电路理论基础

时间：星期三上午8:00至10:40，星期五上午8:00至10:40

地点：南校园1506

任课教师：粟涛（电子与信息工程学院）

考试方式：闭卷

成绩评定：平时分40%，期末考试60%。

学分：4

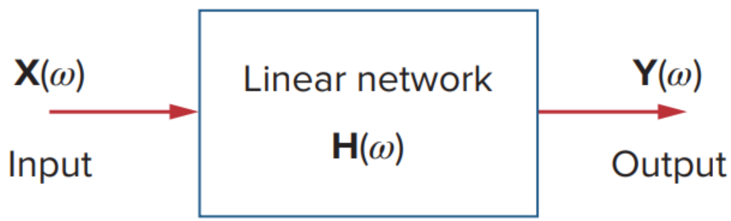
频率响应

- 电路的传递函数
- 波德图（波特图）
- 串联谐振电路
- 并联谐振电路
- 无源滤波器
- 有源滤波器

电路的传递函数

介绍

- 传递函数（transfer function），又名网络函数（network function），是一个以频率或角速度为自变量的函数。



$$H(\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

传递函数的定义

一个电路的传递函数是输出变量与输入变量在频域上的比率。

这些变量可以是电压也可以是电流。

输入变量称为源或激励，输出变量是某元件（组）上的电压或电流。输入变量和输出变量，自己也是一个函数。

- 电路的四种传递函数
  - 电压增益 $H(j\omega) = \dfrac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}$ 跨阻 $H(j\omega) = \dfrac{V_{out}(j\omega)}{I_{in}(j\omega)}$
  - 电流增益 $H(\omega) = \dfrac{I_{out}(j\omega)}{I_{in}(j\omega)}$ 跨导 $H(j\omega) = \dfrac{I_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}$

表达形式

- 电路的传递函数是一个相量
  - 相量是既有幅值又有相位的量；
  - 电路的输入变量；
  - 电路的输出变量。

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$|H|\angle\varphi_H = \frac{|Y|}{|X|}\angle(\varphi_Y - \varphi_X)$$

- 传递函数可以表达为两个多项式之比
  - 符号 $N(j\omega)$ 是分子多项式；
  - 符号 $N(j\omega)$ 是分母多项式；
  - 两个多项式之间已经没有公共因子。

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

举个例子

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

关键频率

- 传递函数的表达式中含有两种特殊的频率点

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

  - 第一种叫零点，zero，分子多项式的根：$N(j\omega) = 0$
  - 第二种叫极点，pole，分母多项式的根：$D(j\omega) = 0$

- 当电路的工作频率位于极点时，
  - 传递函数的值趋向无穷大。
  - 稍微有点输入，就会产生巨大反应。

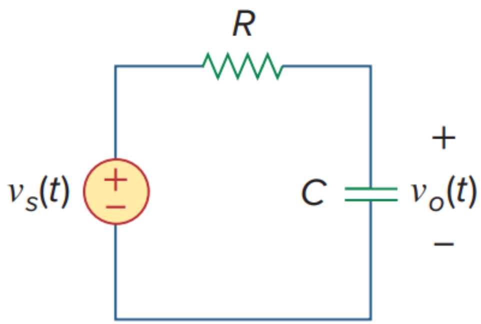
$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

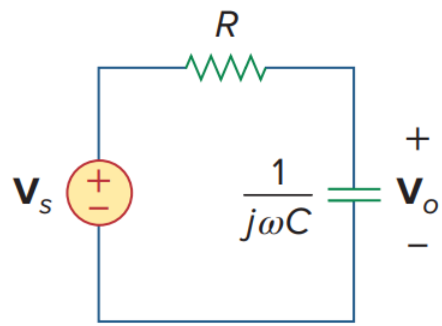
举例

- 分子的根为0，因此传递函数零点为0。
- 分母的根为-2和-3，因此传递函数的极点为-2和-3。
- 对应频率为0和无实。

例题

- 问题：对于下图的 RC 电路，计算传递函数 V_o/V_i 及其频率响应。假设 $V_s = V_m\cos\omega t$。





$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

- 解答：
  - 先将时域电路转化为频域等效电路
    - 信号由相量的形式表达
    - 元件用阻抗的形式表达
  - 然后列出方程，推导

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad \angle H = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}$$

例题续

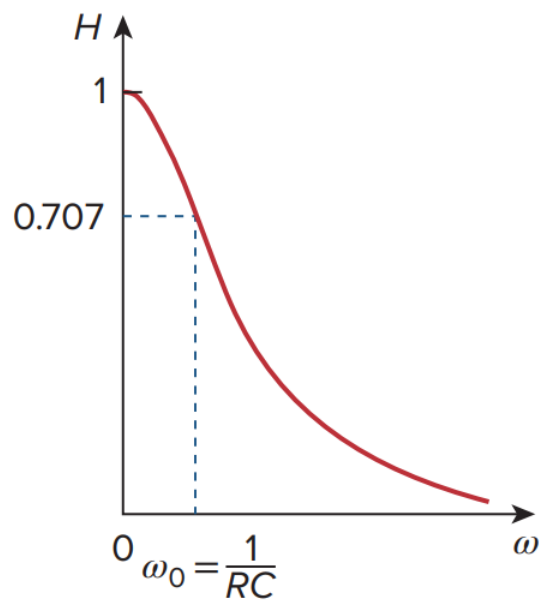
- 解答：
  - 分析一下频率响应
  - 代表性数据
  - 响应曲线

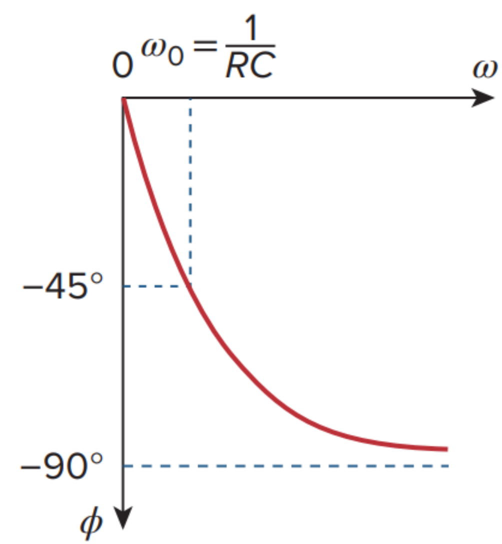
ω/ω_0	H	ϕ	ω/ω_0	H	ϕ
0	1	0	10	0.1	−84°
1	0.71	−45°	20	0.05	−87°
2	0.45	−63°	100	0.01	−89°
3	0.32	−72°	∞	0	−90°

