线性代数 (Linear Algebra)

第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§1.8 The Matrix of A Linear Transformation

线性变换的矩阵

衡益

2021 年 10 月 19 日，中山大学南校区

线性变换的矩阵

线性变换的矩阵

$\mathbb{R}^n$ 中任何线性变换 T，都能用关系式 $T(\mathrm{x}) = \mathrm{Ax}$ $(\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n)$ 表示，其中 $\mathrm{A} = (T(\mathrm{e}_1), T(\mathrm{e}_2), \cdots, T(\mathrm{e}_n))$。

定义 ⇩ 推广

设 T 是线性空间 V_n 中的线性变换，在 V_n 中取定一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，如果这个基在变换 T 下的像（用这个基线性表示）为

$$\begin{cases} T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n, \\ T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n, \\ \cdots\cdots \\ T(\alpha_n) = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

记 $T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n))$

$T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\mathrm{A}$

线性变换的矩阵

$\mathbb{R}^n$ 中任何线性变换 T，都能用关系式 $T(\mathrm{x}) = \mathrm{Ax}$ $(\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n)$ 表示，其中 $\mathrm{A} = (T(\mathrm{e}_1), T(\mathrm{e}_2), \cdots, T(\mathrm{e}_n))$，称为线性变换 T 的标准矩阵。

⇩ 证明

$\because\ \mathrm{x} = \mathrm{I}_n\mathrm{x} = [\mathrm{e}_1 \cdots \mathrm{e}_n]\mathrm{x} = x_1\mathrm{e}_1 + \cdots + x_n\mathrm{e}_n,$

$\therefore\ T(\mathrm{x}) = T(x_1\mathrm{e}_1 + \cdots + x_n\mathrm{e}_n) = x_1T(\mathrm{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathrm{e}_n)$

$$= [T(\mathrm{e}_1) \cdots T(\mathrm{e}_n)]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathrm{Ax}$$

线性变换的矩阵

变换 T的性质都归结为A的性质，寻找矩阵A的关键是了解 T完全由它对 $n \times n$单位矩阵 I_n的各列的作用所决定.

单位矩阵

是个方阵，从左上角到右下角的对角线（称为主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0

举例：

$$I_3 = \begin{bmatrix} e_1, e_2, e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

举例

例题

$$I_2 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

设 T为$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}^3$的线性变换，满足：

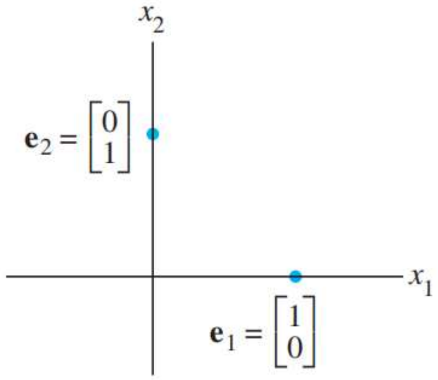
$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, T(e_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在此条件下求出$\mathbb{R}^2$中任意向量x的像的公式.

举例

解析

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\mathrm{e}_1 + x_2\mathrm{e}_2,$$



举例

解析

$$T(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} T(\mathrm{e}_1) & T(\mathrm{e}_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

举例

例题 对于 $T(x) = 3x$, 求 T 的标准矩阵A.

解析

$$T(e_1) = 3e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, T(e_2) = 3e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

举例

例题 在 $P[x]_3$中，取基

$p_1 = x^3, p_2 = x^2, p_3 = x, p_4 = 1,$

求微分运算 D 的矩阵。

解析

$$解:\begin{cases} Dp_1 = 3x^2 = 0p_1 + 3p_2 + 0p_3 + 0p_4, \\ Dp_2 = 2x = 0p_1 + 0p_2 + 2p_3 + 0p_4, \\ Dp_3 = 1 = 0p_1 + 0p_2 + 0p_3 + 1p_4, \\ Dp_4 = 0 = 0p_1 + 0p_2 + 0p_3 + 0p_4, \end{cases} \Rightarrow$$

D 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

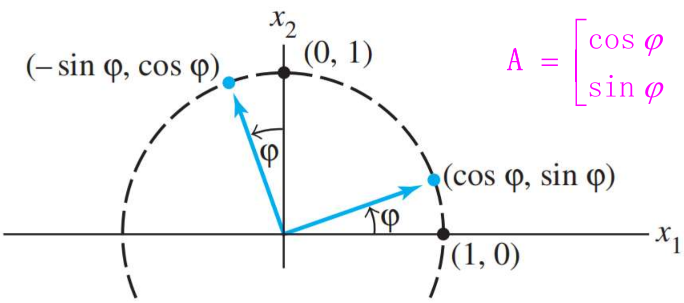
举例

例题 已知T变换可将原图像的点逆时针旋转角度φ，求T变换的标准矩阵A.

