第三章 多维随机变量及其分布

• 中山大学 • 计算机学院 • 郑培嘉 • Email：zhpj@mail.sysu.edu.cn

目录

1. 二维随机变量
2. 边缘分布
3. 条件分布
4. 相互独立的随机变量
5. 两个随机变量的函数的分布

1. 二维随机变量

二维随机变量

实际中，我们往往需要同时考察两个或两个以上的随机变量，如为了研究某地区学龄前儿童发育情况，对该地区儿童进行抽查，考察每个儿童的身高和体重；如考察炮弹着点位置的横、纵坐标两随机变量等。

- **定义**：设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$,设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个向量(X,Y)叫做**二维随机变量**或**二维随机向量**。

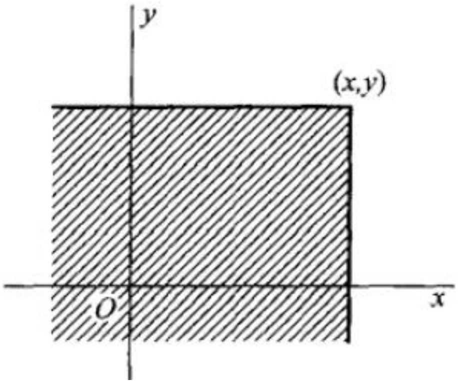
注：二维随机变量(X,Y)的性质不仅与X及Y有关，而且依赖这两个随机变量的相互关系，因此，不能像之前那样单独地研究X和Y，需将（X，Y）作为一个整体进行讨论。

二维随机变量

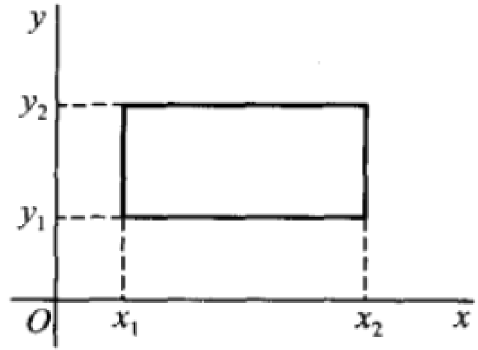
◆ 设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x, y，二元函数：

$$F(x,y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} \xlongequal{\text{记成}} P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的**分布函数**或随机变量X和Y的**联合分布函数**。



$F(x,y)$在(x,y)处值为随机点(X, Y)落在阴影处概率。



$F(x,y)$落在矩形域中概率为：

$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2)$

二维随机变量

- **联合分布函数性质：**

- $F(x,y)$是变量x和y的不减函数，即

对于任意固定的y，当$x_2 > x_1$时，$F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;

对于任意固定的x，当$y_2 > y_1$时，$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$;

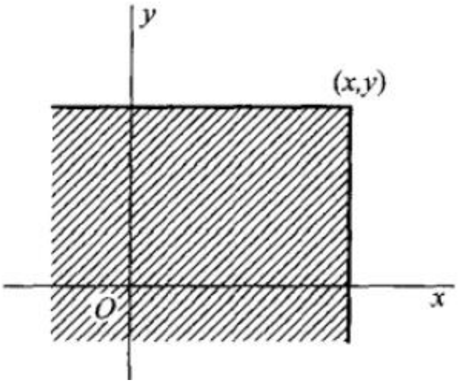
- $0 \leq F(x,y) \leq 1$，且

对于任意固定的y，$F(-\infty,y) = 0$;

对于任意固定的x，$F(x,-\infty) = 0$;

$F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(+\infty,+\infty) = 1$;

二维随机变量



如右图，将无穷矩阵的右面边界向左无限平移，则“随机点(X, Y)落在矩阵内”这一事件概率趋于不可能事件，即有$F(-\infty, y) = 0$；当$x \to \infty, y \to \infty$时，无穷矩形扩展到全平面，随机点(X, Y)落在其中趋于必然事件，即有$F(+\infty, +\infty) = 1$

