本次课程提纲：图的基本概念

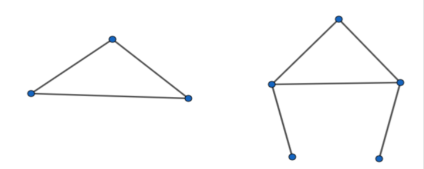
- 子图
- 图运算
- 连通性

子图的概念

- 如果 $V(H) \subseteq V(G)$，$E(H) \subseteq E(G)$，H 为 G 的子图，记为 $H \subseteq G$
  - 如果 $H \neq G$，称 H 为 G 的真子图

子图的概念

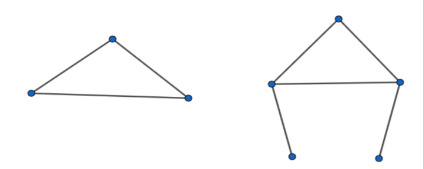
- 如果 $V(H) \subseteq V(G)$，$E(H) \subseteq E(G)$，H 为 G 的子图，记为 $H \subseteq G$
  - 如果 $H \neq G$，称 H 为 G 的真子图
- 点导出子图
  - 对 $V' \subseteq V(G)$，以 V' 为顶点集，两个端点均在 V' 中的 G 的边的集合组成的图，称为 G 的点导出子图，记为 $G(V')$



- 边导出子图
  - 对 $E' \subseteq E(G)$，以 E' 为边集，E' 中所有端点为点集组成的图，称为 G 的边导出子图，记为 $G(E')$

子图的概念

- 如果 $V(H) \subseteq V(G)$，$E(H) \subseteq E(G)$，H 为 G 的子图，记为 $H \subseteq G$
  - 如果 $H \neq G$，称 H 为 G 的真子图
- 点导出子图
  - 对 $V' \subseteq V(G)$，以 V' 为顶点集，两个端点均在 V' 中的 G 的边的集合组成的图，称为 G 的点导出子图，记为 $G(V')$



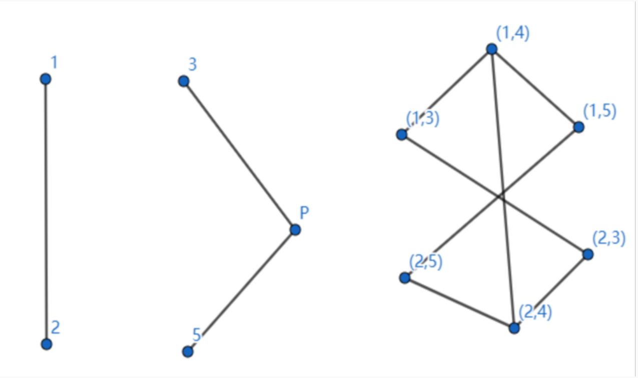
- 边导出子图
  - 对 $E' \subseteq E(G)$，以 E' 为边集，E' 中所有端点为点集组成的图，称为 G 的边导出子图，记为 $G(E')$
- 生成子图
  - 如果图 G 的一个子图包含 G 的所有顶点，称该子图为 G 的一个生成子图
  - 简单图 G 有 2^m 个生成子图

图运算

- 删点：$G-V$：删去 V 中的点及相关联的边
- 删边：$G-E$：删去 E 中的边
    - 删边不删点
- 并运算：用两个图中点和边构成新图
    - 如果 G 与 H 不相交 (没有公共顶点)，称它们的并为直接并，记为 $G+H$
- 交运算
- 差运算：$G-H$：从 G 中删去 H 中的边得到的新图
- 对称差运算 (或环和运算)
    - $G\Delta H=(G\cup H)-(G\cap H)$
- 联运算：设 G 和 H 是两个不相交的图，作 $G+H$，并且将 G 中每个点和 H 中的每个点连接

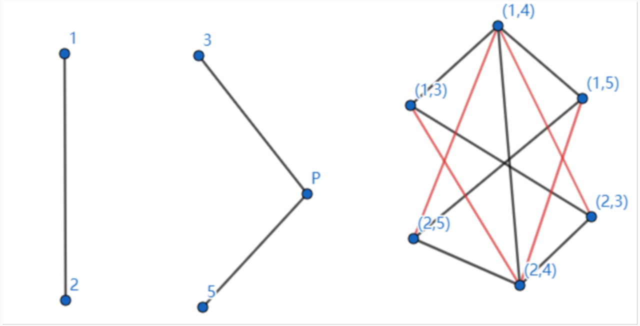
积运算

- 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图
- 对点集 $V = V_1 \times V_2$ 中任意两点 $u = (u_1, u_2)$ 与 $v = (v_1, v_2)$
- 当 ($u_1 = v_1$ 且 u_2 与 v_2 相邻) 或 ($u_2 = v_2$ 且 u_1 和 v_1 相邻) 时，把 u 与 v 相连
- 如此得到的图称为 G_1 与 G_2 的积图, 记为：$G_1 \times G_2$



