电路理论基础

时间：星期一上午8:00至9:40，星期五上午8:00至9:40

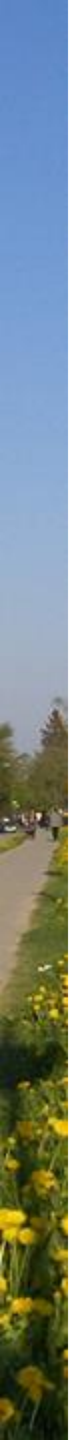
地点：南校园1506

任课教师：粟涛（电子与信息工程学院）

考试方式：闭卷

成绩评定：平时分40%，期末考试60%。

学分：4



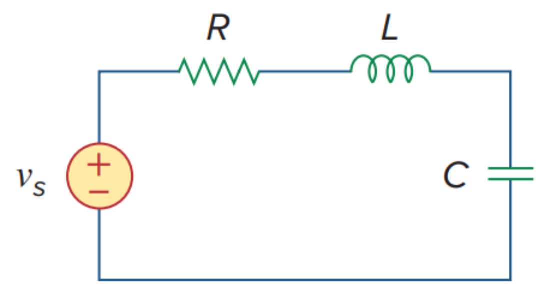
二阶电路

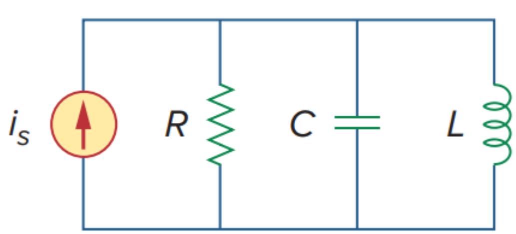
- 初值与终值
- 无源串联 RLC 电路
- 无源并联 RLC 电路
- 串联 RLC 电路的阶跃响应
- 并联 RLC 电路的阶跃响应
- 一般二阶电路

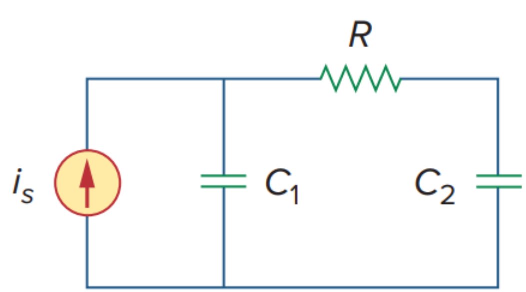
初值与终值

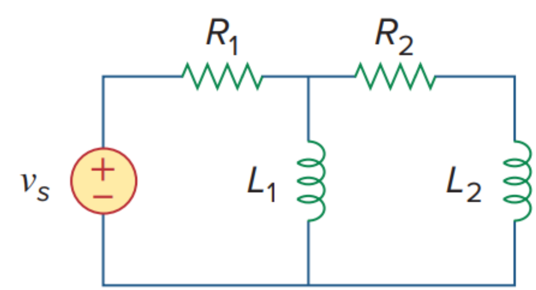
介绍

- 前面学习的RC和RL电路只有一个储能元件。
- 包含两个储能元件的电路称为二阶电路。它们的响应是由包含二阶导数的微分方程描述的。
- 二阶电路的典型例子是 RLC 电路，
  - 它有三个元件，
  - 其中两个是储能元件。









方法

- 求解微分方程分为两部分
  - 第一部分是变化规律；
  - 第二部分是初值；
  - 两部分共同决定了电压和电流的波形。
  - 有时知道终值能简化求解。

$$v(0) \qquad i(0)$$

$$\frac{dv(0)}{dt} \qquad \frac{di(0)}{dt}$$

$$v(\infty) \qquad i(\infty)$$

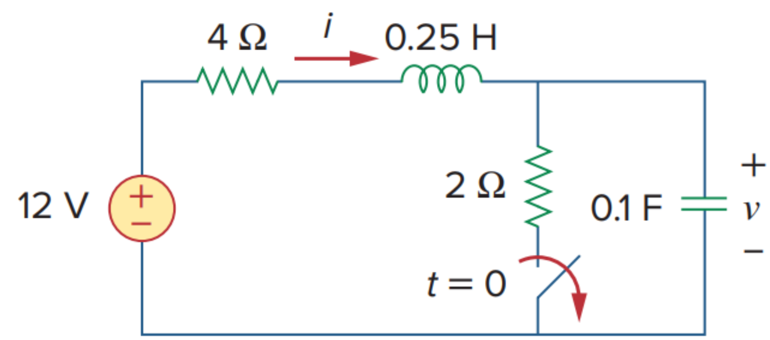
- 进行电路分析时，谨慎处理电容的电压和电流的方向。它们的定义要满足关联参考方向。

- 电容的电压和电感的电流是连续的。
  - 这一点可加以利用。

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) \qquad\qquad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

例题-1

- 下图电路的开关已经闭合了很长实践，在 t = 0 时刻将其断开，求解
  - $i(0^+)$、$v(0^+)$；
  - $di(0^+)/dt$、 $dv(0^+)/dt$；
  - $i(\infty)$、$v(\infty)$ 。



- 解答：所谓开关闭合很久，就是电路进入稳态。
  - 在开关还处于闭合状态时；在开关断开的那一瞬间：

$$i(0^-) = \frac{12}{4+2} = 2\ (\mathrm{A})$$

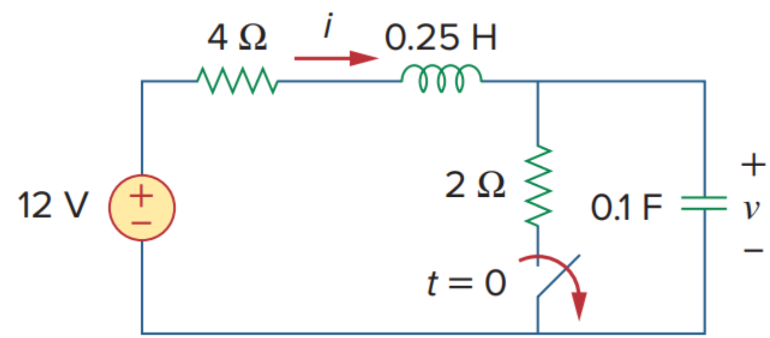
$$v(0^-) = \frac{2}{2+4} \times 12 = 4\ (\mathrm{V})$$

$$i(0^+) = i(0^-) = 2\ (\mathrm{A})$$

$$v(0^+) = v(0^-) = 4\ (\mathrm{V})$$

例题-1

- 下图电路的开关已经闭合了很长实践，在 t = 0 时刻将其断开，求解
  - $i(0^+)$、$v(0^+)$；
  - $di(0^+)/dt$、 $dv(0^+)/dt$；
  - $i(\infty)$、$v(\infty)$ 。