- $F(x+0, y) = F(x, y)$，$F(x, y+0) = F(x, y)$，即 $F(x, y)$关于x右连续，关于y也右连续。
- 对于任意(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，下述不等式成立：

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0$$

二维随机变量

- **定义：**若二维随后变量（X，Y）全部可能取到的值是有限对或可列无限多对，则称（X，Y）是**二维离散型随机变量**。
- 二维离散型随机变量（X，Y）的**分布律**（又称随机变量X和Y的**联合分布律**）：

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

记$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2, \ldots$

其中有：$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

二维随机变量

例：设随机变量X在1, 2, 3, 4四个整数中等可能取一个值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一个整数值，试求（X, Y）的分布律。

解：易知$\{X=i,Y=j\}$的取值情况是：$i=1,2,3,4$, j取不大于i的正整数，且

$$P\{X=\mathrm{i},Y=j\}=P\{Y=j|X=\mathrm{i}\}P\{X=\mathrm{i}\}=\frac{1}{i}\times\frac{1}{4}$$

分布律为：

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

二维随机变量

◆ **定义**：对于二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(x,y)$, 如果存在非负可积函数$f(x,y)$使得对于任意x， y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

则称(X, Y)是**二维连续型随机变量**，函数$f(x,y)$称为二维连续型随机变量(X, Y)的**概率密度**，或称随机变量X和Y的**联合概率密度**。

二维随机变量

◆ 联合概率密度性质：

- $f(x,y) \ge 0$.
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$.
- 设G是xOy平面上的区域，点(X, Y)落在G内的概率为：

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy$$

- 若$f(x,y)$在点（x,y）连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

二维随机变量

例：设二随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & other.\end{cases}$$

求：(1)分布函数$F(x,y)$；(2)概率$P\{Y\le X\}$；

解：(1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}\int_0^{y}\int_0^{x}2e^{-(2x+y)}dxdy, & x>0, y>0\\ 0, & other.\end{cases}$$

即有$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0\\ 0, & other.\end{cases}$

二维随机变量

(2)将(X, Y)看作平面上随机点的坐标，即有

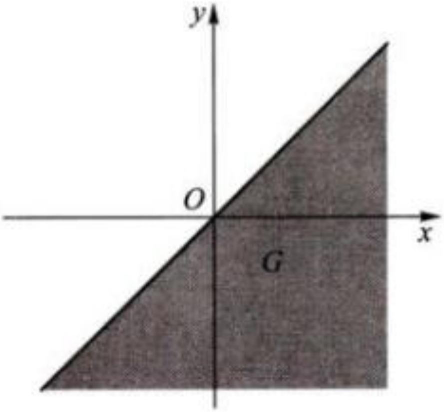
$$\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\},$$

其中G为xOy平面上直线$y = x$及其下方的部分，如图所示：

则

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\} = \iint\limits_G f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dxdy = \frac{1}{3}$$



二维随机变量

推广：（n维随机变量的情况）

- 设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$, 设$X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \dots, X_n=X_n(e)$ 是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个n维向量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$称为**n维随机变量**或**n维随机向量**。
- 对于任意n个实数$(x_1, x_2, \dots, x_n)$，n元函数

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n)=P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n\}$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的**分布函数**或随机变量$X_1, X_2, \dots, X_n$的**联合分布函数**。

2. 边缘分布

边缘分布

- **定义：** 二维随机变量(X，Y)作为一个整体，具有分布函数$F(X,Y)$，而X和Y都是随机变量，各自也有分布函数，记为$F_X(x), F_y(y)$, 依次称为二维随机变量(X，Y)关于X和关于Y的**边缘分布函数**。

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

即：

$$F_X(x) = F(x, \infty)$$

同理有：

$$F_Y(y) = F(\infty, y)$$

边缘分布

对于离散型随机变量有：$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$

而X的分布律为：$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$， $i = 1,2, \ldots.$

同理Y的分布律为：

$$P\{\mathrm{Y} = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \qquad j = 1,2, \ldots.$$

