线性代数 (Linear Algebra)



第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§ 1.2 Row Reduction and Echelon Forms 行化简与阶梯形矩阵 衡益

2021 年 9 月 30 日,中山大学南校区

行化简与阶梯形矩阵



- ▶ 定义
- ▶ 主元位置
- ▶ 行化简算法
- > 线性方程组的解
- > 解集的参数表示
- ▶ 存在与唯一性问题



阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵

定义: 若一个矩阵有如下三个性质,则称该矩阵为阶梯形矩阵:

- ✓ 所有非零行在每一零行之上;
- ✓ 某一行的先导元素所在的列位于前一行先导元素的右面;
- ✓ 某一先导元素所在列下方元素都是零。

定义: 若一个阶梯形矩阵还满足以下性质,则称它为简化阶梯形矩阵:

- ✓ 每一非零行的先导元素是1;
- ✓ 每一先导元素1是该元素所在列的唯一非零元素。

3

阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵



下列矩阵是阶梯形矩阵 (上三角阵):

(a)
$$\begin{pmatrix} A & * & * & * \\ 0 & A & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*元素可取任意值, 包括零值

下列矩阵是简化阶梯形矩阵:

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

先导元素▲取1



阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵

练习: 下列矩阵哪些是阶梯形矩阵

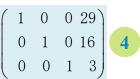
, 哪些更是简化阶梯形矩阵?

$$\left(\begin{array}{cccc}
2 & -3 & 2 & 1 \\
0 & 1 & -4 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 5/2
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 0 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 16 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc}
2 & -3 & 2 & 1 \\
0 & 1 & -4 & 8 \\
0 & -1/2 & 7 & -3/2
\right)$$

1



$$\left(\begin{array}{cccc}
2 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1
\right)$$

5

简化阶梯形矩阵



定理1 (简化阶梯形矩阵的唯一性)

✓ 每个矩阵行等价于唯一的简化阶梯形矩阵。

- ▶ 若矩阵A等价于阶梯形矩阵U, 称U为A的阶梯形;
- ▶ 若U是简化阶梯形, 称U为A的简化阶梯形;
- ▶ RREF作为简化阶梯形的缩写, REF作为阶梯形的缩写。



行化简与阶梯形矩阵

- ▶ 定义
- ▶ 主元位置
- ▶ 行化简算法
- > 线性方程组的解
- > 解集的参数表示
- > 存在与唯一性问题

7



主元

主元 (Pivot)

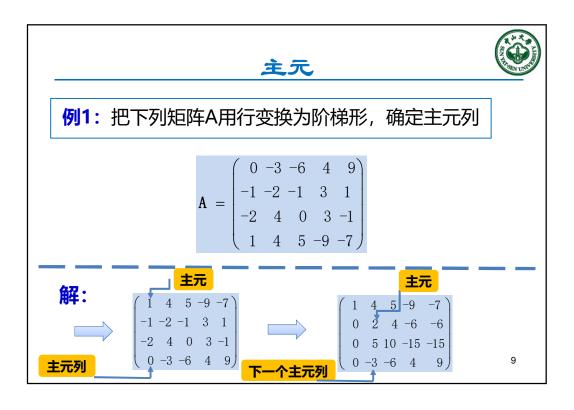
✓ 主元是矩阵A对应于它的阶梯形中,每行从左起的第一个非零的元素。

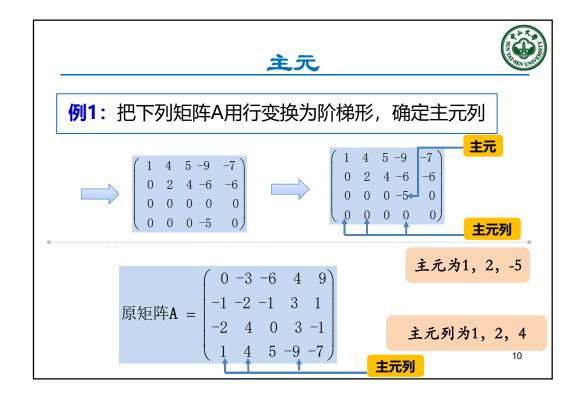
主元位置

✓ 矩阵中的主元位置是A中对应于它的阶梯形中先导 元素的位置。

主元列

✓ 主元列是A的含有主元位置的列。







行化简与阶梯形矩阵

- ▶ 定义
- ▶ 主元位置
- > 行化简算法
- > 线性方程组的解
- > 解集的参数表示
- > 存在与唯一性问题

11



行化简和阶梯形

行化简算法

- 由最左的非零列开始。这是一个主元列,主元位置在该列顶端;
- ②在主元列中选取一个非零元作为主元。若有必要的话,对换两行使这个元素移到主元位置上;
- ③用倍加行变换将主元下面的元素化简为0;
- ④暂时不管包含主元位置的行以及它上面的各行,对剩下的子矩阵使用上述的三个步骤直到没有非零行需要处理为止;
- ⑤由最右面的主元开始,把每个主元上方的各元素变成0。若某个 主元不是1,用倍乘变换将它变成1。(简化阶梯形时需要第五步)¹²

行化简举例



例2:用行变换把下列矩阵先化为 阶梯形,再化为简化阶梯形

$$\left(\begin{array}{ccccccc}
0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\
3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\
3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15
\end{array}\right)$$