- 解答：开关断开后，按微分关系进行演化。
  - 建立电压电流方程；用已知量表达 v 和 i 的导数：

$$12 = 4i + 0.25 \times \frac{di}{dt} + v$$

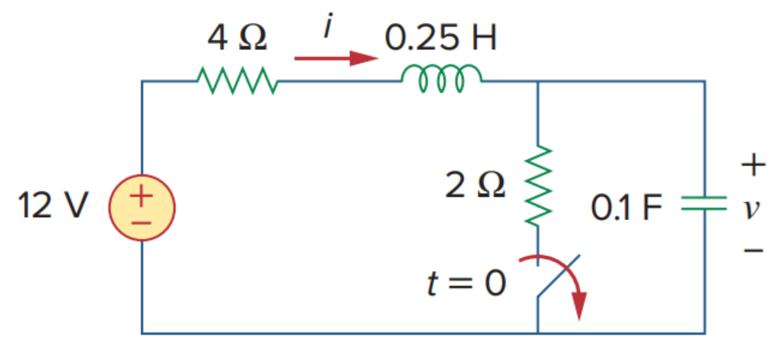
$$i = 0.1 \times \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{12 - 4i(0^+) - v(0^+)}{0.25} = 0 \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}\right)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i(0^+)}{0.1} = 20 \left(\frac{\mathrm{V}}{s}\right)$$

例题-1

- 下图电路的开关已经闭合了很长实践，在 t = 0 时刻将其断开，求解
  - $i(0^+)$、$v(0^+)$；
  - $di(0^+)/dt$、$dv(0^+)/dt$；
  - $i(\infty)$、$v(\infty)$。



- 解答：当开关断开很久，电路再次进入稳态。
  - 直流状态，电感可视为短路，电容可视为开路。
  - 总结题目的解答。

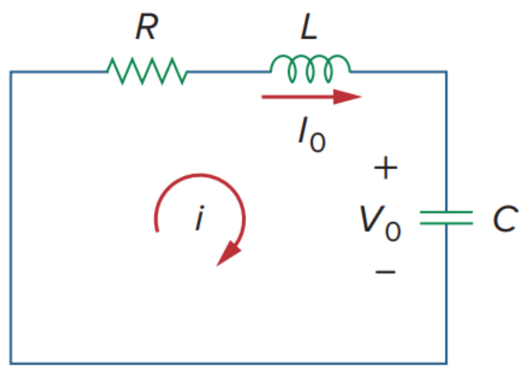
$$i(\infty) = 0\ (\mathrm{A}) \qquad i(0^+) = 2\ (\mathrm{A}) \qquad \frac{di(0^+)}{dt} = 0\ \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}\right)$$

$$v(\infty) = 12\ (\mathrm{V}) \qquad v(0^+) = 4\ (\mathrm{V}) \qquad \frac{dv(0^+)}{dt} = 20\ \left(\frac{\mathrm{V}}{s}\right)$$

无源串联 RLC 电路

二阶微分方程

- 无源串联RLC电路的结构如下图所示。



$$iR + L\frac{di}{dt} + v = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + v = 0$$

- 串联结构，宜使用KVL，建立方程（如上）。
  - 对上面的方程再次求导，

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

- 得到二阶微分方程

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

初值

- 电压和电流的初值v(0⁻)、i(0⁻)取决于当时的场景。
  - 然后根据连续性得到v(0⁺)、i(0⁺)。

$$i(0^+) = I_0 \qquad v(0^+) = V_0$$

- 电压和电流的导数的初值，通过KCL和KVL获得。

$$iR + L\frac{di}{dt} + v = 0 \Rightarrow \frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{v(0^+) + i(0^+)R}{L}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{V_0 + I_0 R}{L}$$

求解二阶方程

- 根据第七章的情况，猜想解的形式

$$i(t) = Ae^{st}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

- 代入到微分方程中有

$$\frac{d^2(Ae^{st})}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d(Ae^{st})}{dt} + \frac{1}{LC}Ae^{st} = 0$$

$$\Rightarrow \quad s^2 Ae^{st} + s\frac{R}{L}Ae^{st} + \frac{1}{LC}Ae^{st} = 0$$

$$\Rightarrow \quad s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

电路的解

- 上页的一元二次方程是二阶微分方程的特征方程。
  - 使用初中知识可得它的根

$$s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

- 定义两个参数，特征方程改写为： $s^2 + \alpha s + \omega_0^2 = 0$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

阻尼系数
奈培频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

谐振频率
固有频率

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

阻尼系数

- 定义阻尼系数为：

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- 根据阻尼系数的大小，可以分成三种情况
  - 过阻尼情况 $\xi > 1$ $\alpha > \omega_0$
  - 临界阻尼情况 $\xi = 1$ $\alpha = \omega_0$
  - 欠阻尼情况 $\xi < 1$ $\alpha < \omega_0$

过阻尼情况

- 二阶电路解的通用表达式

$$i(t) = Ae^{st} \quad \Rightarrow \quad i(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

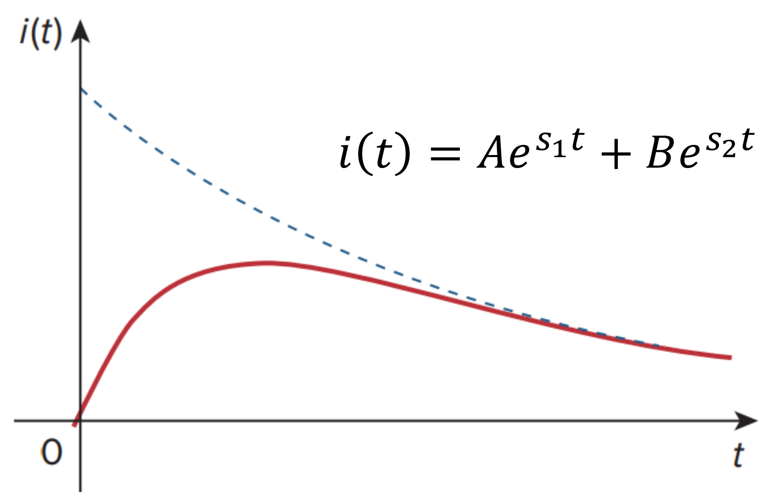
- 在过阻尼（$\alpha > \omega_0$）情况下，
  - 根为实数
  - 并且s为负数
  - 因此电流指数衰减

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- 此时 RLC 的关系

$$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} > 1 \quad \Rightarrow \quad R^2C > 4L$$



临界阻尼情况

- 当 $\alpha=\omega_0$ ，两个根相同，电流表达式是单调函数。

$$i(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}=Ae^{st}$$

  - 然而，过阻尼尚且能起伏一下，临界阻尼不应只能单调，
  - 所以上面表达式是错的。

- 因此，需要回到二阶微分方程，重新求解

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\omega_0^2i=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\alpha^2i=0$$

$$y=\frac{di}{dt}+\alpha i$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dt}+\alpha y=0$$

$$\Downarrow$$

$$y=Ae^{-\alpha t}$$

$$\frac{di}{dt}+\alpha i=Ae^{-\alpha t}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\alpha t}\frac{di}{dt}+e^{\alpha t}\alpha i=A$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d(ie^{\alpha t})}{dt}=A$$

