第八章 The Geometry of Vector Space

§ 8.1 Affine Combinations

仿射组合

衡 益

2020 年 12 月 1 日，中山大学东校区

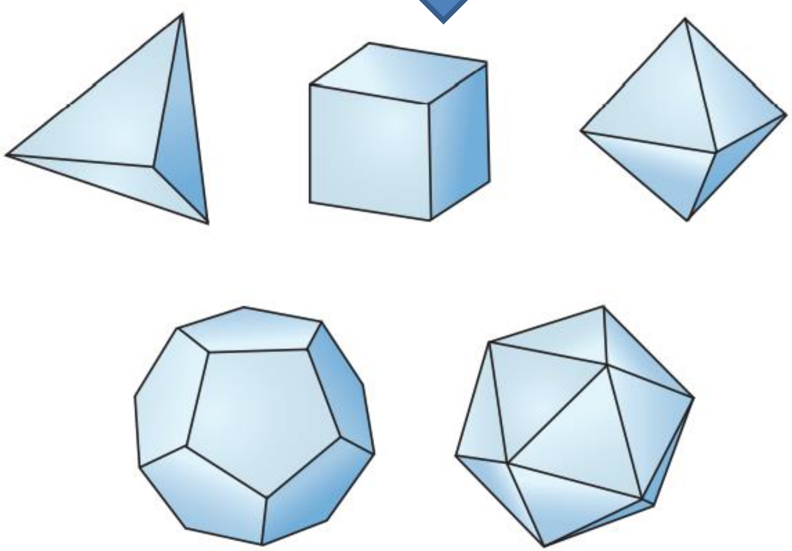
引　言

引 言

公元前387年，希腊哲学家柏拉图在雅典建立了一所学院，也被称为世界上第一所大学。虽然课程包括天文学、生物学、政治理论和哲学，但他最感兴趣的科目是几何。他学院的门上刻着这样的字：**“没有几何学知识的人不得进入我的门。”**希腊人对诸如正立体这样的几何图案印象深刻。如果多面体的面是全等的正多边形，并且顶点上的所有角都相等，则多面体称为正多面体。

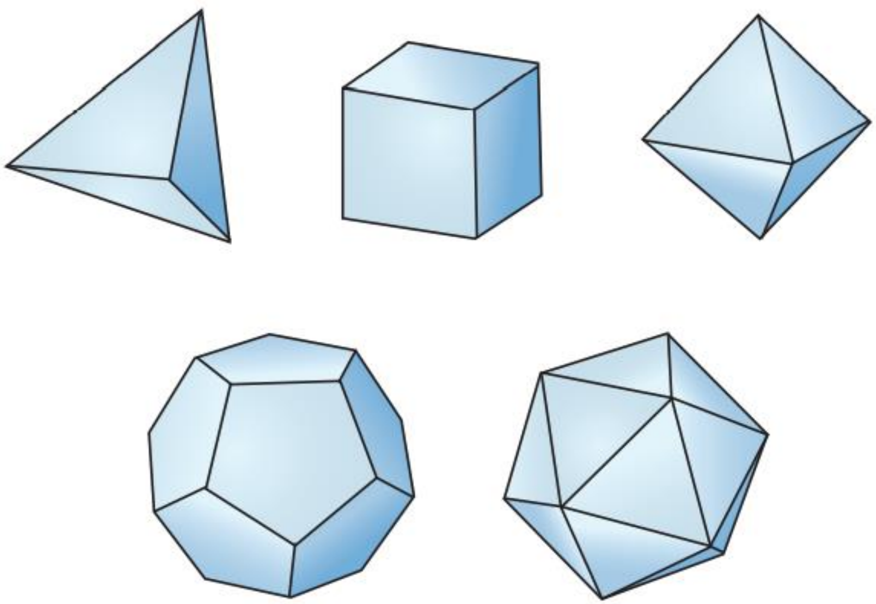
早在柏拉图之前100年，毕达哥拉斯就知道至少三种正多面体：四面体 (4个三角形面)、正方体 (6个正方形面)和八面体 (8个三角形面)。这些形状作为普通矿物的晶体自然出现。**只有五个**这样的正多面体，剩下的两个是十二面体 (12个五边形面)和二十面体 (20个三角形面)。几个世纪以来，很难想象三维以上的几何物体是什么样的，但是现在数学家们经常在有四维、五维甚至上百维的矢量空间中研究物体。在更高的维度中，我们不一定清楚这些物体的几何特性。

“柏拉图固体”Platonic solids



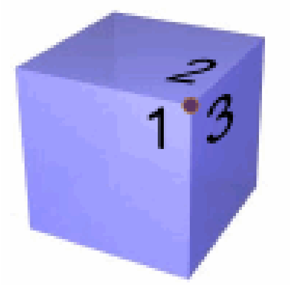
引 言

柏拉图固体——为什么只有五个?

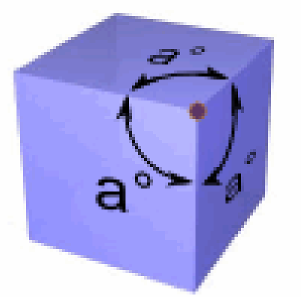


引 言

最简单的原因：顶点的角



在一个多面体里：至少有3个面（或更多面）在每个顶点连接

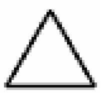


在顶点的内角的和一定是小于 360度（如果等于 360°，顶点就变成平面了）。

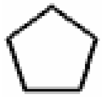
引 言

最简单的原因：顶点的角

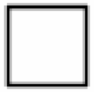
我们也知道柏拉图固体所有的的面是相同的正多边形：


正三角形的内角是 60°，所以顶点可以有：

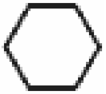
- 3个三角形（3×60°=180°）
- 4个三角形（4×60°=240°）
- 或 5个三角形（5×60°=300°）


正五边形的内角是 108°，所以只有：

- 3个五角形（3×108°=324°）


正方形的内角是 90°，所以只可以有：

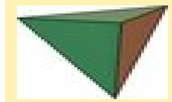
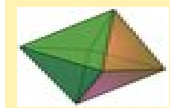
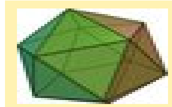
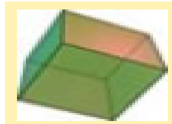
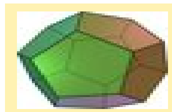
- 3个正方形（3×90°=270°）


正六边形的内角是 120°，而 3×120°=360°。 这个**不行**，因为如果顶点上的角加起来是 360°，就会形成一个平面，不再是顶点了。

所以不能继续下去了。

引 言

最简单的原因：顶点的角

在每个顶点有：	在顶点的角（小于 360°）	固体	
3个三角形	180°	四面体	
4个三角形	240°	八面体	
5个三角形	300°	二十面体	
3个正方形	270°	立方体	
3个五边形	324°	十二面体	

任何其他的组合在顶点都会有等于或大于 360°的角，这是不可能的!

例子：4个正五边形（4×108° = 432°）、3个正六边形（3×120° = 360°）等都不可能

引 言

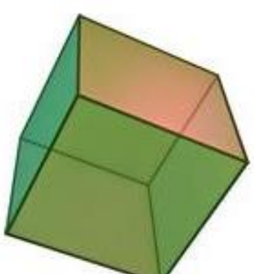
另一个理由：拓扑学

简而言之：不可能有多于 5个柏拉图固体，因为任何其他组合都违背关于顶点与面的**几何定理**。

欧拉定理

在任何凸多面体（包括柏拉图固体在内）中，面个数加顶点个数（角）减棱个数永远等于 2，这可以写成方程：

$$F + V - E = 2$$



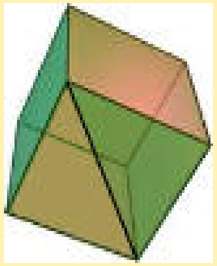
立方体有 6个面、8个顶点、12条棱，所以：

$$6 + 8 - 12 = 2$$

引 言

另一个理由：拓扑学

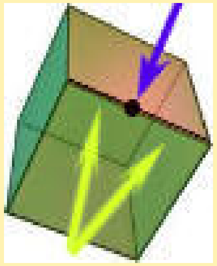
要深入了解欧拉公式，想象在立方体上加一条棱（例如在一个面上的对角线）。



多了一条棱和一个面：

7 + 8 - **13** = 2

同样，如果加一个顶点（例如在一条棱的中点），便会多了一条棱。



6 + **9** - **13** = 2。

"无论如何，答案还是 2"

引　言

将多面体展开

想象一个柏拉图固体：它的面是什么形状？在每个顶点有几个面相接在一起?

面可以是三角形（三条边）、正方形（四条边）等等。

以 "**s**" 为每个面的边的个数。

在每个顶点有几个面？在立方体上，有 3个面在每个顶点相接。在八面体上，每个顶点有 4个。

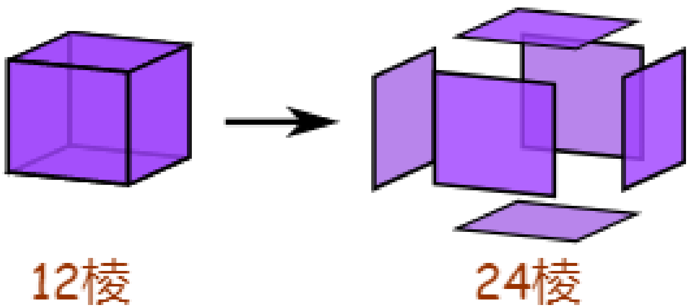
以 "**m**" 为在每个顶点相接的面的个数。

s和m决定了多面体是什么图形

引 言

将多面体展开

现在我们把多面体的每一面剪出来。每个面是一个平面图形，边的个数是棱的双倍（因为我们把多面体的每条边一分为二）



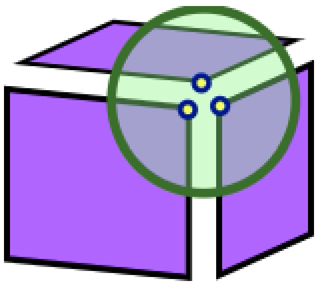
例子：立方体剪开后是六个正方形
每个正方形有 4条边，总共有 24条边（立方体有 12条棱）