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\angle H = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$





波特图

对数坐标

- 对数函数的特性

$$\log(P_1 P_2) = \log P_1 + \log P_2$$

$$\log P^n = n \log P$$

$$\log \frac{P_1}{P_2} = \log P_1 - \log P_2$$

$$\log 1 = 0$$

- 对数刻度下的增益 G
  - 贝尔（bel）是功率比的对数；

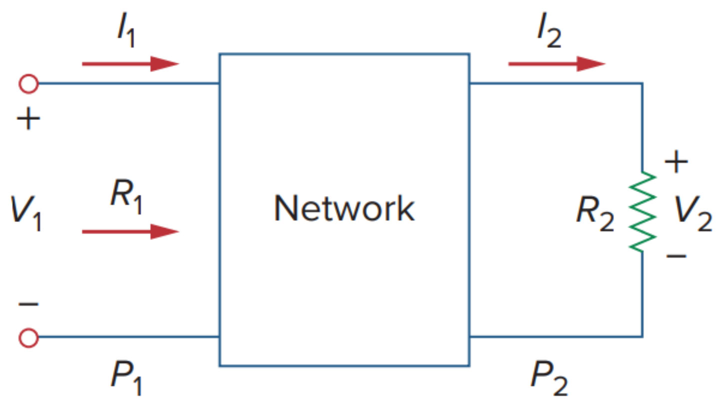
$$\frac{G}{\text{bel}} = \log \frac{P_1}{P_2}$$

  - 分贝（dB）是功率比的贝尔的十分之一。

$$G_{dB} = \frac{G}{\text{dB}} = 10 \log \frac{P_1}{P_2}$$

分贝

- 使用分贝来描述增益时
  - 使用功率计算和使用电压计算，结果一样。
  - 当线性增益上升一数量级时，分贝值加十。



$$G_{dB} = \frac{G}{\mathrm{dB}} = 10\log\frac{P_2}{P_1}$$

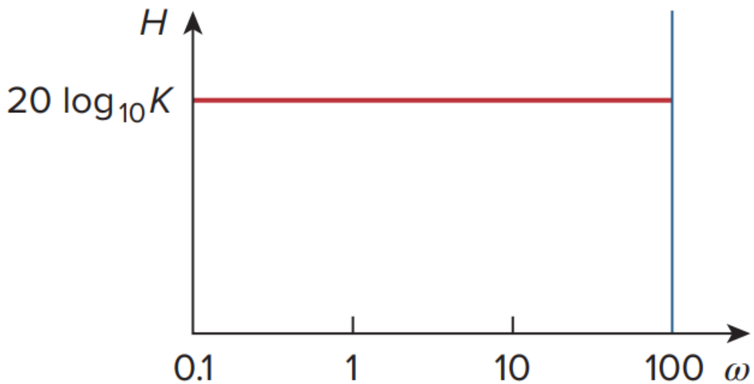
$$G_{dB} = 20\log\frac{V_2}{V_1}$$

分贝	P_2/P_1	V_2/V_1
0 dB	1	1
3 dB	2	1.414
6 dB	4	2
10 dB	10	3.16
20 dB	100	10
30 dB	1000	31.6
40 dB	10000	100

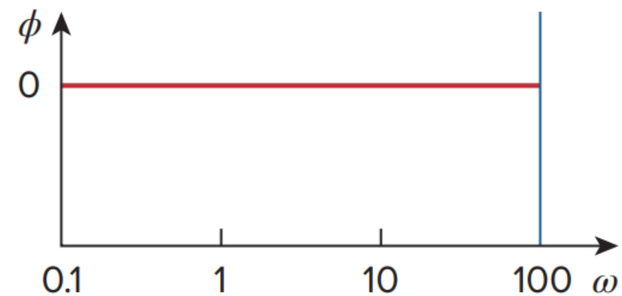
波特图的概念

- 波特图是传递函数的模（单位为分贝）与相位（单位为度）关于频率的半对数曲线图。

$$H = |H|\angle\varphi_H = |H|e^{j\varphi_H}$$



$$H_{dB} = 20\log|H|$$



$$\varphi_H = \frac{\ln H - \ln|H|}{j}$$

- 假设传递函数可以表达为两个函数之积/之比
  - 则波特图因变量为两函数之和

$$H = H_1 \times H_2$$

$$H_{dB} = H_{dB\_1} + H_{dB\_2}$$

$$\varphi_H = \varphi_{H\_1} + \varphi_{H\_2}$$

传递函数的标准形式

- 将传递函数进行变换，得到显示零点和极点的表达式，称为传递函数的标准形式。

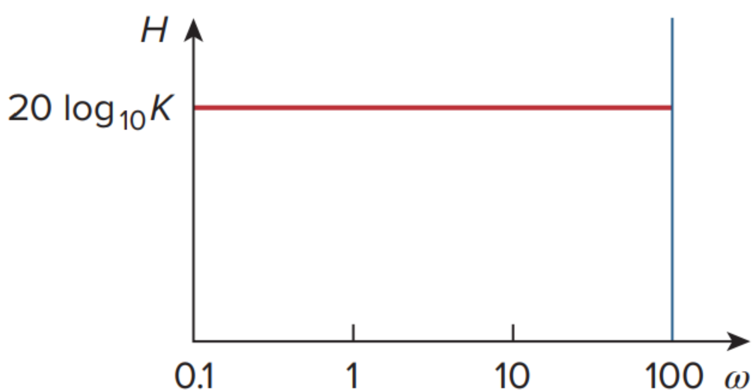
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{K(j\omega)^{\pm 1}(1 + j\omega/z_1)[1 + j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]\cdots}{(1 + j\omega/p_1)[1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]\cdots}$$