临界阻尼情况

- 继续前页的推导

$$\frac{d(ie^{\alpha t})}{dt} = A \quad \Rightarrow \quad ie^{\alpha t} = A + Bt$$

- 上面这个方程的解为

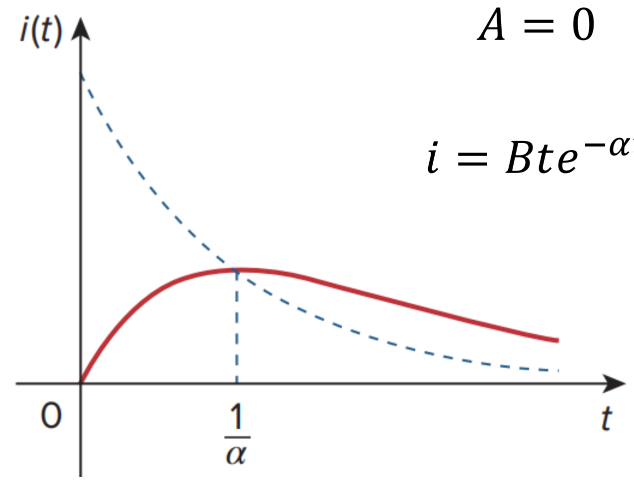
$$i(t) = Ae^{-\alpha t} + Bte^{-\alpha t}$$

$$i(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}$$

- 括号内这一项有翘起来的趋势；
- 括号外这一项则想压下去。

$A = 0$

$i = Bte^{-\alpha t}$



欠阻尼情况

- 在欠阻尼（$\alpha < \omega_0$）情况下，
  - 根为实虚混合之数
  - 实部代表幅度的变化
  - 虚部代表振荡

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

- 电流的表达式为：

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t + j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t - j\omega_d t}$$

使用欧拉公式转化为三角函数

$$i(t) = e^{-\alpha t}[(A_1 + A_2)\cos(\omega_d t) + j(A_1 - A_2)\sin(\omega_d t)]$$

欠阻尼情况

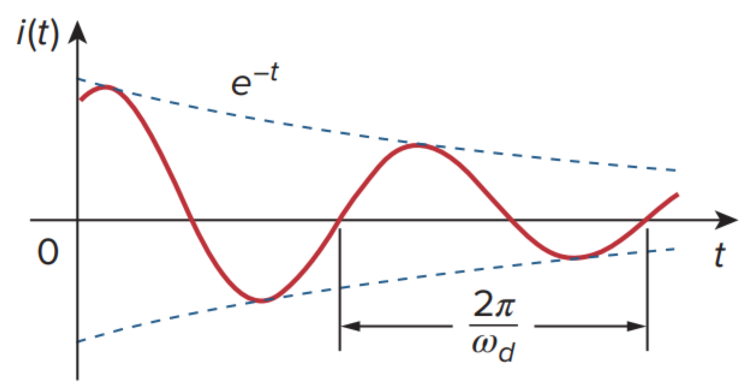
- 电流的表达式为：

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t + j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t - j\omega_d t}$$

$$i(t) = e^{-\alpha t}[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)]$$

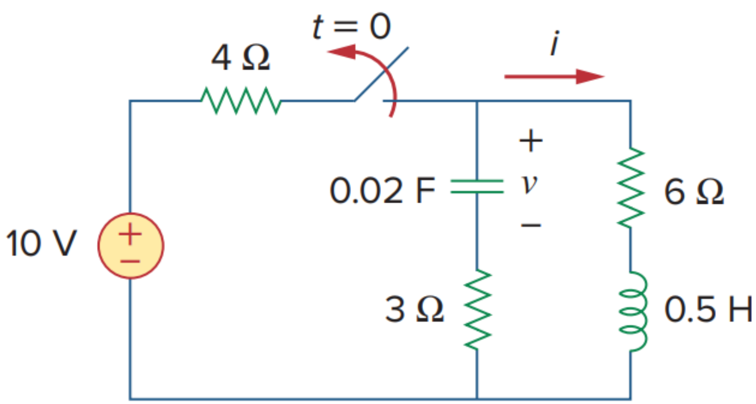
- 理解 RLC 电路的行为
  - 电路元件LC提供了一种振荡
  - 电路元件 R 提供了一种阻尼
  - 欠阻尼波形中出现振荡
    - 称为振铃
    - 反复难以稳定
  - 过阻尼波形拖尾时间很长
  - 临界阻尼波形最快趋稳

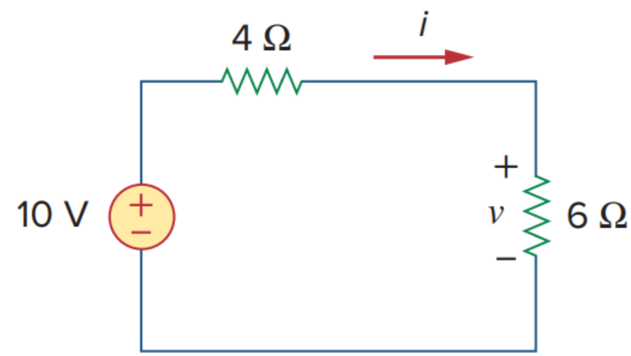
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \alpha = \frac{R}{2L}$$



例题

- 问题：求下面电路的电流 $i(t)$。
  - 假设电路在 $t = 0^-$ 时刻达到稳定状态。





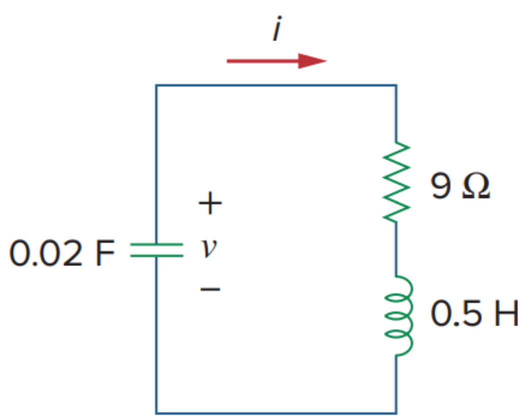
- 解答：
  - 首先求初值
    - 电感等效短路
    - 电容等效开路

$$i(0) = \frac{10}{4+6} = 1\ (\mathrm{A})$$

$$v(0) = 1 \times 6 = 6\ (\mathrm{V})$$

例题

- 解答：
  - 然后求波形的参数，发现是欠阻尼，



$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{9}{2 \times 0.5} = 9 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.5 \times 0.02}} = 10$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -9 \pm j4.359$$

