

第5章 离散时间傅立叶变换

本章主要内容：

- 离散时间傅立叶变换
- 常用信号的离散时间傅立叶变换对。
- 离散时间周期信号的傅立叶变换。
- 傅立叶变换的性质。
- 系统的频率响应与系统的频域分析方法。

❖ **注释:**

CFS (The Continuous-Time Fourier Series):
连续时间傅立叶级数

DFS (The Discrete-Time Fourier Series):
离散时间傅立叶级数

CTFT (The Continuous-Time Fourier Transform):
连续时间傅立叶变换

DTFT (The Discrete-Time Fourier Transform):
离散时间傅立叶变换

5.0 引言 Introduction

- 本章将采用与讨论CTFT完全相同的思想方法，来研究离散时间非周期信号的频域分解问题。
- DFS与CFS之间既有许多类似之处，也有一些重大差别：主要是DFS是一个有限项级数，其系数 a_k 具有周期性。

❖ 在采用相同方法研究如何从 DFS 引出离散时间非周期信号的频域描述时，可以看到，DTFT与CTFT既有许多相类似的地方，也同时存在一些重要的区别。

❖ 抓住它们之间的相似之处并关注其差别，对于掌握和加深对频域分析方法的理解具有重要意义。

5.1 非周期信号的表示

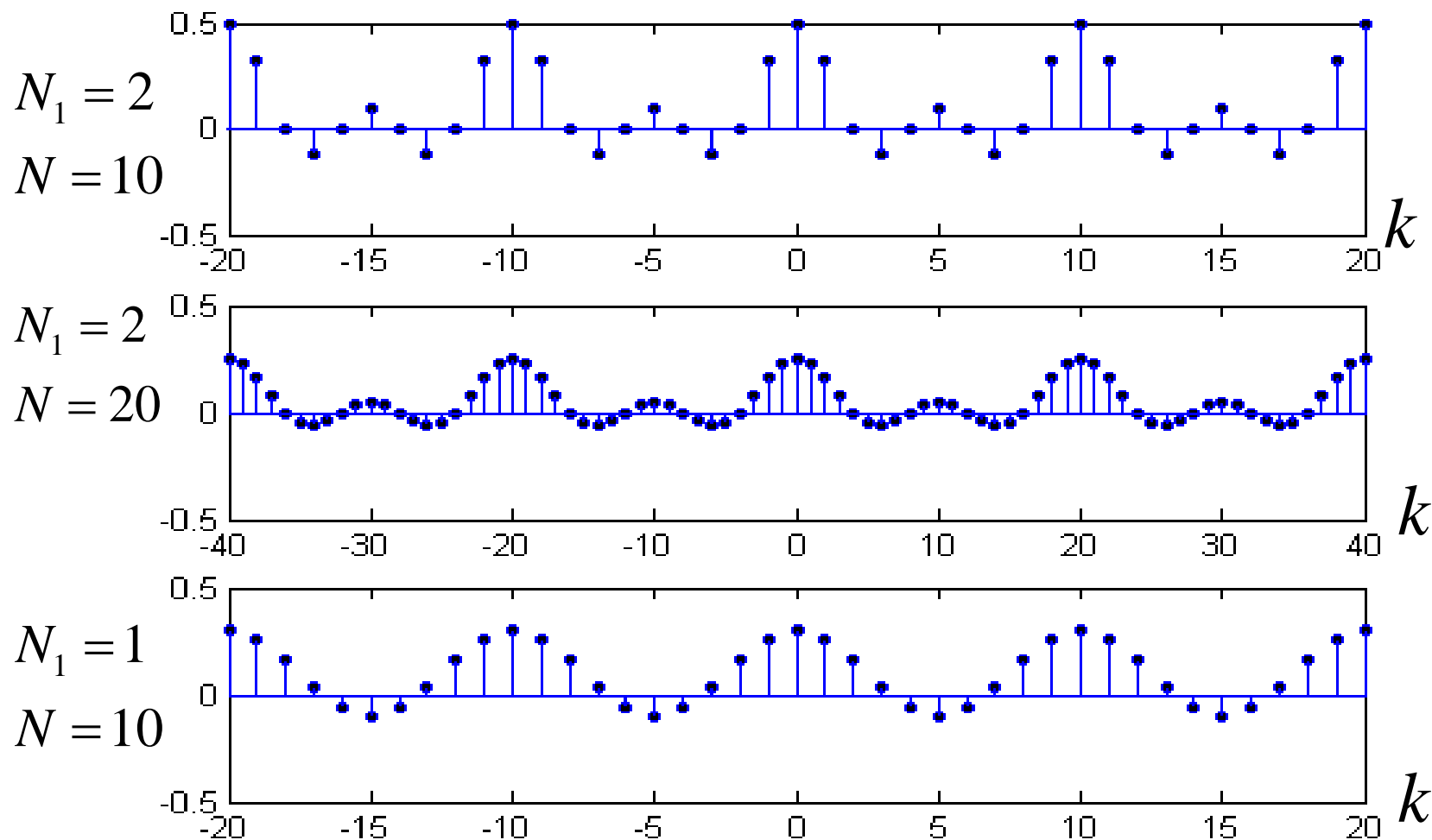
Representation of Aperiodic Signals: The Discrete-time Fourier Transform

一. 从DFS到DTFT:

在讨论离散时间周期性矩形脉冲信号的频谱时,我们看到 :

当信号周期 N 增大时, 频谱的包络形状不变, 幅度减小, 而频谱的谱线变密。

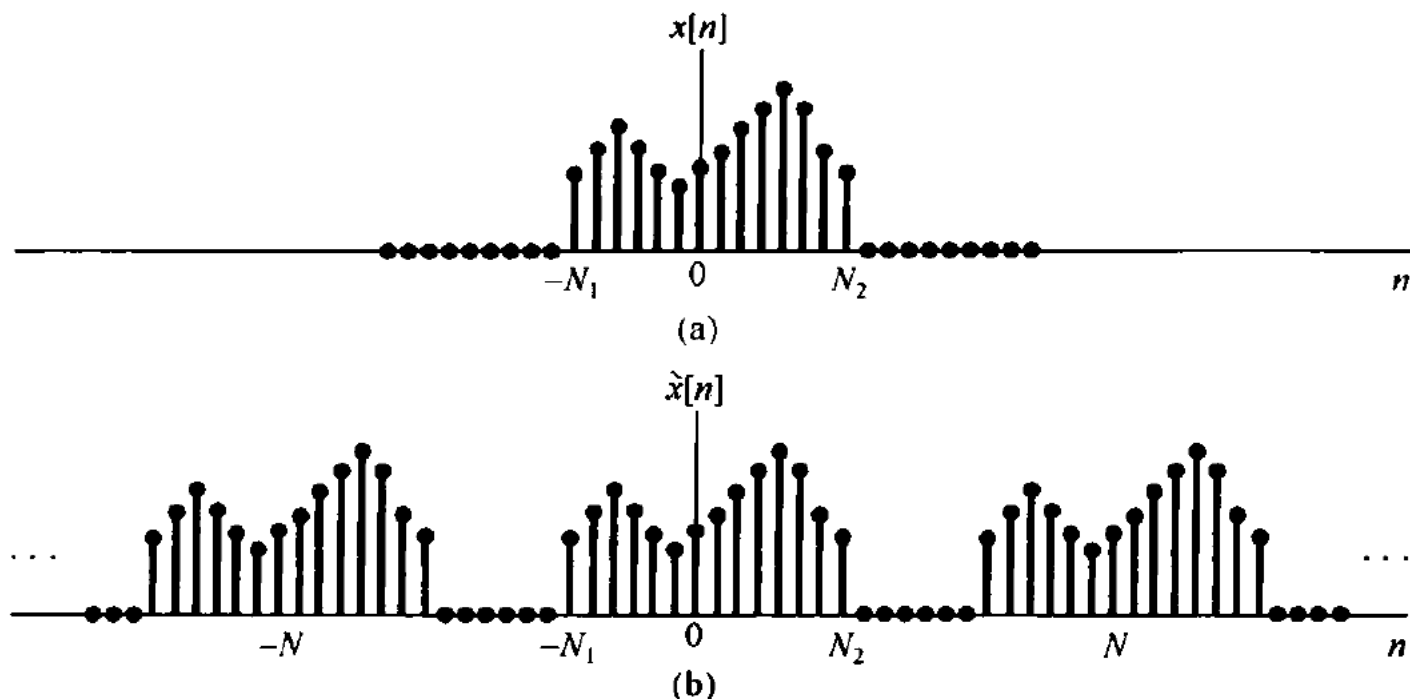
周期性方波序列的频谱



当 $N \rightarrow \infty$ 时，有 $\omega_0 = (2\pi / N) \rightarrow 0$ ，将导致信号的频谱无限密集，最终成为连续频谱。

从时域看，当周期信号的周期 $N \rightarrow \infty$ 时，周期序列就变成了一个非周期的序列。

因此，可以预见，对一个非周期信号，它的频谱应该是一个连续的频谱。



对周期信号 $\tilde{x}[n]$ 由DFS有

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

即

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

定义函数

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

说明:显然 $X(e^{j\omega})$ **对** ω **是以** 2π **为周期的。**

$$X(e^{j(\omega_o+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega_o+2\pi k)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega_o n} e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega_o n} = X(e^{j\omega_o})$$

将其与 a_k 表达式比较有

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

于是:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$, $k\omega_0 \rightarrow \omega$, $\omega_0 \rightarrow d\omega$, $\sum \rightarrow \int$,

当 k 在一个周期范围内变化时, $k\omega_0$ 在 2π 范围变化, 所以积分区间是 2π 。

$$\therefore x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

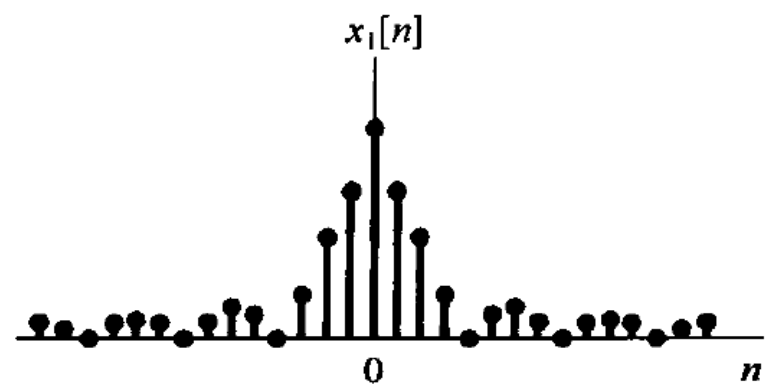
表明:离散时间序列可以分解为频率在 2π 区间上分布的、幅度为 $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$ 的复指数分量的线性组合。

