyset$，得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{9}, P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{8}{9}$$

等可能概型（古典概型）

例3：将n只球随机地放入$N\ (N \geq n)$ 个盒子，试求每个盒子至多有一个球的概率。

解：将n只球随机放入N个盒子的可能个数(乘法原理)：N^{n}

将n只球不重复放入N个盒子的可能个数:

$$N(N-1)\ldots[N-(n-1)] = \frac{\mathrm{N}!}{(N-n)!} = A_N^n$$

所求概率为：$p = \frac{N(N-1)\ldots[N-(n-1)]}{\mathrm{N}^{\mathrm{n}}} = \frac{A_N^n}{\mathrm{N}^{\mathrm{n}}}$

等可能概型（古典概型）

例4：设N件产品中含D件次品，今从中任意取n件，问其中恰有k（$k \le D$）件次品的概率是多少?

解：在N件产品中任意取n件，所有可能的取法共有C_N^n种

在D件次品中任意取k件，所有可能的取法共有C_D^k种

在$N-D$件正品中取*n-k*件，所有可能的取法共有C_{N-D}^{n-k}种

由乘法原理知在N件产品中任意取n件，其中恰有k件次品的取法有$C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}$种

故所求概率为:$p = \dfrac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$.

该式也即所谓超几何分布的概率公式。

等可能概型（古典概型）

例5：袋中有a只白球，b只红球，k个人依次在袋中取一只球，(1) 作放回抽样；(2) 作不放回抽样，求第i $(i = 1,2,\ldots k)$ 人取到白球(记为事件B)的概率$k \le a + b$。

解：(1) 放回抽样：有$P(B) = \frac{a}{a+b}$

(2) 不放回抽样：共有$(a + b)(a + b - 1)\ldots(a + b - k + 1) = A_{a+b}^{k}$个基本事件。

事件B发生的取法有$\mathrm{a} \times A_{a+b-1}^{k-1}$种。

所求概率为$P(B) = \frac{\mathrm{a} \times A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}} = \frac{a}{a+b}$

等可能概型（古典概型）

例6：在1-2000的整数中随机地取一个数，问取到的整数既不能被6整除，又不能被8整除的概率为多少？

解：设事件A为“取到的整数能被6整除”，事件B为“取到的整数能被8整除”，则所求概率为：

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup B) = 1 - [\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{AB})]$$

由于$333 < \frac{2000}{6} < 334$，故$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{333}{2000}$.

由于$\frac{2000}{8} = 250$，故$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{250}{2000}$

由于一个数能同时被6和8整除，相当于被24整除，而$83 < \frac{2000}{24} < 84$，故$\mathrm{P}(\mathrm{AB}) = \frac{83}{2000}$

所求概率为$p = 1 - \left(\frac{333}{2000} + \frac{250}{2000} - \frac{83}{2000}\right) = \frac{3}{4}$

等可能概型（古典概型）

例7：将15名新生随机地平均分配到三个班级中去，这15名新生中有3名是优秀生，求(1)每个班级各分配到一名优秀生的概率是多少？(2)三名优秀生分配在同一班级的概率是多少？

解：

15名新生平均分配到三个班级中的分发总数： $C_{15}^{5}\,C_{10}^{5}\,C_{5}^{5}=\dfrac{15!}{5!\;5!\;5!}$

三个班各有一名优秀生分法总数： $3!\times C_{12}^{4}\,C_{8}^{4}\,C_{4}^{4}=\dfrac{3!\times 12!}{4!\;4!\;4!}$

三名优秀毕业生分配到同一班的总数： $3\times C_{12}^{2}\,C_{10}^{5}\,C_{5}^{5}=\dfrac{3\times 12!}{2!\;5!\;5!}$

(1)的所求概率为：$p=\dfrac{3!\times 12!}{4!\;4!\;4!}\Big/\dfrac{15!}{5!\;5!\;5!}=\dfrac{25}{91}$

(2)的所求概率为： $p=\dfrac{3\times 12!}{2!\;5!\;5!}\Big/\dfrac{15!}{5!\;5!\;5!}=\dfrac{6}{91}$

等可能概型（古典概型）

例8：某接待站在某一周曾经接待12次来访，已知所有这12次接待都是在周二和周四进行，问是否可以推断接待时间是有规定的？

解：

各来访者在一周内任一天中去接待站是等可能的，若接待时间没有规定，而那么12次接待都在周二和周四的概率大小为

$$p = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003$$

概率很小的事件在一次实验中实际上几乎是不发生的（称之为实际推断原理）

5. 条件概率

条件概率

条件概率考虑的是事件A已发生得条件下事件B发生的概率。

例子：将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反面的情况。设事件A为“至少有一次为H”，事件B为“两次掷出同一面”。求已知事件A已经发生的条件下事件B发生的概率。

