第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§1.5 Solution Sets of Linear Systems

线性方程组的解集

2021 年 10 月 12 日，中山大学南校区

齐次线性方程组

齐次线性方程组

定义

若线性方程组可写成

$$Ax=0$$

的形式，则称它为齐次线性方程组。

$x = 0$ **平凡解 Trivial solution** ✓

$x \neq 0$ **非平凡解 nontrivial solution** ?

齐次方程Ax=0有非平凡解，当且仅当方程至少有一个自由变量。

齐次线性方程组

例：描述下列方程组的解集。

矩阵方程

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 0 \\ 2x_1 + 20x_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

解： (1) 平凡解（零向量）

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组至少有一个平凡解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

齐次线性方程组

例： 描述下列方程组的解集。

是否存在？

(2) **非平凡解**（非零向量）

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 20 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

有一个自由变量

非平凡解存在

齐次线性方程组

例1： 确定下列齐次方程是否有非零解，并描述它的解集。

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

解： 用行化简法把增广矩阵($\mathbf{A}\ \mathbf{0}$)化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{简化阶梯形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组

例1： 确定下列齐次方程是否有非零解，并描述它的解集。

x_3是自由变量 → **有非平凡解**

通解的向量形式：

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=x_3\mathbf{v}$$

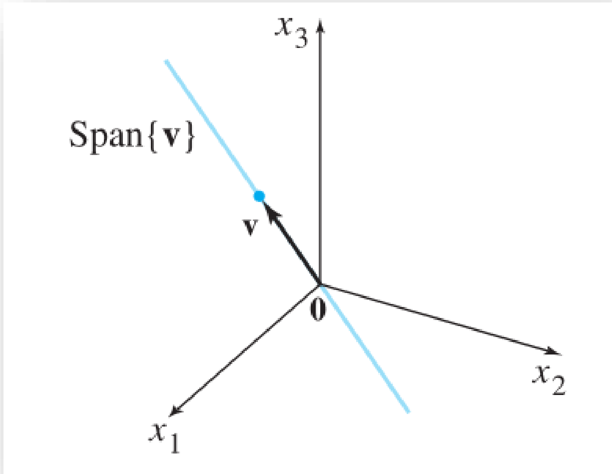

图1 几何表示

$\mathbb{R}^3$中通过原点的直线

齐次线性方程组

例2：描述下列齐次“方程组”的解集。

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

解：自由变量表示基本变量，通解为

$$x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3$$

写成向量形式，通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} \quad (x_2,\ x_3\text{为自由变量})$$

$$= \mathrm{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

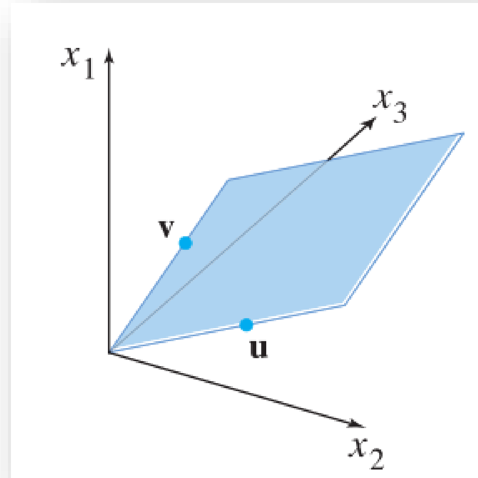

图2 几何表示

参数向量形式

参数向量形式

定义

当解集用向量显示表示，我们称之为解的**参数向量形式**。

- 若齐次方程$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$可表示为Span $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$，则其解集可表示成以下形式：

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p.$$

参数向量形式

参数向量形式

例： 例1、例2中解集的参数向量形式。

$$e.g. \quad \mathbf{x} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}$

$$e.g. \quad \mathbf{x} = x_2 \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$

非齐次线性方程组

非齐次线性方程组

课堂练习： 描述下列齐次“方程组”的解集。

1

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

非齐次线性方程组

1

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

无解

非齐次线性方程组

2

$$B_2=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{pmatrix}\sim\cdots\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$$

无穷多解

非齐次线性方程组

例3：描述$\mathbf{Ax=b}$的解，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 5 & -4\\ -3 & -2 & 4\\ 6 & 1 & -8\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}7\\ -1\\ -4\end{pmatrix}$$