结论：

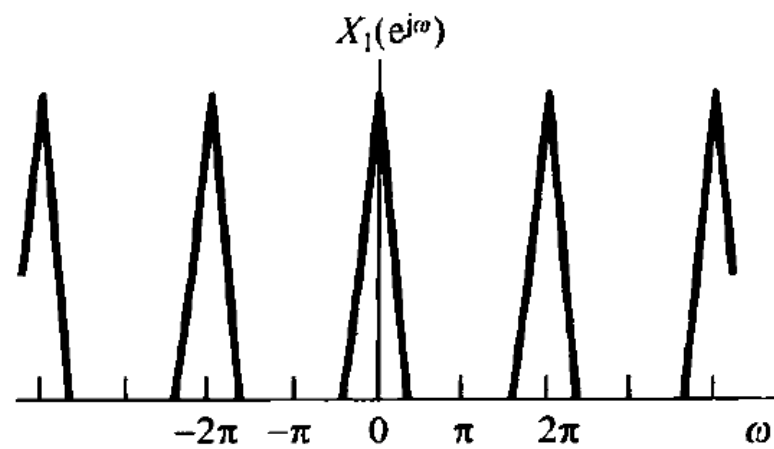
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

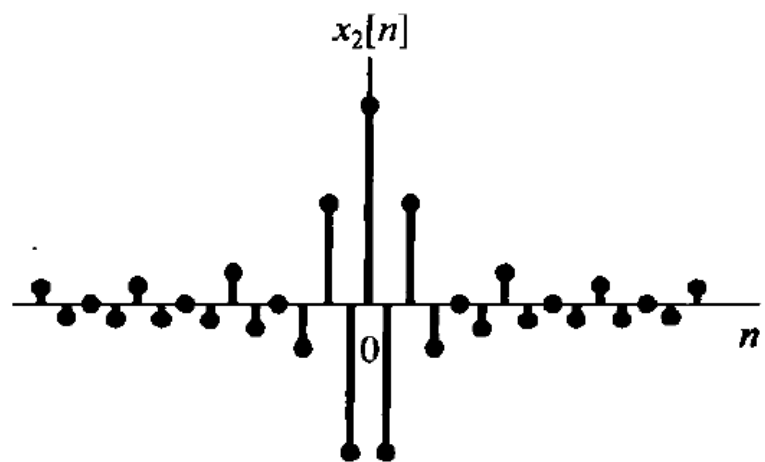
DTFT
对



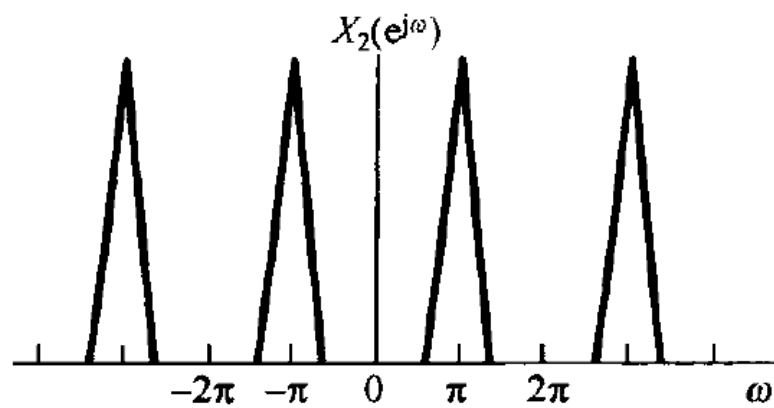
(a)



(b)



(c)



(d)

二.常用信号的离散时间傅立叶变换

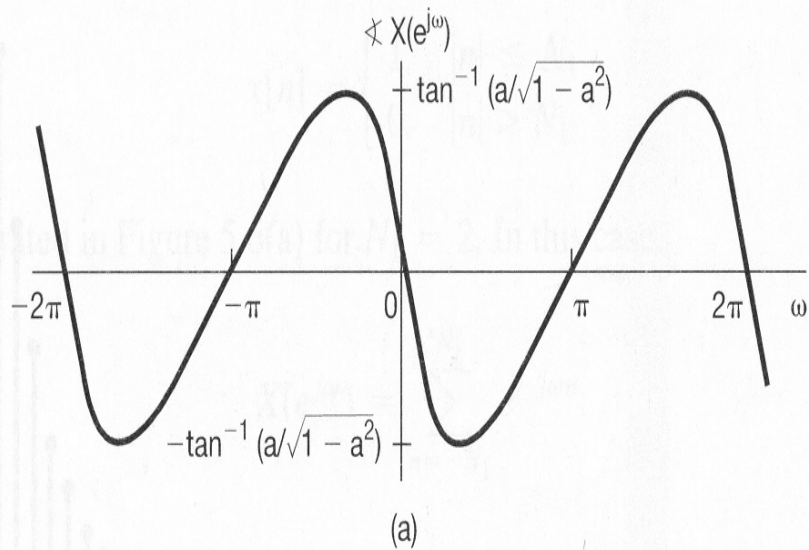
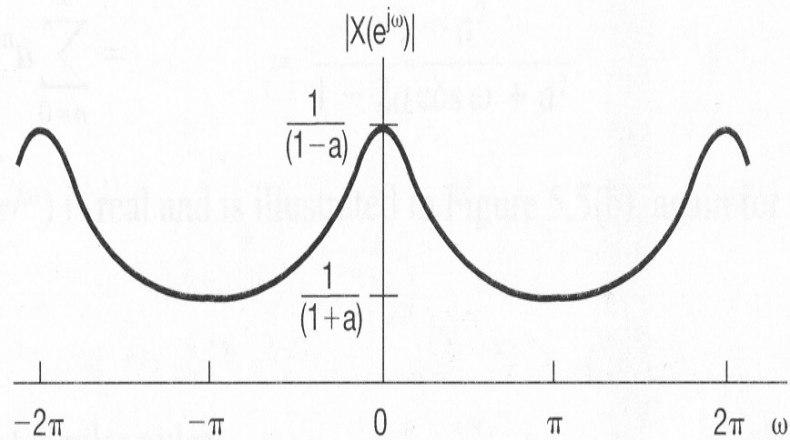
1. $x[n] = a^n u(n), \quad |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

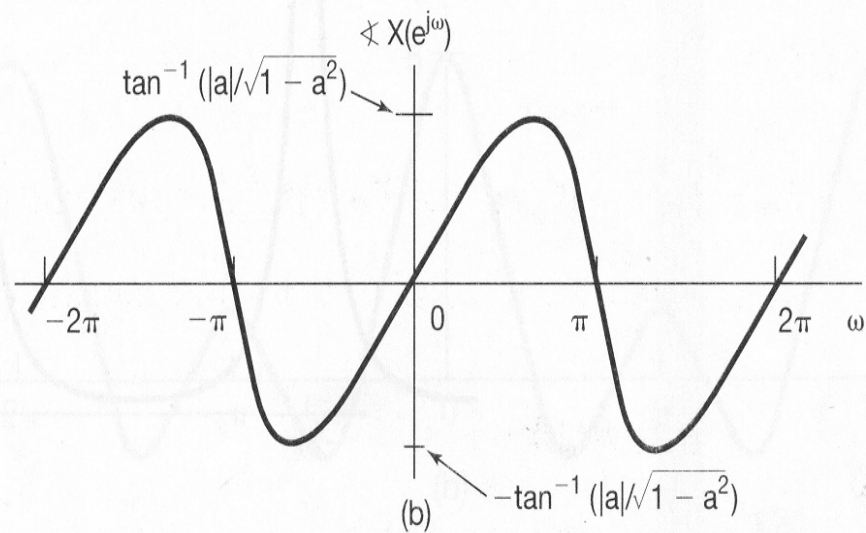
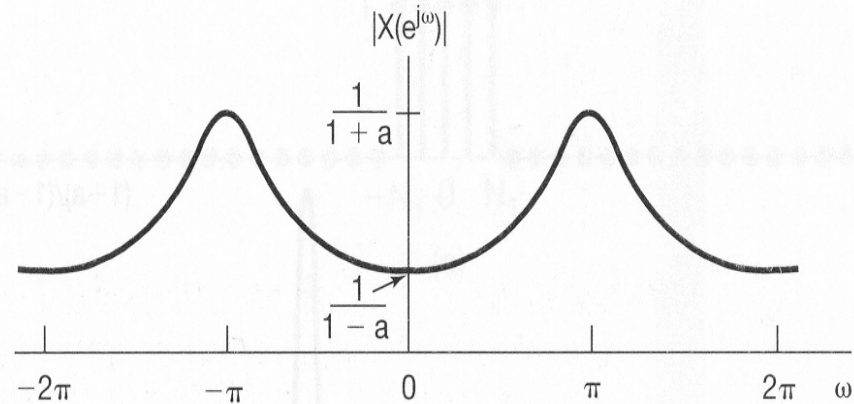
通常 $X(e^{j\omega})$ **是复函数，用它的模和相位表示：**

$$\left| X(e^{j\omega}) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\tan^{-1} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}$$



