线性代数 (Linear Algebra)

中山大学计算机学院

衡益

2021 年 9 月 28 日，中山大学南校区

数学

- 形：几何学
- 数：代数
- 形←→数：分析学

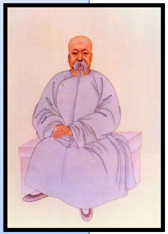
Morris Kline
1908-1992

数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，激发、促进、鼓舞并趋势人类的思维得以运用到最完善的程度；亦正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活；试图回答有关人类自身存在提出的问题；努力去理解和控制自然；尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻和最完美的内涵。

2

发展历程

- Algebra 一词源于 9 世纪的阿拉伯
- 发展历程：巴比伦、希腊、阿拉伯、中国、印度和西欧
- 1859 年数学家李善兰把 Algebra 译为“代数”
- 其中，初等代数内容 16 世纪已经较为完备
- 线性方程组发展成了线性代数理论，成为高等数学的重要组成部分



3

发展历程

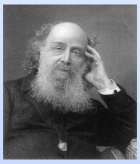
- 行列式：莱布尼茨（德国），17 世纪末
  关孝和（日本），17 世纪末

- 行列式概念完整阐述：克莱姆（瑞士），1750
- 矩阵概念：詹姆士西尔维斯特（美国），1850
- 矩阵理论：凯莱（英国），1858
- 线性方程组：东汉前期《九章算术·方程》；莱布尼茨（17世纪）；麦克劳林、克莱姆、贝祖（18世纪）；史密斯、道吉森（19世纪）

4

发展历程

- 二次型：柯西、西尔维斯特、雅可比、高斯（18世纪－19世纪）

- 线性代数的扩展 → 群论：拉格朗日、阿贝尔、伽罗瓦、李、迪克（19世纪）
- 20世纪下半叶开始，计算机技术的快速发展和普及 → 数值线性代数、大规模工程计算

5

(初等代数)
线性方程组回顾 …

6

大学以前 ...

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

系数　未知数

行列式为零？

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

满"秩"？

7

这一学期后 ...

设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

矩阵　向量

Ax = b

研究线性系统的普遍性质和求解方案

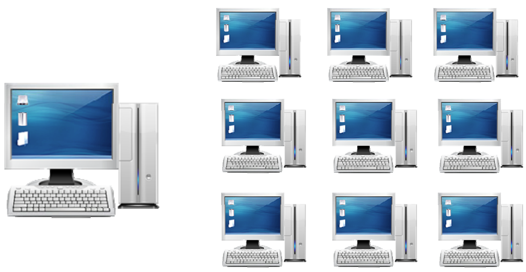
8

进阶 …

亿阶	超大
…	
百万阶	大
万阶	较大
百阶	不大
十阶以下	小

人力无法计算

借助高性能计算求解



9

思维方式

10

学习线性代数的意义

思维方式

科学计算

线性代数

数学优化

计算机视觉

计算机图形学

控制论

微分方程求解

…

电路分析

运筹学

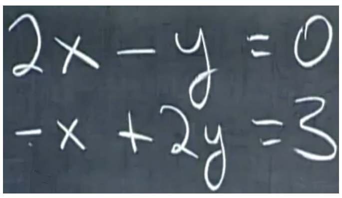
机器学习

统计学

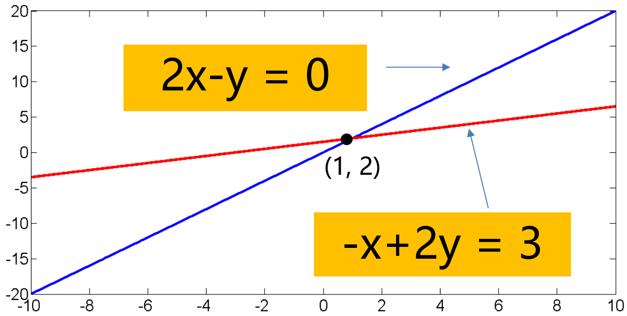
…

11

矩阵（向量）思维方式



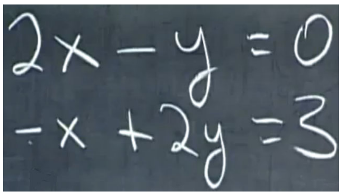
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$