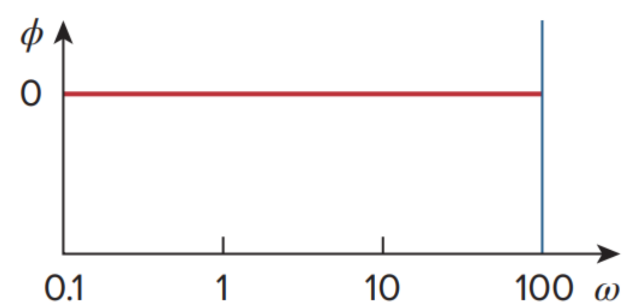
- 上面表达式具有 7 种因子
  - 增益 K；
  - 在原点的极点 1/jω　　或者　零点 jω；
  - 单极点 1/(1+ jω/p)　　或者　单零点 (1+ jω/p)；
  - 二阶极点（太长省略）或者 二阶零点（太长省略）。

绘制波特图的方法

- 先将传递函数写成标准形式。
  - 典型因子相乘；
  - 对数刻度下，因子相加。
- 首先分别绘制各因子的曲线，然后将它们加起来。
  - 各因子的形状可以由极点零点的特性得到。
- 常数项因子的幅频特性和相频特性是一条水平线

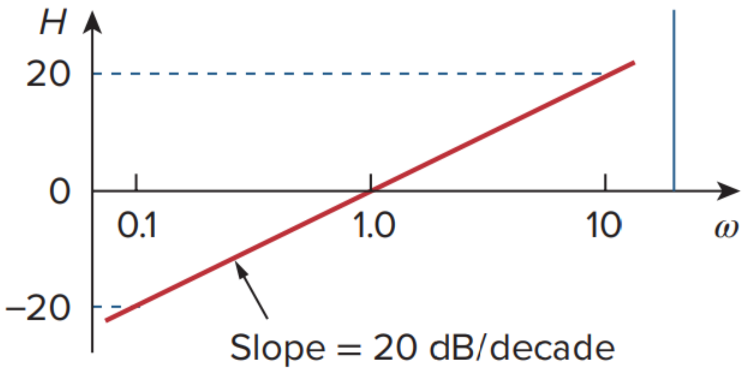
$$H = K = |K|e^{j0,j\pi}$$

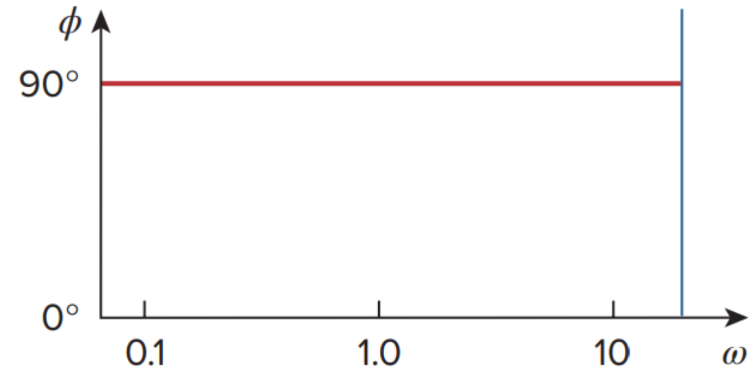




原点处零点和极点

- 位于原点处的零点 $H = j\omega = |\omega|e^{j\frac{\pi}{2}}$





$$20\log|H| = 20\log|\omega|$$

$$\angle H = \frac{\pi}{2}$$

- 位于原点处的极点

$$H = \frac{1}{j\omega} = \left|\frac{1}{\omega}\right| e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$20\log|H| = -20\log|\omega|$$

$$\angle H = -\frac{\pi}{2}$$

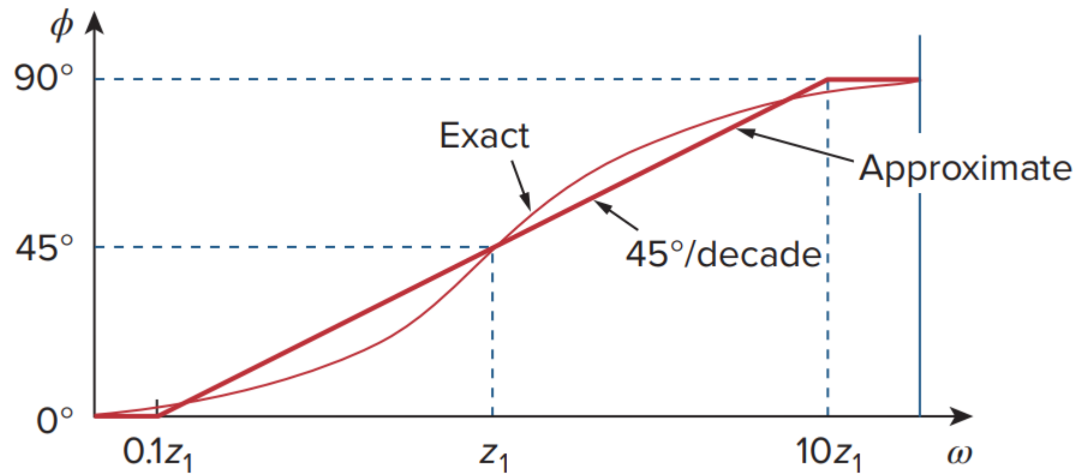
单零点和单极点

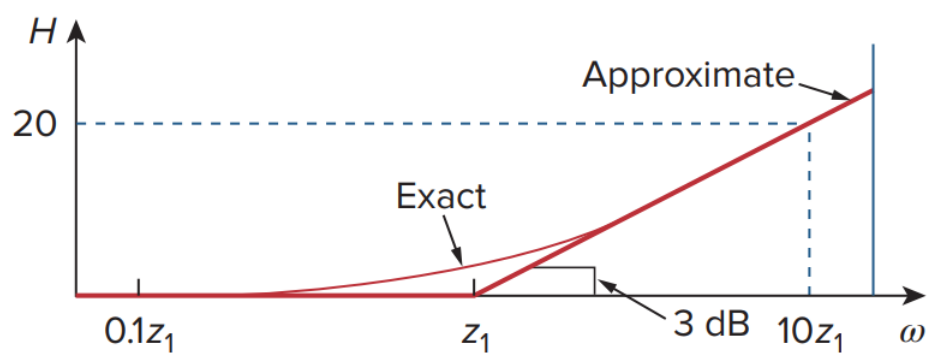
- 单零点：翻升
  - 近似线和转折点

$$H = 1 + \frac{j\omega}{z} = \begin{cases} \frac{j\omega}{z} & \omega \to \infty \\ 1 + j & \omega = z \\ 1 & \omega = 0 \end{cases}$$

$$H = 1 + \frac{j\omega}{z} = \begin{cases} \frac{\omega}{z} e^{j\frac{\pi}{2}} & \omega \to \infty \\ \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} & \omega = z \\ 1 e^{j0} & \omega = 0 \end{cases}$$

$$20\log|H| = \begin{cases} 20\log|\omega| - C & \omega \to \infty \\ 3 & \omega = z \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$





