线性代数 (Linear Algebra)

第四章 Vector Spaces

§4.5 The Dimension of a Vector Space

向量空间的维度

衡益

2021 年 11 月 25 日，中山大学南校区

什么是向量空间的维度？

向量空间V的维度记为$\dim V$

$\dim V = V$的一组基中的向量个数

is it well defined?

2

维度

维度

定理9

✓若向量空间V具有一组基 $\beta = \{b_1, \cdots, b_n\}$，则$V$中包含多于$n$个向量的集合一定线性相关。

证：令$\{u_1, \cdots, u_p\}$是V中一个含有多于n个向量的集合

- 坐标向量$[u_1]_\beta, \cdots, [u_p]_\beta$ 个数(p)大于每个向量中数字的个数(n)
- 存在$c_1, \cdots c_p$不全为0, 使得

$$c_1[u_1]_\beta + \cdots + c_p[u_p]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^n\text{中的零向量}$$

- 坐标映射是线性变换 $\Rightarrow c_1u_1 + \cdots + c_pu_p = 0 \cdot b_1 + \cdots + 0 \cdot b_n = 0$

c_i不全为0
$\Rightarrow\{u_1, \cdots, u_p\}$是线性相关的

维度

定理10

✓若向量空间V具有一组基含有n 个向量, 则V 的每一组基一定恰好含有n个向量。

证：令β_1是一个含n个向量的基，β_2是V的任一另外的基

- 由基的定义 $\Rightarrow$ β_1和β_2是线性无关的
- 由定理9 $\Rightarrow$ β_2不能含有多于n个向量
- β_2是一个基，并且β_1是线性无关的 $\Rightarrow$ β_2至少含有n个向量

➡ β_2恰好含有n个向量

5

维度

定义

✓若V由一个有限集生成，则V 称为有限维的, V 的维度写成$\dim V$, 是V的基中含有向量的个数，零向量空间$\{0\}$ 的维度定义为零，如果V不是由一有限集生成，则V 称为无穷维的。

例1：P_3的标准基是$\{1, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3\}$ $\Rightarrow$ $\dim \mathbf{P}_3 = 4$ 。

一般而言，$\dim \mathbf{P}_n = n+1$

例2：$\mathbb{R}^n$的标准基是$\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$，其中$\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$是$\mathbf{I}_n$的列向量

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

有限维度空间的子空间

有限维度空间的子空间

定理*

不少于两个有编号的向量的集合 $\{v_1, \cdots, v_p\}$，如果有 $\{v_1, \cdots, v_p\} \neq 0$，则 $\{v_1, \cdots, v_p\}$ 是线性相关的，当且仅当 $v_j (j > 1)$ 是前面向量 $v_1, \cdots, v_{j-1}$ 的线性组合。

有限维度空间的子空间

定理11

✓令H是有限向量空间V的子空间，若有需要的话，H 中任一个线性无关集均可以扩充成为H 的一个基，H 也是有限维的，并且

$$\dim H \le \dim V$$

证：若H={$\mathbf{0}$}，必然有$\dim H = 0 \le \dim V$

- 否则，令S={$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$}是$H$中任一线性无关集
  - 若S生成$H \Rightarrow$ H是S的一个基
  - 否则，存在H中某向量$\mathbf{u}_{k+1}$不在Span S中，但{$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$}将会是线性无关的（由定理* $\Rightarrow$ 此集中没有一个向量可表示为其前面向量的线性组合）。

9

有限维度空间的子空间

定理11证明

证（续上页）：

- 只要这个新集合不能生成$H \Rightarrow$我们就可以继续扩展S到H中一个更大的线性无关集的过程
- 但由定理9 $\Rightarrow$ S的线性无关扩充中向量的个数永远不能超过V的维度
- $\Rightarrow$$S$继续扩展，最终会生成$H$，而且将成为$H$的一个基，同时$\dim H \le \dim V$

10

有限维度空间的子空间

例3： 设$H=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$，$H$是$\mathbb{R}^3$的子空间，并且$\dim H\le\dim\mathbb{R}^3$。

$\Downarrow$

将$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$扩展为$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$，从而形成$\mathbb{R}^3$的一组基

11

有限维度空间的子空间

定理12（基定理）

✓ 若V是一个p维向量空间，$p\ge 1$，V中任意含有p个元素的线性无关集必然是V的一个基。任意含有p个元素且生成V的集合必然是V的一个基。

12

有限维度空间的子空间

定理12（基定理）

证：

- 由定理11 $\Rightarrow$ 含p个元素的线性无关集S可以扩展为V的一个基
- 但由$\dim V=p$，基必须恰好包含p个向量 $\Rightarrow S$已经是V的一个基
- 假设S含有p个向量且生成V
  - 因V是非零的，由Spanning Set定理** $\Rightarrow S$的子集S'是V的一个基
  - 因$\dim V=p$，S'一定包含p个向量 $\Rightarrow S=S'$

13

有限维度空间的子空间

定理：Spanning Set 定理**

令$S=\{v_1,\cdots,v_p\}$是V中的向量集，$H=\text{Span}\{v_1,\cdots,v_p\}$.

$a.$ 若S中某一个向量，比如说v_k，是S中其余向量的线性组合，则S中去掉v_k后形成的集合仍然可以生成H.

$b.$ 若$H\neq\{0\}$，则S的某一子集是H的一个基。

14

有限维度空间的子空间

例4： 证明$\{t, 1-t, 1+t-t^2\}$是$\mathbf{P}_2$的一组基。

解： 令$v_1 = t, v_2 = 1-t, v_3 = 1+t-t^2, \beta = \{1, t, t^2\}$

➢ 对应的坐标向量：

$$[v_1]_\beta = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, [v_2]_\beta = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, [v_3]_\beta = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\{[v_1]_\beta, [v_2]_\beta, [v_3]_\beta\}$线性无关 $\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$也是线性无关的

由$\dim \mathbf{P}_2 = 3$

定理12

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$是$\mathbf{P}_2$的一组基

Nul A和Col A的维度

Nul A和Col A的维度

定义

$$\dim \mathrm{Col}\, A = A\text{中主元列的个数}$$

$$\dim \mathrm{Nul}\, A = A\text{中自由变量的个数}$$

例5： 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&7&8\end{pmatrix}$，求$\dim \mathrm{Col}\, A$和$\dim \mathrm{Nul}\, A$。

解：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&7&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\right\}\text{是Col A的一组基，}\dim \mathrm{Col}\, A = 2$$

Nul A和Col A的维度

定理11

➢ 通过行化简增广矩阵来求解$\mathbf{A}x=\mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\2&4&7&8&0\end{pmatrix}\sim\cdots\sim\begin{pmatrix}1&2&0&4&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= -2x_2 - 4x_3\\ x_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\text{是Nul A的一组基，}\dim \mathrm{Nul}\, A = 2$$

子空间的秩

定理

秩定理：如果一矩阵 A 有 n 列，则 $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$.

基定理：设 H 是 $\mathbb{R}^n$ 的 p 维子空间，H 中的任何恰好由 p 个成员组成的线性无关集构成 H 的一个基. 并且，H 中任何生成 H 的 p 个向量集也构成H的一个基。

Q & A