解析 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{旋转}}\begin{bmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{旋转}}\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{bmatrix}.$

$$\Downarrow$$

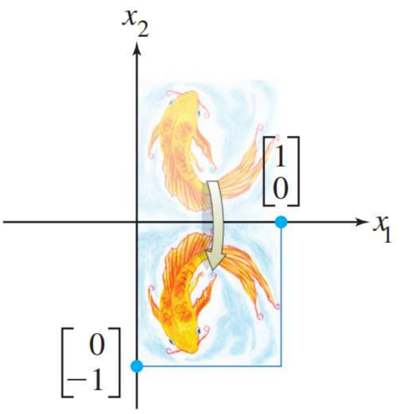
$$A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}.$$



几何线性变换

几何线性变换

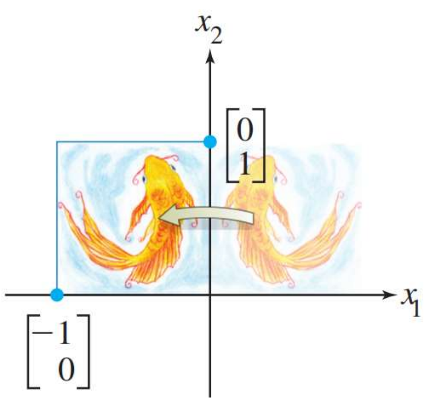
图形的对称变换



$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

几何线性变换

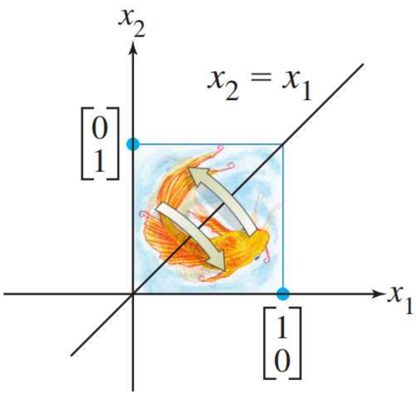
图形的对称变换



$$A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

几何线性变换

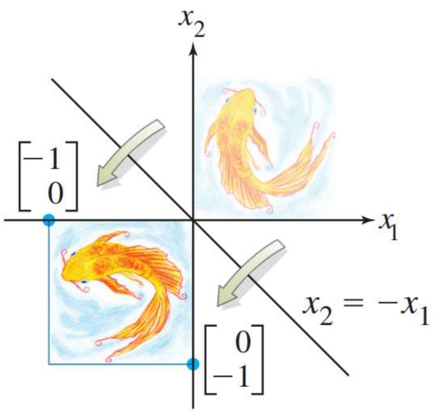
图形的对称变换



$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

几何线性变换

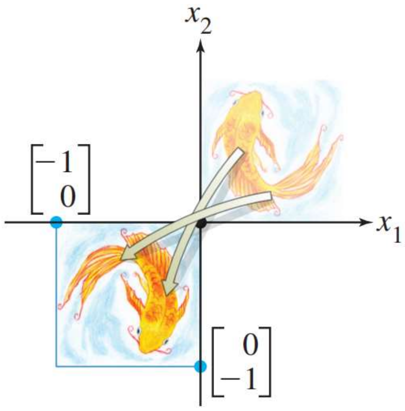
图形的对称变换



$$A = \begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

几何线性变换

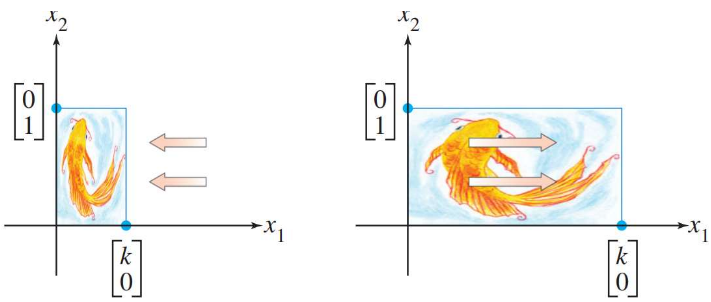
图形的对称变换



$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

几何线性变换

图形的伸缩变换

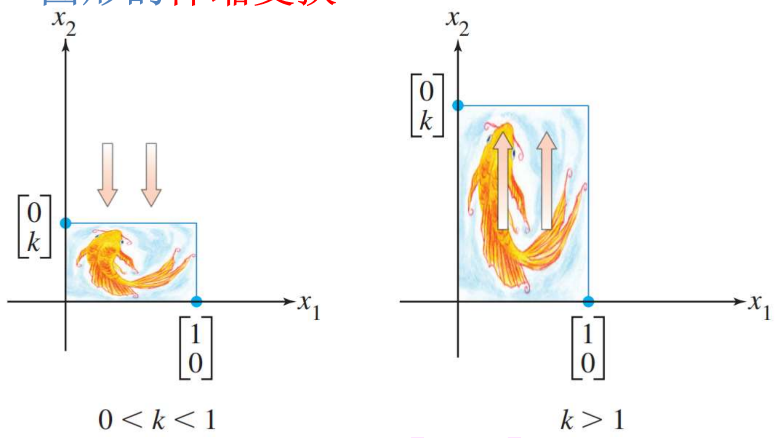


$0<k<1$ $\qquad$ $k>1$

$$A=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

几何线性变换

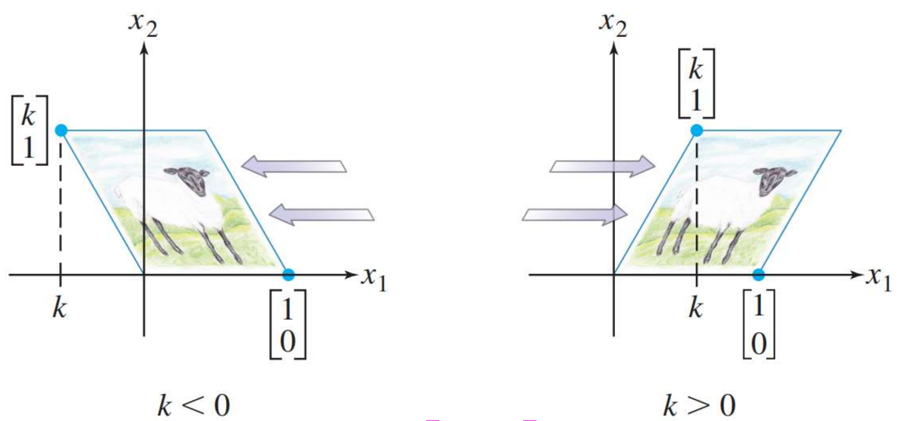
图形的伸缩变换



$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}$$

几何线性变换

