第三章 多维随机变量及其分布

- 中山大学
- 计算机学院
- 郑培嘉
- Email：zhpj@mail.sysu.edu.cn

目录

1. 二维随机变量
2. 边缘分布
3. 条件分布
4. 相互独立的随机变量
5. 两个随机变量的函数的分布

1. 二维随机变量

二维随机变量

实际中，我们往往需要同时考察两个或两个以上的随机变量，如为了研究某地区学龄前儿童发育情况，对该地区儿童进行抽查，考察每个儿童的身高和体重；如考察炮弹着点位置的横、纵坐标两随机变量等。

- **定义**：设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$,设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个向量(X,Y)叫做**二维随机变量**或**二维随机向量**。

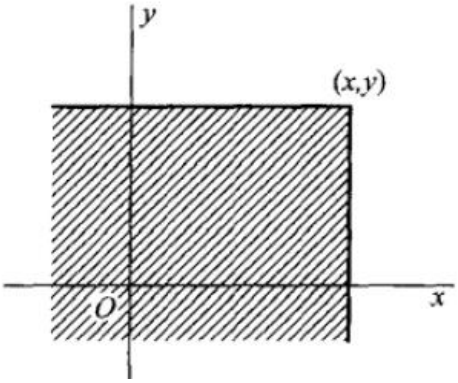
注：二维随机变量(X,Y)的性质不仅与X及Y有关，而且依赖这两个随机变量的相互关系，因此，不能像之前那样单独地研究X和Y，需将（X，Y）作为一个整体进行讨论。

二维随机变量

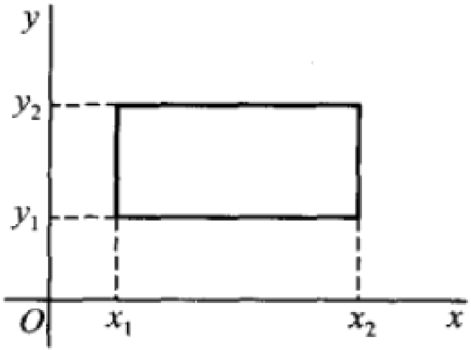
◆ 设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x, y，二元函数：

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\xlongequal{\text{记成}}P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的**分布函数**或随机变量X和Y的**联合分布函数**。



$F(x,y)$在(x,y)处值为随机点(X, Y)落在阴影处概率。



$F(x,y)$落在矩形域中概率为：

$P\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)$

二维随机变量

◆ 联合分布函数性质：

➢ $F(x,y)$是变量x和y的不减函数，即

对于任意固定的y，当$x_2 > x_1$时，$F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;

对于任意固定的x，当$y_2 > y_1$时，$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$;

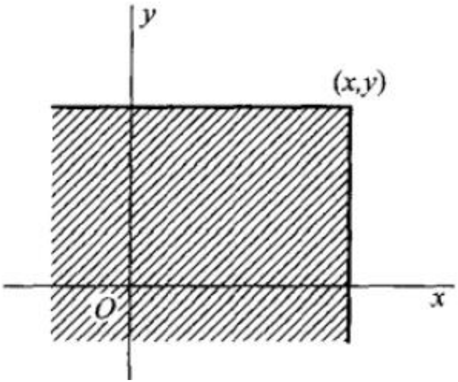
➢ $0 \leq F(x,y) \leq 1$，且

对于任意固定的y，$F(-\infty,y) = 0$;

对于任意固定的x，$F(x,-\infty) = 0$;

$F(-\infty,-\infty) = 0$,　　$F(+\infty,+\infty) = 1$;

二维随机变量



如右图，将无穷矩阵的右面边界向左无限平移，则“随机点(X, Y)落在矩阵内”这一事件概率趋于不可能事件，即有$F(-\infty,y)=0$；当$x\to\infty,y\to\infty$时，无穷矩形扩展到全平面，随机点(X, Y)落在其中趋于必然事件，即有$F(+\infty,+\infty)=1$

- $F(x+0,y)=F(x,y)$, $F(x,y+0)=F(x,y)$，即$F(x,y)$关于x右连续，关于y也右连续。
- 对于任意(x_1,y_1), (x_2,y_2), $x_1<x_2$，$y_1<y_2$,下述不等式成立：

