第四章 随机变量的数字特征

- 中山大学
- 计算机学院
- 郑培嘉
- Email：zhpj@mail.sysu.edu.cn

目录

1. 数学期望
2. 方差
3. 协方差与相关系数
4. 矩、协方差矩阵

1. 数学期望

数学期望

例：一射手进行打靶练习，规定射入区域e_2得2分；射入区域e_1得1分；脱靶(射入区域e_0得0分). 射手一次射击所得分数X是随机变量。X的分布律为:

$$P\{X=k\}=p_k, \qquad k=0,1,2$$

现射击N次，其中得0分a_0次，得1分a_1次，得2分a_2次， $a_0+a_1+a_2=N$. 射击N次得分总和为$a_0\times 0+a_1\times 1+a_2\times 2$. 平均射击得分为:

$$\frac{a_0\times 0+a_1\times 1+a_2\times 2}{N}=\sum_{k=0}^{2}k\frac{a_k}{N}$$

这里$\frac{a_k}{N}$为事件$\{X=k\}$的频率. 当N很大时， $\frac{a_k}{N}$在一定意义下接近于事件$\{X=k\}$的概率p_k. 即随机变量X的观察值的算数平均$\sum_{k=0}^{2}k\frac{a_k}{N}$在一定意义下接近于$\sum_{k=0}^{2}kp_k$，我们称$\sum_{k=0}^{2}kp_k$为随机变量$X$的**数学期望**或**均值**。

数学期望

◆ **定义**：设离散型随机变量X的分布律为:

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1,2, \ldots.$$

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$的和为随机变量X的**数学期望**，记为$E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$, 若积分$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$绝对收敛, 则积分$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$的值为随机变量$X$的**数学期望**，记为$E(X)$. 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

数学期望简称**期望**，又称为**均值**。

数学期望

例：某医院当新生儿诞生时，医生需要对婴儿的各方面情况进行评分，设新生儿的得分X是一个随机变量，X的分布律如下表：

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	0.002	0.001	0.002	0.005	0.02	0.04	0.18	0.37	0.25	0.12	0.01

试求X的数学期望$E(x)$.

解： $E(x) = 0 \times 0.002 + 1 \times 0.001 + 2 \times 0.002 + 3 \times 0.005 + 4 \times 0.02 + 5 \times 0.04 + 6 \times 0.18 + 7 \times 0.37 + 8 \times 0.25 + 9 \times 0.12 + 10 \times 0.01 = 7.15$（分）

即若考察1000个新生儿，则一个新生儿的平均得分为7.15，1000个新生儿共得分7150分。

数学期望

例：有两个相互独立的电子装置，他们的寿命$X_k\ (k=1,2)$服从同一指数分布，其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}, \theta>0$$

若将这两个电子装置串联成整机，求整机寿命 N 的数学期望。

解： X_k 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

而$N=\min\{X_1,X_2\}$的分布函数为

$$F_{min}(x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}1-e^{-\frac{2x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

数学期望

因而N的概率密度为：

$$f_{min}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

于是N的数学期望为：

$$E(N) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{min}(x) dx = \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}} dx = \frac{\theta}{2}$$

数学期望

例：某车站每天8: 00~9: 00，9: 00~10: 00都恰有一辆客车到站，但到站时刻是随机的，且两者到站时间相互独立，其规律为：

到站时刻	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

一旅客8：20到车站，求他候车时间的数学期望.

解：设旅客的候车时间为X，X的分布律为：

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

则候车时间的数学期望为:

$$E(X)=10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{36}+70\times\frac{3}{36}+90\times\frac{2}{36}=27.22$$

数学期望

例：某商店对某种家电销售采取先使用后付款的方式，记使用寿命为X，规定：

$X \le 1$, 一台付款1500元；　　$1 < X \le 2$, 一台付款2000元；

$2 < X \le 3$, 一台付款2500元；　　$X > 3$, 一台付款3000元；

设寿命X服从指数分布，其概率密度如下：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x/10}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

