线性代数 (Linear Algebra)

第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

§ 5.5 Complex Eigenvalues

复数特征值

衡 益

2021 年 12 月 16 日，中山大学南校区

定义

2

数学分析→展现物理系统特征

若一个实矩阵A的特征方程中解出了**复根**，那么，这些**复根**也包含了矩阵A的重要信息。

应用于动力系统

- 周期性运动
- 振 动
- 空间旋转

3

空间扩展

实数空间R^n

↓

复数空间C^n

一个复数λ满足 $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow$ 在$\mathbb{C}^n$空间存在一个非零向量使得

$$Ax = \lambda x$$

称λ为A 的复特征值，x为λ所对应的复特征向量。

4

举例

例1

设A $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，则$\mathbb{R}^2$上的线性变换

$$x \mapsto Ax$$

将平面逆时针旋转90°，A的作用是周期性的，因为在4个90°之后，向量回到了起点。

显然，非零向量不会被映射为其自身的倍数，因此A在$\mathbb{R}^2$ 中没有特征向量，因此没有实特征值。实际上，A的特征方程为：

$$\lambda^2+1=0$$

5

举例

例1

其根为

$$\lambda = i, \quad \lambda = -i.$$

若将A作用在$\mathbb{C}^2$空间上，则

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}=i\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}=-i\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

因此i和$-i$是特征值，其对应的特征向量分别为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

6

举例

例2 设$A=\begin{bmatrix}0.5 & -0.6\\ 0.75 & 1.1\end{bmatrix}$.写出A的特征值，和特征空间的基。

解

A的特征方程为

$$0=\det\begin{bmatrix}0.5-\lambda & -0.6\\ 0.75 & 1.1-\lambda\end{bmatrix}=(0.5-\lambda)(1.1-\lambda)-(-0.6)(0.75)$$

$$=\lambda^2-1.6\lambda+1$$

由维达定理可知，

$$\lambda=\frac{1}{2}\left[1.6\pm\sqrt{(-1.6)^2-4}\right]=0.8\pm0.6i.$$

当$\lambda=0.8-0.6i$时，

举例

例2 设$A=\begin{bmatrix}0.5 & -0.6\\ 0.75 & 1.1\end{bmatrix}$.写出A的特征值，和特征空间的基。

解

$$A-(0.8-0.6i)I=\begin{bmatrix}0.5 & -0.6\\ 0.75 & 1.1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.8-0.6i & 0\\ 0 & 0.8-0.6i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-0.3+0.6i & -0.6\\ 0.75 & 0.3+0.6i\end{bmatrix}$$

由于$0.8-0.6i$是特征值，那么

$$(-0.3+0.6i)x_1-0.6x_2=0$$

$$0.75x_1+(0.3+0.6i)x_2=0$$

有非零解。因此，上面两个等式确定x_1和x_2之间的关系是同一关系，这样可以通过其中一个方程将某个变量用另一个变量表示。

举例

例2 设$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$.写出A的特征值，和特征空间的基。

解

由$0.75x_1 + (0.3+0.6i)x_2 = 0$可得

$$0.75x_1 = -(0.3+0.6i)x_2$$

$$x_1 = -(0.4+0.8i)x_2$$

令$x_2 = 5$来消除小数，得到 $x_1 = -2-4i$. 那么

$\lambda = 0.8 - 0.6i$ 所对应的特征子空间的基为：

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2-4i. \\ 5 \end{bmatrix}$$

9

举例

例2 设$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$.写出A的特征值，和特征空间的基。

解

类似的，计算$\lambda = 0.8 + 0.6i$ 的特征向量为

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2+4i. \\ 5 \end{bmatrix}$$

验证可得

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2+4i \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4+2i \\ 4+3i \end{bmatrix} = (0.8+0.6i)v_2$$