  - 得到波形表达式，

$$i(t) = e^{-9t}[A\cos(4.359t) + B\sin(4.359t)]$$

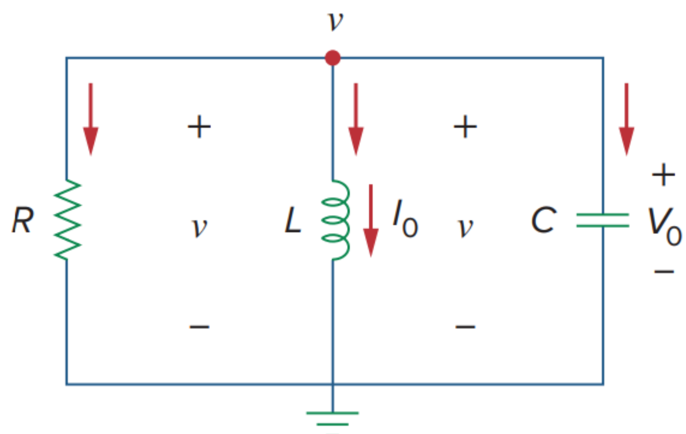
  - 利用初值解出系数 $i(0) = 1$

$$v(0) = 9i(0) + 0.5 \times \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 6 \Rightarrow A = 1,\quad B = 0.6882$$

无源并联 RLC 电路

二阶微分方程

- 无源并联RLC电路的结构如下图所示。



$$i_R + i_L + i_C = 0$$

$$\frac{v}{R} + i_L + C\frac{dv}{dt} = 0$$

- 并联结构，宜使用KCL，建立方程（如上）。
  - 对上面的方程再次求导，

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{di_L}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2} += 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v + C\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

- 得到二阶微分方程

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0$$

求解电路

- 定义两个参数，改写二阶微分方程

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

阻尼系数
奈培频率

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

谐振频率
固有频率

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0$$

- 再次假设解具有指数形式 $v(t) = Ae^{st}$
  - 得到二阶微分方程 $s^2Ae^{st} + 2\alpha sAe^{st} + \omega_0^2Ae^{st} = 0$
  - 化简得到关于 s 的一元二次方程 $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

阻尼系数

- 定义阻尼系数为（与串联电路有一点不同）：

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- 根据阻尼系数的大小，可以分成三种情况
  - 过阻尼情况 $\xi > 1$ $\alpha > \omega_0$ $\frac{L}{4R^2C} > 1$
  - 临界阻尼情况 $\xi = 1$ $\alpha = \omega_0$ $\frac{L}{4R^2C} = 1$
  - 欠阻尼情况 $\xi < 1$ $\alpha < \omega_0$ $\frac{L}{4R^2C} < 1$

电路的解

- 过阻尼情况 $\xi > 1$ $\alpha > \omega_0$ $\dfrac{L}{4R^2C} > 1$

$$v(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

- 临界阻尼情况 $\xi = 1$ $\alpha = \omega_0$ $\dfrac{L}{4R^2C} = 1$

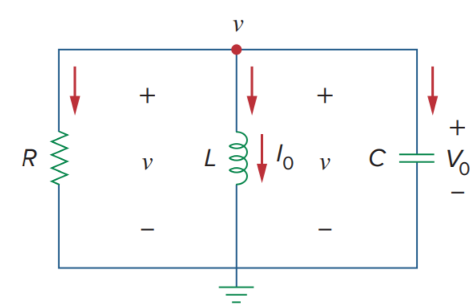
$$v(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}$$

- 欠阻尼情况 $\xi < 1$ $\alpha < \omega_0$ $\dfrac{L}{4R^2C} < 1$

$$v(t) = e^{-\alpha t}[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)]$$

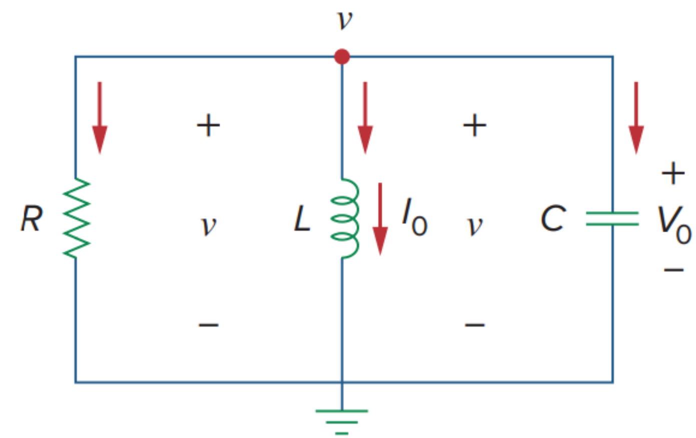
- 电路的初值

$$\frac{V_0}{R} + I_0 + C\frac{dv(0)}{dt} = 0 \qquad \frac{dv(0)}{dt} = -\frac{V_0 + I_0 R}{RC}$$



例题

- 问题：求解下面并联电路在 t > 0 时的电压波形 v(t)。
  - 假设 $v(0) = 5$ V，$i(0) = 0$；
  - 假设 $L = 1$ H，$C = 10$ mF；
  - 分别考虑 R 取下列值：
    - 1.923 Ω、5 Ω 和 6.25 Ω。



- 解答：
  - 第一种情况，R = 1.923 Ω，$\dfrac{L/(4C)}{R^2} = \dfrac{25}{1.923^2} > 1$ 过阻尼
  - 第二种情况，R = 5 Ω，$\dfrac{L/(4C)}{R^2} = \dfrac{25}{5^2} = 1$ 临界阻尼
  - 第三种情况，R = 6.25 Ω，$\dfrac{L/(4C)}{R^2} = \dfrac{25}{6.25^2} < 1$ 欠阻尼

例题

- 解答： $\dfrac{dv(0)}{dt} = -\dfrac{V_0 + I_0 R}{RC} = \dfrac{500}{R}$

情况	表达式 v(t)	表达式 v(0)	表达式 dv(0)/dt
过阻尼	$Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$	$A + B$	$s_1 A + s_2 B$
临界	$e^{-\alpha t}(A + Bt)$	A	$-\alpha A + B$
欠阻尼	$e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)$	A	$-\alpha A + \omega_d B$

R	α	ω_0	s	ω_d	v(0)	dv(0)/dt	A	B
1.923	26	10	-2 -50		$A + B = 5$	$-2A - 50B = -260$	-0.2083	5.208
5	10	10	-10		$A = 5$	$-10A + B = -100$	5	-50
6.25	8	10	-8+j6 -8-j6	6	$A = 5$	$-8A + 6B = -80$	5	-6.667

