电路理论基础

时间：星期一上午8:00至9:40，星期五上午8:00至9:40

地点：南校园1506

任课教师：粟涛（电子与信息工程学院）

考试方式：闭卷

成绩评定：平时分40%，期末考试60%。

学分：4

正弦量与相量

- 正弦信号
- 相量
- 电路元件的相量关系
- 阻抗与导纳
- 频域中的基尔霍夫定律
- 阻抗合并

正弦信号

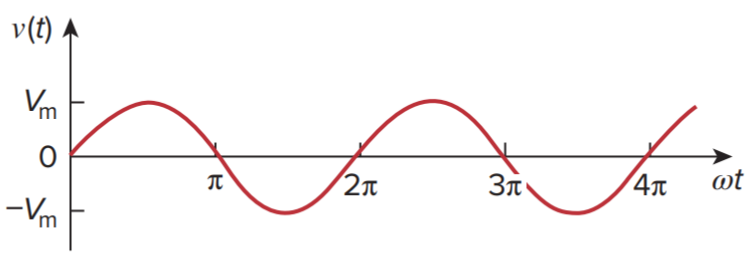
幅度和频率

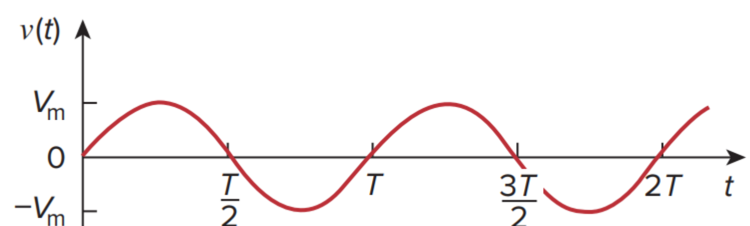
- 正弦电压表达式
  - 幅度：　V_{m}，　伏特
  - 角频率：ω，　弧度每秒
  - 幅角：　ωt，　弧度
  - 周期：　T，　秒
  - 频率：　f，　赫兹

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

$$v(t) = v(t + nT)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad f = \frac{1}{T}$$





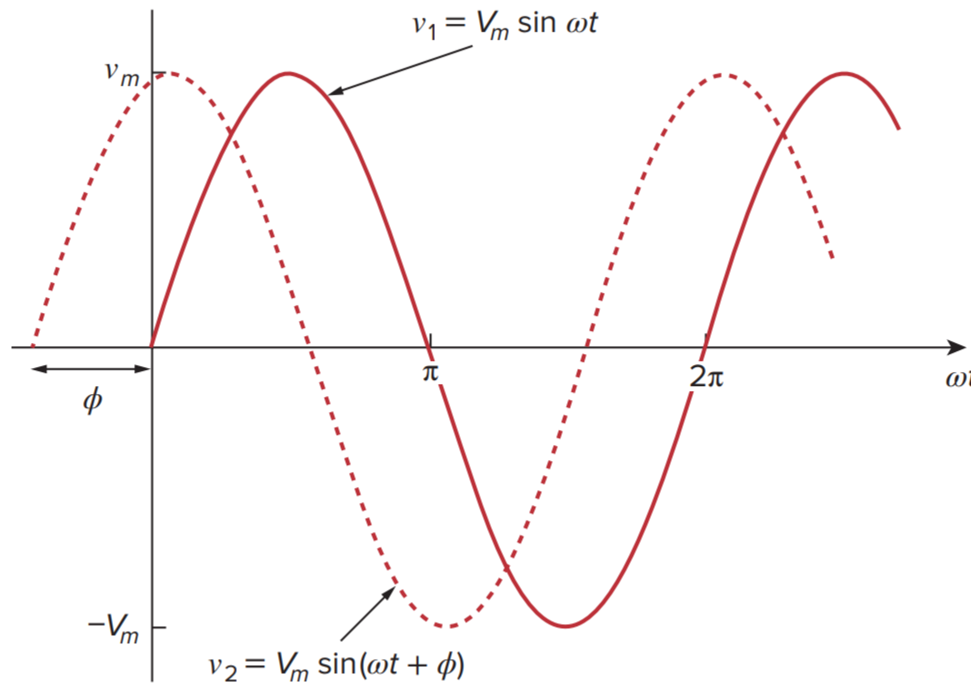
- 正弦信号是一种周期性的信号
  - 本页最重要的参数是幅度和频率。

相位

- 正弦波含有一个参数：相位 ϕ 。

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- 右图给出了幅度频率一样，相位不为0的正弦波。
  – 不同相（out of phase）
- 相位大于0
  – 波形超前（lead）
- 相位小于0
  – 波形滞后（lag）