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1,2, \ldots.$$

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{\mathrm{Y} = y_j\}, j = 1,2, \ldots.$$

$p_{i\cdot}$和$p_{\cdot j}$为$(X，Y)$关于X和关于Y的边缘分布律。

边缘分布

对于连续型随机变量$(X，Y)$，设它的概率密度为$f(x,y)$, 则

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}\right]dx$$

X为一个连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}$$

同理，对于Y的概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dx}$$

分别称$f_X(x)$，$f_Y(y)$为关于X和关于Y的边缘概率密度。

边缘分布

例：整数N等可能地在$1, 2...10$十个值中去一个值，设$D = D(N)$是能整除N的正整数的个数，$F = F(N)$是能整除N的素数的个数，试写出D和F的联合分布律及边缘分布律。

解：样本空间及D，F取值情况如下：

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

D所有可能取值为$1, 2, 3, 4$；F所有可能取值为$0, 1, 2$；
易得D和F的联合分布律及边缘分布如下表：

联合分布

F \ D	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$
2	0	0	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$
$P\{D=i\}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

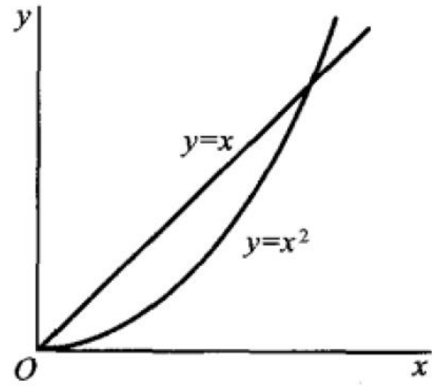
边缘分布

边缘分布

例：设随机变量X和Y具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & other\end{cases}$$

求边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$。

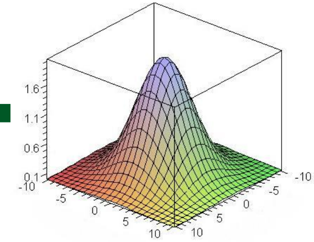


解：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

边缘分布



例：设二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数，且$\sigma_1>0,\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$，称$(X,Y)$服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布，记$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,{\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2,\rho)$. 试求二维正态随机变量的边缘概率密度。

解：

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{dy}$，由于

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

边缘分布

于是

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}dy$$

令

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$$

则有

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt$$

即

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}$$

其中$-\infty<x<\infty$，$-\infty<y<\infty$。

边缘分布

上题结论：

- 二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，且都不依赖参数ρ；
- 单由关于X和关于Y的边缘分布，一般来说不能确定随机变量X和Y的联合分布。

3. 条件分布

条件分布

设(X,Y)是二维离散型随机变量，其分布律为：

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\qquad i,j=1,2,\ldots.$$

(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布律分别为:

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\,,\qquad i=1,2,\ldots.$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\,,\qquad j=1,2,\ldots.$$

设$p_{\cdot j}>0$,现考虑在事件$\{Y=y_j\}$已发生的条件下事件$\{X=x_i\}$即

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

条件分布

上述条件概率具有分布律的**性质**：

- $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geq 0$
- $\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i|Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\frac{1}{p_{\cdot j}}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}}=1$

◆ **定义**：设(X, Y)是二维离散型随机变量，对于固定j，若P$\{Y=y_j\}>0$,则称$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的**条件分布律**。

同理，对于固定i

若$P\{X=x_i\}>0$,则称$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的**条件分布律**。

条件分布

例：在一汽车工厂中，一辆汽车有两道工序是由机器人完成的。其一是紧固3只螺栓，其二是焊接2处焊点，以X表示由机器人紧固的螺栓中紧固得不良的数目，以Y表示表示由机器人焊接的不良焊接点的数目，据积累的资料知X, Y有以下联合分布律：

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

求1) $X = 1$条件下，Y的条件分布律；2) $Y = 0$条件下，X的条件分布律。

条件分布

解:

(1) 在$X=1$条件下，Y的条件分布律为

$$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.030}{0.045}$$

$$P\{Y=1|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.010}{0.045}$$

$$P\{Y=2|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.005}{0.045}$$

或写成

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k\|X=1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

条件分布

(2)同样可得在$Y=0$的条件下X的条件分布律为

$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k\mid Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

条件分布

例：射手射中目标概率为$p(0 < p < 1)$，射击直至击中目标两次为止，X表示首次击中目标所进行的射击次数，Y表示总共进行的射击次数，试求X和Y的联合分布律和条件分布律.

