第10章　Z-变换

本章主要内容

1. 双边Z变换及其收敛域ROC。
2. ROC的特征，各类信号的ROC，零极点图。
3. Z反变换，利用部分分式展开进行反变换。
4. 由零极点图分析系统的特性。
5. 常用信号的Z变换，Z变换的性质。
6. 用Z变换表征LTI系统，系统函数，LTI系统的Z变换分析法，系统的级联与并联型结构。
7. 单边Z变换，增量线性系统的分析。

10.0 引言 (Introduction)

Z 变换与拉氏变换相对应，是离散时间傅立叶变换的推广。 Z 变换的基本思想、许多性质及其分析方法都与拉氏变换有相似之处。当然，Z 变换与拉氏变换也存在着一些重要的差异。

由离散时间Fourier变换到z变换

$x[k]=2^k u[k]$的离散时间Fourier变换(DTFT)? 不存在!

将 $x[k]$ 乘以衰减因子r^{-k}

$$\mathrm{DTFT}\{2^k u[k]\, r^{-k}\} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k r^{-k} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})^{-k}$$

令$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}$$

若$|z| > 2$

$$= \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

推广到一般情况

$$\mathrm{DTFT}\{x[k]r^{-k}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]r^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}$$

$$\xlongequal{z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = X(z)$$

- **物理意义：**
  离散信号可分解为不同频率复指数z^k的线性组合

10.1 双边 Z 变换 The z-Transform

一.双边Z变换的定义:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$ 其中 $z=re^{j\omega}$ 是一个复数。

当 $r=1$ 时，$z=e^{j\omega}$ 即为离散时间傅立叶变换。

这表明：DTFT就是在单位圆上进行的Z变换。

$$X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}=\mathrm{F}[x(n)r^{-n}]$$

可见：对 $x(n)$ 做 Z 变换就等于对 $x(n)r^{-n}$ 做DTFT。

因此，Z 变换是对DTFT的推广。

二. Z变换的收敛域（ROC）：

Z变换与DTFT一样存在着收敛的问题。

1. 并非任何信号的Z变换都存在。

2. 并非Z平面上的任何复数都能使 $X(z)$ 收敛。

Z平面上那些能使 $X(z)$ 收敛的点的集合，就构成了$X(z)$ 的收敛域（ROC）。

X(z)存在或级数收敛的充分条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} < \infty$$

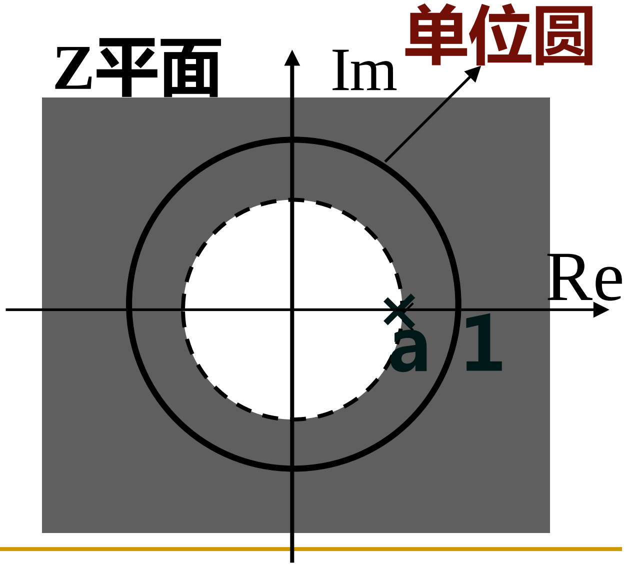
例1. $x(n)=a^n u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$ $|z|>|a|$**时收敛**

当 $|a|<1$ **时，ROC包括了单位圆。**

此时， $x(n)$ **的DTFT存在。**

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \quad |z|>|a|$$

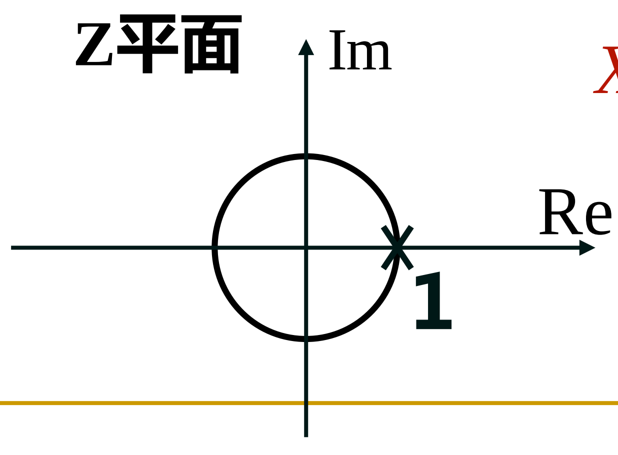


显然有 $X(z)|_{z=e^{j\omega}}=X(e^{j\omega})$

例2. $x(n)=u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

此时，ROC不包括单位圆，所以不能简单地从通过将 $X(z)$ **得到** $z \rightarrow e^{j\omega}$**。** $X(e^{j\omega})$



$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega-2\pi k)$$

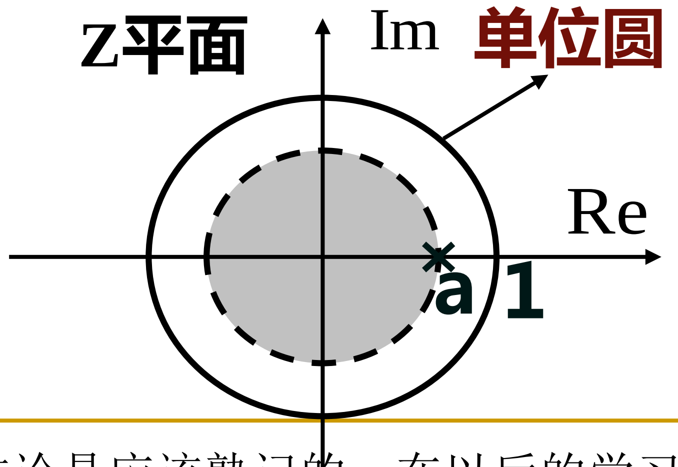
（例2的ROC）

例3. $x(n) = -a^n u(-n-1)$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n$$

$$= -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

ROC: $|z| < |a|$



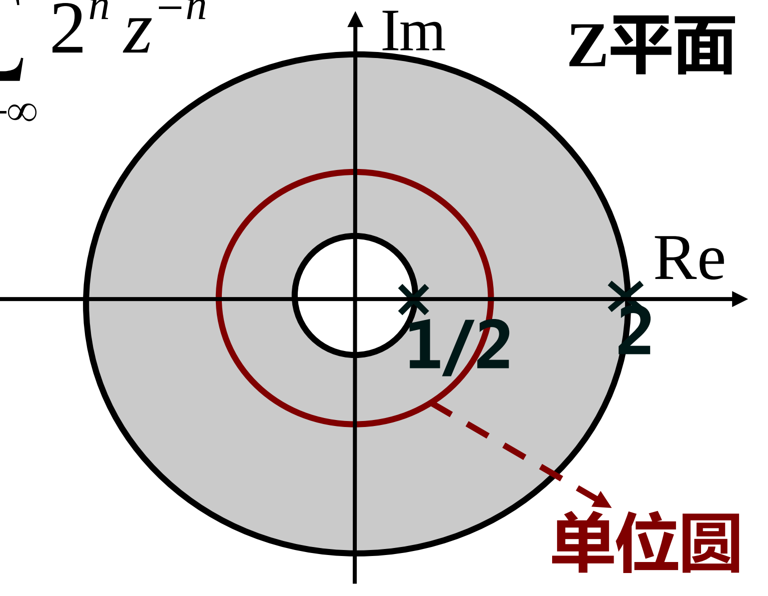
例6.1和例6.3的结论是应该熟记的，在以后的学习将经常用到。

例4. $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) - 2^n u(-n-1)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$\mathrm{ROC}: \frac{1}{2} < |z| < 2$$



一般情况下，$X(z)$ 的ROC是 Z 平面上一个以原点为中心的圆环。

结 论：

1）Z变换存在着收敛问题，不是任何信号都存在Z变换，也不是任何复数Z都能使 $X(z)$ 收敛。

2）仅仅由 $X(z)$ 的表达式不能唯一地确定一个信号，只有 $X(z)$ 连同相应的ROC一道，才能与信号 $x(n)$ 建立一一对应的关系。

3）Z变换的ROC，一般是Z平面上以原点为中心的环形区域。且ROC内不包含任何极点。

4）如果 $x(n)=\sum_i x_i(n)$，则其ROC是各个$x_i(n)$的ROC的公共部分。若没有公共区域则表明 $x(n)$ 的Z变换不存在。

5）当 $X(z)$是有理函数时，其ROC的边界总是由 $X(z)$ 的极点所在的圆周界定的。

6）若 $X(z)$ 的ROC包括单位圆，则有

$$X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

三. $X(z)$的几何表示——零极点图：

如果 $X(z)$ 是有理函数，将其分子多项式与分母多项式分别因式分解可以得到：

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=M\frac{\prod_{i}(z-z_i)}{\prod_{p}(z-z_p)}$$

由其全部的零、极点即可确定出 $X(z)$，最多相差一个常数因子 M 。

因此，若在 Z 平面上表示出 $X(z)$的全部零、极点，即构成 $X(z)$的几何表示——零极点图。

如果在零极点图上同时标出ROC，则由该零极点图可以唯一地确定一个信号。

零极点图对描述LTI系统和分析LTI系统的特性，具有重要的用途。

10.2　Z 变换的ROC

The Region of Convergence for the z-Transform

ROC的特征：

1. $X(z)$的ROC是Z平面上以原点为中心的环形区域。因为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|r^{-n}<\infty$

2. 在ROC内，$X(z)$无极点。

3. 有限长序列的ROC是整个有限Z平面（可能不包括 $z=0$ ，或$|z|=\infty$ ）。

由 $X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n}$

- 当 $N_2 > N_1 \geq 0$ 时，在 $X(z)$ 的展开式中，只有z的负幂项，故z不能为0，但可以取 ∞。
- 当 $0 \geq N_2 > N_1$ 时，在 $X(z)$ 的展开式中，只有z的正幂项，故z不能为 ∞，但可以取0。
- 当 $N_2 > 0,\ N_1 < 0$ 时，在 $X(z)$ 的展开式中，既有z的正幂项，也有负幂项，故z既不能为 ∞ 也不能取0。

4. 右边序列的ROC是某个圆的外部，但可能不包括$|z|=\infty$ 。

设 $x(n)$ 是右边序列，

由 $x(n)$ ，$N_1 < n < \infty$ 有 $X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$

若 $|z|=r_0 \in \mathrm{ROC}$ 则 $\sum_{n=N_1}^{\infty} \left| x(n) r_0^{-n} \right| < \infty$

如果 $r_1 > r_0$ ，则

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \left| x(n) r_1^{-n} \right| = \sum_{n=N_1}^{\infty} \left| x(n) r_0^{-n} \right| \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$$

$$\le \sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot(\frac{r_0}{r_1})^{N_1}<\infty \qquad \therefore |z|=r_1\in \text{ROC}$$

当 $N_1<0$ 时,由于$X(z)$ 展开式中有若干个Z的正幂项，此时$|z|$不能为∞ 。

5. 左边序列的ROC是某个圆的内部，但可能不包括$z=0$。

若 $r_0\in \text{ROC}$ ，$r_1<r_0$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{N_1}\left|x(n)r_1^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{N_1}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot(\frac{r_0}{r_1})^{n}$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n) r_0^{-n} \right| \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1} < \infty \qquad \therefore r_1 \in \text{ROC}$$