试求该商店一台这种家电收费Y的数学期望。

解：先求寿命X落在各个时间区间的概率，有

$$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} \mathrm{e}^{-x/10}\, dx = 1 - \mathrm{e}^{-0.1} = 0.0952$$

数学期望

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10}\, dx = e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10}\, dx = e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^\infty \frac{1}{10} e^{-x/10}\, dx = e^{-0.3} = 0.7408$$

一台家用电器收费Y的分布律为：

Y	1 500	2 000	2 500	3 000
p_k	0.095 2	0.086 1	0.077 9	0.740 8

则$E(Y) = 2732.15$，即平均一台收费2732.15元。

数学期望

例：在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此要抽验N个人的血，可以用两种方法进行.（i）将每个人的血分别去验，这就需验N次.（ii）按k个人一组进行分组，把从k个人抽来的血混合在一起进行检验. 如果这混合血液呈阴性反应，就说明k个人的血都呈阴性反应，这样，这k个人的血就只需验一次；若呈阳性，则再对这k个人的血液分别进行化验，这样，k个人的血总共要化验$k+1$次. 假设每个人化验呈阳性的概率为p，且这些人的试验反应是相互独立的. 试说明当p较小时，选取适当的k，按第二种方法可以减少化验的次数. 并说明k取什么值时最适宜.

解：各人的血呈阴性反应的概率为$q = 1 - p$.
因而k个人的混合血呈阴性反应的概率为q^k，k个人的混合血呈阳性反应的概率为$1 - \mathrm{q}^k$。

数学期望

设以k个人为一组时，组内每人化验次数为X，则X是一个随机变量，其分布律为：

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X的数学期望为$E(x)=\frac{1}{k}\mathrm{q}^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)1-\mathrm{q}^k=1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k}.$

N个人平均需化验次数为$N(1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k})$

因此只要选择k使$1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k}<1$

则N个人平均需化验次数$<\mathrm{N}$.当p固定时, 选取k使得$\mathrm{L}=1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k}$小于1且取到最小值，此时为最好分组法。

如：$p=0.1; q=0.9; k=4$时， $\mathrm{L}=1-\mathrm{q}^k+\frac{1}{k}$取到最小值.

若$N=1000$, 以$k=4$分组，按第二种方法化验只需

$1000\left(1-0.9^4+\frac{1}{4}\right)=594$（次）。 减少了40%工作量

数学期望

例：设随机变量$X\sim\pi(\lambda)$,求$E(X)$。

X的分布律为$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots,\ \lambda>0$

X的数学期望为:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

例：设随机变量$X\sim\mathrm{U}(\mathrm{a},\mathrm{b})$,求$E(X)$。

X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & others\end{cases}$$

X的数学期望为: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$

数学期望

◆ **定理**：设Y是随机变量X的函数：$Y = g(X)$, g是连续函数

➢ 如果X是离散型随机变量，分布律为$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\dots$,若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\,p_k$绝对收敛，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\,p_k$$

➢ 如果X是连续型随机变量，密度函数为$f(x)$,若$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)dx$绝对收敛，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)dx$$

注：定理意义在于我们求$E(Y)$时，不需要求Y的分布律或密度函数，只需要知道X的分布律或密度函数即可

数学期望

证明:(只对下述特殊情况加以证明)

X是连续型随机变量,且$y = g(x)$满足第二章第五节中的定理条件，则随机变量$Y = g(X)$的概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & others \end{cases}$$

于是$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} y\, f_X[h(y)]|h'(y)| dy.$

当$h'(y) > 0$时,

$$E(Y) = \int_{\alpha}^{\beta} y\, f_X[h(y)]h'(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x) dx$$

当$h'(y) < 0$时,

$$E(Y) = -\int_{\alpha}^{\beta} y\, f_X[h(y)]h'(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x) dx$$

综上所述，证毕。

数学期望

推广：

设Z是随机变量X,Y的函数$Z = g(X,Y)$（g是连续函数），则Z是一个一维随机变量。若二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$则有

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,dxdy$$

这里设上式右边的积分绝对收敛。

若(X,Y)为离散型随机变量，其分布律为$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i,j = 1,2,\ldots,$则有