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0$$

二维随机变量

- **定义**：若二维随后变量（X，Y）全部可能取到的值是有限对或可列无限多对，则称（X，Y）是**二维离散型随机变量**。
- 二维离散型随机变量（X，Y）的**分布律**（又称随机变量X和Y的**联合分布律**）：

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

记$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2, \ldots$

其中有：$p_{ij} \geq 0,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

二维随机变量

例：设随机变量X在1, 2, 3, 4四个整数中等可能取一个值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一个整数值，试求（X, Y）的分布律。

解：易知$\{X=i, Y=j\}$的取值情况是：$i=1,2,3,4$, j取不大于i的正整数，且

$$P\{X=\mathrm{i}, Y=j\}=P\{Y=j|X=\mathrm{i}\}P\{X=\mathrm{i}\}=\frac{1}{i}\times\frac{1}{4}$$

分布律为：

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

二维随机变量

◆ **定义**：对于二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(x,y)$, 如果存在非负可积函数$f(x,y)$使得对于任意x，y有

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

则称(X, Y)是**二维连续型随机变量**，函数$f(x,y)$称为二维连续型随机变量(X, Y)的**概率密度**，或称随机变量X和Y的**联合概率密度**。

二维随机变量

◆ **联合概率密度性质：**

- $f(x,y) \geq 0.$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1.$
- 设G是xOy平面上的区域，点(X, Y)落在G内的概率为：

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$$

- 若$f(x,y)$在点（x,y）连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

例：设二随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & other.\end{cases}$$

求：(1)分布函数$F(x,y)$；(2)概率$P\{Y\le X\}$；

解：(1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}\int_0^{y}\int_0^{x}2e^{-(2x+y)}dxdy, & x>0,y>0\\ 0, & other.\end{cases}$$

即有$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0\\ 0, & other.\end{cases}$

二维随机变量

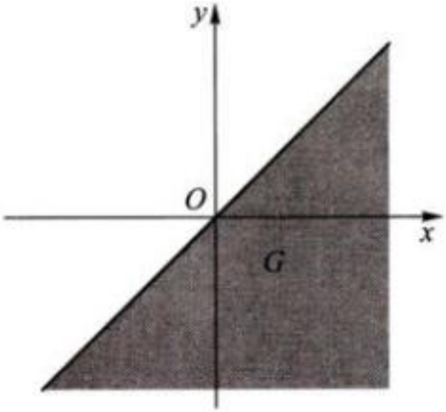
(2)将(X, Y)看作平面上随机点的坐标，即有

$$\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\},$$

其中G为xOy平面上直线$y = x$及其下方的部分，如图所示：
则

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dxdy = \frac{1}{3}$$



二维随机变量

推广：（n维随机变量的情况）

- 设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$, 设$X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \dots, X_n=X_n(e)$ 是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个n维向量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$称为**n维随机变量**或**n维随机向量**。
- 对于任意n个实数$(x_1, x_2, \dots, x_n)$，n元函数

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n\}$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的**分布函数**或随机变量$X_1, X_2, \dots, X_n$的**联合分布函数**。

2. 边缘分布

边缘分布

◆ **定义：**二维随机变量(X，Y)作为一个整体，具有分布函数$F(X,Y)$，而X和Y都是随机变量，各自也有分布函数，记为$F_X(x), F_y(y)$, 依次称为二维随机变量(X，Y)关于X和关于Y的**边缘分布函数**。

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

即：

$$F_X(x) = F(x, \infty)$$

同理有：

$$F_Y(y) = F(\infty, y)$$

边缘分布

对于离散型随机变量有：$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$

而X的分布律为：$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$，$i=1,2,\dots.$

同理Y的分布律为：

$$P\{\mathrm{Y}=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}, \qquad j=1,2,\dots.$$

$$p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\}, i=1,2,\dots.$$

$$p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{\mathrm{Y}=y_j\}, j=1,2,\dots.$$