例题

- 解答：
  - 第一种情况，R = 1.923 Ω，过阻尼

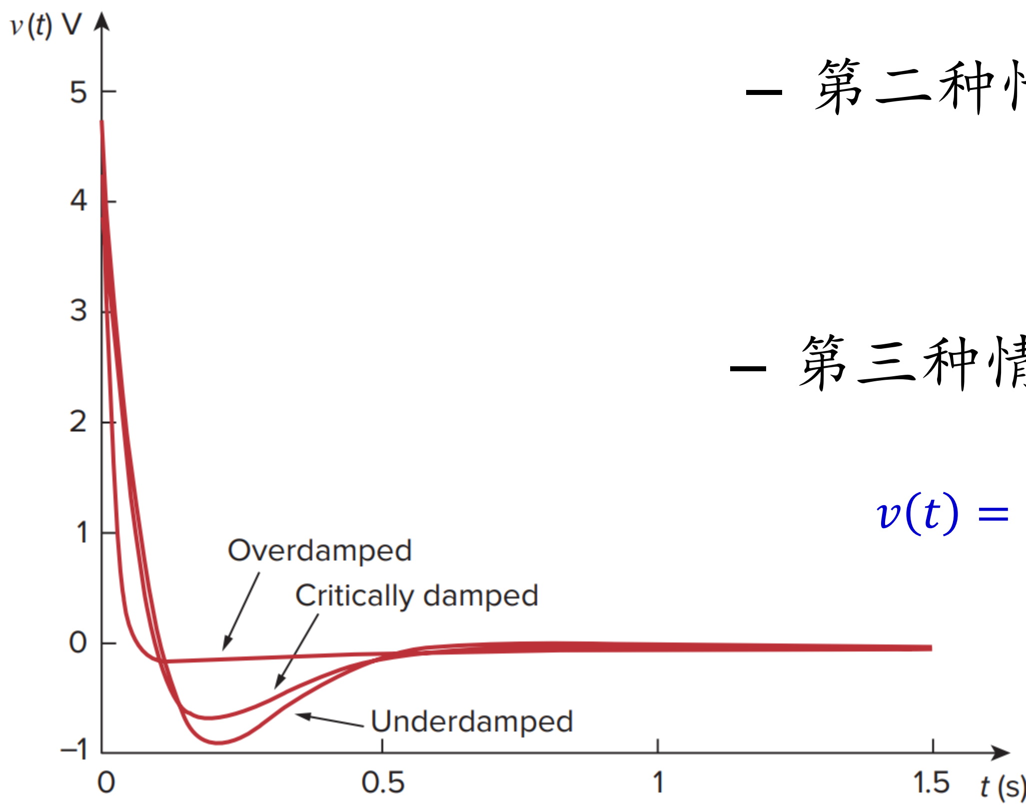
$$v(t) = -0.2083e^{-2t} + 5.208e^{-50t}$$

  - 第二种情况，R = 5 Ω，临界阻尼

$$v(t) = e^{-10t}(5 - 50t)$$

  - 第三种情况，R = 6.25 Ω，欠阻尼

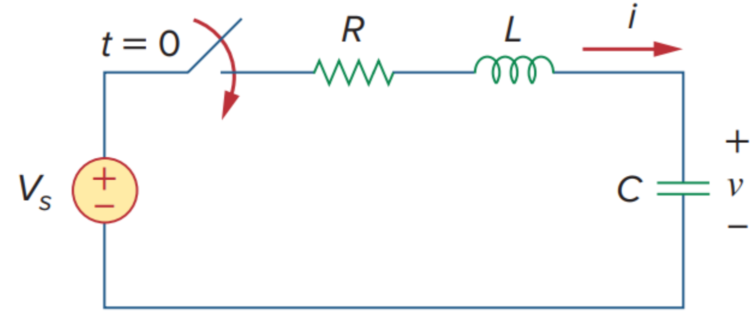
$$v(t) = e^{-8t}[5\cos(6t) - 6.677\sin(6t)]$$



串联 RLC 电路的阶跃响应

介绍

- 考查右边的串联电路
  - 与无源RLC电路的差别是
  - 这次有了一个电源。



- KVL方程的发生了变化，但二阶微分方程形式一样

$$iR + L\frac{di}{dt} + v = 0$$

$$iR + L\frac{di}{dt} + v = V_s$$

无源RLC

有源RLC

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

- 数学上的差别是终值：一个 $v(\infty) = 0$，另一个 $v(\infty) = V_s$。

电压的波形

- 电流和电压的关系是

$$i = C\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = V_{cst} + \frac{1}{C}\int i dt$$

- 对电流进行积分得到电压的表达式

过阻尼

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$v(t) = V_{cst} + B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}$$

临界阻尼

$$i(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\alpha t}$$

$$v(t) = V_{cst} + (B_1 t + B_2)e^{-\alpha t}$$

欠阻尼

$$i(t) = e^{-\alpha t}[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$$

$$v(t) = V_{cst} + e^{-\alpha t}[B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)]$$

常数项 V_{cst}

当时间趋于无穷大时，电压应该稳定在Vs，因此

$$V_{cst} = V_s$$

电压的波形

- 电流和电压的关系是

$$i = C\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = V_{cst} + \frac{1}{C}\int i dt$$

- 电压表达式由两项组成：稳态响应 + 暂态响应

过阻尼

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$v(t) = V_s + B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}$$

临界阻尼

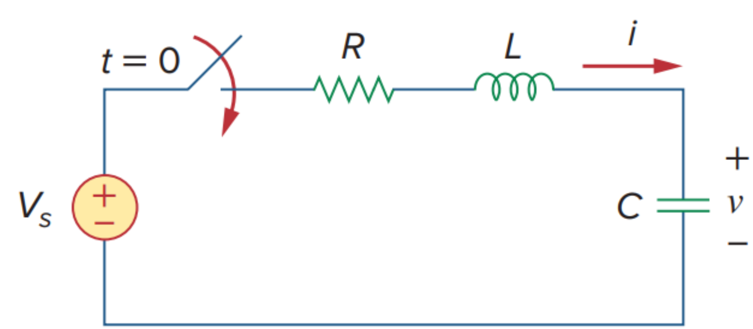
$$i(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t}$$

$$v(t) = V_s + (B_1 t + B_2) e^{-\alpha t}$$

欠阻尼

$$i(t) = e^{-\alpha t}[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$$

$$v(t) = V_s + e^{-\alpha t}[B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)]$$



