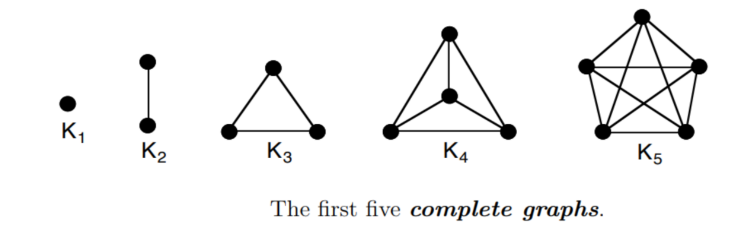
本次课程提纲：图的基本概念

- 几种典型的图
- 握手定理
- 度序列

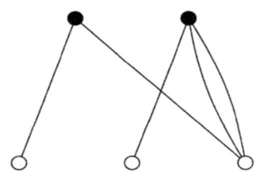
完全图

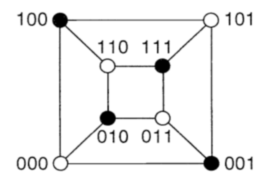
- n 个顶点的完全图：n 阶完全图，用 K_n 表示
- K_n 的边数为 $n(n-1)/2$



偶图 (二部图)

- 点集可以分解为两个子集 X 和 Y，使得每条边的一个端点在 X 中，另一个在 Y 中
- 偶图中没有环与三角形，可以有重边

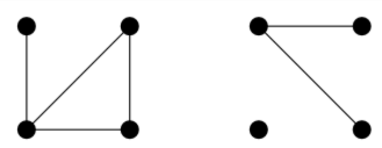




- 完全偶图：$X(Y)$ 的每个顶点与 $Y(X)$ 的每个顶点相连，任取 X, Y 中各一点均有边相连

简单图的补图

- 对于一个简单图 $G = (V, E)$，令集合 $E_1 = \{uv|u \neq v, u, v \in V\}$
- 称图 $H = (V, E_1 \setminus E)$ 为 G 的补图

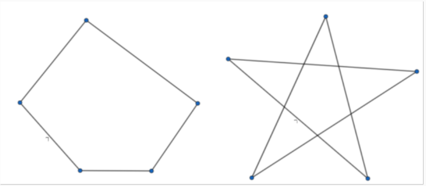


补图

- 只有简单图才能定义补图
- 图和其补图顶点集合相同
- 任意一对顶点相邻的充分必要条件是它们在补图中不相邻
- n 阶简单图边数与其补图边数之和等于 K_n 的边数
    - $n(n-1)/2$

自补图

- 如果 G 与其补图同构，则称 G 为自补图
    - 五边形与五角星



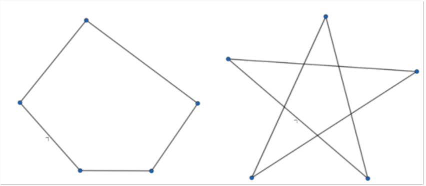
- 并不是任意一个简单图都是自补图

定理

若 n 阶图 G 是自补图，则有 $n = 4k$ 或 $4k + 1$

自补图

- 如果 G 与其补图同构，则称 G 为自补图
    - 五边形与五角星



- 并不是任意一个简单图都是自补图

定理

若 n 阶图 G 是自补图，则有 $n = 4k$ 或 $4k + 1$

证明

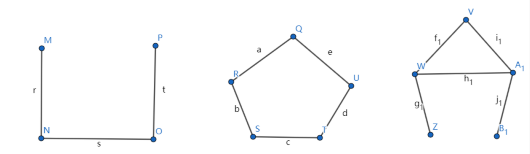
利用 n 阶图边数与其补图边数之和为 K_n 的边数

自补图

习题

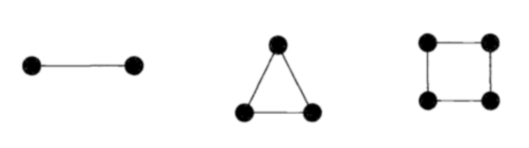
在 10 个顶点以下的单图中，哪些阶数的图可能为自补图?

- 1、4、5、8、9 阶图可能为自补图
- 1 阶图自补图是本身
- 4 阶图的自补图只有一个
- 5 阶图的自补图有 2 个
- 8 阶自补图有 10 个
- 9 阶以上的图的自补图构建很复杂 (9 阶的图有 36 个)



顶点的度

- G 的顶点 v 的度 $d(v)$ 是指 G 中与 v 关联的边的数目
  - 每个环计算两次
  - 顶点度描述图的局部结构
- 分别用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 表示图 G 的最小与最大度
- 奇数度的顶点称为奇点，偶数度的顶点称偶点
- 设 $G = (V, E)$ 为简单图，如果对所有节点 v 有 $d(v) = k$，称 G 为 k 正则图



握手定理

图论第一定理，握手定理，由欧拉提出

任意图中所有顶点的度的和等于边数的 2 倍

推论

- 任何图中，奇点个数为偶数
- 正则图的阶数和度数不同时为奇数

习题

$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 是简单图 G 的最大与最小度，m 与 n 为顶点和边数，求证 $\delta \leq 2m/n \leq \Delta$

