线性代数 (Linear Algebra)

第三章 Determinants

§3.3 Cramer's Rule, Volume, and Linear Transformations

克莱姆法则，体积和线性变换

衡益

2021 年 11 月 18 日，中山大学南校区

克莱姆法则

2

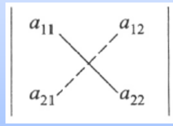
二阶行列式

$$\begin{cases} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} := b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} := a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{D_1}{D} \\ \dfrac{D_2}{D} \end{pmatrix}$$

行列式 (Determinants)

对角线法

+ -



克莱姆法则

➢ 对任意$n\times n$矩阵**A**和任意的$\mathbb{R}^n$中向量**b**，令$\mathbf{A}_i(\mathbf{b})$表示**A**中第i列由向量**b**替换得到的矩阵

$$\mathrm{A}_i(\mathrm{b}) = [\mathrm{a}_1 \cdots \mathrm{b} \cdots \mathrm{a}_n]$$

第i列

定理7（克莱姆法则）

✓ 设**A**是一个可逆的$n\times n$矩阵，对$\mathbb{R}^n$中任意向量**b**，方程$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的唯一解可由下式给出：

$$x_i = \frac{\det \mathrm{A}_i(\mathrm{b})}{\det \mathrm{A}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

克莱姆法则

定理7证明

- 用$a_1, \cdots, a_n$表示**A**的列，用$e_1, \cdots, e_n$表示$n \times n$单位矩阵**I**的列
- **Ax=b**

$$\Rightarrow \quad A \cdot I_i(x) = A[e_1 \cdots x \cdots e_n] = [Ae_1 \cdots Ax \cdots Ae_n] = [a_1 \cdots b \cdots a_n] = A_i(b)$$

- 由行列式的乘法性质

$$(\det A)(\det I_i) = \det A_i(b)$$

$$\Downarrow$$

$$(\det A)\, x_i = \det A_i(b) \quad (A\text{可逆，} \det A \neq 0)$$

5

矩阵的秩

定义 矩阵A的秩（记为rank A）是A的列空间的维数．因为A的主元列形成Col A的一个基，A的秩正好是A的主元列的个数．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩 = 3

6

矩阵的秩

定义 在 $m \times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行和 k 列（$k \le m$, $k \le n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式。

定义

设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如存在）全等于 0，那么 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵的 A 的秩，记作 $\boxed{R(A)}$。并规定零矩阵的秩等于 0。

矩阵的秩

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

非零子式最高阶 = 3

秩 = 3

定理 若 A ~ B，则 $R(A) = R(B)$

推论 若可逆矩阵 P，Q 使 PAQ = B，则 $R(A) = R(B)$

方程组解的情况

n 元线性方程组 $Ax = b$

(1) 无解的充分必要条件 $R(A) < R(A, b)$

(2) 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$

(3) 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$

方程数和未知变量数不需要相同！！！

9

克莱姆法则

例： 利用克拉姆法则解以下方程组

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

解：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, A_1(b) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, A_2(b) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = \frac{24 + 16}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{24 + 30}{2} = 27$$

10

求A^{-1}的新方法

逆矩阵

$$ax = b,\quad a \neq 0 \Rightarrow x = a^{-1}b$$

$$Ax = b,\quad A\,? \Rightarrow x = A^{-1}b$$

定义 对于 n 阶矩阵 **A**，存在一个 n 阶矩阵 **B**，使 **AB = BA = I** **(单元矩阵)**，则矩阵 **A** 可逆，**B** 称为 **A** 的逆矩阵， **B** 记作 $\mathbf{A^{-1}}$ 且唯一。

逆矩阵的运算

定理8

n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow \det A \neq 0, A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$,

A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵

A 的伴随矩阵定义为 $A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & \boxed{C_{21}} & \cdots & C_{n1} \\ \boxed{C_{12}} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$,

则 $AA^* = A^*A = |A|\, I$

代数余子式为矩阵元素!

