第二章 Matrix Algebra

§ 2.6 Subspaces of $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$的子空间

§ 2.7 Dimension and Rank 维度和秩

2020 年 11 月 11 日，中山大学南校区

线性空间

线性空间

定义

设 V 是一个非空集合， $\mathbb{R}$ 为实数域。如果在 V 中定义了一个加法，即对于任意两个元素 $\alpha, \beta \in V$, 总有唯一的一个元素 $v = \alpha + \beta \in V$ 与之对应；在 V 中又定义了一个数与元素的乘法（简称数乘），即对于任何一数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 与任一元素 $\alpha \in V$, 总有唯一的一个元素 $\delta \in V$ 与之对应，称为 λ 与 α 的数量乘积，记作 $\delta = \lambda\alpha$,

并且满足八条运算规律（设 $\alpha, \beta, v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$）：

… …

线性空间

$\cdots\ \cdots$

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) $(\alpha + \beta) + \nu = \alpha + (\beta + \nu)$;

(3) 在 V 中存在零元素 $\mathbf{0}$，对任何 $\alpha \in V$，都有 $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;

(4) 对任何 $\alpha \in V$，都有 α 的负元素 $\beta \in V$，使 $\alpha + \beta = \mathbf{0}$;

(5) $1\alpha = \alpha$;

(6) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;

(7) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;

(8) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$

V 称为（实数域 $\mathbb{R}$ 上的）线性空间

例1

次数不超过 n 的多项式的全体，记作$P[x]_n$， 即

$$P[x]_n = \{p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

运算封闭性：

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)$$

$$= (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in P[x]_n,$$

$$\lambda(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = (\lambda a_n)x^n + \cdots + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0) \in P[x]_n$$

$P[x]_n$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间

例2

n 次多项式的全体，记作 $Q[x]_n$，即

$$Q[x]_n = \left\{ q = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \right\}$$

运算封闭性：

$$0q = 0 \cdot a_n x^n + \cdots + 0 \cdot a_1 x + 0 \cdot a_0 \notin Q[x]_n,$$

即 $Q[x]_n$ 运算不封闭。

$Q[x]_n$ 不是线性空间

线性空间的性质

1. 零元素是唯一的

证明：

设 0_1 和 0_2 是线性空间 V 中的两个零元素，即对任何 $\alpha \in V$，有 $\alpha + 0_1 = \alpha, \alpha + 0_2 = \alpha$, 于是特别的有 $0_2 + 0_1 = 0_2, 0_1 + 0_2 = 0_1$, 所以 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$.

2. 任一元素的负元素是唯一的，α的负元素记作 $-\alpha$

证明：

设 α 的负元素不唯一，有不同的 β 和 γ，即 $\alpha + \beta = 0, \alpha + \gamma = 0$。

于是有 $\beta = \beta + 0 = \beta + (\alpha + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma = \gamma$，矛盾

线性空间的性质

3. $0\alpha = \mathbf{0}, (-1)\alpha = -\alpha, \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$

证明：

$$\alpha + 0\alpha = 1\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha = \alpha \Rightarrow 0\alpha = \mathbf{0}$$

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = [1+(-1)]\alpha = 0\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow (-1)\alpha = -\alpha$$

$$\lambda\mathbf{0} = \lambda[\alpha + (-1)\alpha] = \lambda\alpha + (-\lambda)\alpha = [\lambda + (-\lambda)]\alpha = 0\alpha = \mathbf{0}$$

4. $\lambda\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$ 或 $\alpha = \mathbf{0}$

证明：

1\. 若 $\lambda = 0$, $\lambda\alpha = \mathbf{0}$

2\. 若 $\lambda \neq 0$, $\lambda\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow (\frac{1}{\lambda}\lambda)\alpha = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow 1\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \mathbf{0}$$

线性空间的子空间

定义 设 V 是一个线性空间，L 是 V 的一个非空子集，如果 L 对于 V 中所定义的加法和数乘两种运算也构成一个线性空间，则 L 是 V 的一个子空间。

定理 线性空间 V 的非空子集 L 构成子空间的充分必要条件是：L 对于 V 中的线性运算封闭

向量空间

向量空间的定义

定义

设 V 为 n 维向量的集合，如果集合 V 非空，且集合 V 对于向量的加法及数乘两种运算封闭，那么称 V 为向量空间。

$$\mathbf{a} \in V, \mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$$

$$\mathbf{a} \in V, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\mathbf{a} \in V$$

举例：

n 维向量空间 $\mathbb{R}^n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \middle| x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n \right\}$

………

向量空间举例

1. 集合$V = \left\{ \mathbf{x} = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \,\middle|\, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$是一个向量空间?