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

这里设右边的级数绝对收敛。

数学期望

例：设风速V在$(0,a)$上服从均匀分布，即具有概率密度

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<v<a\\ 0, & others\end{cases}$$

设飞机机翼受到的正压力W是V的函数：$W=kV^2(k>0,$常数)，求W的数学期望。

解：$E(\mathrm{W})=\int_{-\infty}^{\infty}kv^2f(v)dv=\int_0^a kv^2\frac{1}{a}dv=\frac{1}{3}ka^2$

例：设随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x,x>1\\ 0, & others\end{cases}$$

求数学期望$E(\mathrm{Y}),E\left(\frac{1}{XY}\right)$

数学期望

解：

$$E(\mathrm{Y})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\,dydx=\int_{1}^{\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^3y}dydx$$

$$=\frac{3}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}[\ln y]_{\frac{1}{x}}^{x}dx=3\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx=[-\frac{3}{2}\frac{\ln x}{x^2}]_1^{\infty}+\frac{3}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx$$

$$=\frac{3}{4}$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)\,dydx=\int_{1}^{\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dy=\frac{3}{5}$$

数学期望

例：某公司计划开发一种新产品市场，并试图确定该产品的产量。他们估计出售一件产品可获利m元，积压一件产品损失n元，他们预测销售量Y服从指数分布，其概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-y/\theta}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases},\qquad \theta>0$$

问若要获利的数学期望最大，应生产多少件产品。

解：设生产x件，则获利Q是x的函数

$$Q=Q(x)=\begin{cases}mY-n(x-Y), & Y<x\\ mx, & Y\ge x\end{cases}$$

Q 是随机变量，它是Y的函数，其数学期望为

数学期望

$$E(\mathrm{Q}) = \int_0^{\infty} Q\, f_Y(y) dy$$

$$= \int_0^{x} [my - n(x-y)] \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}\, dy + \int_x^{\infty} mx \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy$$

$$= (m+n)\theta - (m+n)\theta e^{-\frac{x}{\theta}} - nx$$

令$\frac{\mathrm{d}}{dx} E(Q) = (m+n) e^{-x/\theta} - n = 0$

得$x = -\theta \ln \frac{n}{m+n}$

而$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} E(Q) = \frac{-(m+n)}{\theta} e^{-x/\theta} < 0$

故知当$x = -\theta \ln \frac{n}{m+n}$时$E(Q)$取极大值，且可知也是最大值。

数学期望

例：甲与其他三人参与竞拍，价格高者获胜，若甲中标则将此项目以10千美金转让给他人，可以认为其他三人竞价相互独立，且都在7~11千美金之间均匀分布，问甲应该如何报价才能使获利期望最大。

解：设X_1,X_2,X_3是其他三人得报价，按题意X_1,X_2,X_3相互独立，且在区间(7,11)上服从均匀分布。其分布函数为

$$F(u)=\begin{cases}0, & u<7\\ \dfrac{u-7}{4}, & 7\le u<11\\ 1, & u\ge 11\end{cases}$$

以Y为三人得最高出价,即$Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$,Y的分布函数为

$$F_Y(u)=\begin{cases}0, & u<7\\ (\dfrac{u-7}{4})^3, & 7\le u<11\\ 1, & u\ge 11\end{cases}$$

数学期望

若甲报价为x, 按题意$7 \le x \le 10$, 知甲能赢这一项目得概率为

$$p = P\{Y \le x\} = F_Y(x) = \left(\frac{u-7}{4}\right)^3$$

以$G(X)$为甲赚钱数， $G(X)$的分布律为

$G(x)$	$10-x$	0
概率	$\left(\frac{x-7}{4}\right)^3$	$1-\left(\frac{x-7}{4}\right)^3$

则甲的赚钱数的数学期望为$E[G(X)] = \left(\frac{u-7}{4}\right)^3 (10-x)$

令$\frac{\mathrm{d}}{dx}E[G(X)] = \frac{1}{4^3}[(x-7)^2(37-4x)] = 0$

得$\mathrm{x} = \frac{37}{4}, x = 7$(舍去)， 又$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E[G(X)]|_{x=37/4} < 0$

故当甲报价为$\mathrm{x} = \frac{37}{4}$千美元时，数学期望达到最大值。

数学期望

◆ **数学期望性质**：

➢ 设C是常数，则有$E(C) = C$.

