

第4章 连续时间傅立叶变换

本章主要内容：

- 连续时间傅立叶变换
- 傅立叶级数与傅立叶变换之间的关系
- 傅立叶变换的性质。
- 系统的频率响应及系统的频域分析。

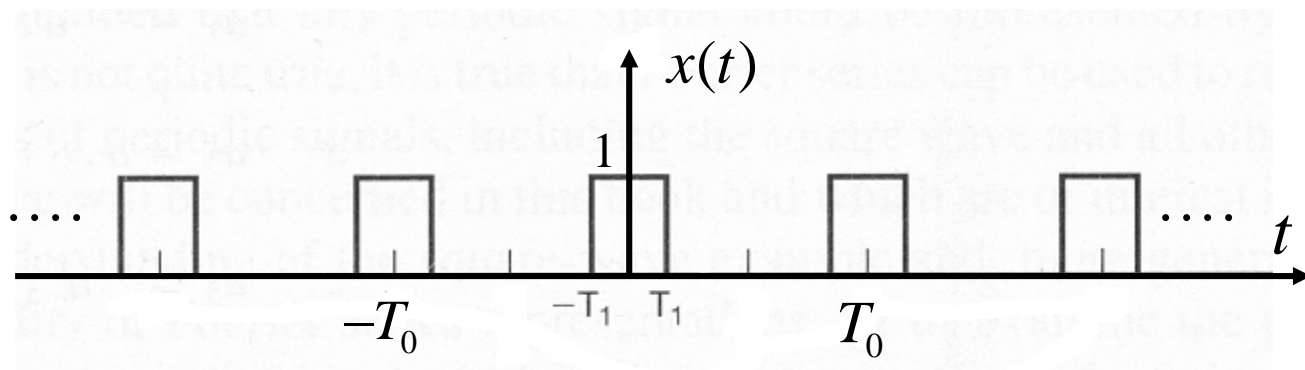
4.0 引言 Introduction

在工程应用中有相当广泛的信号是非周期信号，对非周期信号应该如何进行分解，什么是非周期信号的频谱表示，线性时不变系统对非周期信号的响应如何求得，就是这一章要解决的问题。

在时域可以看到，如果一个周期信号的周期趋于无穷大，则周期信号将演变成一个非周期信号；反过来，如果将任何非周期信号进行周期性延拓，就一定能形成一个周期信号。

我们把非周期信号看成是周期信号在周期趋于无穷大时的极限，从而考查连续时间傅立叶级数在 T 趋于无穷大时的变化，就应该能够得到对非周期信号的频域表示方法。

周期性矩形脉冲信号的频谱



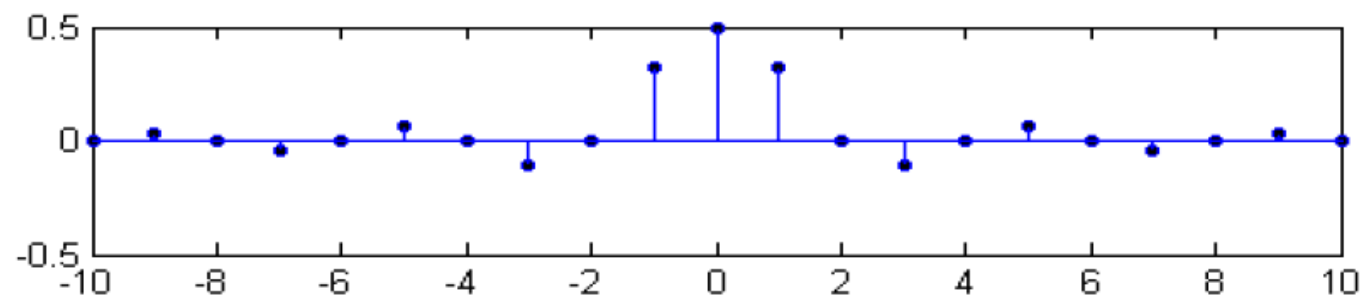
$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0}$$

$$= \frac{2T_1}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1} = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sa}(k\omega_0 T_1) = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{2T_1}{T_0} k\right)$$

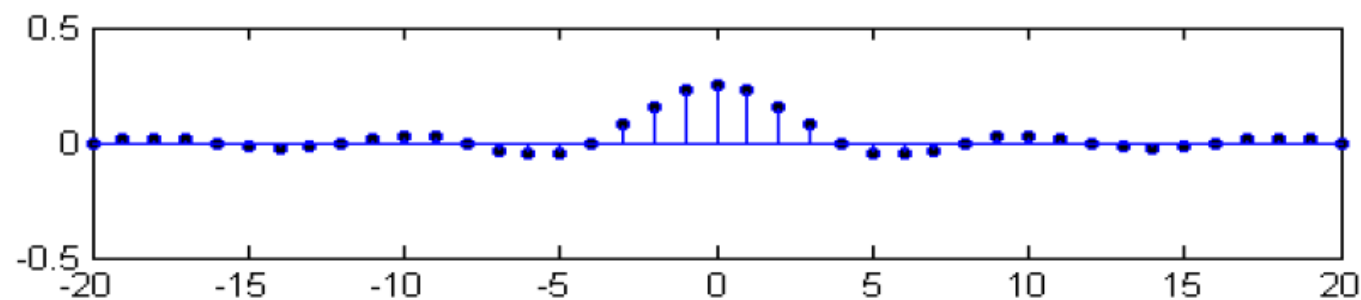
其中

$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

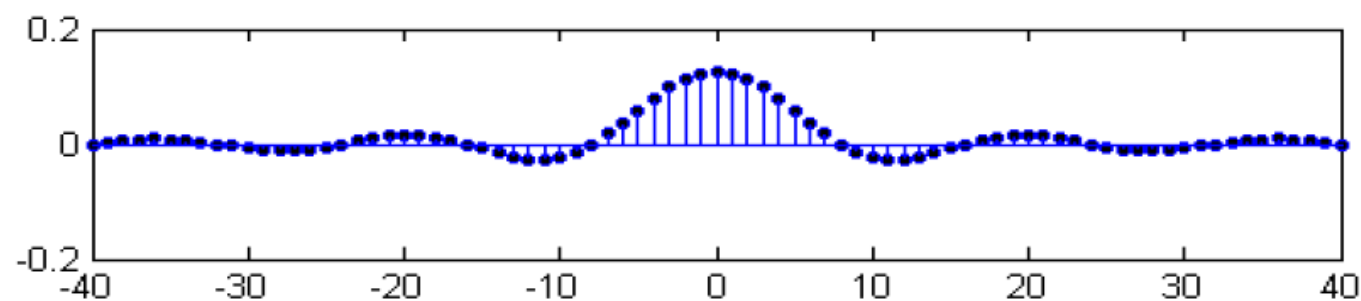
T_1 不变 $T_0 \uparrow$ 时



$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{8}$$

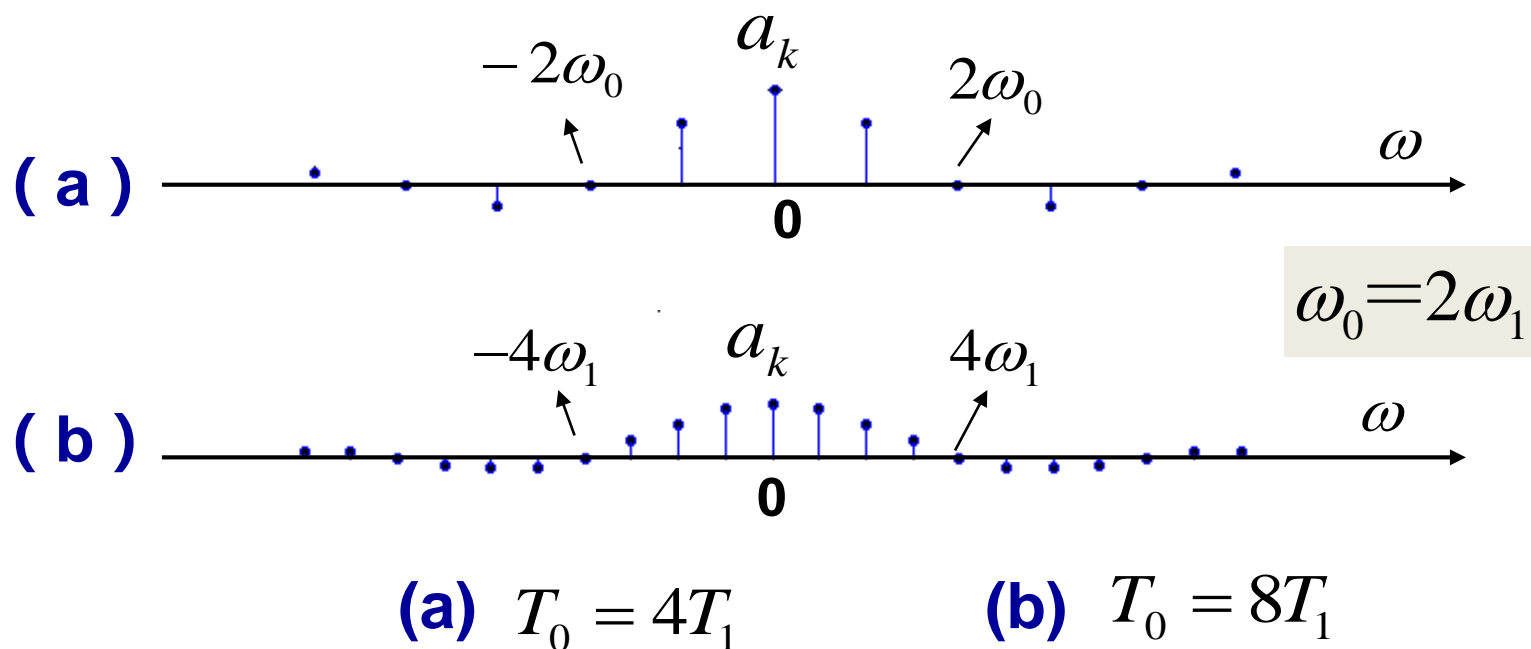
4.1 非周期信号的表示—连续时间傅立叶变换

Representation of Aperiodic Signals: The Continuous-Time Fourier Transform

一.从傅立叶级数到傅立叶变换

我们已经看到，周期性矩形脉冲，当周期 T_0 增大时，频谱的幅度随 T_0 的增大而下降；谱线间隔随 T_0 的增大而减小；但频谱的包络不变。

再次考察周期性矩形脉冲的频谱图：



当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时，周期性矩形脉冲信号将演变成为非周期的单个矩形脉冲信号。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

当 $T_0 \rightarrow \infty$ **时,** $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\omega, \quad k\omega_0 \rightarrow \omega, \quad \Sigma \rightarrow \int$

由于 $a_k = \frac{2T_1}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1}$ **也随** T_0 **增大而减小, 并最终趋于0, 考查** $T_0 a_k$ **的变化, 它在** $T_0 \rightarrow \infty$ **时应该是有限的。**

于是, 我们推断出: 当 $T_0 \rightarrow \infty$ **时, 离散的频谱将演变为连续的频谱。**

由傅立叶级数推导傅立叶变换

傅立叶级数为

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{1/T} e^{jk\omega_0 t} \frac{1}{T}, \frac{a_k}{1/T} = \int_T x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

做**T**趋近无穷的极限

$$\frac{1}{T} \rightarrow df = \frac{1}{2\pi} d\omega, k\omega_0 \rightarrow \omega, \sum \rightarrow \int, X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a_k}{1/T}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

这一对关系被称为连续时间傅立叶变换对。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{-----傅立叶反（逆）变换}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \text{-----傅立叶正变换}$$

$$x(t) = F^{-1}[X(j\omega)], X(j\omega) = F[x(t)]$$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

时域 频域

与周期信号傅立叶级数对比有: $a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0}$

这表明: 周期信号的频谱就是与它相对应的非周期信号频谱的样本, 即时域周期化频域离散化。

此式表明，非周期信号可以分解成无数多个频率连续分布、振幅为 $\frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega$ 的复指数信号之和。

由于 $X(j\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 a_k = \lim_{T_0 \rightarrow \infty, f_0 \rightarrow 0} \frac{a_k}{f_0}$ 具有频谱随频率分布的物理含义，因而称 $X(j\omega)$ 为**频谱密度函数**，也可称为其时域信号的**傅立叶变换**。