所以展开后边个数是立方体的棱个数 “E”的2倍， 但这也是所有剪出来的图形的边的的总数，就是 s（每面的边个数） 乘以 F（面个数）
这可以写成方程：

$$\boxed{sF = 2E}$$

引 言

将多面体展开



同样，把多面体展开时，一个顶点被剪开成**几个平面的角。**
以立方体为例，一个顶点被剪开成三个角，所以展开后角的个数是立方体顶点个数的三倍。

- **展开后，剪出来的平面的角的总数是：在原来的多面体上每一个顶点相接的面的个数m乘以多面体的顶点个数V**
- **展开后平面的边的总数是：原来的多面体的棱个数的两倍 = 2E**

展开后的平面图形是相同的多边形，而多边形的角个数和边个数是相等的（正方形有 4个角和 4条边、五边形有 5个角和 5条边等等）
这可以写成方程：

$$\boxed{mV = 2E}$$

引 言

我们有所有需要的方程了，把它们写在一起，并重排：

sF = 2E，所以 F = 2E/s

mV = 2E，所以 V = 2E/m

代入 "F+V-E=2"：

$$F + V - E = 2$$

$$\mathbf{2E/s} + \mathbf{2E/m} - E = 2$$

再做一些重排......全部除以 "2E"：

$$1/s + 1/m - 1/2 = 1/E$$

"E" 是棱的个数，不能小于零，所以 "1/E" 也不能小于零：

$$1/s + 1/m - 1/2 > \mathbf{0}$$

引 言

就是说：

- $1/s + 1/m > 1/2$

我们现在只需要用不同的:

- **"s"** （每面的边个数，不能小于3），
- **"m"** （在每个顶点相接的面的个数，不能小于 3）

来试试！

s	m	1/s+1/m	> 0.5?
3	3	0.666......	✓
3	4	0.583......	✓
4	3	0.583......	✓
4	4	0.5	✘
5	3	0.533......	✓
3	5	0.533......	✓

s	m	1/s+1/m	> 0.5?
5	4	0.45	✘
4	5	0.45	✘
5	5	0.4	✘
等等......	......	......	✘

引 言

例子：**s=5，m=5**

1/s + 1/m - 1/2 = 1/E 就是

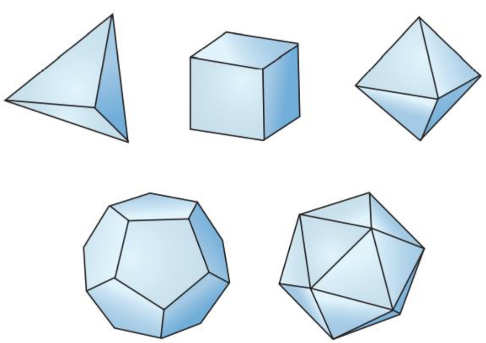
$1/5 + 1/5 - 1/2 = 1/E$

$-0.1 = 1/E$

E（棱的个数） = -10，不可能！

结果：只有 5答案个符合上面的不等式！其他全是不可能的。

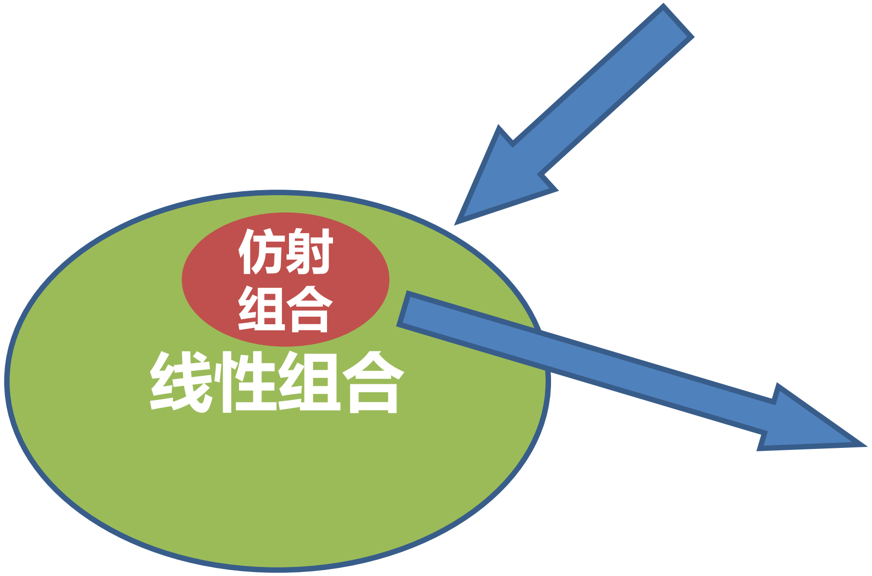
柏拉图固体只有5个！



仿射组合

8.1 仿射组合

什么是“仿射组合”？



给定$\mathbb{R}^n$中的向量$\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_p$和标量$c_1 \cdots c_p$

$\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_p$ 的一个**仿射组合**是：

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

满足$c_1 + \cdots + c_p = 1$

定义 集合S中点的所有仿射组合的集合称为S的**仿射包**（或**仿射生成集**），记为 aff S.

8.1 仿射组合

一个点的仿射包

$\{c_1\mathbf{v}_1\}$, $c_1 = 1$

两个不同点的仿射包

$\{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2\}$, $c_1 + c_2 = 1$

$\Downarrow$ $c_2 = t, c_1 = (1-t)$

$(1-t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2, t \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}, (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{u}$

$$\mathbf{y} = \boxed{\mathbf{v}_1 + t\left(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\right)} = \boxed{\mathbf{p} + t\,\mathbf{u},}\ t \in \mathbb{R}$$

仿射组合的集合意义

注： Figure2 中点$\mathbf{y}$是$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_1$ 的一个仿射组合，而点 $\mathbf{y}-\mathbf{v}_1$ 等于 $t(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)$是 $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$ 的一个线性组合（倍乘），$\mathbf{y}$和$\mathbf{y}-\mathbf{v}_1$ 的这种关系对点的任何仿射组合均成立。

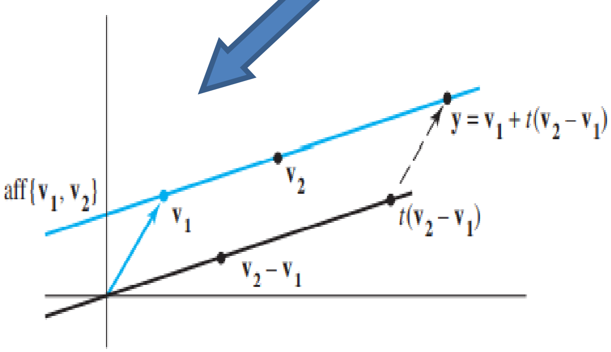


FIGURE 2

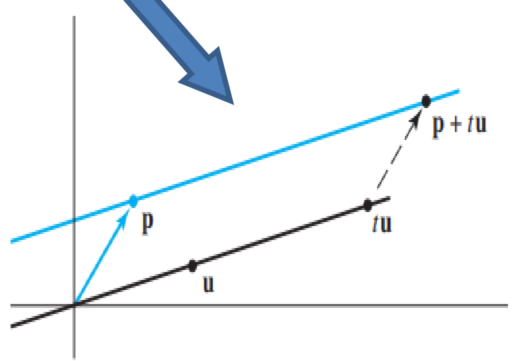


FIGURE 1

8.1 仿射组合

定理1 $\mathbb{R}^n$中的一个点y是$\mathbb{R}^n$ 中$v_1 \cdots v_p$ 的一个仿射组合，当且仅当$y - v_1$是平移点$v_2 - v_1, \cdots, v_p - v_1$ 的线性组合。

证 如果 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_1$ 是 $\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p-\boldsymbol{v}_1$ 的一个线性组合，存在权值 $c_2,\cdots,c_p$ 使得

$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_1=c_2(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)+\cdots+c_p(\boldsymbol{v}_p-\boldsymbol{v}_1) \tag{2}$$

那么

$$\boldsymbol{y}=(1-c_2-\cdots-c_p)\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_p\boldsymbol{v}_p \tag{3}$$

并且这个线性组合中的权值之和是 1. 因此，$\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p$ 的一个仿射组合. 相反，假定

$$\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_p\boldsymbol{v}_p \tag{4}$$

其中 $c_1+\cdots+c_p=1$. 由于 $c_1=1-c_2-\cdots-c_p$，因此方程（4）可写成（3）的形式，并可导出（2），这就证明了 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_1$ 是 $\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p-\boldsymbol{v}_1$ 的一个线性组合. ■

8.1 仿射组合

例1 令$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$，$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$

如果可能，把y写成$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 的仿射组合。

解 计算平移点

$$\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4-\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

为求出标量c_2,c_3,c_4，使得

$$c_2(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)+c_3(\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1)+c_4(\boldsymbol{v}_4-\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_1 \tag{5}$$

行化简增广矩阵得

$$\begin{bmatrix}1&0&-3&3\\3&1&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-3&3\\0&1&9&-10\end{bmatrix}$$

这表明（5）是相容的，并且通解是$c_2=3c_4+3, c_3=-9c_4-10$，c_4是自由变量．当$c_4=0$时，

$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_1=3(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)-10(\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1)+0(\boldsymbol{v}_4-\boldsymbol{v}_1)$$

即

$$\boldsymbol{y}=8\boldsymbol{v}_1+3\boldsymbol{v}_2-10\boldsymbol{v}_3$$

如另选$c_4=1$，则$c_2=6$和$c_3=-19$，因此，

8.1 仿射组合

例1 令$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$，$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$

如果可能，把$\mathbf{y}$写成$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 的仿射组合。

解

$$y-v_1=6(v_2-v_1)-19(v_3-v_1)+1(v_4-v_1)$$

即

$$y=13v_1+6v_2-19v_3+v_4$$ ■

注:

虽然例1中的步骤对$\mathbb{R}^n$中任意点$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p$都适用，但如果选择的点$\mathbf{v}_i$是$\mathbb{R}^n$中的一个基就更容易一些了。例如：$B=\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$是一个基，则$\mathbb{R}^n$中任意$\mathbf{y}$是$\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n$的线性组合，当且仅当权值之和为1时，是$\mathbf{b}_i$的仿射组合。

8.1 仿射组合

例2

令$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}5\\2\\4\end{bmatrix}$，$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$，$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$

集合$B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一个基。判断点$\mathbf{p}_1$和$\mathbf{p}_2$是否是B中的仿射组合。

解

求 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 的 $\mathcal{B}$ 坐标. 这两个计算可以通过对矩阵$[\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \boldsymbol{b}_3 \ \ \boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2]$进行行化简实现，带有两个增广列：

$$\begin{bmatrix}4&0&5&2&1\\0&4&2&0&2\\3&2&4&0&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&-2&\frac{2}{3}\\0&1&0&-1&\frac{2}{3}\\0&0&1&2&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

取第 4 列得到 $\boldsymbol{p}_1$，取第 5 列得到 $\boldsymbol{p}_2$：

$$\boldsymbol{p}_1 = -2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{2}{3}\boldsymbol{b}_1 + \frac{2}{3}\boldsymbol{b}_2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_3$$

$\boldsymbol{p}_1$ 中线性组合的权值之和是-1，不是 1. 因此，$\boldsymbol{p}_1$ 不是各 $\boldsymbol{b}_i$ 的一个仿射组合. 然而，由于 $\boldsymbol{p}_2$ 中权值之和是 1，所以 $\boldsymbol{p}_2$ 是各 $\boldsymbol{b}_i$ 的一个仿射组合. ■

8.1 仿射组合

定义 如果对任意实数t，由$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$得出$(1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \in S$，则集合S是**仿射**的。

几何学上 如果两个点在集合中，则过这些点的直线在集合中 $\Rightarrow$ 集合是仿射的

代数学上 若一个集合是仿射的，则需要S中两点的每个仿射组合都属于S.