“行” 视角

12

矩阵（向量）思维方式



$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

“列”视角

以 x, y 为权重的两个向量的线性组合 → $(0, 3)^T$

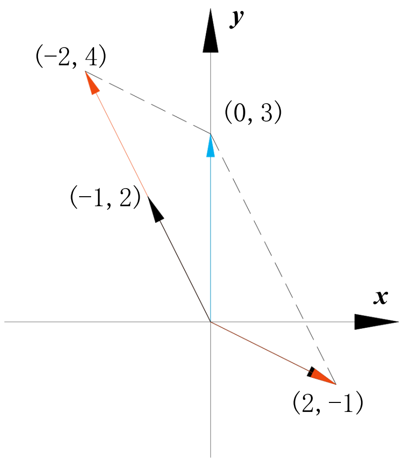
13

矩阵（向量）思维方式

平行四边形法则

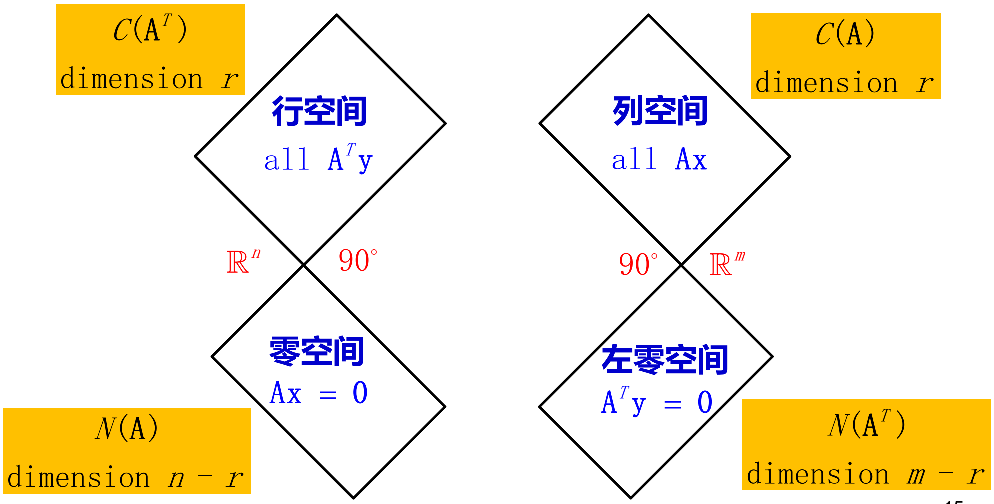
$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x=1$, $y=2$