周期信号的频谱是对应的非周期信号**频谱的样本**；而非周期信号的频谱是对应的周期信号**频谱的包络**。

二. 傅立叶变换的收敛

既然傅立叶变换的引出是从周期信号的傅立叶级数表示出发，讨论周期趋于无穷大时的极限得来的，傅立叶变换的收敛问题就应该和傅立叶级数的收敛相一致。

也有相应的两组条件：

1. 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ 则 $X(j\omega)$ 存在。

这表明能量有限的信号其傅立叶变换一定存在。

2. Dirichlet 条件

a. 绝对可积条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

b. 在任何有限区间内， $x(t)$ 只有有限个极值点，且极值有限。

c. 在任何有限区间内， $x(t)$ 只有有限个第一类间断点。

应该指出：这些条件只是傅立叶变换存在的充分条件。

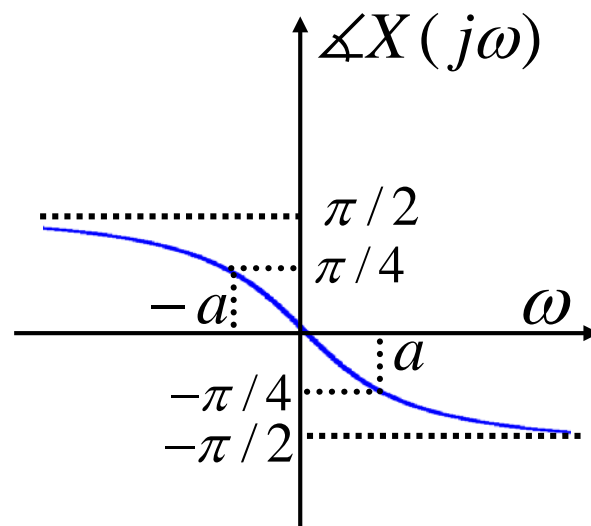
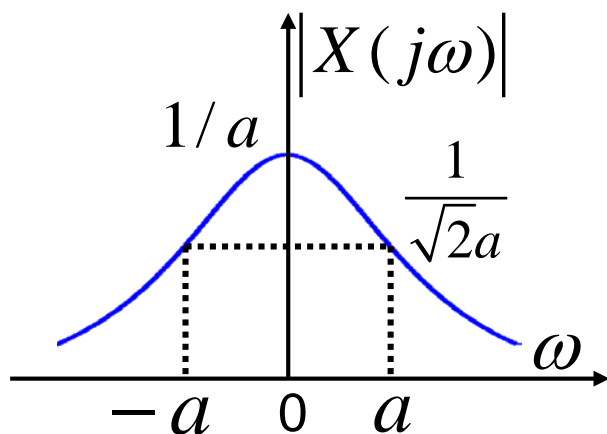
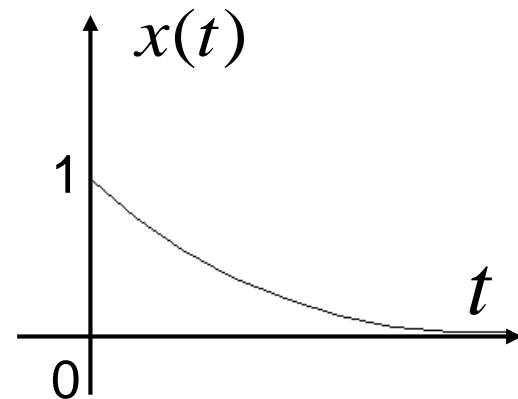
三.常用信号的傅立叶变换：

1. $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

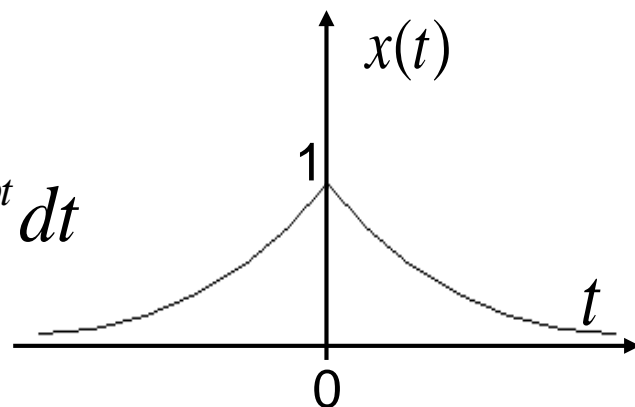
$$\angle X(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{a}$$



2. $x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

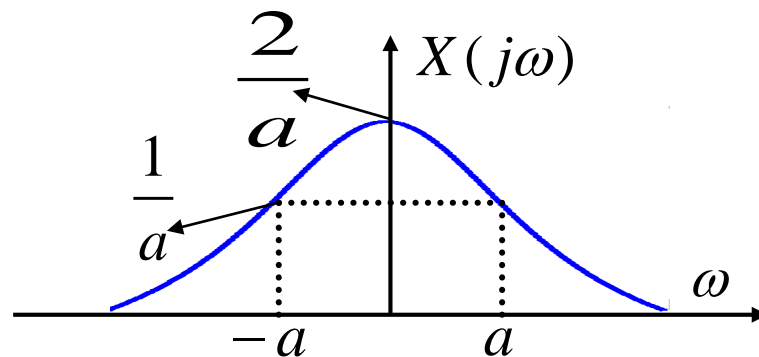
$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



对此例有 $|X(j\omega)| = X(j\omega)$

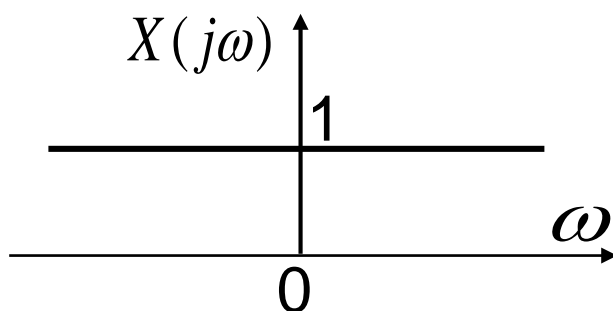
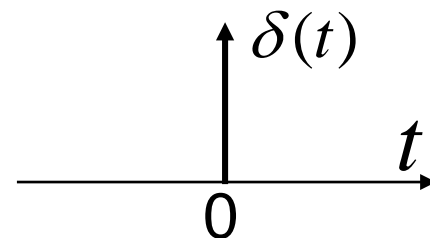
$$\angle X(j\omega) = 0$$

此时可以用一幅图表示信号的频谱。



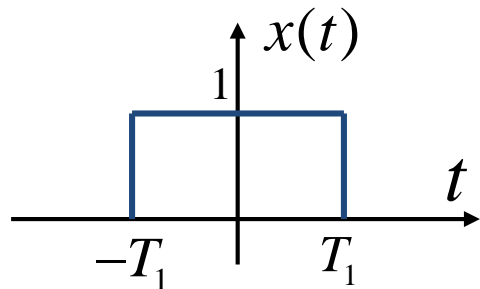
3. $x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$



这表明 $\delta(t)$ 中包括了所有的频率成分，且所有频率分量的幅度、相位都相同。因此，系统的单位冲激响应 $h(t)$ 才能完全描述一个LTI系统的特性， $\delta(t)$ 才在信号与系统分析中具有如此重要的意义。

4. 矩形脉冲: $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$



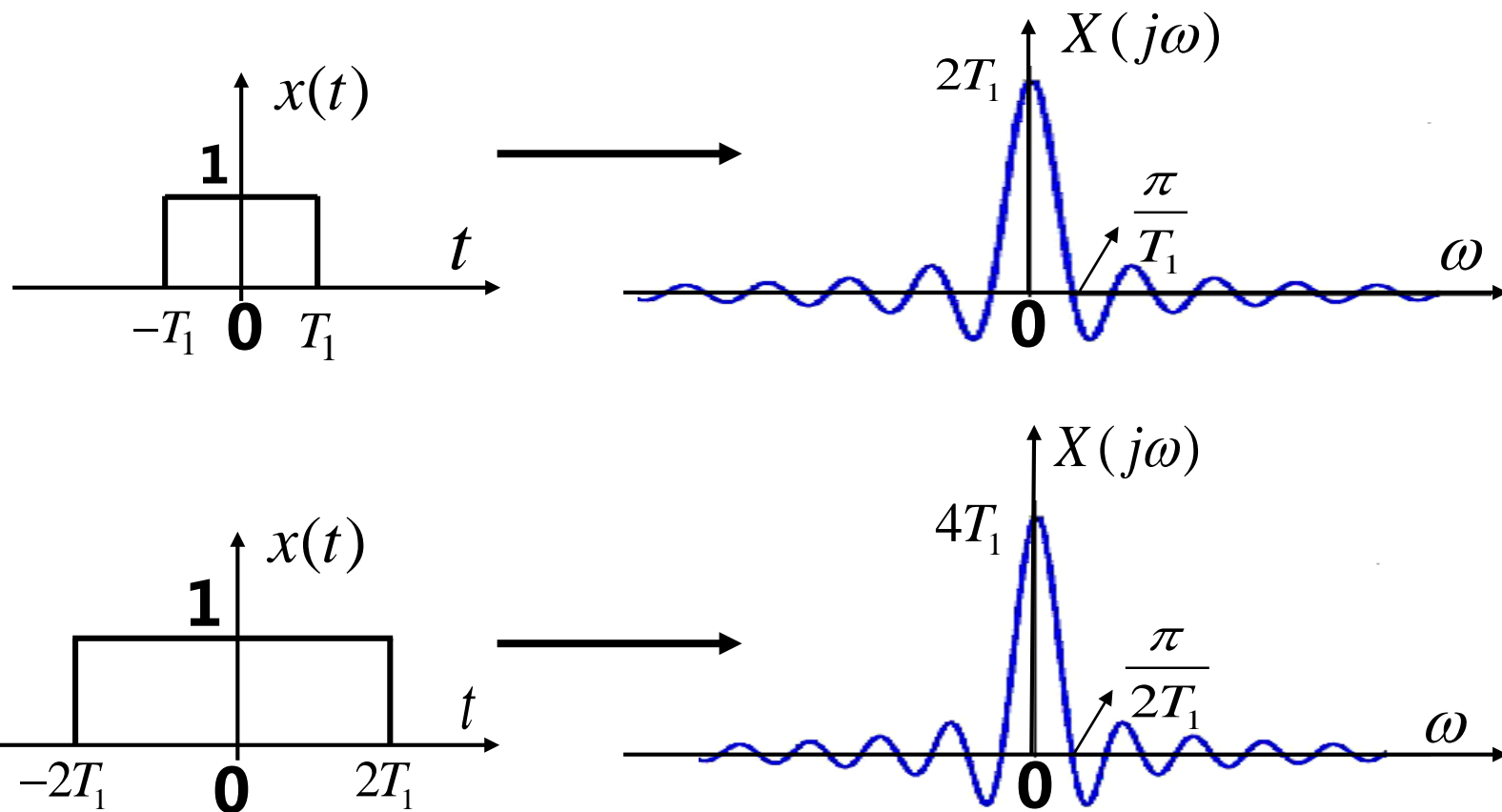
$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} = \frac{2T_1 \sin \omega T_1}{\omega T_1}$$

$$= 2T_1 \text{Sa}(\omega T_1) = 2T_1 \text{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

显然，将 $X(j\omega)$ 中的 ω 代之以 $k\omega_0$ 再乘以 $\frac{1}{T_0}$ ，即是相应周期信号的频谱

$$a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sa}(k\omega_0 T_1) = \frac{2T_1}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1}$$

不同脉冲宽度对频谱的影响



可见，信号在时域和频域之间有一种相反的关系。

5.

$$\text{sgn}(t) \xleftrightarrow{F} \frac{2}{j\omega}$$

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

$$\xleftrightarrow{F} \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega}, \text{Re}(a) > 0$$

6.