重要公式

- 在解题中，可能会使用下面的计算式

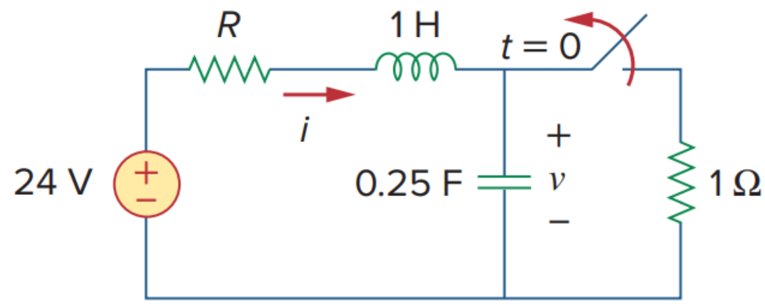
$$v(t)=\begin{cases} V_s+B_1e^{s_1t}+B_2e^{s_2t} & \text{过阻尼} \\ V_s+(B_1+B_2t)e^{-\alpha t} & \text{临界阻尼} \\ V_s+e^{-\alpha t}[B_1\cos(\omega_d t)+B_2\sin(\omega_d t)] & \text{欠阻尼} \end{cases}$$

$$v(0)=\begin{cases} V_s+B_1+B_2 & \text{过阻尼} \\ V_s+B_1 & \text{临界阻尼} \\ V_s+B_1 & \text{欠阻尼} \end{cases}$$

$$\frac{dv(0)}{dt}=\begin{cases} s_1B_1+s_2B_2 & \text{过阻尼} \\ -\alpha B_2 & \text{临界阻尼} \\ -\alpha B_1+\omega_d B_2 & \text{欠阻尼} \end{cases}$$

例题

- 问题：右图所示电路，
  - 求解 $t > 0$ 时 $v(t)$ 和 $i(t)$；
  - 考虑R取下面的数值
    - 5 Ω、4 Ω 、1 Ω 。



- 解答：$\alpha = \dfrac{R}{2L}$ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ $\dfrac{dv(0^+)}{dt} = \dfrac{i(0^+)}{C}$

R	α	ω_0	类型	s	ω_d	$v(\infty)$	$v(0^+)$	$i(0^+)$	$dv(0^+)/dt$
5	2.5	2	过阻尼	-1 -4		24	4	4	16
4	2	2	临界阻尼	2		24	4.8	4.8	19.2
1	0.5	2	欠阻尼	-0.5 + j1.936 -0.5 - j1.936	1.936	24	12	12	48

例题

- 解答：

R	α	ω_0	类型	s	ω_d	$v(\infty)$	$v(0^+)$	$i(0^+)$	$dv(0^+)/dt$
5	2.5	2	过阻尼	-1 -4		24	4	4	16
4	2	2	临界阻尼	2		24	4.8	4.8	19.2
1	0.5	2	欠阻尼	-0.5 + j1.936 -0.5 - j1.936	1.936	24	12	12	48

R	电压表达式	电压表达式
5	$V_s + B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}$	$24 + B_1 e^{-t} + B_2 e^{-4t}$
4	$V_s + (B_1 t + B_2) e^{-\alpha t}$	$24 + (B_1 t + B_2) e^{-2t}$
1	$V_s + e^{-\alpha t}[B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)]$	$24 + e^{-0.5t}[B_1 \cos(1.936t) + B_2 \sin(1.936t)]$

例题

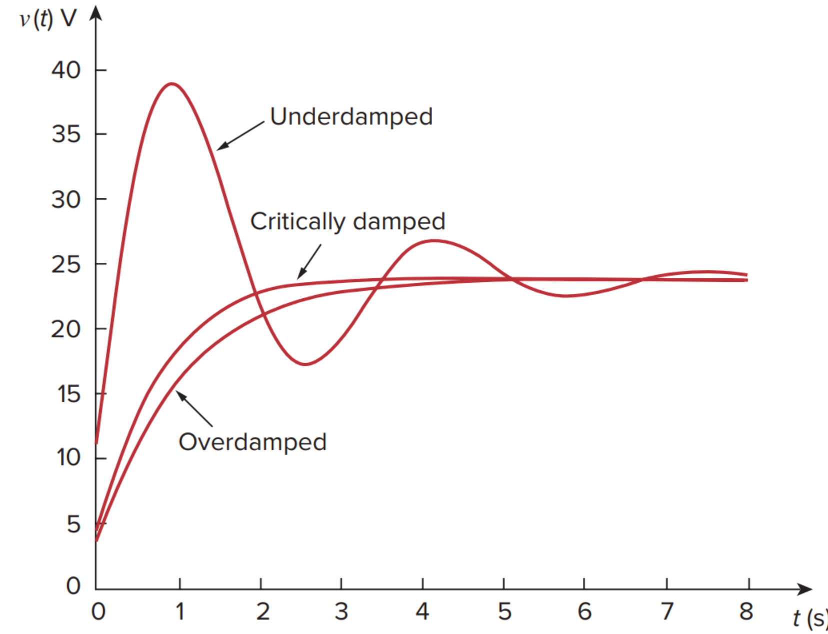
- 解答：

R	电压表达式	电压微分表达式
5	$24 + B_1 e^{-t} + B_2 e^{-4t}$	$-B_1 e^{-t} - 4B_2 e^{-4t}$
4	$24 + (B_1 t + B_2) e^{-2t}$	$(-2B_1 t + B_1 - 2B_2) e^{-2t}$
1	$24 + e^{-0.5t}[B_1 \cos(1.936t) + B_2 \sin(1.936t)]$	*complex and long*

R	$v(0^+)$		$dv(0^+)/dt$		B1	B2
5	4	$24 + B_1 + B_2$	16	$-B_1 - 4B_2$	-64/3	4/3
4	4.8	$24 + B_2$	19.2	$B_1 - 2B_2$	-19.2	-19.2
1	12	$24 + B_1$	48	$-0.5B_1 + 1.936B_2$	-12	21.69

例题

- 问题：右图所示电路，
  - 求解 $t>0$ 时 $v(t)$ 和 $i(t)$;
  - 考虑R取下面的数值
    - 5 Ω、4 Ω 、1 Ω 。



- 解答：

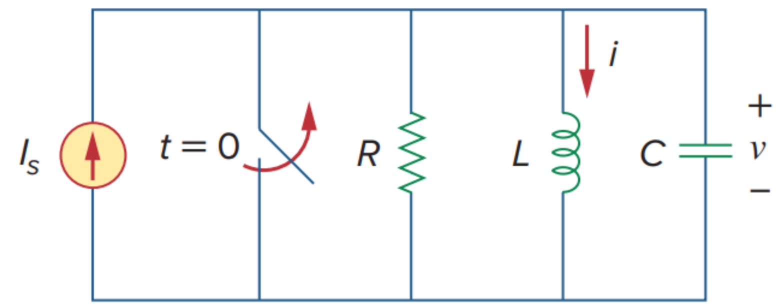
$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

R	电压表达式	V_s	α	ω_0	ω_d	B1	B2
5	$V_s + B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}$	4	2.5	2		-64/3	4/3
4	$V_s + (B_1 t + B_2) e^{-\alpha t}$	4.8	2	2		-19.2	-19.2
1	$V_s + e^{-\alpha t}[B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)]$	12	0.5	2	1.936	-12	21.69