8.1 仿射组合

定理2 当且仅当S中点的每一个仿射组合都属于S，集合S是仿射的，即当且仅当S = affS，S是仿射的。

证 假定 S 是仿射的，并对仿射组合中 S 的点的数目 m 使用归纳法. 当 m 是 1 或 2 时，由仿射集合的定义，S 中 m 个点的仿射组合属于 S. 现在，假设 S 中 k 个点或少于 k 个点的每一个仿射组合属于 S，考虑 $k+1$ 个点的组合. 对 $i=1,\cdots,k+1$，取 S 中 $\boldsymbol{v}_i$，并令 $\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k+c_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1}$，其中 $c_1+\cdots+c_{k+1}=1$. 由于所有 c_i 的和是 1，因此它们中至少有一个不等于 1. 如果需要，对 $\boldsymbol{v}_i$ 和 c_i 重新标记，我们可以假定 $c_{k+1}\neq 1$. 令 $t=c_1+\cdots+c_k$，则 $t=1-c_{k+1}\neq 0$，并且

$$\boldsymbol{y}=(1-c_{k+1})\left(\frac{c_1}{t}\boldsymbol{v}_1+\cdots+\frac{c_k}{t}\boldsymbol{v}_k\right)+c_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} \tag{6}$$

由归纳假设，由于系数和是 1，故点 $\boldsymbol{z}=(c_1/t)\boldsymbol{v}_1+\cdots+(c_k/t)\boldsymbol{v}_k$ 属于 S. 从而（6）显示了 $\boldsymbol{y}$ 作为 S 中两点的一个仿射组合是属于 S 的. 由数学归纳法，这些点的每一个仿射组合属于 S，即 $\text{aff}\,S\subset S$. 但反过来，$S\subset\text{aff}\,S$ 总是成立的. 因此，当 S 为仿射时，$S=\text{aff}\,S$. 相反，如果 $S=\text{aff}\,S$，则 S 中两点（或更多点）的仿射组合属于 S，从而 S 是仿射的. ■

8.1 仿射组合

定义 $\mathbb{R}^n$中一个集合S被向量p平移后得到集合$S + \mathbf{p} = \{\mathbf{s} + \mathbf{p} : \mathbf{s} \in S\}$.
$\mathbb{R}^n$ 中一个**平面**是$\mathbb{R}^n$子空间的一个平移。如果一个平面是另外一个平面的平移，则两个平面是**平行**的，一个**平面的维数**是对应的平行子空间的维数。一个**集合S的维数**记作dimS，是包含S的最小平面的维数。$\mathbb{R}^n$ 中一条**直线**是维数为1的平面，$\mathbb{R}^n$ 中的一个**超平面**是维数为n-1的平面。

强调了仿射集合与$\mathbb{R}^n$子空间的关系

可以穿过原点，也可以不穿过原点

R^3的真子空间		
原点	穿过原点的所有直线集合	穿过原点的所有平面集合
零维	二维	三维

8.1 仿射组合

定理3 当且仅当S是一个平面时，一个非空集合S是仿射的。

证 假定S是仿射的，令$\boldsymbol{p}$是S中任意固定点，$W=S+(-\boldsymbol{p})$，从而$S=W+\boldsymbol{p}$. 为了证明S是一个平面，只需证明W是$\mathbb{R}^n$的一个子空间. 由于$\boldsymbol{p}$在S中，因此零向量在W中. 为了证明W对向量的加法和标量乘法运算封闭，只需证明如果$\boldsymbol{u}_1$和$\boldsymbol{u}_2$是W中的元素，那么对每一个实数t，$\boldsymbol{u}_1+t\boldsymbol{u}_2$属于$W$. 由于$\boldsymbol{u}_1$和$\boldsymbol{u}_2$属于$W$，因此存在$S$中的$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$，使得$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{p}$. 因此，对每一个实数$t$，

$$\boldsymbol{u}_1+t\boldsymbol{u}_2=(\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{p})+t(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{p})=(1-t)\boldsymbol{s}_1+t(\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{p})-\boldsymbol{p}$$

令$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{p}$，则$\boldsymbol{y}$是$S$中点的一个仿射组合. 由于$S$是仿射的，因此$\boldsymbol{y}$在$S$中（由定理2）. 但$(1-t)\boldsymbol{s}_1+t\boldsymbol{y}$也在$S$中，所以$\boldsymbol{u}_1+t\boldsymbol{u}_2$在$-\boldsymbol{p}+S=W$中. 这就表明$W$是$\mathbb{R}^n$的一个子空间. 从而由$S=W+\boldsymbol{p}$，$S$是一个平面.

相反，假定S是一个平面，即对某些$\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n$和子空间$W$，有$S=W+\boldsymbol{p}$. 为了证明$S$是仿射的，只需证明对$S$中每一对$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$，穿过$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$的直线属于$S$. 由$W$的定义，存在$W$中$\boldsymbol{u}_1$和$\boldsymbol{u}_2$使得$\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{p}$. 所以，对每一个实数$t$，

$$(1-t)\boldsymbol{s}_1+t\boldsymbol{s}_2=(1-t)(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{p})+t(\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{p})=(1-t)\boldsymbol{u}_1+t\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{p}$$

由于W是一个子空间，因此$(1-t)\boldsymbol{u}_1+t\boldsymbol{u}_2\in W$，从而$(1-t)\boldsymbol{s}_1+t\boldsymbol{s}_2\in W+\boldsymbol{p}=S$. 因此，$S$是仿射的. ■

8.1 仿射组合

定理3 当且仅当S是一个平面时，一个非空集合S是仿射的。

给出了一个集合的仿射包的几何解释

由一个集合中的点的所有仿射组合构成的点集是平面。比如Figure3显示了例2中研究的点。虽然$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$和$\mathbf{b}_3$的线性组合的集合是$\mathbb{R}^3$，但所有仿射组合的集合只是穿过$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$和$\mathbf{b}_3$的平面。

注: $\mathbf{p}_2$在穿过$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$和$\mathbf{b}_3$的平面中，而$\mathbf{p}_1$不在。

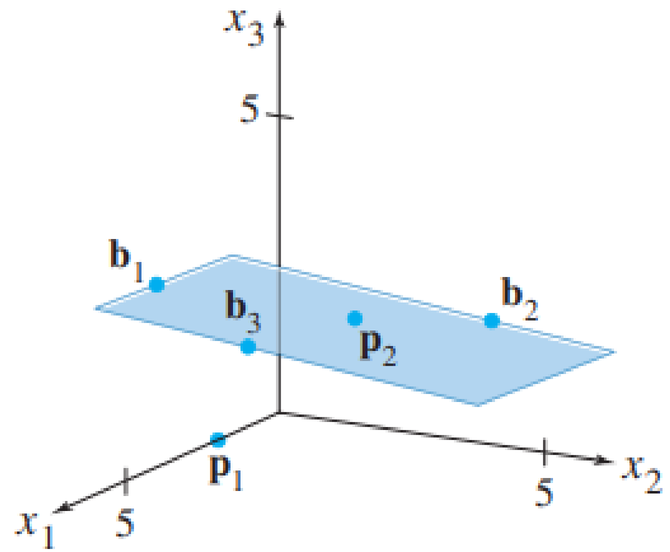


FIGURE 3

8.1 仿射组合

例3 假设一个方程 $Ax = b$ 的解都是 $x = x_3u + p$ 的形式，其中

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad p_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},$$

回忆1.5节，这个集合平行于 $Ax = 0$ 的解集，该解集有形如 x_3u 的点组成。求点 v_1 和 v_2 使得 $Ax = b$ 的解集是 $\text{aff}\{v_1, v_2\}$.

解 解集是沿着 $\boldsymbol{u}$ 的方向穿过 $\boldsymbol{p}$ 的直线，如图 8-2 所示. 由于 $\text{aff}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ 是穿过 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的直线，因此确定直线 $\boldsymbol{x} = x_3\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}$ 上的两个点. 当 $x_3 = 0$ 和 $x_3 = 1$ 时，可得两种简单的情况. 即选择 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}$，从而

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

在这种情况下，解集被描述为所有形如 $\boldsymbol{x} = (1-x_3)\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ 的仿射组合的集合.

8.1 仿射组合

定义

对$\mathbb{R}^n$中的v，v的标准齐次形式是$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的点$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{bmatrix}$.