$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$

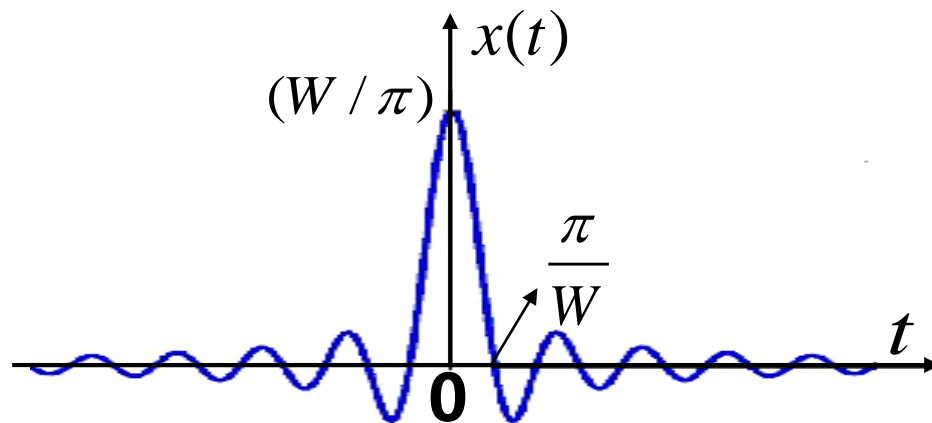
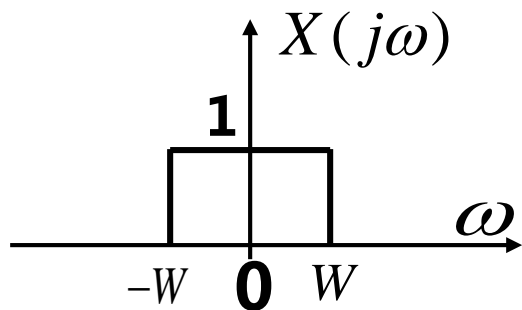
$$1 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} P_{\tau}(t) \xleftrightarrow{F} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) =$$

$$2\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\text{蕴涵} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

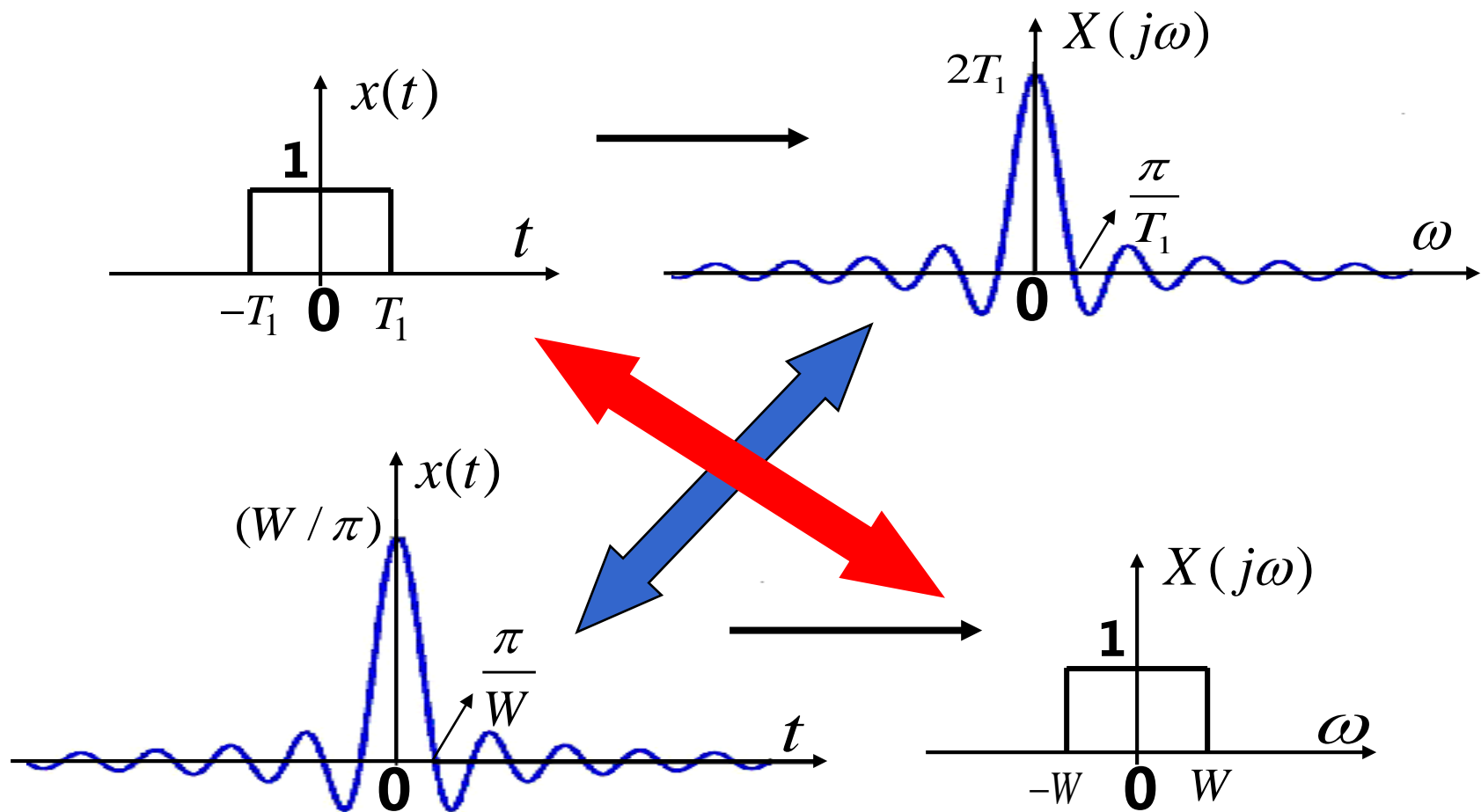
7.
$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad (\text{称为理想低通滤波器})$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt) = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



与矩形脉冲情况对比，可以发现信号在时域和频域之间存在一种对偶关系。

对偶关系可表示如下:



同时可以看到，信号在时域和频域之间也有一种相反的关系。即信号在时域脉冲越窄，则其频谱主瓣越宽，反之亦然。

对例7. 我们可以想到，如果 $W \rightarrow \infty$ ，则 $x(t)$ 将趋于一个冲激。

8. 虚指数和振荡信号的付氏变换

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\because 1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

$$\cos \omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\sin \omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi j[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

由其频谱图解释单频信号。

9.

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(t)] \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

四. 信号的频谱和带宽 **B**(Bandwidth of Signals):

1 频谱

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$|X(j\omega)|$ — — — ω , 振幅谱

$\varphi(\omega)$ — — — — ω , 相位谱

将它们绘成曲线, 称为频谱图。

2 带宽 **B** 的定义

(1) 理论定义 $B = f_H - f_L$

有时传输时只要保证将占据信号能量主要部分的频率分量有效传输即可。为此有以下的工程定义:

一般情况下，信号的主要能量总是集中于低频分量。另一方面，传输信号的系统都具有自己的频率特性。因而，工程中在传输信号时，没有必要一定要把信号的所有频率分量都有效传输，而只要保证将占据信号能量主要部分的频率分量有效传输即可。

1. $|X(j\omega)|$ 下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时对应的频率范围，此时带内信号分量占有信号总能量的1/2。

2. 对包络是 $\text{Sa}(x)$ 形状的频谱，通常定义主瓣宽度(即频谱第一个零点内的范围)为信号带宽。

以矩形脉冲为例，按带宽的定义，可以得出，脉宽乘以带宽等于常数C (脉宽带宽积)。这清楚地反映了频域和时域的相反关系。

4.2 周期信号的傅立叶变换

The Fourier Transformation of Periodic Signals

到此为止，我们对周期信号用傅立叶级数表示，非周期信号用傅立叶变换表示。因为数学描述方法的不一致，在某些情况下，会给我们带来不便。

考查 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 所对应的信号

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

这表明周期性复指数信号的频谱是一个冲激。

若 $x(t) = e^{jk\omega_0 t}$ **则** $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$

于是当把周期信号表示为傅立叶级数时，因为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

就有 $X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$

——周期信号的傅立叶变换表示

一、周期信号的傅立叶变换公式

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k, x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

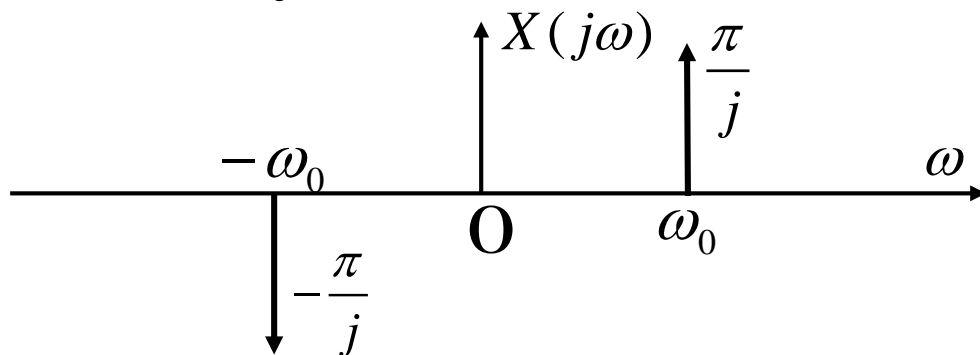
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

这表明：周期信号的傅立叶变换由一系列冲激组成，每一个冲激分别位于信号的各次谐波的频率处，其冲激强度正比于对应的傅立叶级数的系数 $2\pi a_k$ 。

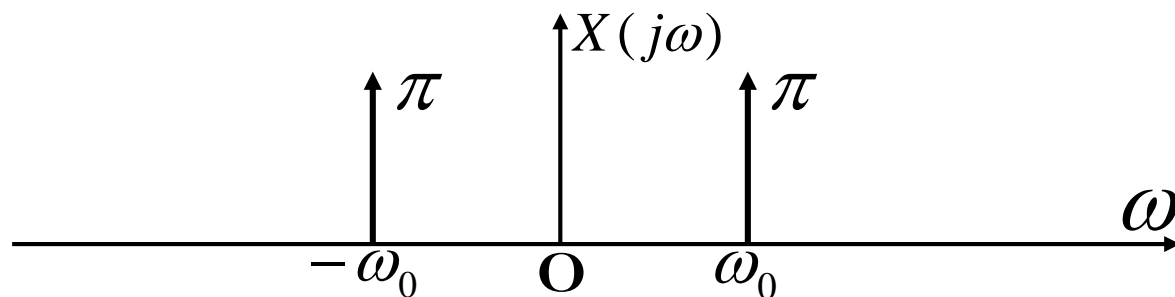
例1： $x(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$



例2 : $x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$

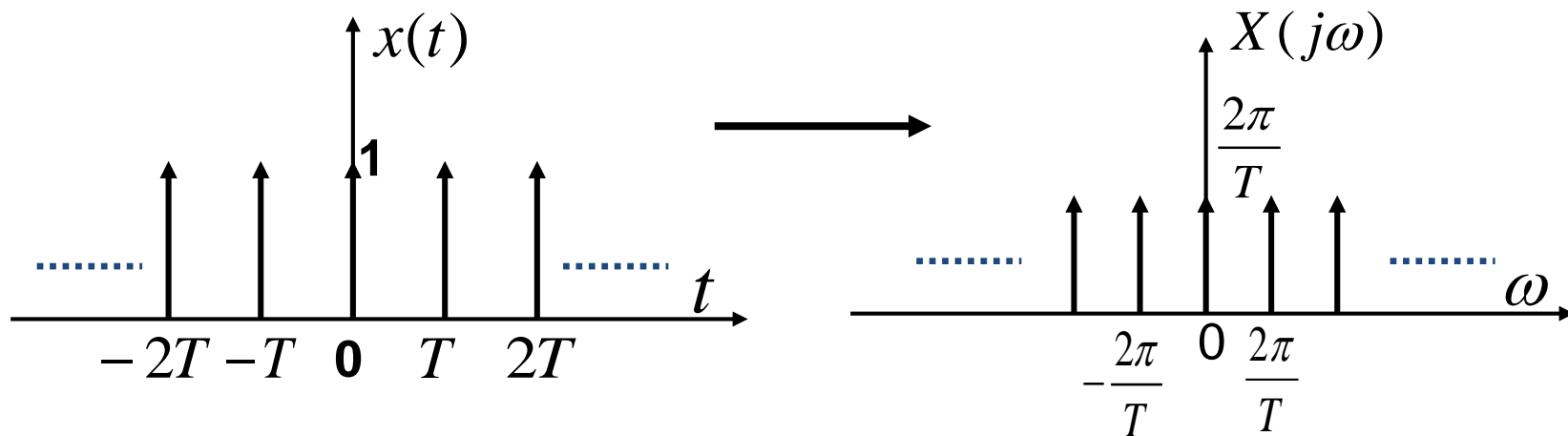
$$X(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



