第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§1.6 Linear Independence

线性独立

2021 年 10 月 12 日，中山大学南校区

➢ 齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

向量形式

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

存在平凡解$\mathbf{x} = \mathbf{0}$，但该解是方程组的唯一解吗？

定义

向量组的线性相关性

定义 给定向量组 A：$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_m$，如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$，使 $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_m\mathbf{a}_m = 0$，则称向量组 A是线性相关，否则称它为线性无关。

几何描述：

1. 两个向量线性相关 → 分量对应成比

2. 三个向量线性相关 → 三向量共面

线性方程组的相关性

向量组的线性相关与线性无关的概念也可移用于线性方程组。当方程组中有某个方程是其余方程的线性组合，**该方程就是多余的**，这时称方程组（各个方程）是**线性相关**；当方程组中**没有多余方程**，就称该方程组（各个方程）**线性无关**（或线性独立）。

向量组的线性相关性

例1

设 $$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

a) 确定向量组$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$是否线性相关；

b) 可能的话，求出$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$的一个线性相关关系。

向量组的线性相关性

例1

a) **解：** 判断是否有非平凡解，把增广矩阵$(\mathbf{A}\ \mathbf{0})$化简为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

x_3为自由变量

存在不全为0的解，向量组$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 线性相关。

例1

b) 解： 化简为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = \text{自由变量} \end{cases} \xleftarrow{x_3=5} \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

$$10\,\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 = 0$$

课堂练习

设 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) 确定向量组$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$是否线性相关；

b) 可能的话，求出$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$的一个线性相关关系。

课堂练习

a) 解：

$$x_1\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

x_3为自由变量

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\3&5&9&0\\5&9&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&-1&18&0\\0&-1&18&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&-1&18&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

向量组线性相关

向量组的线性相关性

课堂练习

b) 解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -33x_3 \\ x_2 = 18x_3 \\ x_3 = \text{自由变量} \end{cases} \xleftarrow{x_3=1} \begin{cases} x_1 = -33 \\ x_2 = 18 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

矩阵各列的线性独立

矩阵各列的线性独立

矩阵各列的线性相关性

- 设矩阵$\mathbf{A}=(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$，矩阵方程$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$可以写成

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

矩阵**A**的**各列线性无关**，当且仅当方程$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$仅有**平凡解**。

矩阵各列的线性独立

例2：确定矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$的各列是否线性无关。

解：把增广矩阵$(\mathbf{A}\ \mathbf{0})$行变化

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

只有平凡解

线性无关

一个或两个向量的集合

一个或两个向量的集合

一个向量线性相关性

➢ 一个向量$\mathbf{v}$线性相关性

$\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 线性相关

$\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ 线性无关

两个向量线性相关性

➢ 两个向量$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$线性相关性

$\mathbf{v}_1=k\mathbf{v}_2$ 线性相关

$\mathbf{v}_1\neq k\mathbf{v}_2$ 线性无关

$k\neq 0$

一个或两个向量的集合

例3：确定下列向量组是否线性无关

a. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$　　**b.** $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

解：

a) $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$，$-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 0$，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$线性相关。

b) $\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$不满足倍数关系，设c和d满足

$$c\mathbf{v}_1 + d\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

若$c \neq 0$，则$\mathbf{v}_1 = (-d/c)\,\mathbf{v}_2$，相矛盾$\Rightarrow c = 0$

同理可得，$d = 0$

$\Rightarrow$ **线性无关**

一个或两个向量的集合

例3： 确定下列向量组是否线性无关

(a)

(b)

