



第五章 Eigenvalues and Eigenvectors

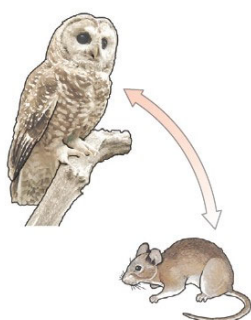
§ 5.6 Discrete Dynamical Systems

离散动力系统

衡 益

2021 年 12 月 16 日, 中山大学南校区

5.6 离散动力系统

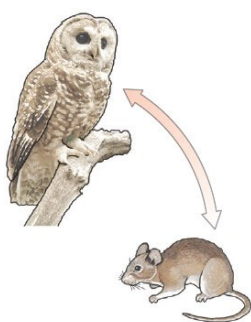


特征值和特征向量提供了一些信息, 使我们理解由**差分方程**

$$x_{k+1} = A x_k$$

描述的动力系统的长期行为或进化。这种方程可用来建立**人口动态变化的数学模型**, 如本章介绍性的斑点猫头鹰数学模型。向量 x_k 给出系统随时间推移的相关信息。例如, 在斑点猫头鹰例子里, x_k 表示在时间 k 三个年龄段的猫头鹰的数目。

5.6 离散动力系统



由于生态问题要比物理或工程上的问题容易描述和解释，本节的应用焦点放在生态问题上。但很多的科学领域存在动力系统，例如**控制系统的大学课程**对动力系统的某些方面进行了讨论。这些课程中的现代状态空间设计方法就**主要依赖于矩阵代数**。控制系统中的**稳态响应**在工程上等价于我们在这里所说的**动力系统的“长期行为”**。

3

5.6 离散动力系统



我们假设**A可对角化**，有n个线性无关的特征向量 v_1, \dots, v_n 和对应的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为方便起见，假设特征向量已按 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ 的顺序排列好。因为 v_1, \dots, v_n 是 \mathbb{R}^n 的基，故任一初始向量 x_0 可以一表示为

$$x_0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \quad (1)$$

x_0 的这种特征向量分解确定了序列 $\{x_k\}$ 所发生的情况。

因为 v_1 是特征向量，所以

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 = c_1 A v_1 + \dots + c_n A v_n \\ &= c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_n \lambda_n v_n \end{aligned}$$

一般有

$$x_k = c_1 (\lambda_1)^k v_1 + \dots + c_n (\lambda_n)^k v_n \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

下面的例子说明**当 $k \rightarrow \infty$ 时，上式会出现什么结果。**

4



捕食者-食饵系统

Predator-prey system

5



5.6 离散动力系统

捕食者-诱饵系统

在加利福尼亚的红木森林深处，作为老鼠的主要捕食者，斑点猫头鹰的食物有80%是老鼠。例1利用线性动力系统来**建立猫头鹰和老鼠的自然系统模型**。（这个模型在某些方面与现实不符，但是它能够为环境科学家们所用的更复杂的非线性模型的研究提供一个起点）

例1

用 $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$ 表示在时间 k （单位：月）猫头鹰和老鼠的

数量， O_k 是在研究区域猫头鹰的数量， R_k 是老鼠的数量（单位：千只）



5.6 离散动力系统

例1

设

$$\begin{aligned} O_{k+1} &= (0.5)O_k + (0.4)R_k \\ R_{k+1} &= -p \cdot O_k + (1.1)R_k \end{aligned} \quad (3)$$

其中 p 是被指定的正参数。第1个方程中的 $(0.5)O_k$ 表示：如果没有老鼠为食物，每月仅有一半的猫头鹰存活下来，而第2个方程的 $(1.1)R_k$ 表明，如果没有猫头鹰捕食老鼠，那么老鼠的数量每月增长10%。假设有足够多的老鼠， $(0.4)R_k$ 表示猫头鹰增长的数量。

事实上，一只猫头鹰每月平均吃掉1000 p 只老鼠，当 $p=0.104$ 时，预测该系统的发展趋势。

7



5.6 离散动力系统

解

当 $p = 0.104$ 时，算出方程组的系数矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1 = 1.02$ 和 $\lambda_2 = 0.58$ 。对应的特征向量是，

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

初始向量 \mathbf{x}_0 可表示为 $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$ ，那么对 $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= c_1 (1.02)^k \mathbf{v}_1 + c_2 (0.58)^k \mathbf{v}_2 \\ &= c_1 (1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2 (0.58)^k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时， $(0.58)^k$ 很快趋于零，假设 $c_1 > 0$ ，那么对所有足够大