$$0 < a < 1$$



$$-1 < a < 0$$

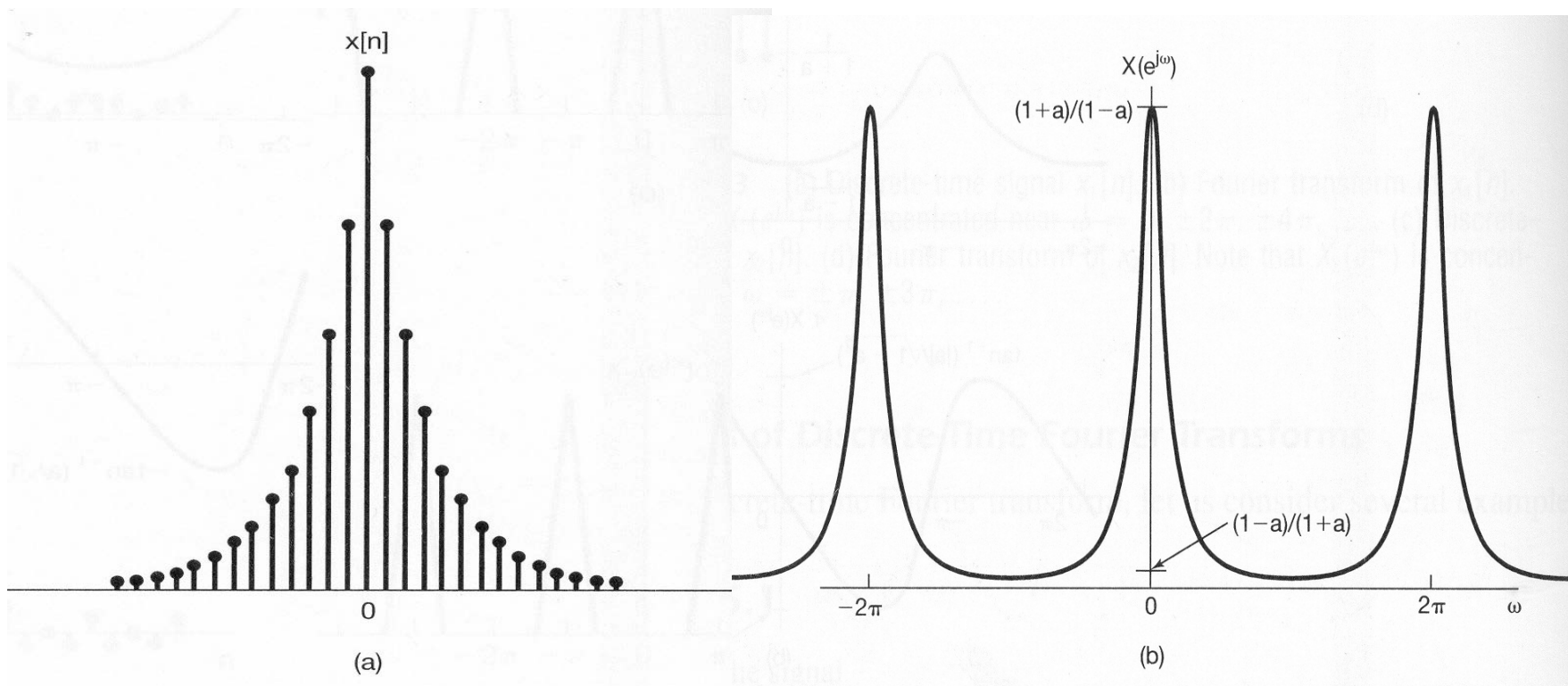
由图可以得到:

$0 < a < 1$ 时, 低频特性, $x[n]$ 单调指数衰减

$-1 < a < 0$ 时, 高频特性, $x[n]$ 摆动指数衰减

2. $x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \end{aligned}$$



可以得出结论:实偶序列 \longleftrightarrow 实偶函数

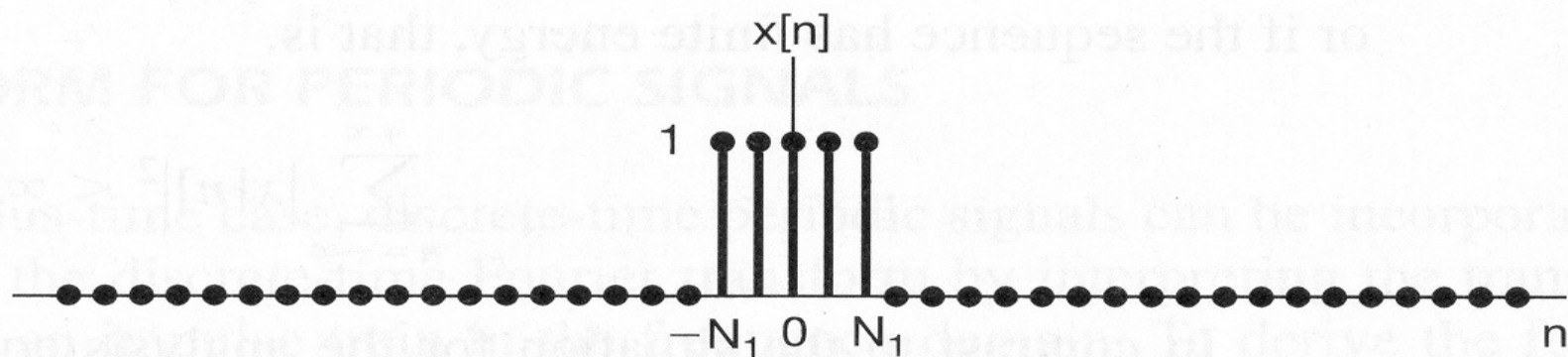
3.矩形脉冲:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

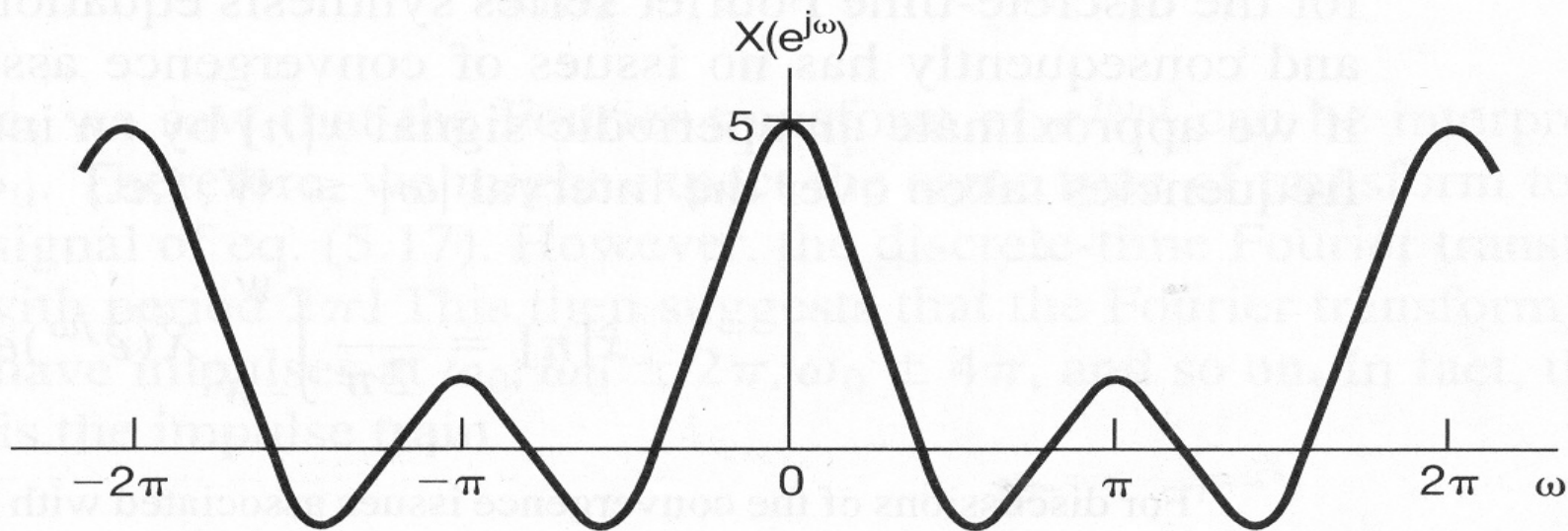
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin(2N_1 + 1)\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

有同样的结论:实偶信号 \longleftrightarrow 实偶函数

当 $N_1 = 2$ 时, 可得到:



(a)



(b)

两点比较:

1.与对应的周期信号比较

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2N_1 + 1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1 + 1)}{\sin\frac{\pi}{N}k},$$

显然有

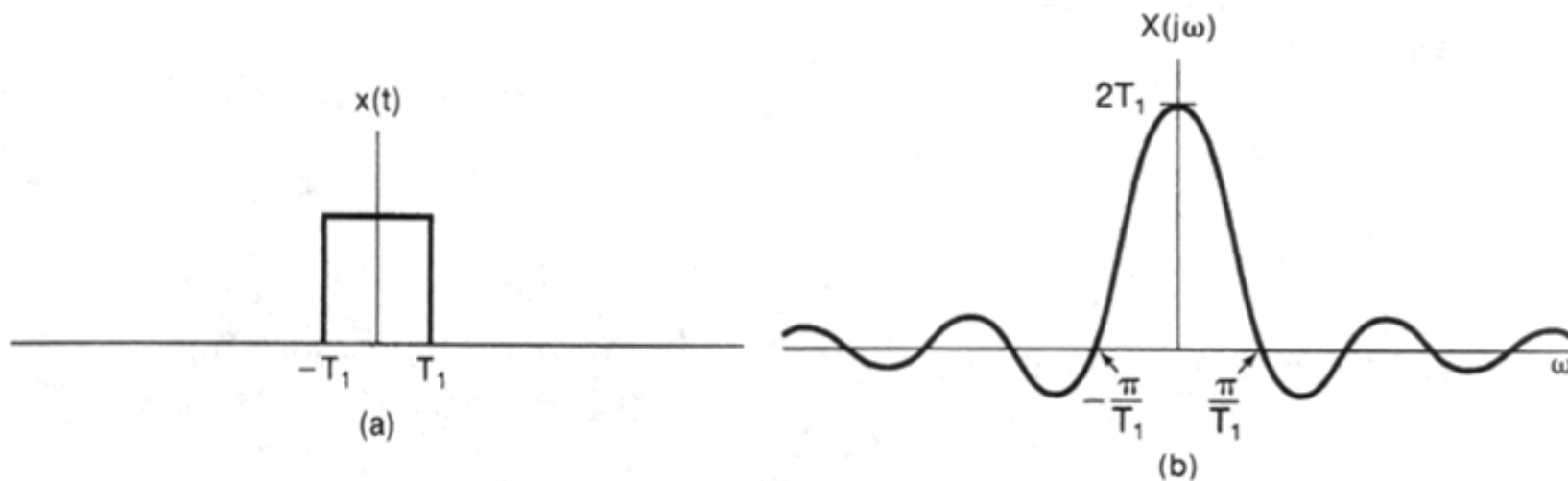
$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

关系成立

2.与对应的连续时间信号比较

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad X(j\omega) = \frac{2T_1 \sin \omega T_1}{\omega T_1}$$