定理4

$\mathbb{R}^n$中的一个点y是$\mathbb{R}^n$中$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p$的一个仿射组合当且仅当y的齐次形式在$\mathrm{Span}\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \cdots, \tilde{\mathbf{v}}_p\}$中，即$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$且$c_1 + \cdots + c_p = 1$，当且仅当 $\tilde{\mathbf{y}} = c_1\tilde{\mathbf{v}}_1 + \cdots + c_p\tilde{\mathbf{v}}_p$

证 点$\boldsymbol{y}$在$\mathrm{aff}\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p\}$中当且仅当存在权值$c_1,\cdots,c_p$，使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_2 \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + c_p\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

这种情况发生当且仅当$\tilde{\boldsymbol{y}}$在$\mathrm{Span}\{\tilde{\boldsymbol{v}}_1,\tilde{\boldsymbol{v}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{v}}_p\}$中. 定理得到了证明. ■

8.1 仿射组合

例4 令$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\7\\1\end{bmatrix}$，$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}4\\3\\0\end{bmatrix}$，如果可能，用定理4把p写成$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$的仿射组合。

解 对下面方程的增广矩阵进行行化简：

$$x_1\tilde{\boldsymbol{v}}_1+x_2\tilde{\boldsymbol{v}}_2+x_3\tilde{\boldsymbol{v}}_3=\tilde{\boldsymbol{p}}$$

为了简化算法，把由 1 组成的第四行移到第一行（等价于做三个行对换），然后把矩阵化为简化阶梯形：

$$\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{v}}_1 & \tilde{\boldsymbol{v}}_2 & \tilde{\boldsymbol{v}}_3 & \tilde{\boldsymbol{p}}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\3&1&1&4\\1&2&7&3\\1&2&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-2&1\\0&1&6&2\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\sim\cdots\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1.5\\0&1&0&-1\\0&0&1&0.5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

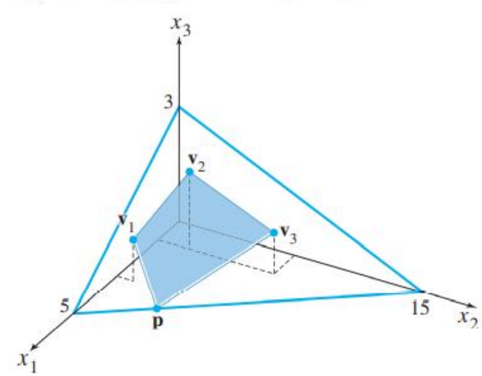


FIGURE 4

由定理 4，$1.5\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+0.5\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{p}$，见 FIGURE 4 图中显示了含有 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 和 $\boldsymbol{p}$（以及坐标轴上的点）的平面.

第八章 The Geometry of Vector Spaces

§ 8.2 Affine independence 仿射无关性

衡益

2022 年 1 月 4 日，中山大学南校区

定义

定义

线性概念和仿射概念之间的关系

$\mathbb{R}^3$中三个向量的集合，$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

若S 线性相关

其中一个向量是其他两个向量的线性组合

当一个向量是其他两个向量的仿射组合时

例：$\mathbf{v}_3 = (1-t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$

$t \in \mathbb{R}$

$(1-t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$

线性相关

权值之和：

$(1-t) + t + (-1) = 0$

仿射相关

定义

仿射无关

定义 设 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$ 是$\mathbb{R}^n$中的一个指标点集(指标点集指的是集合中指标不同的元素可以表示同一点），如果存在不全为零的的实数$c_1, \cdots, c_p$，使得

$$c_1 + \cdots + c_p = 0, \quad c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0 \qquad (1)$$

则称指标点集$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$ 是**仿射相关**的，否则，称该集合是**仿射无关**的。

- 仿射相关是附带有一个限制条件的线性相关 → 每一个仿射相关集都自动是线性相关的；
- 只有一个点(或者是零向量)的集合 $\{\mathbf{v}_1\}$必是仿射无关的。

定理 5

定理5 给定$\mathbb{R}^n$中的一个指标集合$S=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_p\}$，$p\geq 2$，下面的叙述是逻辑等价的，也就是说，它们同真，或者同假.

a. S是仿射相关的.

b. S中有 一个点是S 中其他点的一个仿射组合.

c. $\mathbb{R}^n$中集合$\{\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_p-\mathbf{v}_1\}$是线性相关的.

d. $\mathbb{R}^{n+1}$中集合$\{\tilde{\mathbf{v}}_1,\cdots,\tilde{\mathbf{v}}_p\}$(齐次形式)是线性相关的.

在定理5（c）中，$\mathbf{v}_1$可以$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_p$中任何其他的点所取代

- ✓ 检测一个集合是否是仿射相关的，可以从集合的其他点中减去一个点，并检验转化后的p-1个点的集是否是线性相关的

定理 5

证明

a ⇩ b

- **假设（a）为真** $\rightarrow c_1, \cdots, c_p$满足方程(1)
- (1)中的方程都除以 $c_1 \Rightarrow 1 + c_2/c_1 + \cdots + c_p/c_1 = 0$ 及

$$\mathbf{v}_1 = (-c_2/c_1)\mathbf{v}_2 + \cdots + (-c_p/c_1)\mathbf{v}_p \quad \leftarrow \text{右边系数和为1}$$

定理5（b）为真

b ⇩ c

- **假设（b）为真**
- 可以认为 $\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p \quad (c_2 + \cdots + c_p = 1)$
- $\Rightarrow (c_2 + \cdots + c_p)\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p \quad \Rightarrow c_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \cdots + c_p(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1) = 0$
- 因 $c_2 + \cdots + c_p = 1 \Rightarrow c_2, \cdots, c_p$不全为0

定理5（c）为真

定理 5

证明

c ⇩ a

- 假设（c）为真 $\Rightarrow$ 存在不全为0的权值$c_2, \cdots, c_p$，使 $c_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \cdots + c_p(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1) = 0$
- $\Rightarrow (c_2 + \cdots + c_p)\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$
- 令 $c_1 = -(c_2 + \cdots + c_p) \Rightarrow c_1 + \cdots + c_p = 0$，即定理5（a）为真

（a）$\Leftrightarrow$（b）$\Leftrightarrow$（c）

d ⇕ a

$$c_1 + \cdots + c_p = 0, \quad c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$c_1\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\\1\end{bmatrix} + \cdots + c_p\begin{bmatrix}\mathbf{v}_p\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\0\end{bmatrix}$$

（d）$\Leftrightarrow$（a）

定理 5

例1： 两个不同点p和q的仿射包是一条直线，如果第三个点r在直线上，那么$\{p, q, r\}$是一个仿射相关集，如果一个点s不在穿过p和q的直线上，那么这三点不在同一条直线上，从而$\{p, q, s\}$是仿射无关集，见图1。

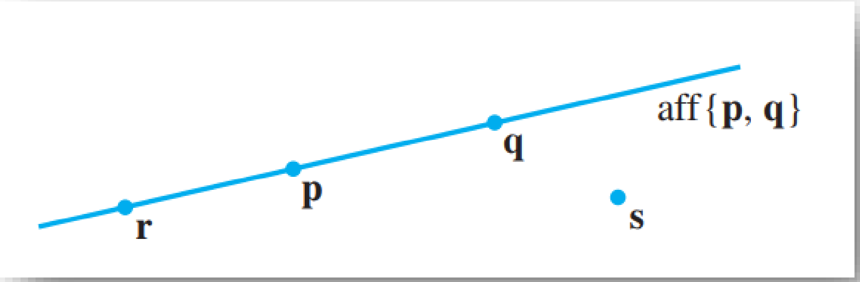


图1 $\{p, q, r\}$是仿射相关的

定理 5

例2： 令$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\6.5\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix}$，$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$，确定$S$ 是否是仿射无关的。

解：

- $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\-0.5\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 不成倍数关系

- $\Rightarrow$ 构成了一个线性无关集 定理5

S是仿射无关的

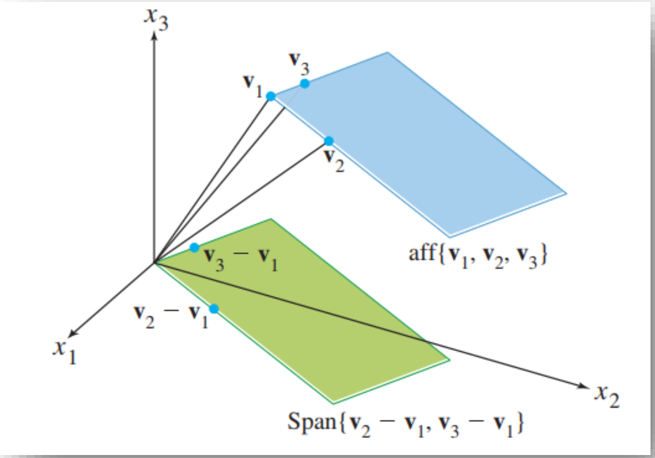


图2 一个仿射无关集 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$

定理 5

例3： 令$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\6.5\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_4=\begin{pmatrix}0\\14\\6\end{pmatrix}$，$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$，

S 是仿射相关的吗？

解：

- $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\-0.5\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_4-\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\11\\-1\end{pmatrix}$，对矩阵进行行化简得

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1\\4&1&11\\-0.5&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&5&15\\0&-0.5&-1.5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&5&15\\0&0&0\end{bmatrix}$$

- 并不是每一列都是一个主元列 $\Rightarrow$ 这些列线性相关
- $\Rightarrow \mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4-\mathbf{v}_1$线性相关 $\xrightarrow{\text{定理5（c）}}$ $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$仿射相关

定理 5

解析

- 例 3 的计算表明v_4-v_1是v_2-v_1和v_3-v_1的线性组合，这说明v_4-v_1在Span{v_2-v_1, v_3-v_1}中
- 由8.1节定理1 ⇒ v_4在aff {v_1, v_2, v_3}中
- 例 3 中矩阵进一步的行化简将表明

$$v_4 - v_1 = 2(v_2 - v_1) + 3(v_3 - v_1)$$

$$v_4 = -4v_1 + 2v_2 + 3v_3$$

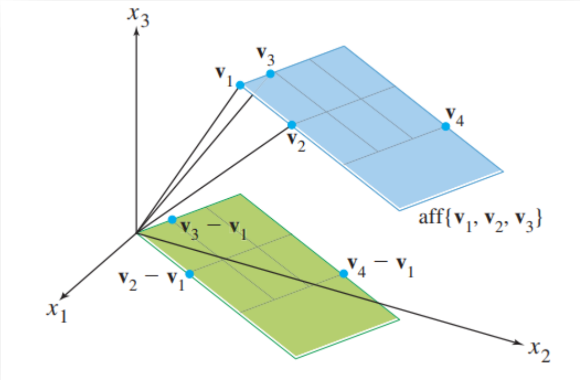


图3 v_4在平面aff {v_1, v_2, v_3}中

系数-4,2和3称为v_4的仿射或**重心坐标**

8. 1节定理1：$\mathbb{R}^n$中的一个点y 是$\mathbb{R}^n$中$v_1 \cdots v_p$的一个仿射组合，当且仅当$y - v_1$是平移点$v_2 - v_1, \cdots, v_p - v_1$ 的线性组合。