解:

$$\begin{pmatrix}
0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\
3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\
3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathbf{R_1} \leftarrow \rightarrow \mathbf{R_3}}
\begin{pmatrix}
3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\
3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\
0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5
\end{pmatrix}$$

行化简举例

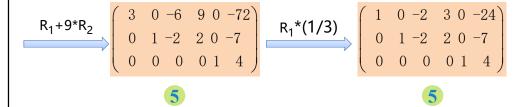


例2:用行变换把下列矩阵先化为 阶梯形,再化为简化阶梯形

行化简举例



例2:用行变换把下列矩阵先化为 阶梯形,再化为简化阶梯形



第1~4步称为行化简算法的前推阶段,产生唯一的简化 阶梯形的第5步,称为回溯阶段

15

行化简与阶梯形矩阵



- ▶ 定义
- ▶ 主元位置
- ▶ 行化简算法
- > 线性方程组的解
- > 解集的参数表示
- > 存在与唯一性问题



线性方程组的解

行化简算法应用于方程组的增广矩阵时,可以得出线 性方程组解集的一种显示描述

线性方程组的解

✓ 方程组所有解的显示描述称为该方程组的解集

基本变量 (Basic variable) 对应于主元列的变量称为基本变量。

自由变量 (Free variable) 其他变量, 称为自由变量。

17

线性方程组的解



例3: 求方程组的解,该方程的增广矩阵已经化为

$$\begin{pmatrix}
1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\
0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{pmatrix}$$

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

线性方程组的解



例3: 求方程组的解, 该方程的增广矩阵已经化为

$$x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0$$

 $x_3 - 4x_4 = 5$
 $x_5 = 7$



 $\begin{bmatrix}
 x_1 &= -6x_2 - 3x_4 \\
 x_2 为自由变量 \\
 x_3 &= 5 + 4x_4 \\
 x_4 为自由变量 \\
 x_5 &= 7
 \end{bmatrix}$

解集

19

行化简与阶梯形矩阵



- ▶ 定义
- ▶ 主元位置
- ▶ 行化简算法
- > 线性方程组的解
- ▶ 解集的参数表示
- > 存在与唯一性问题



解集的参数表示

解集的参数表示

- ✓ 解方程组是求出解集的参数表示或确定它无解。
- ✓ 我们使用自由变量作为参数来表示解集。
- ✓ 当方程组不相容,解集是空集,无参数表示。

21



行化简与阶梯形矩阵

- ▶ 定义
- ▶ 主元位置
- ▶ 行化简算法
- > 线性方程组的解
- > 解集的参数表示
- > 存在与唯一性问题



存在与唯一性问题

存在与唯一性定理

✓ 线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主 元列。也就是说,增广矩阵的阶梯形没有形如

$$(0 \cdots 0 b) b \neq 0$$

若线性方程相容,它的解集可能有两种情形:

- (i) 当没有自由变量时,有唯一解;
- (ii) 若至少有一个自由变量, 有无穷多解。

23





例4: 确定下列线性方程组的解是否存在且唯一

$$3x_{2} + x_{3} + 6x_{4} + 4x_{5} = -5$$

$$3x_{1} - 7x_{2} + 8x_{3} - 5x_{4} + 8x_{5} = 9$$

$$3x_{1} - 9x_{2} + 12x_{3} - 9x_{4} + 6x_{5} = 15$$

解:

基本变量: x₁, x₂, x₅; 自由变量: x₃, x₄ 方程组有无穷多解



行化简算法求解线性方程组

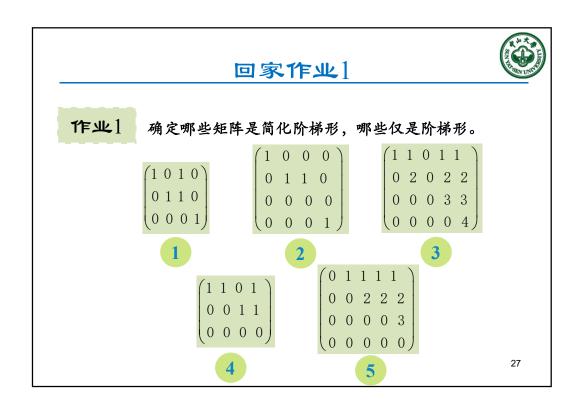
应用行简化算法解线性方程组 (五步)

- ① 写出方程组的增广矩阵;
- ②应用行化简算法把增广矩阵化为<mark>阶梯形</mark>。确定方程组**是否有解**,若无解则停止,反之进行下一步;
- ③继续行化简算法得到它的简化阶梯形;
- ④写出由第3步得到矩阵对应的方程组;
- ⑤把第4步所得的每个方程改写为用自由变量表示基本变量的形式.

25



回家作业



回家作业2



作业2

将下列矩阵化简为简化阶梯形,在最终的矩阵和原始矩阵中圈出主元位置,指出主元列。

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 5 & 6 & 7 \\
6 & 7 & 8 & 9
\end{pmatrix}$$
a)

$$\begin{pmatrix}
1 & 3 & 5 & 7 \\
3 & 5 & 7 & 9 \\
5 & 7 & 9 & 1
\end{pmatrix}$$

b)

回家作业3



作业3

已给出线性方程组的增广矩阵, 求其通解。

$$\begin{pmatrix}
1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\
-1 & 7 & -4 & 2 & 7
\end{pmatrix}$$

 $\begin{pmatrix}
1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$

a)

b)

29

沃河



> 预习向量方程组