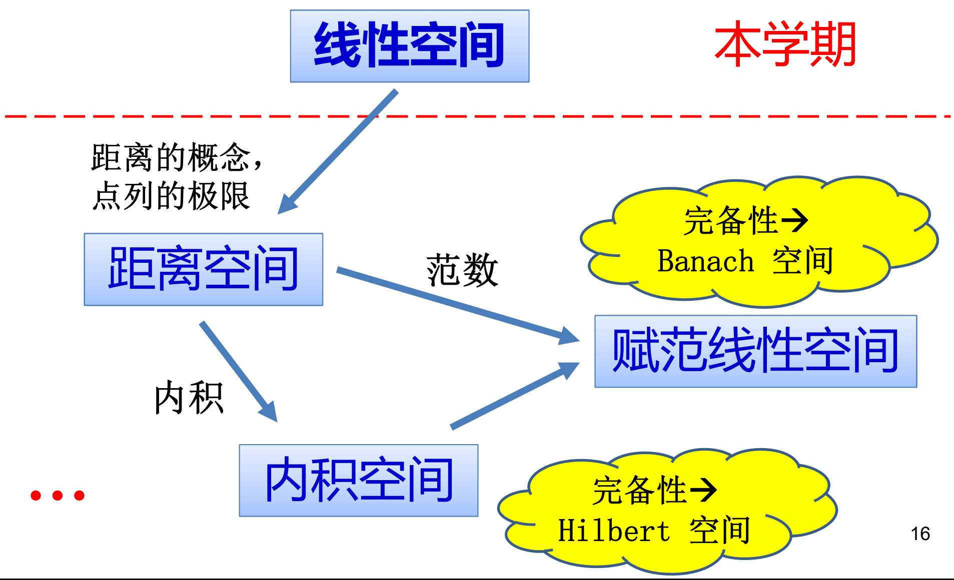
14

空间思维方式



15

函数空间思维



16

高性能科学计算

数学库测试程序　　**LINPACK** → LAPACK → ScaLAPACK

- 线性系统软件包(**Lin**ear system **pack**age)
- 美国 Argonne 国家实验室应用数学所主任 Jim Pool 提出建议建立一套专门解线性系统问题之数学软件
- 国家科学基金会 (National Science Foundation) → LINPACK 计划
- 1979年正式发布了LINPACK包

17

高性能科学计算

LINPACK基准测试
持续性能 9.30 亿亿次/秒

NO. 4

LINPACK基准测试
持续性能 6.14 亿亿次/秒

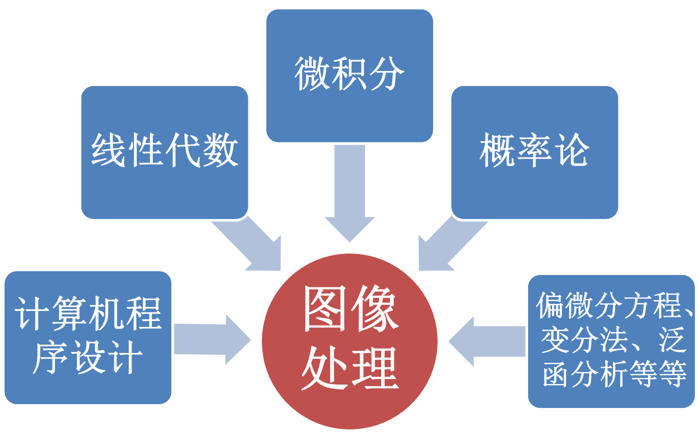
NO. 7

18

若干应用举例

19

1. 图像处理

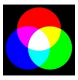


20

1. 图像处理

MATLAB
读入图片

$A \in \mathbb{R}^{600\times900\times3}$



RGB
调色板

通过
MATLAB
矩阵转换

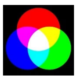
$B \in \mathbb{R}^{600\times900\times3}$

MATLAB
矩阵可视化

1. 图像处理

MATLAB
读入图片

$A \in \mathbb{R}^{600\times900\times3}$



RGB
调色板

MATLAB
灰度处理

$B \in \mathbb{R}^{600\times900}$

MATLAB
矩阵可视化

1. 图像处理

MATLAB
灰度图二值化

可视化

$B \in \mathbb{R}^{600\times 900}$ $B \in \{0, 1\}^{600\times 900}$

23

2. 人脸识别

“平均脸”

图片来源：bbs.duowan.com 图片来源：blog.163.com

24

2. 人脸识别

特征脸算法（Eingenface)

- 采集人脸样本
- 寻找“平均脸”
- 寻找新样本脸与“平均脸”的差异
- 识别人脸

25

2. 人脸识别

- 采集人脸样本 **样本集** $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$
- “平均脸” **平均向量** $\bar{s} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} s_i$
- 样本集的“扰动” $C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(s_i - \bar{s}\right)\left(s_i - \bar{s}\right)^T$ **协方差矩阵**

构造“特征脸空间”
求C的特征向量

识别脸
“脸”到这个子空间的“距离”

26

3. 模型参数估计

Ballistic trajectory (弹道计算)

$$y(t) = m_1 + m_2 t - \frac{1}{2} m_3 t^2$$

m_1 initial altitude

m_2 initial vertical velocity

m_3 gravitational acceleration

数据 → 参数

线性回归问题 (Linear regression)

3. 模型参数估计

数学模型 $y(t) = m_1 + m_2 t - \frac{1}{2} m_3 t^2$

无噪音数据

$t = 1, \quad y = 105.1$

$t = 2, \quad y = 190.4$

$t = 3, \quad y = 265.9$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 2 & -2.0 \\ 1 & 3 & -4.5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 105.1 \\ 190.4 \\ 265.9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