重心坐标

重心坐标

定理6

令$S=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ 是$\mathbb{R}^n$中的一个仿射无关集, 则aff$S$中每一个$\mathbf{p}$都有唯一的$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$仿射组合表示，也就是说，对每一个$\mathbf{p}$，存在唯一的标量集$c_1$,⋯ , c_k，使

$$\mathbf{p}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k \text{ 且 } c_1+\cdots+c_k=1 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{p}\\1\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\\1\end{bmatrix}+\cdots+c_k\begin{bmatrix}\mathbf{v}_k\\1\end{bmatrix}$$

对增广矩阵$\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{v}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_k & \tilde{\mathbf{p}}\end{bmatrix}$做行化简可得到$\mathbf{p}$的重心坐标

定义

定义 令$S=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ 是一个仿射无关集, 则对aff$S$中每一个点$\mathbf{p}$, $\mathbf{p}$ 的唯一表达式(2)中的系数$c_1,\cdots,c_p$称为$\mathbf{p}$的**重心坐标**(或者称为**仿射坐标**)。

重心坐标

例4： 令$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$，$\mathbf{c}=\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$，$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$，求由一个仿射无关集$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$确定的$\mathbf{p}$的重心坐标。

解：

- 对点的齐次形式的增广矩阵做行化简运算，把最后一行移到第一行后简化运算

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{a}} & \tilde{\mathbf{b}} & \tilde{\mathbf{c}} & \tilde{\mathbf{p}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&9&5\\7&0&3&3\\1&1&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&3&9&5\\7&0&3&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1/4\\0&1&0&1/3\\0&0&1&5/12\end{bmatrix}$$

- $\Rightarrow \quad \mathbf{p}=1/4\mathbf{a}+1/3\mathbf{b}+5/12\mathbf{c}$

重心坐标

重心坐标

- **物理学**
  - p的重心坐标是三个非负的数m_a, m_b, m_c
  - 使得 p 是由三角形（无质量）和三角形顶点处分别放置质量为m_a, m_b, m_c的质点所构成的质量体系的质心
  - 这些质点的质量可以通过要求它们的和为1来唯一确定
- **几何学**
  - 重心坐标的定义是对三个顶点为a, b, c的三角形中的一个点p而言

最初由A. F. Moebius于1827 年定义

重心坐标

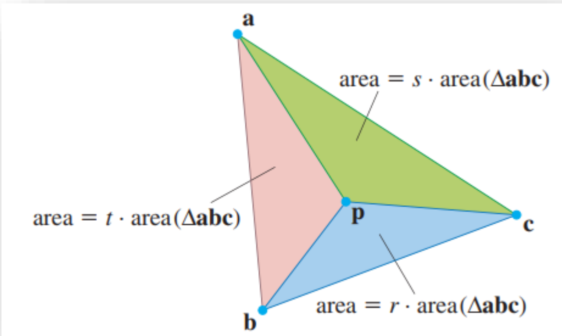


图4 $\mathbf{p} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$，其中$r = \frac{1}{4}, s = \frac{1}{3}, t = \frac{5}{12}$

例4中重心坐标的几何解释：

- 三个小三角形的面积与**p**的重心坐标成正比

$$\text{面积}(\Delta pbc) = \frac{1}{4} \cdot \text{面积}(\Delta abc)$$

$$\text{面积}(\Delta apc) = \frac{1}{3} \cdot \text{面积}(\Delta abc)$$

$$\text{面积}(\Delta abp) = \frac{5}{12} \cdot \text{面积}(\Delta abc)$$

- 当 p是$\mathbb{R}^3$中一个四面体内的一点且对应的顶点是 a, b, c, d时，类似的性质也成立

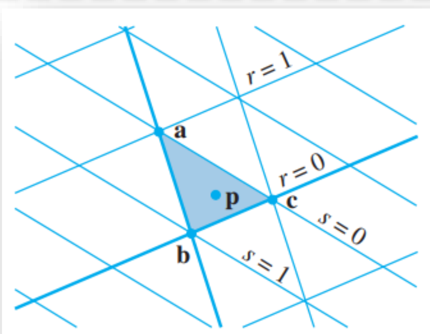


图5 aff{**a**, **b**, **c**}中点的重心坐标

对顶点a, b, c和坐标值r, s, t，图5给出了几何解释：

- 穿过b和c的直线上的点有r=0
- 穿过a且平行于上述直线的直线上的点有r=1

计算机图形学中的重心坐标

计算机图形学中的重心坐标

计算机图形学中的重心坐标

用“线框”逼近对象中的一些关键点来生成和处理对象的图形，例如物体的一部分表面是由一些小三角平面组成的，很容易地对每一个小三角面进行加色、上光及着色

重心坐标提供了一个将顶点信息平滑地插入三角面内部点的工具

内部点的插值是顶点处参数值的一个简单的线性组合，组合的权值为该点的重心坐标

✓ 计算机屏幕上的颜色通常由RGB坐标给出。一个三元组 (r, g, b) 表示各颜色(红、绿和蓝)的数量，参数变化范围从0到1。

计算机图形学中的重心坐标

例5： 令$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$，$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}3\\3\\3.5\end{pmatrix}$，在一个三角形的顶点$v_1, v_2, v_3$处的颜色分别是品红$(1, 0, 1)$、浅品红$(1, 0.4, 1)$和紫色$(0.6, 0, 1)$。求出$p$点的插入颜色，见图6。

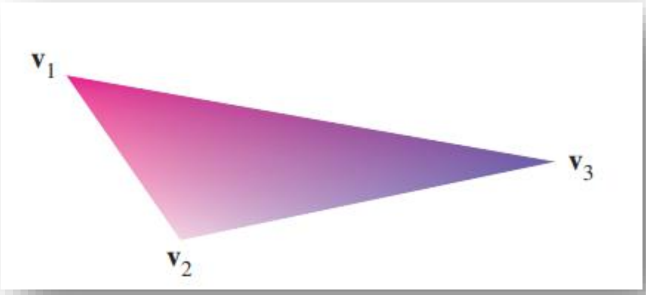


图6 插入颜色

解：

- 首先，求出p点的重心坐标，这里运用点的齐次形式

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{v}}_1 & \tilde{\mathbf{v}}_2 & \tilde{\mathbf{v}}_3 & \tilde{\mathbf{p}}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\3 & 4 & 1 & 3\\1 & 3 & 5 & 3\\5 & 4 & 1 & 3.5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.25\\0 & 1 & 0 & 0.50\\0 & 0 & 1 & 0.25\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

计算机图形学中的重心坐标

例5：

- $p = 0.25v_1 + 0.5v_2 + 0.25v_3$
- 运用的**p**重心坐标对颜色数据进行线性组合，**p**的 RGB 值是

$$0.25\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+0.50\begin{bmatrix}1\\0.4\\1\end{bmatrix}+0.25\begin{bmatrix}0.6\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9\\0.2\\1\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{红}\\\text{绿}\\\text{蓝}\end{matrix}$$

- 把图形显示在计算机屏幕上的最后一步是消除“隐藏面”，这些隐藏面都不会在屏幕上看到。

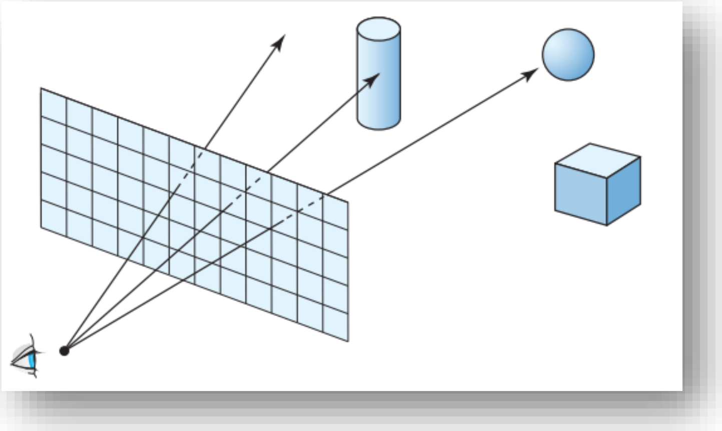


图7 从眼睛通过屏幕到最近物体的射线

- 设想屏幕是由 100 万个像素的点组成
- 当图像中的物体由线框和三角面逼近时，隐藏面问题可运用重心坐标来解决
- 射线-三角形相交的数学方法也可以很好地应用于对物体进行逼真的着色。

计算机图形学中的重心坐标

例6： 令$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$，$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.4 \\ -3 \end{pmatrix}$，并且对$t \geq 0$有$x(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$，求射线$x(t)$与由三角形三个顶点$v_1, v_2$和$v_3$构成的平面相交的点，这个点在三角形中吗?

解:

- 平面是aff $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$，这个平面中的一个通用点可写为
$$(1 - c_2 - c_3)\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \quad \text{（权值和为1）}$$
- 当c_2, c_3和t满足$(1 - c_2 - c_3)\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ 时，射线$x(t)$与平面相交
- $\Rightarrow c_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + t(-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{v}_1$
- 矩阵形式为 $$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 & -\mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{a} - \mathbf{v}_1$$

计算机图形学中的重心坐标

例6：

- $$\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}7\\0\\2\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}4\\10\\4\end{pmatrix},\ \mathbf{a}-\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\16\end{pmatrix}$$
- 做增广矩阵行化简运算得

$$\begin{pmatrix}7&4&-0.7&-1\\0&10&-0.4&-1\\2&4&3&16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0.3\\0&1&0&0.1\\0&0&1&0.5\end{pmatrix}$$

- 因 此$c_2=0.3$, $c_3=0.1$和$t=5$。相交点是

$$x(5)=\mathbf{a}+5\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0.7\\0.4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\2.0\\-5.0\end{pmatrix}$$

- 则

$$x(5)=(1-0.3-0.1)\mathbf{v}_1+0.3\mathbf{v}_2+0.1\mathbf{v}_3$$
$$=0.6\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}+0.3\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}+0.1\begin{pmatrix}5\\11\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\2.0\\-5.0\end{pmatrix}$$

- 由于$x(5)$的重心权值都是正的，所以相交点位于三角形内部。

第八章 The Geometry of Vector Spaces

§ 8.3 Convex Combinations 凸组合

衡益

2022 年 1 月 4 日，中山大学南校区

8.3 凸组合

凸组合定义

R^n中点v_1，v_2，...，v_k 的一个凸组合是如下形式的线性组合：

$$c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_kv_k$$

对于所有i，有$c_1+c_2+\ldots+c_k=1$和$c_i\geq 0$.

一个集合S 中所有凸组合的集称为S 的凸包，记为conv S .

注意：单点v_1的凸包是集合$\{v_1\}$.