并联 RLC 电路的阶跃响应

介绍

- 考查右边的并联电路
  - 与无源RLC电路的差别是
  - 这次有了一个电流源。



- KCL方程的发生了变化，但二阶微分方程形式一样

$$\frac{v}{R}+i_L+C\frac{dv}{dt}=0$$

无源RLC

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v=0$$

$$\frac{v}{R}+i_L+C\frac{dv}{dt}=I_s$$

有源RLC

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v=0$$

- 数学上的差别是终值：一个 $i(\infty)=0$，另一个 $i(\infty)=V_s$。

电流的波形

- 电流和电压的关系是

$$v = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = I_{cst} + \frac{1}{L}\int v dt$$

- 电压表达式由两项组成：稳态响应 + 暂态响应

过阻尼

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$i(t) = I_s + B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}$$

临界阻尼

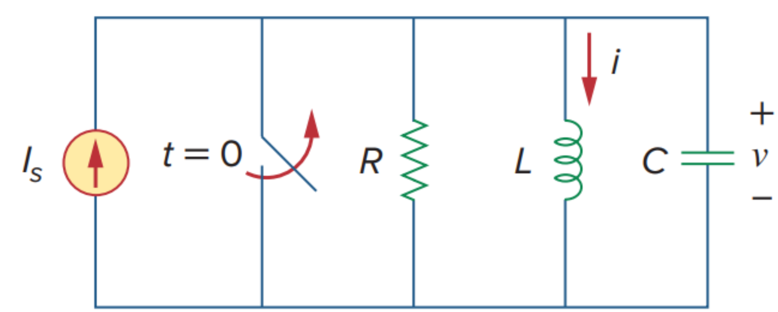
$$v(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\alpha t}$$

$$i(t) = I_s + (B_1 t + B_2)e^{-\alpha t}$$

欠阻尼

$$v(t) = e^{-\alpha t}[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$$

$$i(t) = I_s + e^{-\alpha t}[B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)]$$



重要公式

- 在解题中，可能会使用下面的计算式

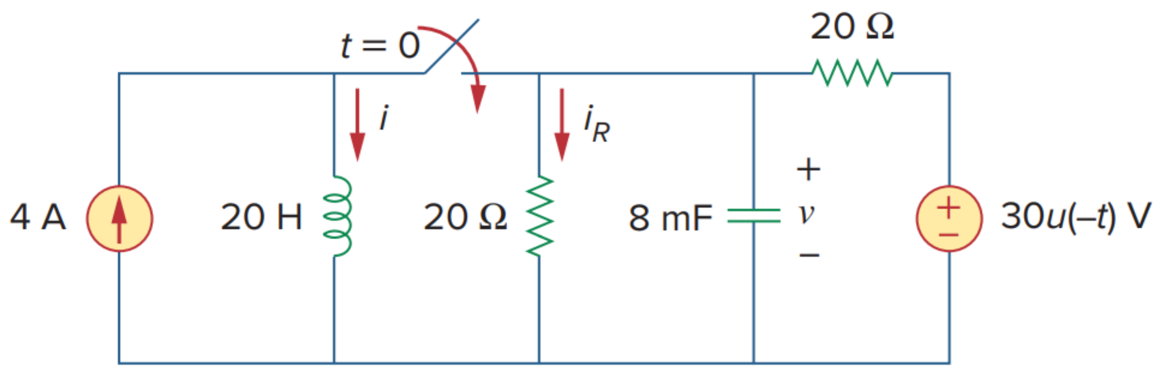
$$i(t)=\begin{cases} I_s+B_1e^{s_1t}+B_2e^{s_2t} & \text{过阻尼} \\ I_s+(B_1+B_2t)e^{-\alpha t} & \text{临界阻尼} \\ I_s+e^{-\alpha t}[B_1\cos(\omega_d t)+B_2\sin(\omega_d t)] & \text{欠阻尼} \end{cases}$$

$$i(0)=\begin{cases} I_s+B_1+B_2 & \text{过阻尼} \\ I_s+B_1 & \text{临界阻尼} \\ I_s+B_1 & \text{欠阻尼} \end{cases}$$

$$\frac{di(0)}{dt}=\begin{cases} s_1B_1+s_2B_2 & \text{过阻尼} \\ -\alpha B_2 & \text{临界阻尼} \\ -\alpha B_1+\omega_d B_2 & \text{欠阻尼} \end{cases}$$

例题

- 问题：右图所示电路，求解 $t > 0$ 时 $i(t)$ 和 $i_R(t)$；

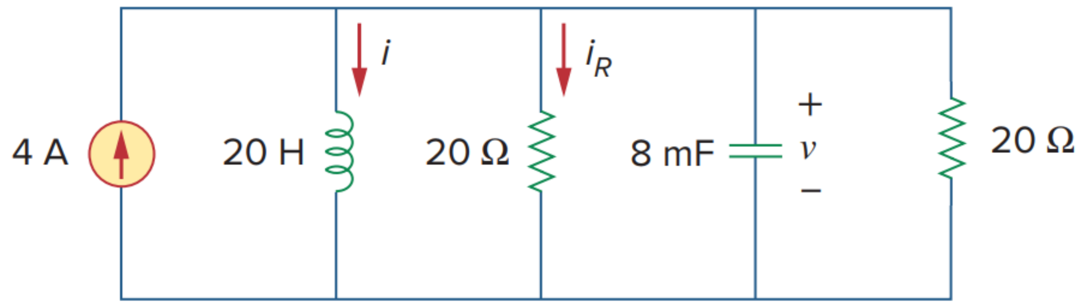


- 解答：

时间	i	i_R	v	$di(0)/dt$
$t = 0^-$	4	0.75	15	
$t = 0^+$	4	0.75	15	0.75
$t = \infty$	4	0	0	

例题

- 问题：右图所示电路，求解 $t > 0$ 时 $i(t)$ 和 $i_R(t)$；



- 解答：参数计算，看出电路为过阻尼

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 10 \times 8 \times 10^{-3}} = 6.25$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \times 0.008}} = 2.5$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -6.25 \pm 5.7282$$

