线性代数 (Linear Algebra)

第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§1.4 The Matrix Equation 矩阵方程 Ax=b

衡益

2021 年 10 月 9 日，中山大学东校区

定义

2

二元一次线性方程

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2
\end{cases}
\xrightarrow{\text{消元法}}
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
x_2 &= \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
\end{aligned}
$$

线性方程组 (System of linear equations)

传统方式 → 矩阵、向量表述

3

矩阵方程Ax=b

$$
\begin{cases}
\boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} & \cdots & a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}
\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}}_{\mathbf{x}}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{b_1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}
$$

矩阵 向量

Ax = b

4

矩阵方程Ax=b

定义

✓ 若A是$m \times n$矩阵，它的各列为$\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n$，若x 是$\mathbb{R}^n$ 中向量，则A与x的积，记为Ax，就是A的各列以x中对应元素为权的线性组合，即

$$\mathrm{Ax} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \cdots & \mathrm{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathrm{a}_1 + x_2\mathrm{a}_2 + \cdots + x_n\mathrm{a}_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ax = b

注意：当**A**的列数等于**x**中元素个数时**Ax**才有定

矩阵方程Ax=b

计算Ax的行——向量规则

✓ 若乘积Ax有定义，则Ax中的第i 个元素是A的第i 行元素与x的相应元素乘积之和。

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1} \quad \cdots \quad a_{nn} \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

矩阵方程Ax=b

例1：

a)
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 8 & 0\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\8\\-5\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\32\\-20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-21\\0\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13\\32\\-6\end{pmatrix}$$

7

矩阵方程Ax=b

例2：对$\mathbb{R}^m$中v_1, v_2, v_3，把线性组合$3v_1-5v_2+7v_3$表示为矩阵乘向量的形式。

解： 把$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$排列成矩阵$\mathbf{A}$，把3, 5, -7排列成向量$\mathbf{x}$。

$$3v_1-5v_2+7v_3=\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}=Ax$$

8

矩阵方程Ax=b

课堂练习： 将线性方程组写成矩阵方程的形式

$$\begin{aligned} x_1+6x_2 \quad\ + 3x_4 &= 0 \\ -x_2+x_3 - 4x_4 &= 5 \\ x_4 &= 7 \end{aligned}$$

解：

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}6\\-1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 6 & 0 & 3\\0 & -1 & 1 & -4\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix}$$

A x = b

9

矩阵方程Ax=b

定理3

✓ 若A是$m \times n$矩阵，它的各列为$a_1, \cdots, a_n$，而b属于$\mathbb{R}^m$，则矩阵方程

$$Ax = b$$

与向量方程

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b$$

有相同的解集。它又与增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b\end{pmatrix}$$

的线性方程组有相同的解集。

10

解的存在性

解的存在性

方程Ax=b对任意的b
是否都有解？

怎么判断？

方程Ax=b有解当且仅当b是A的各列的线性组合

解的存在性

例3： 设A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$， b= $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. 方程Ax = b是否对一切可能的 b_1，b_2，b_3有解？

可能不为0
不一定有解

解： 把**Ax**=**b**增广矩阵行化简

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2+4b_1 \\ 0 & 7 & 5 & b_3+3b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2+4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{b_3+3b_1-\frac{1}{2}(b_2+4b_1)} \end{pmatrix}$$

13

解的存在性

定理4

➢ 设**A**是$m\times n$矩阵，则下列命题是逻辑上等价的，也就是说，对于某个矩阵**A**，它们都成立或者都不成立：

① 对$\mathbb{R}^m$中每个**b**，方程**Ax**=**b**有解。

② $\mathbb{R}^m$中每个**b**都是**A**的列的一个线性组合。

③ **A**的各列生成$\mathbb{R}^m$。

④ **A**在每一行都有一个主元位置。

A是系数矩阵！！

14

解的存在性

定理4证明

设**U**为**A**的阶梯形，给定$\mathbb{R}^m$中的**b**

增广矩阵(**A b**) ~ 增广矩阵(**U d**)

定理4 ④√

U每一行包含一个主元位置

d增广列中不可能有主元

定理4 ①√

∀**b**，**Ax**=**b**都有解

定理4 ④×

则$U=\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{n1} \\ \vdots \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$，设$d=\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