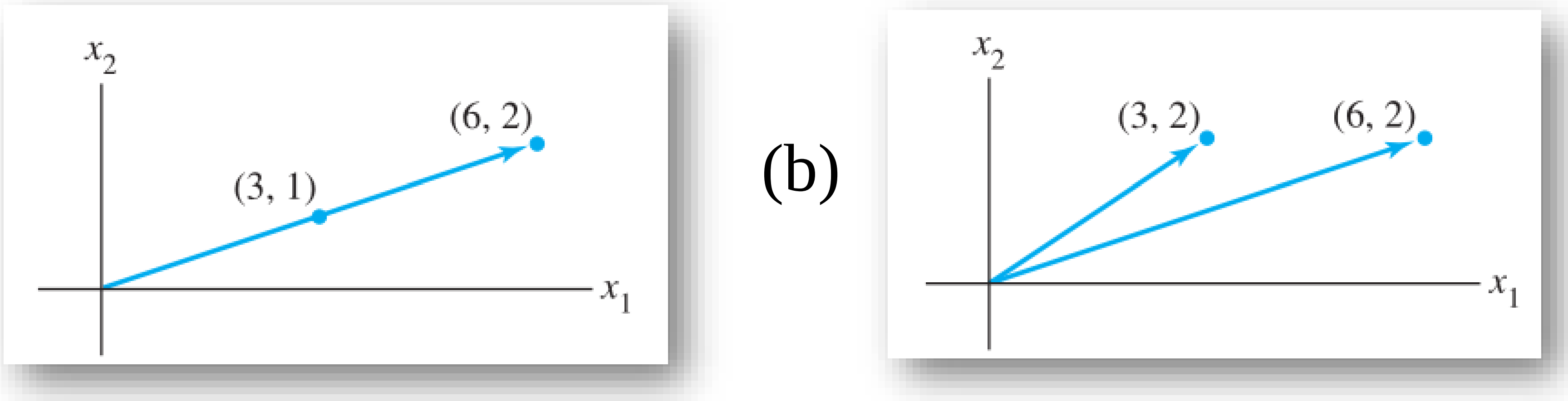


图1 (a) 线性相关；(b) 线性无关

两个向量线性相关 ⟺ 几何上它们落在原点的同一条直线

两个或更多个向量的集合

两个或更多个向量的集合

定理7（线性相关集的特征）

1

- 两个或更多个向量的集合$S=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_p\}$线性相关，当且仅当$S$中至少有一个向量是其他向量的线性组合。

2

- ✓ 若S线性相关，且$\mathbf{v}_1\neq 0$，则某个$\mathbf{v}_j$ $(j>1)$是它前面几个向量$\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_{j-1}$的线性组合。

两个或更多个向量的集合

定理7证明：

1

S中至少有一个向量是其他向量的线性组合 ⇒ 则**S**线性相关

如$\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$

两边减去$\mathbf{v}_1$

$$0 = (-1)\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \cdots + 0\mathbf{v}_p$$

⇒ **S**线性相关

两个或更多个向量的集合

定理7证明：

2

设S线性相关 ⇒ 则S中某个$\mathbf{v}_j$（$j>1$）是它前面几个向量的线性组合

存在不全为0的$c_1,\cdots,c_p$，使

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_p\mathbf{v}_p=\mathbf{0}$$

设j是使$c_j\neq 0$的最大下标

- $j=1$，$c_1\mathbf{v}_1=0$ ✗

- 则 $j>1$

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_j\mathbf{v}_j+0\mathbf{v}_{j+1}+\cdots+0\mathbf{v}_p=\mathbf{0}$$

$$c_j\mathbf{v}_j=-c_1\mathbf{v}_1-\cdots-c_{j-1}\mathbf{v}_{j-1}$$

$$\mathbf{v}_j=\left(\frac{-c_1}{c_j}\right)\mathbf{v}_1+\cdots+\left(\frac{-c_{j-1}}{c_j}\right)\mathbf{v}_{j-1}$$

两个或更多个向量的集合

例4： 设$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix}$，叙述u和v 生成的集合，并说明w 属于Span $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v}\}$ 当且仅当 $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$ 线性相关。