- 单极点：趋势相反，滚降

二阶零点和二阶极点

- 二阶极点

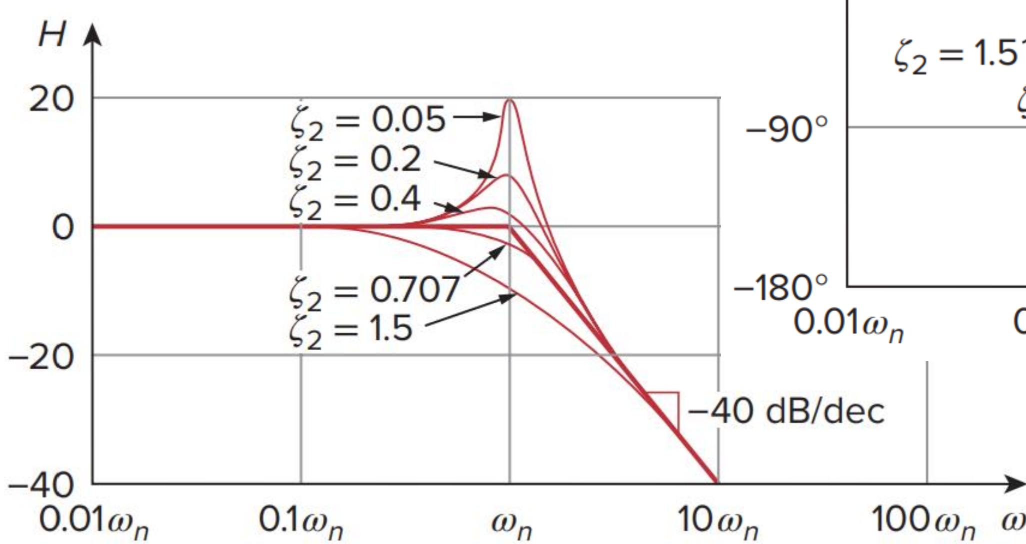
$$H=\frac{1}{1+j2\zeta_2\frac{\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}=\begin{cases}\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 & \omega\to\infty \\ \frac{1}{j2\zeta_2} & \omega=\omega_n \\ 1 & \omega=0\end{cases}$$