$p_{i\cdot}$和$p_{\cdot j}$为$(X，Y)$关于X和关于Y的边缘分布律。

边缘分布

对于连续型随机变量$(X，Y)$，设它的概率密度为$f(x,y)$, 则

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}]\,dx$$

X为一个连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}$$

同理，对于Y的概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

分别称$f_X(x)$，$f_Y(y)$为关于X和关于Y的边缘概率密度。

边缘分布

例：整数N等可能地在1, 2. . . 10十个值中去一个值，设D=D(N)是能整除N的正整数的个数，F=F(N)是能整除N的素数的个数，试写出D和F的联合分布律及边缘分布律。

解：样本空间及D,F取值情况如下：

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

D所有可能取值为1, 2, 3, 4;F所有可能取值为0, 1, 2;

易得D和F的联合分布律及边缘分布如下表：

联合分布

边缘分布

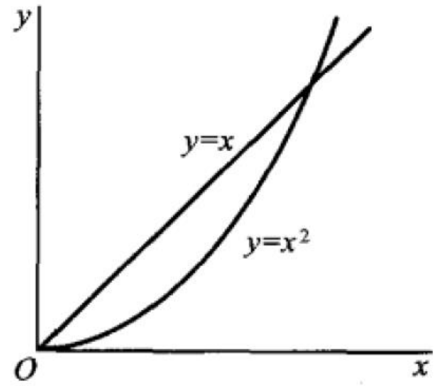
$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$
2	0	0	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$
$P\{D=i\}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

边缘分布

例:设随机变量X和Y具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & other\end{cases}$$

求边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$。

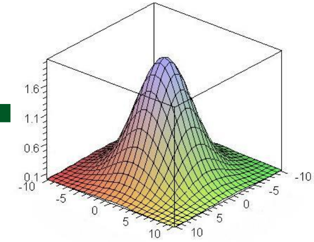


解:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

边缘分布



例：设二维随机变量(X, Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数，且$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$，$-1<\rho<1$, 称(X, Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的**二维正态分布**，记$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,{\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2,\rho)$. 试求二维正态随机变量的边缘概率密度。

解：

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}$，由于

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

边缘分布

于是

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}dy$$

令

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$$

则有

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

即

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}$$

其中$-\infty<x<\infty$，$-\infty<y<\infty$。

边缘分布

上题结论：

- 二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，且都不依赖参数ρ；
- 单由关于X和关于Y的边缘分布，一般来说不能确定随机变量X和Y的联合分布。

3. 条件分布

条件分布

设(X, Y)是二维离散型随机变量，其分布律为：

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \qquad i,j=1,2,\dots.$$

(X, Y)关于X和关于Y的边缘分布律分别为:

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}\,, \qquad i=1,2,\dots.$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}\,, \qquad j=1,2,\dots.$$

设$p_{\cdot j}>0$,现考虑在事件$\{Y=y_j\}$已发生的条件下事件$\{X=x_i\}$即

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

条件分布

上述条件概率具有分布律的**性质**：

- $P\{X = x_i | Y = y_j\} \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i | Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{1}{p_{\cdot j}} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} = 1$

◆ **定义**：设(X, Y)是二维离散型随机变量，对于固定j，若P$\{Y = y_j\} > 0$,则称$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$为在$Y = y_j$条件下随机变量X的**条件分布律**。

同理，对于固定i

若$P\{X = x_i\} > 0$,则称$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$为在$X = x_i$条件下随机变量Y的**条件分布律**。

条件分布

例：在一汽车工厂中，一辆汽车有两道工序是由机器人完成的。其一是紧固3只螺栓，其二是焊接2处焊点，以X表示由机器人紧固的螺栓中紧固得不良的数目，以Y表示表示由机器人焊接的不良焊接点的数目，据积累的资料知X, Y有以下联合分布律：

Y \ X	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

求1) $X=1$条件下，Y的条件分布律；2) $Y=0$条件下，X的条件分布律。

条件分布

解:

(1) 在$X=1$条件下，Y的条件分布律为

$$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.030}{0.045}$$

$$P\{Y=1|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.010}{0.045}$$

$$P\{Y=2|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.005}{0.045}$$

或写成

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k\|X=1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

条件分布

(2)同样可得在$Y=0$的条件下X的条件分布律为

$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k \mid Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

条件分布

例：射手射中目标概率为$p(0 < p < 1)$，射击直至击中目标两次为止，X表示首次击中目标所进行的射击次数，Y表示总共进行的射击次数，试求X和Y的联合分布律和条件分布律.