设任意 $\mathbf{a} = \left(0, a_2, \ldots, a_n\right)^T, \mathbf{b} = \left(0, b_2, \ldots, b_n\right)^T \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

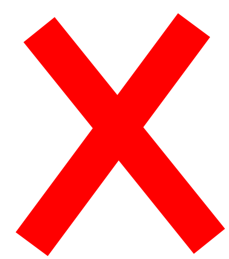
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \left(0, a_2, \ldots, a_n\right)^T + \left(0, b_2, \ldots, b_n\right)^T = \left(0, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n\right)^T \in V$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda \left(0, a_2, \ldots, a_n\right)^T = \left(0, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n\right)^T \in V$$

2. 集合 $V = \left\{ \mathbf{x} = (1, x_2, \cdots, x_n)^T \,\middle|\, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$是一个向量空间?

设任意 $\mathbf{a} = \left(1, a_2, \ldots, a_n\right)^T \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda \left(1, a_2, \ldots, a_n\right)^T = \left(\lambda, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n\right)^T \notin V$$



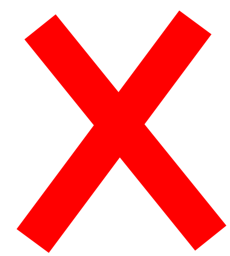
向量空间举例

3. n 元齐次方程组的解集 $S=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$ 是一个向量空间?

4. 非齐次方程组的解集 $S=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\}$ 是一个向量空间?

S 为空不是向量空间

S 不为空，$\alpha \in S \Rightarrow \mathbf{A}(2\alpha)=2\mathbf{A}(\alpha)=2\mathbf{b} \neq \mathbf{b}$



向量空间举例

5. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为两个已知的 n 维向量，集合
$L = \left\{\alpha = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$ 是一个向量空间？

若 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$, $k \in \mathbb{R}$

则 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b} + \lambda_2\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b} = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} + (\mu_1 + \mu_2)\mathbf{b} \in L$

$k\mathbf{x} = k(\lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b}) = k\lambda_1\mathbf{a} + k\mu_1\mathbf{b} \in L$

向量空间的子空间

子空间定义

定义：

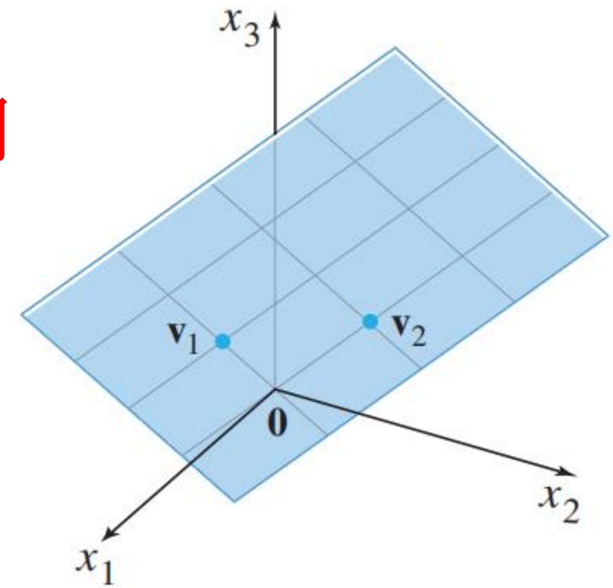
$\mathbb{R}^n$中的一个子空间是$\mathbb{R}^n$中的集合H，具有以下三个性质：

a.零向量属于H.

b.对H中的任意的向量$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{v}$ ，$\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 属于H.

c.对H中任意向量$\mathbf{u}$ 和数c ，$c\mathbf{u}$ 属于H.