➢ 设X是一个随机变量，C是常数，则有$E(CX) = CE(\mathrm{X})$.

➢ 设X, Y是两个随机变量，则有$E(\mathrm{X} + Y) = E(X) + E(Y)$

(可推广到任意有限个随机变量之和的情况)

➢ 设X, Y是相互独立的随机变量，则有$E(\mathrm{XY}) = E(X)E(Y)$

(可推广到任意有限个随机变量之积的情况)

数学期望

证3： 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 其边缘概率密度为$f_X(x), f_Y(y)$.

$$E(\mathrm{X}+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\,dxdy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

证4： 若X和Y相互独立

$$E(\mathrm{XY})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\,dxdy$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy\right]=E(X)E(Y)$$

数学期望

例：一民航送客车载有20位旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以X表示停车的次数，求$E(X)$ (设旅客在各车站下车是等可能的、且相互独立)。

解：引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}0,\text{在第i站没有人下车}\\1,\text{在第i站有人下车}\end{cases}，\quad i=1,2\ldots10$$

易知$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$, 现求$E(X)$。

任一旅客在第i站不下车的概率为9/10，因此20位旅客都不在第i站下车的概率为$(\frac{9}{10})^{20}$,在第i站有人下车的概率为$1-(\frac{9}{10})^{20}$

即$P\{X_i=0\}=(\frac{9}{10})^{20}, P\{X_i=1\}=1-(\frac{9}{10})^{20}$

由此$E(X_i)=1-(\frac{9}{10})^{20}$

数学期望

进而$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784$(次)

例：设一电路中电流I与电阻R是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$g(i)=\begin{cases}2i, 0\le i\le 1\\ 0, others\end{cases}, h(r)=\begin{cases}\frac{r^2}{9}, 0\le r\le 3\\ 0, others\end{cases}$$

试求电压$V=IR$的均值。

解：$E(V)=E(IR)=E(I)E(R)=$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} ig(i)di\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)dr\right]=\left(\int_0^1 2i^2 di\right)\left(\int_0^3 \frac{r^3}{9}dr\right)=\frac{3}{2}(V)$$

2. 方差

方差

例：有一批灯泡，知其平均寿命是$E(X)=1000$(小时)。仅由这一指标我们还不能判定这批灯泡的质量好坏。事实上，有可能其中绝大部分灯泡的寿命都在950～1050小时；也有可能其中约有一半是高质量的，它们的寿命大约有1300小时，另一半却是质量很差的，其寿命大约只有700小时，为要评定这批灯泡质量的好坏，还需进一步考察灯泡寿命X与其均值$E(X)=1000$的偏离程度。容易看到

$$E\{|X-E(X)|\}$$

能度量偏离程度，但由于绝对值运算不便，通常使用

$$E\{[X-E(X)]^2\}$$

◆ 定义：设X是一个随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称$E\{[X-E(X)]^2\}$为X的方差，记为$D(X)$或$Var(X)$，即

$$D(X)=Var(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

方差

在应用上还引入量$\sqrt{D(X)}$，记为$\sigma(X)$，称为标准差或均方差。随机变量X的方差表达了X的取值与其数学期望的偏离程度，若$D(X)$较小意味着X的取值比较集中在$E(X)$的附近，反之，若$D(X)$较大则表示X的取值较分散。由定义知，方差实际上就是随机变量X的函数$g(X)=(X-E(X))^2$的数学期望。

对于离散型随机变量，有

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k$$

其中$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$是$X$的分布律

对于连续型随机变量，有

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x,$$

其中$f(x)$是X的概率密度

方差

随机变量X的方差可按下列公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证： 由数学期望的性质

$$\begin{aligned} D(X) &= E\{[X-E(X)]^2\}=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\} \\ &= E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2 \\ &= E(X^2)-[E(X)]^2 \end{aligned}$$

方差

例：设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2\neq 0$.

