连续型随机变量及其概率密度

“3σ法则”：

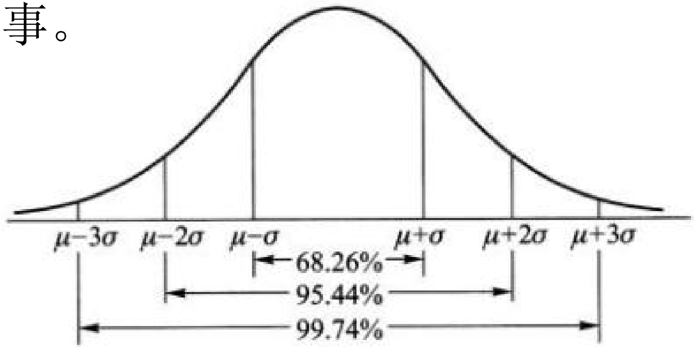
设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 68.26\%$

$P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 95.44\%$

$P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = 99.74\%$

尽管正态变量取值范围为$(-\infty, +\infty)$但它的值落在$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$内几乎是肯定的事。



连续型随机变量及其概率密度

例：将一温度调节器放置在储藏着某种液态的容器内，调节器整定在d度，液态的温度X是一个随机变量，且$X \sim N(d, 0.52)$，(1)若d=90，求X小于89的概率；(2)若要求保持液体的温度至少为80的概率不低于0.99，则d至少为多少？

解：(1)所求概率为

$$P\{X<89\}=P\{\frac{X-90}{0.5}<\frac{89-90}{0.5}\}=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=0.0228$$

(2)按题目d需要满足

$$0.99 \le P\{X \ge 80\}=P\{\frac{X-d}{0.5} \ge \frac{80-d}{0.5}\}=1\text{-}P\{\frac{X-d}{0.5}<\frac{80-d}{0.5}\}=1-\Phi(\frac{80-d}{0.5})$$

即

$$\Phi(\frac{d\text{-}80}{0.5}) \ge 0.99 \approx \Phi(2.327) \quad \Rightarrow \quad d \ge 81.1635$$

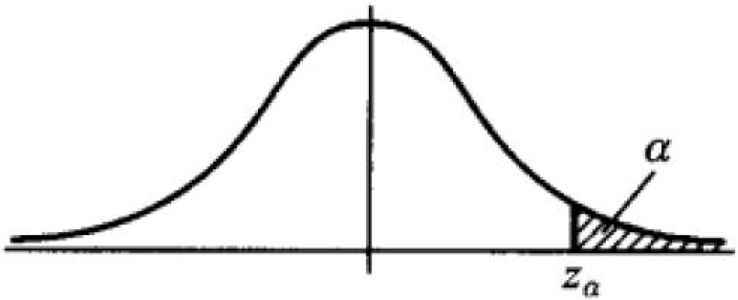
连续型随机变量及其概率密度

设$X \sim N(0,1)$，若z_α满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha,\ 0 < \alpha < 1,$$

则称z_α为标准正态分布的**上α分位数**。

常用的z_α值：



α	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
z_α	3.090	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282

5. 随机变量的函数的分布

随机变量的函数的分布

例：设X的分布律如下：

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

试求$Y = (X-1)2$的分布律。

解：Y的所有可能取值为0, 1, 4, 由

$$P\{\mathrm{Y}=0\}=P\{(X-1)^2=0\}=P\{X=1\}=0.1$$
$$P\{\mathrm{Y}=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.7$$
$$P\{\mathrm{Y}=4\}=P\{X=-1\}=0.2$$

得Y的分布律为：

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

随机变量的函数的分布

例：设随机变量X具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8},0<x<4\\ 0.others\end{cases}$$

求随机变量$Y=\ 2X+8$的概率密度。

解：分别记X，Y的分布函数为$F_X(x)$, $FY(y)$，

$$\mathrm{F}_y(y)=P\{\mathrm{Y}\le y\}=P\{2X+8\le y\}=P\left\{X\le\frac{y-8}{2}\right\}=\mathrm{F}_x\left(\frac{y-8}{2}\right)$$