逆矩阵求解

$\mathrm{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{b}$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 9.8 \end{pmatrix}$$

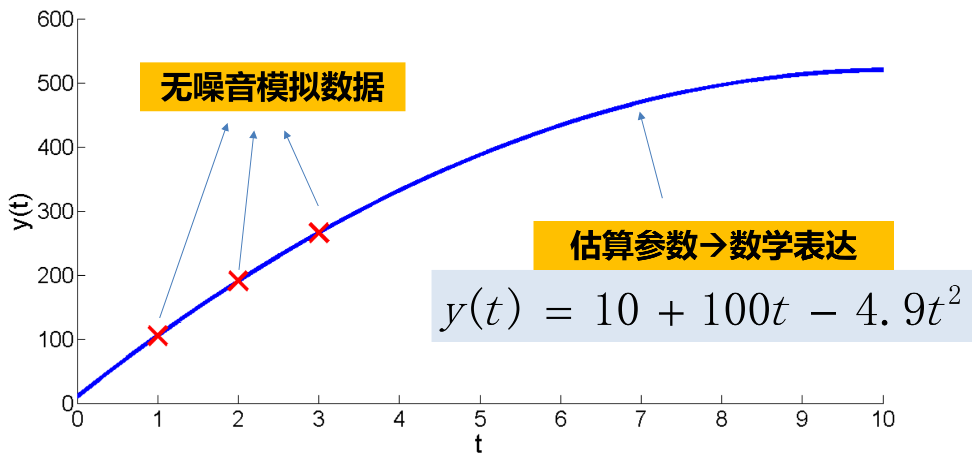
$m_1 = 10$

$m_2 = 100$

$m_3 = 9.8$

测试参数!

3. 模型参数估计



29

3. 模型参数估计

数学模型 $y(t) = m_1 + m_2 t - \frac{1}{2} m_3 t^2$

含噪数据

$t = 1,\ y = 106.1$ (105.1)

$t = 2,\ y = 189.4$ (190.4)

$t = 3,\ y = 266.9$ (265.9)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 2 & -2.0 \\ 1 & 3 & -4.5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 106.1 \\ 189.4 \\ 266.9 \end{pmatrix}}_{b}$$

逆矩阵求解 $x = A^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 92 \\ 5.8 \end{pmatrix}$$

$m_1 = 10$

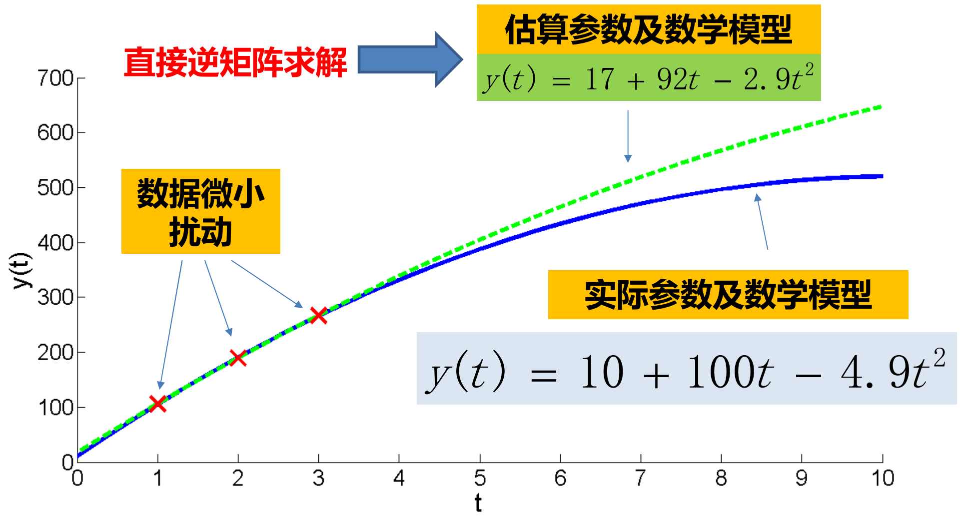
$m_2 = 100$

$m_3 = 9.8$

测试参数!