记
$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

则
$$E(X^*)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0;$$

$$D(X^*)=E(X^{*2})-[E(X^*)]^2=E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

即$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 的数学期望为0，方差为1。

X^*称为X的**标准化变量**。

方差

例：设随机变量X具有$(0-1)$分布，其分布律为

$P\{X=0\}=1-p, P\{X=1\}=p$。求$D(X)$。

解：

$$E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p,$$

$$E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

方差

例：设随机变量$X \sim \pi(\lambda)$，求$D(X)$。

解：X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots, \lambda>0.$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

所以方差$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$，泊松分布的数学期望和方差相等，都等于参数$\lambda$。

方差

例：设随机变量$X \sim U(a,b)$，求$D(X)$.

解：X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0 & , others\end{cases}$

已算得$E(X)=\frac{a+b}{2}$，方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}$$

方差

例：设随机变量X服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, \qquad\quad x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$，求$E(X)$，$D(X)$。

解:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}x\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x$$

$$=-x\mathrm{e}^{-x/\theta}|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x=\theta$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x^2\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x=-x^2\mathrm{e}^{-x/\theta}|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2x\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x=2\theta^2$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2.$$

方差

方差性质

- 设C是常数，则 $D(C)=0$
- 设X是随机变量，C是常数，则有

$$D(CX)=C^2D(X), D(X+C)=D(X)$$

- 设X，Y是两个随机变量，则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}$$

若X，Y相互**独立**，则有$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

可推广到任意有限多个相互独立随机变量之和

- $D(X)=0$的充要条件是X以概率1取常数$E(X)$，即

$$P\{X=E(X)\}=1$$

方差

证1：$D(C)=E\{[C-E(C)]^2\}=0$

证2：$D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}=C^2E\{[X-E(X)]^2\}=C^2D(X)$

证3：

$$
\begin{aligned}
D(X+Y) &= E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\} \\
&= E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\} \\
&= E\{(X-E(X))^2\}+E\{(Y-E(Y))^2\} \\
&\quad +2E\{[(X-E(X)][Y-E(Y)]\} \\
&= D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}
\end{aligned}
$$

上式右端第三项

$$
\begin{aligned}
&2E\{[(X-E(X)][Y-E(Y)]\} \\
&=2E\{XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)\} \\
&=2\{E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)\} \\
&=2\{E(XY)-E(X)E(Y)\}.
\end{aligned}
$$

若X，Y相互独立，可知上式为0

于是$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

方差

证4：充分性

设$P\{X=E(X)\}=1$，则有$P\{X^2=[E(X)]^2\}=1$，于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.$$

必要性写在切比雪夫不等式证明后

例：设随机变量$X\sim b(n,p)$，求$E(X)$，$D(X)$.

解：随机变量X是n重伯努利试验中事件A发生次数，且每次试验中A发生概率为p，引入随机变量 $X_k=\begin{cases}1, A\text{在第k次试验发生}\\0, A\text{在第k次试验不发生}\end{cases}, k=1,2,\dots n$

易知$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，各次试验相互独立。

而X_k服从同一$(0-1)$分布

X_k	0	1
p_k	$1-p$	p

方差

以n，p为参数的二项分布变量，可以分解为n个相互独立且都服从p为参数的$(0-1)$分布的随机变量之和。

已知$E(X_k)=p, D(X_k)=p(1-p), k=1,2,\dots,n.$ 故知

$$E(X)=E(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=np$$

又由于各次试验相互独立，得

$$D(X)=D(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=np(1-p).$$

即$E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$

方差

例：设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E(X),D(X)$.