将$\mathrm{F}_y(y)$关于y求导，得到$Y=\ 2X+8$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\dfrac{y-8}{2})(\dfrac{y-8}{2})'=\dfrac{1}{8}(\dfrac{y-8}{2})\dfrac{1}{2},0<\dfrac{y-8}{2}<4\\ 0,others\end{cases}\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32},8<y<16\\ 0,others\end{cases}$$

随机变量的函数的分布

例：设随机变量X具有概率密度$f_X(x)$，$-\infty < x < +\infty$, 求 $Y = X^2$概率密度.

解：先求Y的分布函数$F_Y(y)$，由于$Y = X^2 \geq 0$，故

当$y \leq 0$时，$F_Y(y) = 0$.

当$y > 0$时，$F_y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})$

将$F_y(y)$关于y求导，得到Y的概率密度为

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_x(\sqrt{y}) + f_x(-\sqrt{y})], & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

随机变量的函数的分布

设$X\sim N(0,1)$，其概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2},\quad -\infty<x<+\infty$$

得$Y=\mathrm{X}^2$的概率密度为

$$f_{\mathrm{Y}}(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

此时称Y服从自由度为1的χ^2分布。

◆ **定理**：设随机变量X具有概率密度$f_X(x)$，$-\infty < x < +\infty$，又设函数g(x)处处可导且恒有$g'(x) > 0$ ($or\ g'(x) < 0$)，则$Y = g(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, \alpha < y < \beta \\ 0, others \end{cases}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $h(y)$是$g(x)$的反函数。

只证$g'(x) > 0$，此时$g(x)$在$(-\infty, +\infty)$严格单调递增，且反函数$h(y)$存在, 且在区间(α, β)上严格单调递增、可导.

随机变量的函数的分布

分别记X，Y的分布函数为 $F_X(x), FY(y)$, 则

当$y \le \alpha$时， $\mathrm{F}_y(y) = P\{\mathrm{Y} \le y\} = 0$

当$y \ge \beta$时， $\mathrm{F}_y(y) = P\{\mathrm{Y} \le y\} = 1$

当$\alpha < y < \beta$时， $\mathrm{F}_y(y) = P\{\mathrm{Y} \le y\} = P\{g(X) \le y\} = P\{X \le h(y)\} = \mathrm{F}_x\big(h(y)\big)$

将$\mathrm{F}_y(y)$关于y求导，得到Y的概率密度为

$$f_y(y) = \begin{cases} f_x[h(y)]h'(y), & \alpha < y < \beta \\ 0, & other \end{cases}$$

对于$g'(x) < 0$，可得

$$f_y(y) = \begin{cases} f_x[h(y)][-h'(y)], & \alpha < y < \beta \\ 0, & other \end{cases}$$

综上，定理得证。

随机变量的函数的分布

例：设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明$Y = aX + b\ (a \neq 0)$也是正态分布。

解：X的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

由$y = g(x) = ax + b$, 得$x = h(y) = \frac{y-b}{a}$，且有$h'(y) = \frac{1}{a}$。

$Y = aX + b$的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), -\infty < y < +\infty$$

即$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}$

即有$Y = aX + b \sim \mathrm{N}(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

随机变量的函数的分布

例：设电压$V=Asin\theta$，其中A是一个已知的正常数，相角θ是一个随机变量，服从$\theta\sim U(-\pi/2, +\pi/2)$，求V的概率密度.

解：现在$v=g(\theta)=Asin\theta$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上恒有$g'(\theta)=Acos\theta>0$, 且有反函数

$$\theta=h(v)=arcsin\frac{v}{A},\ h'(v)=\frac{1}{\sqrt{A^2-v^2}}$$

Θ的概率密度为$f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\\ 0, & other\end{cases}$

得$V=Asin\theta$的概率密度为

$$\psi(v)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{A^2-v^2}}, & -A<v<A\\ 0, & other\end{cases}$$

THANKS

谢谢！