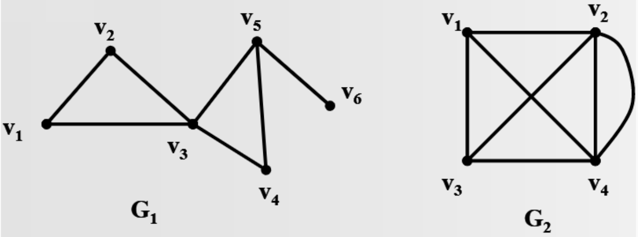
本次课程提纲：图的连通性

- 连通度的概念与性质
- Whitney 定理
- Menger 定理

点割集

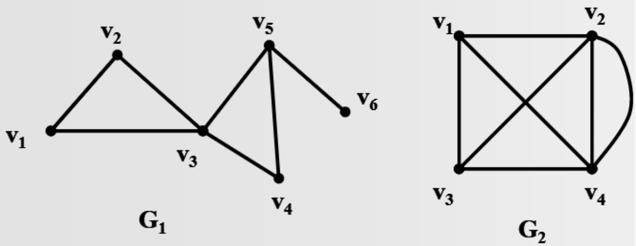
- 给定连通图 G，设 $V' \subseteq V$，若 $G - V'$ 不连通，称 V' 为 G 的一个点割集
- 含有 k 个顶点的点割集称为 k 顶点割
- 点数最少的顶点割称为最小顶点割



- G_1 中：$\{v_3\}, \{v_5, v_3\}, \{v_5, v_4\}$ 等是点割集；G_2 没有点割集

连通度

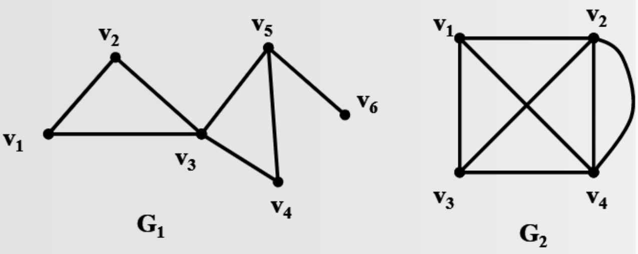
- 若 G 有顶点割，最小顶点割的顶点数称为 G 的点连通度；
- 否则称 $n-1$ 为其点连通度
- G 的点连通度记为 $\kappa(G)$, 若不连通，$\kappa(G)=0$



- $k(G_1)=1, k(G_2)=3$

边连通度

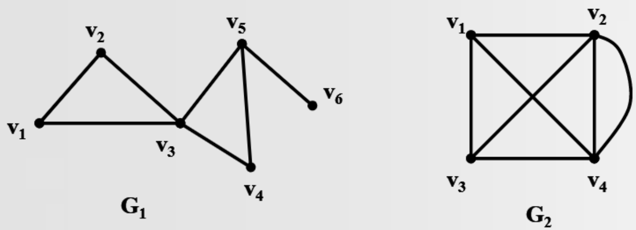
- 最小边割集所含边数称为图的边连通度
- 记为 $\lambda(G)$
- 若 G 不连通，则定义 $\lambda(G) = 0$



- $\lambda(G_1) = 1, \lambda(G_2) = 3$

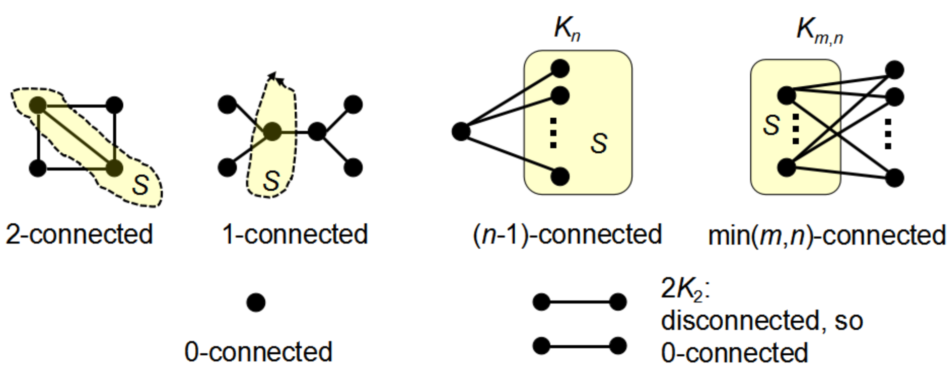
边连通度

- 若 $\kappa(G) \geq k$, 称 G 是 k 连通的
- 若 $\lambda(G) \geq k$，称 G 是 k 边连通的



- G_1 是 1 连通的，1 边连通的。但不是 2 连通的
- G_2 是 1 连通的，2 连通的，3 连通的，同时也是 1 边连通的，2 边连通的，3 边连通的。但不是 4 边连通的