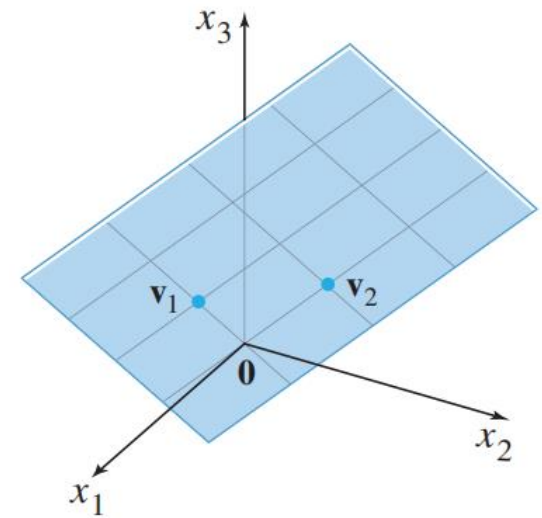
即子空间对加法和标量乘法运算是封闭



通过原点的平面是一个典型的$\mathbb{R}^n$子空间

子空间举例

举例：若$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$是$\mathbb{R}^n$中的向量，H=Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$，则$H$ 是$\mathbb{R}^n$的子空间.



证明：取H 中的任意两个向量$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$,

$\mathbf{u} = s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2$,

$\mathbf{v} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$,

于是，$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (s_1+t_1)\mathbf{v}_1 + (s_2+t_2)\mathbf{v}_2$,

所以$\mathbf{u} + \mathbf{v}$是$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$的线性组合，属于H 空间；

零向量$\mathbf{0}=0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$，也是$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$的线性组合，属于$H$ 空间；

同样$c\mathbf{u} = (cs_1)\mathbf{v}_1 + (cs_2)\mathbf{v}_2$，也是$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$的线性组合，属于$H$空间。

矩阵的列空间与零空间

“四个子空间” （一）

定义

$\mathbf{A}_{m\times n}$ 矩阵的列空间 $Col(\mathbf{A})$ 包含所有列向量的线性组合，即所有可能的 $\mathbf{Ax}$ 向量。

列空间
Column space

线性系统 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解的充要条件是 $\mathbf{b}$ 必须在 $\mathbf{A}$ 的列空间中。

$\mathbf{A}_{m\times n}$ 的列空间是 $\mathbb{R}^m$（不是 $\mathbb{R}^n$）的子空间！

定义

$\mathbf{A}_{m\times n}$ 矩阵的零空间 $Nul(\mathbf{A})$ 包含所有 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，包括 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$，这些向量在 $\mathbb{R}^n$ 中。

消元不改变零空间

零空间
Null space

“四个子空间”（二）

定义 $\mathbf{A}_{m\times n}$矩阵的行空间 $Col(\mathbf{A}^T)$ 包含所有行向量的线性组合，即等同于 $\mathbf{A}^T$ 矩阵的列空间，是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

$\mathbf{A}_{m\times n}$ 的行空间是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间！

行空间 Row space

定义 $\mathbf{A}_{m\times n}$矩阵的左零空间是 $Nul(\mathbf{A}^T)$，是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

