线性代数 (Linear Algebra)

第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

§ 5.3 Diagonalization

对角化

衡 益

2021 年 12 月 14 日，中山大学南校区

5.3 对角化

引入

2

5.3 对角化

思考 可否用其他方法得到方阵A的特征值信息?

若A与一个对角矩阵相似，$A = PDP^{-1}$，
那么D的对角线元素都是A的特征值

目的？？

对角矩阵便于计算

3

5.3 对角化

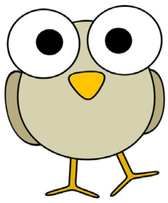
Q：什么是
对角矩阵？？

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

4

5.3 对角化

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



??

矩阵对角化

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

5

5.3 对角化

例1 若$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，那么计算$D^2$和$D^3$.

解： 计算可知

$$D^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

那么，以此类推可知

$$D^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}, k \geq 1$$

6

5.3 对角化

例2 设$A=\begin{bmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$, 已知$A=PDP^{-1}$，计算$A^k$

$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

解： 计算可知

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

那么

$$A^2=(PDP^{-1})(PDP^{-1})=PD(P^{-1}P)DP^{-1}=PDDP^{-1}$$

$$=PD^2P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^2 & 0\\ 0 & 3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

5.3 对角化

例2 设$A=\begin{bmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$, 已知$A=PDP^{-1}$，计算$A^k$

$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

解： 那么

$$A^3=(PDP^{-1})A^2=(PDP^{-1})PD^2P^{-1}=PDD^2P^{-1}=PD^3P^{-1}$$

以此类推，对于$k\geq 1$,

$$A^k=PD^kP^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^k & 0\\ 0 & 3^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot 5^k-3 & 5^k-3^k\\ 2\cdot 3^k-2\cdot 5^k & 2\cdot 3^k-5^k\end{bmatrix}$$

5.3 对角化

以上两个例题使我们感受到了对角化的好处！

Next

满足

$$P^{-1}AP = D$$

我们来讨论P应该满足什么关系。

5.3 对角化

Question 1：A满足什么条件时是可对角化的？

Question 2：P中的列向量是否线性相关性如何？

5.3 对角化

把P用其列向量表示为：

$$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

由$P^{-1}AP = \Lambda$可得，$AP = P\Lambda$，即

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$$

于是有

$$Ap_i = \lambda_i p_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

可见，λ_i是A的特征值，而P 的列向量p_i 是A的对应于特征值λ_i 的特征向量。

11

5.3 对角化

可对角化矩阵

12

5.3 对角化

定义 对角化

若方阵A与一个对角矩阵相似，那么A 是可对角化 的。

定理1 对角化定理

若n 阶方阵A是可对角化的，即$A = PDP^{-1}$, 其中D 是对角矩阵，其充分必要条件是，A 有n 个线性无关的特征向量。

事实上，$A = PDP^{-1}$，D为对角阵的充要条件为：P的列向量是A的n个线性无关的特征向量。此时D的主对角线上的元素分别是A对应于P中特征向量的特征值。

换句话说，A可对角化的充要条件是有足够的特征向量形成R^n的基，我们称这样的基为特征向量基。

5.3 对角化

证明：

必要性：

设$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, D 对角线上的元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 那么

$$AP = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix}$$

$$PD = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

14

5.3 对角化

证明：

现假设A是可对角化的，$A = PDP^{-1}$. 给此等式两边同时右乘P 可得

$$AP = PD.$$

那么

$$\begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

可得

$$Av_1 = \lambda_1 v_1,\ Av_2 = \lambda_2 v_2, \cdots, Av_n = \lambda_n v_n$$

由于P 可逆，那么$v_1, \cdots, v_n$是线性无关且非零的，那么可知$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是A的特征值，$v_1, \cdots, v_n$是对应的特征向量。

5.3 对角化

证明：

最后，给定任意n 个特征向量$v_1, \cdots, v_n$，用它们作为矩阵P 的列向量，并用相应的特征值来构造矩阵D，那么等式

$$AP = PD$$

的成立不需要特征向量有任何条件。若特征向量是线性无关的，则P 是可逆的（由可逆矩阵定理），由$AP = PD$ 可推出

$$A = PDP^{-1}$$

5.3 对角化

矩阵对角化

例3

设$A=\begin{bmatrix}1&3&3\\-3&-5&-3\\3&3&1\end{bmatrix}$，将A 对角化，$A=PDP^{-1}$.