例3 : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ —— **均匀冲激串**

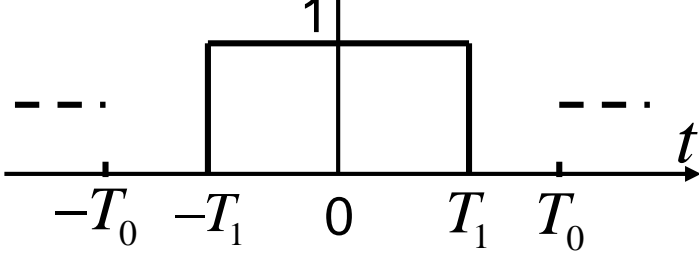
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$$

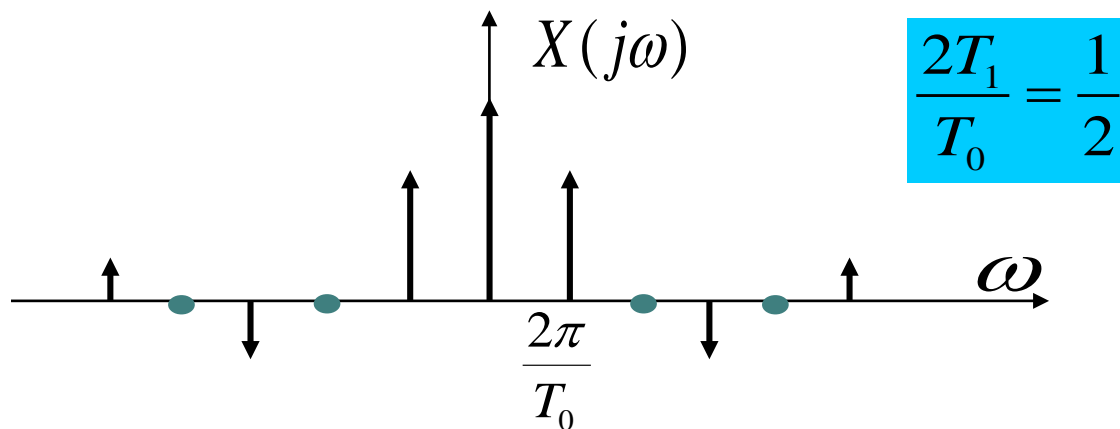


$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$$

例4. 周期性矩形脉冲

$$a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{2\pi}{T_0} kT_1\right) = \frac{\sin \frac{2\pi}{T_0} T_1 k}{\pi k}$$


$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} kT_1\right)}{k} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T_0} k\right)$$



傅立叶变换和傅立叶级数的关系

假设非周期信号为 $x(t)$ ，以它构成周期为 T 的周期信号为 $x_T(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \quad x_T(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

(1) 已知 a_k ，代入公式

$$x_T(t) \xleftrightarrow{F} X_T(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

可求出周期信号的傅立叶变换。

(研究对象都为 $x_T(t)$)

(2) 借助于FT来计算FS的公式

由时域周期化，频域离散化可得

$$a_k = \frac{X(j\omega)}{T} \Big|_{\omega=k\omega_0}$$

这就是借助于FT来计算FS的公式，也是一种FS的计算方法，当计算出FS系数后，再带入

$$x_T(t) \xleftrightarrow{F} X_T(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

可求出周期信号的傅立叶变换。

4.3 连续时间傅立叶变换的性质

Properties of the Continuous-Time Fourier Transform

讨论傅立叶变换的性质，旨在通过这些性质揭示信号时域特性与频域特性之间的关系，同时掌握和运用这些性质可以简化傅立叶变换对的求取。

1. 线性: Linearity

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega), \quad y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$

则 $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$

2. 时移: Time Shifting

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ **则** $x(t - t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

这表明信号的时移只影响它的相频特性，其相频特性会增加一个线性相移。

$$\text{Proof: } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$\text{or } x(t - t_0) \xrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

例4.9 为了说明傅里叶变换线性和时移性质的用处, 现考虑对图4.15(a)的信号 $x(t)$ 求其傅里叶变换。

首先看出, $x(t)$ 可以表示成如下的线性组合:

$$x(t) = \frac{1}{2}x_1(t-2.5) + x_2(t-2.5)$$

其中信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是如图4.15(b)和图4.15(c)所示的矩形脉冲。利用例4.4的结果, 分别有

$$X_1(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega}$$

和

$$X_2(j\omega) = \frac{2 \sin(3\omega/2)}{\omega}$$

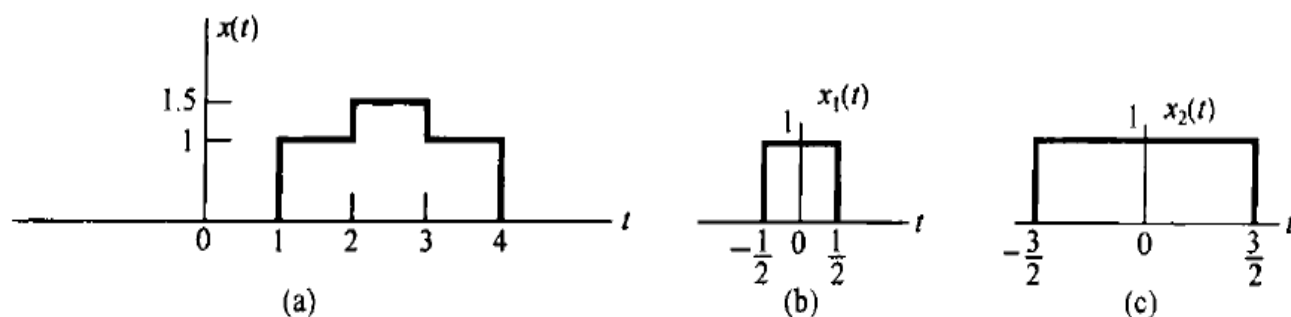


图4.15 将一个信号分解为两个简单信号的线性组合。(a) 例4.9中的信号 $x(t)$; (b) 和 (c) 用来表示 $x(t)$ 的两个简单信号

最后, 利用傅里叶变换的线性和时移性质, 可得

$$X(j\omega) = e^{-j5\omega/2} \left\{ \frac{\sin(\omega/2) + 2 \sin(3\omega/2)}{\omega} \right\}$$

3. 共轭对称性: Conjugate and Symmetry

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ **则** $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$

由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ **可得**

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt$$

所以 $X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt$

即 $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$

• **若** $x(t)$ **是实信号**，**则** $x(t) = x^*(t)$

于是有: $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

- 若 $X(j\omega) = \text{Re}[X(j\omega)] + j \text{Im}[X(j\omega)]$ 则可得

$$\text{Re}[X(j\omega)] = \text{Re}[X(-j\omega)] \quad \text{即实部是偶函数}$$

$$\text{Im}[X(j\omega)] = -\text{Im}[X(-j\omega)] \quad \text{虚部是奇函数}$$

- 若 $X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$ 则可得出

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \quad \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$$

即：模是偶函数，相位是奇函数

- **如果** $x(t) = x(-t)$ **即信号是偶函数。则**

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau} d\tau = X(-j\omega) \end{aligned}$$

表明：实偶信号的傅立叶变换是偶函数。

又因为 $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ **所以** $X(j\omega) = X^*(j\omega)$

表明 $X(j\omega)$ **是实函数。**

- **若** $x(t) = -x(-t)$ **即信号是奇函数，同样可以得出：**

$X(j\omega) = -X(-j\omega)$ **表明** $X(j\omega)$ **是奇函数**

$X(j\omega) = -X^*(j\omega)$ **表明** $X(j\omega)$ **是虚函数**

• **若** $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ **则有:**

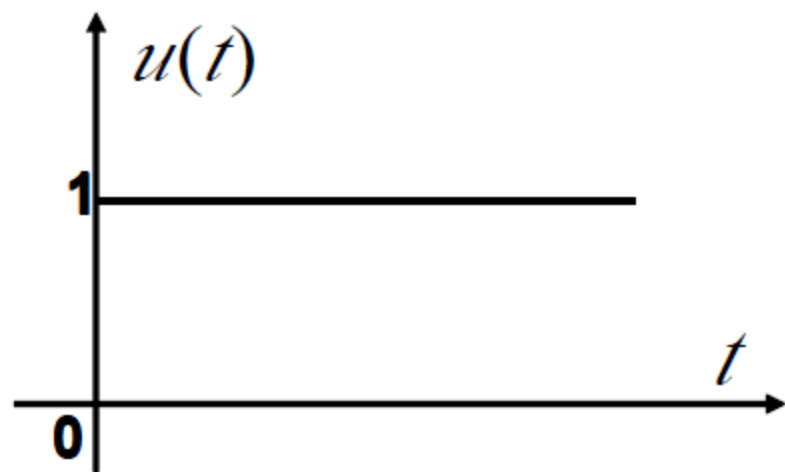
$$X(j\omega) = X_e(j\omega) + jX_o(j\omega)$$

$$x_e(t) \leftrightarrow X_e(j\omega) \quad X_e(j\omega) = \operatorname{Re}[X(j\omega)]$$

$$x_o(t) \leftrightarrow jX_o(j\omega) \quad X_o(j\omega) = \operatorname{Im}[X(j\omega)]$$

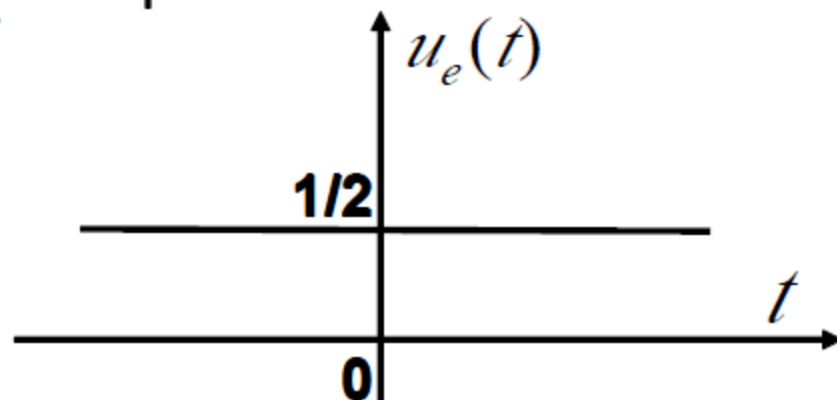
例: $u(t)$ 的频谱:

$$u(t) = u_e(t) + u_o(t)$$

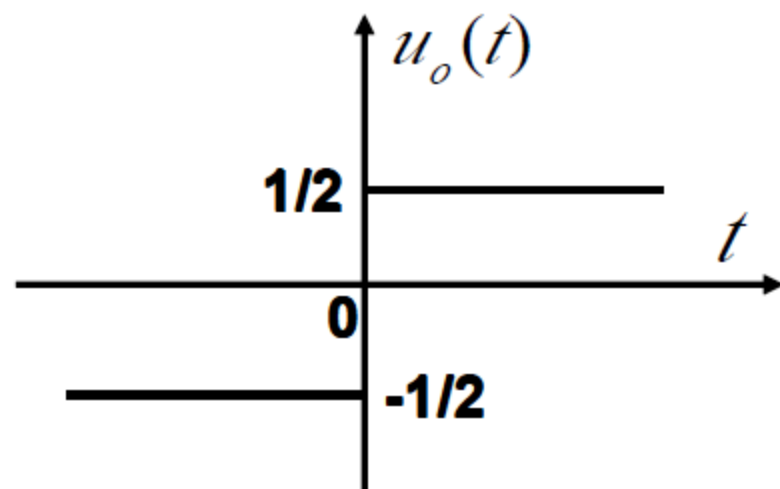


将 $u(t)$ 分解为偶部和奇部有

$$u_e(t) = \frac{1}{2}$$



$$u_o(t) = \frac{1}{2} \text{Sgn}(t)$$



$$\text{Sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

$$u_e(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega)$$

$$\text{Sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

$$F[\text{Sgn}(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right]$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

$$\therefore u_o(t) = \frac{1}{2} \text{Sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \qquad u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

例 4.10 重新考虑例 4.2 中的信号 $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$ 的傅里叶变换求解问题, 现在用傅里叶变换的对称性质来帮助求解。

由例 4.1, 有

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j\omega}$$

注意到, 若 $t > 0$, 则 $x(t)$ 就等于 $e^{-at}u(t)$; 而对 $t < 0$, $x(t)$ 取的是镜像值, 即

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \\ &= 2 \left[\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} \right] \\ &= 2\mathcal{E}\mathcal{V}\{e^{-at}u(t)\} \end{aligned}$$

因为 $e^{-at}u(t)$ 是实值函数, 由傅里叶变换的对称性质就可导得

$$\mathcal{E}\mathcal{V}\{e^{-at}u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{R}e\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\}$$