当 $N_1 > 0$ 时，由于$X(z)$的展开式中包括有Z的负幂项，所以Z不能为零。

6. 双边序列的Z变换如果存在，则ROC必是一个环形区域。

例1. $x(n) = \begin{cases} a^n, 0 \le n \le N-1, & a > 0 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$

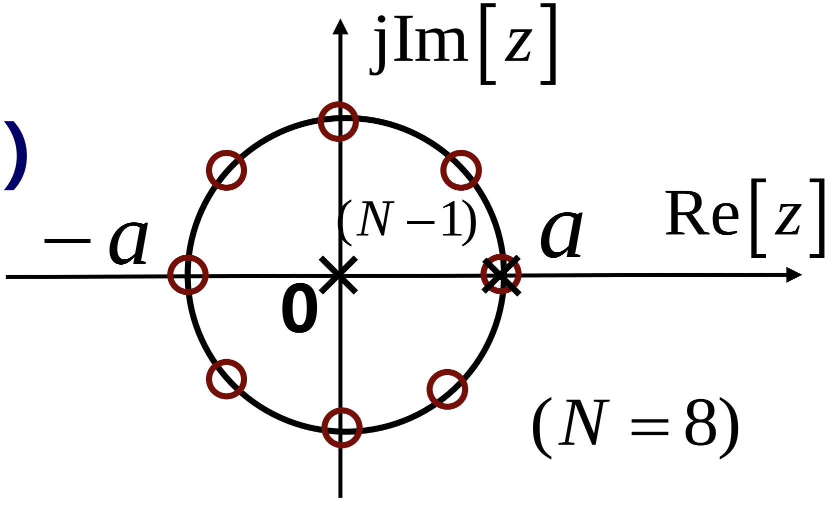
$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}} = \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z-a)}$$

极点：$z = a$（一阶）

$z = 0$（N－1阶）

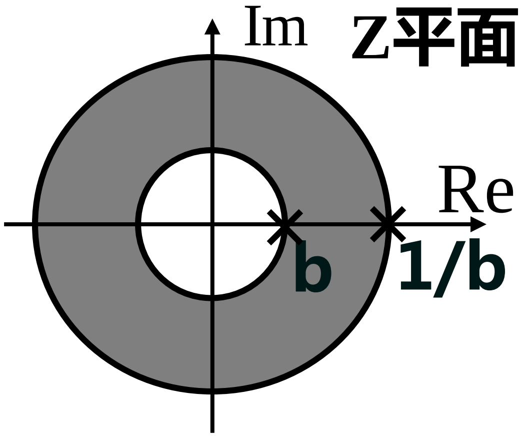
零点：$z = ae^{j\frac{2\pi}{N}k}$

$(k = 0,1\cdots N-1)$



在 $z = a$ **处，零极点抵消，使有限 Z平面内无极点。** $\mathrm{ROC}: |z| > 0$

例2. $x(n)=b^{|n|},\quad b>0$



$$x(n)=b^{n}u(n)+b^{-n}u(-n-1)$$

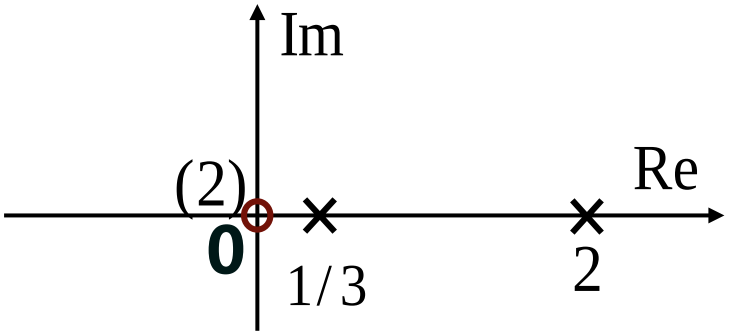
$$b^{n}u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-bz^{-1}},\quad |z|>b$$

$$b^{-n}u(-n-1)\leftrightarrow-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}},\quad |z|<b^{-1}$$

在 $b>1$ **时，两部分的收敛域无公共部分，表明此时** $X(z)$ **不存在。**

$0<b<1$**时，ROC为** $b<|z|<1/b$

例3. $X(z)=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$



极点： $z_1=\dfrac{1}{3},\quad z_2=2$

零点： $z=0$ **（二阶）**

在有限Z平面上极点总数与零点总数相同

若其ROC为：

① $|z|>2$ **则** $x(n)$ **为右边序列，且是因果的，但其傅立叶变换不存在。**

② $|z| < \frac{1}{3}$ 时 $x(n)$ 是左边序列，且是反因果的，其傅立叶变换不存在。

③ $\frac{1}{3} < |z| < 2$ 时 $x(n)$ 是双边序列，其傅立叶变换存在。

ROC是否包括 $|z| = \infty$，是 $x(n)$ 是否因果的标志。

ROC是否包括 $z = 0$，是 $x(n)$ 是否反因果的标志。

10.3 Z-反变换

The Inverse Z-Transform

一.Z-反变换：

$$\because X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\omega n}$$

$$\therefore x(n) r^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) r^{n} e^{j\omega n} d\omega$$

令 $z = re^{j\omega}$ **，则** $dz = jre^{j\omega} d\omega = jz d\omega$

当 ω 从 $0 \rightarrow 2\pi$ 时，Z沿着ROC内半径为 r 的圆变化一周。

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

其中 C 是 ROC 中逆时针方向的圆周。

二. 反变换的求取：

1. 部分分式展开法：

当 $X(z)$ 是有理函数时，可将其展开为部分分式

$$X(z)=\sum_{i}\frac{A_i}{1-a_i z^{-1}}$$

步骤：1. 求出$X(z)$的所有极点 a_i ；

2. 将$X(z)$展开为部分分式；

3. 根据总的ROC，确定每一项的ROC；

4. 利用常用变换对和Z变换性质求出每一项的反变换。

例： $X(z)=\dfrac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$ $\qquad \dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{3}$

将$X(z)$展开为部分分式有：

$$X(z)=\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{ROC_1}+\underbrace{\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}_{ROC_2}$$

$ROC_1:|z|>1/4$

$ROC_2:|z|<1/3$

$$\therefore x(n)=(\frac{1}{4})^n u(n)-2(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$$

2. 幂级数展开法:（长除法）

由$X(z)$的定义，将其展开为幂级数，有

$$X(z)=\cdots+x(-n)z^{n}+\cdots+x(-1)z+$$
$$x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots+x(n)z^{-n}+\cdots$$

展开式中z^{-n}项的系数即为$x(n)$。当$X(z)$是有理函数时，可以通过长除的方法将其展开为幂级数。

- 由于右边序列的展开式中应包含无数多个Z的负幂项，所以要按降幂长除。

❖ 由于左边序列的展开式中应包含无数多个Z的正幂项，所以要按升幂长除。

❖ 对双边序列，先要将其分成对应信号的右边和左边的两部分，再分别按上述原则长除。

例如： $X(z)=1+2z^{-1}-4z^{-3}$ ，可得

$$x[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 2, & n=1\\ -4, & n=3\\ 0, & n=\text{其它}\end{cases}$$

。

例：$X(z)=\dfrac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$ $\qquad \dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{3}$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$\mathrm{ROC}_1:|z|>1/4$

$\mathrm{ROC}_2:|z|<1/3$

$\mathrm{ROC}_1 \qquad \mathrm{ROC}_2$

所以前一项按降幂长除，后一项按升幂长除。

幂级数展开法的缺点是当 $X(z)$ 较复杂（含多个极点时）难以得出 $x(n)$ 的闭式。

幂级数展开法适合用来求解非有理函数形式 $X(z)$ 的反变换。

例 10.13 考虑一个 z 变换 $X(z)$ 为

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

该式可用长除法将其展开成幂级数

$$\begin{array}{r|l} & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots \\ \hline 1 - az^{-1} & 1 \\ & 1 - az^{-1} \\ \cline{2-2} & \quad az^{-1} \\ & \quad az^{-1} - a^2z^{-2} \\ \cline{2-2} & \qquad a^2z^{-2} \end{array}$$

或者写为

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots \tag{10.58}$$

因为 $|z| > |a|$，或 $|az^{-1}| < 1$，所以式(10.58)的级数收敛。将该式与式(10.3)的 z 变换定义进行比较可见：$n < 0$ 时 $x[n] = 0$，$x[0] = 1$，$x[1] = a$，$x[2] = a^2$，…，$x[n] = a^n u[n]$，这个结果与例 10.1 是一致的。

如果 $X(z)$ 的收敛域是 $|z| < |a|$，或者等效为 $|az^{-1}| > 1$，那么式(10.58)中 $1/(1 - az^{-1})$ 的幂级数展开式就不收敛。然而，再利用一次长除法可以得到一个收敛的幂级数为

$$\begin{array}{r|l} & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \cdots \\ \hline -az^{-1} + 1 & \qquad 1 \\ & \qquad 1 - a^{-1}z \\ \cline{2-2} & \qquad\quad a^{-1}z \end{array}$$

或者

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \cdots \tag{10.59}$$

在这种情况下，$n \geq 0$ 时 $x[n] = 0$，$x[-1] = -a^{-1}$，$x[-2] = -a^{-2}$，…，即 $x[n] = -a^n u[-n-1]$。这个结果与例 10.2 是一致的。

例 10.14 考虑如下 z 变换 $X(z)$

$$X(z)=\log(1+az^{-1}),\quad |z|>|a| \tag{10.60}$$

由于 $|z|>|a|$，或等效为 $|az^{-1}|<1$，可将式(10.60)展开为泰勒级数

$$\log(1+v)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}v^n}{n},\quad |v|<1 \tag{10.61}$$

将上式用于式(10.60)就有

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^nz^{-n}}{n} \tag{10.62}$$

据此，就可确认出

$$x[n]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n}, & n\geqslant 1\\ 0, & n\leqslant 0\end{cases} \tag{10.63}$$

或等效为

$$x[n]=\frac{-(-a)^n}{n}u[n-1]$$

在习题 10.63 中将考虑收敛域为 $|z|<|a|$ 的一个例子。

10.4. 由零极点图对离散时间傅立叶变换几何求值

Geometric Evaluation of the Fourier Transform from the Pole-Zero Plot

当ROC包括 $|z|=1$ 时，Z 变换在单位圆上的情况就是 $X(e^{j\omega})$ ，因此也可以利用零极点图对其进行几何求值。

其方法与拉氏变换时完全类似：

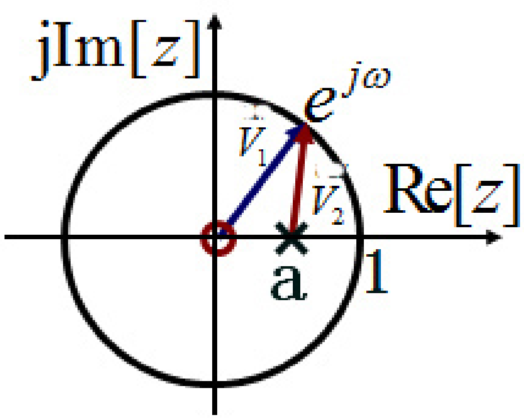
考查动点在单位圆上移动一周时，各极点矢量和零点矢量的长度与幅角变化的情况，即可反映系统的频率特性。

例1. 一阶系统 $y(n)-ay(n-1)=x(n)$

$$h(n)=a^n u(n) \qquad H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>a$$

当$|a|<1$**时，ROC包括单位圆。**

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$



$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|V_1\right| / \left|V_2\right|$$

显然，$\left|V_1\right| = 1$， $\left|H(e^{j\omega})\right|$取决于$\left|V_2\right|$的变化。