的 k ， \mathbf{x}_k 近似等于 $c_1 (1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$ ，我们记为

$$\mathbf{x}_k \approx c_1 (1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \quad (4)$$



5.6 离散动力系统

解

随着 k 的增大, (4) 的近似程度会更好, 故对足够大的 k

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx c_1 (1.02)^{k+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = (1.02) c_1 (1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \approx 1.02 \mathbf{x}_k \quad (5)$$

近似式(5)表明最终 \mathbf{x}_k 的两个分量(猫头鹰和老鼠的数量)每月以大约1.02的倍数增长, 即月增长率为2%. 由(4), \mathbf{x}_k 就近似于(10, 13)的倍数, 因此, \mathbf{x}_k 的两个分量之比率也近似于10与13的比率, 也就是说, 对应每10只猫头鹰, 大致有13000只老鼠。

例1说明了有关动力系统的两个基本事实



9



5.6 离散动力系统

若 \mathbf{A} 是 $n \times n$ 矩阵, 它的特征值满足 $|\lambda_1| \geq 1$ 和 $|\lambda_j| \leq 1, j=2, \dots, n$ \mathbf{v}_1 是 λ_1 对应的特征向量, 假设 \mathbf{x}_0 由(1)给出, 且 $c_1 \neq 0$, 那么对于足够大的 k ,

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \lambda_1 \mathbf{x}_k \quad (6)$$

和

$$\mathbf{x}_k \approx c_1 (\lambda_1)^k \mathbf{v}_1 \quad (7)$$

式(6)和(7)的近似精度可根据需要通过取足够大的 k 来得到。由式(6) \mathbf{x}_k 每时段最终以近似 λ_1 的倍数增长, 因此, λ_1 确定了系统的最终增长率。同样由式(7), 对足够大的 k , \mathbf{x}_k 的两个分量之比近似等于 \mathbf{v}_1 对应分量之比。

10



解的几何意义

11



5.6 离散动力系统

当 A 为 2×2 矩阵时，可以通过系统发展趋势的几何描述来补充解释代数计算。我们可以把方程

$$\mathbf{x}_{k+1} = A \mathbf{x}_k$$

看作是 \mathbb{R}^2 中的初始点 \mathbf{x}_0 被映射 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 重复变换的描述，由 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ 组成的图形称为是动力系统的轨迹。

例2 当 $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$ 时

当 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$ 时，画出动力系统 $\mathbf{x}_{k+1} = A \mathbf{x}_k$ 的若干轨迹。

12



5.6 离散动力系统

例2 当 $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ 时

当 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$ 时, 画出动力系统 $\mathbf{x}_{k+1} = A \mathbf{x}_k$ 的若干轨迹。

解 A 的特征值是 0.8 和 0.64, 对应的特征向量是

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

假如 $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$, 那么

$$\mathbf{x}_k = c_1 (0.8)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 (0.64)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, $(0.8)^k$ 和 $(0.64)^k$ 都趋于零, 当然 \mathbf{x}_k 也趋于零。但 \mathbf{x}_k 趋于零的方式是有趣的。

13



5.6 离散动力系统

例2 当 $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ 时

当 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$ 时, 画出动力系统 $\mathbf{x}_{k+1} = A \mathbf{x}_k$ 的若干轨迹。

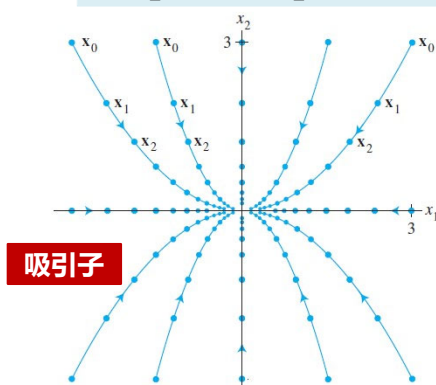


FIGURE 1 The origin as an attractor.