解：

Step1：计算A的特征值 → Step2：计算A的特征向量 → Step3：构造P

→ Step4：构造对角阵D

17

5.3 对角化

Step1：计算A的特征值

特征方程为：

$$0=\det(A-\lambda I)=-\lambda^3-3\lambda^2+4$$
$$=-(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

因此，其特征值为

$$\lambda=1，\lambda=-2(二重)$$

18

5.3 对角化

Step2：计算A的特征向量

由于A是3阶方阵，因此需要找到A的3个特征向量：

对于$\lambda=1$，找到的特征向量为$v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

对于$\lambda=2$，找到的特征向量为$v_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$v_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

若找不到三个线性独立的特征向量，说明A不能对角化！！

5.3 对角化

Step3:构造P

利用上一步骤中计算的特征向量构造可逆矩阵P，向量的顺序可以打乱。

$$P=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5.3 对角化

Step4：构造对角阵D

利用特征值构造对角矩阵，需要注意的是，特征值的排列顺序应该与P中特征向量的顺序一致。

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

21

5.3 对角化

接下来可以验证计算结果，为了避免计算P^{-1}，只需验证 $AP = PD$ 即可

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

22

5.3 对角化

例4 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$，将A 对角化.

解:

A 的特征方程为：

$0 = \det(A - I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$

可得其特征值为

$\lambda=1$ 和 $\lambda=-2$（二重）

然而，通过计算特征值可知，每个特征空间都是一维的，即

23

5.3 对角化

例4 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$，将A 对角化.

解:

当$\lambda=1$时， $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$； 当$\lambda=-2$时， $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

因此，三阶方阵A没有三个线性独立的特征向量，故不可对角化。

24

5.3 对角化

矩阵可对角化的**充分条件**

定理2

若n 阶方阵A 有n 个不同的特征值，那么A 是可对角化的。

证明:

设A是n 阶方阵，其有n个不同的特征值，$v_1, \cdots, v_n$ 是对应的n个特征向量，那么$\{v_1, \cdots, v_n\}$是线性独立的，由定理1可知，A是可对角化的。

25

5.3 对角化

例5 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，请判断A 是否可以对角化。

解:

经过简单的计算可知，A 有3个特征值，

$$\lambda_1=2, \quad \lambda_2=6, \quad \lambda_3=1,$$

那么A一定有3个线性无关的特征向量，因此A 是可对角化的。

26

5.3 对角化

例6 设$A=\begin{bmatrix}5 & -8 & 1\\ 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，判断A是否可以对角化。

解：

值得注意！

显然，A是可对角化的。因为A 是$\boxed{\text{三角矩阵}}$，可知其特征值是5,0和−2，由于A是3 阶方阵且拥有3个不同的特征值，所以A是可对角化的。

27

5.3 对角化

例7 设 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$，问 A 能否对角化？ 若能，则求可逆矩阵 P 和对角矩阵Λ，满足$P^{-1}AP=\Lambda$

解：

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$\Rightarrow$ A 的特征值是 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$。

定理2不能应用！

28

5.3 对角化

解：

……

求特征向量：$\lambda_1 = -1$, 解方程 $(A + I)x = 0$

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, 得到对应的特征向量 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 解方程 $(A - 2I)x = 0$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}。$$

5.3 对角化

解：.