凸组合的权值非负，$y=(1-t)v_1+v_2$，$0\leq t\leq 1$.表示在点v_1和v_2之间的线段，记为$\overline{v_1v_2}$.

8.3 凸组合

例1

令$v_1=\begin{bmatrix}3\\0\\6\\-3\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}-6\\3\\3\\0\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}3\\6\\0\\3\end{bmatrix},p_1=\begin{bmatrix}0\\3\\3\\0\end{bmatrix},p_2=\begin{bmatrix}-10\\5\\11\\-4\end{bmatrix}$且$S=\{v_1,v_2,v_3\}$.

注意S是正交集. 确定p_1 是否在$Span\ S, aff\ \ S$ 及$conv\ S$ 中。同样考虑p_2 的情况。

解 若 $\boldsymbol{p}_1$ 至少是 S 中点的线性组合，则由于 S 是正交集合，很容易求出权值. 令 W 为 S 生成的子空间. 类似于 6.3 节的计算证明了 $\boldsymbol{p}_1$ 在 W 上的正交投影 $\boldsymbol{p}_1$ 是其本身：

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_W\boldsymbol{p}_1&=\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1+\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2+\frac{\boldsymbol{p}_3\cdot\boldsymbol{v}_3}{\boldsymbol{v}_3\cdot\boldsymbol{v}_3}\boldsymbol{v}_3\\&=\frac{18}{54}\boldsymbol{v}_1+\frac{18}{54}\boldsymbol{v}_2+\frac{18}{54}\boldsymbol{v}_3\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\0\\6\\-3\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6\\3\\3\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\0\\6\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\3\\3\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{p}_1\end{aligned}$$

8.3 凸组合

由此证明 $\boldsymbol{p}_1$ 在 Span S 内．同样由于系数和为 1，因此 $\boldsymbol{p}_1$ 在 aff S 内．进一步，由于系数是非负的，故 $\boldsymbol{p}_1$ 在 conv S 内．

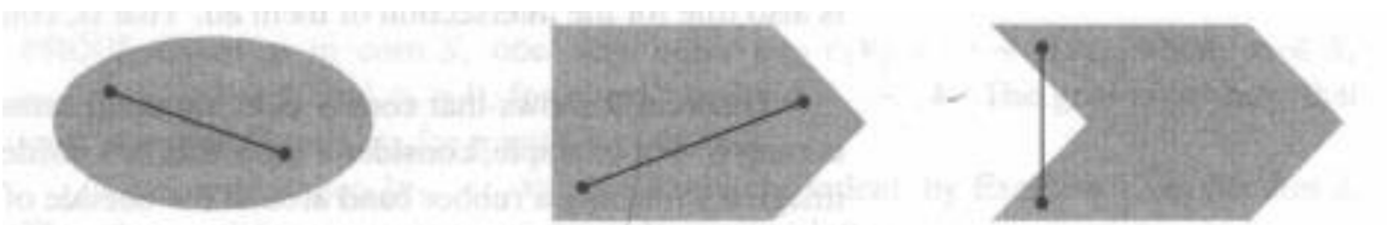
对于 $\boldsymbol{p}_2$，类似的计算证明 $\mathrm{proj}_W \boldsymbol{p}_2 \neq \boldsymbol{p}_2$．由于 $\mathrm{proj}_W \boldsymbol{p}_2$ 是 Span S 中到 $\boldsymbol{p}_2$ 最近的点，所以，点 $\boldsymbol{p}_2$ 不在 Span S 中．特别地，$\boldsymbol{p}_2$ 不可能在 aff S 内或 conv S 内． ■

8.3 凸组合

回顾：集合*S*是仿射的，若*S* 内任意两点确定的直线都在*S* 中。

凸集定义

集合S是凸的，若对于每一个$p,q\in S$ ，线段$\overline{pq}$ 在S 中。



凸的　　凸的　　不是凸的

若集合S中的每两点可以相互“看见”，且视线不越出该集合，那么集合S是凸的。

8.3 凸组合

定理7

集合S是凸集当且仅当S中的点的凸组合在S中，即S是凸集当且仅当S=conv S.

证明：数学归纳法

假设S是凸集，并对凸组合中S的点的数目m使用归纳法。

当m是1或2时，由凸组合的定义，S中m个点的凸组合属于S。

假设S中k个点或少于k个点的每一个凸组合属于S，考虑k+1个点的组合。

令$y=c_1 v_1+c_2 v_2+\ldots+c_k v_k+c_{k+1} v_{k+1}$，$c_1+\ldots+c_k+c_{k+1}=1$。$0 \le c_i \le 1$，若$c_{k+1}=1$，

则$y=v_{k+1}$属于S。若$c_{k+1}<1$，令$t=c_1+\ldots+c_k$，则$t=1-c_{k+1}>0$且

$$y=(1-c_{k+1})\left(\frac{c_1}{t} v_1+\ldots+\frac{c_k}{t} v_k\right)+c_{k+1} v_{k+1}$$

由归纳假设，点$z=\left(\frac{c_1}{t} v_1+\ldots+\frac{c_k}{t} v_k\right)$在S内，这是由于非负系数和为1。

则上式表明y为S内两点的凸集合。即S内的点的每个凸集合在S内。

8.3 凸组合

定理8

设$\{S_\alpha : \alpha \in A\}$是任意组凸集，则$\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha$是凸集。若$\{T_\beta : \beta \in B\}$是任意一组仿射集，则$\bigcap_{\beta\in B} S_\beta$是仿射集。

证明：

若$p,q \in \bigcap S_a$，则p,q在每一个S_a中。由于每一个S_a是凸集，因此对所有α，连接p,q 的线段在S_a中，从而线段属于$\bigcap S_a$中。

对于仿射集的证明与此类似。

8.3 凸组合

定理9

对任何集合S，S的凸包是所有包含S的凸集的交集。

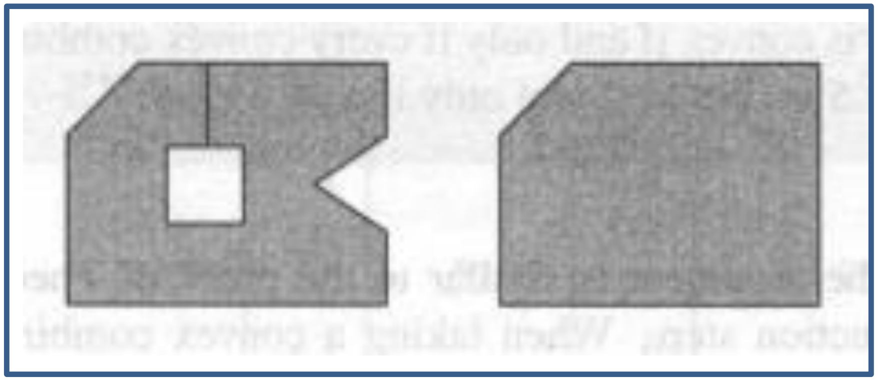
证明：

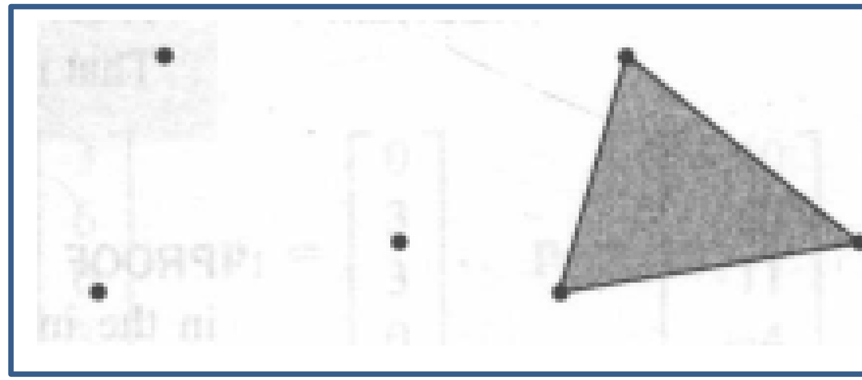
令T为包含S的所有凸集的交集。由于$con\ \ S$是包含S的一个凸集。故$T \subset conv\ \ S$。另一方面，令C是包含S 的任意一个凸集，则C包含C中所有点构成的凸集合，因此也包含子集S 中所有点构成的凸集合，即$conv\ \ S \subset C$，由于对包含S的每个凸集C 都成立，故对所有包含S的凸集的交集同样成立，即$conv\ \ S \subset T$.

8.3 凸组合

例2

$a.$ R^2中集合S，T的凸包如下图所示。



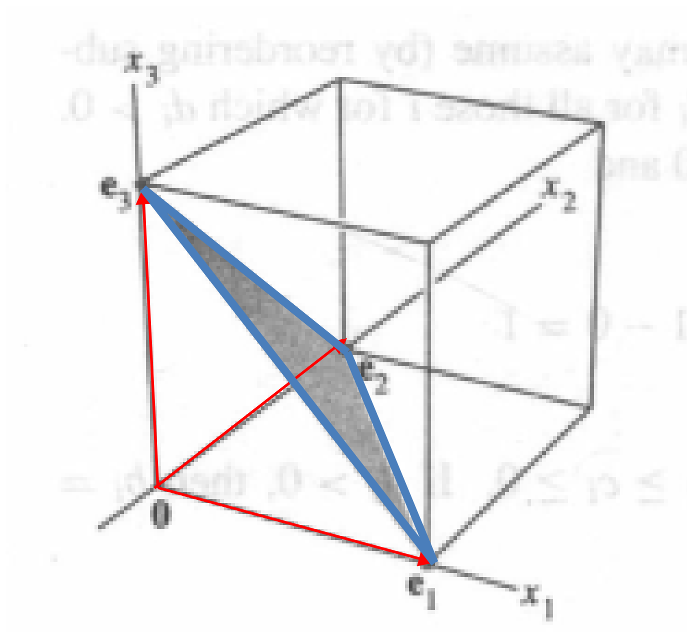


S　conv S　T　conv T

8.3 凸组合

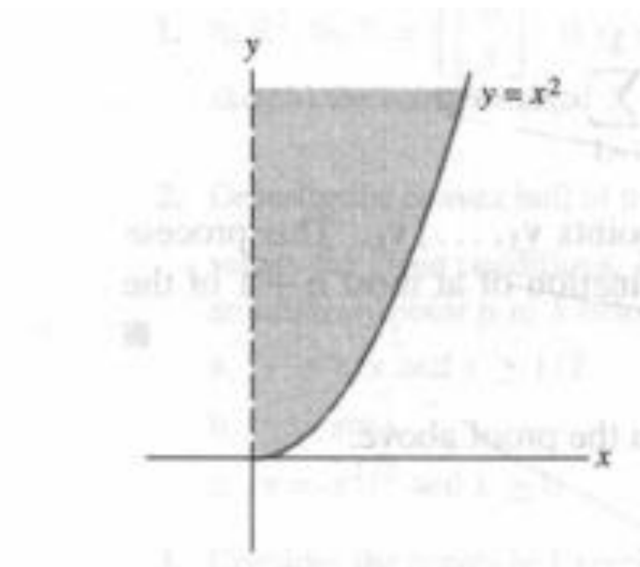
例2

b. 令S是三维空间R^3的标准基构成的集合, $S=\{e_1,e_2,e_3\}$.则conv S 是R^2 中顶点为e_1,e_2,e_3的一个三角面，见下图。



例3

令$S=\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$:x ≥ 0,y=x^2},证明S的凸包是原点和{$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$:x>0,y ≥ x^2}的并集，如下图所示。



证明：考虑阴影部分的任意点p，令$p=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，$a>0$ 且$b\geq a^2$.