连通度



K_n
$K_{m,n}$
S
S
S
S
2-connected
1-connected
(n-1)-connected
min(m,n)-connected
0-connected
2K2:
disconnected, so
0-connected

连通度的性质：Whitney 定理

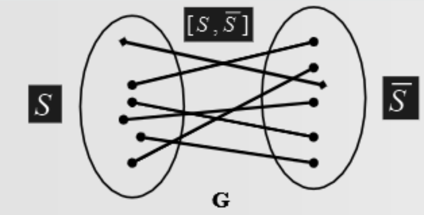
Whitney 定理

对任意图 G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

证明

- $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然，下面证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$
- 由定义 $\kappa(G) \leq n-1$。考虑最小边割集 $[S, \bar{S}]$
- 如果 S 中的点与 $\bar{S}$ 中的点均连接

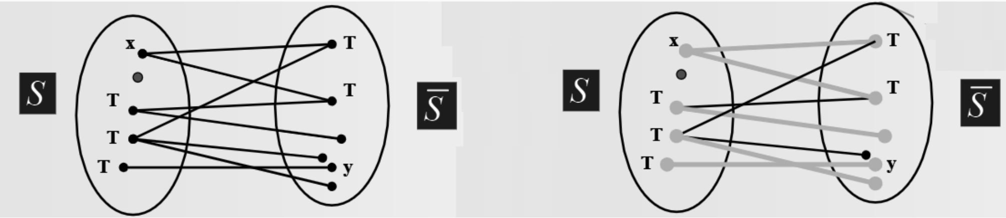
$$|[S, \bar{S}]| = |S| \cdot |\bar{S}| \geq n-1 \geq \kappa(G) \longrightarrow \kappa(G) \leq \lambda(G)$$



连通度的性质：Whitney 定理

证明

- 如果 S 中的点与 $\bar{S}$ 中的点不都连接
  - 取 $x \in S, y \in \bar{S}$， x, y 不相邻
  - 令 $T = \{\bar{S}\text{中和 } x \text{ 相邻的点}\} \cup \{u|u \in S, u \neq x, u\text{在}\bar{S}\text{中有不在 } T \text{ 中的邻点}\}$
  - 任意一条 (x, y) 路必然经过 T, 故 T 为 G 的一个点分离集
  - 取 $E_1 = \{xv|v \in \bar{S}\} \cup \{\text{从}T \cap S\text{每个顶点取一条到}\bar{S}\text{的边}\}$
  - 有 $|E_1| = |T|$，故 $\lambda(G) = |[S, \bar{S}]| \geq |E_1| = |T| \geq \kappa(G)$



Whitney 定理

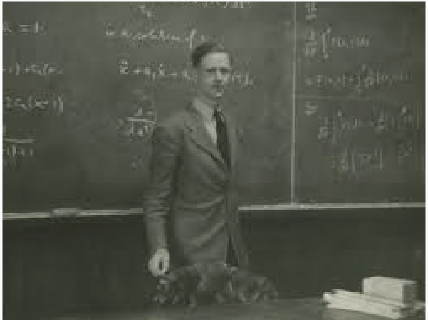
- 定理中严格不等式能够成立
- 定理中等式能够成立

- Harary 通过构图的方式已经证明：对任意正整数 $a \le b \le c$，存在图 G，使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

Whitney

- 1907—1989：美国著名数学家，主要研究图论与拓扑学，创立了微分流形的拓扑学
- 先后分别在哈佛和普林斯顿高等研究院工作，83 年 Wolf 奖
- 最初学习物理，耶鲁大学物理学士，后专攻音乐，获音乐学士学位
- 一生热爱音乐，有高度音乐才华，会弹奏钢琴，演奏小提琴、中提琴、双簧管等乐器，曾担任普林斯顿交响乐团首席小提琴手
- 1932 年在数学博士论文中提出了 Whitney 定理



连通度的性质

定理

对任意 (n, m) 连通图 G，有 $\kappa(G) \leq \lfloor 2m/n \rfloor$

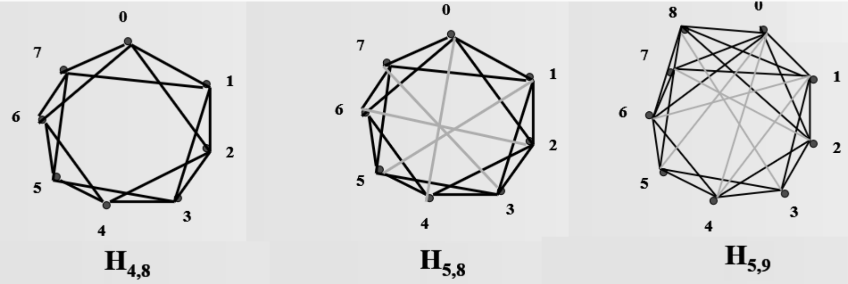
证明

- 由握手定理：$2m = \sum d(v) \geq n\delta(G) \geq n\kappa(G)$

- Harary 通过构图的方式又证明了以上界均是紧的
- 1962 年，他构造了连通度是 k, 边数为 $m = \lfloor nk/2 \rfloor$ 的图 $H_{k,n}$, 称为 Harary 图
- 涉及可靠性通信网络构建