解：

$Y = n$表示在第n次射击击中目标，且在第1次, 第2次, ⋯, 第n-1次射击中恰有一次击中目标。各次射击是相互独立的，则不管m($m < n$)是多少，概率$P\{X = m, Y = n\}$都应等于

$$p \cdot p \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \cdots \cdot q}_{\text{n-2个}} = p^2 q^{n-2} \quad (q = 1 - p)$$

得X和Y得联合分布律为

$$P\{X = m, Y = n\} = p^2 q^{n-2} \qquad n = 2,3, \ldots; m = 1,2, \ldots, n-1$$

条件分布

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}$$

$$=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}q^{n-2}=\frac{p^2q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1}$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2}$$

故所求得条件分布律为

当$n=2,3,\ldots$时，

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$$

当$m=1,2,\ldots$时，

$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$$

条件分布

【连续情形】设(X,Y)概率密度为$f(x,y)$，(X,Y)关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 对给定y, 对于任意固定 $\varepsilon > 0$ 和对于任意x，考虑条件概率

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\}$$

设$P\{y < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$，则有

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x,y)dy]\,dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)dy}$$

在某些条件下，当ε很小时，上式右端分子、分母分别近似于$\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx$ 和$\varepsilon f_Y(y)$，故有

条件概率密度

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} \approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{\varepsilon f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

条件分布

◆ 定义：设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x,y)$, (X, Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$, 若对于固定的y，$f_Y(y) > 0$, 则称$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y = y$条件下X的条件概率密度记为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

称$\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$为在$Y = y$条件下X的条件分布函数，记为$P\{X \le x|Y = y\}$或$F_{x|y}(x|y)$, 即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x|Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

类似可定义有

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$和$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy$

条件分布

例：设G是平面上的有界区域，其面积为A。若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & other\end{cases}$$

则称(X, Y)在G上服从**均匀分布**。现设二维随机变量(X, Y)在圆域$x^2+y^2\le 1$上服从均匀分布求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

解：随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

有边缘概率密度

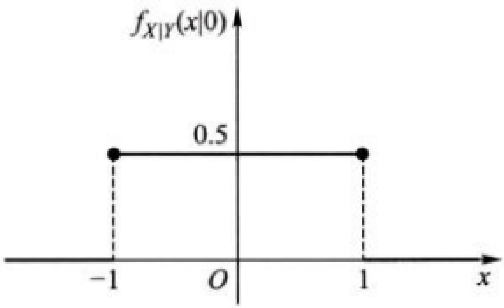
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & other\end{cases}$$

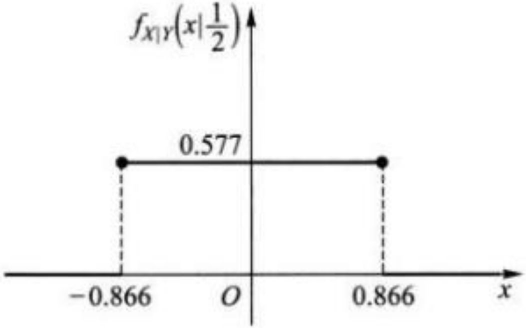
条件分布

当$-1 < y < 1$时有

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0, & other \end{cases}$$

当$y = 0, y = \frac{1}{2}$时$f_{X|Y}(x|y)$的图形如下图所示：





条件分布

例：设数X在区间(0, 1)上随机地取值，当观察到$X = x, (0 < x < 1)$时，数Y在区间(x, 1)上随机地取值，求Y的概率密度$f_Y(y)$.