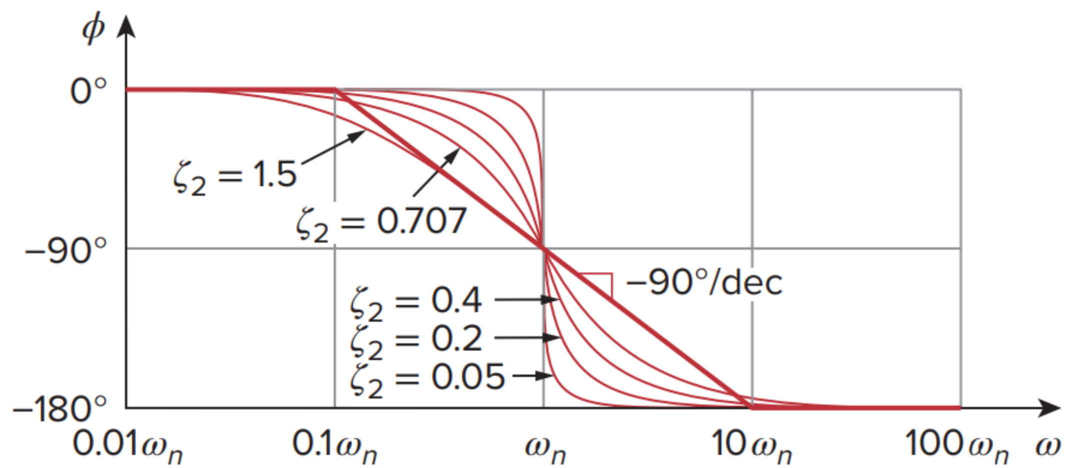
每个数量级，40dB 的滚降，相位负180度。

某个极值，相位负90度。

较平稳常数，相位0度。

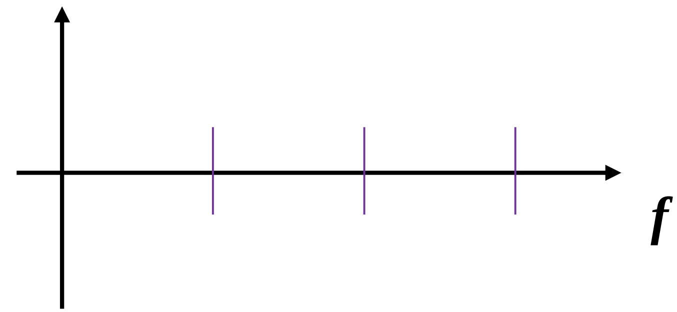
  - 阻尼因子 ζ



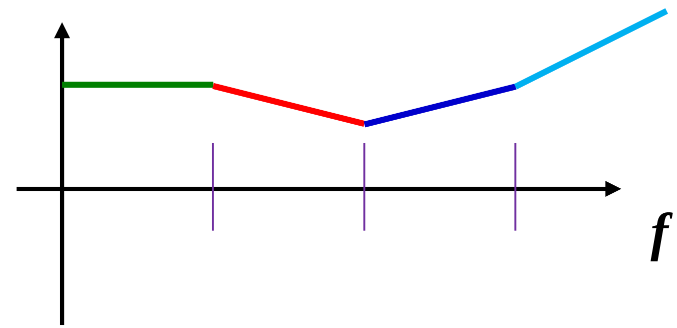


绘制波特图的方法（续）

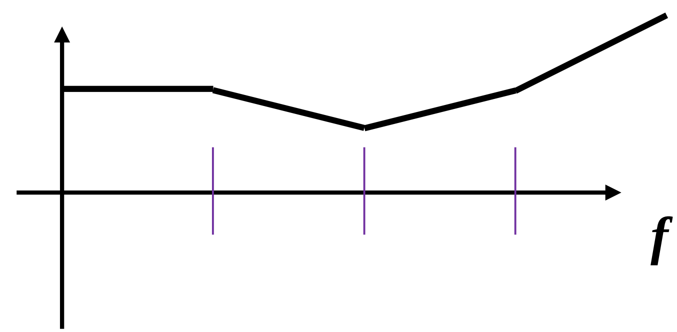
- 第一步：
  – 找到转折频率



- 第二步：
  – 相邻转折频率之间的斜率
  – 绘出连线



- 第三步：
  – 得到整个频率响应图



例题-1

- 问题：画出如下传递函数的波特图

$$H=\frac{200j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+10)}$$

- 解答：
  - 转折频率
  - 斜率计算

圆频率	0	2	10
类型	零点	单极点	单极点
幅度贡献	+ 20 dB/dec	- 20 dB/dec	- 20 dB/dec
相位贡献	90^o	$-\tan^{-1}(\omega/2)$ a	$-\tan^{-1}(\omega/10)$ b

圆频率	[0, 2)	[2,10)	[10, ∞)
幅度斜率	+ 20 dB/dec	+ 0 dB/dec	- 20 dB/dec

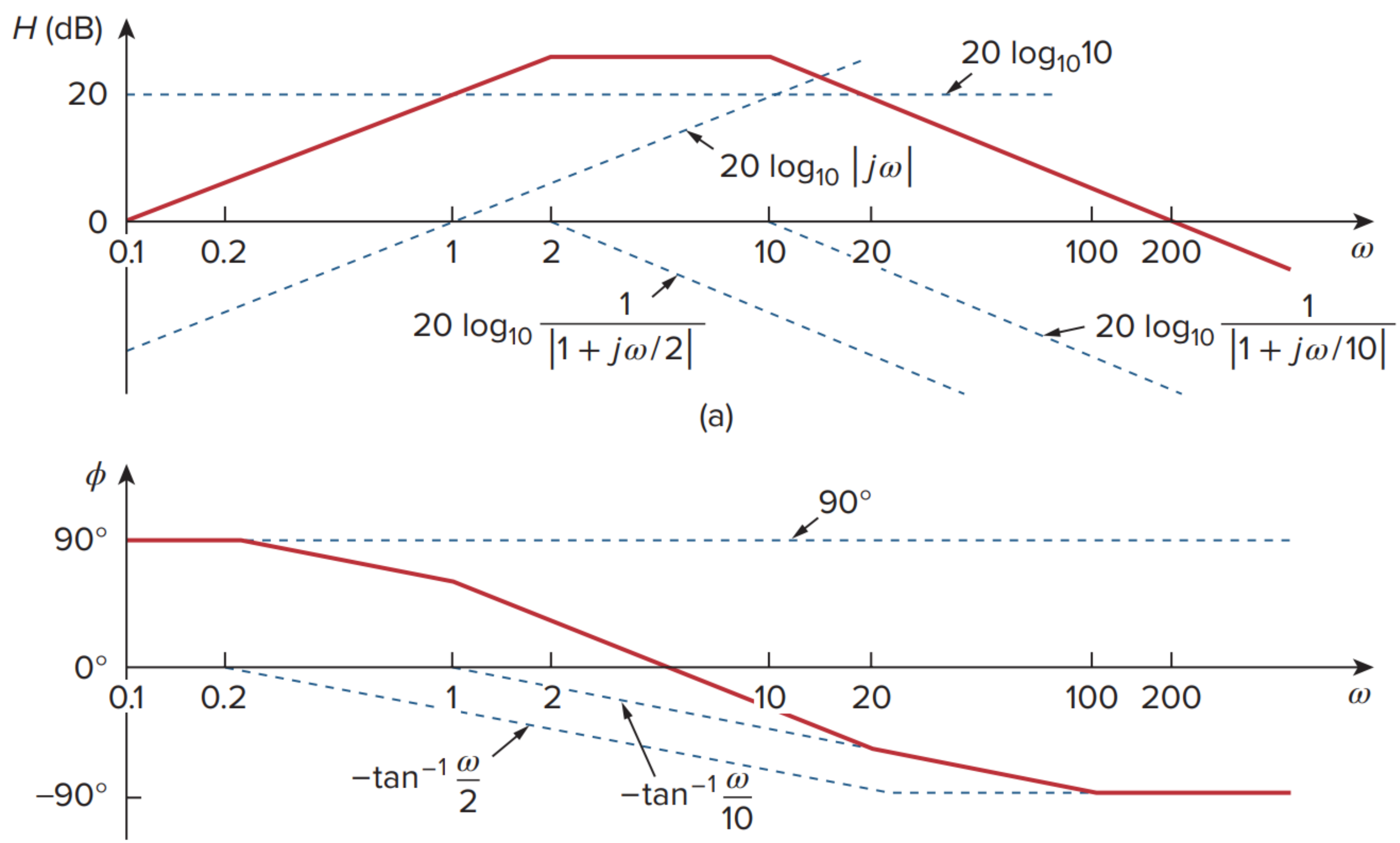
圆频率	[0, 0.2)	[0.2, 1)	[1, 2)	[2,10)	[10, 20)	[20, 100)	[100, ∞)
相位	稳 90^o	滑 –a	滑 –a–b	滑 –a–b	滑 –a–b	滑 –b	稳 – 90^o

例题-1

- 解答：

圆频率	[0, 2)	[2,10)	[10, ∞)
幅度斜率	+ 20 dB/dec	+ 0 dB/dec	- 20 dB/dec

圆频率	[0, 0.2)	[0.2, 1)	[1, 2)	[2,10)	[10, 20)	[20, 100)	[100, ∞)
相位	稳 90°	滑 –a	滑 –a–b	滑 –a–b	滑 –a–b	滑 –b	稳 – 90°