Harary 图

- $H_{2r,n}$: $V = \{0, 1, \cdots, n-1\}$; $E = \{ij \| |i-j| \leq r\}$
- $H_{2r+1,n}$，n 为偶数: 先作 $H_{2r,n}$，然后对 $1 \leq i \leq n/2$，i 与 $i + n/2$ 连线
- $H_{2r+1,n}$，n 为奇数: 先作 $H_{2r,n}$，然后对 $1 \leq i \leq (n-1)/2$，i 与 $i + (n+1)/2$ 连线，0 与 $(n-1)/2$ 和 $(n+1)/2$ 连线



连通度的性质

定理

设 G 是 (n, m) 单图，若 $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$，则 G 连通

证明

- 若 G 不连通，则至少有两个连通分支
- 至少有一个分支 H，使得 $\delta(H) \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 < \lfloor n/2 \rfloor$，矛盾

连通度的性质

定理

设 G 是 (n,m) 单图，若对 $\forall k \in \mathbb{Z}$, 有 $\delta(G) \geq (n+k-2)/2$，则 G 是 k 连通的

证明

- 任意删去 $k-1$ 个顶点，记所得之图为 H

$$\delta(H) \geq \delta(G) - (k-1) \geq (n+k-2)/2 - k + 1 = (n-k)/2$$

- $\delta(H)$ 为整数，故 $\delta(G) \geq \lceil (n-k)/2 \rceil \geq \lfloor (n-k+1)/2 \rfloor$
- 由以上定理，H 连通，故 G 是 k 连通的

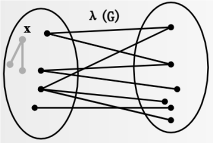
连通度的性质

定理

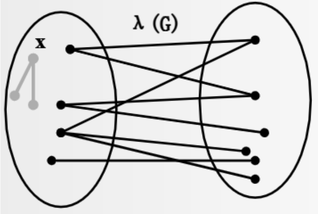
设 G 是 n 阶单图，若 $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$，则有 $\lambda(G) = \delta(G)$

证明

- 若不然，设 $\lambda(G) < \delta(G)$
- 设 G 的边割为 M，且 $|M| = \lambda(G)$
- 设 $G - M$ 中 G_1 分支中与 M 相关联的顶点数为 P，有 $P \leq \lambda(G)$
- 由握手定理：
  $2|E(G_1)| \geq P\delta(G) - \lambda(G) > \lambda(G)(P-1) \geq P(P-1) = 2|E(K_P)|$
- 这说明 G_1 中至少有一个顶点 x 不与 G_2 中顶点邻接



连通度的性质

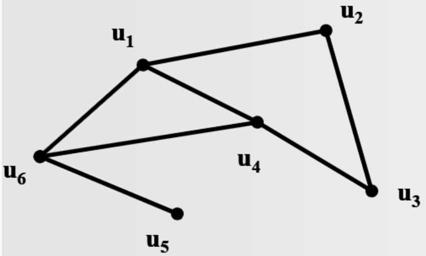


证明

- 而 $d_{G_1}(x) = d_G(x) \geq \delta(G)$
- 故 $|V(G_1)| \geq \delta(G) + 1$
- 同理有 $|V(G_2)| \geq \delta(G) + 1$
- 故 $\delta(G) < \lfloor n/2 \rfloor$，矛盾

分离集

- S 为 G 的一个顶点子集或边子集，若 u, v 不在 $G - S$ 的同一分支上，称 S 分离 u, v



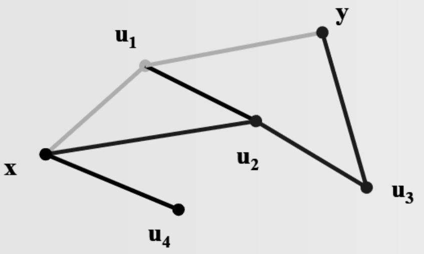
- $\{u_1, u_4\}, \{u_1u_2, u_1u_4, u_4u_5\}$ 分离 u_2, u_6