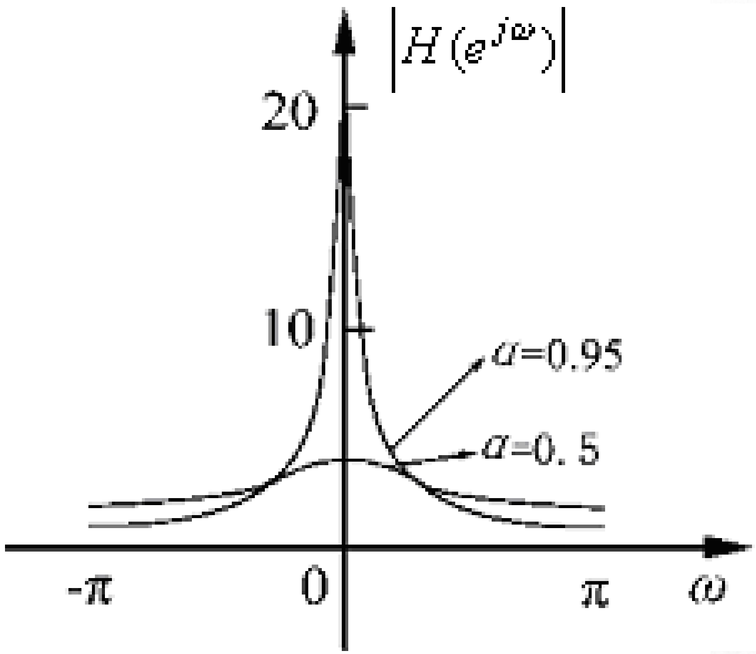
- 当$0 < a < 1$时，

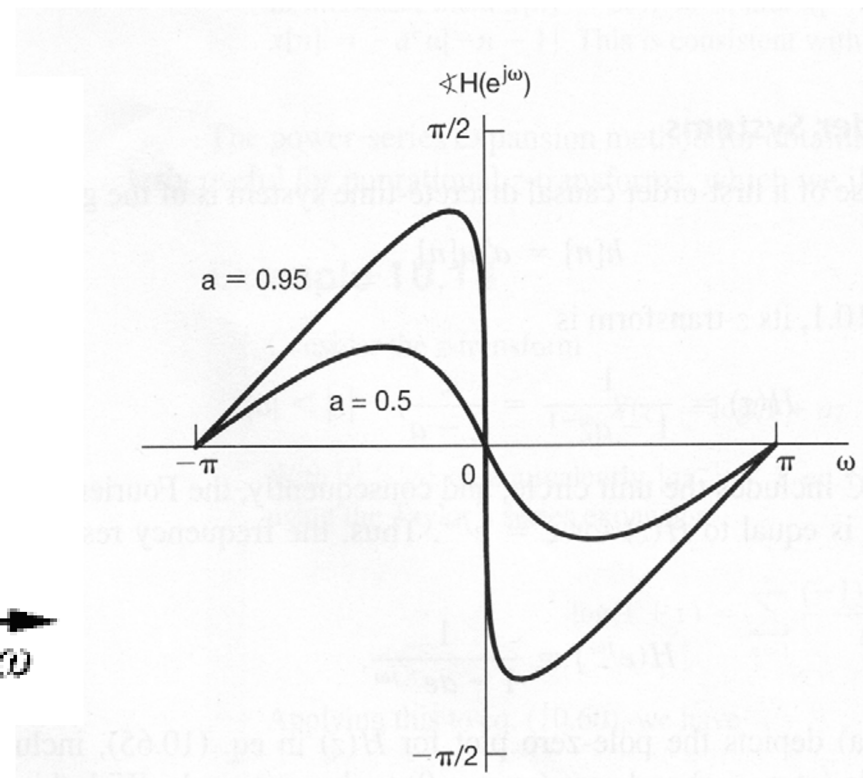
在 $\omega=0$处， $\left|H(e^{j\omega})\right|$有最大值。

当$\omega = \pi$时， $\left|H(e^{j\omega})\right|$有最小值。

$\left|H(e^{j\omega})\right|$随$\omega$呈单调变化。

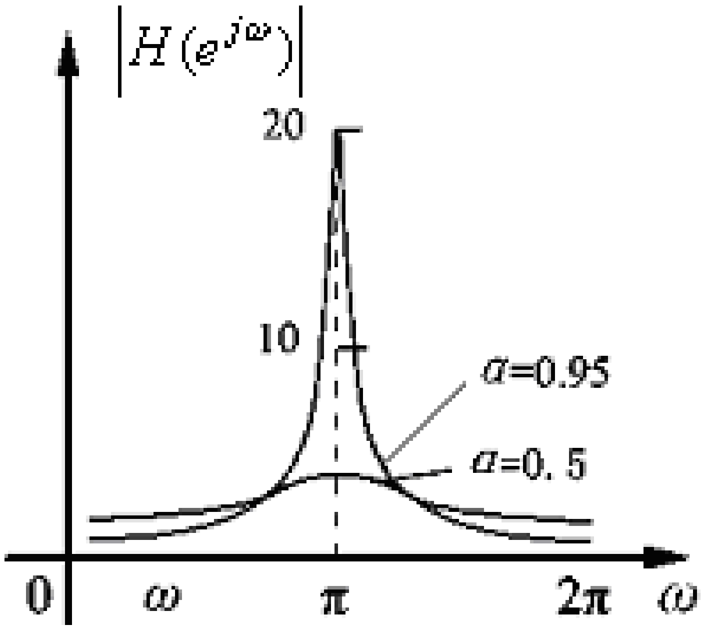
一阶系统的频率特性： $0 < a < 1$



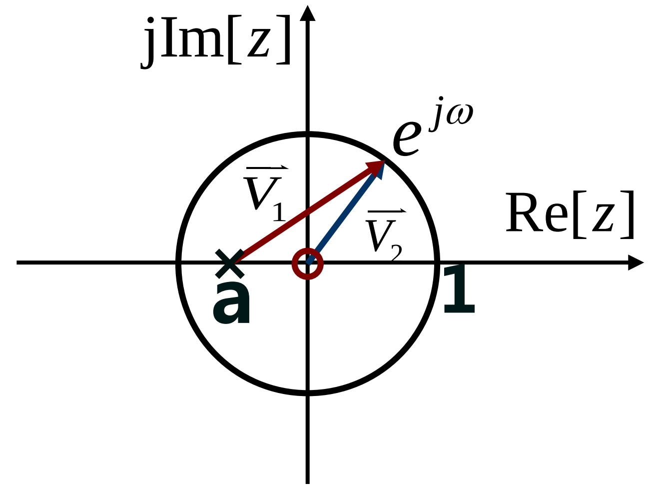


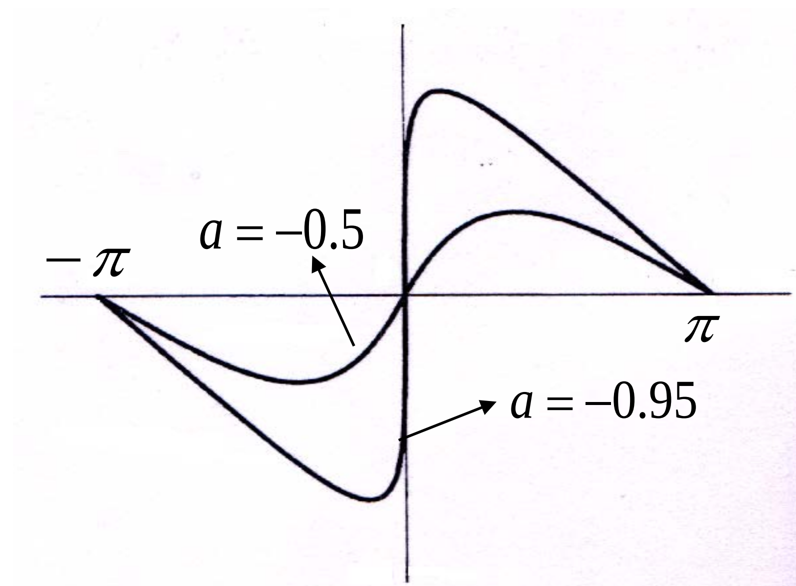
幅频特性　　　　**相频特性**

❖当 $-1<a<0$ 时，



幅频特性





相频特性

可以看出：

- $|a|$ 越小，极点靠原点越近，系统的频率响应越平缓，系统的带宽越宽；此时 $h(n)$ 衰减越快，$s(n)$上升越快。

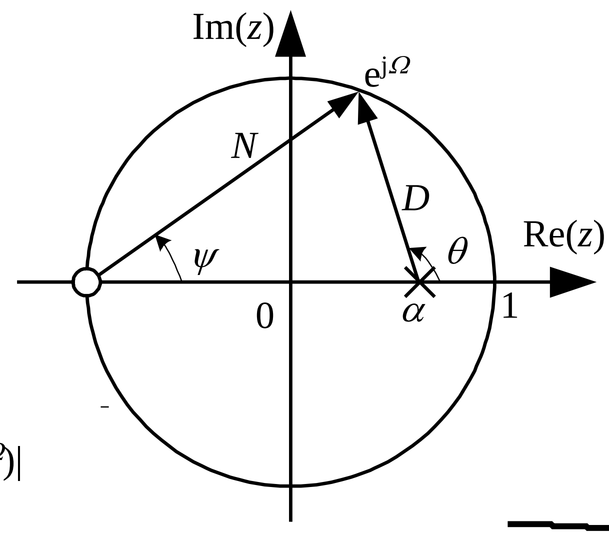
- $|a|$ 越大，极点靠单位圆越近，系统频响越尖锐，频响的极大值越大，系统带宽越窄，相位的非线性程度越厉害。

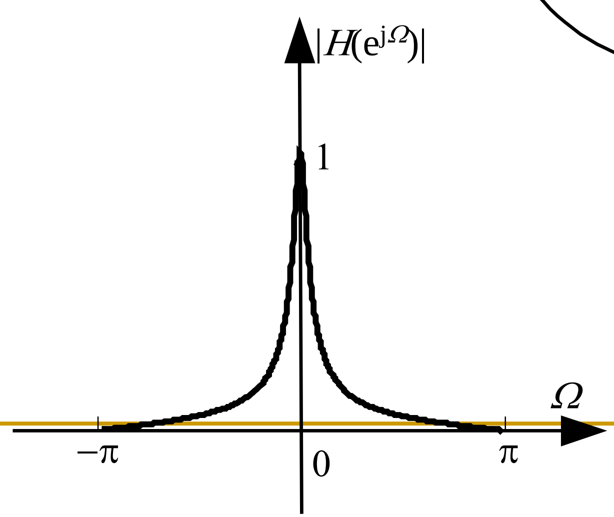
例： 已知某因果离散LTI系统的系统函数

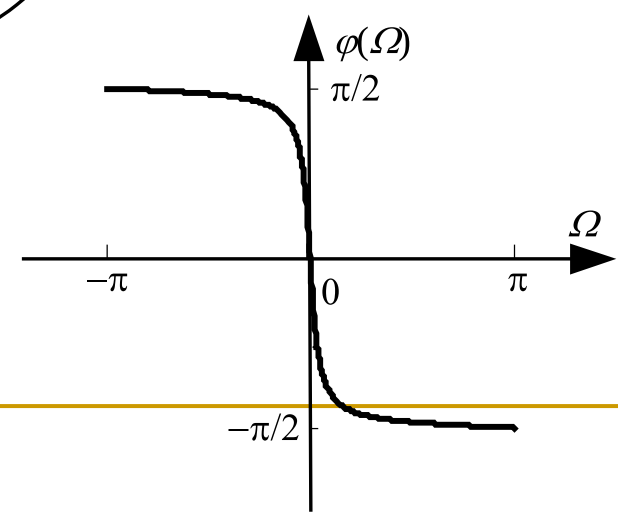
$$H(z)=\frac{(1-\alpha)}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}},\ |\alpha|<1$$