解：先求标准正态变量$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$的期望和方差。Z的概率密度为

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$$

于是$E(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2/2}dt=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}|_{-\infty}^{\infty}=0$，

$$D(Z)=E(Z^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2/2}\,dt$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}te^{-t^2/2}|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt=1$$

令$X=\mu+\sigma Z$，得

$$E(X)=E(\mu+\sigma Z)=\mu$$

$$D(X)=D(\mu+\sigma Z)=D(\sigma Z)=\sigma^2D(Z)=\sigma^2$$

方差

正态分布概率密度中的两个参数μ和σ分别就是该分布的数学期望和均方差，正态分布完全可由数学期望和方差所确定。

◆ 若$X_i \sim N(\mu,\sigma^2), i=1,2,\dots,n$，且它们相互独立，则它们的线性组合$C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n$（系数不全为0）仍然服从正态分布，由数学期望和方差性质可知

$$C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2\sigma_i^2)$$

方差

例：设活塞的直径(以cm计) $X\sim N(22.40,0.03^2)$，气缸的直径Y $\sim N(22.50,0.04^2)$，X，Y相互独立。任取一只活塞，任取一只气缸，求活塞能装入气缸的概率。

解：按题意$P\{X<Y\}=P\{X-Y<0\}$。由于

$$X-Y\sim N(-0.10,0.0025)$$

所以

$$P\{X<Y\}=P\{X-Y<0\}=P\{\frac{(X-Y)-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}$$

$$<\frac{0-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\}=\Phi(\frac{0.10}{0.05})=\Phi(2)=0.9772$$

方差

定理：设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数ε，不等式

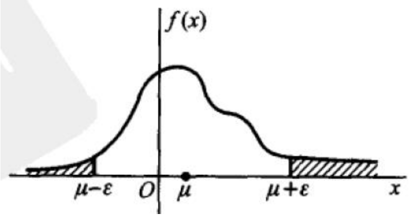
$$P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立。称为切比雪夫不等式

证：就连续性随机变量证明。设X的概率密度为$f(x)$，则有

$$P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x$$

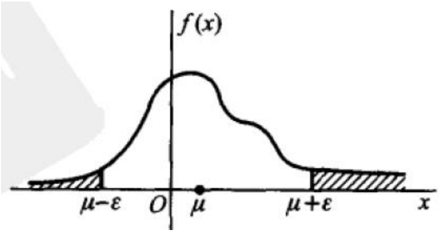
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



方差

切比雪夫不等式也可以写成

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\} \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



给出了在随机变量分布未知，而只知道$E(X)$和$D(X)$的情况下估计概率$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}$的界限。

方差

◆ 方差性质4

➢ $D(X)=0$的充要条件是X以概率1取常数$E(X)$，即

$$P\{X=E(X)\}=1$$

必要性证明：

设$D(X)=0$，要证$P\{X=E(X)\}=1$。

证：用反证法，假设$P\{X=E(X)\}<1$，则对于某一个数$\varepsilon>0$，有$P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}>0$，但由于切比雪夫不等式，对于任意$\varepsilon>0$，因$\sigma^2=0$，有$P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}=0$，矛盾，于是$P\{X=E(X)\}=1$

3. 协方差及相关系数

协方差及相关系数

如果两个随机变量X和Y是相互**独立**的，则

$$E\{[(X-E(X)][Y-E(Y)]\}=0$$

这意味着当$E\{[(X-E(X)][Y-E(Y)]\}\neq 0$时，$X$与$Y$不相互独立，而是存在着一定的关系。

定义：$E\{[(X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量X和Y的协方差。记作$Cov(X,Y)$，即

$$Cov(X,Y)=E\{[(X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

而

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

称为随机变量X与Y的相关系数

协方差及相关系数

由定义

$$Cov(X,Y)= Cov(Y,X), Cov(X,X) = D(X)$$

对于任意两个随机变量X和Y，下列等式成立：

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,y)$$

将$Cov(X,Y)$定义展开，得

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

协方差具有下述性质

- $Cov(aX,bY) = abCov(X,Y), a, b$是常数
- $Cov(X_1+X_2,Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$

协方差及相关系数

ρ_{XY}的重要性质以及含义

考虑以X的线性函数$a+bX$来近似表示Y，以均方误差

$$e=E[(Y-(a+bX))^2]$$

$$=E(Y^2)+b^2E(X^2)+a^2-2bE(XY)+2abE(X)-2aE(Y)$$

来衡量$a+bX$近似Y的好坏程度。将e分别关于a，b求偏导数，

并令它们等于零

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial a}=2a+2bE(X)-2E(Y)=0 \\ \dfrac{\partial e}{\partial b}=2bE(X^2)-2E(XY)+2aE(X)=0 \end{cases}$$