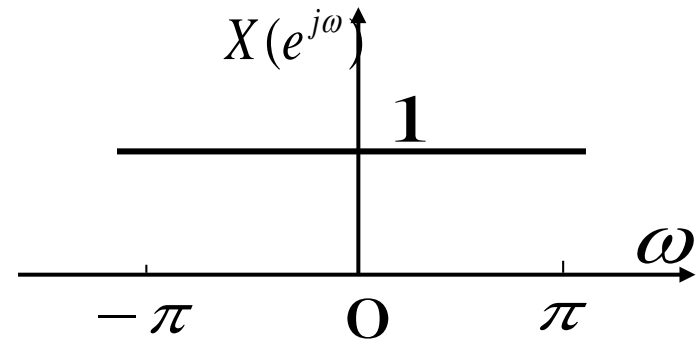
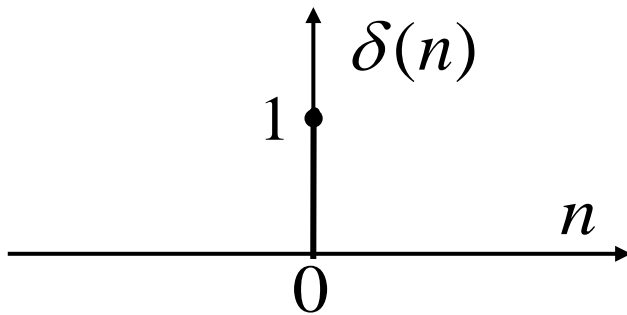
如图所示:



4. $x[n] = \delta[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = 1$$

如图所示:



三. DTFT的收敛问题

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

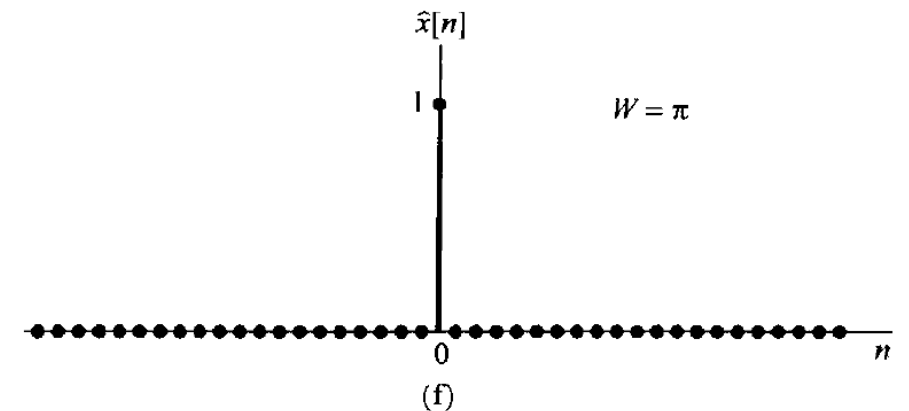
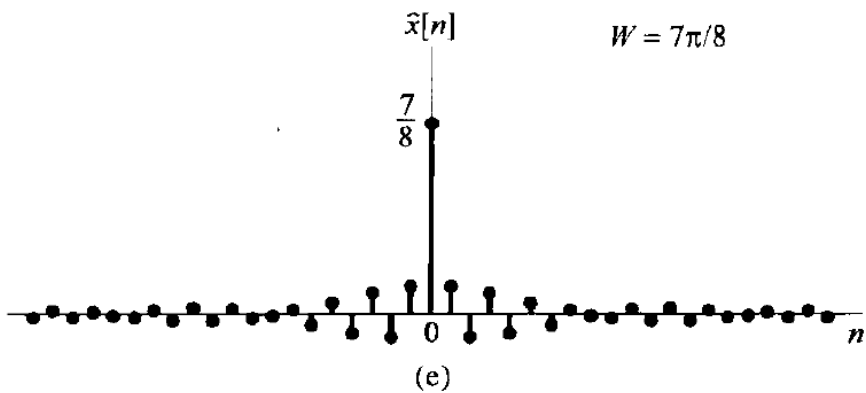
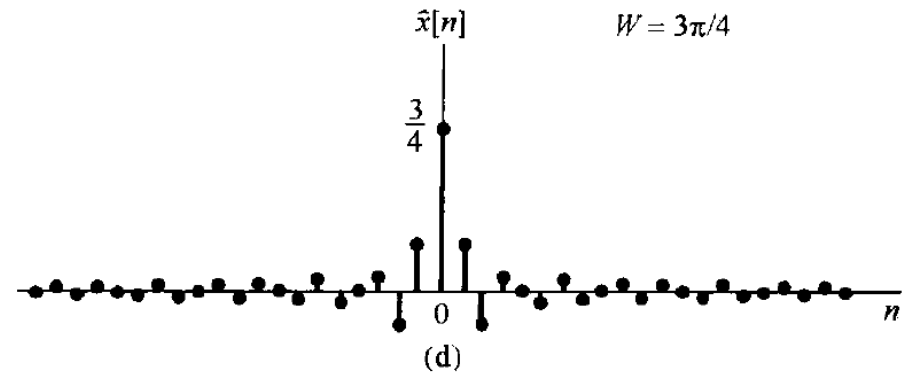
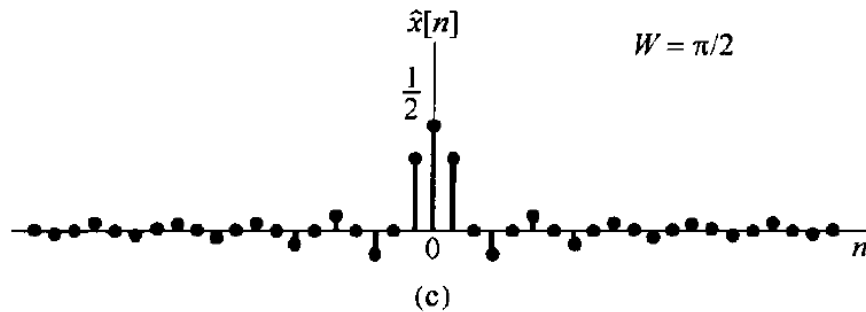
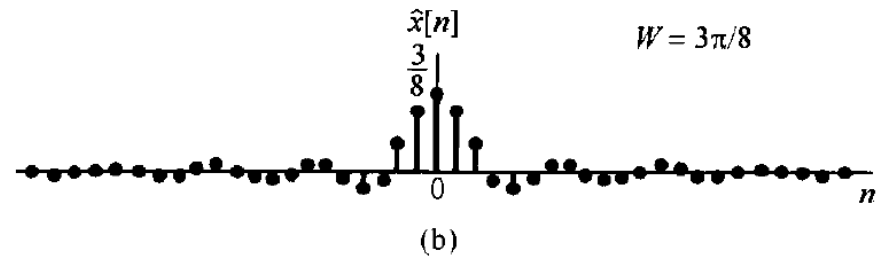
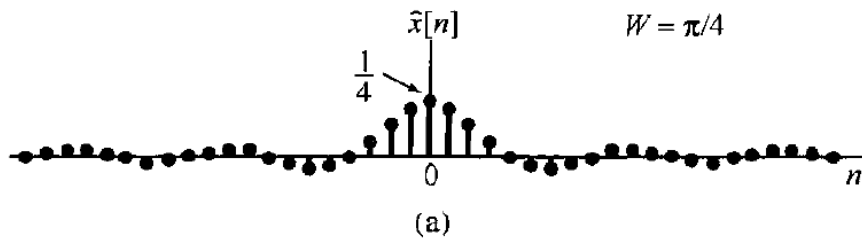
当 $x[n]$ 是无限长序列时，由于 $X(e^{j\omega})$ 的表达式是无穷项级数，当然会存在收敛问题。

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$, 则级数以均方误差最小的准则收敛于 $X(e^{j\omega})$ 。

2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$, 则 $X(e^{j\omega})$ 存在，且级数一致收敛于 $X(e^{j\omega})$ 。

$$x[n] = \delta[n] \quad X(e^{j\omega}) = 1$$

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$



由图可以得到以下结论:

- ❖ 当以部分复指数分量之和近似信号时, 也会出现起伏和振荡;
- ❖ 但随着 $W \uparrow$, $\tilde{x}[n]$ 的振荡频率变高, 起伏的幅度趋小;
- ❖ 当 $W = \pi$ 时, 振荡与起伏将完全消失, 不会出现吉伯斯(Gibbs)现象, 也不存在收敛问题。

5.2 周期信号的DTFT

The Fourier Transform for Periodic Signals

对连续时间信号，有 $2\pi\delta(\omega - \omega_0) \leftrightarrow e^{j\omega_0 t}$ ，由此推断，对离散时间信号或许有相似的情况。但由于DTFT一定是以 2π 为周期的，因此，频域的冲激应该是周期性的冲激串，即

$$X(e^{j\omega n}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

对其做反变换有：

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \int_0^{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}
 \end{aligned}$$

可见, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \leftrightarrow e^{j\omega_0 n}$

由DFS有 $\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

因此，周期信号 $\tilde{x}[n]$ 可用DTFT表示为

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l) \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi l\right) \\
&= \cdots + \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) + \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi\right) \\
&\quad + \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 4\pi\right) + \cdots \\
&= \cdots + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k + N)\right] \\
&\quad \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k + 2N)\right] + \cdots
\end{aligned}$$

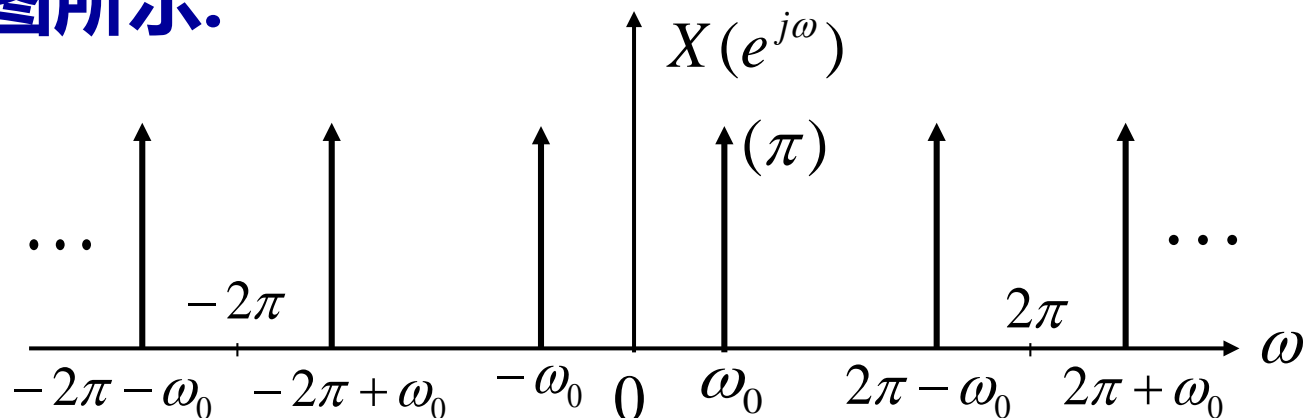
$$\begin{aligned}
&= \cdots + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) + \sum_{k=N}^{2N-1} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \\
&+ \sum_{k=2N}^{3N-1} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) + \cdots \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)
\end{aligned}$$