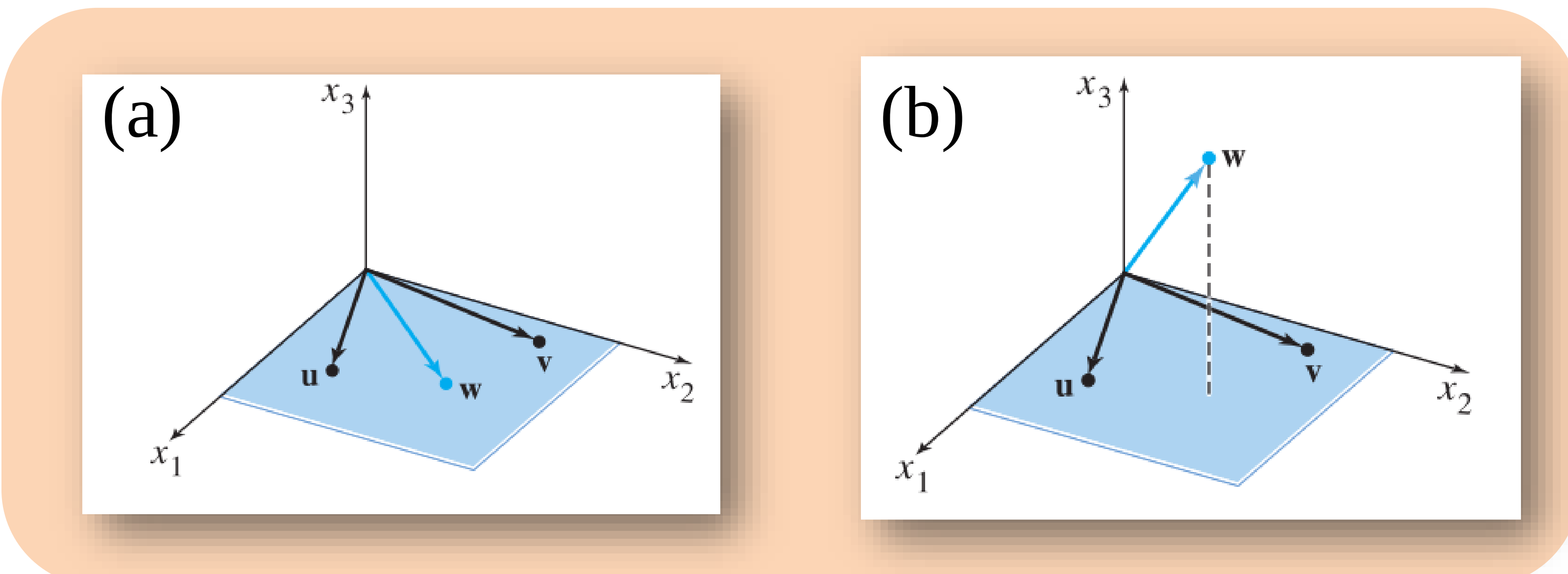
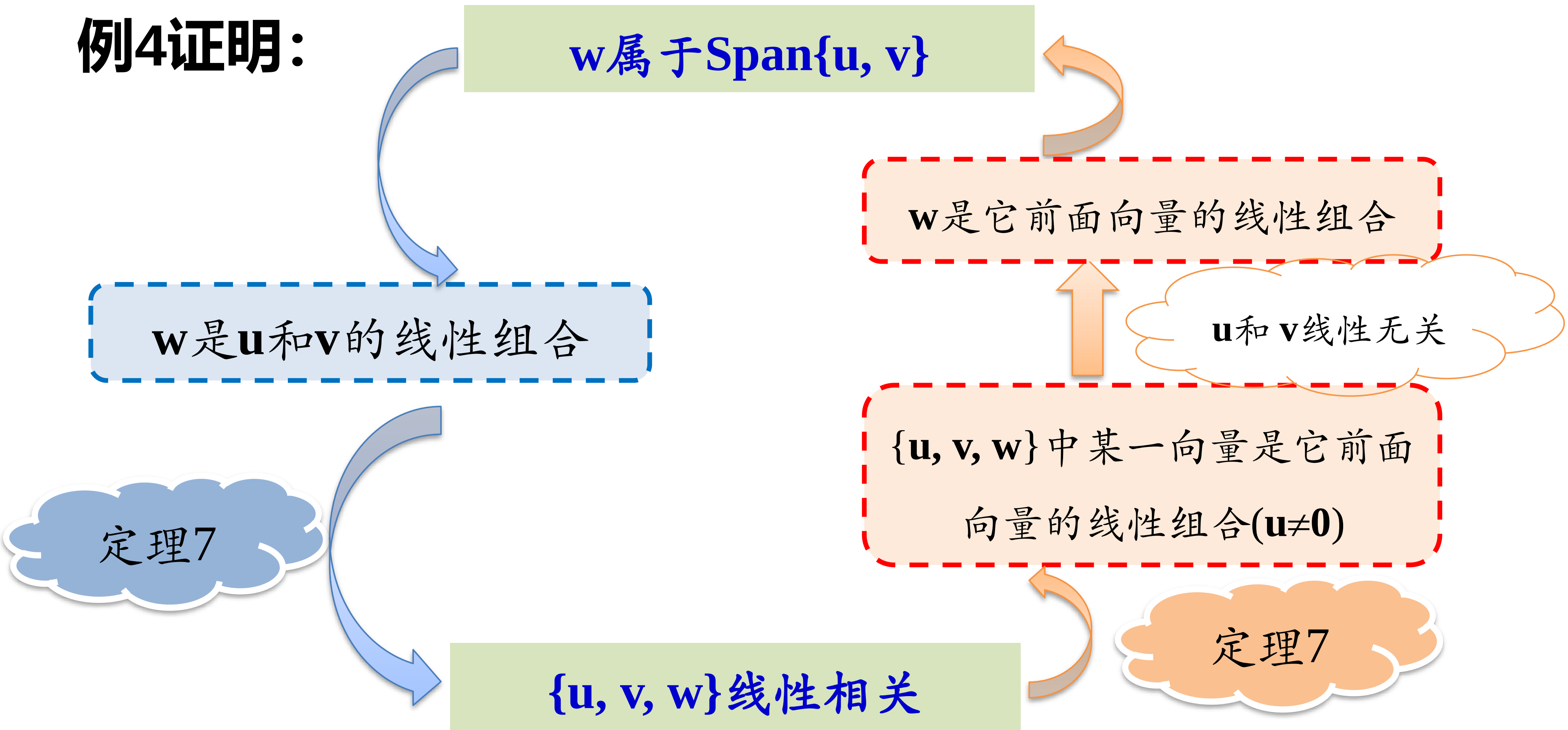