$$i(t) = I_s + B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}$$

$$i(0) = I_s + B_1 + B_2 = 4$$

$$\frac{di(0)}{dt} = s_1 B_1 + s_2 B_2 = 0.75$$

例题

- 解答：参数计算，看出电路为过阻尼

$$i(0) = 4 + B_1 + B_2 = 4$$

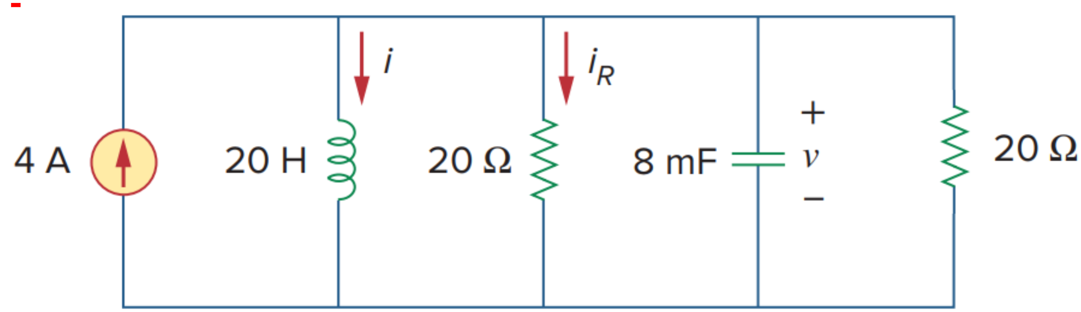
$$B_1 + B_2 = 0$$

$$\frac{di(0)}{dt} = -0.5218B_1 - 11.9782B_2 = 0.75$$

$$B_1 + 22.9555B_2 = -1.437$$

$$B_1 = 0.06545$$

$$B_2 = -0.06545$$



$$i(t) = 4 + 0.06545e^{-0.5218t} - 0.06545e^{-11.9782t}$$

$$i_R(t) = \frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt} = -0.03415e^{-0.5218t} + 0.785e^{-11.9782t}$$

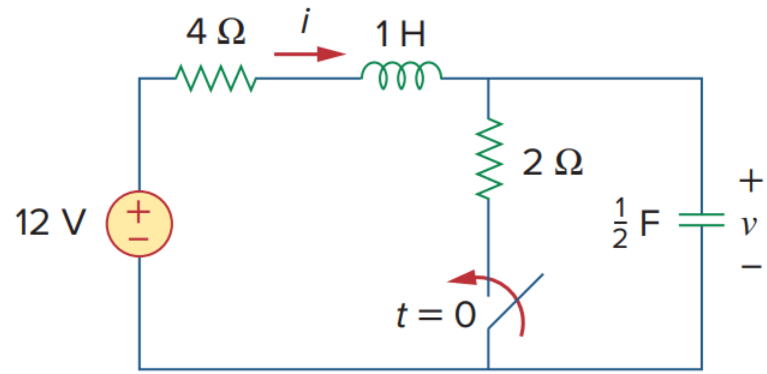
一般二阶电路

求解思路

- 有些电路并不能归结为RLC串联或者并联。
- 但求解这些电路仍然可以按照一般性的步骤
  - 求初始条件$x(0)$，$dx(0)/dt$，$x(\infty)$；
  - 关闭独立电源并利用KCL和KVL求解暂态响应$x_t(t)$，
    - 然后判断响应是过阻尼、临界阻尼，还是欠阻尼。
  - 求解出稳态响应 $x_{ss}(t) = x(\infty)$。
  - 全响应包括暂态响应和稳态响应： $x(t) = x_t(t) + x_{ss}(t)$。

例题-1

- 问题：所示电路，
  - 求 $t>0$ 时的全响应 v 和 i。

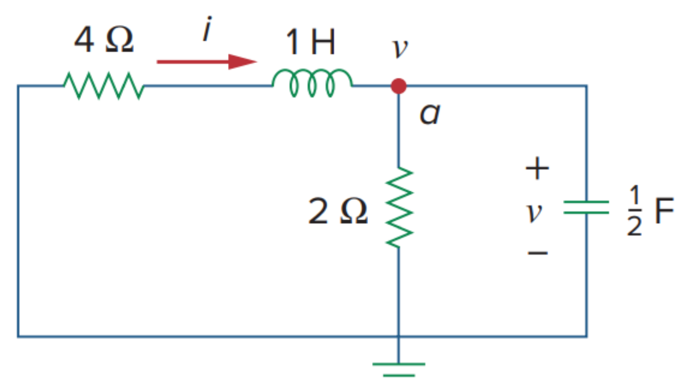


- 解答：
  - （1）计算初值 $v(0^+)=12\ \text{V}$ $i(0^+)=0\ \text{A}$
  - （2）计算终值 $v(\infty)=4\ \text{V}$ $i(\infty)=2\ \text{A}$
  - （3）KCL方程和KVL

$$\frac{dv(0^+)}{dt}=-12\ \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{dv}{dt}+\frac{v}{2}=i$$

$$1\times\frac{di}{dt}+4i+v=12$$



例题-1

- 解答：
  - （4）建立二阶微分方程

$$\frac{1}{2}\times\frac{dv}{dt}+\frac{v}{2}=i \qquad 1\times\frac{di}{dt}+4i+v=12$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{2}\right)}{dt}+4\left(\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{2}\right)+v=0$$

⬇

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}+2\frac{dv}{dt}+2v+v=0$$

⬇

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{5}{2}\frac{dv}{dt}+3v=0$$

⬇

$$\frac{d^2v}{dt^2}+5\frac{dv}{dt}+6v=0$$

$$\alpha=\frac{5}{2}$$

$$\omega_0=\sqrt{6}$$

⬇

$$\alpha^2-\omega_0^2=6.25-6=0.25$$

$$\alpha^2-\omega_0^2>0$$

可见：电路的响应是过阻尼响应。

例题-1

- 解答:
  - （5）解出响应波形

$$\frac{d^2v}{dt^2}+5\frac{dv}{dt}+6v=0$$

$$\alpha=\frac{5}{2}$$

$$\omega_0=\sqrt{6}$$

$$\alpha^2-\omega_0^2=0.25$$

$$v(t)=4+A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}$$

$$v(0)=4+A_1+A_2=12$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt}=-2A_1-3A_2=-12\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$$

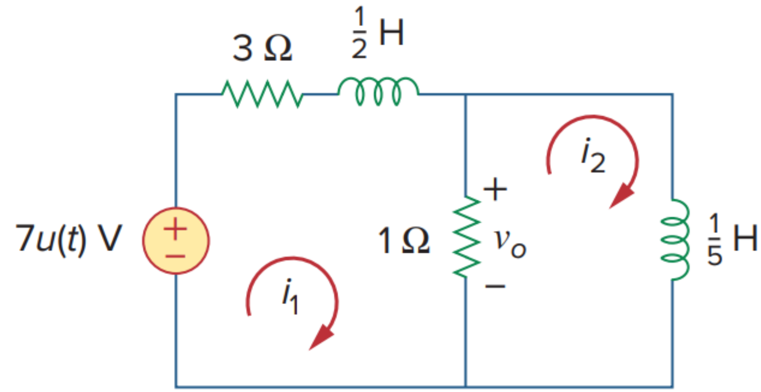
$$A_1=12$$

$$A_2=-4$$

$$v(t)=4+12e^{-2t}-4e^{-3t}$$

例题-2

- 问题：所示电路，
  - 求 $t > 0$ 时的全响应 $v_o(t)$ 。



- 解答：

作业

- 画出本章思维导图
- 8.31
- 8.32
- 8.47
- 8.48
- 8.53