于是就有

$$X(j\omega) = 2\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

这与例 4.2 中的结果是一致的。

4.时域微分与积分: Differentiation and Integration

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$

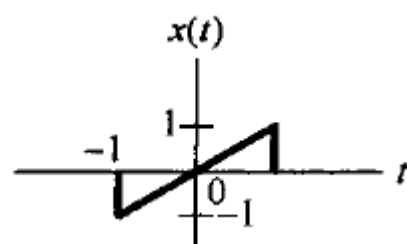
则 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$ (可将微分运算转变为代数运算)

(将 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ 两边对 t 微分即得该性质)

$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$ (时域积分特性)

由时域积分特性从 $\delta(t) \leftrightarrow 1$

也可得到: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$



$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{\begin{array}{c} | \\ 1 \\ | \\ \hline -1 \quad 0 \quad 1 \\ t \end{array}}_{(b)} + \begin{array}{c} -1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \\ -1 \quad -1 \\ t \end{array}$$

$$G(j\omega) = \left(\frac{2 \sin \omega}{\omega} \right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega}$$

注意, $G(0) = 0$ 。利用积分性质就有

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

由于 $G(0) = 0$, 所以最后得出

$$X(j\omega) = \frac{2 \sin \omega}{j\omega^2} - \frac{2 \cos \omega}{j\omega}$$

可见, $X(j\omega)$ 的表示式是纯虚奇函数, 这与 $x(t)$ 是实奇函数这一点是一致的。

5.时域和频域的尺度变换: Scaling

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(j\frac{\omega}{a})$

$$\begin{aligned} \text{Proof: } x(at) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega at} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} X(j\omega/a) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

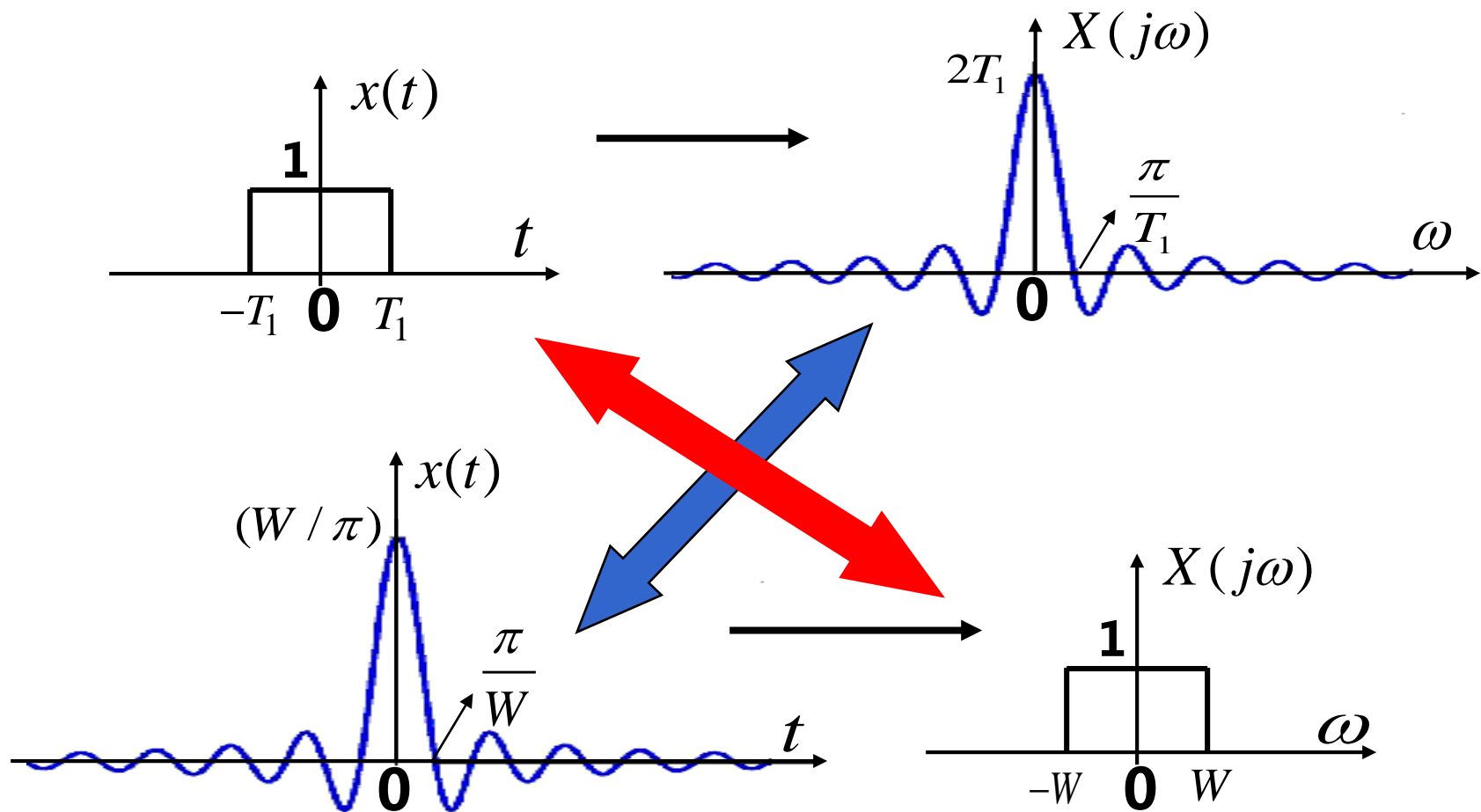
$$x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X(j\omega/a)$$

当 $a = -1$ 时, 有 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$

尺度变换特性表明：信号如果在时域扩展 a 倍，则其带宽相应压缩 a 倍，反之亦然。这就从理论上证明了时域与频域的相反关系，也证明了信号的脉宽带宽积等于常数的结论。

时域中的压缩（扩展）对应频域中的扩展（压缩）

6.对偶性: Duality



6.对偶性: Duality

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ **则** $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

证明 :
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{j\omega t} dt$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

也可由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ **得到证明。**

$$X(jt) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

由对偶性可以方便地将时域的某些特性对偶到频域

例如: 由 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ **有对偶关系** $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

利用时移特性有 $X[j(t - t_0)] \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)e^{-j\omega t_0}$

再次对偶有 $2\pi x(-t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi X[j(-\omega - \omega_0)]$

根据 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ **得**

$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)]$ **这就是移频特性**

例 4.13 考虑利用对偶性来求如下信号：

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

的傅里叶变换 $G(j\omega)$ 。在例 4.2 中曾经遇到一个傅里叶变换对，其中作为 ω 的函数的傅里叶变换与该信号 $g(t)$ 有类似的函数形式。这就是，设某一信号 $x(t)$ ，它的傅里叶变换是

$$X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

那么，由例 4.2 就有

$$x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

对于这一变换对的综合公式是

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{j\omega t} d\omega$$

将上式两边乘以 2π ，并将 t 以 $-t$ 置换，可得

$$2\pi e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{-j\omega t} d\omega$$

现在将变量 t 和 ω 的名称交换一下，得出

$$2\pi e^{-|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+t^2} \right) e^{-j\omega t} dt \quad (4.38)$$

式(4.38)的右边就是 $2/(1+t^2)$ 的傅里叶变换分析公式，因此最后得到

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{2}{1+t^2} \right\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

7. 频域微分特性

由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ 得

$$\frac{d}{d\omega} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t) e^{-j\omega t} dt$$

所以 $-jtx(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$

$$(-jt)^m x(t) \xleftrightarrow{F} \left(\frac{d}{d\omega}\right)^m [X(j\omega)]$$

该特性也可由对偶性从时域微分特性得出：

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

由时域积分特性，可对偶出频域积分特性

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

利用时域积分特性 $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

$$\int_{-\infty}^t X(j\tau) d\tau \leftrightarrow 2\pi \left[\frac{x(-\omega)}{j\omega} + \pi x(0)\delta(\omega) \right]$$

再次对偶 $2\pi \left[\frac{x(-t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t) \right] \leftrightarrow 2\pi \int_{-\infty}^{-\omega} X(j\tau) d\tau$

由 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ 有

$$\frac{x(t)}{-jt} + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(j\tau) d\tau \quad \text{频域积分特性}$$

8. Parseval定理:

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

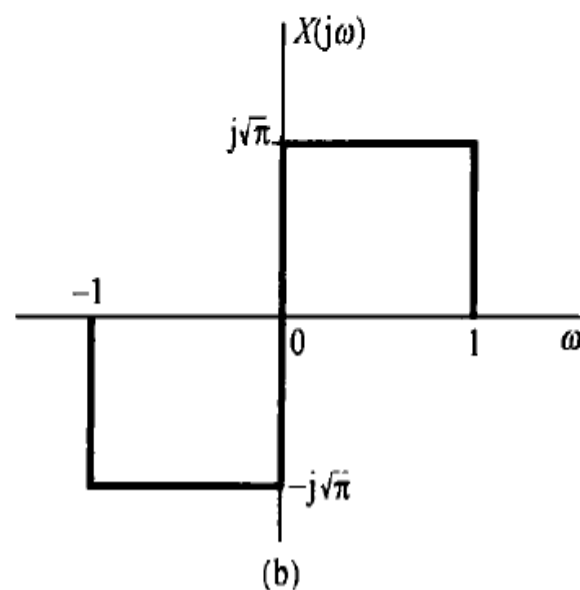
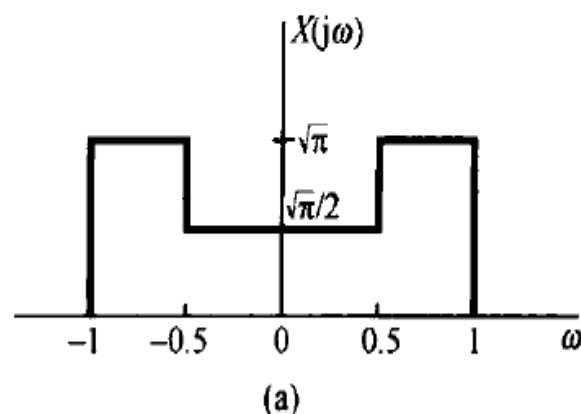
$$\begin{aligned} \text{Proof: } & \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) X(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

$|X(j\omega)|^2$ 称为 “能量谱密度” 函数。

例 4.14 对于图 4.18 中的每个傅里叶变换, 希望能求得如下时域表示式:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$D = \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0}$$



为了在频域中求 E , 可以用帕斯瓦尔定理, 即

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (4.44)$$

$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(j\omega) = G(j\omega)$$

注意到

$$D = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) d\omega \quad (4.45)$$

最后得到

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} j\omega X(j\omega) d\omega \quad (4.46)$$

对图 4.18(a), 该值为零, 对图 4.18(b), 该值为 $-\sqrt{\pi_0}$

4.4 卷积性质 The Convolution Property

一.卷积特性：

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$

则 $x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\omega)H(j\omega)$

由于卷积特性的存在，使对LTI系统在频域进行分析成为可能。本质上，卷积特性的成立正是因为复指数信号是一切LTI系统的特征函数。

由 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ **表明：**

可将 $x(t)$ 分解成复指数分量的线性组合，每个 $e^{j\omega t}$ 通过LTI系统时都要受到系统与 $e^{j\omega t}$ 对应的特征值的加权。这个特征值就是

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{故有}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

所以 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

由于 $h(t)$ 的傅氏变换 $H(j\omega)$ 就是频率为 ω 的复指数信号 $e^{j\omega t}$ 通过LTI系统时，系统对输入信号在幅度上产生的影响，所以称为**系统的频率响应**。

鉴于 $h(t)$ 与 $H(j\omega)$ 是一一对应的，因而LTI系统可以由其频率响应完全表征。由于并非任何系统的频率响应 $H(j\omega)$ 都存在，因此用频率响应表征系统时，一般都限于对稳定系统。因为，稳定性保证了

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

2、物理含义

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|e^{j\varphi_Y(\omega)} = |X(j\omega)|e^{j\varphi_X(\omega)}|H(j\omega)|e^{j\varphi_H(\omega)}$$

$$\begin{cases} |Y(j\omega)| = |X(j\omega)||H(j\omega)| \\ \varphi_Y(\omega) = \varphi_X(\omega) + \varphi_H(\omega) \end{cases}$$

由上面可知，时域卷积的数学原理太复杂，频域的数学基础简单而且直观。从频域看信号通过系统，系统将输入的模乘以系统特性函数的模得到输出的模，将输入的相位加上系统特性函数的相位得到输出的相位。所以，一般用频域的方法分析电子通信系统更容易理解。