逆矩阵的运算

定义

元素 a_{ij} 的代数余子式 (Algebraic cofactor)

M_{ij}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

逆矩阵运算举例

求 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解：

1. $\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ 存在

2. $A^{*}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^{*}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2.5&4&-1.5\\0.5&-1&0.5\end{pmatrix}$

用行列式表示面积或体积

用行列式表示面积或体积

定理9

- 若**A**是一个2×2矩阵，则由**A**的列确定的平行四边形的面积为$|\det \mathbf{A}|$；
- 若**A**是一个3×3矩阵，则由**A**的列确定的平行六面体的体积为$|\det \mathbf{A}|$；
- 行列式可用于描述平面和$\mathbb{R}^3$中线性变换的一个重要几何性质

用行列式表示面积或体积

- 若**A**是一个2×2矩阵，则由**A**的列确定的平行四边形的面积为$|\det \mathbf{A}|$；

证明：若**A**为2阶对角矩阵，

该定理显然成立（如图1），即：

$$\left|\det\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{bmatrix}\right| = |ad| = \{矩阵的面积\}$$

若**A**不为2阶对角矩阵，只需证$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]$能变成一个对角矩阵既不改变相应平行四边形面积又不改变 $\det \mathbf{A}$。

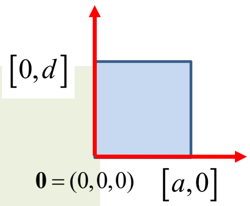


图1

用行列式表示面积或体积

- 若**A**是一个2×2矩阵，则由**A**的列确定的平行四边形的面积为 $|\det \mathbf{A}|$；

由于当行列式的两列交换或一列的倍数加到另一列上时，行列式的绝对值不改变。同时容易看到，这样的运算足以使**A**变换成对角矩阵。由于列变换不改变对应的平行四边形，所以只需要证明下列在$\mathbb{R}^2$中的向量的简单的几何现象就足够了。

设$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$为非零向量，则对任意数c，由$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$确认的平行四边形的面积等于由$\mathbf{a}_1+c\mathbf{a}_2$确认的平行四边形的面积

19

用行列式表示面积或体积

- 若**A**是一个2×2矩阵，则由**A**的列确定的平行四边形的面积为 $|\det \mathbf{A}|$；

设$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$为非零向量，则对任意数c，由$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$确认的平行四边形的面积等于由$\mathbf{a}_1+c\mathbf{a}_2$确认的平行四边形的面积

为了证明这个结论，我们假设$\mathbf{a}_1$不是$\mathbf{a}_2$的倍数，否则这两个平行四边形将退化成面积为0。若L是通过$\mathbf{0}$和$\mathbf{a}_1$的直线，则$\mathbf{a}_2+L$是通过$\mathbf{a}_2$且平行于L的直线，$\mathbf{a}_2+c\mathbf{a}_1$在此直线上。

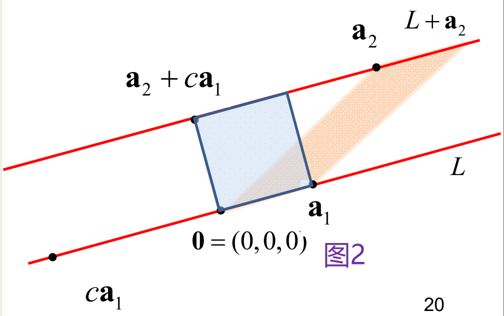


图2

20

- For 3×3 matrix A = [$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$],

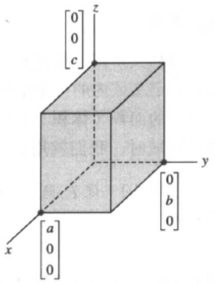
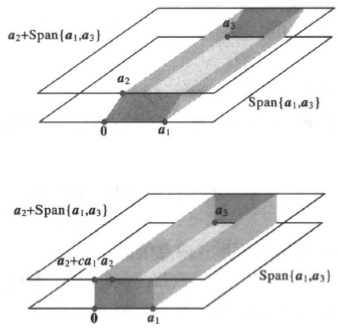


图 3-6 体积=|a b c|

Two parallelograms of equal area



用行列式表示面积或体积

➢ 若A是一个2×2矩阵，则由A的列确定的平行四边形的面积为|det A|；

设$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$为非零向量，则对任意数c，由$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$确认的平行四边形的面积等于由$\mathbf{a}_1+c\mathbf{a}_2$确认的平行四边形的面积

如图2所示，点$\mathbf{a}_2$和$\mathbf{a}_2+c\mathbf{a}_1$到直线$L$具有相同的垂直距离。图2中的两个平行四边形具有相同的底边，即$\mathbf{0}$到$\mathbf{a}_1$的线段，所以这两个平行四边形具有相同的面积。（证毕）