图2 (a) 线性相关，w属于Span{**u, v**};
(b) 线性无关，w不属于Span{**u, v**}

两个或更多个向量的集合

例4证明：



两个或更多个向量的集合

定理8

- 若一个向量组的向量个数超过每个向量元素个数，那么这个向量组线性相关。
  - 也就是，$\mathbb{R}^n$中任意向量组$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$，当$p > n$时线性相关。

$\mathbf{A}=(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p)$
Ax=0 变量数多于方程数

若$p > n$
必定有自由变量

A的**各列线性相关**

两个或更多个向量的集合

例5： 向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是否线性相关。

解：

- 每个向量仅含有2个元素，但共有3个向量

⇩

向量组线性相关

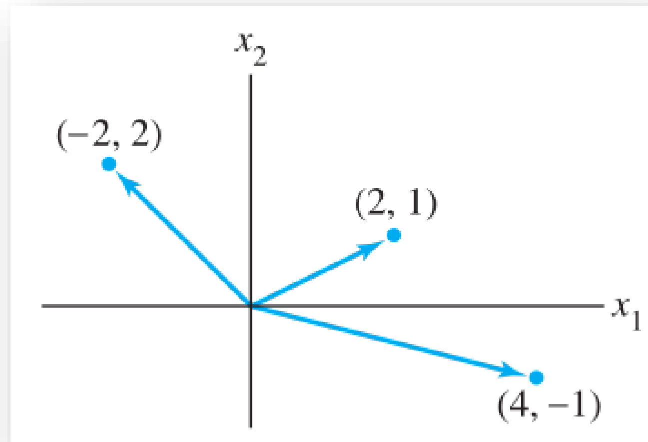


图3 $\mathbb{R}^2$中的线性相关集

两个或更多个向量的集合

定理9

✓ 若向量组$S=\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$包含零向量，则它线性相关。

例6： 用观察法确定下列向量组是否线性相关

a. $\begin{pmatrix}1\\7\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}-2\\4\\6\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-6\\-9\\15\end{pmatrix}$

两个或更多个向量的集合

解：

a 4个向量，3个元素，根据定理8，因此线性相关。

b 含有零向量，根据定理9，因此线性相关。

c 该组中任意一个不是另一个的倍数，因此是线性无关的。

回家作业

回家作业1

作业1

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ h \end{pmatrix}$$

a) h为何值时，$\mathbf{v}_3$属于Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?

b) h为何值时，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$线性相关?

回家作业2

作业2 通过观察判断向量组是否线性相关，给出理由。

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

回家作业3

作业3 判断下列命题的真假，并给出理由。

a. 若**x**和**y**线性无关，而**z**属于Span{**x**,**y**}，则{**x**, **y**, **z**}线性相关。

b. 任意4×5矩阵的各列线性相关。

c. 两个向量线性相关，当且仅当它们在一条通过原点的直线上
。

d. 若$\mathbb{R}^n$中一个向量集线性相关，则此集包含的向量个数多于每个向量中元素的个数。

Q & A