例4.18 在3.9.2节已讨论过, 频率选择性滤波可以用一个线性时不变系统来实现, 该系统的频率响应 $H(j\omega)$ 通过所需的频率范围, 而大大衰减掉在该范围以外的频率分量。例如, 考虑在3.9.2节介绍过的理想低通滤波器, 它的频率响应如图4.20所示, 并由下式给出:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (4.63)$$

现在已经有了它的傅里叶变换表示, 并且知道该理想滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 就是式(4.63)的逆变换。利用例4.5的结果, 就有

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad (4.64)$$

如图4.21所示。

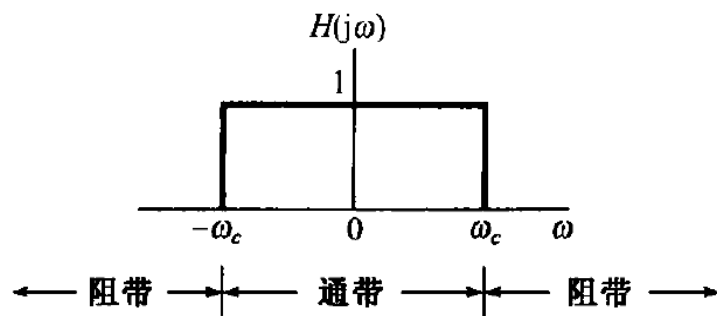


图4.20 理想低通滤波器的频率响应

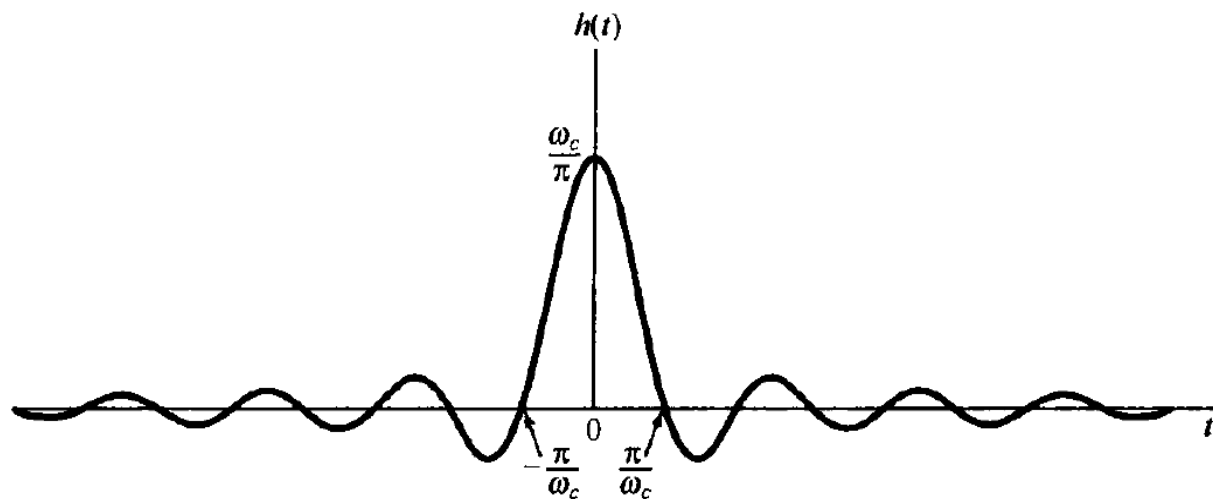
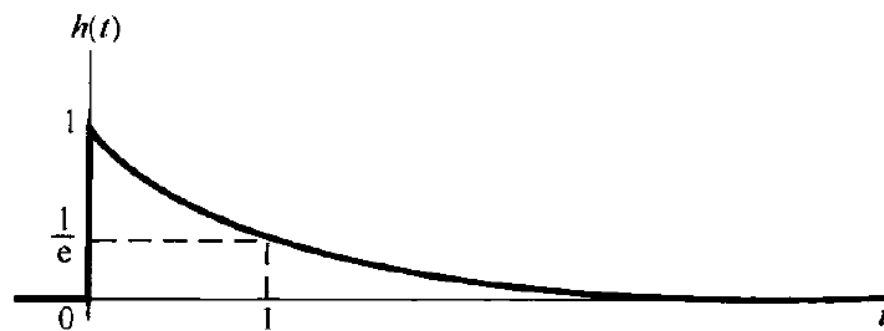


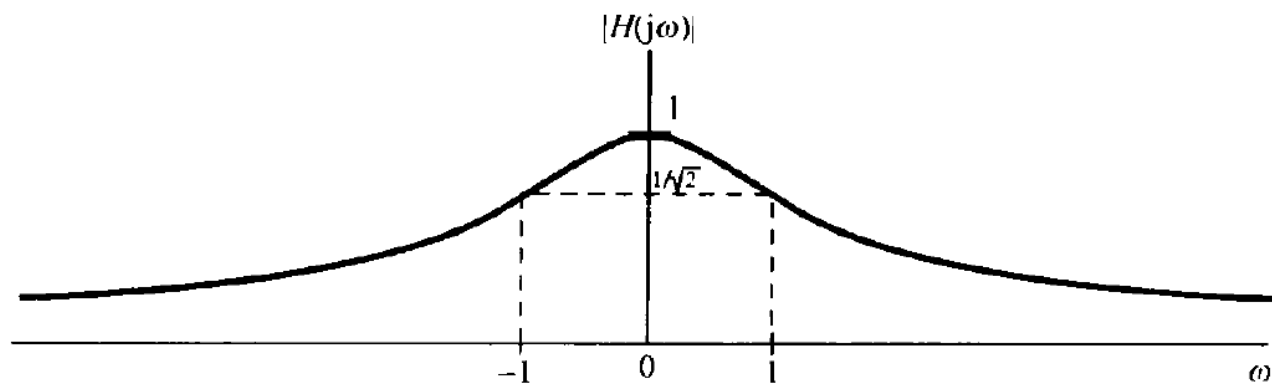
图4.21 理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$



(a)

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$



(b)

二. LTI系统的频域分析法:

根据卷积特性,可以对LTI系统进行频域分析, 其过程为:

1. 由 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$
2. 根据系统的描述, 求出 $H(j\omega)$
3. $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$
4. $y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)]$

例 4.19 考虑一个线性时不变系统对输入信号 $x(t)$ 的响应, 系统的单位冲激响应为 $h(t)$, 它们是

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0$$

不直接计算 $y(t) = x(t) * h(t)$, 而是将问题先变换到频域。由例 4.1, $x(t)$ 和 $h(t)$ 的傅里叶变换是

$$X(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

和

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

因此

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)(b + j\omega)} \quad (4.67)$$

为了求出输出 $y(t)$, 希望得到 $Y(j\omega)$ 的逆变换。最简单地做法就是将 $Y(j\omega)$ 展开成部分分式。这样的展开式在求逆变换时极为有用, 其一般的展开法在附录中已给出。对于这个例子, 假设 $b \neq a$, $Y(j\omega)$ 的部分分式展开为

$$Y(j\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega} \quad (4.68)$$

其中 A 和 B 都是待定常数。求 A 和 B 的一种办法是将式(4.67)和式(4.68)两式的右边相等，然后两边各乘以 $(a + j\omega)(b + j\omega)$ ，解出 A 和 B 。在附录中给出了另一种更一般且更为有效的方法来求像式(4.68)这样的部分分式展开式中的系数。无论用哪种办法，都能求得

$$A = \frac{1}{b - a} = -B$$

因此

$$Y(j\omega) = \frac{1}{b - a} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega} \right] \quad (4.69)$$

式(4.69)中每一项的逆变换都可凭直观得到，利用4.3.1节的线性性质，有

$$y(t) = \frac{1}{b - a} [e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t)]$$

当 $b = a$ 时, 式(4.69)的部分分式展开不成立。然而, 当 $b = a$ 时, 式(4.67)就变为

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

这就是可看成

$$\frac{1}{(a + j\omega)^2} = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a + j\omega} \right]$$

利用由式(4.40)给出的微分性质的对偶特性, 因此,

$$\begin{aligned} e^{-at}u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j\omega} \\ te^{-at}u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a + j\omega} \right] = \frac{1}{(a + j\omega)^2} \end{aligned}$$

结果有

$$y(t) = te^{-at}u(t)$$

4.5 相乘性质 The Multiplication Property

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$

则 $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

利用对偶性可以从卷积性质得出相乘性质

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$$

$$X_1(jt) \leftrightarrow 2\pi x_1(-\omega) \quad X_2(jt) \leftrightarrow 2\pi x_2(-\omega)$$

$$X_1(jt) * X_2(jt) \leftrightarrow 4\pi^2 x_1(-\omega) x_2(-\omega)$$

$$4\pi^2 x_1(-t) \cdot x_2(-t) \leftrightarrow 2\pi X_1(-j\omega) * X_2(-j\omega)$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

两个信号在时域相乘，可以看成是由一个信号控制另一个信号的幅度，这就是**幅度调制**。其中一个信号称为**载波**，另一个是**调制信号**。

一、信号的按照带宽和最小频率的关系的分类

低通型信号（基带信号） $B > f_L$

带通型信号（频带信号） $B < f_L$

二、调制解调的定义

调制：将基带信号的频谱搬移到较高频断的过程。

解调：从已调信号中恢复出基带信号的过程。

三、调制的分类

分类方法很多。其中根据基带信号去控制已调信号的哪个参数，可以分为调幅、调频、调相。

例1: $\because x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

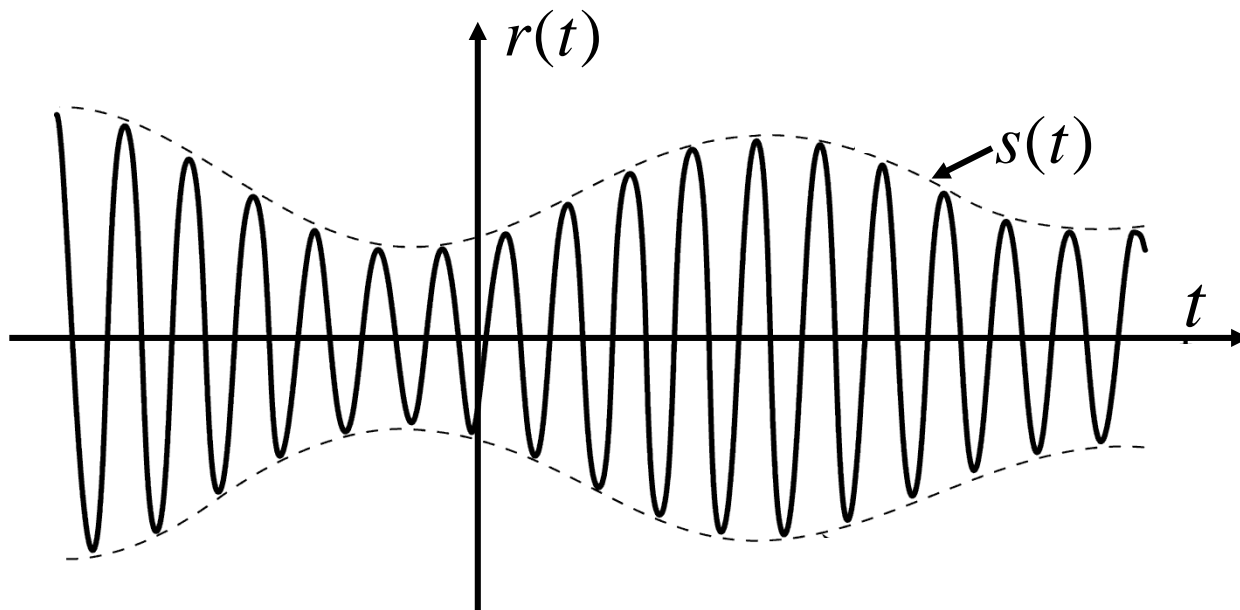
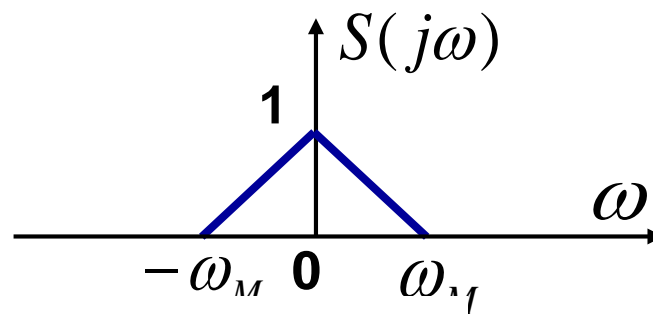
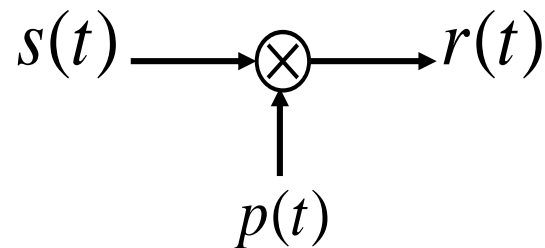
$$\therefore x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)]$$