30

3. 模型参数估计



31

3. 模型参数估计

含噪数据

$t = 1,\ y = 106.1;\quad t = 4,\ y = 332.6;$

$t = 2,\ y = 189.4;\quad t = 5,\ y = 387.7;$

$t = 3,\ y = 266.9;\quad t = 6,\ y = 432.6;$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 2 & -2.0 \\ 1 & 3 & -4.5 \\ 1 & 4 & -8.0 \\ 1 & 5 & -12.5 \\ 1 & 6 & -18.0 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 106.1 \\ 189.4 \\ 266.9 \\ 332.6 \\ 387.7 \\ 432.6 \end{pmatrix}$$

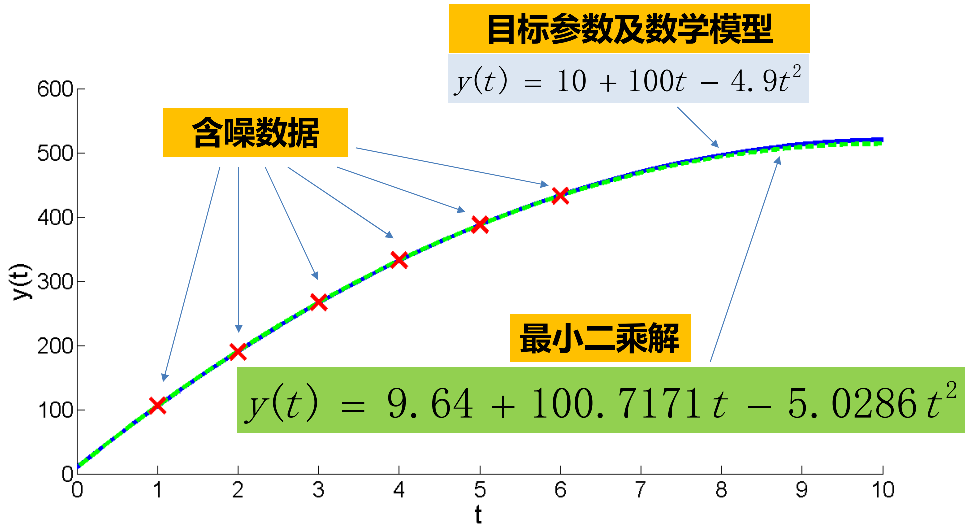
最小二乘解 (Least Square)

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

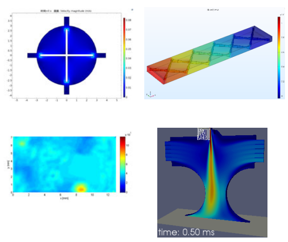
$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.64 \\ 100.7171 \\ 10.0571 \end{pmatrix}$$

32

3. 模型参数估计



4. 偏微分方程数值求解



…

数学建模 — 详细或简化

⇩

偏微分方程 — 瞬态、三维，非线性、…

⬇

有限差分法 (FDM)　**有限元法 (FEM)**　**有限体积法(FVM)**

⬇

求解大规模线性方程组 …

4. 偏微分方程数值求解

数学模型

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1 \text{ with } u(0) = u(1) = 0$$

dirichlet 边界条件

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1 \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + Cx + D$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

两个边界条件确定两个未知常量

$$u(x) = \frac{1}{2}(x - x^2)$$

注：大多数情况，含有复杂计算域和初始边界条件的多维瞬态偏微分方程无法解析求解！！！

4. 偏微分方程数值求解

有限差分法 (Finite Differences)

区间 [0, 1] 分为 $n+1$ 段， 即 $\Delta x = \frac{1}{n+1}$

u 在节点 Δx, $2\Delta x$, $\cdots$, $n\Delta x$ 的值为未知量

计算 $\mathrm{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \approx (u(\Delta x), u(2\Delta x), \ldots, u(n\Delta x))^T$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{u(x+\Delta x) - 2u(x) + (x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}}$$

一次向前一次向后差分

4. 偏微分方程数值求解

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=1 \Rightarrow -\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(u(x+\Delta x)-2u(x)+u(x-\Delta x)\right)=1$$