左零空间 Left null space

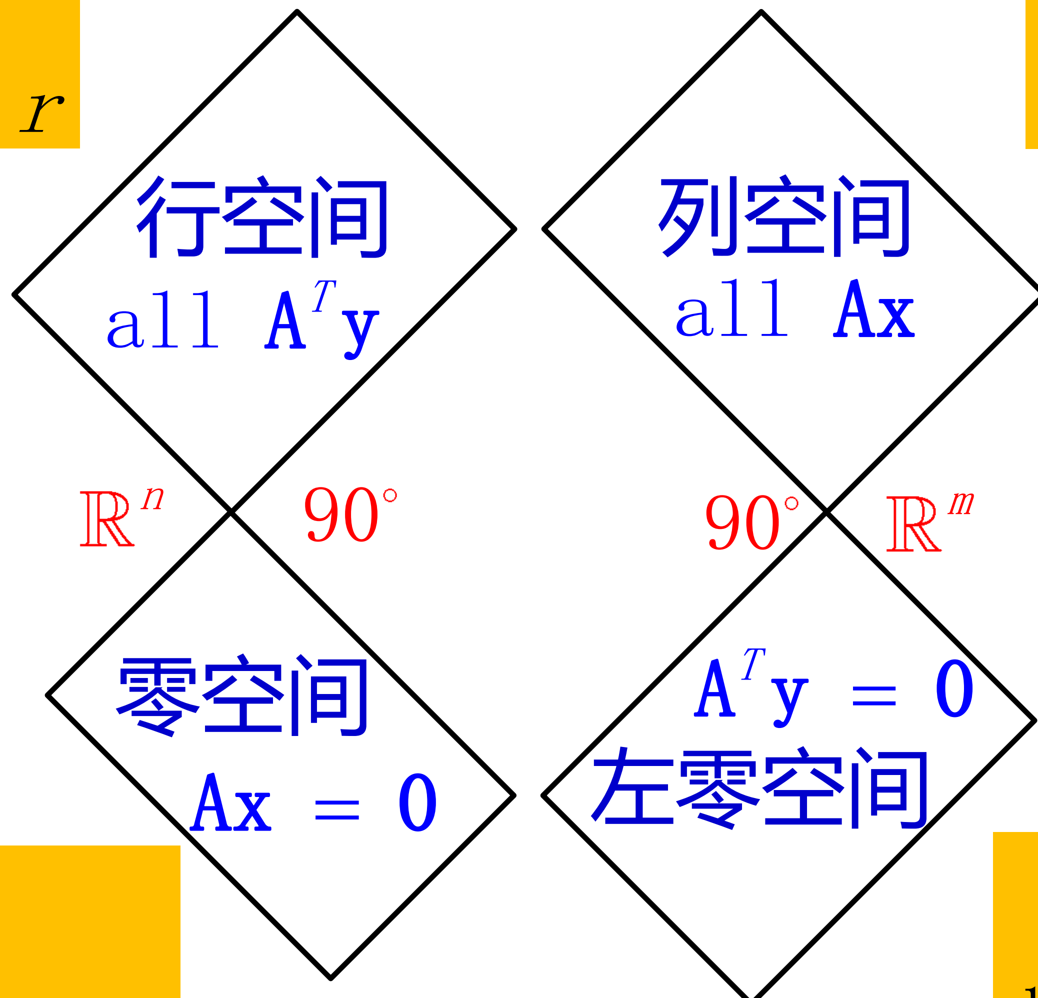
“四个子空间”

$Col(\mathbf{A}^T)$

dimension r

$Col(\mathbf{A})$

dimension r



$Nul(\mathbf{A})$

dimension $n - r$

$Nul(\mathbf{A}^T)$

dimension $m - r$

矩阵的零空间

定理

$A_{m\times n}$的零空间$Nul(A)$是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

等价地, n个未知数的m个齐次线性方程的解的全体是$\mathbb{R}^n$ 的子空间。

证明：零向量属于$Nul(A)$ （因$A0 = 0$）；

取$Nul(A)$中两个向量u和v，即$Au = 0$和$Av = 0$,

于是，$A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$,

所以u+v满足$Ax = 0$，u+v属于$Nul(A)$,

同样对任意数c, $A(cu) = c(Au) = c(0) = 0$,

所以cu属于$Nul(A)$.