试用向量法定性画出该系统的幅度响应和相位响应。

解：







例2. 二阶系统：

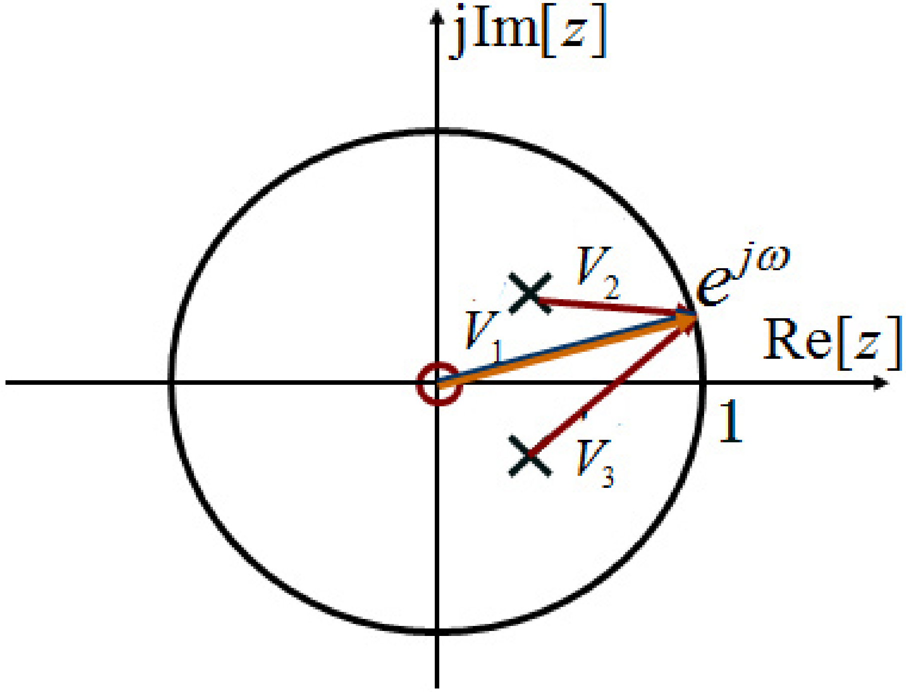
$$y(n)-2r\cos\theta\, y(n-1)+r^2 y(n-2)=x(n)$$

$$0<r<1,\quad 0\le\theta\le\pi$$

$$h(n)=r^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}u(n)$$

$$H(z)=\frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

极点：$z_{1,2}=re^{\pm j\theta}$ **零点**：$z=0$ **（二阶）**



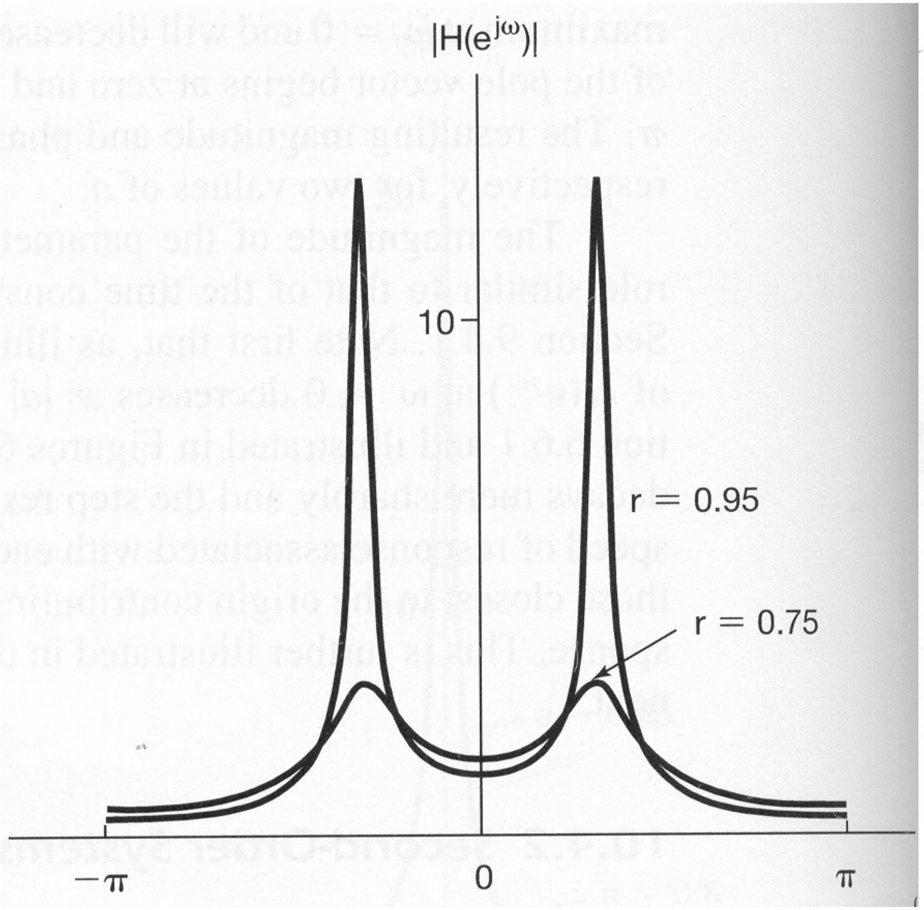
考查动点在单位圆上移动一周时，各极点矢量和零点矢量的长度与幅角的变化情况，即可得到二阶系统的频率特性。

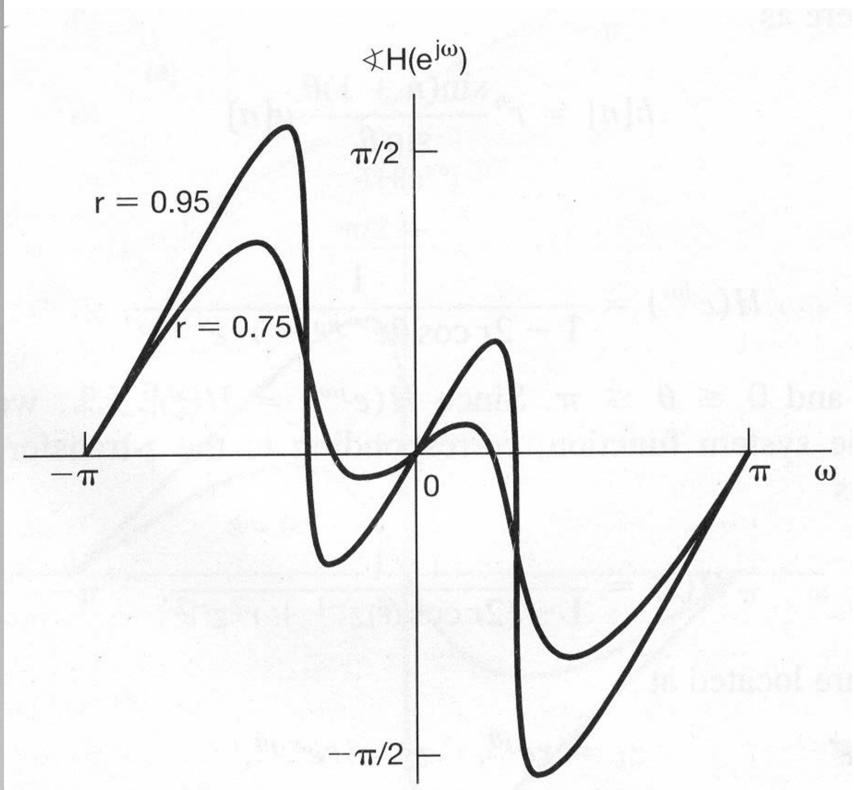
当 ω 从 $0 \to \pi$ 时，在靠近 $\omega = \pm\theta$ 处频率响应会出现极大值。

若r越接近于1，$\left|H(e^{j\omega})\right|$ 的峰值越尖锐。由于极点远离原点，$h(n)$ 和 $s(n)$ 的变化速率越慢。

随着r减小，极点逐步靠近原点，频率响应趋于平坦，而 $h(n)$ 和 $s(n)$ 的变化速率会加快。

二阶系统的频率特性： $0 < r < 1, \quad 0 \le \theta \le \pi$





幅频特性

相频特性

10.5 Z变换的性质

Properties of the Z-transform

Z变换的许多性质与DTFT的性质相似，其推论方法也相同。这里主要讨论其ROC的变化。

1. 线性：

$$x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_1$$

$$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_2$$

则 $ax_1(n)+bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(z)+bX_2(z)$

ROC：包括 $R_1 \cap R_2$

❖ 如果在线性组合过程中出现零极点相抵消，则ROC可能会扩大。

2. 时移(右移)：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x(n-n_0) \leftrightarrow X(z)z^{-n_0}$

$\mathrm{ROC}: R$ **但在** $z=0$ **和** $|z|=\infty$ **可能会有增删。**

❖ 由于信号时移可能会改变其因果性，故会使ROC 在 $z=0$， $|z|=\infty$ 有可能改变。

3. Z域尺度变换：

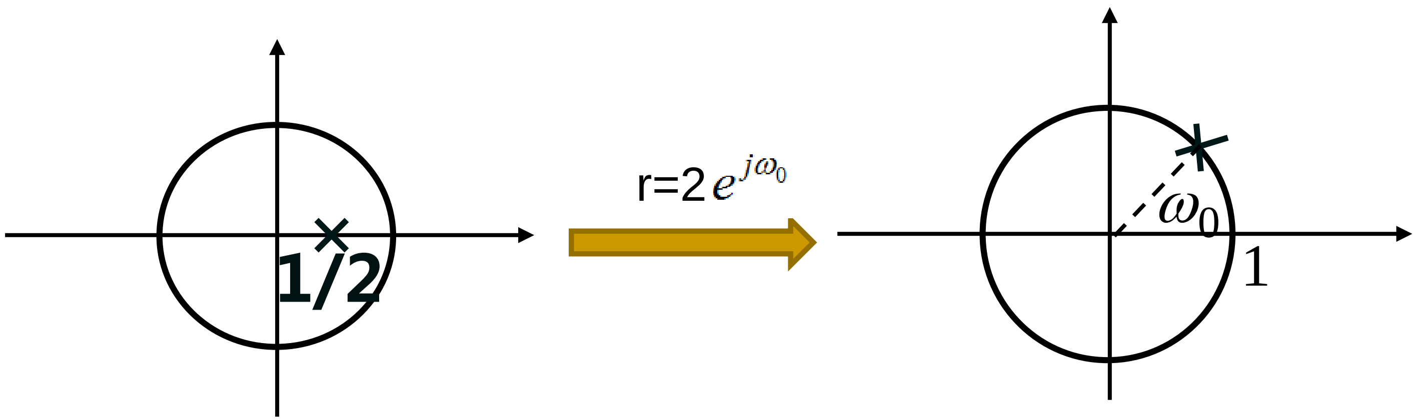
若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $z_0^{\ n} x(n) \leftrightarrow X(z/z_0) \qquad \mathrm{ROC}: |z_0| R$

$\because |z| \in R$ 时 $X(z)$ 收敛，故 $|z/z_0| \in R$ 时，$X(z/z_0)$ 收敛。

$\therefore |z| \in |z_0| R$ 当 $z_0 = e^{j\omega_0}$ 时，即为移频特性。

若 z_0 是一般复数 $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$，则 $X(z/z_0)$ 的零极点不仅要将 $X(z)$ 的零极点逆时针旋转一个角度 ω_0，而且在径向有 r_0 倍的尺度变化。



4. 时域反转：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$ $\quad$ $\mathrm{ROC}: R$

则 $x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$ $\quad$ $\mathrm{ROC}: 1/R$ **(收敛域边界倒置)**