图1显示了几条轨迹的开头几项, 这些轨迹的起点在四个角的坐标为 $(\pm 3, \pm 3)$ 的矩形的边界上。为了使轨迹容易看清, 用细线把轨迹上的点连接起来。

在例2中, 因为所有的轨迹都趋于原点, 所以原点被称作动力系统的吸引子。

14



5.6 离散动力系统

例2 当 $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$ 时

当 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$ 时，画出动力系统 $\mathbf{x}_{k+1} = A \mathbf{x}_k$ 的若干轨迹。

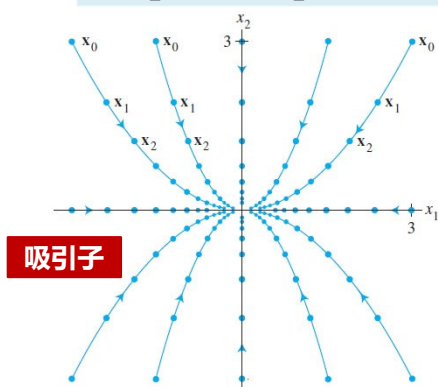


FIGURE 1 The origin as an attractor.

当两个特征值的绝对值都小于1的时候，会出现这种情况。过原点和最小绝对值的特征值的特征向量 \mathbf{v}_2 的直线的方向是最大吸引方向。

Next

两个特征值的绝对值都大于1的时候，此时的原点称为动力系统的**排斥子**，除了零解，所有解都是无解的。

15



5.6 离散动力系统

例3 当 $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$ 时

当 $A = \begin{bmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}$ 时，画出动力系统 $\mathbf{x}_{k+1} = A \mathbf{x}_k$ 的若干轨迹。

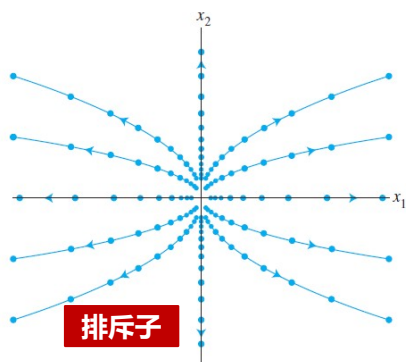


FIGURE 2 The origin as a repeller.

A 的特征值是1.44和1.2，若 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ，

则

$$\mathbf{x}_k = c_1(1.44)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2(1.2)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

两项的值随 k 增大而增大，但第一项增大的快一些。因此，过原点和较大特征值的特征向量的直线方向是最大排斥方向。图2显示的是接近原点的几条轨迹。

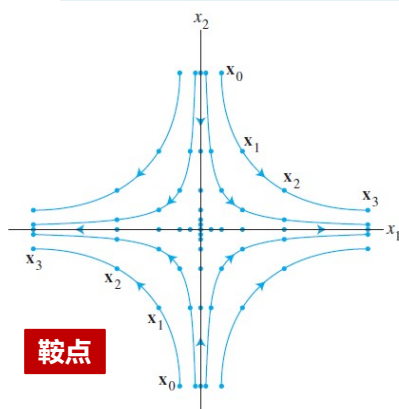
16

5.6 离散动力系统



例4 当 $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| < 1$ 时

当 $D = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ 时, 画出动力系统 $\mathbf{y}_{k+1} = D \mathbf{y}_k$ 的若干轨迹。



鞍点

FIGURE 3 The origin as a saddle point.

D 的特征值是 2 和 0.5, 若 $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, 则

$$\mathbf{y}_k = c_1(2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2(0.5)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

假如 \mathbf{y}_0 在 x_2 轴, 那么 $c_1 = 0$, 因此当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{y}_k \rightarrow 0$. 但当 \mathbf{y}_0 不在 x_2 轴时, 计算 \mathbf{y}_k 的和式中的第一项变得任意大, 因此 $\{\mathbf{y}_k\}$ 是无界的。图2显示的是起点靠近或在 x_2 轴上的10条轨迹。

17



变量代换

18



5.6 离散动力系统

前面3个例子讨论的矩阵是对角矩阵，为处理非对角矩阵，我们先暂时回到 A 为 $n \times n$ 矩阵的情形。

设 A 的特征向量 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 的基。令 $P = [v_1, \dots, v_n]$ ， D 是对角线上元素为对应特征值的对角矩阵。给出序列 $\{x_k\}$ 满足 $x_{k+1} = Ax_k$ ，由

$$y_k = P^{-1}x_{k+1} \text{ 或 } x_k = Py_{k+1}$$

定义一个新的序列 $\{y_k\}$ ，把这些关系代入方程 $x_{k+1} = Ax_k$ ，并利用 $A = PDP^{-1}$ ，我们求得

$$Py_{k+1} = APy_k = (PDP^{-1})Py_k = PDy_k$$

两边乘 P^{-1} ，得

$$y_{k+1} = Dy_k$$

19



5.6 离散动力系统

假如我们记 y_k 为 $y(k)$ ，用 $y_1(k), \dots, y_n(k)$ 表示 $y(k)$ 的分量，那么

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \\ \vdots \\ y_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix}$$