子空间的基

子空间的基

定义

设有向量空间 V_1, V_2，若 $V_1 \subseteq V_2$，就称 V_1 是 V_2 的子空间。

定义

设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r \in V$，且满足

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ 线性无关

(2) V 中的任何一个向量都能用 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ 线性表示

那么向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ 称为向量空间 V 的一个基 (Basis)，

r 称为 V 的维数 (Dimension)，V 称为 r 维向量空间

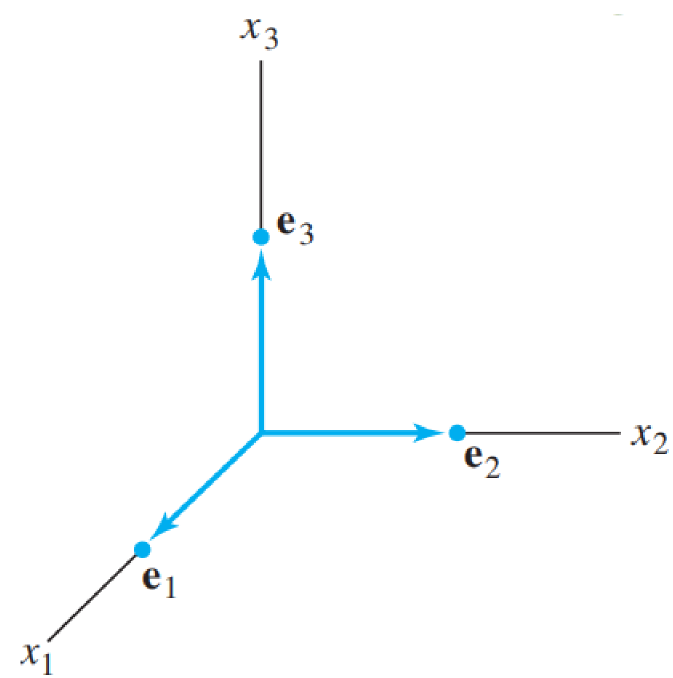
子空间的基

举例

可逆$n \times n$矩阵的各列构成$\mathbb{R}^n$的一组基。因为它们线性无关，而且生成$\mathbb{R}^n$，由逆矩阵定理可知，一个这样的矩阵是$n \times n$单位矩阵，它的各列用$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$表示：

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 称为$\mathbb{R}^n$的标准基.



子空间的基

【例题】求矩阵 $A=\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ 的零空间的一组基.

$\mathbf{A}_{m\times n}$ 矩阵的零空间 $Nul(\mathbf{A})$ 包含所有 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，包括 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$，这些向量在 $\mathbb{R}^n$ 中。

子空间的基

【解析】

$$\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}_{\mathbf{u}} + x_4 \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}_{\mathbf{v}} + x_5 \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}_{\mathbf{w}}$$

子空间的基

【例题】求矩阵B $=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 5 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$的列空间的基.

$A_{m\times n}$矩阵的列空间 $Col(A)$ 包含所有列向量的线性组合，即所有可能的 Ax 向量。

子空间的基

【解析】

用$\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_5$表示B的列，注意$\mathbf{b}_3=-3\mathbf{b}_1+2\mathbf{b}_2$，$\mathbf{b}_4=5\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2$，$\mathbf{b}_3$和$\mathbf{b}_4$是主元列的线性组合，这意味着$\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_5$的任意线性组合实际上仅是$\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$和$\mathbf{b}_5$的线性组合.事实上，若$\mathbf{v}$是Col B的任意向量，则

$$\mathbf{v}=c_1\mathbf{b}_1+c_2\mathbf{b}_2+c_3\mathbf{b}_3+c_4\mathbf{b}_4+c_5\mathbf{b}_5$$

$$=c_1\mathbf{b}_1+c_2\mathbf{b}_2+c_3(-3\mathbf{b}_1+2\mathbf{b}_2)+c_4(5\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2)+c_5\mathbf{b}_5$$

它是$\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$和$\mathbf{b}_5$的线性组合，所以B的主元列构成Col B的基.

子空间的基

【例题】矩阵A $= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix}$，

A行等价于上例中的B，求A的列空间的基.

$A_{m\times n}$矩阵的列空间 $Col(A)$ 包含所有列向量的线性组合，即所有可能的 Ax 向量。

子空间的基

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【解析】

上例中1,2,5列是B的主元列， 即A的主元列是1,2,5列，因行变换不影响列的线性关系， 故：

$\mathbf{a}_3=-3\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2$， $\mathbf{a}_4=5\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$，

可验证这是成立的，

$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$ 线性无关， 是ColA的一组基.

子空间的基

定理 矩阵A的主元列构成列空间.

【例题】求矩阵$B=\begin{bmatrix}1&0&-3&5&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$的列空间的基.

【例题】矩阵$A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\-2\\2\\3\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}3\\-2\\3\\4\end{matrix}}&\begin{matrix}3\\2\\0\\-1\end{matrix}&\begin{matrix}2\\-8\\7\\11\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}-9\\2\\1\\-8\end{matrix}}\end{bmatrix}$,

A行等价于上例中的B，求A的列空间的基.

注意：要用A的主元列本身作为ColA的基，阶梯形B的列本身不在A的列空间内.