协方差及相关系数

解得

$$b_0 = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$$

$$a_0 = E(Y) - b_0 E(X) = E(Y) - E(X)\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$$

代入原式得

$$\min_{a,b} E\{[Y-(a+bX)]^2\}$$

$$= E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\} = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

协方差及相关系数

定理：

- $|\rho_{XY}| \le 1$
- $|\rho_{XY}| = 1$的充要条件是，存在常数a，b使

$$P\{Y = a + bX\} = 1\}$$

证1：由$E[(Y-(a+bX))^2]$ 及$D(Y)$的非负性，得$1-\rho_{XY}^2 \ge 0$，即$|\rho_{XY}| \le 1$。

证2：充分性，若$|\rho_{XY}| = 1$，则$E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\} = 0$

从而$0 = E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\} = D[Y-(a_0+b_0X)] + [E(Y-(a_0+b_0X))]^2$，

故有$D[Y-(a_0+b_0X)] = 0$，　$[E(Y-(a_0+b_0X))]^2 = 0.$

协方差及相关系数

又由方差的性质4知

$$P\{Y-(a_0+b_0X)=0\}=1, \text{即} P\{Y=a_0+b_0X\}=1$$

必要性，若存在常数a^*，b^*使

$$P\{Y=a^*+b^*X\}=1，\text{即} P\{Y-(a^*+b^*X)=0\}=1$$

$$P\{[Y-(a^*+b^*X)]^2=0\}=1$$

$$E\{[Y-(a^*+b^*X)]^2\}=0$$

故有 $0=E\{[Y-(a^*+b^*X)]^2\}\geq \min_{a,b} E\{[Y-(a+bX)]^2\}$

$$=E\{[Y-(a_0+b_0X))]^2\}=(1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

即得$|\rho_{XY}|=1$

协方差及相关系数

- 均方误差e是$|\rho_{XY}|$的严格单调减少函数。当$|\rho_{XY}|$较大时，e较小，表明X，Y(就线性关系来说)联系较紧密。
- 特别地，$|\rho_{XY}|=1$时，X，Y以概率1存在着线性关系。当$\rho_{XY}=0$，称X和Y**不相关**。
- 假设随机变量X，Y的相关系数$|\rho_{XY}|$存在。当X，Y相互独立时，知$Cov(X,Y)=0$，从而$\rho_{XY}=0$，即X，Y不相关。反之，若X，Y不相关，X和Y却不一定相互独立。
- 特别地，当(X,Y)服从二维正态分布时，X，Y不相关与X和Y相互独立是等价的。

协方差及相关系数

例：设(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	-2	-1	1	2	$P\{Y=i\}$
1	0	1/4	1/4	0	1/2
4	1/4	0	0	1/4	1/2
$P\{X=i\}$	1/4	1/4	1/4	1/4	1

易知$E(X)=0, E(Y)=\frac{5}{2}, E(XY)=0$，于是$\rho_{XY}=0$，$X$，$Y$不相关。$X$，$Y$不存在线性关系。但，$P\{X=-1,Y=1\}=0\neq P\{X=-2\}P\{Y=1\}$，知$X$，$Y$不是相互独立的。事实上，$X$和$Y$具有关系：$Y=X^2$，$Y$的值完全可由$X$的值所确定。

协方差及相关系数

例：设(X,Y)服从二维正态分布，它的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

求X和Y的相关系数。

解：(X,Y)的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}},\quad -\infty<y<\infty$$

知$E(X)=\mu_1$，$E(Y)=\mu_2$，$D(X)=\sigma_1^2$，$D(Y)=\sigma_2^2$。

协方差及相关系数

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)\ (y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)\ (y-\mu_2)$$

$$\times\exp[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}]dydx$$

令$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}),u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$，则有

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2)\,\mathrm{e}^{-(u^2+t^2)/2}dtdu$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)$$

$$+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u\,e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}t\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)$$