解：X具有概率密度$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & other \end{cases}$

对于任意给定的值$x(0 < x < 1)$，在$X = x$的条件下Y的概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & other \end{cases}$$

X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & other \end{cases}$$

Y的边缘概率密度为$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & other \end{cases}$

4. 相互独立的随机变量

相互独立的随机变量

◆ **定义**：设$F(x,y)$及$F_X(x)$，$F_Y(y)$分别是二维随机变量(X, Y)的分布函数及边缘分布函数，若对于所有x, y 有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量X和Y是**相互独立**的。

- 设(X, Y)是连续型随机变量，$f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$分别为(X, Y)的概率密度和边缘概率密度，则X和Y相互独立等价于：

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

- 设(X, Y)是离散型随机变量，X和Y相互独立等价于：对于(X, Y)的所有可能取值(x_i, y_j)有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$$

相互独立的随机变量

◆ 例如：对随机变量X和Y，由于

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & other. \end{cases}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & other. \end{cases}$$

故有$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, 因此X, Y相互独立

◆ 又如，若X, Y具有联合分布律

Y \ X	0	1	$P\{Y=j\}$
1	1/6	2/6	1/2
2	1/6	2/6	1/2
$P\{X=i\}$	1/3	2/3	1

则有

$$P\{X=0,Y=1\} = 1/6 = P\{X=0\}P\{Y=1\}$$
$$P\{X=0,Y=2\} = 1/6 = P\{X=0\}P\{Y=2\}$$
$$P\{X=1,Y=1\} = 2/6 = P\{X=1\}P\{Y=1\}$$
$$P\{X=1,Y=2\} = 2/6 = P\{X=1\}P\{Y=2\}$$

因而X, Y互相独立

相互独立的随机变量

考察二维正态随机变量(X, Y)，它的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\},-\infty<x,y<+\infty$$

其边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$的乘积为

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}]\}$$

分析：若$\rho=0$，则对于所有x,y有$\mathrm{f}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，即$X,Y$互相独立。反之$X,Y$互相独立，由于$\mathrm{f}(x,y),f_X(x),f_Y(y)$都是连续函数，对于所有$x,y$有$\mathrm{f}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

特别令$x=\mu_1,\mathrm{y}=\mu_2$，有$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$，从而$\rho=0$

结论：对于二维正态随机变量(X,Y)，X和Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$。

相互独立的随机变量

例：一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12小时，他的秘书到达办公室时间均匀分布在7~9时，设他们到达时间相互独立，求他们到达办公室的时间差不超过5min(1/12h)的概率.

解：设X和Y分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间，X和Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 8<x<12\\ 0, & other\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 7<y<9\\ 0, & other\end{cases}$$

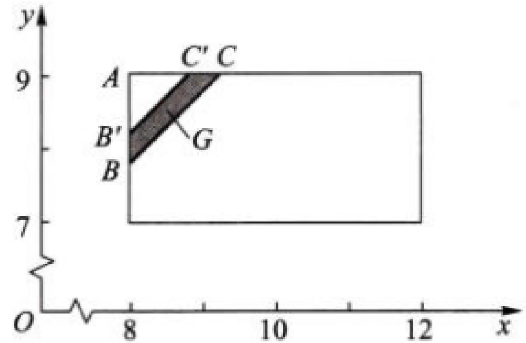
因为X, Y相互独立，则(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 8<x<12, 7<y<9\\ 0, & other\end{cases}$$

相互独立的随机变量

题意要求概率$P\left\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\right\}$, 由题可得下图

显然仅当取值于G内才满足题意。



故所求概率为

$$P\left\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\right\}$$

$$=\iint\limits_{G} f(x,y)\,dxdy=\frac{1}{8}\times(\text{G的面积})$$

而易求得G的面积=$\frac{1}{6}$

则$P\left\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\right\}=\frac{1}{48}$

相互独立的随机变量

推广：

n维随机变量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n\}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$为任意实数。

- 若存在非负可积函数$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 使对于任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$有:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