坐标系

定义

如果在向量空间 V 中取定一个基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_r$，则 V 中的任一向量 $\mathbf{x}$ 可以唯一地表示为 $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_r\mathbf{b}_r$

数组 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 称为向量 $\mathbf{x}$ 在基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_r$ 中的坐标。

$\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0)^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)^T$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

自然基

坐标系举例

举例

设$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$,

因$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$线性无关，B是$H=\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$的基，

判断$\mathbf{x}$是否在H中，如果在，求$\mathbf{x}$相对基B的坐标系向量.

坐标系举例

解析

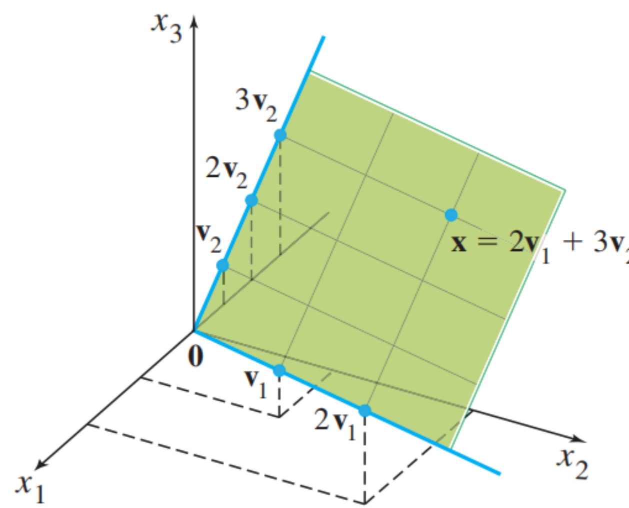
如果 $\boldsymbol{x}$ 在 H 中，则下面的向量方程是相容的：

$$c_1\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix}$$

如果数 c_1,c_2 存在，即是 $\boldsymbol{x}$ 的 $\mathcal{B}$-坐标．由行操作得

$$\begin{bmatrix}3&-1&3\\6&0&12\\2&1&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

于是 $c_1=2,c_2=3,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$．基 $\mathcal{B}$ 确定 H 上的一个"坐标系"



坐标系举例

设 $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}, B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{pmatrix}$.

验证 a_1,a_2,a_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，并求 b_1,b_2 在这个基中的坐标.

解：

需先证 a_1,a_2,a_3 线性无关。

$$(b_1,b_2)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix}$$ 有唯一解, 记作 $B=AX$

坐标系举例

解：

……

$$B = AX \Rightarrow X = A^{-1}B$$

对矩阵(A, B)进行初等变换，$A \to I$ 时 $B \to A^{-1}B$

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b_1, b_2 在基 a_1, a_2, a_3 中的坐标为 $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1$ 和 $\frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}$

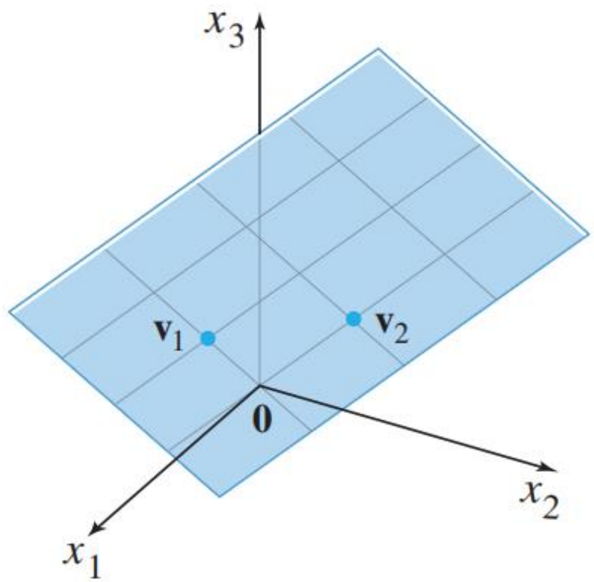
子空间的维数

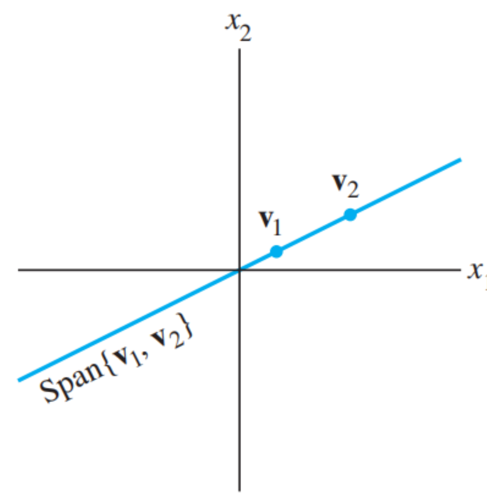
定义 非零子空间H的维数用$\dim H$表示，是H的任意一个基的向量个数. 零子空间$\{0\}$的维数定义为零.