❖ **信号在时域反转，会引起 $X(z)$ 的零、极点分布按倒量对称发生改变。**

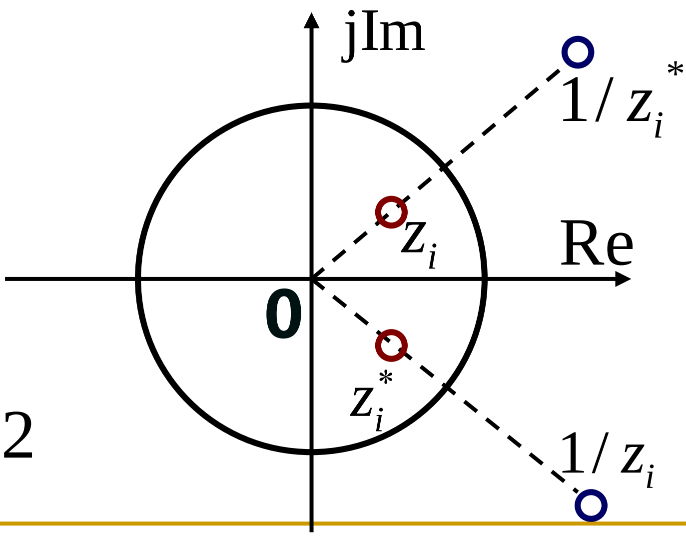
❖ 如果 z_i 是$X(z)$的零/极点,则$1/z_i$ 就是$X(z^{-1})$的零/极点。由于z_i^*也是$X(z)$的零/极点，因此 $1/z_i^*$ 也是$X(z^{-1})$ 的零/极点。

即： $X(z)$ 与$X(z^{-1})$ 的零极点呈共轭倒量对称。

例： 若 $X(z)$的ROC为

$$\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$$

则$X(z^{-1})$的ROC为 $\frac{2}{3}<|z|<2$



5. 时域内插:

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

$$x_k(n) = \begin{cases} x(n/k) & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

则 $x_k(n) \leftrightarrow X(z^k) \qquad \mathrm{ROC}: R^{1/k}$

证明：

$$X_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{k(n)} z^{-n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) z^{-rk} = X(z^k)$$

6. 共轭对称性：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \qquad \mathrm{ROC}: R$

- 当 $x(n)$ 是实信号时，$x^*(n) = x(n)$，于是有

$$X(z) = X^*(z^*)$$

表明如果 $X(z)$ 有复数零极点，必共轭成对出现。

7. 卷积性质：

若 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z)$ ROC: R_1

$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$ ROC: R_2

则 $x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$ ROC **包括** $R_1 \cap R_2$

如果在相乘时出现零极点抵消的情况则ROC可能会扩大。

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) X_2(z) z^{-m} = X_1(z) X_2(z)$$

该性质是LTI系统Z变换分析法的理论基础。

8. Z域微分：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$ $\mathrm{ROC}: R$

则 $nx(n) \leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$ $\mathrm{ROC}: R$

利用该性质可以方便地求出某些非有理函数$X(z)$的反变换，或具有高阶极点的$X(z)$的反变换。

例1. $X(z)=\ln(1+az^{-1})\qquad |z|>|a|$

$$\because \frac{dX(z)}{dz}=\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}\leftrightarrow a(-a)^{n-1}u(n-1)=nx(n)$$

$$\therefore x(n)=\frac{a}{n}(-a)^{n-1}u(n-1)=-\frac{1}{n}(-a)^{n}u(n-1)$$

例2： $X(z)=\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z|>|a|$

$$\because a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=-\frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad \therefore x(n)=na^n u(n)$$

9. 初值定理：

若 $x(n)$是因果信号，且 $x(n) \leftrightarrow X(z)$

则 $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

证明：将$X(z)$按定义式展开有：

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(n)z^{-n} + \cdots$$

显然当$z \longrightarrow \infty$ 时有 $\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$

10. 终值定理 ：

若 $x(n)$ 是因果信号，且 $x(n) \leftrightarrow X(z)$，$X(z)$ 除了在 $z=1$ 可以有一阶极点外，其它极点均在单位圆内，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$

证明：

$\because x(n)=0,\ n<0,\quad X(z)$ 除了在 $z=1$ 可以有单阶极点外，其它极点均在单位圆内，

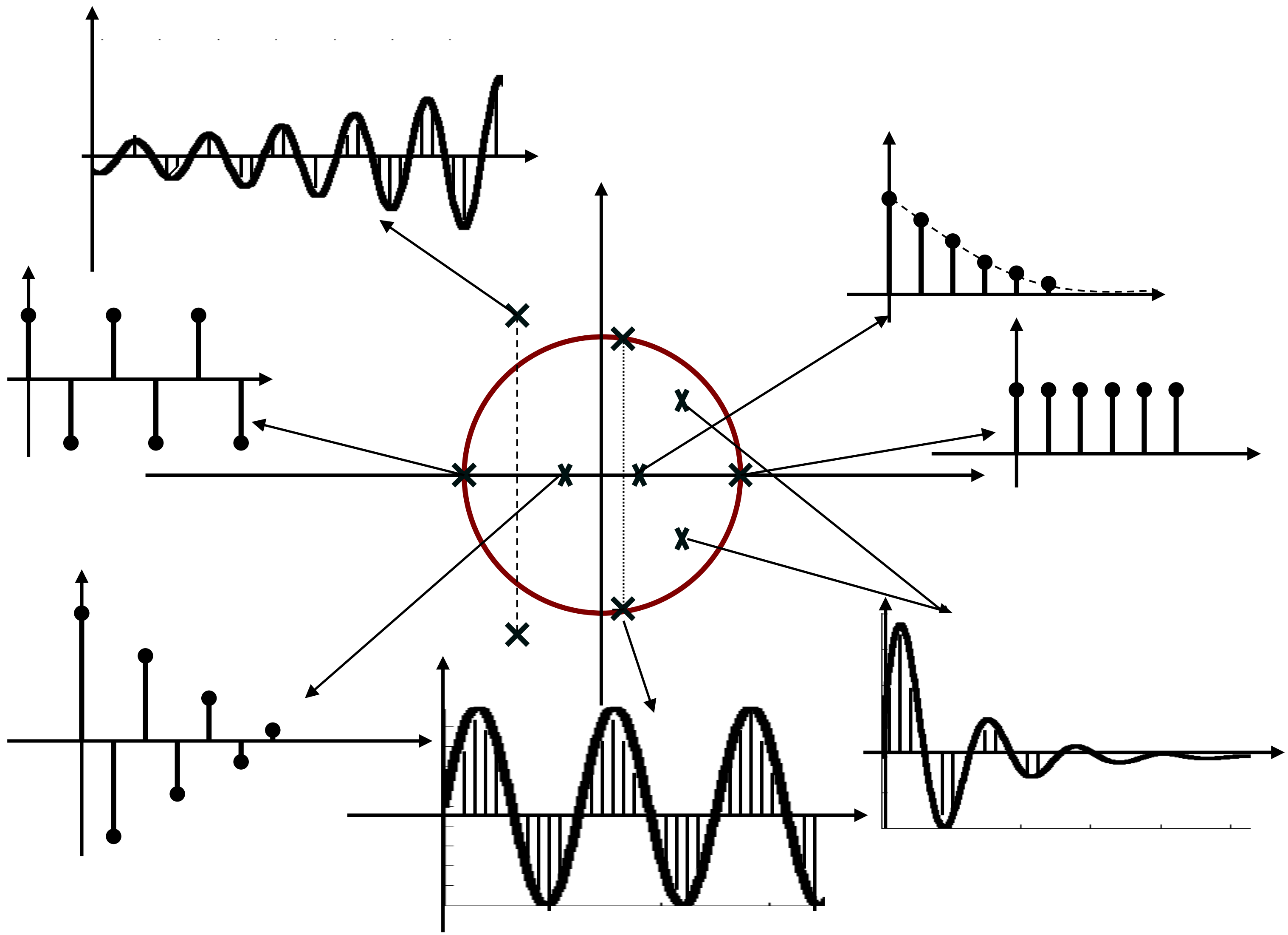
$\therefore (z-1)X(z)$ 在单位圆上无极点

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to 1}\sum_{n=-1}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=-1}^{m}[x(n+1)-x(n)]$$

$$=\lim_{m\to\infty}[x(0)-x(-1)+x(1)-x(0)+\cdots+x(m+1)-x(m)]$$

$$=\lim_{m\to\infty}x(m+1)=\lim_{n\to\infty}x(n)$$



信号的极点的位置与信号终值之间关系示意图

10.6 常用信号的Z变换对

Some Common Z-Transform Pairs

信号	变换	ROC
$\delta[n]$	1	全部z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	全部z，除去0（若m>0）或∞（若m<0）
$\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

基本连续时间傅里叶变换对

信号	变换	信号	变换
$x(t)=1$	$2\pi\delta(\omega)$	$\delta(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
$x(t)=\begin{cases}1, \lvert t\rvert<T_1\\0, \lvert t\rvert>T_1\end{cases}$	$\dfrac{2\sin\omega T_1}{\omega}$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t), \mathrm{Re}\{\alpha\}>0$	$\dfrac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$
$\dfrac{\sin Wt}{\pi t}$	$\begin{cases}1, \lvert\omega\rvert<W\\0, \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$	$t\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t), \mathrm{Re}\{\alpha\}>0$	$\dfrac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$
$u(t)$	$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t), \mathrm{Re}\{\alpha\}>0$	$\dfrac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^n}$
$\delta(t)$	1		

基本离散时间傅里叶变换对

信号	变换	信号	变换
$x[n]=1$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi l)$	$\delta[n-n_0]$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}$
$x[n]=\begin{cases}1, \lvert n\rvert<N_1\\0, \lvert n\rvert>N_1\end{cases}$	$\dfrac{\sin\omega(N_1+1/2)}{\sin(\omega/2)}$	$a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$
$\dfrac{\sin Wn}{\pi n}, 0<W<\pi$	$\begin{cases}1, \lvert\omega\rvert<W\\0, W<\lvert\omega\rvert<\pi\end{cases}$，周期为$2\pi$	$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^2}$
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$	$\dfrac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^r}$
$\delta[n]$	1		

基本拉普拉斯变换对

信号	变换	ROC	信号	变换	ROC
$u(t)$	$1/s$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$	$-u(-t)$	$1/s$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$	$-\mathrm{e}^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$
$\delta(t)$	1	全部 s			

基本 z 变换对

信号	z 变换	ROC	信号	z 变换	ROC
$\delta[n]$	1	全部 z	$\delta[n-m]$	z^{-m}	全部 z，除去 0 或 ∞
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$	$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| > \alpha$	$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| < \alpha$
$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| > \alpha$	$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| < \alpha$

10.7 利用Z变换分析与表征LTI系统

Analysis and Characterization of LTI Systems Using Z-Transforms

一.系统特性与 $H(z)$ 的关系:

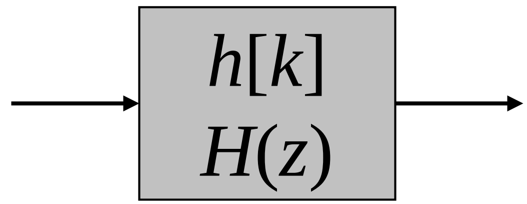
LTI系统的特性可以由 $h(n)$ 或 $H(e^{j\omega})$ 描述，因而也可以由 $H(z)$ 连同ROC来表征。

$H(z)$ 称为**系统函数**。系统的特性应该在系统函数中有所表现。根据卷积性质 $Y(z) = H(z)X(z)$

只要单位圆是在 $H(z)$ 的ROC内，将 $H(z)$ 在单位圆上求值（即 $z = e^{j\omega}$），$H(z)$ 就变成系统的频率响应。

$x[k]$

$X(z)$



$$y[k] = x[k] * h[k]$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

1. 因果性：如果LTI系统是因果的，则 $n<0$ 时有 $h(n)=0,$ 所以，$H(z)$ 的ROC是最外部极点的外部，并且包括 $|z|=\infty$ 。