经过0与p的直线满足方程$y=\left(\frac{b}{a}\right)t$，$t$ 为实数。直线与s 的交点满足

$\left(\frac{b}{a}\right)t=t^2$，即$t=b/a$。因此p在连接0与$\begin{bmatrix}\frac{b}{a}\\\frac{b^2}{a^2}\end{bmatrix}$的线段上。

8.3 凸组合

定理10

$(Caratheodory)$若S是R^n中一非空子集，则S的凸包中的每一点可以由S中n+1个或更少的点的凸组合表示。

证明：假设p在S的凸包中，则p=$c_1v_1+\ldots+c_kv_k$，其中$v_i\in S$，$c_1+\ldots+c_k=1$，且$c_i\geq 0$，$i=1,2,\ldots k$.
目的为了证明p 存在这样的表达式且$k\leq n+1$.

若$k>n+1$,则$\{v_1,\ldots,v_k\}$是仿射相关，因此存在不全为0的标量$d_1,\ldots,d_k$，使得

$$\sum_{i=1}^{k}d_iv_i=0\text{且}\sum_{i=1}^{k}d_i=0$$

考虑如下两个方程：

$$c_1v_1+\ldots+c_kv_k=p \qquad (1)$$

$$d_1v_1+\ldots+d_kv_k=0 \qquad (2)$$

消去v_i，得到S的少于k个点构成的凸组合，该凸组合等于p。

定理10

假设$d_k>0$且对$d_i>0$的所有i有$\frac{c_k}{d_k}\le\frac{c_i}{d_i}$.对$i=1,\dots,k$,令$b_i=c_i-\frac{c_k}{d_k}d_i$.则$b_k=0$且

$$\sum_{i=1}^{k}b_i=\sum_{i=1}^{k}c_i-\frac{c_k}{d_k}\sum_{i=1}^{k}d_i=1-0=1$$

进一步，每一个$\mathrm{b}_i\ge 0$.事实上，若$d_i\le 0$,则$b_i\ge c_i\ge 0$.若$d_i>0$,则$b_i=d_i\left(\frac{c_i}{d_i}-\frac{c_k}{d_k}\right)\ge 0$

得$\sum_{i=1}^{k-1}b_iv_i=\sum_{i=1}^{k}b_iv_i=\sum_{i=1}^{k}\left(c_i-\frac{c_k}{d_k}d_i\right)v_i=\sum_{i=1}^{k}c_iv_i-\frac{c_k}{d_k}\sum_{i=1}^{k}d_iv_i=\sum_{i=1}^{k}c_iv_i=p$

因此p是k-1个点$v_1,\dots,v_{k-1}$的凸组合.

重复以上步骤到p是由S中n+1个点构成的凸组合。

8.3 凸组合

例4

令$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},v_4=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},p=\begin{bmatrix}\frac{10}{3}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}$，且$S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.则$\frac{1}{4}v_1+\frac{1}{6}v_2+\frac{1}{2}v_3+\frac{1}{12}v_4=p \quad (2)$.

使用*caratheodory*定理的证明过程把p 表示为S 中三个点构成的凸组合。

解：集合S是仿射相关的。

使用8.2节中的方法得到一个仿射相关的关系式 $-5v_1+4v_2-3v_3+4v_4=0 \quad (3)$

选择(3)式中的点v_2,v_4,它们的系数为正。对上述每个点，计算方程(2) 与(3) 中系数的比例.

v_2的系数比为$\frac{1}{6}\div 4=\frac{1}{24}$,而$v_4$的为$\frac{1}{12}\div 4=\frac{1}{48}$.$v_4$的比更小，因此从方程(2) 减去方程(3) 的$\frac{1}{48}$ 来消去v_4:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{48}\right)v_1+\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{48}\right)v_2+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{48}\right)v_3+\left(\frac{1}{12}-\frac{4}{48}\right)v_4=p$$

$$\frac{17}{48}v_1+\frac{4}{48}v_2+\frac{27}{48}v_3=p$$

第八章 The Geometry of Vector Spaces

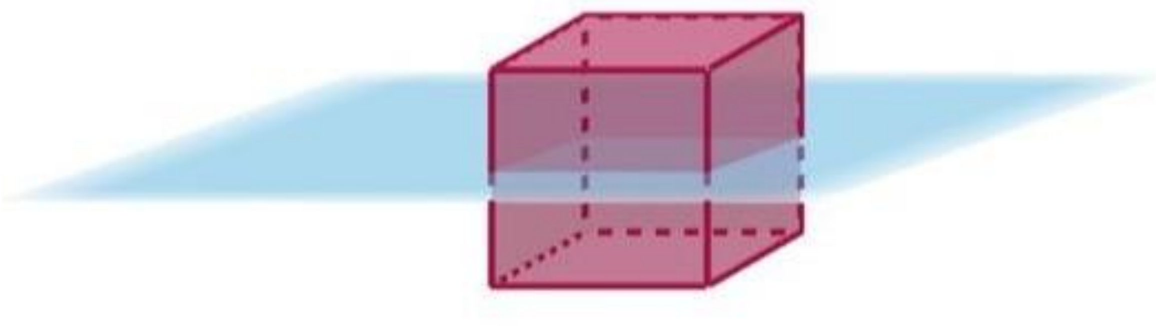
§ 8.4 Hyperplanes 超平面

衡益

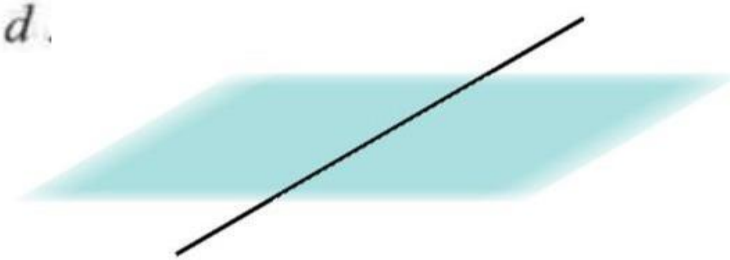
2022 年 1 月 4 日，中山大学南校区

8.4 超平面

超平面在R^n空间中的作用将空间分为两个不想交的部分，例如一个平面把R^3分成两部分以及一条直线切开R^2.



$\mathbb{R}^3$中平面的隐式方程为$ax+by+cz=d$.



$\mathbb{R}^2$中直线的隐式方程为$ax+by=d$

8.4 超平面

定义

R^n上的一个线性函数是从R^n 到R 的一个线性变换f .对R 中的每一个标量d ，符号$[f:d]$表示R^n 中使得f 的值为d 的所有x 的集合，即

$$[f:d]是集合\left\{x\in R^n : f(x)=d\right\}$$

零函数是对R^n 中所有点x 都有$f(x)=0$ 的线性函数.
R^n上所有其他的线性函数都称为非零函数.

8.4 超平面

例1 在$\mathbb{R}^2$中，直线$x-4y=13$是$\mathbb{R}^2$中的超平面，它是所有使得线性函数$f(x,y)=x-4y$的值等于13的点组成的集合，即直线是集合$[f{:}13]$.

例2 在$\mathbb{R}^3$中，平面$5x-2y+3z=21$是$\mathbb{R}^3$中的一个超平面，它是所有使得线性函数$g(x,y,z)=5x-2y+3z$的值等于21的点组成的集合，即超平面是集合$[g{:}21]$.

若f是$\mathbb{R}^n$上的线性函数，那么这个线性变换f的标准矩阵是一个$1\times n$矩阵A. 令$A=[a_1\ a_2 \cdots a_n]$，则

$$[f{:}0]\text{等同于}\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x}=0\}=\text{Nul } A \tag{1}$$

若f是非零函数，则由秩定理[⊖]，A的秩为1，$\dim \text{Nul } A=n-1$，因此子空间$[f{:}0]$是$n-1$维的，从而是一个超平面. 同时，若d是$\mathbb{R}$中任意数，则

$$[f{:}d]\text{等同于}\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x}=d\} \tag{2}$$

8.4 超平面

若f是R^n上的线性函数，则该线性变换f 的标准矩阵是一个$1\times\ n$ 矩阵A，令$A=[a_1\ a_2\ \dots\ a_n]$，则

$$[f:0]\text{等同于}\{x\in R^n : Ax=0\}=Nul\ A$$

若f是非零函数，A 的秩为1，$\dim\ Nul\ A=n-1$，子空间$[f:0]$ 是$n-1$ 维的，

从而是一个超平面

若d是R中任意数，则

[f:d]等同于{x∈Rⁿ： Ax=d}

8.4 超平面

回顾

设方程 $Ax=b$ 对某个 b 是相容的，p 为一个特解，则 $Ax=b$ 的解集是所有形如 $w=p+v_h$ 的向量的集，其中 v_h 是齐次方程 $Ax=0$ 的任意一个解.