从 x_k 到 y_k 的变量代换解耦了差分方程系统。例如， $y_1(k)$ 的变化不受 $y_2(k) \dots y_n(k)$ 的影响，因为对每个 k ， $y_1(k+1) = \lambda_1 y_1(k)$ 。

等式 $x_k = Py_k$ 表明 y_k 是 x_k 在向量基 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 下的坐标向量。这样，我们就可以通过在新的向量坐标系中进行计算来解耦系统 $x_{k+1} = Ax_k$ 。当 $n = 2$ 时，相当于在使用坐标轴在两个特征向量方向上的方格纸。

20



5.6 离散动力系统

例5 证明原点是方程 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k$ 解的鞍点，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{bmatrix}$$

并求解最大吸引方向和排斥方向。

易求， \mathbf{A} 的特征值为2和0.5，对应的特征向量分别是

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由于 $|2| > 1$ 和 $|0.5| < 1$ ，因此原点是动力系统的鞍点。假如

$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$ ，那么

$$\mathbf{x}_k = c_1 2^k \mathbf{v}_1 + c_2 (0.5)^k \mathbf{v}_2 \quad (9)$$

这个等式看起来像例4中的式(8)，只是用 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 代替了标准基。

21

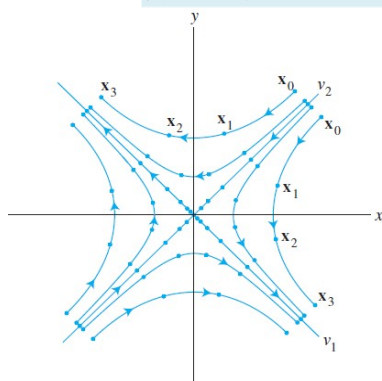


5.6 离散动力系统

例5 证明原点是方程 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k$ 解的鞍点，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{bmatrix}$$

并求解最大吸引方向和排斥方向。



在图4中，最大排斥方向是在过 \mathbf{v}_1 的直线上，因为 \mathbf{v}_1 对应的特征值大于1。若 \mathbf{x}_0 在这条直线上，则(9)中的 $c_2=0$ ，因此 \mathbf{x}_k 快速远离原点，最大吸引方向由特征向量 \mathbf{v}_2 决定，其对应的特征值小于1。

22

FIGURE 4 The origin as a saddle point.



复特征值

23



5.6 离散动力系统

若 \mathbf{A} 是有复特征值的 2×2 矩阵, 则 \mathbf{A} 不可对角化(当 \mathbf{A} 作用在 \mathbb{R}^n 时), 但动力系统 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k$ 还是容易描述的。

假如 \mathbf{A} 有两个长度都大于1的复特征值, 那么原点是排斥子, \mathbf{x}_0 的迭代绕原点向外做螺旋线旋转。假如复特征值的长度都小于1, 原点是吸引子, \mathbf{x}_0 的迭代绕原点向内作螺旋线旋转, 见下例。

例6

验证矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.1 & 1.0 \end{bmatrix}$$

有特征值 $0.9 \pm 0.2i$, 对应的特征向量是 $\begin{bmatrix} 1 \mp 2i \\ 1 \end{bmatrix}$, 图5显示了

初始向量为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ -2.5 \end{bmatrix}$ 时动力系统 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k$ 的3条轨迹。



例6

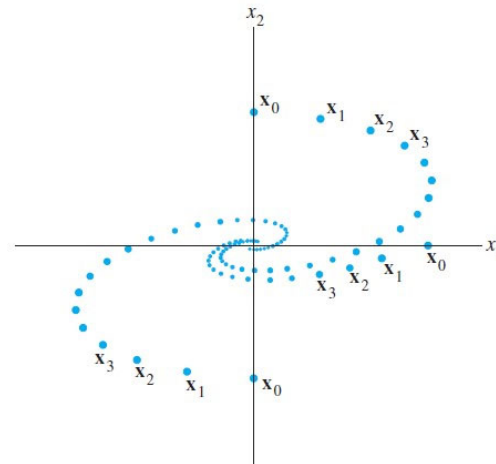


FIGURE 5 Rotation associated with complex eigenvalues.