矩阵A确定的
线性变换
本质上是旋转

10

举例

例3

观察例2，矩阵A 的乘法如何影响点的一种方法是，绘制任意初始点，例如$x_0=(2,0)$，然后在重复乘以A 的情况下绘制此点的连续图像, 即

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 2.4 \end{bmatrix}$$

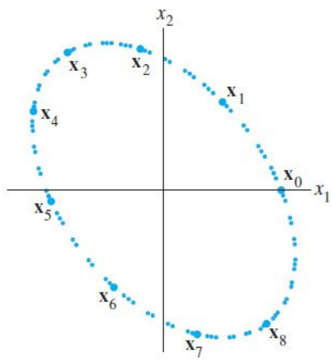
$$x_3 = Ax_2,$$

$$\ldots$$

11

举例

例3



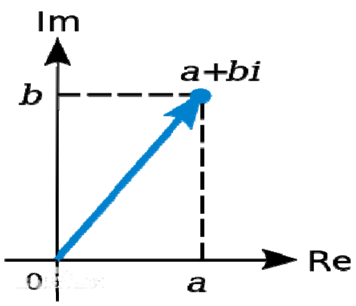
上图显示，$x_0,\cdots,x_8$由较大的点表示。较小的点为是$x_9,\cdots,x_{100}$ ，可以看出，该序列位于椭圆轨道上。当然上图没有解释为什么会发生旋转，旋转的关键隐藏在复特征向量的实部和虚部中。

12

向量的实部和虚部

向量的实部和虚部

$\mathbb{C}^n$ 的复向量 x 的共轭向量 $\overline{x}$ 也是 $\mathbb{C}^n$ 的向量，它的分量是 x 对应分量的共轭复数。向量 Re x 和 Im x 称为复向量x 的 实部 和 虚部，分别由x 的分量的实部和虚部组成。



举例

向量的实部和虚部

例4

若$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3-i \\ i \\ 2+5i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$，那么$\mathrm{Re}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\mathrm{Im}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$，

且

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+i \\ -i \\ 2-5i \end{bmatrix}$$

举例

向量的实部和虚部

例4

如果B是一个可能有复数项的$m \times n$ 矩阵，则$\bar{B}$ 表示一个其中的元素是B 中元素的复共轭的矩阵。复数共轭的性质会延续到复数矩阵代数：

$$\overline{r\mathbf{x}} = \bar{r}\,\bar{\mathbf{x}}，\quad \overline{B\mathbf{x}} = \bar{B}\bar{\mathbf{x}}$$

$$\overline{BC} = \bar{B}\,\bar{C} \quad 且 \quad \overline{rB} = \bar{r}\,\bar{B}$$

作用于C^n的实矩阵的特征值和特征向量

17

性质

作用于C^n的实矩阵的特征值和特征向量

设A是一个n 阶实矩阵，那么$\overline{Ax} = \overline{A}\,\overline{x} = A\overline{x}$ ，若λ是A 的一个特征值$x \in \mathbb{C}^n$是其对应的特征向量, 那么

$$A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\,\overline{x}$$

因此$\overline{\lambda}$也是A 的一个特征值，$\overline{x}$是其对应的特征向量。

这表明当A为实数矩阵时，其复特征值出现在共轭对中

18

举例

例5 例2中实矩阵的特征值是复共轭，即$0.8-0.6i$ 和$0.8-0.6i$ ，相应的特征向量也是共轭的：

$$\mathrm{v}_1=\begin{bmatrix}-2-4i\\5\end{bmatrix}\quad 和\quad \mathrm{v}_2=\begin{bmatrix}-2+4i\\5\end{bmatrix}=\overline{\mathrm{v}}_1$$

例6 若$C=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$，其中$a$和$b$是非零实数，那么C 的特征值是$\lambda=a\pm bi$. 并且，若$r=|\lambda|=\sqrt{a^2+b^2}$，那么

$$C=r\begin{bmatrix}a/r & -b/r\\ b/r & a/r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