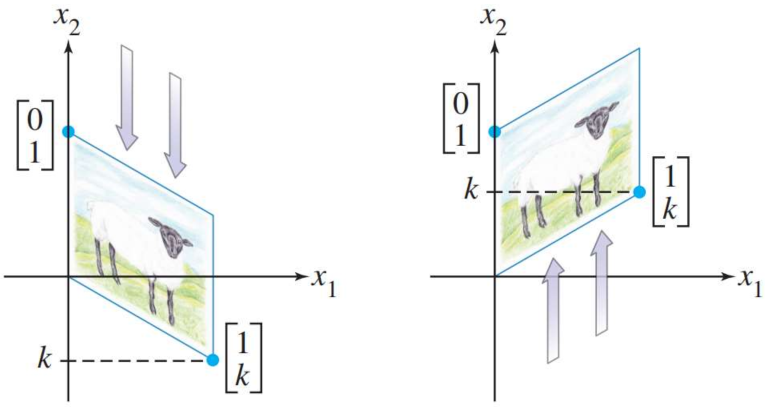
图形的平移变换



$$A = \begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$$

几何线性变换

图形的平移变换

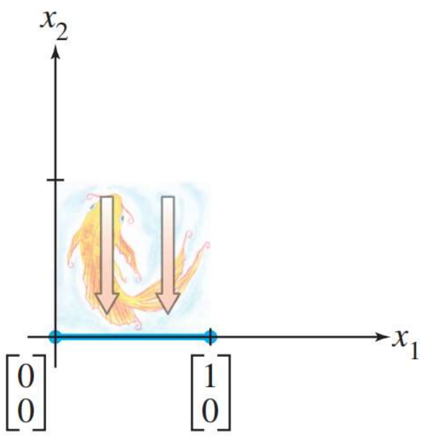


$k < 0$　　　　$k > 0$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}$$

几何线性变换

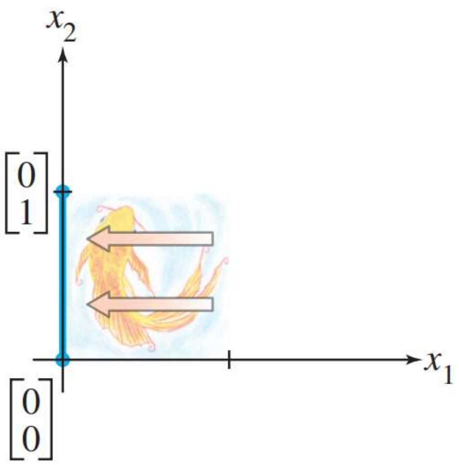
图形的投影变换



$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

几何线性变换

图形的投影变换



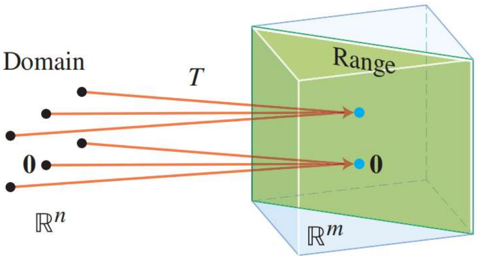
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

存在性和唯一性问题

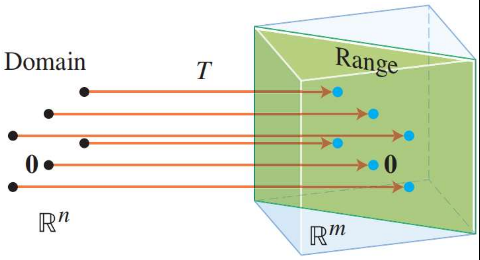
映射

定义

设有两个非空集合A, B，如果对于A中任一元素α，按照一定的规则，B中一个确定的元素β和它对应，那么，这个对应规则称为从集合A到集合B的一一映射，记作$\beta = T(\alpha)$。



非一一映射



一一映射

存在性问题和唯一性问题

定义

T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$称为到$\mathbb{R}^m$上的映射，若$\mathbb{R}^m$中每个b是$\mathbb{R}^n$中至少一个x的像。（也称为满射）

存在性问题

T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$称为一对一映射，若$\mathbb{R}^m$中每个b是$\mathbb{R}^n$中至多一个x的像。（也称为单射）

唯一性问题

一一映射

举例 $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 8 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$，对于 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, T 是否是一一映射？

对于 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$,

方程 $Ax = b$ 有一个自由变量，

故 T 不是一一映射！