则称$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$为$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的**概率密度函数**。

- 若分布函数$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$已知，则$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的k维边缘分布函数就随之确定, 如$(X_1, X_2, \dots, X_n)$关于X_1,关于(X_1, X_2)的**边缘分布函数**:

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \dots, \infty),$$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \infty \dots, \infty)$$

相互独立的随机变量

- 若$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$是$(X_1,X_2,\dots,X_n)$的概率密度，则$(X_1,X_2,\dots,X_n)$关于X_1,关于(X_1,X_2)的**边缘概率密度**分别为:

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_2\,dx_3\cdots dx_n$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_3\,dx_4\cdots dx_n$$

- 若对于所有的$x_1,x_2,\dots,x_n$有

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\dots F_{X_n}(x_n)$$

- 若对于所有的$x_1,x_2,\dots,x_m;y_1,y_2,\dots,y_n$有

$$F(x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,y_2,\dots,y_n)=F_1(x_1,x_2,\dots,x_m)F_2(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

F_1，F_2, F分别为随机变量$(X_1,X_2,\dots,X_m)$, $(\mathrm{Y}_1,Y_2,\dots,Y_n)$和$(X_1,X_2,\dots,X_m,\mathrm{Y}_1,Y_2,\dots,Y_n)$的分布函数，称随机变量$(X_1,X_2,\dots,X_m)$和$(\mathrm{Y}_1,Y_2,\dots,Y_n)$相互独立。

相互独立的随机变量

◆ **定理**：

➢ 设$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$和$(\mathrm{Y}_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立，则 $X_\mathrm{i} = (i = 1,2, \ldots, m)$和$\mathrm{Y}_j = (j = 1,2, \ldots, n)$ 相互独立.

➢ 又若h, g是连续函数，则$h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$和 $\mathrm{g}(\mathrm{Y}_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立

5. 两个随机变量的函数的分布

两个随机变量的函数的分布

◆ **$Z=X+Y$分布**：

设(X, Y)是二维连续型随机变量，它具有概率密度$f(x,y)$, 则$Z=X+Y$仍为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy \quad 或 \quad f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$$

若X和Y相互独立且(X, Y)关于X, Y的边缘概率密度为$f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则有：

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy$$

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)dx$$

称上述两个公式为f_X, f_Y的**卷积公式**，记为f_X*f_Y，即

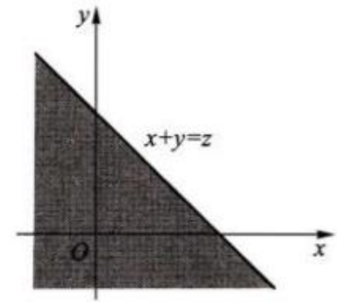
$$f_X*f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)dx$$

两个随机变量的函数的分布

证： $Z = X + Y$的分布函数$F_Z(x)$为

$$F_Z(x) = \mathrm{P}\{\mathrm{Z} \le z\} = \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

其积分区域如图所示：



将二重积分化为累次积分得：

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dx\right]dy$$

固定z和y对积分$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dx$作变量变换，令$x = u - y$得

$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,du$ ，则

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,du\right]dy = \int_{-\infty}^{z}\overset{\text{概率密度}}{\boxed{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)\,dy\right]}}\,du$$

两个随机变量的函数的分布

例：设X和Y是相互独立的随机变量，都服从N(0, 1)分布，其密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty \qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},-\infty<y<+\infty$$

求$Z=X+Y$的概率密度。

解：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)\,f_Y(z-x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

令$t=x-\frac{z}{2}$，得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即Z服从N(0, 2)分布

两个随机变量的函数的分布

- 一般，设X, Y相互独立且$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$．$Z = X + Y$仍然服从正态分布，且$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$。
- 将其推广到n个独立正态随机变量之和得情况。

若$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)(i = 1,2, \dots, n)$, 且它们相互独立，则它们的和