解：

$Y = n$表示在第n次射击击中目标，且在第1次, 第2次, ⋯, 第n-1次射击中恰有一次击中目标。各次射击是相互独立的，则不管m($m < n$)是多少，概率$P\{X = m, Y = n\}$都应等于

$$p \cdot p \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \cdots \cdot q}_{\text{n-2个}} = p^2 q^{n-2} \quad (q = 1 - p)$$

得X和Y得联合分布律为

$$P\{X = m, Y = n\} = p^2 q^{n-2} \qquad n = 2,3,\ldots; m = 1,2,\ldots,n-1$$

条件分布

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}$$

$$=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}q^{n-2}=\frac{p^2q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1}$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2}$$

故所求得条件分布律为

当$n=2,3,\ldots$时，

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$$

当$m=1,2,\ldots$时，

$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$$

条件分布

【连续情形】设(X,Y)概率密度为$f(x,y)$，(X,Y)关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 对给定y, 对于任意固定 $\varepsilon>0$ 和对于任意x，考虑条件概率

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$$

设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$，则有

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(x,y)dy]\,dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(y)dy}$$

在某些条件下，当ε很小时，上式右端分子、分母分别近似于$\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dx$ 和$\varepsilon f_Y(y)$，故有

条件概率密度

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dx}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

条件分布

- **定义**：设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x,y)$, (X, Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$, 若对于固定的y，$f_Y(y)>0$, 则称$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$条件下X的**条件概率密度**记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

称$\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$为在$Y=y$条件下X的**条件分布函数**，记为$P\{X\le x|Y=y\}$或$F_{x|y}(x|y)$, 即

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

类似可定义有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\text{和}F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy$$

条件分布

例：设G是平面上的有界区域，其面积为A。若二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & other\end{cases}$$

则称(X, Y)在G上服从**均匀分布**。现设二维随机变量(X, Y)在圆域$x^2+y^2\le 1$上服从均匀分布求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

解：随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

有边缘概率密度

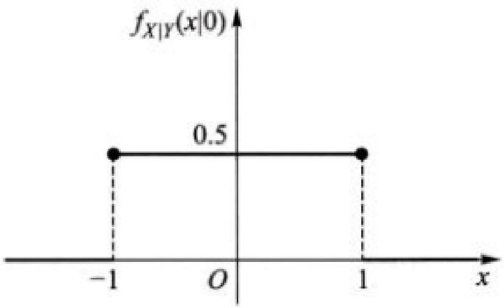
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

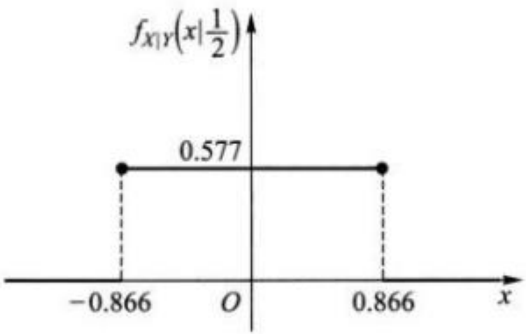
条件分布

当$-1 < y < 1$时有

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0, & other \end{cases}$$

当$y = 0, y = \frac{1}{2}$时$f_{X|Y}(x|y)$的图形如下图所示：





条件分布

例：设数X在区间(0, 1)上随机地取值，当观察到$X = x, (0 < x < 1)$时，数Y在区间(x, 1)上随机地取值，求Y的概率密度$f_Y(y)$.

解：X具有概率密度$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & other \end{cases}$

对于任意给定的值$x(0 < x < 1)$，在$X = x$的条件下Y的概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & other \end{cases}$$

X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & other \end{cases}$$

Y的边缘概率密度为$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & other \end{cases}$