例题-2

- 问题：画出如下传递函数的波特图

$$H = \frac{j\omega + 10}{j\omega(j\omega + 5)^2}$$

- 解答：

圆频率	0	5	10
类型	极点	二阶极点	单零点
幅度贡献	-20 dB/dec	-40 dB/dec	+20 dB/dec
相位贡献	-90^o	$-(\tan^{-1}(\omega/5))^2$ a	$+\tan^{-1}(\omega/10)$ b

圆频率	[0, 2)	[2,10)	[10, ∞)
幅度斜率	+ 20 dB/dec	+ 0 dB/dec	- 20 dB/dec

圆频率	[0, 0.2)	[0.2, 1)	[1, 2)	[2,10)	[10, 20)	[20, 100)	[100, ∞)
相位	稳 90^o	滑 –a	滑 –a–b	滑 –a–b	滑 –a–b	滑 –b	稳 – 90^o

串联谐振电路

介绍

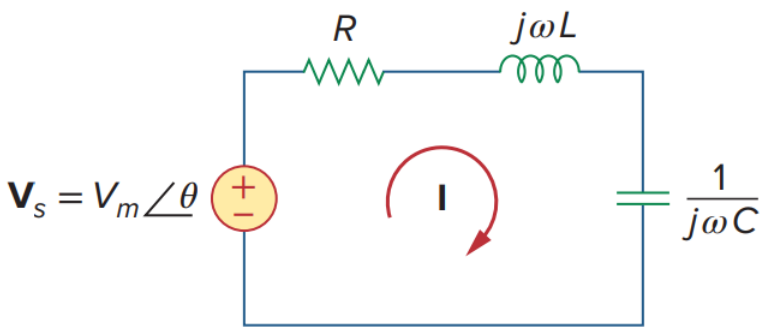
- 电路频率响应的最为显著的特征式其频幅特性中所呈现的尖峰，也称谐振峰。

- 谐振是RLC电路中容性电抗与感性电抗大小相等时呈现的一种状态，此时该电路呈现出纯电阻的阻抗性质。

- 谐振电路对于滤波器的设计是非常有用的。滤波器的传递函数通常具有高度的频率选择性。

输入阻抗

- 串联谐振电路的结构如下图所示



$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- 谐振频率 f_0： 当虚部为 0 时，

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- 此时的阻抗为纯实数：

$$Z = R + j0$$

谐振位置的特性

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

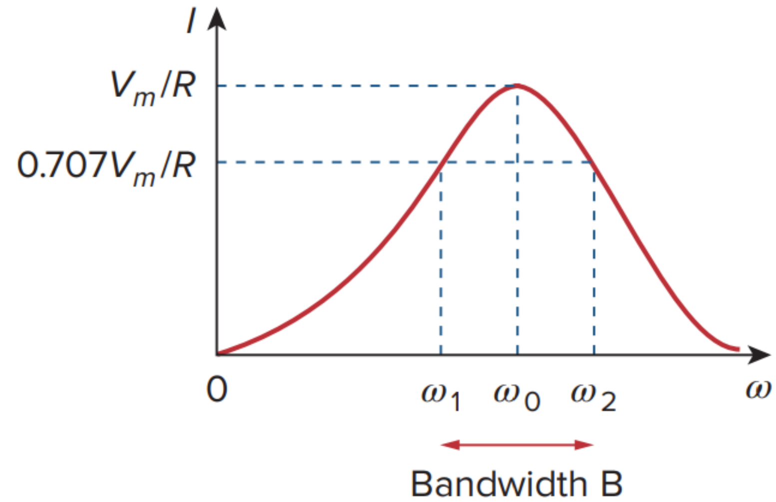
- （一）阻抗为纯电阻；
- （二）电压与电流同相，功率因数为 1 ；
- （三）阻抗的幅度达到最低值；
- （四）电容器和电感器的电压高于电源电压。

功率

- 输入谐振电路的电流

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{V}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}$$

$$|I|=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



- 功率计算式 $P=\frac{1}{2}|I|^2R=\frac{1}{2}\frac{V_m{}^2}{R}\frac{1}{1+\frac{1}{R^2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$

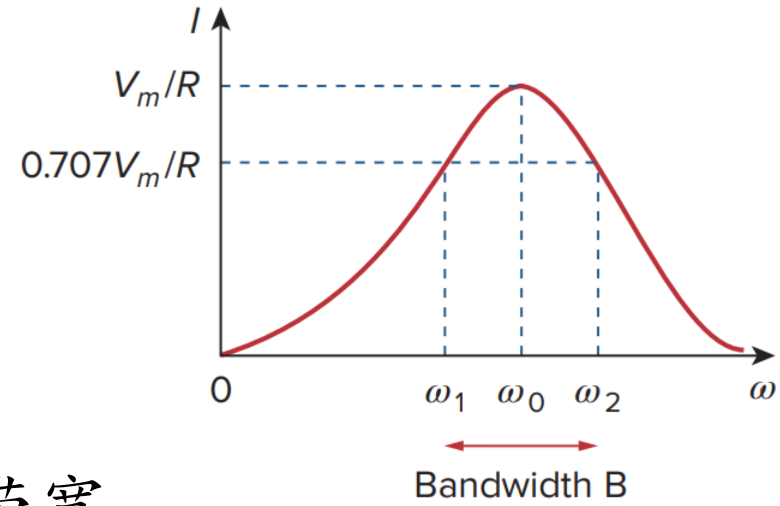
- 半功率频率 $\frac{1}{R^2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2=1$

$$\omega_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_2=+\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

带宽

- 电流的频率响应
  - 在中心频率左右一个范围内电流幅度接近最大值。
  - 这个范围称为半功率带宽。



- 半功率带宽，又称为3 dB带宽
  - 功率位于峰值一半内的频率范围

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_2 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