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ 线性无关 **检查行列式**

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

注意次序！

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} p_2 & p_3 & p_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.3 对角化

不可对角化矩阵

5.3 对角化

不可对角化矩阵

定义

代数重度 Algebraic Multiplicity 等于特征值 λ 的重复次数

$\geq$

定义

几何重度 Geometric Multiplicity 等于对应特征值 λ 的线性独立的特征向量个数，或（$A-\lambda I$）对应的零空间的维数

几何重数严格小于代数重度（即零空间的维数严格小于特征值的重复次数）→ 方阵不能对角化

5.3 对角化

不可对角化矩阵举例

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$ 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5$ **代数重度 2**

$$(A-\lambda I)x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}x=0$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 是特征向量或者 $\operatorname{rank}(A-\lambda I)=1$ **几何重度 1**

33

5.3 对角化

不可对角化矩阵 **若尔当型**

定理

任何复数域上的 n 阶方阵 A 都和一个若尔当标准型相似

$$A\sim\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t\end{pmatrix}$$

Jordan Canonical Block

$$\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}$$

34

5.3 对角化

例8 设$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{bmatrix}$，问$x$为何值时，矩阵A能对角化。

解：

$$\det(A-I\lambda)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&0&1\\1&1-\lambda&x\\1&0&-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)\det\begin{bmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

可得$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=1.$

35

5.3 对角化

例8 设$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{bmatrix}$，问$x$为何值时，矩阵A 能对角化。

解：

对应单根λ_1=-1可求得线性无关的特征向量恰好有一个，故矩阵A可对角化的充分必要条件是，对应重根$\lambda_2=\lambda_3=1$有两个线性无关的特征向量，即方程

$$(A-\lambda I)x=0$$

有两个线性无关的解，亦即系数矩阵A − I 的秩R(A − I) = 1.

由

$$A-I=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&x\\1&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&x+1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

36

5.3 对角化

例8 设$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{bmatrix}$，问$x$为何值时，矩阵A 能对角化。

解：

即方程

$$(A-\lambda I)x=0$$

有两个线性无关的解，亦即系数矩阵A − I的秩R(A − I) = 1.

由

$$A-I=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&x\\1&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&x+1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

只需R(A − I)=1, 即$x+1=0$, $x=-1$.因此，当$x=-1$时，矩阵A能对角化。

37

5.3 对角化

定理3

若n 阶方阵A 有p个不同的特征值λ_1 ，⋯，λ_p.

(1) 当$1<k<p$ 时，λ_k对应的特征空间的维数小于等于λ_k 的重数。

(2) 矩阵A是可对角化的，其充要条件是其特征空间的维数之和等于n .

⇔ 1. 特征多项式因子完全转换为线性因子

2. λ_k对应的特征空间的维数等于λ_k 的重数

(3) 若A是可对角化的，B_k表示λ_k 对应的特征空间的基，那么$\{B_1,\cdots,B_p\}$中的所有向量构成了$\mathbb{R}^n$ 的特征向量基。

38

5.3 对角化

例9

$$设A=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\1&4&-3&0\\-1&-2&0&-3\end{bmatrix}，对A进行对角化。$$

解:

由于A是对角阵，其特征值分别为 5 和-3 ，这两个特征值都是二重的。计算出每个特征子空间的一组基：

39

5.3 对角化

例9

$$设A=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\1&4&-3&0\\-1&-2&0&-3\end{bmatrix}，对A进行对角化。$$

解:

$$当\lambda=5时，可得一组基为v_1=\begin{bmatrix}-8\\4\\1\\0\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}-16\\4\\0\\1\end{bmatrix}$$

40

5.3 对角化

例9

设$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$，对A进行对角化。

解： 当$\lambda = -3$时，可得一组基为

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

41

5.3 对角化

例9

设$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$，对A进行对角化。

解： 那么$\{v_1, \cdots, v_4\}$是线性独立的，因此矩阵

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_4 \end{bmatrix}$$

是可逆的，那么$A = PDP^{-1}$，其中

$$P = \begin{bmatrix} -8 & -16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

42

5.3 对角化

对称矩阵的对角化

5.3 对角化

对称矩阵的对角化

Question：若A为特殊矩阵时，其对角化过程有没有什么特殊性?