——**移频性质**

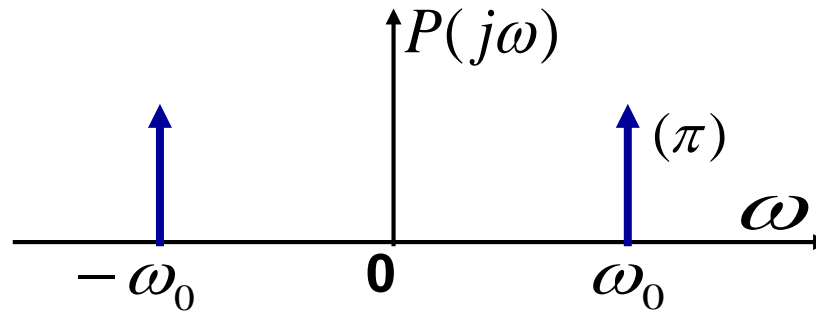
例2. 正弦幅度调制:

$$s(t) \leftrightarrow S(j\omega), \quad p(t) = \cos \omega_0 t$$

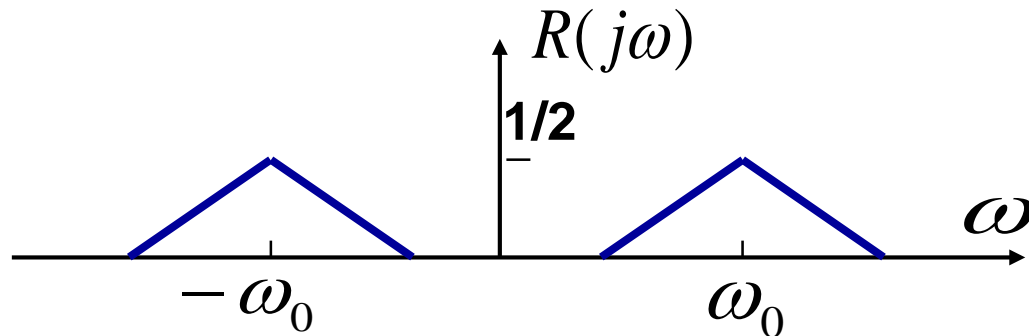
$$r(t) = s(t)p(t)$$



$$P(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



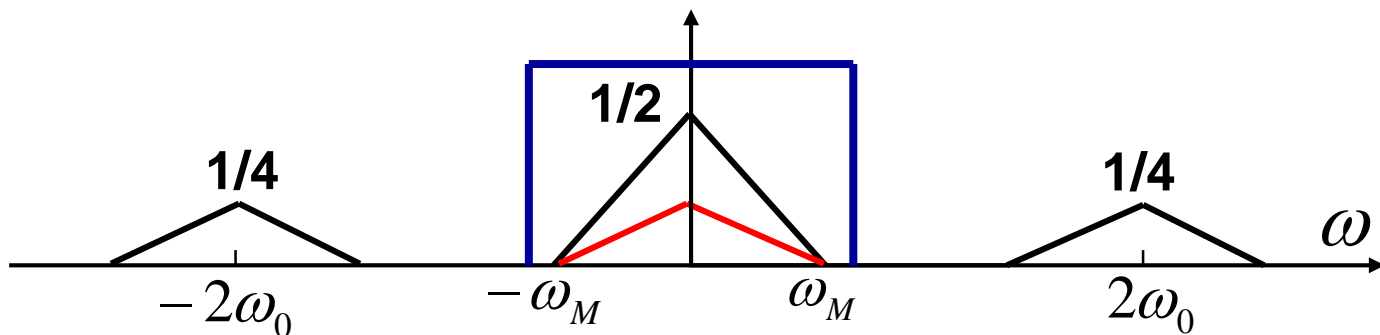
$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} S[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S[j(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$



正弦幅度调制等效于在频域将调制信号的频谱搬移到载频位置。

例3. 同步解调:

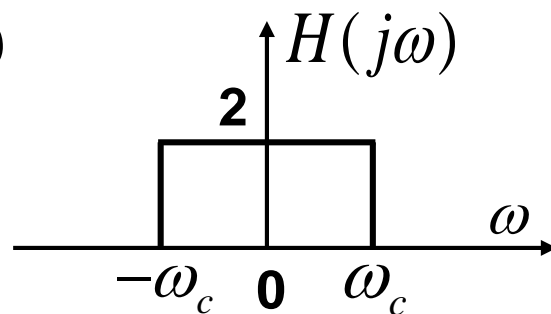
$$\begin{aligned} g(t) &= r(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) + \frac{1}{4} S[j(\omega - 2\omega_0)] + \frac{1}{4} S[j(\omega + 2\omega_0)] \end{aligned}$$



此时，用一个频率特性为 $H(j\omega)$ 的系统即可从 $r(t)$ 恢复出 $s(t)$ 。

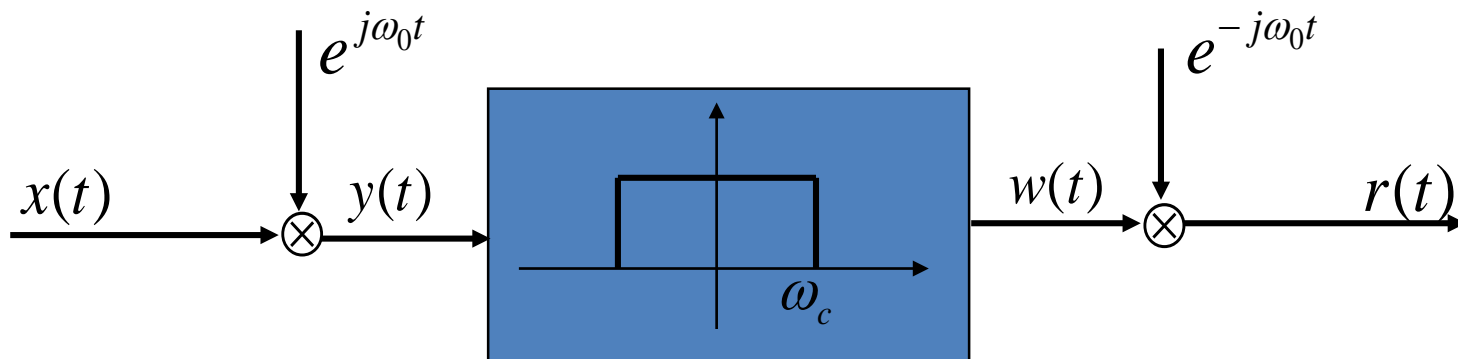
只要 $\omega_M < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_M$ 即可。

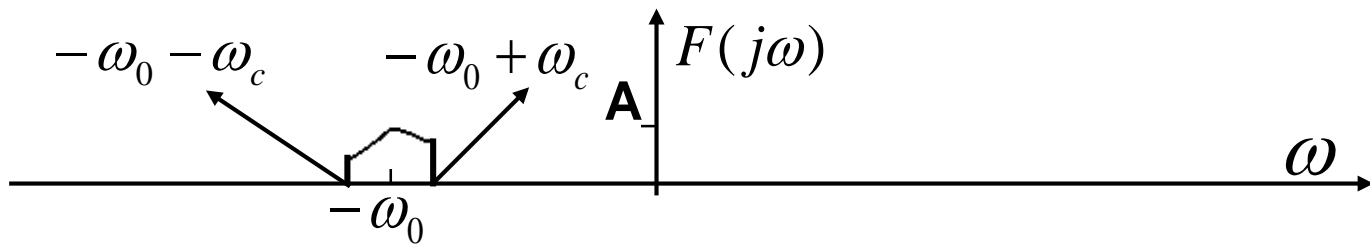
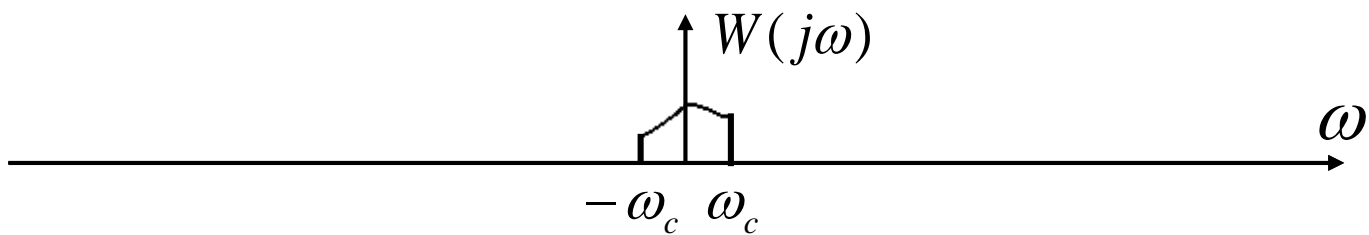
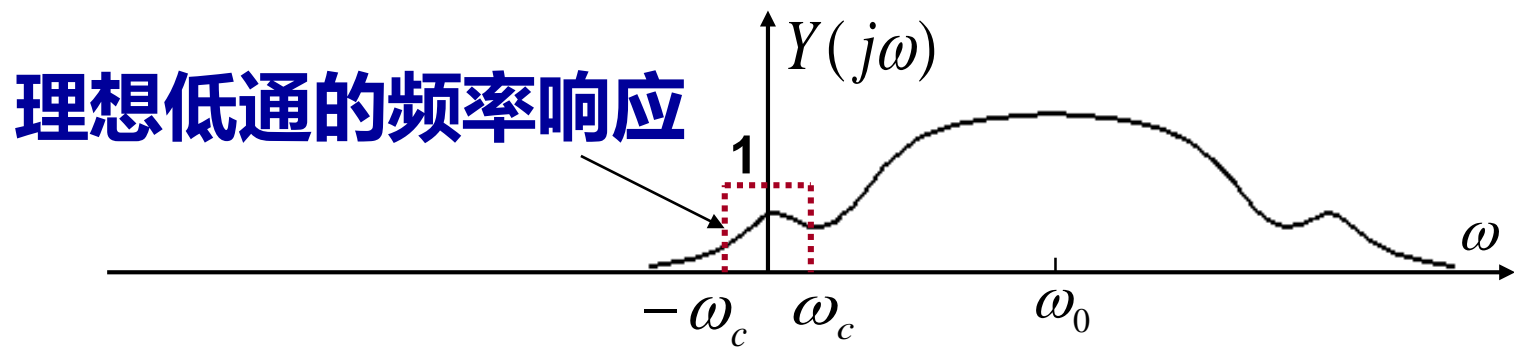
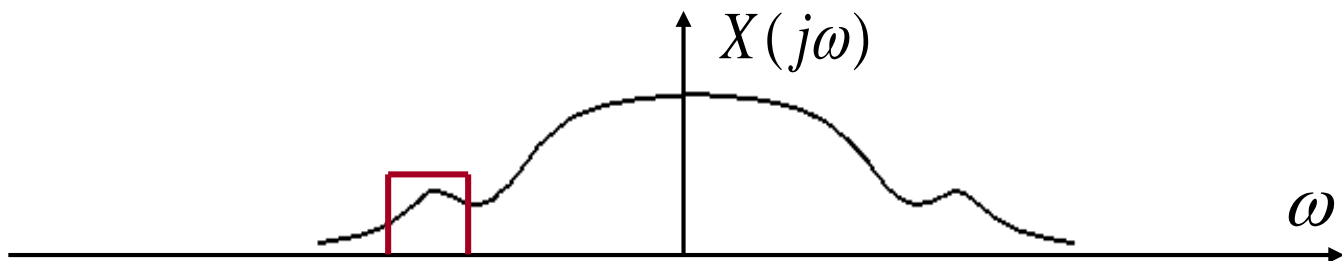
具有此频率特性的LTI系统称为理想低通滤波器。