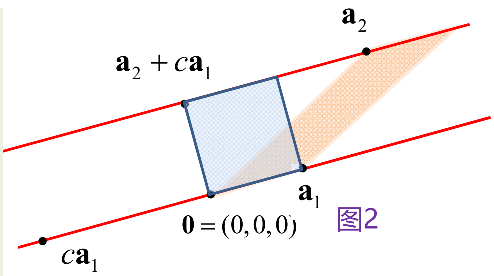


图2

类似可证明$\mathbb{R}^3$的情形

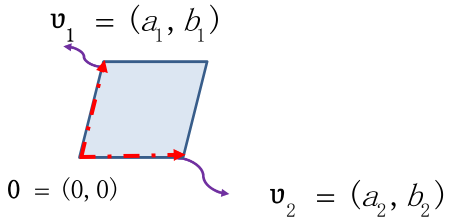
用行列式表示面积

行列式表示面积

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

平行四边形



$$S_{\text{平行四边形}} = |\det A|$$

- **A**为上面方程组系数矩阵；
- 上面平行四边形面积为**A的绝对值**。

23

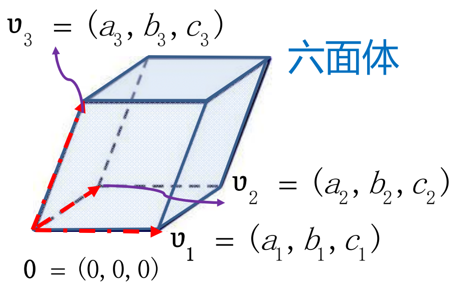
用行列式表示体积

行列式表示体积

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

六面体



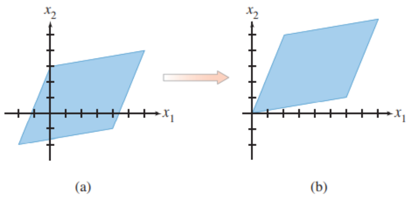
$$V_{\text{六面体}} = |\det A|$$

- **A**为上面方程组系数矩阵；
- 上面六面体体积为**A的绝对值**。

24

用行列式表示面积

例： 计算由点(-2, -2), (0, 3), (4, -1), (6, 4)确定的平行四边形的面积。



- 计算先将此平行四边形平移到原点作为其一顶点的情形
- 其顶点为
  (0, 0), (2, 5), (6, 1), (8, 6)

$$\left|\det A\right| = \left|\det\begin{pmatrix}2 & 6\\ 5 & 1\end{pmatrix}\right| = \left|-28\right| = 28$$

线性变换

线性变换

定理10：设 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是由一个 2×2 矩阵A 确定的线性变换，若 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个平行四边形，则：

$$\{T(S)\text{的面积}\}=|\det A|\cdot\{S\ \text{的面积}\}$$

若 T 是一个由 3×3 矩阵A 确定的线性变换，若 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个平行六面体，则：

$$\{T(S)\text{的体积}\}=|\det A|\cdot\{S\ \text{的体积}\}$$

27

线性变换

定理10证明

- 考虑2×2的情形，$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$.
  - •平行四边形若由向量 $\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{b}_2$ 确定，则有以下等式：

$$S=\{s_1\mathrm{b}_1+s_2\mathrm{b}_2:0\le s_1\le 1,0\le s_2\le 1\}$$

  - •S 在 T 下的像由以下形式的点组成：

$$T(s_1\mathrm{b}_1+s_2\mathrm{b}_2)=s_1T(\mathrm{b}_1)+s_2T(\mathrm{b}_2)=s_1\mathrm{Ab}_1+s_2\mathrm{Ab}_2$$

  - •由定理9和行列式的乘积定理

$$\{T(S)\text{的面积}\}=|\det[\mathrm{Ab}_1\ \ \mathrm{Ab}_2]|=|\det \mathrm{AB}|=|\det \mathrm{A}|\cdot|\det \mathrm{B}|=|\det \mathrm{A}|\cdot\{S\text{的面积}\}$$

  - •对任意具有 $p+S$ 的平行四边形，由于平移不改变一个集合的面积

$$\begin{aligned}\{T(p+S)\text{的面积}\}&=\{T(p)+T(S)\text{的面积}\}=\{T(S)\text{的面积}\}(\text{平移})\\&=|\det \mathrm{A}|\cdot\{S\text{的面积}\}(\text{由以上公式})=|\det \mathrm{A}|\cdot\{p+S\text{的面积}\}(\text{平移})\end{aligned}$$