Next
讨论当A为**对称矩阵**时的情形

5.3 对角化

定理4 对称阵的特征值为实数。

证明

设复数λ为对称阵A 的特征值，复向量x 为对应的特征向量，即

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

用$\bar{\lambda}$表示λ的共轭复数，$\bar{x}$表示x 的共轭复向量，而A 是实矩阵，有$A = \bar{A}$, 故

$$A\bar{x} = \bar{A}\bar{x} = \overline{(Ax)} = \overline{(\lambda x)} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

于是有

$$\bar{x}^T A x = \bar{x}^T(Ax) = \bar{x}^T \lambda x = \lambda \bar{x}^T x$$

45

5.3 对角化

定理4 对称阵的特征值为实数。

证明

和

$$\bar{x}^T A x = (\bar{x}^T A^T)x = (A\bar{x})^T x = (\bar{\lambda}\bar{x})^T x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$$

两式相减，得

$$(\lambda - \bar{\lambda})\bar{x}^T x = 0$$

但因为$x \neq 0$, 所以

$$\bar{x}^T x = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$$

故$\lambda - \bar{\lambda}=0$，即$\lambda=\bar{\lambda}$，说明是$\lambda$ 实数。

46

5.3 对角化

注

显然，当特征值λ_i为实数时，齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i I)x=0$$

是实系数方程组，由

$$\det(A-\lambda_i I)=0$$

知必有实得基础解系，所以对应的特征向量可以取实向量。

5.3 对角化

定理5 设λ_1，λ_2是对称矩阵A 的两个特征值，p_1, p_2是对应的特征向量，若$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则p_1与p_2正交。

证明

$$\lambda_1 p_1=Ap_1,\quad \lambda_2 p_2=Ap_2,\quad \lambda_1\neq\lambda_2$$

因为A对称，故

$$\lambda_1 p_1^T=(\lambda_1 p_1)^T=(Ap_1)^T=p_1^T A^T=p_1^T A$$

于是

$$\lambda_1 p_1^T p_2=p_1^T A p_2=p_1^T(\lambda_2 p_2)=\lambda_2 p_1^T p_2$$

即

$$(\lambda_1-\lambda_2)p_1^T p_2=0$$

但$\lambda_1\neq\lambda_2$，故$p_1^T p_2=0$，即p_1和p_2正交。

5.3 对角化

定理6 设A为n 阶对称矩阵，则必有正交阵P，使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

其中Λ是以A 的n个特征值为对角元素的对角阵。

推论

设A为n 阶对称阵，λ 是A 的特征方程的k 重根，则矩阵 $A - \lambda I$ 的秩

$$R(A - \lambda I) = n - k$$

从而对应特征的值λ 恰有k 个线性无关的特征向量。

49

5.3 对角化

推论

设A为n 阶对称阵，λ 是A 的特征方程的k 重根，则矩阵 $A - \lambda I$ 的秩为

$$R(A - \lambda I) = n - k$$

从而对应特征值λ 恰有k 个线性无关的特征向量。

证明 按照上述定理6可知，对称阵A 与对角阵

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

相似，从而$A-\lambda I$与$\Lambda-\lambda I = \mathrm{diag}(\lambda_1-\lambda, \cdots, \lambda_n-\lambda)$ 相似。当λ是A的k重特征根时，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 这n 个特征值中有k 个等于λ ，有$n-k$ 个不等于λ ，从而对角阵$\Lambda - \lambda I$ 的对角元素恰有k 个等于0，于是 $R(\Lambda - \lambda I) = n - k$. 而 $R(A - \lambda I) = R(\Lambda - \lambda I)$ ，所以

$$R(A - \lambda I) = n - k.$$

50

5.3 对角化

将对称阵A对角化的步骤

Step1

求出A 的全部互不相等的特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为$k_1, \cdots, k_s$,

$$k_1 + \cdots + k_s = n.$$

Next

5.3 对角化

将对称阵A对角化的步骤

Step2

对每个k_i重特征值λ_i, 求方程$(A - \lambda_i I)x = 0$ 的基础解系，得k_i个线性无关得特征向量。再把他们正交化、单位化，得k_i个两两正交的单位特征向量。因为 $k_1 + \cdots + k_s = n$ ，故总共可得n个两两正交的单位特征向量。