比较: 可以看出与连续时间傅立叶变换中相应的形式是完全一致的。

例1. $x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$, 它不一定是周期的。当 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k$ 时才具有周期性。

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)]$$

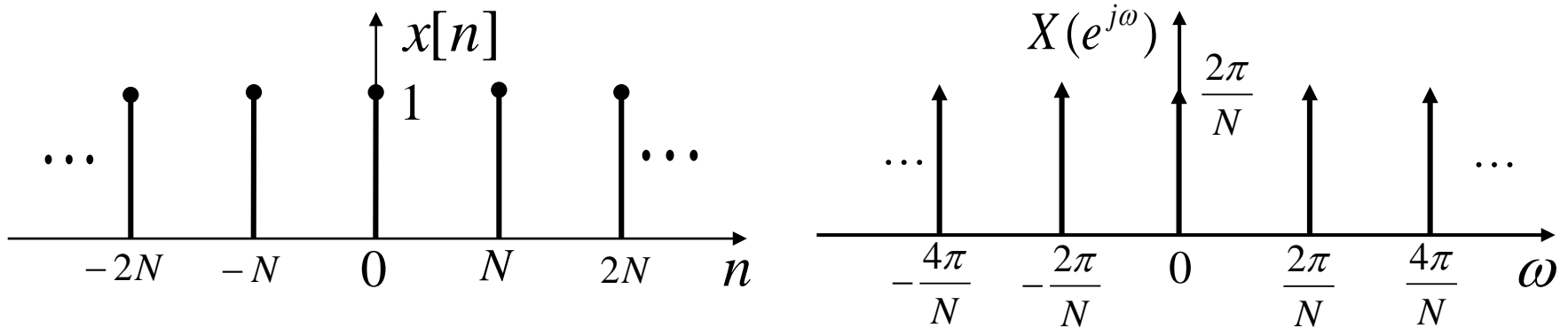
如图所示:



例2. $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$ ——— **均匀脉冲串**

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$



比较:与连续时间情况下对应的相一致。

5.3 离散时间傅立叶变换的性质

Properties of the Discrete-Time Fourier Transform

DTFT也有很多与CTFT类似的性质，当然也有某些明显的差别。

通过对DTFT性质的讨论，目的在于揭示信号时域和频域特性之间的关系。

一、周期性 (periodic) :

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

比较：这是与CTFT不同的。

二. 线性 (linearity):

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

三. 时移与频移 (shifting):

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则

$$x[n - n_0] \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \quad \text{—— 时移特性}$$

$$x[n]e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad \text{—— 频移特性}$$

例 5.7 图 5.12(a) 示出一个截止频率为 ω_c 的低通滤波器的频率响应 $H_{lp}(e^{j\omega})$ ，而图 5.12(b) 则是将 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 频移半个周期(即 π)后的 $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ 。因为在离散时间情况下，高频集中在 π (或 π 的奇数倍)附近，所以图 5.12(b) 所示特性就是一个截止频率为 $\pi - \omega_c$ 的理想高通滤波器，也即

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) \quad (5.32)$$

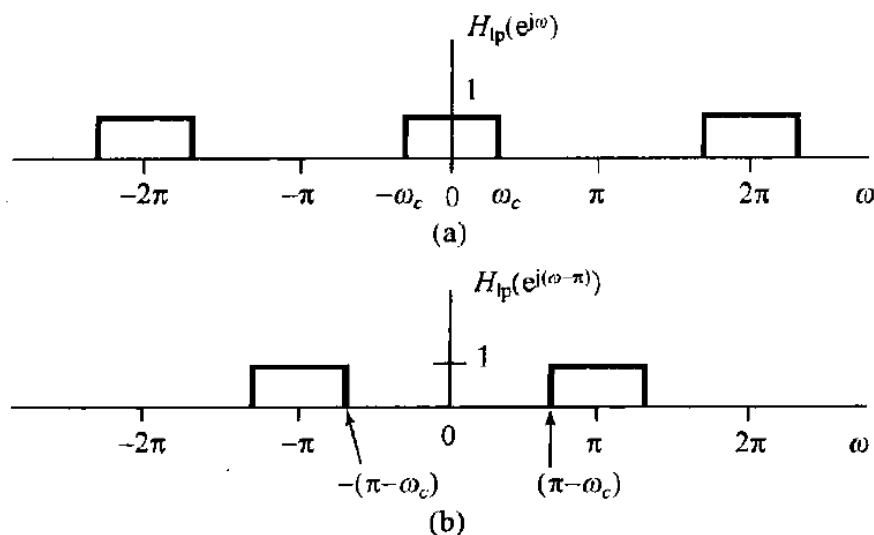


图 5.12 (a) 某一低通滤波器的频率响应; (b) 将(a)的频率响应频移半个周期 $\omega = \pi$ 得到一高通滤波器的频率响应

由式(3.122)可知，并且在 5.4 节将再次讨论到，一个线性时不变系统的频率响应是该系统单位脉冲响应的傅里叶变换。于是，若 $h_{lp}[n]$ 和 $h_{hp}[n]$ 分别记为图 5.12(a) 和图 5.12(b) 的单位脉冲响应，那么式(5.32)和频移性质就意味着低通和高通滤波器有如下关系：

$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n] \quad (5.33)$$

$$= (-1)^n h_{lp}[n] \quad (5.34)$$

四. 共轭对称性 (symmetry properties):

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, **则** $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

由此可进一步得到以下结论:

1. 若 $x[n]$ **是实信号**, **则** $x^*[n] = x[n]$

$$\therefore X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}), \quad \text{即 } X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

$$\therefore \begin{cases} |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] = \operatorname{Re}[X(e^{-j\omega})] \\ \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] = -\operatorname{Im}[X(e^{-j\omega})] \end{cases}$$

2. 若 $x[n]$ 是实偶信号，则 $x[n] = x[-n]$,

$$x^*[n] = x[n] \quad \because x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

于是有: $X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}),$

即 $X(e^{j\omega})$ 是实偶函数。

3. 若 $x[n]$ 是实奇信号， $x[n] = -x[-n]$, $x^*[n] = x[n]$

于是有: $X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega}) = -X^*(e^{j\omega}),$

表明 $X(e^{j\omega})$ 是虚奇函数。

4. 若 $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$, **则有:**

$$x_e(n) \leftrightarrow \operatorname{Re} \left[X(e^{j\omega}) \right] \quad x_o(n) \leftrightarrow j \operatorname{Im} \left[X(e^{j\omega}) \right]$$

说明:这些结论与连续时间情况下完全一致。

五. 差分与求和 (Differencing and Accumulation):

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) \leftrightarrow \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

说明:在DTFT中 $(1 - e^{-j\omega})$ **对应于CTFT中的** $j\omega$ **。**

例 5.8 现利用累加性质来导出单位阶跃序列 $x[n] = u[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。已知

$$g[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(e^{j\omega}) = 1$$

由 1.4.1 节知道，单位阶跃序列就是单位脉冲序列的累加，即

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^n g[m]$$

上式两边取傅里叶变换，并应用累加性质可得

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{(1 - e^{-j\omega})} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \end{aligned}$$

六. 时域反转 (reflaction):

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, **则** $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

设信号 $x[n]$ 的频谱为 $X(e^{j\omega})$, 考虑 $y[n] = x[-n]$ 的变换 $Y(e^{j\omega})$ 。由式(5.9)

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{-j\omega n} \quad (5.40)$$

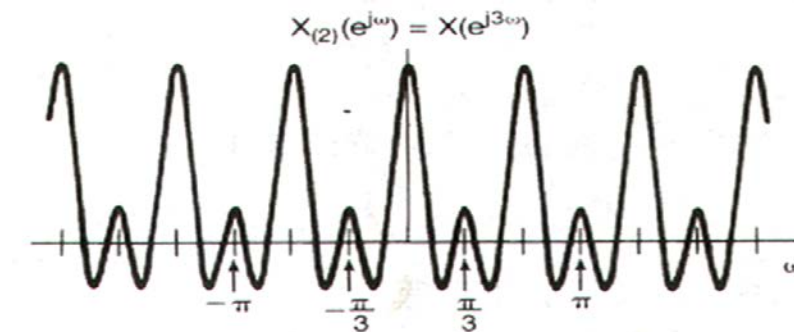
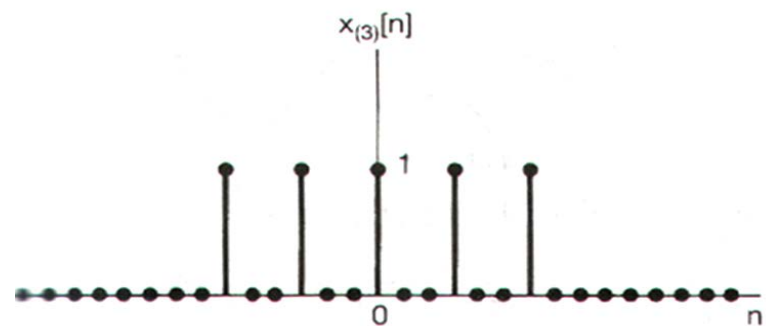
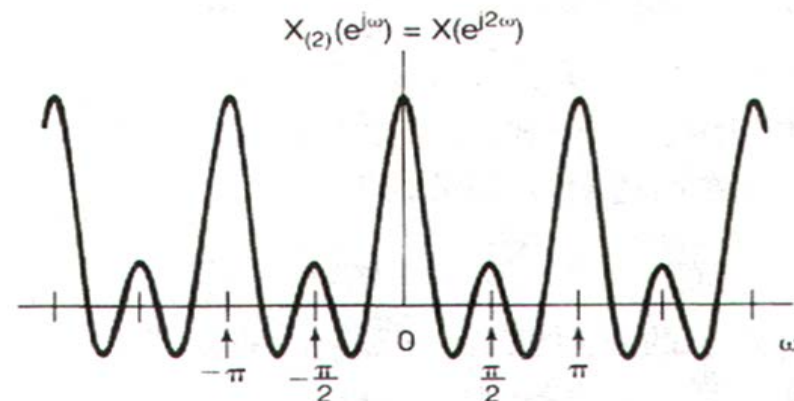
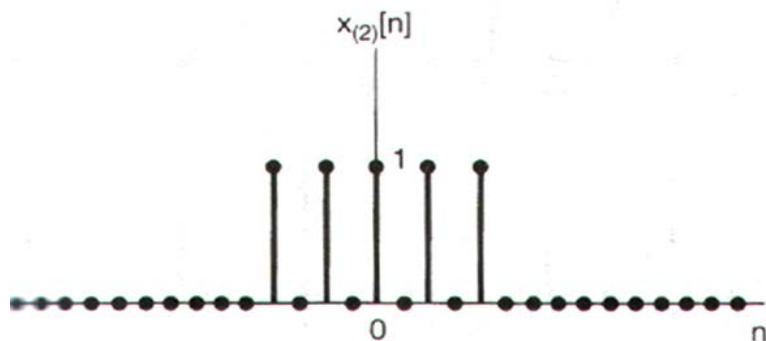
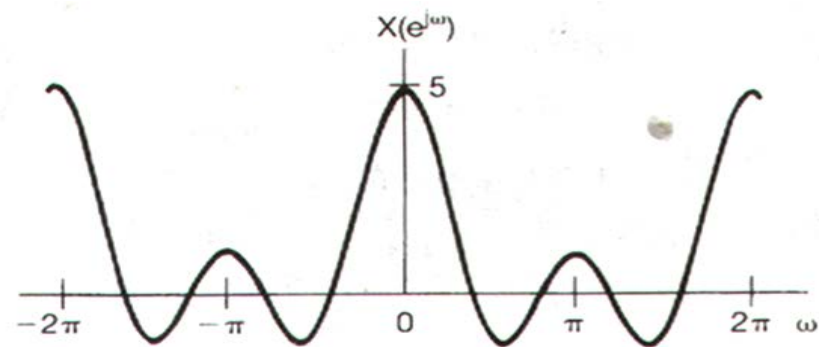
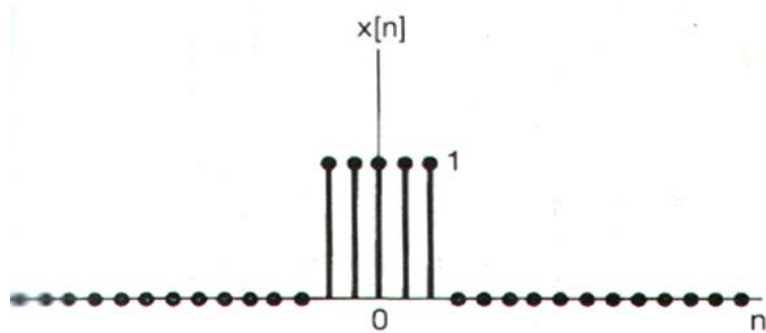
在式(5.40)中进行 $m = -n$ 置换, 得