25



斑点猫头鹰的 生存

26



5.6 离散动力系统



回顾本章介绍性实例，我们用动力系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k$$

为California Willow Gnatcatcher的猫头鹰建立种群模型，在该模型中，

$$\mathbf{x} = (j_k, s_k, a_k)$$

的分量分别表示在时间 k ，幼年、半成年和成年雌性猫头鹰的数量， \mathbf{A} 为阶段矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{bmatrix} \quad (10)$$

由`matlab`算出 \mathbf{A} 的特征值大约为，

$$\lambda_1 = 0.98, \lambda_2 = -0.02 + 0.21i, \lambda_3 = -0.02 - 0.21i$$

27



5.6 离散动力系统



因为

$$|\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = (-0.02)^2 + (0.21)^2 = 0.0445,$$

故三个特征值的长度都小于1.

现在，让 \mathbf{A} 作用在复空间 \mathbb{C}^3 ，因为 \mathbf{A} 有3个相异的特征值，故对应的3个特征向量是线性无关的，形成 \mathbb{C}^3 的一个基。

记这些特征向量为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 和 \mathbf{v}_3 ，那么动力系统的通解的形式是

$$\mathbf{x}_k = c_1(\lambda_1)^k \mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2)^k \mathbf{v}_2 + c_3(\lambda_3)^k \mathbf{v}_3 \quad (11)$$

若初始向量 \mathbf{x}_0 是实向量，由于 \mathbf{A} 是实矩阵，故 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$ 表明式(11)左边的 \mathbf{x}_k 也是实向量，尽管表示为复向量的和。

28



5.6 离散动力系统



但由于所有特征值都小于1，所以式(11)右边每一项都趋于零向量。因此，实序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 也趋向于零向量，很不幸，该模型预测的斑点猫头鹰最终**全部灭亡**。

猫头鹰还有希望吗？

回顾

29



5.6 离散动力系统



在阶段矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{bmatrix}$$

中，元素0.18表示18%的幼年雄性猫头鹰得以生存进入半成年期，尽管有60%的幼年猫头鹰能够活下来，离巢去寻找新的栖息地，但在这60%的幼年猫头鹰中，仅有30%的猫头鹰能够活下来找到新的栖息地。森林中裸露地域的数量使得搜索工作变得更困难，严重影响了寻找栖息地过程中的猫头鹰的存活率。

30

5.6 离散动力系统



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{bmatrix}$$

有相当数量的猫头鹰生活在没有或很少裸露地域的地方，这使得有更大百分比的幼年猫头鹰能够找到新的栖息地存活下来。

当然，猫头鹰的问题比我们描述的还要复杂，但最后一个例子将会给你一个满意的结果。

31

5.6 离散动力系统



例7

设幼年猫头鹰的搜寻存活率是50%，因此(10)式中的矩阵A的(2, 1)元素是0.3而不是0.18，用这样的阶段矩阵模型预测猫头鹰数量的发展趋势。

解

现在A 的特征值大约是

$$\lambda_1 = 1.01, \lambda_2 = -0.03 + 0.26i, \lambda_3 = -0.03 - 0.26i$$

对应 λ_1 的特征向量为 $\mathbf{v}_1 = (10, 3, 31)$ ，并设 \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 是对应 λ_2 和 λ_3 的(复)特征向量。此时，等式(11)变为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k = & c_1(1.01)^k \mathbf{v}_1 + c_2(-0.03 + 0.26i)^k \mathbf{v}_2 \\ & + c_3(-0.03 - 0.26i)^k \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时，向量 $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 趋于零，因此 \mathbf{x}_k 越来越接近(实)向量 $c_1(1.01)^k \mathbf{v}_1$ 。例1中的近似值(6)和(7)在这里仍然适用。

32

5.6 离散动力系统



例7

设幼年猫头鹰的搜寻存活率是50%，因此(10)式中的矩阵A的(2, 1)元素是0.3而不是0.18，用这样的阶段矩阵模型预测猫头鹰数量的发展趋势。

解

因此，猫头鹰的数量会缓慢增长。特征向量 \mathbf{v}_1 描述了猫头鹰在3个年龄段数量的最终分布，每31只成年猫头鹰，对应大约有10只幼年猫头鹰和3只半成年猫头鹰。

33



Q & A