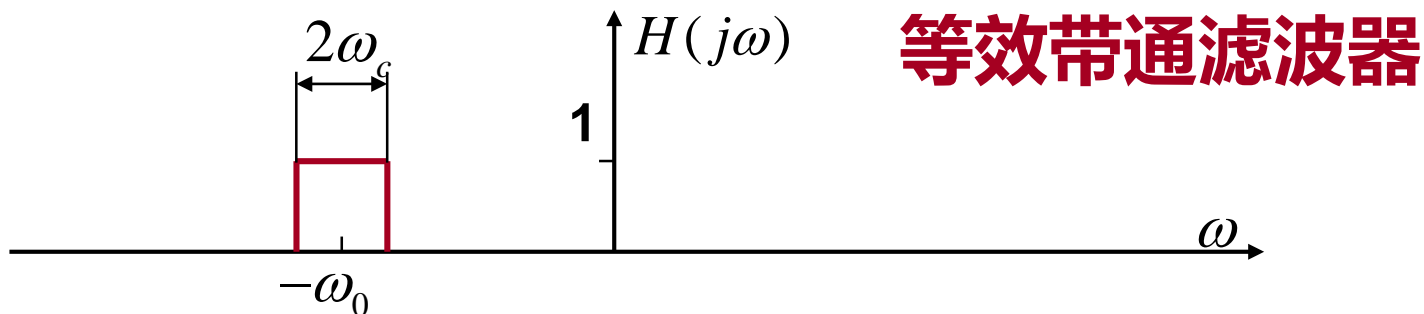


4.5.1 具有可变中心频率的频率选择性滤波

中心频率可变的带通滤波器







相当于从 $X(j\omega)$ 中直接用一个带通滤波器滤出的频谱。表明整个系统相当于一个中心频率为 ω_0 的带通滤波器，改变 ω_0 即可实现中心频率可变。

表 4.2 基本傅里叶变换对

信 号	傅里叶变换	傅里叶级数系数 (若为周期的)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - k\omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, 其余 k
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, 其余 k
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, 其余 k
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1, a_k = 0, k \neq 0$ (这是对任意 $T > 0$ 选择的傅里叶级数表示)
周期方波 $x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ 和 $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$, 对全部 k
$x(t) \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at} u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at} u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

4.6 傅立叶变换和反变换的计算

一、FT的计算

1、利用定义 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

2、利用常用的性质和公式进行计算

$$x(at + b) \xleftrightarrow{F}$$

$$e^{-2t+1}u(t-1) \xleftrightarrow{F}$$

$$e^{2t-1}u(-t+3) \xleftrightarrow{F}$$

$$te^{-t} \cos 2tu(t+1) \xleftrightarrow{F}$$

三、傅立叶反变换的计算

1、根据傅立叶反变换的定义来计算

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

2、根据傅立叶变换的性质和公式，结合部分分式展开来计算

$$? \xleftrightarrow{F} \frac{e^{-j\omega}}{j\omega + 2}$$

$$? \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega - 1}$$

$$? \xleftrightarrow{F} u(\omega)$$

$$? \xleftrightarrow{F} P_{200}(\omega)$$

$$? \xleftrightarrow{F} \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$$

$$\frac{j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} = \frac{2}{j\omega + 1} + \frac{-1}{j\omega + 2}$$

$$\therefore e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$\therefore 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$$

举例:

计算

$$e^{at}u(t) * e^{bt}u(t) = ? (a < 0, b < 0)$$

$$e^{at}u(t) * e^{at}u(t) = ? (a < 0)$$

$$Sa(t) * Sa(2t) = ?$$

4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Differential Equations

工程实际中有相当广泛的LTI系统其输入输出关系可以由一个线性常系数微分方程描述。一般形式的LCCDE是:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

一. 由LCCDE描述的LTI系统的频率特性:

由于 $e^{j\omega t}$ 是一切LTI系统的特征函数，因此，当系统的输入为 $x(t) = e^{j\omega t}$ 时，系统所产生的响应就是 $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ 。表明在 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的情况下，求解LCCDE即可得到 $H(j\omega)$ 。但是这种方法太麻烦，很少使用。

对LCCDE两边进行傅立叶变换有：

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

由于 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

$$\therefore H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

可见由LCCDE描述的LTI 系统其频率特性是一个有理函数。由此可以看出，对由 LCCDE 描述的LTI系统，当需要求得其 $h(t)$ 时(比如时域分析时)，往往是由 $H(j\omega)$ 做反变换得到。

对有理函数求傅立叶反变换通常采用部分分式展开和利用常用变换对进行。

二.频率响应的求法：

例：
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

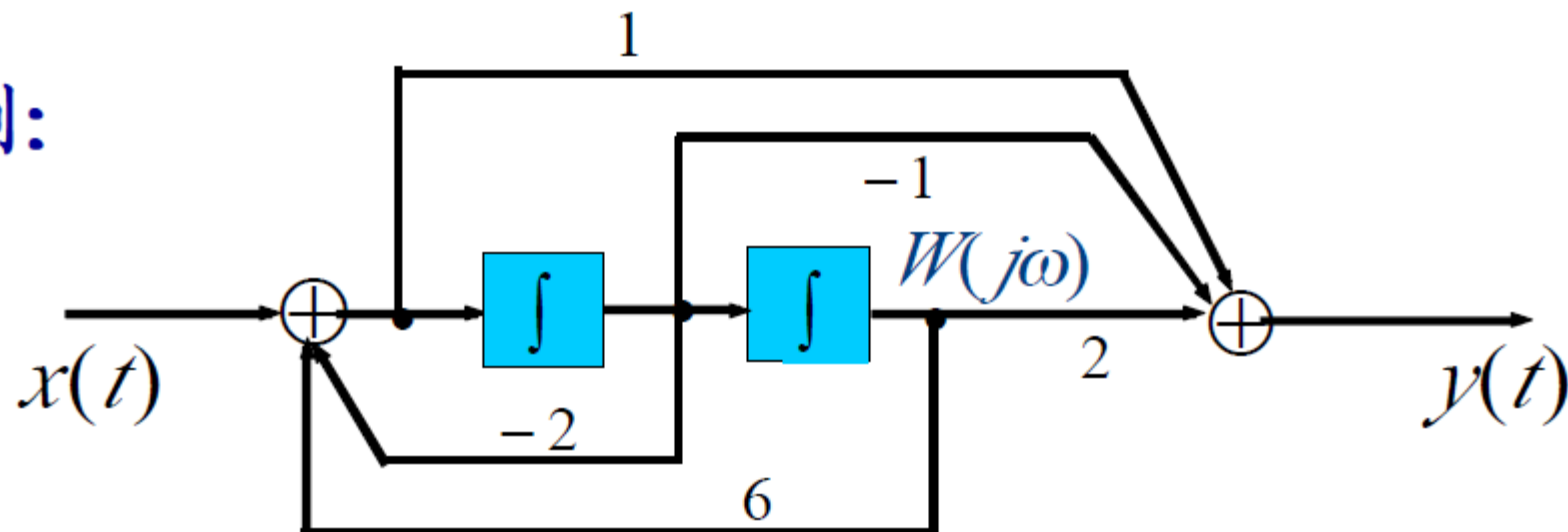
$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8} = \frac{j\omega + 3}{(4 + j\omega)(2 + j\omega)}$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 + j\omega} + \frac{1}{4 + j\omega} \right]$$

$$h(t) = \frac{1}{2} [e^{-2t} + e^{-4t}] u(t)$$

可见，对由微分方程所描述的系统通过求频率响应可以方便地求出其单位冲激响应。

2. 以方框图描述的系统

例:



$$Y(j\omega) = 2W(j\omega) - j\omega W(j\omega) + (j\omega)^2 W(j\omega)$$

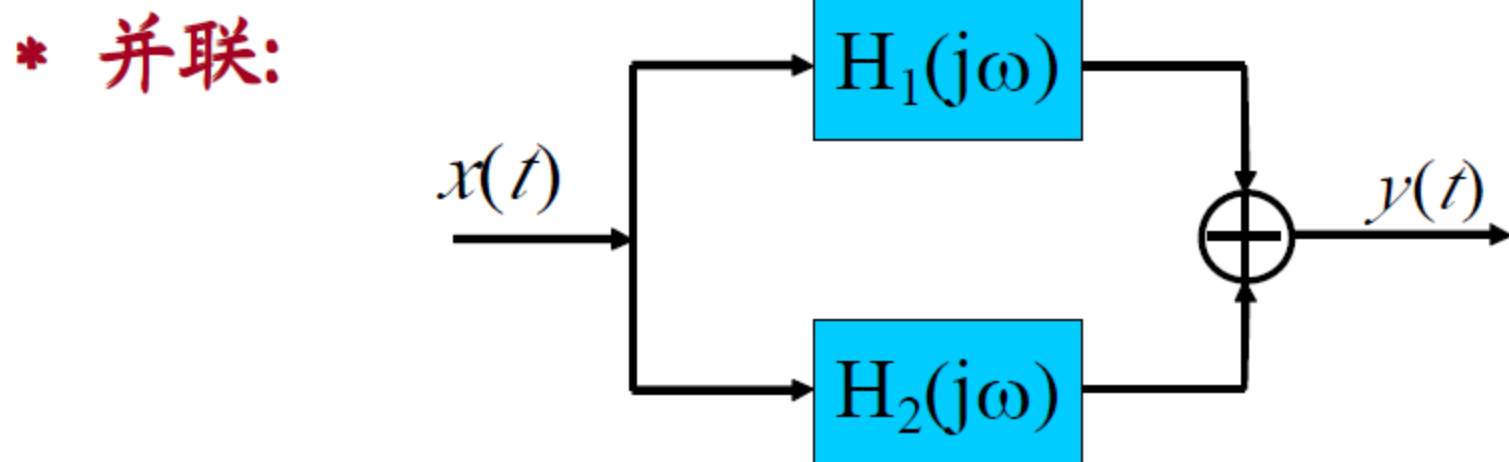
$$(j\omega)^2 W(j\omega) = X(j\omega) - 2j\omega W(j\omega) + 6W(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 - (j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) - 6}$$

3. 互联系统的 $H(j\omega)$

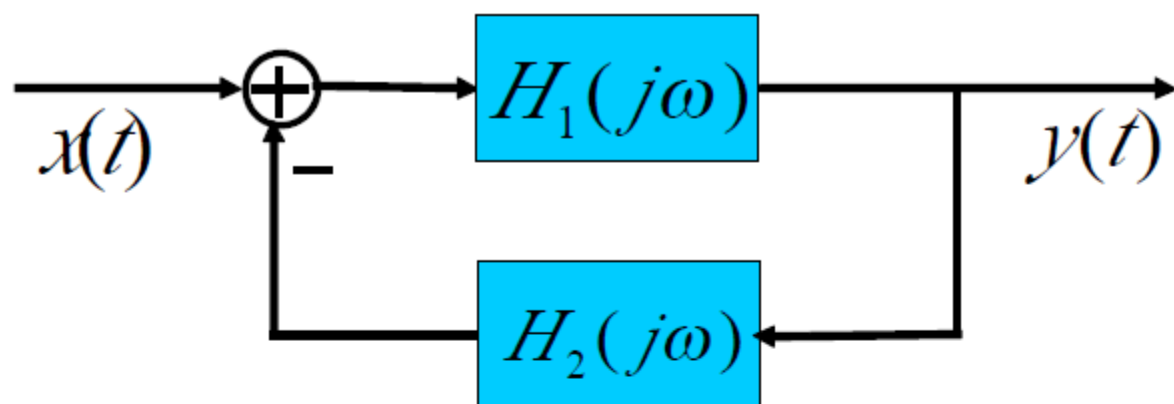
* 级联: $x(t) \longrightarrow \boxed{H_1(j\omega)} \longrightarrow \boxed{H_2(j\omega)} \longrightarrow y(t)$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$



$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

* 反馈联结:



$$Y(j\omega) = [X(j\omega) - Y(j\omega)H_2(j\omega)]H_1(j\omega)$$

$$X(j\omega)H_1(j\omega) = Y(j\omega)[1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)]$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)}$$

4.8 小结 Summary



- 1. 通过连续时间傅立叶变换，建立了将连续时间信号(包括周期、非周期信号)分解为复指数信号分量的线性组合的方法。**
- 2. 通过讨论傅立叶变换的性质，揭示了信号时域特性与频域特性的关系。卷积特性是LTI系统频域分析方法的理论基础，相乘特性则是通信和信号传输领域各种调制解调技术的理论基础。**

3. 对LTI系统建立了频域分析的方法。

4. 对由LCCDE描述的LTI系统，可以很方便地由LCCDE或系统框图得到其 $H(j\omega)$ 。

5. 稳定的LTI系统可以通过其频率响应来描述。