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega}) \quad (5.41)$$

七. 时域扩展 (Interplation):

定义 $x_k[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$

$$\begin{aligned} X_k(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k[n]e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_k[rk]e^{-j\omega rk} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]e^{-j\omega rk} = X(e^{jk\omega}) \quad \therefore x_k[n] \leftrightarrow X(e^{jk\omega}) \end{aligned}$$



信号的时域与频域特性之间有一种相反的关系。

例 5.9 作为时域扩展性质在确定傅里叶变换应用中的一个例子, 让我们来考虑图 5.15(a) 所示的序列 $x[n]$ 。可以将这个序列与图 5.15(b) 这一较为简单的序列 $y[n]$ 联系起来, 这就是

$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1]$$

其中,

$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

而 $y_{(2)}[n-1]$ 则代表 $y_{(2)}[n]$ 右移一个单位。信号 $y_{(2)}[n]$ 和 $2y_{(2)}[n-1]$ 分别示于图 5.15(c) 和图 5.15(d)。

接下来可以看到, $y[n] = g[n-2]$, $g[n]$ 就是曾在例 5.3 中讨论过的当 $N_1 = 2$ 时的矩形脉冲, 并示于图 5.6(a) 中。结果, 根据例 5.3 和时移性质, 有

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

利用时域扩展性质可得

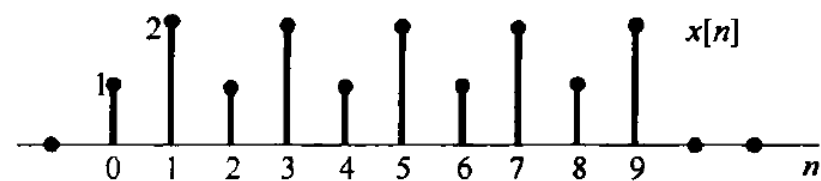
$$y_{(2)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j4\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

再根据线性和时移性质有

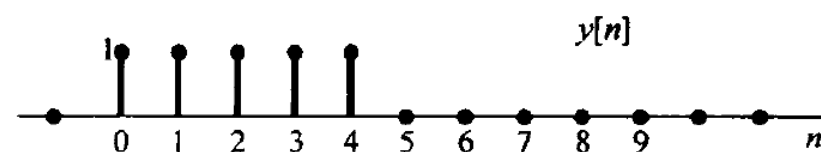
$$2y_{(2)}[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2e^{-j5\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

将以上两个结果合在一起, 最后得

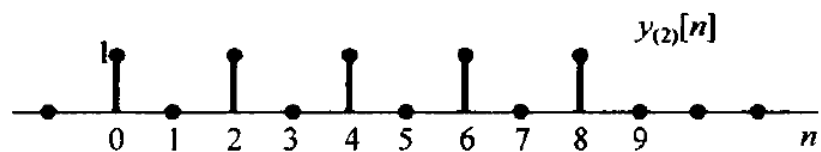
$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} (1 + 2e^{-j\omega}) \left(\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)} \right)$$



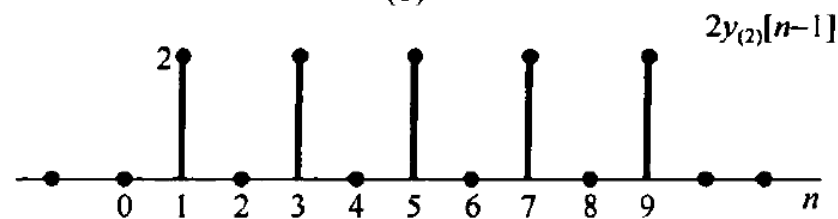
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5.15 (a) 例 5.9 的信号 $x[n]$; (b) 信号 $y[n]$; (c) 由 $y[n]$ 每两点之间插入一个零值得到的信号 $y_{(2)}[n]$; (d) 信号 $2y_{(2)}[n-1]$

八. 频域微分(Differentiation in Frequency):

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n} \quad nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

九. Parseval定理:

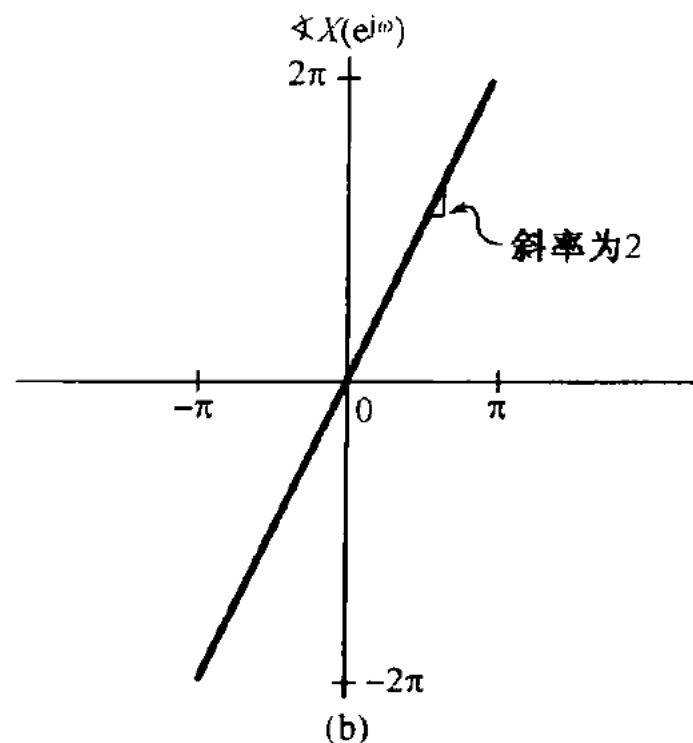
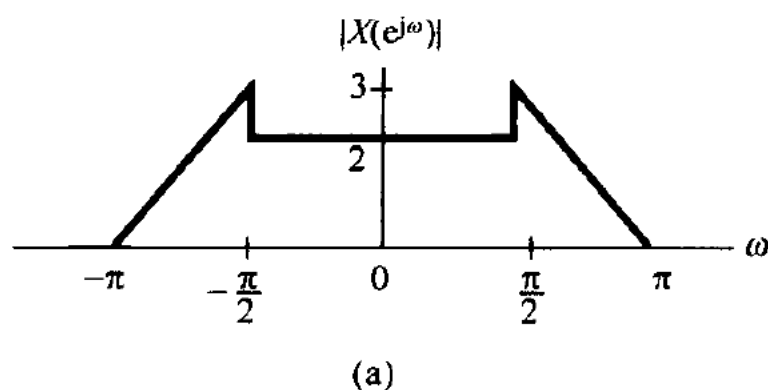
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$|X(e^{j\omega})|^2$ 称为 $x[n]$ 的能量谱密度函数。

比较:在DFS中有 $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$

$|a_k|^2$ 称为周期信号的功率谱。

例 5.10 考虑序列 $x[n]$ ，其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 区间上示于图 5.16。现在想要确定在时域 $x[n]$ 是否是周期的，实信号，偶信号和/或有限能量的。



5.4 卷积特性(The Convolution Property)

若 $y[n] = x[n] * h[n]$,

则 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$,

$H(e^{j\omega})$ 即是系统的频率特性。

说明：该特性提供了对LTI系统进行频域分析的理论基础。

例:求和特性的证明

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) * u(n)$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot U(e^{j\omega})$$

$$= X(e^{j\omega}) \cdot \left[\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \right]$$

$$= \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

例 5.13 考虑一个线性时不变系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

其中 $|\alpha| < 1$ 。假设该系统的输入是

$$x[n] = \beta^n u[n]$$

其中 $|\beta| < 1$ 。求 $h[n]$ 和 $x[n]$ 的傅里叶变换，有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (5.51)$$