用矩阵形式表示

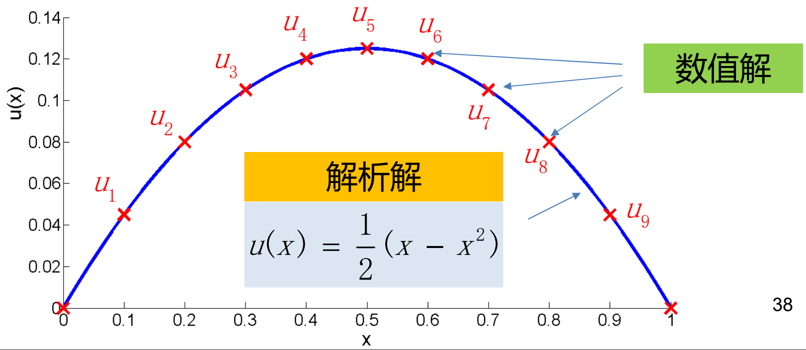
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\Delta x)^2 \\ (\Delta x)^2 \\ \vdots \\ (\Delta x)^2 \end{pmatrix}$$

37

4. 偏微分方程数值求解

$$n=9 \Rightarrow \Delta x=\frac{1}{10}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \end{pmatrix}^T$$
$$=\begin{pmatrix} 0.045 & 0.08 & 0.105 & 0.120 & 0.125 & 0.120 & 0.105 & 0.080 & 0.045 \end{pmatrix}^T$$



38

5. 化学反应工程

多重化学反应中确定关键组分和关键反应的应用举例

问题描述

在封闭系统中，反应物系中包含反应组分：CH_4, H_2O, CO, CO_2, H_2，确定关键组分和关键反应方程式。

$$\beta=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} CO_2 & H_2O & H_2 & CH_4 & CO \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} H \\ C \\ O \end{array} \xrightarrow{\text{矩阵初等变换}} \begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} H_2 & CO_2 & H_2O & CH_4 & CO \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} H \\ C \\ O \end{array}$$

39

5. 化学反应工程

矩阵秩$R(\beta)$=3，反应组分数为 5；

关键组分则为 CH_4, CO，关键反应个数为 2

$$4H_2+CO-2H_2O \rightleftharpoons CH_4$$
$$H_2+CO_2-H_2O \rightleftharpoons CO$$

$$CH_4+2H_2O \rightleftharpoons 4H_2+CO_2$$
$$CO+H_2O \rightleftharpoons H_2+CO_2$$

关键反应

40

5. 化学反应工程

所需知识点

- 推导系数矩阵/原子矩阵形式
- 齐次线性方程组求解
- 利用矩阵的秩确定关键组分和关键反应
- 计算优势：当反应组分数量巨大

41

Q & A

42

线性代数 (Linear Algebra)

第一章 Linear Equations in Linear Algebra

§1.1 Systems of Linear Equations 线性方程组

衡益

2020 年 9 月 28 日，中山大学南校区

线性方程组

线性方程组

线性方程

✓ 包含未知数$x_1, x_2, \cdots, x_n$的一个线性方程是形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

其中b 与系数$a_1, a_2, \cdots, a_n$是实数或复数，n是任意正整数。

非线性

$4x_1 - 6x_2 = x_1x_2$

或

$x_2 = 2\sqrt{x_1} - 7$

线性方程组 （由一个或几个包含相同变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的线性方程）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性方程组的解

- 线性方程组的解 **(Solution)**
  - 所有可能解的集合称为解集**(Solution Set)**
  - 如果两个线性系统具有相同的解集，则它们等价 **(Equivalent)**

线性方程组的解

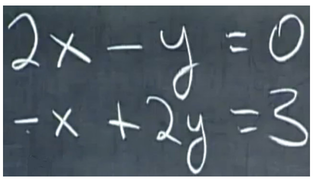
- ✓ 无解 → 不相容（Inconsistent）
- ✓ 有唯一解
- ✓ 有无穷多解