2. 稳定性：若LTI系统稳定，则 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$，即 $h(n)$ 的DTFT存在，表明单位圆在 $H(z)$ 的ROC内。即 $H(z)$ 的ROC必包括单位圆。

因此，因果稳定的LTI系统其 $H(z)$ 的全部极点必须位于单位圆内，反之亦然。当 $H(z)$ 是关于 Z 的有理函数时，因果性要求 $H(z)$ 的分子阶数不能高于分母阶数。

二. LTI系统的Z变换分析法：

分析步骤：

1）由 $x(n)$ 求得 $X(z)$ 及其 $\mathrm{ROC}: R_1$ 。

2）由系统的描述求得 $H(z)$ 及其 $\mathrm{ROC}: R_2$ 。

3）由 $Y(z) = X(z)H(z)$ 得出 $Y(z)$ 并确定它的ROC包括 $R_1 \cap R_2$

4）对 $Y(z)$ 做反变换得到 $y(n)$ 。

例 已知一因果LTI系统的差分方程为 $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$

试确定系统的系统函数。若 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

，用z变换确定上述系统的输出 $y[n]$

$$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{4}z^{-2}Y(z)=X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2})}=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{1}{4}-j\sqrt{3}/4\right)z^{-1}\right]\left[1-\left(\frac{1}{4}+j\sqrt{3}/4\right)z^{-1}\right]}$$

极点为 $\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，收敛域为 $|z|>\left|\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{1}{2}$

$$X(z)=\frac{1}{1`-\frac{1}{2}z^{-1}},|z|>\frac{1}{2}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{1}{4}-\frac{j\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right]\left[1-\left(\frac{1}{4}+\frac{j\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right]\left[1-\frac{1}{2}z^{-1}\right]}$$

$$=\frac{-j\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left[1-\left(\frac{1}{4}-\frac{j\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right]}+\frac{j\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left[1-\left(\frac{1}{4}+\frac{j\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right]}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y[n]=-j\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{j\sqrt{3}}{4}\right)^{n}u[n]+j\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{j\sqrt{3}}{4}\right)^{n}u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

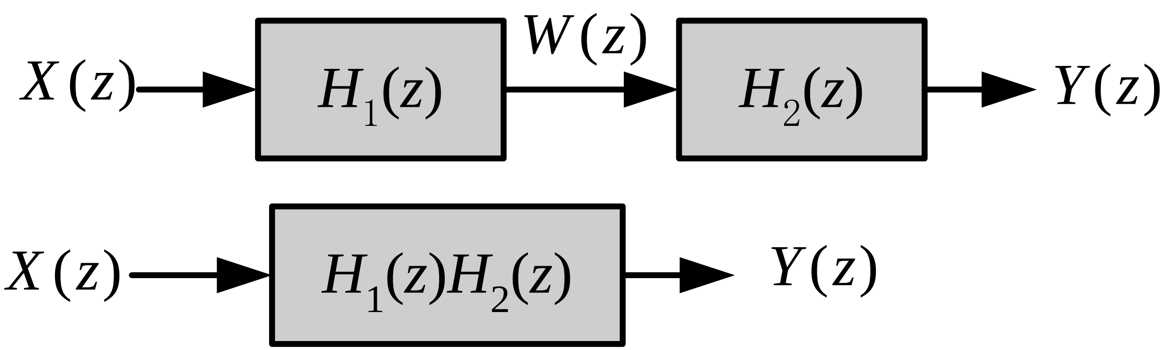
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)+1\right]u[n]$$

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

System Function Algebra and Block Diagram Representations

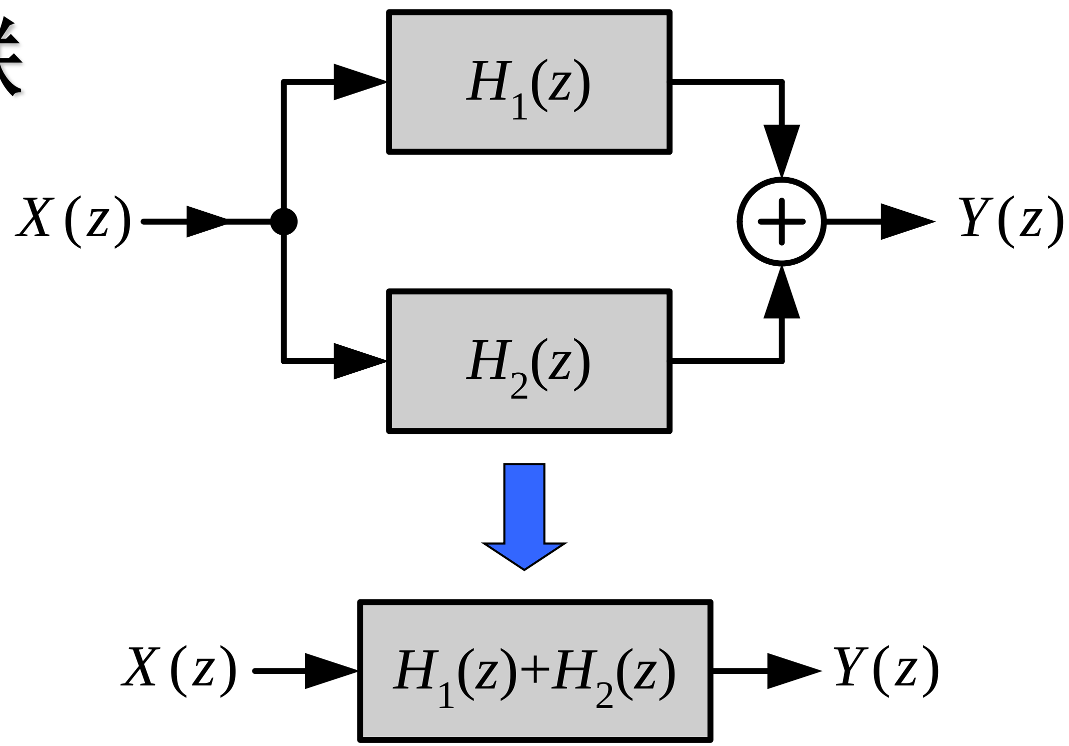
一. 系统互联的系统函数:

1. 级联：



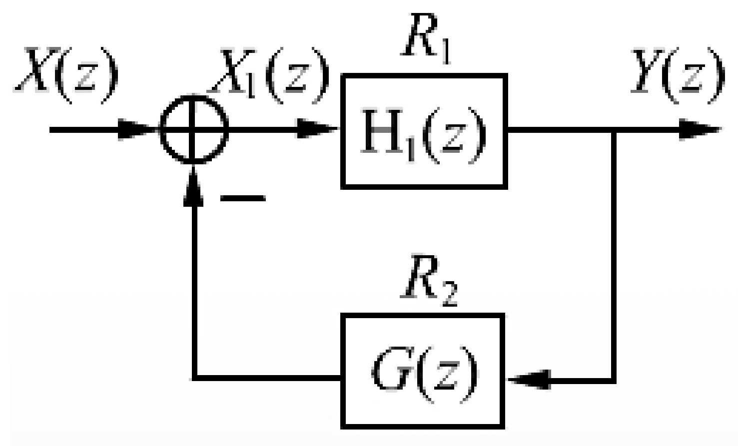
$$Y(z) = H_2(z)W(z) = H_2(z)H_1(z)X(z)$$

2. 系统的并联



$$Y(z)=H_1(z)X(z)+H_2(z)X(z)\;=[H_1(z)+H_2(z)]X(z)$$

3. 反馈联接：



由系统框图可列出如下方程：

$$X_1(z) = X(z) - Y(z)G(z)$$

$$Y(z) = X_1(z)H_1(z)$$

$$= X(z)H_1(z) - Y(z)H_1(z)G(z)$$

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)G(z)}$$

ROC：包括 $R_1 \cap R_2$

直接型结构

设差分方程中的 $m=n$，即

$$y[k]+\sum_{j=1}^{n} a_j y[k-j]=\sum_{i=0}^{n} b_i x[k-i]$$

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{n} b_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{n} a_j z^{-j}} = \underbrace{\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n} a_j z^{-j}}}_{H_1(z)} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} b_i z^{-i}}_{H_2(z)}$$

直接型结构

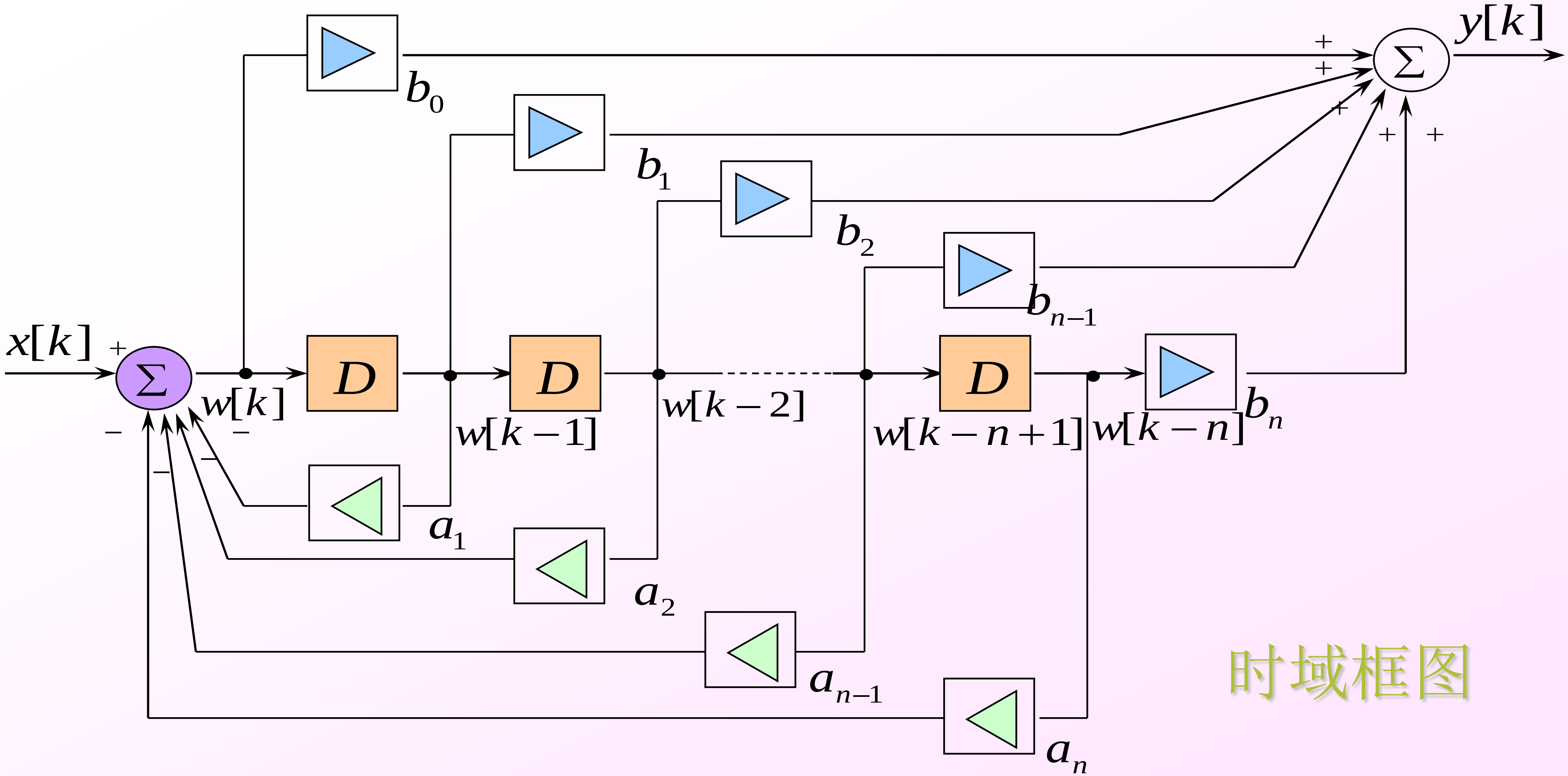
系统可以看成两个子系统的级联

$$H_1(z)=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n}a_j z^{-j}}=\frac{W(z)}{X(z)} \qquad H_2(z)=\sum_{i=0}^{n}b_i z^{-i}=\frac{Y(z)}{W(z)}$$