$\mathbb{R}^n$空间维数为n，$\mathbb{R}^n$的每个基由n个向量组成.

$\mathbb{R}^3$中一个经过0的平面是二维的，

一条经过0的直线是一维的.





$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1.$

子空间的维数

定义 矩阵A的秩(记为rank A)是A的列空间的维数.

因为A的主元列形成ColA的一个基，A的秩正好是A的主元列的个数.

【举例】

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & -3 & -4 & 8\\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9\\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4\\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6\end{bmatrix}$$，求A的秩

子空间的维数

【解析】

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & -6 & 4 & 14 & -20 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元列

rank(A)=3

子空间的秩

定理

秩定理：如果一矩阵A有n列，则$\operatorname{rank} A+\dim \operatorname{Nul} A=n$.

基定理：设H是$\mathbf{R}^n$的p维子空间，H中的任何恰好由p个成员组成的线性无关集构成H的一个基. 并且，H中任何生成H的p个向量集也构成H的一个基。

定理

可逆矩阵定理（续）

设A是一$n \times n$矩阵，则下面的每个命题与A是可逆矩阵的命题等价

m. A的列向量构成$\mathbb{R}^n$的一个基.

n. $Col(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.

o. $\dim(Col(\mathbf{A})) = n$.

p. $rank(\mathbf{A}) = n$.

q. $Nul(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

r. $\dim(Nul(\mathbf{A})) = \mathbf{0}$.

可逆矩阵的特征

可逆矩阵的特征：

设A是$n \times n$的方阵，则下列所有表述都是等价的，即对某一特定的A，它们同时为真或同时为假.

a. A是可逆矩阵.

b. A等价于$n \times n$的单位矩阵.

c. A有n个主元位置.

d. 方程Ax = 0仅有平凡解.

可逆矩阵的特征

e. $\mathbf{A}$的各列线性无关.

f. 线性变换$\mathbf{x} \to \mathbf{Ax}$是一对一的.

g. 对$\mathbb{R}^n$中任意$\mathbf{b}$, 方程$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$至少有一个解.

h. $\mathbf{A}$的各列生成$\mathbb{R}^n$.

i. 线性变换$\mathbf{x} \to \mathbf{Ax}$把$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^n$上.

j. 存在$n \times n$的矩阵使得$\mathbf{CA} = \mathbf{I}$.

k. 存在$n \times n$的矩阵使得$\mathbf{AD} = \mathbf{I}$.

l. $\mathbf{A}^T$是可逆矩阵.

秩与可逆矩阵定理

证　根据线性无关和生成的概念，命题（m）逻辑上与命题（e）和（h）等价．其他五个命题通过简单推导以如下关系与定理以前的命题相连：

$$(g) \Rightarrow (n) \Rightarrow (o) \Rightarrow (p) \Rightarrow (r) \Rightarrow (q) \Rightarrow (d)$$

命题（g）认为方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对每一属于 $\mathbb{R}^n$ 的 $\boldsymbol{b}$ 有至少一个解，由此可以推出（n），因为 Col A 确实是所有 $\boldsymbol{b}$ 的集合，满足方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 相容的条件．命题（n）⇒（o）⇒（p）是因为维数和秩的定义．如果 A 的秩是 n，即 A 的列数，则根据秩定理得 $\dim \operatorname{Nul} A=0$，因而 $\operatorname{Nul} A=\{\boldsymbol{0}\}$．于是有（p）⇒（r）⇒（q）．同时，由命题（q）推出方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有平凡解，即命题（d）．因为已知命题（d）和（g）与 A 是可逆矩阵的命题等价，从而定理证毕．■

回家作业

2.6 作业：P160：24，26

课后完成：21，22（不用交）

2.7 作业：P167：25，30

课后完成：17-24（不用交）

Q & A