28

线性变换

➢ 定理10的结论对$\mathbb{R}^2$中任意具有有限面积的区域或$\mathbb{R}^3$中具有有限体积的区域均成立。

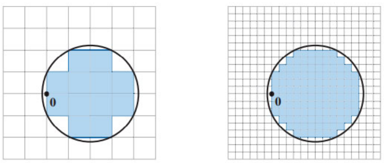


图1 由正方形近似一个平面区域，近似的程度随格子变细小而改进

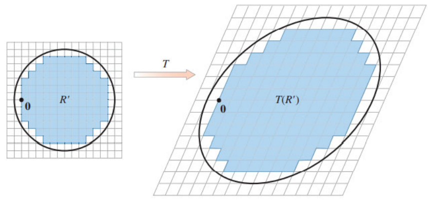


图2 $T(\mathbf{R})$由平行四边形的并集近似

线性变换

例：根据圆的面积公式推导椭圆面积计算公式

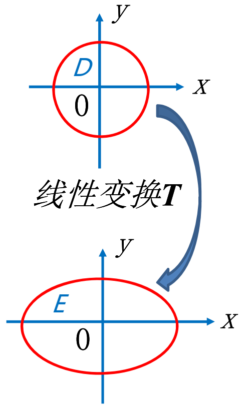
若a,b 为正数，计算由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为边界的区域E 面积?

T 由矩阵A $=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 决定

E 可以看成为D 在线性变换T 下得到

假设 u $=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, v $=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

且满足v=Au



线性变换

例：根据圆的面积公式推导椭圆面积计算公式

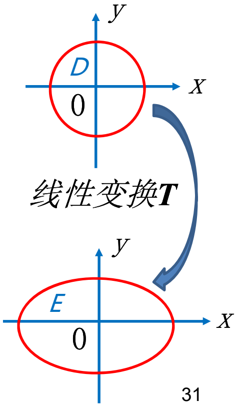
若a,b为正数，计算由方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 为边界的区域$\boldsymbol{E}$面积?

则：$u_1=\dfrac{x}{a};u_2=\dfrac{y}{b}$　　u在单位圆内，满足:

$$u_1^2+u_2^2\le 1,\ \text{即:}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\le 1$$

$$\text{因此，椭圆面积}=\left|\det \mathrm{A}\right|\cdot\{D\ \text{的面积}\}$$

$$=a\cdot b\cdot\pi\cdot(1)^2=\pi ab$$ 根据定理1的推广



特殊行列式介绍

n 阶行列式的一些特殊形式

下三角行列式 ①

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角行列式 ②

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n$$

33

n 阶行列式的一些特殊形式

反向上三角行列式 ③

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

反向对角行列式 ④

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$$

34

上三角行列式

③ **证明思路**

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{n1}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{n,n-1}} & \boxed{a_{nn}} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{n-1 次交换}} \begin{vmatrix} \boxed{a_{n1}} & \boxed{a_{n2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{n,n-1}} & \boxed{a_{nn}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

35

上三角行列式

③ **证明思路（续）**

$$\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boxed{0} & \boxed{a_{n-1,2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{n-1,n-1}} & \boxed{a_{n-1,n}} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{n-2 次交换}} \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ \boxed{0} & \boxed{a_{n-1,2}} & \boxed{a_{n-1,3}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{n-1,n-1}} & \boxed{a_{n-1,n}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \end{vmatrix}$$

36

上三角行列式

③ 证明思路（续）

… … …

$$\Rightarrow (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n,2} & \cdots & a_{nn} \\ & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

37

对角行列式

④ 同理可证明

$$D = \begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$$

38

Vandermonde 行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

$$\boxed{1\le j<i\le n}$$

1735～1796

Vandermonde 是第一个对行列式理论进行系统的阐述（即把行列式理论与线性方程组求解相分离）的人。并且给出了一条法则，用二阶子式和它们的余子式来展开行列式。就对行列式本身进行研究这一点而言，他是这门理论的奠基人。

39

Vandermonde 行列式

证明思路

2 阶 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=(a_2-a_1)=\prod_{1\le j<i\le 2}(a_i-a_j)$

n-1 阶 ✓ ⟶ **n 阶** ?

40

Vandermonde 行列式-证明思路

n 阶

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_i - r_{i-1}a_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

41

Vandermonde 行列式-证明思路

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

n-1 阶

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}}$$

42

Vandermonde 行列式-证明思路

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\boxed{\prod_{2\le j<i\le n}(a_i - a_j)}$$

$$= \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

假设 n-1 阶公式成立

n 阶

43

回家作业

3.3：P198：7，11，21

44

Q & A