定理4 ①×

(**U d**)代表一个不相容的方程组

解的存在性

练习： 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. 方程$Ax=b$是否对一切可能的

b_1，b_2，b_3有解？

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ → ~~定理4 ④~~ → ~~定理4 ①~~

解的存在性

A的各列生成$\mathbb{R}^m$ ← 定理4 ③

定义

✓ $\mathbb{R}^m$中每个向量b都是A的列的线性组合，则

$$\mathrm{Span}\{a_1, \cdots, a_p\} = \mathbb{R}^m$$

即$\mathbb{R}^m$中每个向量都是$a_1, \cdots, a_p$的线性组合。

17

解的存在性

例4： 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$，A 的列是否可以生成 $\mathbb{R}^3$?

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

定理4 ④×

定理4 ③×

$\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \mathbb{R}^3$ ×

18

Ax的计算

Ax的计算

例5：计算Ax，其中A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$，x = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

解： 由定义

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ax的计算

例5：

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -x_1 \\ 6x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 \\ 5x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_3 \\ -3x_3 \\ 8x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2+4x_3 \\ -x_1+5x_2+3x_3 \\ 6x_1-2x_2+8x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad 4} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \boxed{2x_1+3x_2+4x_3} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \\ \boxed{-1 \quad 5 \quad -3} \\ \\ \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \\ \boxed{-x_1+5x_2+3x_3} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ax的计算

计算Ax的行——向量规则

✓ 若乘积Ax有定义，则Ax中的第i 个元素是A的第i 行元素与x的相应元素乘积之和。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Ax的计算

例6：

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + (-1)\cdot 7 \\ 0\cdot 4 + (-5)\cdot 3 + 3\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + (-3)\cdot 7 \\ 8\cdot 4 + 0\cdot 7 \\ -5\cdot 4 + 2\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot r + 0\cdot s + 0\cdot t \\ 0\cdot r + 1\cdot s + 0\cdot t \\ 0\cdot r + 0\cdot s + 1\cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$

单位矩阵

$\forall \mathbb{R}^n$中的$\mathbf{x}$，

$I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$

矩阵-向量积Ax
的性质

矩阵-向量积Ax的性质

矩阵-向量积Ax的性质

定理5 若A是$m \times n$矩阵，u和v是$\mathbb{R}^n$中向量，c是标量，则

(a) $A(u+v) = Au+Av$.

(b) $A(cu) = c(Au)$.

25

矩阵-向量积Ax的性质

定理5证明

取$n=3$，$\mathbf{A}=(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3)$

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$为$\mathbb{R}^3$中的向量

(a) $\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$作为$\mathbf{A}$的各列以$\mathbf{u}+\mathbf{v}$的元素为权的线性组合:

$$\begin{aligned} A(u+v) &= (a_1\ \ a_2\ \ a_3)\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix} \\ &= (u_1+v_1)a_1+(u_2+v_2)a_2+(u_3+v_3)a_3 \\ &= (u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3)+(v_1a_1+v_2a_2+v_3a_3) \\ &= Au+Av \end{aligned}$$

(b) $\mathbf{A}(c\mathbf{u})$作为$\mathbf{A}$的各列以$c\mathbf{u}$的元素为权的线性组合:

$$\begin{aligned} A(cu) &= (a_1\ \ a_2\ \ a_3)\begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{pmatrix} \\ &= (cu_1)a_1+(cu_2)a_2+(cu_3)a_3 \\ &= c(u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3) = c(Au) \end{aligned}$$

回家作业

回家作业1

作业1

设A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$，b= $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，证明方程Ax=b不是对一切的b都相容，并说明使Ax =b 相容的所有向量b 的集合。

回家作业2

作业2 设u=$\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$，A=$\begin{pmatrix}3&-5\\-2&6\\1&1\end{pmatrix}$，u是否在由A的列所生成的$\mathbb{R}^3$ 的子集中？为什么？（见图1）

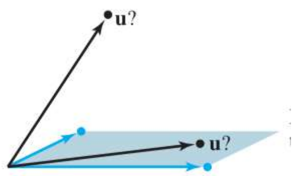

图1 **u**在何处?

回家作业3

作业3 设u=$\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}$, v = $\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$, w = $\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}$，已知3u−5v−w=0，

解方程$\begin{pmatrix}7&3\\2&1\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}$

要求：不使用行变换和消去法

Q & A