描述这两个系统的差分方程为

$$w[k]+\sum_{j=1}^{n}a_j w[k-j]=x[k] \qquad y[k]=\sum_{i=0}^{n}b_i w[k-i]$$

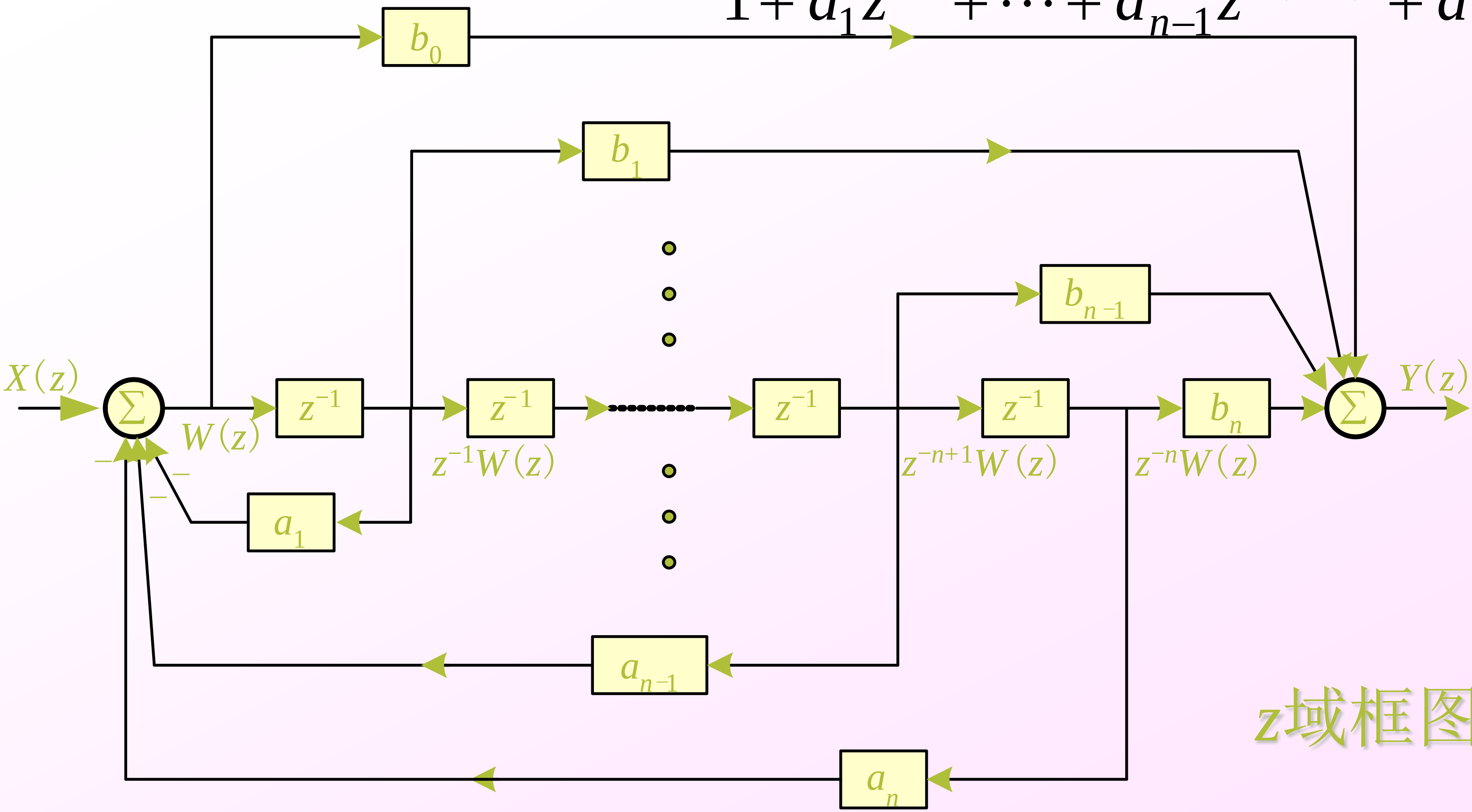
直接型结构



时域框图

直接型结构

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{n-1}z^{-(n-1)}+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_{n-1}z^{-(n-1)}+a_nz^{-n}}$$

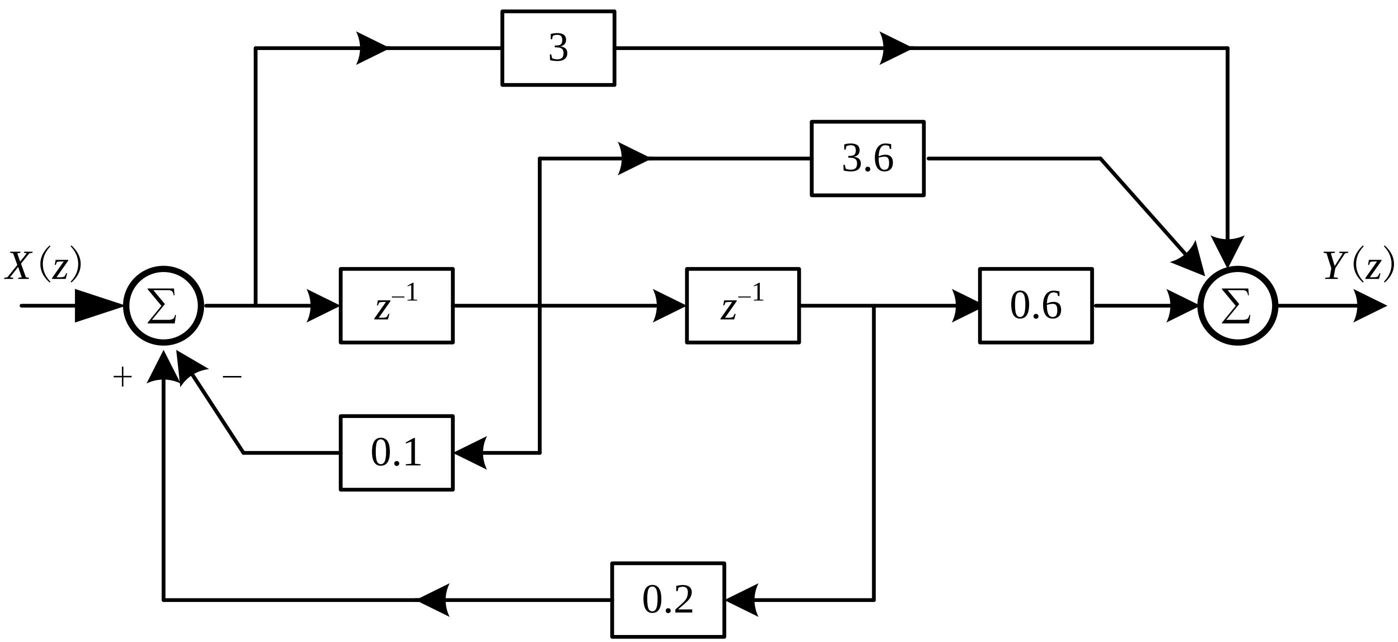


z域框图

例： 已知 $$H(z)=\frac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$$

试画出其直接型，级联型和并联型的模拟框图。

解： 1）直接型

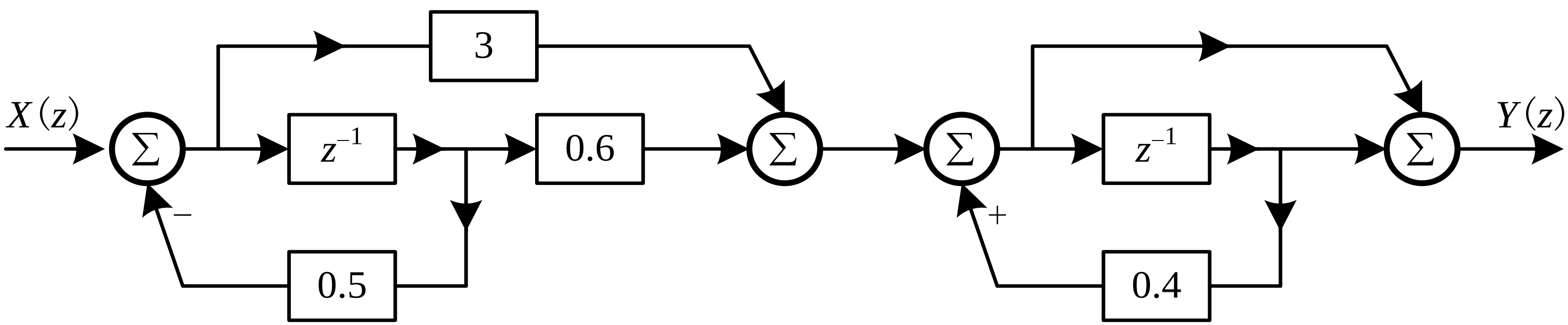


例： 已知 $H(z)=\dfrac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$

试画出其直接型，级联型和并联型的模拟框图。

解： 2）级联型

$$H(z)=\frac{3+0.6z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}\bullet\frac{1+z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$

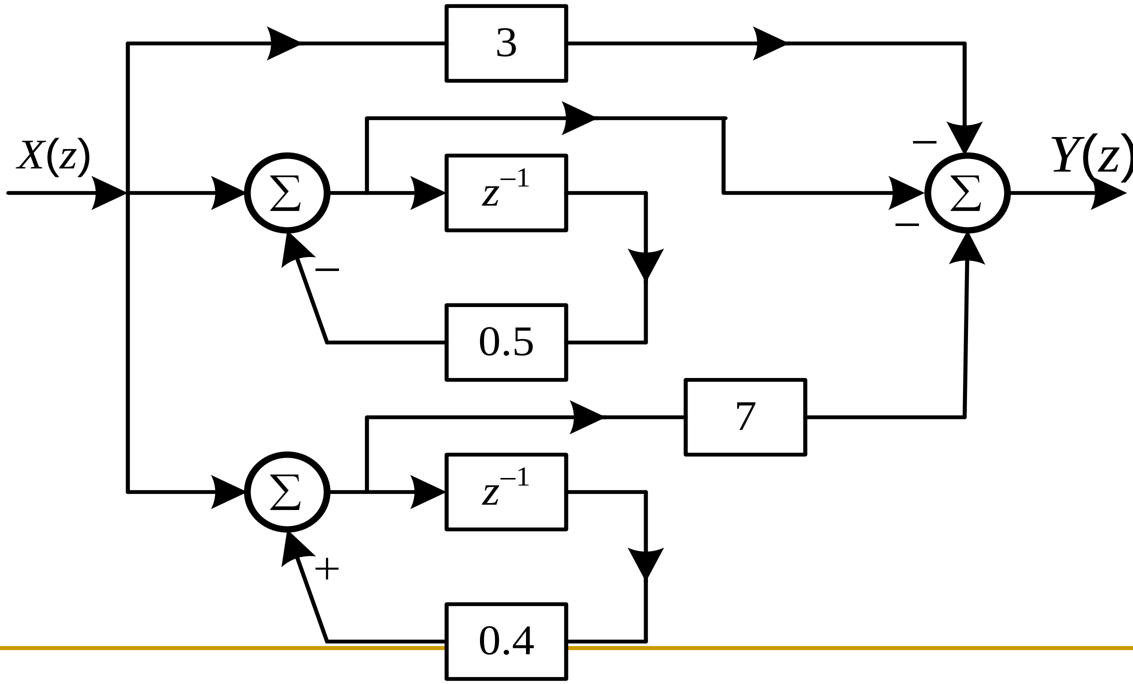


例： 已知 $$H(z)=\frac{3+3.6z^{-1}+0.6z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$$

