

---

## 图论及其应用：第一次作业

---

**注意** 请回答任意七题，并将答案在北京时间五月七日午夜前发送至2160853158@qq.com，邮件题目中请注明姓名学号

**题一** 一棵树有 13 个顶点，除了 3 个 2 度顶点和树叶外，其他顶点都是 5 度顶点，画出所有互不同构的这种树。

**题二** 证明任意六人中必然有三人两两相互认识或不认识。证明：给定六人小组，其中任意三人中总有两人互相认识，则必有三人互相认识。

**题三** 证明简单图中存在长度至少是  $\delta$  的路。

**题四** 平面上有  $n$  个点，两两距离至少为 1，证明这些点中距离恰好为 1 的点对数不超过  $3n$ 。

**题五** 简单连通图  $G$  中最长路径的长度为  $L$ ， $P$  与  $Q$  为长度为  $L$  的两条路径，证明  $P$  与  $Q$  相交。

**题六** 简单图  $G$  满足  $\Delta(G) = \lceil n/2 \rceil$  与  $\delta(G) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ ， $G$  是否是连通图，证明或给出反例。

**题七** 简单图  $G$  满足  $d(u) + d(v) \geq n, \forall u, v \in V$ ，证明  $G$  是连通图。

**题八** 图  $G$  有 9 个节点，每个节点的度数不是 5 就是 6，证明  $G$  至少有 5 个度数为 6 的节点，或 6 个度数为 5 的节点。

**题九** 平面上有  $n \geq 3$  条线段，其中任意 3 条有公共端点，证明这  $n$  条线段有公共端点。

**题十** 考察  $n \geq 6$  个人组成的一组，已知每人至少认识  $\lfloor n/2 \rfloor$  人，对任意  $\lfloor n/2 \rfloor$  人，或者其中有两人相互认识，或者余下的  $n - \lfloor n/2 \rfloor$  人中有两人相互认识，证明必有 3 人相互认识。