品质因子

- 品质因子（品质因数）的定义式如下
  - 是电路储能与阻性能耗的一种比例。

以相位度量，振荡能持续的“时间”。

电路储能，在电感或电容中。

$$Q = 2\pi \frac{E}{P \times T_0}$$

一个周期的相位变化。

一个周期的能耗，在电阻上。

- 品质因子的计算式
  - 对于串联谐振电路，电流是公有物理量
  - 宜使用电感计算储能，使用电阻计算能耗

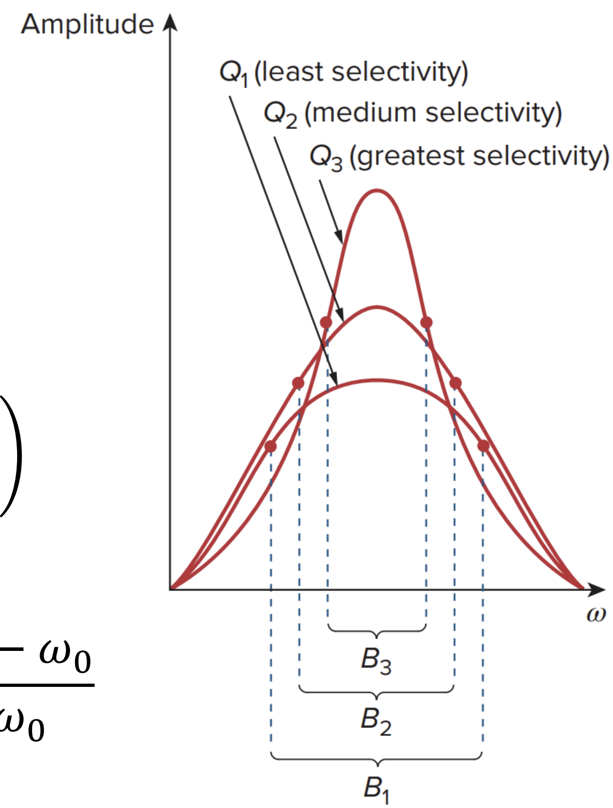
$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI^2}{\frac{1}{2}I^2R \times T_0} \Rightarrow Q = \frac{2\pi}{T_0} \times \frac{\frac{1}{2}LI^2}{\frac{1}{2}I^2R} \Rightarrow Q = \omega_0 \times \frac{L}{R}$$

品质因子

- 品质因子和带宽的关系

$$B=\frac{R}{L}, \quad Q=\omega_0\times\frac{L}{R} \;\Rightarrow\; B=\frac{\omega_0}{Q} \;\Rightarrow\; \omega_1\approx\omega_0-\frac{B}{2}, \quad \omega_2\approx\omega_0+\frac{B}{2}$$

- 品质因子反应了谐振的尖锐程度
  - Q越大，带宽越小，曲线越尖锐，
  - 也就是说频率选择性越好；

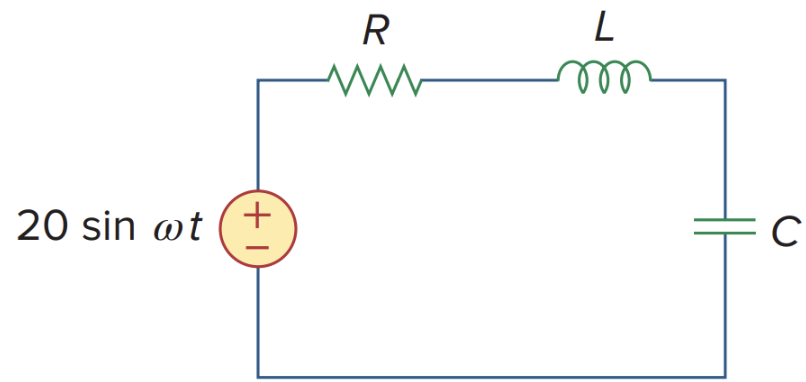


$$\frac{Z}{R}=1+j\frac{\omega_0L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{1}{\omega C}\frac{1}{\omega_0L}\right)=1+j\frac{\omega_0L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\frac{Z}{R}=1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right) \;\Rightarrow\; \frac{Z}{R}\approx1+j2Q\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}$$

例题

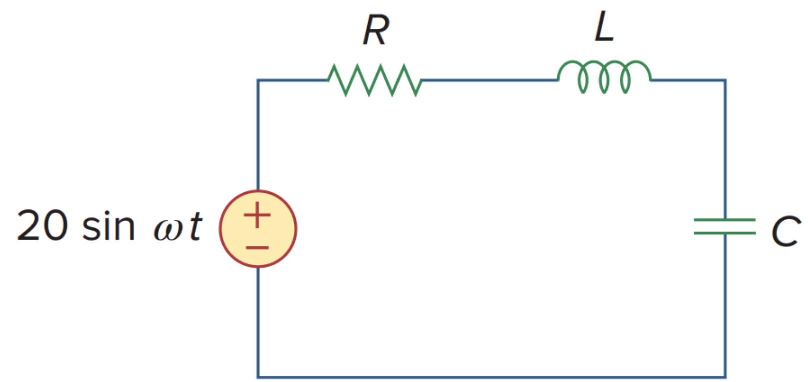
- 问题：下图中，R = 2 Ω，L = 1 mH，C = 0.4 μF。
  - 求谐振频率与半功率频率；
  - 计算品质因子与带宽；
  - 计算在下列频率的电流幅度。
    - ω_0、ω_1 和 ω_2



- 解答：
  - 第一阶段先算出谐振频率 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 0.4 \times 10^{-6}}} = 50 \text{ krad/s}$
  - 第二阶段
    - 方法一：使用 RLC 值算出 ω_1 和 ω_2，然后算出 B，然后算出 Q。
    - 方法二：使用 RLC 值算出Q，然后算出 B，然后算出 ω_1 和 ω_2。
  - 第三阶段（利用关键频率的物理含义进行计算）
    - 处于谐振频率时阻抗为R，处于边界频率时阻抗模为$\sqrt{2}$R。

例题

- 问题：下图中，R = 2 Ω，L = 1 mH，C = 0.4 μF。
  - 求谐振频率与半功率频率；
  - 计算品质因子与带宽；
  - 计算在下列频率的电流幅度。
    - ω_0、ω_1 和 ω_2



- 解答：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 0.4 \times 10^{-6}}} = 50 \text{ krad/s}$$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$= -\frac{2}{2 \times 10^{-3}} + \sqrt{(10^3)^2 + (50 \times 10^3)^2}$$

$$= -1 + \sqrt{1 + 2500} \text{ krad/s} = 49 \text{ krad/s}$$

$$\omega_2 = 1 + \sqrt{1 + 2500} \text{ krad/s} = 51 \text{ krad/s}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 2 \text{ krad/s}$$

$$B = \frac{R}{L} = \frac{2}{10^{-3}} = 2 \text{ krad/s}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{50}{2} = 25$$