解：样本空间$S=\{\mathrm{HH},HT,TH,TT\},A=\{HH,HT,TH\},B=\{HH,TT\}$.已知事件A已发生，故TT不可能发生，即试验所有可能结果的集合就是A，A有3个元素，其中只有$HH\in \mathrm{B}$。

于是在事件A发生的条件下事件B发生的概率为$P(B|A)=\frac{1}{3}$。

另外，易知$P(A)=\frac{1}{3},P(AB)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{1/4}{3/4}$

故$P(B|A)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{P(A)}$

条件概率

◆ **定义：** 设A、B是两个事件，且$P(A)>0$

$$P(B|A)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{P(A)}$$

为在事件A发生的条件下事件B发生的**条件概率**。

条件概率也满足非负性，规范性和可列可加性。

✓ **非负性：** For all B, $P(\mathrm{B}|A)\geq 0$

✓ **规范性：** $P(S|\mathrm{A})\ =1$

✓ **可列可加性：** 设$\mathrm{B}_1\ \mathrm{B}_2\ \ldots$是两两互不相容事件

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$$

条件概率

例： 一盒子装有4只产品，其中有3只一等品，1只二等品。从中取产品两次，每次任取一只，作不放回抽样。设事件A为“第一次取到的是一等品”，事件B为“第二次取到的是一等品”。试求条件概率$P(B|A)$.

解： 将产品编号，1, 2, 3号为一等品；4号为二等品。(i,j)表示第一, 二次分别取到i号, j号。

样本空间$S=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),\ldots,\ (4,2),(4,3)\}$

事件$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$

事件$AB=\{(1,2),(1,3),\ (2,1),(2,3),\ (3,1),(3,2)\}$

条件概率$P(B|A)=\dfrac{\boldsymbol{P(AB)}}{\boldsymbol{P(A)}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

条件概率

◆ **乘法定理：** 设$P(A)>0$，则有

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

此为乘法公式。

推广： 设$\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_n$为n个事件, $n\geq 2$,且$P(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n)>0$, 则

$$P(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n)=P(\mathrm{A}_n|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{n-1})\,P(\mathrm{A}_{n-1}|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{n-2})\cdots P(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1)\,P(\mathrm{A}_1).$$

条件概率

例： 设袋中装有r只红球，t只白球，每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入a只与所取颜色相同的球，若在袋中连续取球四次，试求第1、2次取到红球且第3，4次取到白球的概率

解： 以$A_i(i=1,2,3,4)$表示事件“第i次取到红球”，则$\overline{A_3},\overline{A_4}$分别表示事件第三、四次取到白球，所求概率为

$$P\left(A_1A_2\overline{A_3A_4}\right)=P\left(\overline{A_4}\middle|A_1A_2\overline{A_3}\right)P\left(\overline{A_3}\middle|A_1A_2\right)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$=\frac{t+a}{r+t+3a}\times\frac{t}{r+t+2a}\times\frac{r+a}{r+t+a}\times\frac{r}{r+t}$$

条件概率

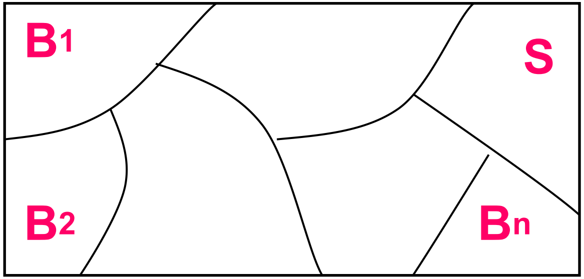
◆ **定义：** 设S为试验E的样本空间，$B_1, B_2, \cdots$，B_n为E的一组事件。若：

（i）$B_i B_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots,n.$

（ii）$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S,$

则称$B_1, B_2, \cdots$，B_n为样本空间S的一个**划分**。

若$B_1, B_2, \cdots$，B_n为样本空间S的一个**划分**，则每次试验中，事件$B_1, B_2, \cdots$，B_n中必有一个且仅有一个发生。



即：$B_1, B_2, \cdots$，B_n至少有一发生是必然的，两两同时发生又是不可能的。

条件概率

- **定理：** 设试验E的样本空间为S，A为E的事件， $B_1, B_2, \cdots$, B_n为S的一个划分，$P(Bi) > 0$，$i = 1,2, \dots, n$. 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

称为**全概率公式**。

证： 因

$$A = AS = A(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n,$$

又$P(B_i) > 0$, 且$(AB_i)(AB_j) = \emptyset$, 得

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n) = P(A|B_1)P(B_1) +$$

$$P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

条件概率

作业：6，8，13，16，20