试画出其直接型，级联型和并联型的模拟框图。

解： **3）并联型**

$$H(z)=3+\frac{0.5z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}+\frac{2.8z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$

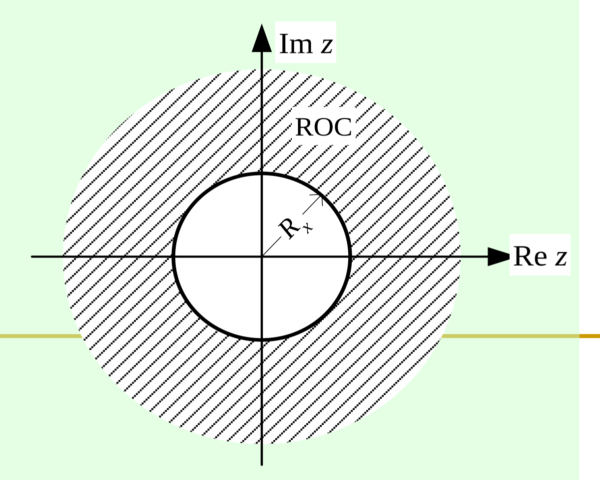


10.9 单边Z变换：The Unilateral Z-Transform

一. 单边Z变换：

$$\chi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

单边Z变换是双边Z变换的特例，也就是因果信号的双边Z变换。因此单边Z变换$\chi(z)$的ROC一定是最外部极点的外部，并且包括$|z|=\infty$。



所以在讨论单边Z变换时,不再强调其ROC。

它的反变换也一定与双边Z变换的反变换一致。

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

如果信号$x(n)$不是因果序列，则其双边Z变换$X(z)$与单边Z变换$\chi(z)$不同。

例1: $x(n)=a^n u(n)$

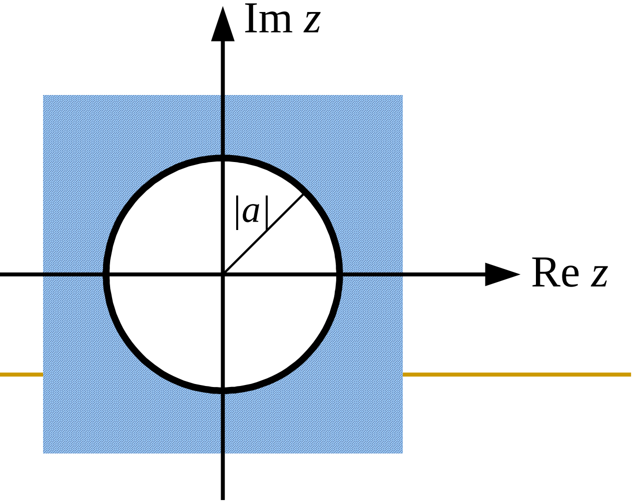
对其做双边Z变换有：

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

对其做单边Z变换有：

$$\chi(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

显然 $\chi(z)=X(z)$



例2. $x(n)=a^{n+1}u(n+1)$

对其做双边Z变换有：$X(z)=\dfrac{z}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$

对其做单边Z变换有：

$$\chi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n+1}z^{-n}=\frac{a}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

显然 $\chi(z)\neq X(z)$

这是因为 $x(n)$在$n<0$ 的部分对双边Z变换起作用，而对单边Z变换不起作用所致。

二. 单边Z变换的性质：

只要所涉及的信号是因果信号，单边Z变换除了时移特性与双边Z变换略显不同外，其它性质与双边Z变换的情况是一致的。

$$x[k] \xleftrightarrow{z} X(z), |z| > R_x$$

$$x_1[k] \xleftrightarrow{z} X_1(z), |z| > R_{x1} \qquad x_2[k] \xleftrightarrow{z} X_2(z), |z| > R_{x2}$$

2. 位移特性

- 因果序列的位移

$$x[k-n]\,u[k-n] \leftrightarrow z^{-n}X(z) \qquad |z|> R_x$$

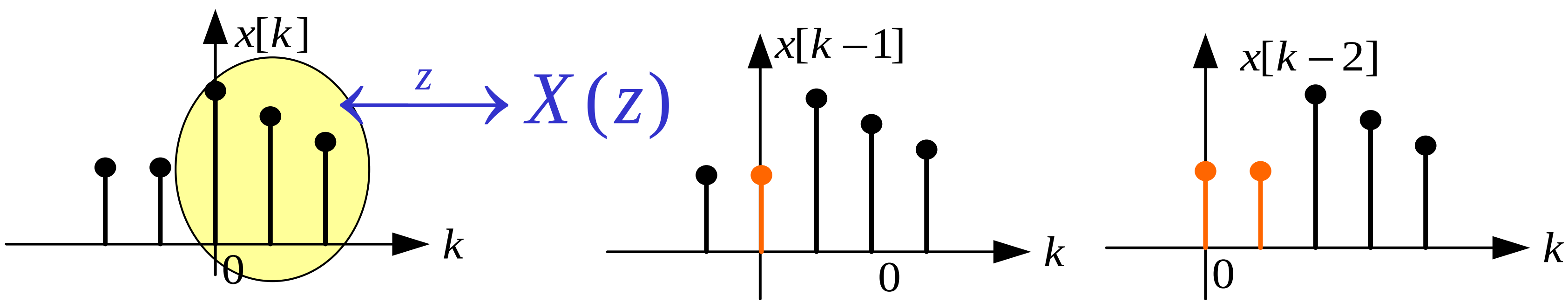
- 非因果序列的位移

$$Z\{x[k+n]u[k]\} = z^{n}[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x[k]z^{-k}] \qquad |z|> R_x$$

$$Z\{x[k-n]u[k]\} = z^{-n}[X(z) + \sum_{k=-n}^{-1} x[k]z^{-k}] \qquad |z|> R_x$$

2. 位移特性

证明 $$Z\{x[k-n]u[k]\}=z^{-n}[X(z)+\sum_{k=-n}^{-1}x[k]z^{-k}]$$



$$Z\{x[k-1]u[k]\}=z^{-1}X(z)+x[-1]$$

$$Z\{x[k-2]u[k]\}=z^{-1}Z\{x[k-1]u[k]\}+x[-2]$$

$$=z^{-2}X(z)+z^{-1}x[-1]+x[-2]$$

依此类推 可证上式成立

单边Z变换在将LCCDE变换为代数方程时，可以自动将方程的初始条件引入，因而在解决增量线性系统问题时特别有用。

三. 利用单边Z变换分析增量线性系统：

$$y(n)+3y(n-1)=x(n),$$

$$x(n)=u(n), \qquad y(-1)=1$$

则 $$\tilde{Y}(z)+3[z^{-1}\tilde{Y}(z)+y(-1)]=\chi(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y}(z) &= \frac{1}{1+3z^{-1}}[\chi(z)-3] \\
&= \underbrace{\frac{\chi(z)}{1+3z^{-1}}}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{\frac{-3}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}} = H(z)\chi(z) + \underbrace{\frac{-3}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1/4}{1-z^{-1}} - \frac{9/4}{1+3z^{-1}}
$$

$$
\therefore y(n) = [\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{强迫响应}} - \frac{9}{4}\underbrace{(-3)^n}_{\text{自然响应}}]u(n) = \frac{1}{4}[1-9(-3)^n]u(n)
$$

$$
= \frac{1}{4}[1-(-3)^{n+2}]u(n)
$$

10.10 小结：Summary

1. 讨论了对离散时间信号和系统进行Z变换分析的方法，整个讨论方法及大部分结论与第九章相对应。

2. 与拉氏变换的情况对照，可以发现S平面与Z平面之间存在着一种映射关系， $z = e^{sT}$ 就是这种映射关系。

将连续时间信号$x_c(t)$采样，可以得到：

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$

对其做拉氏变换有：$X_p(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-snT}$

对采样所得到的样本序列 $x(n) = x_c(nT)$ **做Z变换有：**

$$x(n) \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)z^{-n}$$

比较两式，可以得出S平面与Z平面之间有：

$z = e^{sT}$ —— **S平面与Z平面之间的映射关系**

$$\because z = re^{j\omega}, s = \sigma + j\Omega \qquad \therefore r = e^{\sigma T}, \omega = \Omega T$$

映射过程：

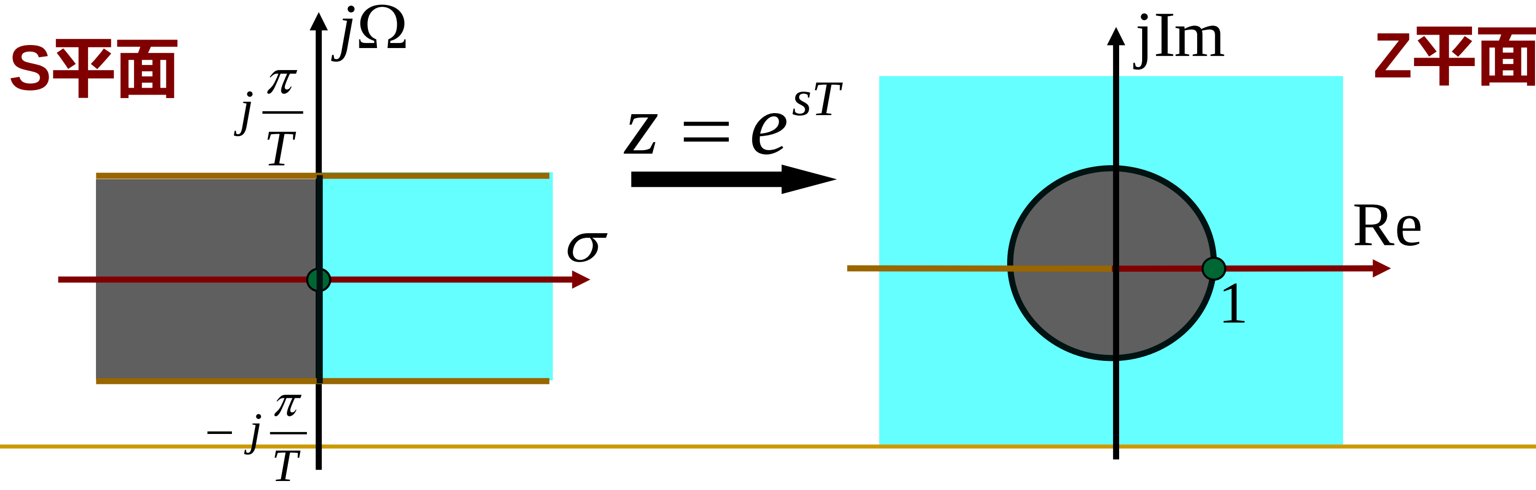
$$\sigma < 0, \quad r < 1$$

$$\sigma > 0, \quad r > 1$$

$$\sigma = 0, \quad r = 1$$

$$-\pi \le \omega \le \pi, \quad -\frac{\pi}{T} \le \Omega \le \frac{\pi}{T}$$

$$\omega = 0, \quad \Omega = 0$$



这种映射关系在数字信号处理，特别是数字系统设计中是非常重要的。明确了这种关系就很容易对Z 变换与拉氏变换的关系及差异之处有更清楚的认识。

3. 利用Z变换分析LTI系统，较之DTFT具有更方便、更广泛适用的优点。

4. 单边Z变换是分析增量线性系统的有力工具。