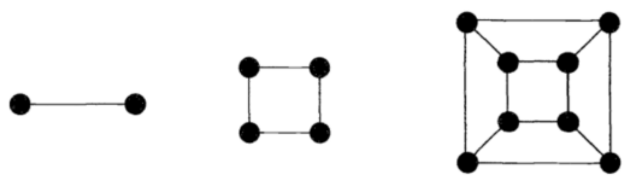
合成运算

- 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图
- 对点集 $V = V_1 \times V_2$ 中任意两点 $u = (u_1, u_2)$ 与 $v = (v_1, v_2)$
- 当 (u_1 与 v_1 相邻) 或 ($u_1 = v_1$ 且 u_2 和 v_2 相邻) 时，把 u 与 v 相连
- 如此得到的图称为 G_1 与 G_2 的合成图, 记为：$G_1[G_2]$



积运算的应用实例

- 递归构造超立方体
- 超立方体定义
  - 1 立方体：$Q_1 = K_2$
  - n 立方体：$Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$



超立方体递归构造算法

- 将 Q_n 的顶点用 n 比特的二进制码来表示
  - Q_n 的顶点数目为 2^n 个
- 由 Q_{n-1} 构造 Q_n
  - 将 Q_{n-1} 拷贝
  - 将原 Q_{n-1} 每个顶点的码前添加 0
  - 将拷贝的 Q_{n-1} 每个顶点的码前添加 1
  - 在以上两个 $n-1$ 方体之间连线
    - 当且仅当两个顶点对应的码只有一位不同
- 并行计算机中的网络拓扑常采用超立方体

图的连通性

- 途径
  - G 的一条途径（或通道或通路）是指一个有限非空序列：$w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$，$e_i$ 的端点是 v_{i-1} 和 v_i
  - 途径中边数称为途径的长度；v_0 与 v_k 分别称为途径的起点与终点，其余顶点称为途径的内部点
- 迹：边不重复的途径
- 路：顶点不重复的途径
- 起点终点重合的途径、迹、路分别称为闭途径、闭迹与圈
- 闭迹也称为回路
- 长度为 k 的圈称为 k 圈，k 为奇数（偶数）时称为奇（偶）圈

图的连通性

- 图中两顶点的距离
  - u 与 v 间最短路的长度称为 u 与 v 距离，记为 $d(u,v)$
- 顶点的连通性：u 与 v 间存在途径
- 连通图：图中任意两点是连通的图
  - 若图 G 不连通，则其补图连通
- 连通分支：非连通图中每一个极大连通部分
- G 的连通分支的个数，称为 G 的分支数
- 图的直径
  - $d(G) = \max\{d(u,v) | u,v \in V\}$

偶图的判定

偶图判定定理

一个图是偶图当且当它不包含奇圈

偶图的判定

偶图判定定理

一个图是偶图当且当它不包含奇圈

证明

- 必要性
    - 设 G 是偶图 (X, Y)，$C = v_0 v_1 \cdots v_k v_0$ 是 G 中的圈
    - 不失一般性，假定 $v_0 \in X$, 那么：$v_{2i} \in X, v_{2i+1} \in Y$, 即 $v_k \in Y$
    - 所以，C 为偶圈

偶图的判定

偶图判定定理

一个图是偶图当且当它不包含奇圈

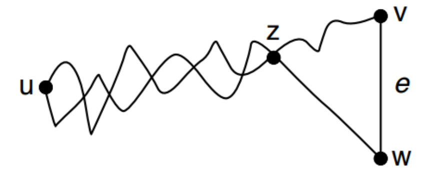
证明

- 必要性
  - 设 G 是偶图 (X, Y)，$C = v_0 v_1 \cdots v_k v_0$ 是 G 中的圈
  - 不失一般性，假定 $v_0 \in X$，那么：$v_{2i} \in X, v_{2i+1} \in Y$，即 $v_k \in Y$
  - 所以，C 为偶圈
- 充分性
  - 在 G 中任意选取点 u，定义 V 的分类如下
    - $X = \{x | d(u, x) = 2k, x \in V(G)\}$
    - $Y = \{y | d(u, y) = 2k + 1, y \in V(G)\}$
  - 只需证明：X 中任意两点 v 与 w 不邻接

偶图的判定

证明续

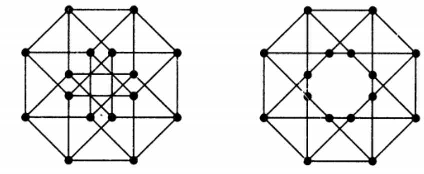
- 充分性
  - 设 v 与 w 是 X 中任意两个顶点。P 是一条最短 (u,v) 路，而 Q 是一条最短的 (u,w) 路，设 z 是 P 和 Q 的最后一个交点



  - 由于 P,Q 是最短路，所以，P,Q 中 u 到 z 段长度相同，因此奇偶性相同。
  - 又因为 P,Q 的长均是偶数，所以，P,Q 中 z 到 v 段和 z 到 w 段奇偶性相同
  - 如果 v 与 w 邻接，则可得到奇圈，矛盾！

课后练习与思考题

- 证明简单图的边数 $\leq n(n-1)/2$，当且仅当完全图时等号成立
- 证明简单偶图的边数 $\leq n^2/4$
- 下面两个图是否同构，是否是偶图



- 证明 Peterson 图没有长度为 7 的圈