握手定理

习题

已知具有 n 个度数都为 3 的结点的简单图 G 有 m 条边

- 若 $m = 3n - 6$，证明 G 在同构意义下唯一
- 若 $n = 6$，证明 G 在同构意义下不唯一

握手定理

习题

已知具有 n 个度数都为 3 的结点的简单图 G 有 m 条边

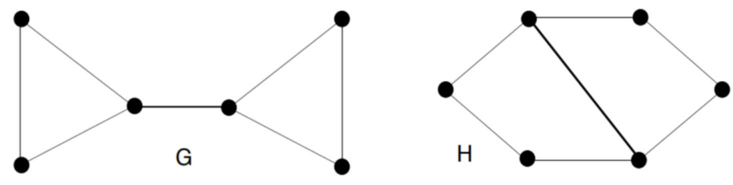
- 若 $m = 3n - 6$，证明 G 在同构意义下唯一
- 若 $n = 6$，证明 G 在同构意义下不唯一

解答

- 由握手定理，$3n = 2m$，因为 $m = 3n - 6$，所以 $n = 4$，$m = 6$，G 是 K_4
- 由握手定理，$m = 9$

图的度序列

- 图 G 的各个点的度 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 构成的非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 称为 G 的度序列



Both degree sequences are $\langle 3, 3, 2, 2, 2, 2 \rangle$.

- 一个图的度序列与序列中元素排列无关
- 每个图对应唯一一个度序列
- 同构的图具有相同的度序列

顶点的度

度序列判别定理

非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是图的度序列的充分必要条件是序列中元素总和为偶数

顶点的度

度序列判别定理

非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是图的度序列的充分必要条件是序列中元素总和为偶数

证明

- 必要性：由握手定理立即得到
- 充分性：构造对应度序列的图
  - 数组中为奇数的数字个数必为偶数
  - 若 d_i 为偶数，则在与之对应的点作 $d_i/2$ 个环
  - 对于剩下的偶数个奇数，两两配对后分别在每配对点间先连一条边，然后在每个顶点做环

$(0, 1, 3, 4, 6)$

图序列

- 一个非负整数组如果是某简单图的度序列，我们称它为可图序列，简称图序列
- 关于图序列问题，主要关注如下三点
  - 存在问题：什么样的非负整数组是图序列?
  - 计数问题：一个图序列对应多少不同构的图?
  - 构造问题：如何画出图序列对应的所有不同构图?
  - 存在问题彻底解决了，计数问题解决得不好，构造问题没有解决

图序列

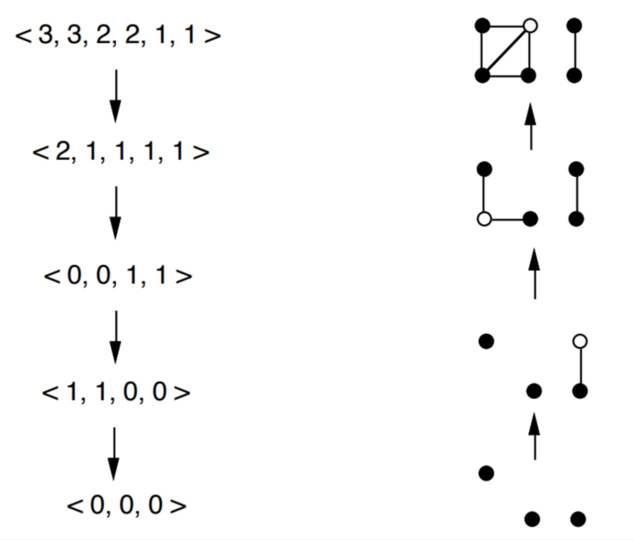
- 一个非负整数组如果是某简单图的度序列，我们称它为可图序列，简称图序列
- 关于图序列问题，主要关注如下三点
  - 存在问题：什么样的非负整数组是图序列？
  - 计数问题：一个图序列对应多少不同构的图？
  - 构造问题：如何画出图序列对应的所有不同构图？
  - 存在问题彻底解决了，计数问题解决得不好，构造问题没有解决

图序列判别定理，Havel-Hakimi 定理

非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, 是图序列的充分必要条件是 $(d_2 - 1, d_3 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n)$ 是图序列

- $(6, 5, 4, 3, 2, 2, 2)$ 是否为图序列
- $(6, 5, 4, 3, 2, 2, 2) \leftarrow (4, 3, 2, 1, 1, 1) \leftarrow (2, 1, 0, 0, 1)$

图序列



度的性质

定理

一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同，也就是必有两个点度数相等

在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友

度的性质

定理

一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同，也就是必有两个点度数相等

在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友

证明

- 因为 G 为简单图，所以 $\Delta \leq n-1$
- 情形 1：若 G 没有孤立点，则 $1 \leq d(v) \leq n-1$
    - 由鸽笼原理，必有两顶点度数相同
- 情形 2：若 G 只有一个孤立点，设 G_1 表示 G 去掉孤立点后的部分，则 $1 \leq d(v) \leq n-2$
    - 由鸽笼原理：G_1 里必有两顶点度数相同
- 情形 3：若 G 只有两个以上的孤立点，则定理显然成立