协方差及相关系数

$$= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$\text{即} Cov(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\text{于是} \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho$$

二维正态随机变量(X,Y)的概率密度中的参数ρ就是X和Y的相关系数，因此二维正态随机变量的分布完全可由X，Y各自的数学期望、方差以及它们的相关系数所确定。

若(X,Y)服从二维正态分布，那么X和Y相互独立的充要条件为$\rho = 0$。对于二维正态随机变量(X,Y)不相关与相互独立是等价的。

4. 矩、协方差矩阵

矩、协方差矩阵

定义：设X和Y是随机变量，

- 若 $E(X^k), k = 1,2, \ldots$

  存在，称它为X的**k阶原点矩**，简称**k阶矩**

- 若 $E\{[X - E(X)]^k\}, k = 2,3, \cdots$

  存在，称它为X的**k阶中心矩**

- 若 $E(X^k Y^l), k, l = 1,2, \ldots$

  存在，称它为X和Y的**$k + l$阶混合矩**

- 若 $E\{[X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^l\}, k, l = 1,2, \cdots$

  存在，称它为X和Y的**$k + l$阶混合中心矩**

X的数学期望$E(X)$是X的一阶原点矩，方差$D(X)$是X的二阶中心矩，协方差$Cov(X,Y)$是X和Y的二阶混合中心矩。

矩、协方差矩阵

下面介绍随机变量的协方差矩阵，从二维随机变量讲起。

二维随机变量(X_1, X_2)有四个二阶中心矩(设都存在)，记为

$$c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\}$$

$$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\}$$

$$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\}$$

$$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\}$$

排成矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

这个矩阵称为随机变量(X_1, X_2)的协方差矩阵。

矩、协方差矩阵

设n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的二阶混合中心距

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}, i, j = 1,2,\cdots,n$$

都存在，称矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{Bmatrix}$$

为n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的协方差矩阵。由于$c_{ij} = c_{j\mathrm{i}}(i \neq j; i, j = 1,2, \ldots, n)$，因而上述矩阵是对称矩阵。

一般，n维随机变量的分布是不知道的，或者太复杂，以致在数学上不易处理，实际应用中协方差矩阵就显得重要。

矩、协方差矩阵

以矩阵形式描述多维正态随机变量概率密度

二维为例，二维正态随机变量(X_1, X_2)的概率密度为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

引入列矩阵$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$

X_1,X_2的协方差矩阵为$C=\begin{bmatrix}C_{11},C_{12}\\C_{21},C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2,\rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2,\sigma_2^2\end{bmatrix}$

C的行列式为：$\det C=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$

逆为：$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\begin{bmatrix}\sigma_2^2,-\rho\sigma_1\sigma_2\\-\rho\sigma_1\sigma_2,\sigma_1^2\end{bmatrix}$

矩、协方差矩阵

经过计算可知（其中矩阵$(X-\mu)^T$是$(X-\mu)$的转置矩阵）

$$(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)=\frac{1}{\det C}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\begin{bmatrix}\sigma_2^2, -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2, \sigma_1^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

于是(X_1, X_2)的概率密度可以写成

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det C)^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\}$$

⇒

推广到n维情况

$$f(x_1,x_2\ldots x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\}$$

矩、协方差矩阵

n维正态随机变量具有以下四条重要性质（证略）：

- n维正态随机变量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的每一个分量$X_i, i = 1,2,\dots,n$都是正态随机变量；反之，若$X_1, X_2, \dots, X_n$都是正态随机变量，且相互独立，则$(X_1, X_2, \dots, X_n)$是n维正态随机变量

- n维随机变量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$服从n维正态分布的充要条件是$X_1, X_2, \dots, X_n$的任意线性组合

$$l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n$$

服从一维正态分布（系数不全为零）

矩、协方差矩阵

- 若$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从n维正态分布，设$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$是$X_j(j=1,2\ldots n)$的线性函数，则$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$也服从多维正态分布。

  这一性质称为正态变量的线性变换不变性。

- 设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从n维正态分布，则“$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立”与“$X_1, X_2, \ldots, X_n$两两不相关”是等价的。

THANKS

谢谢！