} 相容（consistent）

若一个线性方程组有唯一解或者无穷多解，我们称该线性方程组是相容的；若它无解，则称为不相容。

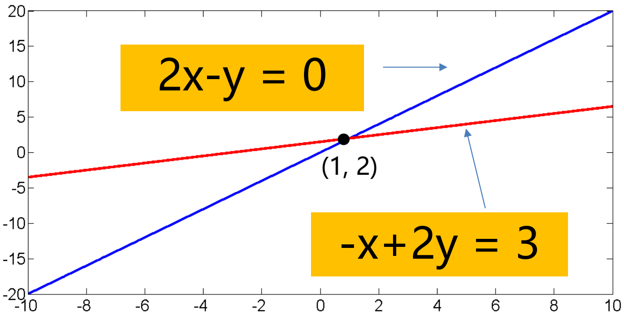
线性方程组的解

1



$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & \mathbf{b} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



唯一解

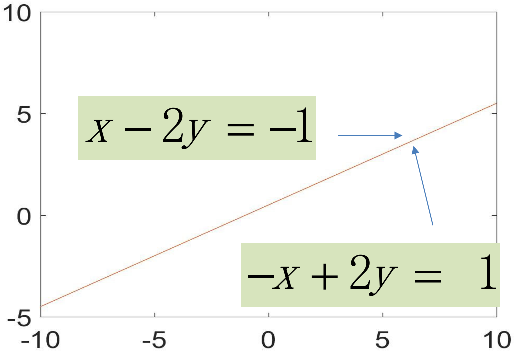
相容

线性方程组的解

2

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



无穷多解

相容

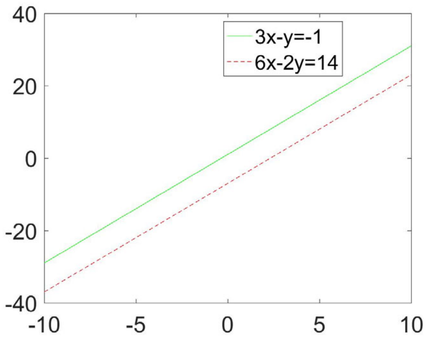
49

线性方程组的解

3

$$\begin{cases} 3x-y=-1 \\ 6x-2y=14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \end{pmatrix} \end{array}$$



无解

不相容

50

矩阵符号

矩阵的数学定义

定义 **由 *m x n* 个数 a_{ij} 排成的*m* 行和*n* 列的数表**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

a_{ij}, 矩阵 A 的 (i, j) 元

矩阵简记作 $(a_{ij}), (a_{ij})_{m\times n}, A_{m\times n}$

行向量 (Row Vector) $\mathrm{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$

列向量 (Column Vector) $\mathrm{w} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

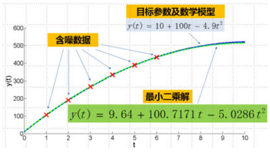
引入矩阵的概念

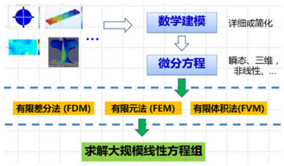
回顾第一讲 …

图片来源：bbs.duowan.com

- 图像处理，人脸识别
- 模型参数估计
- 微分方程数值求解
- 化学反应工程

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} H_2 & CO_2 & H_2O & CH_4 & CO \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ C \\ O \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$





53

引入矩阵的概念

案例1： 物流 …

$$A = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \end{array}$$

1, 2, 3是商店; I II III IV 是产品

A 矩阵中元素是发送产品的数量; B 矩阵中的两列是单价和单件质量

54

引入矩阵的概念

Further reading

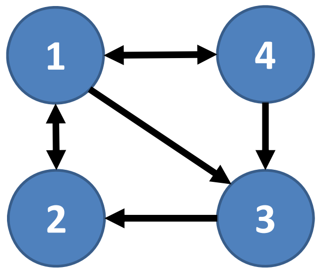
图论

Graph Theory

案例2：

➢ 交通航线

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



引入矩阵的概念

Further reading

线性变换

Linear transformation

案例3：

➢ 向量的几何意义

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

投影到 **x** 轴上

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

把向量依逆时针方向旋转一个角度

线性方程组→矩阵

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

n 个未知数 n 个方程的线性方程组

矩阵 向量

Ax = b

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A **x** **b**

系数矩阵与增广矩阵

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 + \boxed{a_{13}}x_3 + \cdots \boxed{a_{1n}}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

增广矩阵