和

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}} \quad (5.52)$$

这样就有

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})} \quad (5.53)$$

和例 4.19 相同，求 $Y(e^{j\omega})$ 的逆变换，最容易的做法就是用部分分式将 $Y(e^{j\omega})$ 展开。 $Y(e^{j\omega})$ 是含 $e^{-j\omega}$ 的两个多项式之比，我们总是愿意将它表示成比较简单的一些项之和，这样就能直观地（或许再结合利用 5.3.8 节的频率微分性质）求得每一项的逆变换。对于有理变换的一般情况，其运算步骤在附录中给予讨论。对于本例，若 $\alpha \neq \beta$ ，则 $Y(e^{j\omega})$ 的部分分式展开具有如下形式：

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}} \quad (5.54)$$

令式(5.53)和式(5.54)的右边相等，可得

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad B = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

因此，根据例 5.1 和线性性质，凭直观可得式(5.54)的逆变换为

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \beta^n u[n] \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} u[n] - \beta^{n+1} u[n]]
 \end{aligned}
 \tag{5.55}$$

若 $\alpha = \beta$, 则式(5.54)的部分分式展开式不成立, 然而, 这时

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right)^2$$

这就能表示成

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{j}{\alpha} e^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right) \tag{5.56}$$

和例 4.19 相同, 可以利用频域微分性质式(5.46), 再结合傅里叶变换对

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

得出

$$n\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right)$$

为了计及因子 $e^{j\omega}$ ，可应用时移性质得到

$$(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j e^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right)$$

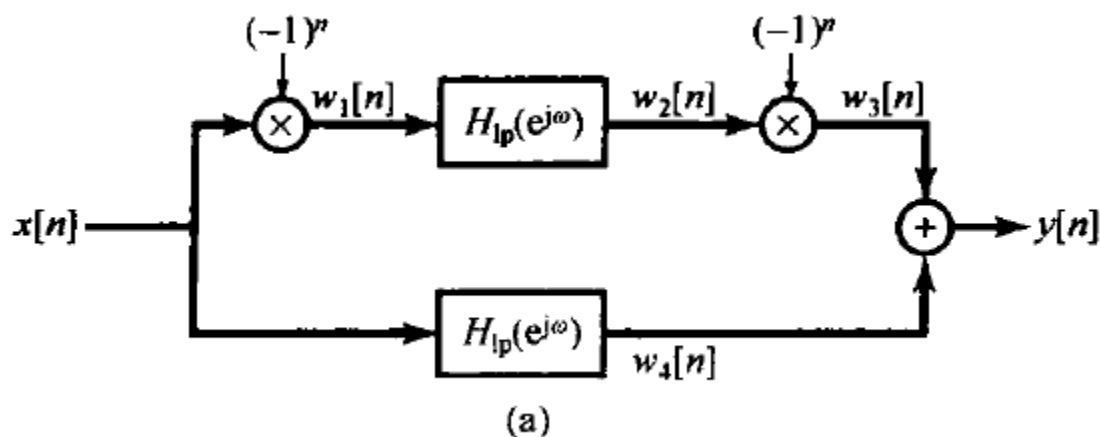
最后再考虑到式(5.56)中的 $1/\alpha$ 因子，可得

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1] \quad (5.57)$$

值得注意的是，虽然上式的右边乘了一个起始于 $n = -1$ 的阶跃，但是序列 $(n+1)\alpha^n u[n+1]$ 在 $n=0$ 以前仍然为零，因为因子 $(n+1)$ 在 $n = -1$ 时为零。因此，也能换成另一种形式将 $y[n]$ 表示为

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n] \quad (5.58)$$

例 5.14 考虑图 5.18(a) 的系统，其输入为 $x[n]$ ，输出为 $y[n]$ 。频率响应为 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 的线性时不变系统是一个截止频率为 $\pi/4$ 的理想低通滤波器，通带内增益为 1。



先考虑图 5.18(a) 中的上部路径。信号 $w_1[n]$ 的傅里叶变换可以通过 $(-1)^n = e^{j\pi n}$ 而有 $w_1[n] = e^{j\pi n}x[n]$ ，再利用频移性质而得到

$$W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

由卷积性质得出

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j(\omega-\pi)})$$

因为 $w_3[n] = e^{j\pi n}w_2[n]$ ，再次利用频移性质就得

$$\begin{aligned} W_3(e^{j\omega}) &= W_2(e^{j(\omega-\pi)}) \\ &= H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j(\omega-2\pi)}) \end{aligned}$$

因为离散时间傅里叶变换总是周期的，周期为 2π ，

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega})$$

再在图 5.18(a) 的下部路径应用卷积性质，可得

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

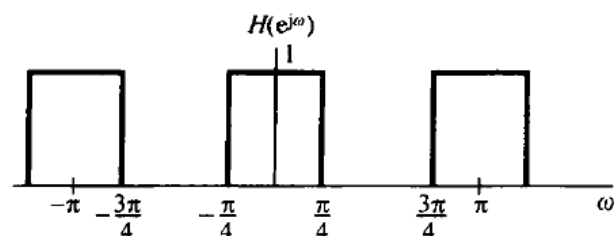
根据傅里叶变换的线性性质，有

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega}) \\ &= [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

结果，图 5.18(a) 整个系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$

如图 5.18(b) 所示。



5.5 相乘性质 (The Multiplication Property)

如果 $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n],$

则
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$$

由于 $X_1(e^{j\omega})$ **和** $X_2(e^{j\omega})$ **都是以** 2π **为周期的，**

因此上述卷积称为周期卷积。

例: $c[n] = (-1)^n$, $x[n] \longrightarrow \bigotimes \longrightarrow y[n] = x[n] \cdot c[n]$

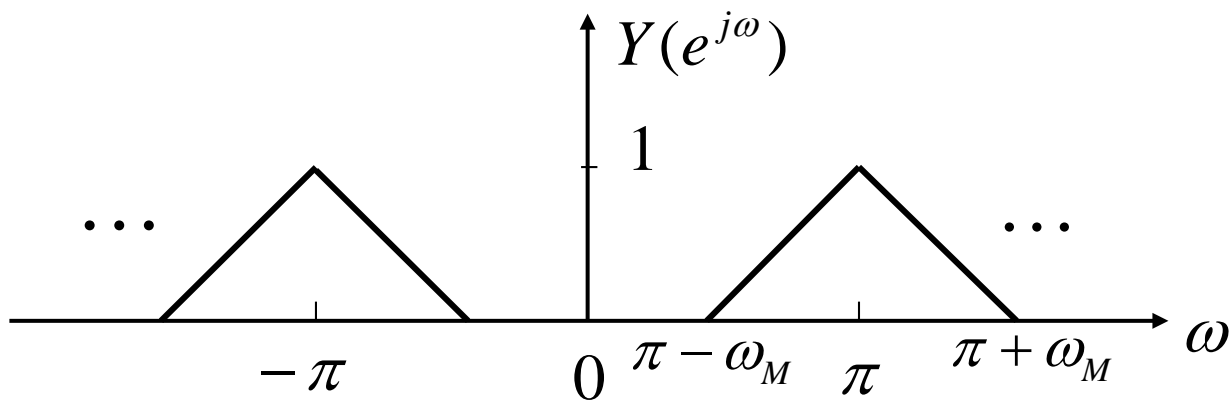
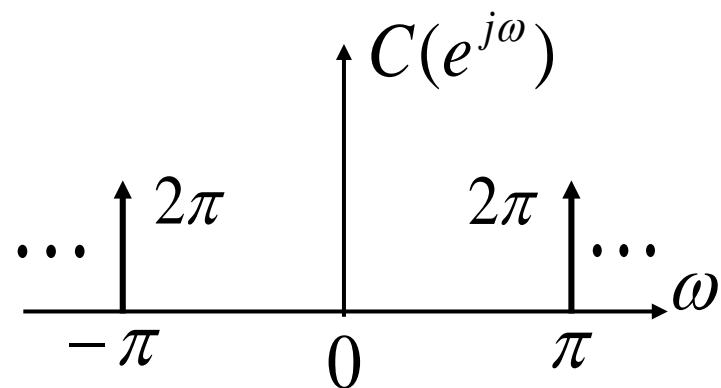
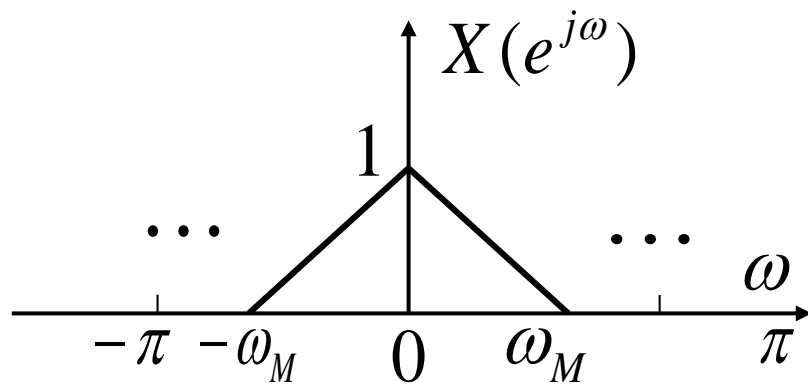
$$c[n] = (-1)^n = e^{j\pi n}$$

$$C(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi - 2k\pi)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * C(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) C(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) \delta(\omega - \pi) d\omega = X(e^{j(\omega-\pi)})$$



5.6 傅立叶变换的性质及基本变换对列表

表 5.1 傅里叶变换性质

节 号	性 质	非周期信号	傅里叶变换
		$x[n]$ $y[n]$	$X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$ } 周期的, 周期为 2π
5.3.2	线性	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
5.3.3	时移	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
5.3.3	频移	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
5.3.4	共轭	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
5.3.6	时间反转	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
5.3.7	时域扩展	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ 为 } k \text{ 的倍数} \\ 0, & n \text{ 不为 } k \text{ 的倍数} \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
5.4	卷积	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$
5.5	相乘	$x[n] y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$
5.3.5	时域差分	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$

节 号	性 质	非周期信号	傅里叶变换
5.3.5	累加	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
5.3.8	频域微分	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
5.3.4	实信号的共轭对称性	$x[n]$ 为实信号	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \operatorname{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\operatorname{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
5.3.4	实偶信号的对称性	$X[n]$ 为实偶信号	$X(e^{j\omega})$ 为实偶
5.3.4	实奇信号的对称性	$X[n]$ 为实奇信号	$X(e^{j\omega})$ 纯虚且为奇
5.3.4	实信号的奇偶分解	$X_e[n] = \mathcal{E}\nu\{x[n]\} \quad [x[n] \text{ 为实}]$ $X_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\} \quad [x[n] \text{ 为实}]$	$\operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ $j\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
5.3.9	非周期信号的帕斯瓦尔定理		$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