一一映射

定理 设 T: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 线性变换，则 T 是一对一的当且仅当方程 $Ax = 0$ 仅有平凡解(trivial solution)。

证明 因为 T 是线性的，故 $T(0) = 0$.

若 T 是一对一的，则方程 $T(0) = 0$ 至多有一个解，

因此仅有平凡解.

若 T 不是一对一的，则 $\mathbb{R}^m$ 中某个b至少是 $\mathbb{R}^n$ 中两个相异向量（比如说是u和v）的像，即 $T(u) = b, T(v) = b$.

由于 T 是线性的，

$T(u - v) = T(u) - T(v) = b - b = 0$.

向量 $u - v$ 不是零，因此方程 $T(x) = 0$ 有多于一个解.

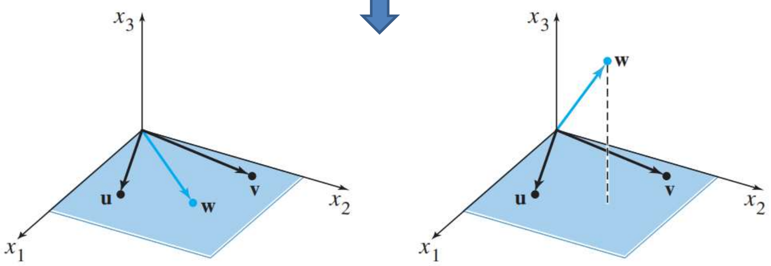
因此定理中两个条件同时成立或同时不成立.

一一映射

定理 对线性变换T：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，有：

a. T将$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^m$，当且仅当A的列生成$\mathbb{R}^m$；

b. 当且仅当A的列线性无关时，T是一对一的.



线性相关 $\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$

线性无关 $\mathbf{w} \notin \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$

一一映射

证明

a. A的列生成$\mathbb{R}^m$当且仅当方程$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$对每个$\mathbf{b}$都相容.
即当且仅当对每个$\mathbf{b}$，方程$T(\mathbf{x})=\mathbf{b}$至少有一个解.
这就是说，T将$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^m$上.

b. 方程$T(\mathbf{x})=\mathbf{b}$和$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$仅是记法不同，所以T是一对一的当且仅当$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$仅有平凡解，这等价于A的各列线性无关.