$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$仍然服从正态分布，且

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

注：更一般地，可以证明有限多个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布。

两个随机变量的函数的分布

例：在一简单电路中，两电阻R_1和R_2串联连接，设R_1和R_2相互独立，它们的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, 0\le x\le 10\\ 0, others\end{cases}$$

求总电阻$R=R_1+R_2$的概率密度。

解：R的概率密度为

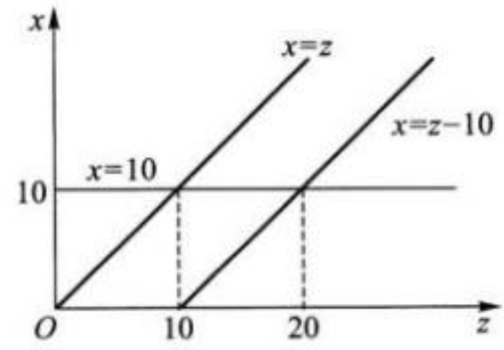
$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx$$

仅当$\begin{cases}0<x<10\\0<z-x<10\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<x<10\\z-10<x<z\end{cases}$ 时积分的被积函数不等于0.

两个随机变量的函数的分布

如图所示

$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)dx, & 0\le z<10\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)dx, & 10\le z\le 20\\ 0, & others\end{cases}$$



将$f(x)$的表达式代入上式得

$$f_R(z)=\begin{cases}\frac{1}{15000}(600z-60z^2+z^3), & 0\le z<10\\ \frac{1}{15000}(20-z)^3, & 10\le z<20\\ 0, & others\end{cases}$$

两个随机变量的函数的分布

例：设随机变量X, Y相互独立, 且服从参数为$\alpha,\theta;\beta,\theta$的$\Gamma$分布，其密度函数如下：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & others,\end{cases}\quad \alpha>0,\theta>0.$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\beta}\Gamma(\beta)}x^{\beta-1}e^{-y/\theta}, & y>0,\\ 0, & others,\end{cases}\quad \beta>0,\theta>0.$$

试证明$Z=X+Y$服从参数为$\alpha+\beta,\theta$的Γ分布.

证：$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

仅当$\begin{cases}x>0\\ z-x>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>0\\ x<z\end{cases}$时上述积分的被积函数不为零。

两个随机变量的函数的分布

如图

$z<0$时， $f_Z(z)=0$

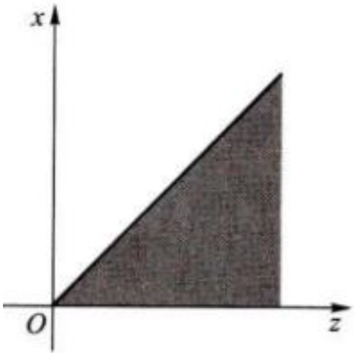
$z>0$时，$f_Z(z)=\int_0^z \frac{1}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}\frac{1}{\theta^\beta\Gamma(\beta)}(z-x)^{\beta-1}e^{-(z-x)/\theta}dx$

$$=\frac{e^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1}dx\,(\text{令}x=zt)$$

$$=\frac{z^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$=\mathrm{A}z^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}$$

其中$\mathrm{A}=\frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$



由概率密度性质得

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f_Z(z)\,dz=\int_0^{\infty}\mathrm{A}z^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}\,dz$$

$$=A\theta^{\alpha+\beta}\int_0^{\infty}\left(\frac{z}{\theta}\right)^{\alpha+\beta-1}e^{-\frac{z}{\theta}}d\left(\frac{z}{\theta}\right)=A\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)$$

两个随机变量的函数的分布

即有$A = \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)}$

于是

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-z/\theta}, & z > 0, \\ 0, & others. \end{cases}$$

即$X + Y \sim \Gamma(\alpha+\beta, \theta)$

推广：若$X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立，且X_i服从参数为$\alpha_i, \beta(i = 1,2,\dots,n)$的Γ分布，则$\sum_{i=1}^{n} X_i$服从参数为$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta$的Γ分布.

这一性质称为**Γ分布的可加性**。