表 5.2 基本傅里叶变换对

信 号	傅里叶变换	傅里叶级数系数 (若为周期的)
$\sum_{k=(N)} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	<p>(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$</p> $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ <p>(b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数表明信号是非周期的</p>
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{ \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) \}$	<p>(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$</p> $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ <p>(b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数表明信号是非周期的</p>
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{ \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) \}$	<p>(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$</p> $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ <p>(b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数表明信号是非周期的</p>
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

信 号	傅里叶变换	傅里叶级数系数 (若为周期的)
周期方波 $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq N/2 \end{cases}$ 和 $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin\left[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})\right]}{N \sin[2\pi k/2N]},$ $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}, \text{ 对全部 } k$
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin W_n}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{W_n}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq W \\ 0, & W < \omega \leq \pi \end{cases}$ $X(\omega) \text{ 周期的, 周期为 } 2\pi$	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n! (r-1)!} a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—

5.7 对偶性 (Duality)

一.DFS的对偶

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

由于 a_k 本身也是以N为周期的序列，当然也可以将其展开成DFS形式。

即:
$$a_k = \sum_{n=\langle N \rangle} \frac{1}{N} x[-n] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{或} \quad a_n = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} x(-k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

这表明：序列 a_n 的DFS系数就是 $\frac{1}{N} x(-k)$,

即:

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{DFS} a_k \\ a_n &\xleftrightarrow{DFS} \frac{1}{N} x[-k] \end{aligned}$$

利用对偶性可以很方便的将DFS在时域得到的性质，通过对偶得到频域相应的性质。

例1: 从时移到频移

$$x[n] \leftrightarrow a_k \quad a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x[-k]$$

利用时移性质有: $a_{n-n_0} \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$

由对偶性有: $\frac{1}{N} x[-n] e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow \frac{1}{N} a_{-k-M}$

$$\therefore x[-n] e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{-k-M}$$

$$\therefore x[-n] \leftrightarrow a_{-k} \quad \therefore x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{k-M} \quad \text{频移特性}$$

例2:由卷积特性到相乘特性

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow a_k \cdot b_k \cdot N$$

$$a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \quad b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_2(-k)$$

由时域卷积性质:

$$a_n \otimes b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot \frac{1}{N} x_2(-k) \cdot N = \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot x_2(-k)$$

由对偶性: $\frac{1}{N} x_1(-n) x_2(-n) \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} a_m b_{-k-m}$

$$\therefore x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \sum_{m=\langle N \rangle} a_m b_{k-m} = a_k \otimes b_k \quad \text{时域相乘性质}$$

二. DTFT与CFS间的对偶

由 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ 知 $X(e^{j\omega})$ 是一个以 2π 为周期的连续函数, 如果在时域构造一个以 2π 为周期的连续时间信号 $X(e^{jt})$, 则可以将其表示为CFS形式:

这表明：

$$\text{若 } x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

$$\text{则 } X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x[-k]$$

利用这一对偶关系，可以将DTFT的若干特性对偶到CFS中去；或者反之。

例: 从CFS的时域微分到DTFT的频域微分

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{CFS} j \frac{2\pi}{T} k a_k \quad \text{CFS的时域微分特性}$$

若 $x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$, 则 $X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$

$$\therefore \frac{d}{dt} X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} j \frac{2\pi}{T} k x(-k) = j k x(-k), \quad (T = 2\pi)$$

$$-j n x(n) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) \quad \text{DTFT的频域微分特性}$$

例: 从CFS的卷积特性到DTFT的相乘特性

$$\begin{aligned}x_1(n) &\xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) & x_2(n) &\xleftrightarrow{DTFT} X_2(e^{j\omega}) \\X_1(e^{jt}) &\xleftrightarrow{CFS} x_1(-k) & X_2(e^{jt}) &\xleftrightarrow{CFS} x_2(-k)\end{aligned}$$

由CFS的卷积特性 $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow T a_k b_k$

$$X_1(e^{jt}) \otimes X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} 2\pi x_1(-k)x_2(-k), (T = 2\pi)$$

由对偶性：

$$2\pi x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

——**DTFT的相乘特性**

可以看出：信号在时域的特性和在频域的特性之间存在以下对应关系：

时域的周期性  **频域的离散性**

时域的非周期性  **频域的连续性**

时域的离散性  **频域的周期性**

时域的连续性  **频域的非周期性**

5.8 由LCCDE表征的系统

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Difference Equations

相当广泛而有用的一类离散时间LTI系统可以由一个线性常系数差分方程（LCCDE）来表征：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$$

一. 由LCCDE描述的系统的频率响应：

对方程两边进行DTFT变换，可得到：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^N b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}$$

可见 $H(e^{j\omega})$ 是一个有理函数。当需要得到 $h[n]$ 时, 往往是先从方程得到 $H(e^{j\omega})$, 进而通过反变换得到 $h[n]$ 。

二.系统的频率响应:

$H(e^{j\omega})$ 刻画了LTI系统的频域特征, 它是系统单位脉冲响应的傅立叶变换。

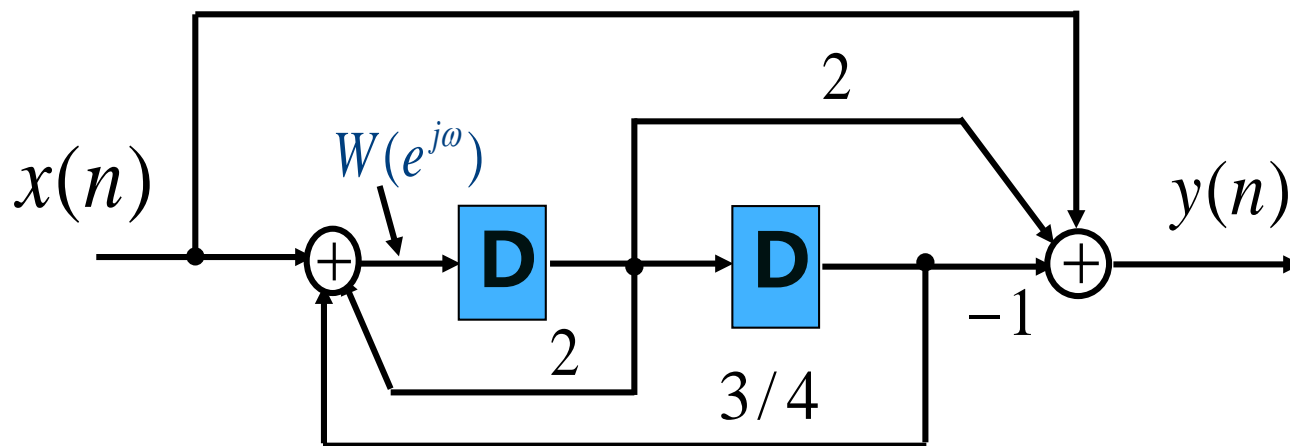
但并非所有的LTI系统都一定存在频率响应。

如果 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$, 则 $H(e^{j\omega})$ 存在。

这说明:稳定系统可以由其频率响应来描述。

由 $H(e^{j\omega})$ 所表征的系统应该是稳定系统。

三.由方框图描述的系统:



通过对图中两个加法器的输出列方程可得到:

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{3}{4}W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} - W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

由上式可得：

$$X(e^{j\omega}) = (1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = (1 - \frac{7}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 + \frac{2e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}}{1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

三. LTI系统的频域分析方法:

1. 对输入信号做傅立叶变换，求得 $X(e^{j\omega})$ 。
2. 根据系统的描述，求得系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。
3. 根据卷积特性得到 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 。
4. 对 $Y(e^{j\omega})$ 做傅立叶反变换得到系统的响应 $y(n)$ 。

做傅立叶变换或反变换的主要方法是部分分式展开、利用傅立叶变换的性质和常用的变换对。

例 5.19 考虑一个因果线性时不变系统，其差分方程为

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n] \quad (5.84)$$

由式(5.80)可知，频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \quad (5.85)$$

为求单位脉冲响应，第一步是要将式(5.85)的分母因式分解为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \quad (5.86)$$

$H(e^{j\omega})$ 就能按部分分式展开，如同附录中的例 A.3 那样，展开的结果为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad (5.87)$$

其中每一项的逆变换都可凭直观写出，其结果为

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (5.88)$$

例 5.20 考虑例 5.19 的线性时不变系统，并设系统输入为

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

利用式(5.80)和例 5.1 或例 5.18，可得

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left[\frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \right] \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right] \\ &= \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} \end{aligned} \quad (5.89)$$

如同在附录中给出的，这种情况下的部分分式展开式是

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (5.90)$$

其中常数 B_{11} 、 B_{12} 和 B_{21} 可用附录中给出的方法求出。这个特定的展开式在附录例 A.4 中详细地列出来了，所得到的值是

$$B_{11} = -4, \quad B_{12} = -2, \quad B_{21} = 8$$

这样

$$Y(e^{j\omega}) = -\frac{4}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (5.91)$$

上式第一项和第三项与在例 5.19 中所遇到的形式相同，而第二项与在例 5.13 中所见过的一样。无论由这些例子，还是根据表 5.2，都能将式(5.91)中的每一项求逆变换，而得出

$$y[n] = \left\{ -4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} u[n] \quad (5.92)$$

5.9 小结 Summary

❖本章与第4章平行地讨论了DTFT，讨论的基本思路和方法与第4章完全对应，得到的许多结论也很类似。

❖通过对DTFT性质的讨论，揭示了离散时间信号时域与频域特性的关系。不仅看到有许多性质在CTFT中都有相对应的结论，而且它们也存在一些重要的差别，例如DTFT总是以 2π 为周期的。

❖通过卷积特性的讨论，对LTI系统建立了频域分析的方法。同样地，相乘特性的存在则为离散时间信号的传输技术提供了理论基础。

❖对偶性的讨论为进一步认识连续时间信号、离散时间信号、周期信号与非周期信号频域描述的几种工具之间的内在联系，提供了重要的理论根据。深入理解并恰当运用对偶性，对深刻掌握CFS、DFS、CTFT、DTFT的本质关系有很大帮助。

- 与连续时间LTI系统一样，对由LCCDE或由方框图描述的LTI系统，可以很方便的由方程或方框图得到系统的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ ，进而实现系统的频域分析。其基本过程和涉及到的问题与连续时间LTI系统的情况也完全类似。

随着今后进一步的讨论，我们可以看到CFS、DFS、CTFT、DTFT之间是完全相通的。