Menger 定理顶点形式

Menger 定理顶点形式

设 x, y 是图 G 中不相邻点

- G 中分离 x, y 的最少点数等于独立的 (x, y) 路的最大数目
- G 中分离 x, y 的最少边数等于边不重的 (x, y) 路的最大数目



- 独立的 (x, y) 路最大条数是 2，分离它们的最小分离集是 $\{u_1, u_2\}$
- 边不重的 (x, y) 路最大条数是 2，分离它们的最小边分离集是 $\{xu_1, xu_2\}$

Menger 定理

- Menger 定理是图论中最著名的定理之一，由奥地利杰出数学家 Menger 在 1927 年发表
- Menger (1902—1985)：20 世纪最杰出数学家之一，

Menger 定理

一个非平凡图 G 是 $k \geq 2$ 连通的，当且仅当 G 的任意两个顶点 u,v 间至少存在 k 条内点不交的 (u,v) 路

Menger 定理证明

Menger 定理证明

必要性：设 G 是 $k \geq 2$ 连通的，u,v 是 G 的两个顶点

- 如 u,v 不相邻，U 为 G 的最小 u,v 分离集，有 $|U| \geq \kappa(G) \geq k$，由 Menger 定理（顶点形式），结论成立
- 若 u,v 邻接，$e = uv$，容易证明：$G - e$ 是 $k-1$ 连通的。由情形 1 知：$G - e$ 至少包含 $k-1$ 条内点不交的 (u,v) 路，即 G 至少包含 k 条内点不交的 (u,v) 路

充分性：假设 G 中任意两个顶点间至少存在 k 条内部不交路

- 设 U 是 G 的最小顶点割，即 $|U| = \kappa(G)$
- 令 x, y 是 $G - U$ 的处于不同分支的两个点，所以 U 是 x, y 的分离集
- 由 Menger 定理（顶点形式）：$|U| \geq k$, 即 G 是 k 连通的

Menger 定理证明

习题

设 G 是 k 连通图，S 是由 G 中任意 k 个顶点构成的集合。若图 H 是由 G 通过添加一个新点 w 以及连接 w 到 S 中所有顶点得到的新图，求证：H 是 k 连通的

证明

- 分离 G 中两个不相邻顶点至少要 k 个点
- 分离 w 与 G 中不在 S 中顶点需要 k 个顶点
- 因此 H 是 k 连通的

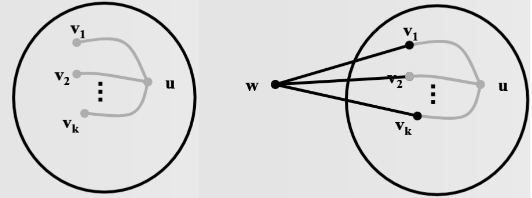
Menger 定理

习题

设 G 是 k 连通图，$u, v_1, v_2, \cdots, v_k$ 为 G 中 $k+1$ 个顶点。求证：G 中有 k 条内点不交路 (u, v_i)

证明

- 在 G 外添加一点 w，让 w 与所有 v_i 邻接得 H
- 由上一题，H 是 k 连通的
- 由 Menger 定理，u, w 间存在 k 条内点不交的 (u, w) 路，所以 G 中有 k 条内点不交路 (u, v_i)



边连通度 Menger 定理

定理

一个非平凡的图 G 是 $k \geq 2$ 边连通的，当且仅当 G 的任意两个顶点间至少存在 k 条边不重的 (u,v) 路

推论

对于一个阶至少为 3 的无环图 G，下面三个命题等价

- G 是 2 连通的
- G 中任意两点位于同一个圈上
- G 无孤立点，且任意两条边在同一个圈上

边连通度 Menger 定理

证明

对于一个阶至少为 3 的无环图 G，下面三个命题等价

- (1)->(2)：G 是 2 连通的，则任意两个顶点间存在两条内点不交路 P_1, P_2，构成包含该两个顶点的圈
- (2)->(3)：设 e_1, e_2 是 G 任意两条边，在 e_1, e_2 上分别加点 u, v 得图 H，则由上述定理 H 是 2 连通的，由 (1)->(2)，H 的任意两个顶点在同一个圈上，即 u, v 在同一个圈上，也即 e_1, e_2 在同一个圈上
- (3)->(1)：设 u, v 是 G 的任意两个不相邻点，设 e_1, e_2 分别与 u, v 关联。由 (3)，e_1, e_2 在同一圈上，所以 u, v 在同一个圈，因此分离 u, v 至少要去掉两个点，即 G 是 2 连通的

课后练习与思考题

- 证明 3 正则简单图 G 中 $\kappa(G) = \lambda(G)$
- 超立方体 Q_n 的连通度是多少