解： 用行化简法把增广矩阵$(\mathbf{A}\ \mathbf{b})$化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & -4 & 7\\ -3 & -2 & 4 & -1\\ 6 & 1 & -8 & -4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -4/3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - \frac{4}{3}x_3 &= -1\\ x_2 &= 2\\ 0 &= 0\end{aligned}$$

非齐次线性方程组

例3： 描述**Ax=b**的解，其中

② 齐次线性方程的通解

➢ **Ax=b**的通解可写成向量形式

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+\frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}}+x_3\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\mathbf{p}}_{\mathbf{Ax=b}}+\overbrace{t\mathbf{v}}^{\mathbf{Ax=0}}\quad(t\text{为实数})$$

① 非齐次线性方程的特解

非齐次线性方程组

例3： 描述$Ax=b$的解，其中

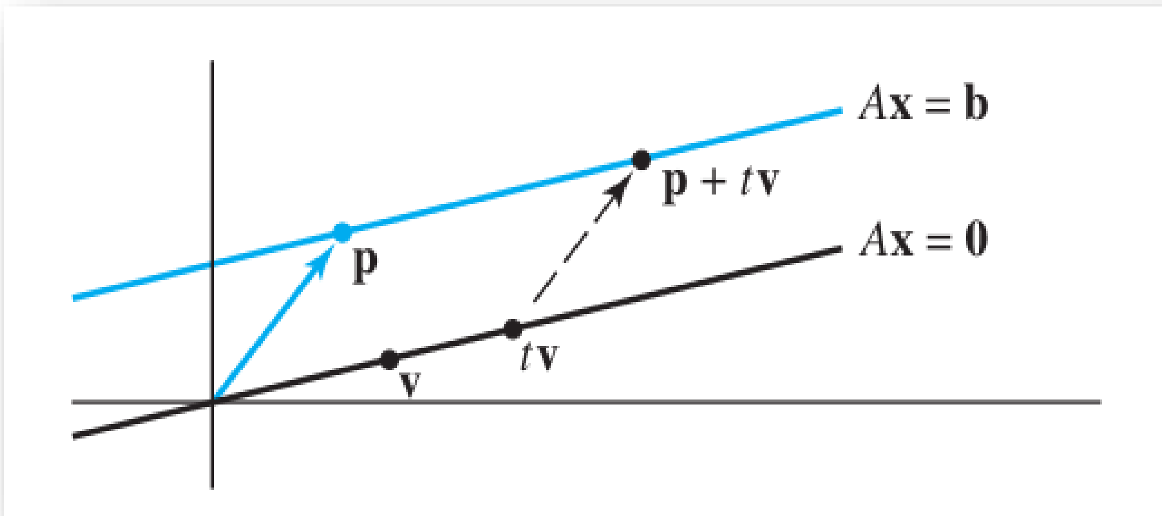

图3 $\mathbf{Ax=b}$与$\mathbf{Ax=0}$的解集平行

定理6

➢ 设方程**Ax**=**b**对某个**b**是相容的，**p**为一个特解，则**Ax**=**b** 的解集是所有形如

$$\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$$

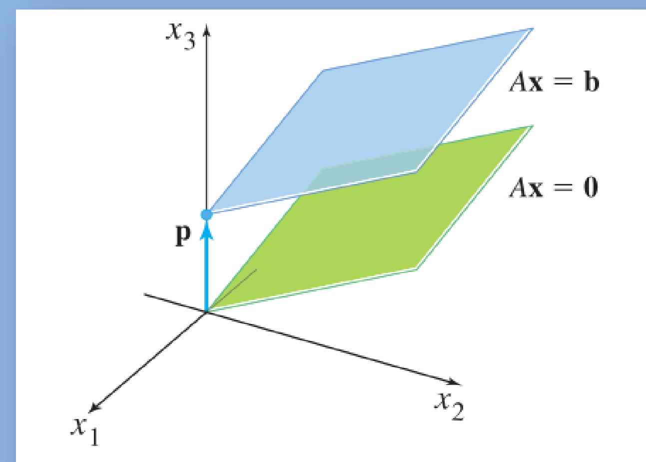

图4 **Ax**=**b**与**Ax**=**0**的解集平行

的向量的集，其中$\mathbf{v}_h$是齐次方程**Ax**=**0**的任意一个解。

回家作业

P47: 5, 6, 17

Q & A