$Ax=d$ 的解集是将$Ax=0$ 的解集沿$Ax=b$ 的一特解p平移得到的. 当A 为变换矩阵f的标准矩阵时，定理表明：

$$[f:d]=[f:0]+p,\ 对[f:d]中的任意的p$$

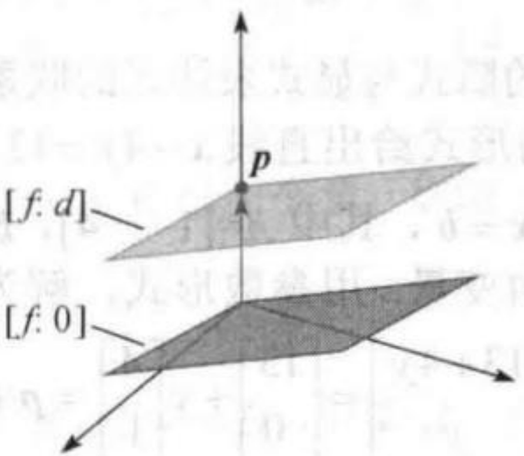


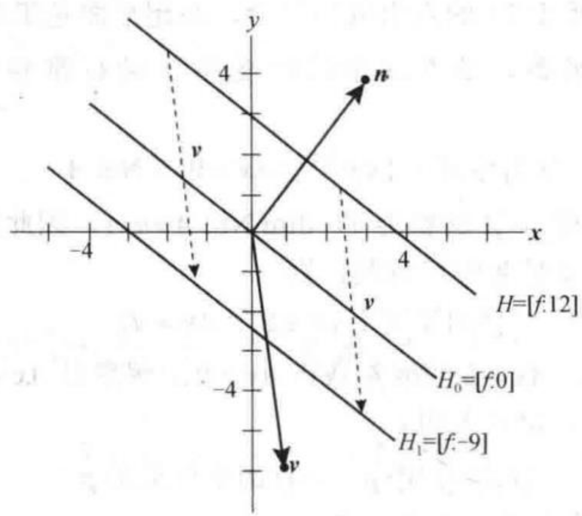
图 8-17 平行超平面，$f(p)=d$

故集合[f:d]是平行于[f:0]的超平面.

例3

令$n=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix}1\\-6\end{bmatrix}, H=\{x:n\cdot x=12\}$,从而$H=[f:12]$,其中$f(x,y)=3x+4y$.故$H$为直线$3x+4y=12$.求平行的超平面(直线)$H_1=H+v$ 的隐式表达式.

解 首先,求出H_1中的一点$\boldsymbol{p}$. 取H中一点,把它加上$\boldsymbol{v}$. 例如H中点$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$,故$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}1\\-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$在 H_1 中. 现在计算$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}=-9$, 这表明$H_1=[f:-9]$, 见图 8-18, 该图也表明子空间$H_0=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=0\}$.



8.3 凸组合

定理11

R^n中的子集H是超平面当且仅当$H=[f:d]$，f为某个非零线性函数，d 为R 中某个数.因而若H是超平面，则存在非零向量n 与实数d ，使得$H=\{x:n\cdot x=d\}$.

证 假定 H 是超平面，取 $\boldsymbol{p}\in H$，且令 $H_0=H-\boldsymbol{p}$. 则 H_0是一个 $n-1$维的子空间. 接下来取 $\boldsymbol{y}\notin H_0$，由 6.3 节中的正交分解定理，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{n}$$

其中 $\boldsymbol{y}_1$是 H_0中一个向量，$\boldsymbol{n}$ 与 H_0中每个向量正交. 函数 f定义为

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

由内积性质可知，这是一个线性函数. 由 $\boldsymbol{n}$ 的含义可知，$[f:0]$是包含 H_0的超平面. 从而

$$H_0=[f:0]$$

8.3 凸组合

补充

$\mathbb{R}^n$ 中的拓扑：术语与事实

对 $\mathbb{R}^n$ 中任意点 $\boldsymbol{p}$ 及任意实数 $\delta>0$，以 $\boldsymbol{p}$ 为心 δ 为半径的**开球** $B(\boldsymbol{p},\delta)$ 表示为

$$B(\boldsymbol{p},\delta)=\{\boldsymbol{x}:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta\}$$

设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的集合，点 $\boldsymbol{p}$ 为 S 的**内点**，若存在 $\delta>0$，使得 $B(\boldsymbol{p},\delta)\subset S$. 若以 $\boldsymbol{p}$ 为心的每个开球既与 S 相交又与 S 的补集相交，则 $\boldsymbol{p}$ 称为 S 的**边界点**. 若集合不包含边界点，则集合称为**开集**.（这等价于说 S 中的所有点都为 S 的内点.）若集合包含所有边界点，则称它为**闭集**.（若 S 包含部分但不是所有边界点，则 S 既非开集也非闭集.）若存在 $\delta>0$ 使得 $S\subset B(\boldsymbol{0},\delta)$，则集合 S 称为**有界的**. 若 $\mathbb{R}^n$ 中的集合既是闭的又是有界的，则称为**紧致的**.

定理 开集的凸包是开集，紧致集的凸包是紧致的.（闭集的凸包不一定是闭的，见习题 27.）

8.4 超平面

例4

令$S = conv\left\{\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\}$, $p_1=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$,及$p_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$,如图所示.则$p_1$是内点，这是由于$B\left(p,\frac{3}{4}\right)\subset S$.点$p_2$是边界点, 这是由于以$p_2$ 为心的每一开球与S 和S 的补集都相交. 由于S包含所有边界点， 故S 是闭集. 由于$S\subset B(0,3)$,所以集合S是有界的. 因此S也是紧致的.

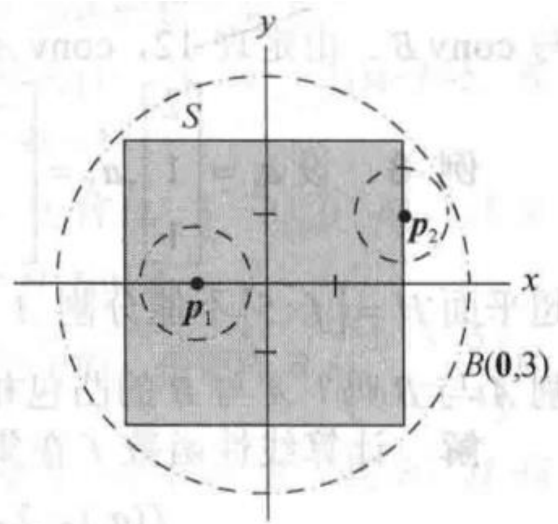


图 8-19 集合 S 是闭的和有界的

8.4 超平面

定义

超平面$H=[f:d]$若满足下列条件之一：

$(i)\ f(A)\le d$且$f(B)\ge d$

$(ii)\ f(A)\ge d$且$f(B)\le d$

则该超平面被分割成两个集合A与B.若在以上条件中，所有的弱不等式变为严格不等式, 则称H严格分割集合A与B.

定理12

设A与B是非空凸集，且A是紧致的，B是闭的. 那么存在超平面H 严格分割A 与B ，当且仅当$A\cap B=\varnothing$

8.3 凸组合

定理13

设A与B是非空紧致集. 那么存在超平面严格分割A 与B,当且仅当$(conv\ A)\cap(conv\ B)=\varnothing$.

证 设$(\mathrm{conv}\ A)\cap(\mathrm{conv}\ B)=\varnothing$．由于紧致集的凸包是紧致的，故定理 12 保证了存在超平面 H 严格分割 conv A 与 conv B．显然，H 严格分割更小的集合 A 与 B．

反之，假定超平面 $H=[f:d]$ 严格分割 A 与 B．不失一般性，设 $f(A)<d$ 且 $f(B)>d$，令 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k$ 是 A 元素的任一凸组合，则

$$f(\boldsymbol{x})=c_1 f(\boldsymbol{x}_1)+\cdots+c_k f(\boldsymbol{x}_k)<c_1 d+\cdots c_k d=d$$

这是由于 $c_1+\cdots+c_k=1$．从而 $f(\mathrm{conv}\ A)<d$．同样 $f(\mathrm{conv}\ B)>d$，故 $H=[f:d]$ 严格分割 conv A 与 conv B．由定理 12，conv A 与 conv B 是不相交的. ■

8.4 超平面

例5

设$a_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix},a_3=\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix},b_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},b_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}$,且设$A\{a_1,a_2,a_3\},B=\{b_1,b_2\}$.
证明超平面$H=[f:5]$不能分割A与B,其中$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1-3x_2+x_3$.存在平行于$H$的超平面分割$A$与$B$吗？$A$与$B$的凸包相交吗？

解 计算线性函数 f 在集合 A 与 B 中每点的值：

$$f(\boldsymbol{a}_1)=2,\quad f(\boldsymbol{a}_2)=-11,\quad f(\boldsymbol{a}_3)=-6,\quad f(\boldsymbol{b}_1)=4,\quad f(\boldsymbol{b}_2)=12$$

由于 $f(\boldsymbol{b}_1)=4$ 比 5 小，$f(\boldsymbol{b}_2)=12$ 比 5 大，故 B 中的点位于集合 $H=[f:5]$ 的两侧，从而 H 不分割 A 与 B.

由于 $f(A)<3$ 且 $f(B)>3$，故平行超平面 $[f:3]$ 严格分割 A 与 B. 由定理 13，$(\text{conv}\ A)\cap(\text{conv}\ B)=\varnothing$.

注：若不存在平行于 H 的超平面严格分割 A 与 B，这并非蕴涵它们的凸包相交，可能存在不平行于 H 的超平面严格分割 A 与 B.

例5

设$a_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix},a_3=\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix},b_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},b_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}$,且设$A\{a_1,a_2,a_3\},B=\{b_1,b_2\}$.

证明超平面$H=[f:5]$不能分割A与B,其中$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1-3x_2+x_3$.存在平行于$H$ 的超平面分割A 与B 吗？A 与B 的凸包相交吗？

解 计算线性函数 f 在集合 A 与 B 中每点的值：

$$f(\boldsymbol{a}_1)=2,\quad f(\boldsymbol{a}_2)=-11,\quad f(\boldsymbol{a}_3)=-6,\quad f(\boldsymbol{b}_1)=4,\quad f(\boldsymbol{b}_2)=12$$

由于 $f(\boldsymbol{b}_1)=4$ 比 5 小， $f(\boldsymbol{b}_2)=12$ 比 5 大，故 B 中的点位于集合 $H=[f:5]$ 的两侧，从而 H 不分割 A 与 B.

由于 $f(A)<3$ 且 $f(B)>3$，故平行超平面$[f:3]$严格分割 A 与 B. 由定理 13，$(\text{conv } A)\cap(\text{conv } B)=\varnothing$.

注： 若不存在平行于 H 的超平面严格分割 A 与 B，这并非蕴涵它们的凸包相交，可能存在不平行于 H 的超平面严格分割 A 与 B.

Q & A