举例

$T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 5x_1 + 7x_2, x_1 + 3x_2)$,

T是否是一一映射， T是否将$\mathbb{R}^2$映射到$\mathbb{R}^3$(满射）？

解析

$$T(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A

A的列向量是线性独立的 $\Rightarrow$ T是一一映射；

A的列向量张成的空间为$\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ T不能将$\mathbb{R}^2$映射到$\mathbb{R}^3$(满射）.

映射

定义

设有两个非空集合A, B，如果对于A中任一元素α，按照一定的规则，总有B中一个确定的元素β和它对应，那么，这个对应规则称为从集合A到集合B的映射，记作$\beta = T(\alpha)$。

$$T(A) = \{\beta = T(\alpha) \mid \alpha \in A\}$$

$$T(A) \subseteq B$$

像集 (Image)

一一映射

定理

设T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$线性变换，则$T$是一对一的当且仅当方程$Ax = 0$仅有平凡解(trivial solution)。

非平凡解是齐次方程或齐次方程组的非零解。假设Ax=0，如果行列式|A|=0，那么A不可逆，则X有非平凡解；否则，A可逆，那么只有解X=0，即是平凡解。

应用1：构建营养食谱

每100克原料所含营养物(g)				健康食谱每日推荐量(g)
营养物	脱脂奶	大豆粉	乳清	
蛋白质	36	51	13	33
碳水化合物	52	34	74	45
脂肪	0	7	1.1	3

请合理搭配脱脂奶，大豆粉，乳清，以达到健康食谱的标准。

应用1：构建营养食谱

Scalar *Vector*

$$\{x_1\text{g脱脂奶}\}\cdot\{\text{每克脱脂奶中的营养物}\}=x_1\mathrm{a}_1$$

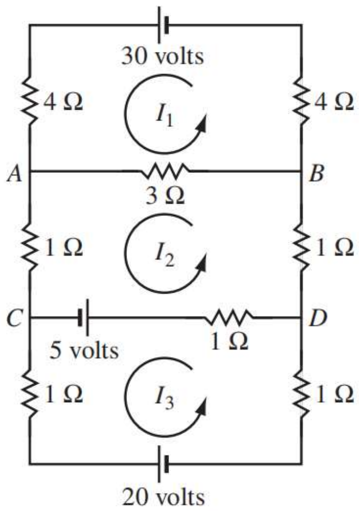
$$\Downarrow$$

$$x_1\mathrm{a}_1+x_2\mathrm{a}_2+x_3\mathrm{a}_3=\mathrm{b}$$

$\Downarrow$ 求解增广矩阵

$$\begin{bmatrix}36 & 51 & 13 & 33\\52 & 34 & 74 & 45\\0 & 7 & 1.1 & 3\end{bmatrix}\sim\cdots\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.277\\0 & 1 & 0 & 0.392\\0 & 0 & 1 & 0.233\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{脱脂奶}\\\text{大豆粉}\\\text{乳清}\end{matrix}$$

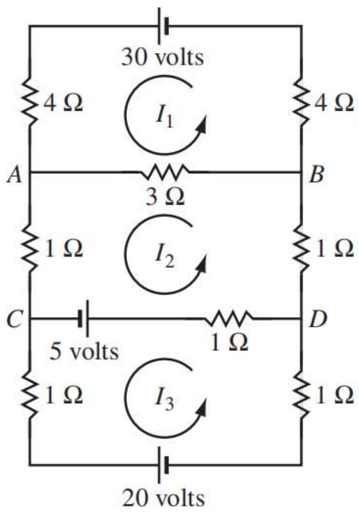
应用2：线性方程与电网络



求回路电流I_1，I_2，I_3

基尔霍夫电压定律：
在一个回路上沿一个方向的RI的代数和，等于该回路同一方向的电压的代数和。

应用2：线性方程与电网络



$$\begin{cases} 11I_1-3I_2 = 30 \\ -3I_1+6I_2-I_3=5 \\ -I_2+3I_3=-25 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$I_1\begin{bmatrix}11\\-3\\0\end{bmatrix}+I_2\begin{bmatrix}-3\\6\\-1\end{bmatrix}+I_3\begin{bmatrix}0\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\5\\-25\end{bmatrix}$$

回家作业

回家作业

➢ 预习矩阵运算与矩阵的逆

P69：23，29，32
P70：35
P78：8, 15, 17, 26
P89：5
P90：19, 21

Q & A