Next

5.3 对角化

将对称阵A对角化的步骤

Step3

把这n个两两正交的单位特征向量构成一个正交阵P，便有

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

注意Λ对角元素的排列依次序应与P 中列向量的排列依次序相对应。

End

5.3 对角化

例10 设$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求一个正交阵P，使得$P^{T}AP = \Lambda$为对角阵。

解：

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \xlongequal{r_1 - r_2} \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 + c_1} \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} = \dots$$

$$= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

5.3 对角化

例10 设$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，求一个正交阵P，使得$P^TAP=\Lambda$为对角阵。

解： 求得A的特征值为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1.$

对应$\lambda_1=-2$，解方程$(A+2I)x=0$，由

$$A+2I=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系$a_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$. 将$a_1$单位化，得$p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$.

55

5.3 对角化

例10 设$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，求一个正交阵P，使得$P^TAP=\Lambda$为对角阵。

解： 对应$\lambda_2=\lambda_3=1$，解方程$(A-I)x=0$，由

$$A-I=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系$a_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$a_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

将a_2，a_3正交化：取$b_2=a_2$

56

5.3 对角化

例10 设$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，求一个正交阵P，使得$P^TAP=\Lambda$为对角阵。

解：

$$b_3=a_3-\frac{[b_2,a_3]}{\|b_2\|^2}b_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

再将b_2,b_3单位化，得$p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

57

5.3 对角化

例10 设$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，求一个正交阵P，使得$P^TAP=\Lambda$为对角阵。

解： 将p_1,p_2,p_3构成正交矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

58

5.3 对角化

例10 设$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求一个正交阵P，使得

$P^T AP = \Lambda$为对角阵。

解：

有

$$P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

59

5.3 对角化

对角化的应用

60

5.3 对角化

差分方程
Difference Equation

方程 $u_{k+1} = Au_k$ ← 初始条件 u_0

$$u_1 = Au_0, u_2 = Au_1 = A^2u_0, \cdots \Rightarrow u_k = A^k u_0 \Rightarrow u_k = P\Lambda^k P^{-1} u_0$$

$$A^k = P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} \cdots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^k P^{-1}$$

什么时候 $\lim_{k\to\infty} A^k_{n\times n} = 0_{n\times n}$? ← 所有的 $|\lambda| < 1$

61

5.3 对角化

(连续)微分方程组

对于一阶齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

其中 $x_i = x_i(t)$ 是自变量 t 的函数， $a_{ij} \in C^{n\times n}$

62

5.3 对角化

微分方程组

设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$， $x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

则上述方程组写成矩阵形式为：

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

如果此矩阵 A 可以与一个对角矩阵 $\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_x \end{bmatrix}$ 相似，即 $A\sim\Lambda$，

5.3 对角化

微分方程组

那么必然存在一个可逆矩阵 P 使得

$$\begin{cases} P^{-1}AP=\Lambda \\ x=Py \\ \dfrac{dx}{dt}=P\dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

故可以得到 $\dfrac{dx}{dt}=P\dfrac{dy}{dt}=APy$

即 $\dfrac{dy}{dt}=P^{-1}APy=\Lambda y$

64

5.3 对角化

微分方程组

即 $$\frac{dy}{dt}=P^{-1}APy=\Lambda y$$

那么原来的齐次微分方程可以简化为如下形式：

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=\lambda_1 y_1(t)\\ \vdots\\ \dfrac{dy_n}{dt}=\lambda_n y_n(t)\end{cases}$$

这样求解问题就简单明了多了。

65

5.3 对角化

图片压缩

若想将一副512 × 512图片进行压缩，那么我们首先需要将图片的每个像素值填到一个512 × 512的A 矩阵中，通过对角化可得其特征值，

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

其中，Λ是对角矩阵，对角线上是从大到小的特征值。

我们只保留前50个特征值，其余为0，重新计算矩阵后可得到一个矩阵A′，A′就是压缩后的图像。

66

5.3 对角化

图片压缩

原图像

压缩后

Q & A