19

举例

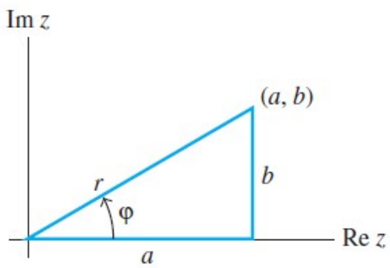


FIGURE 2

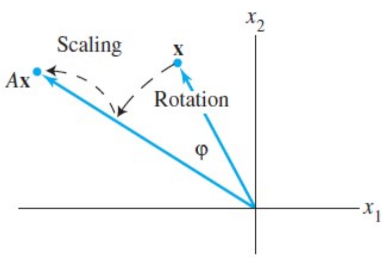


FIGURE 3 A rotation followed by a scaling.

其中φ是x轴正轴与过$(0,0)$和(a,b) 的射线的夹角；因此线性变换

$$\mathrm{x}\to C\mathrm{x}$$

可以视为旋转角度φ和倍乘$|\lambda|$变换复合而成。

0

举例

例7

$$设A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0.8 - 0.6i, \quad 且v_1 = \begin{bmatrix} -2-4i \\ 5 \end{bmatrix},$$

设P是2阶实矩阵，

$$P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\, v_1 & \mathrm{Im}\, v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

令

$$C = P^{-1}AP = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

举例

例7 由例6，C是一个纯旋转因为 $|\lambda|^2 = (0.8)^2 + (0.6)^2 = 1$. 那么C是旋转变换，由 $C = P^{-1}AP$ 可得，

$$A = PCP^{-1} = P\begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{x} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}", "\text{Change of variable}"'] & A\mathbf{x} \\ \mathbf{u} \arrow[r, "C", "\text{Rotation}"'] & C\mathbf{u} \arrow[u, "P"', "\text{Change of variable}"] \end{tikzcd}$$

FIGURE 4 Rotation due to a complex eigenvalue.

定理

设A是一个2阶实矩阵，有一个复的特征值$\lambda = a - bi$ $(b \neq 0)$和相应的特征向量$\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$, 那么

$$A = PCP^{-1}$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\mathbf{v} & \mathrm{Im}\,\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad 且 \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

上述定理说明例7的计算适用于任意有复特征值的2阶实矩阵。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}", "\text{Change of variable}"'] & A\mathbf{x} \\
\mathbf{u} \arrow[r, "C", "\text{Rotation}"'] & C\mathbf{u} \arrow[u, "P", "\text{Change of variable}"']
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4 Rotation due to a complex eigenvalue.

在更高维矩阵中亦存在例7中出现的现象。例如，若A是3阶有复特征值的矩阵，那么在$\mathbb{R}^3$中存在某个平面，A对平面的作用是旋转，平面中的每个向量被旋转到该平面的另一点上，我们说平面在A的作用下是不变的

举例

例8

矩阵$A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix}$的特征值为$0.8 \pm 0.6i$ 和1.07.

在 x_1x_2 平面的任意向量 w_0 在 A 的作用下，旋转到了平面的另外一个位置。平面之外的任意向量 x_0 的 x_3 坐标都乘以 1.07.

在 A 的作用下，$w_0=(2,0,0)$ 和$x_0=(2,0,1)$ 乘以 A 的迭代结果可见下图。

25

举例

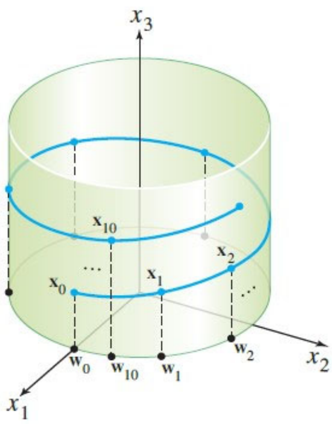


FIGURE 5

Iterates of two points under the action of a 3 × 3 matrix with a complex eigenvalue.

26

Q & A