并联谐振电路

输入导纳

- 并联谐振电路是串联谐振电路的对偶电路。

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

串联谐振，阻抗

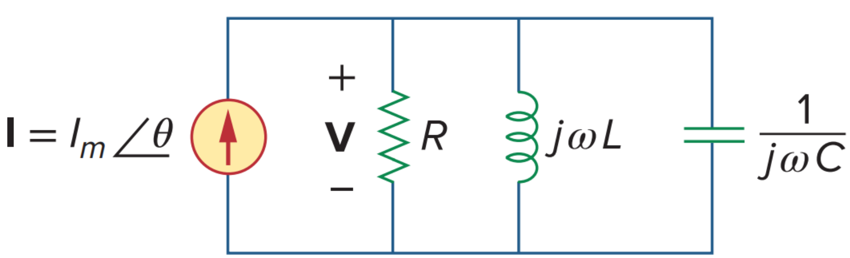
$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

并联谐振，导纳

- 当导纳的虚部为零时，产生谐振

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

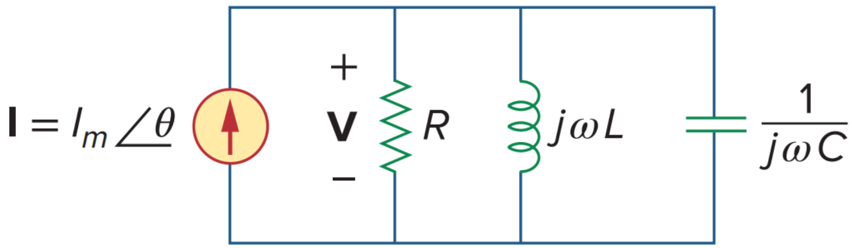
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



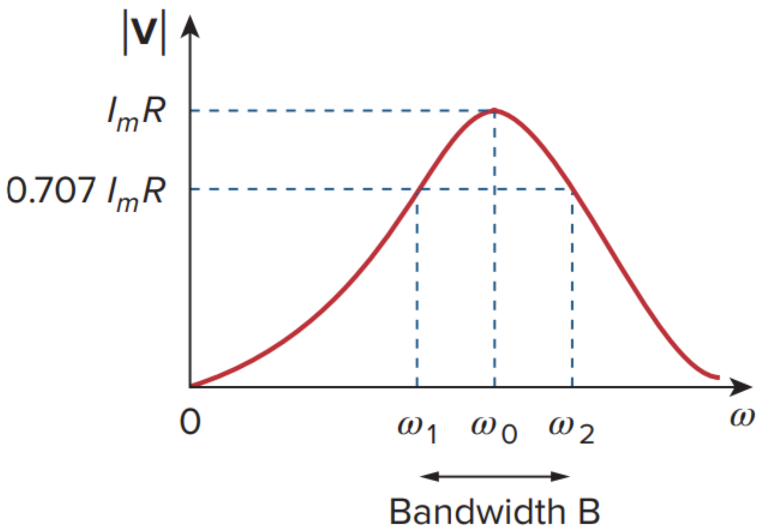
电压与功率

- 并联谐振电路中，三个元件共享电压，因此使用电压进行分析较为方便。

$$V=\frac{I}{Y}=\frac{I}{\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}$$



$$V=\frac{IR}{1+jR\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}$$



$$P=\frac{1}{2}\frac{V^2}{R}=\frac{1}{2}{I_m}^2R\frac{1}{1+R^2\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

串联谐振电路

$$P=\frac{1}{2}|I|^2R=\frac{1}{2}\frac{{V_m}^2}{R}\frac{1}{1+\frac{1}{R^2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

并联谐振电路

频率响应

- 使用对比的方法求半功率频率和其他特征参数

$$1+\frac{1}{R^2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2=2$$

$$\omega_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_2=+\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

带宽 $B=\omega_2-\omega_1=\frac{R}{L}$

品质因子 $Q=\frac{\omega_0 L}{R}$

$$1+R^2\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2=2$$

$$\omega_1=-\frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

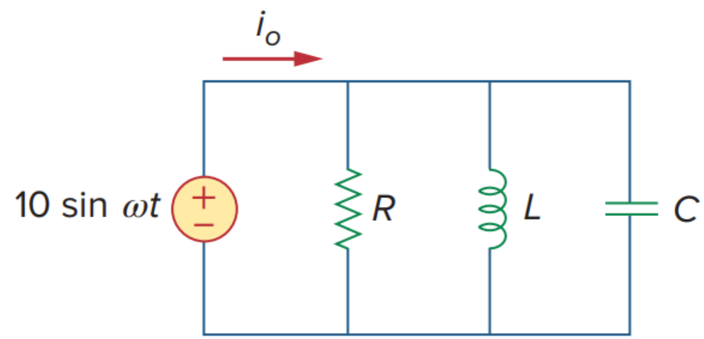
$$\omega_2=+\frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

带宽 $B=\omega_2-\omega_1=\frac{R}{L}$

品质因子 $Q=\frac{\omega_0 L}{R}$

例题

- 问题：下图中，R = 8 kΩ，L = 0.2 mH，C = 8 μF。
  - 求谐振频率与半功率频率；
  - 计算品质因子与带宽；
  - 计算在下列频率的功率。
    - ω_0、ω_1 和 ω_2



- 解答：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.2\times10^{-3}\times8\times10^{-6}}} = \frac{10^5}{4} = 25 \text{ krad/s}$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{8\times10^3}{25\times10^3\times0.2\times10^{-3}} = 1{,}600$$

$$B = \frac{\omega_0}{Q} = 15.625 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{B}{2} = 25{,}000 - 7.812 = 24{,}992 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{B}{2} = 25{,}000 + 7.812 = 25{,}008 \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{I}_o = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{10\underline{/-90^\circ}}{8{,}000} = 1.25\underline{/-90^\circ} \text{ mA}$$

$$P = \frac{1}{2}|\mathbf{I}_o|^2 R = 6.25 \text{ mW}$$

作业

- 画出本章思维导图
- 14.4
- 14.30
- 14.42
- 14.48
- 14.55