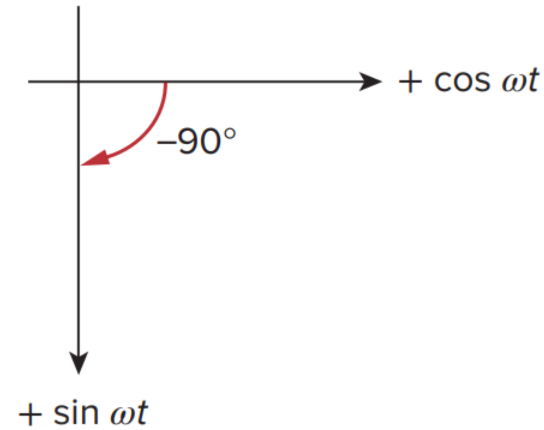


表达相位

- 表达正弦信号即可以用sin函数也可以用cos函数

$$\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90^o)$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - 90^o)$$



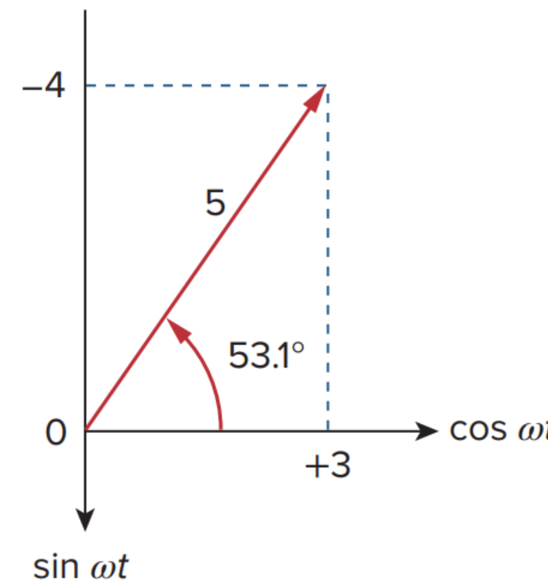
- 相位不为0的正弦信号可以分解为
  - 0相位正弦函数，
  - 和0相位余弦函数两部分。

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = V_m[\cos(\omega t)\sin\varphi + \sin(\omega t)\cos\varphi]$$

$$v(t) = 5\sin(\omega t + 53.1^o)$$

$$v(t) = 3\cos(\omega t) - 4\sin(\omega t)$$



表达相位和幅度

- 在给定频率的条件下，可以用极坐标表达正弦信号。
  - 以0相余弦函数表示一个成分
  - 以0相正弦函数表示另一个成分
  - 以余弦作为基准

$$v(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$v(t) = C\cos(\omega t + \varphi) \qquad C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

- 举例一：
  - 求正弦电压v(t) = 12 cos(50t + 10°) 的幅度、相位、周期和频率。

- 举例二：
  - 两个正弦电压 $v_1 = -10\cos(\omega t + 50^\circ)$ 和 $v_2 = 12\sin(\omega t - 10^\circ)$，
  - 它们之间的相位角是多少？哪个信号超前？

相量

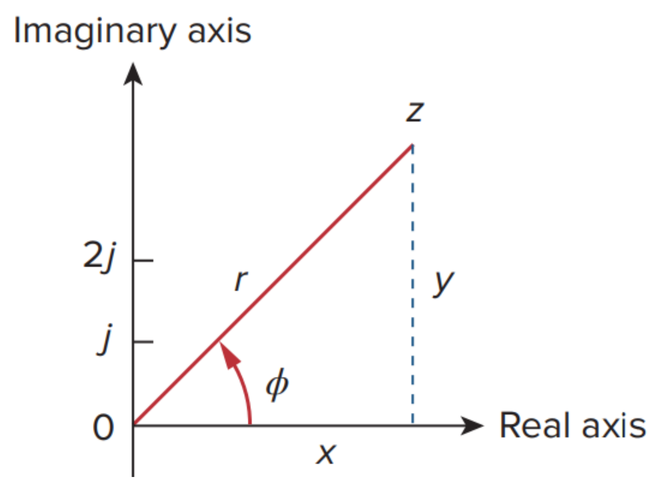
介绍

- 正弦量可以很容易地用相量来表示。
- 相量是表示正弦信号的幅度和相位的复数。

$z = x + jy$

$z = r\angle\phi$

$z = re^{j\phi}$



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

- 正弦电源激励的电路，分析起来比较困难。
  - 相量则为分析这种电路提供了一种简单的方法：避开了求导数和求积分。

复数的运算

- 复数的基本运算有
  - 加、减、乘、除

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \times z_2 = (r_1 \times r_2)e^{j(\phi_1+\phi_2)}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \div z_2 = (r_1 \div r_2)e^{j(\phi_1-\phi_2)}$$

  - 求实部、求虚部

$$x = Re(z) = r\cos\phi$$

$$y = Im(z) = r\sin\phi$$

  - 倒数、平方根、共轭

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-j\phi}$$

$$z = \sqrt{r}e^{j\frac{\phi}{2}}$$

$$z^* = x - jy = re^{-j\phi}$$

用相量表示正弦电压

- 已知电压信号为

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

- 可以表达为一个时变复数的实部

$$v(t) = Re\left[V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right]$$

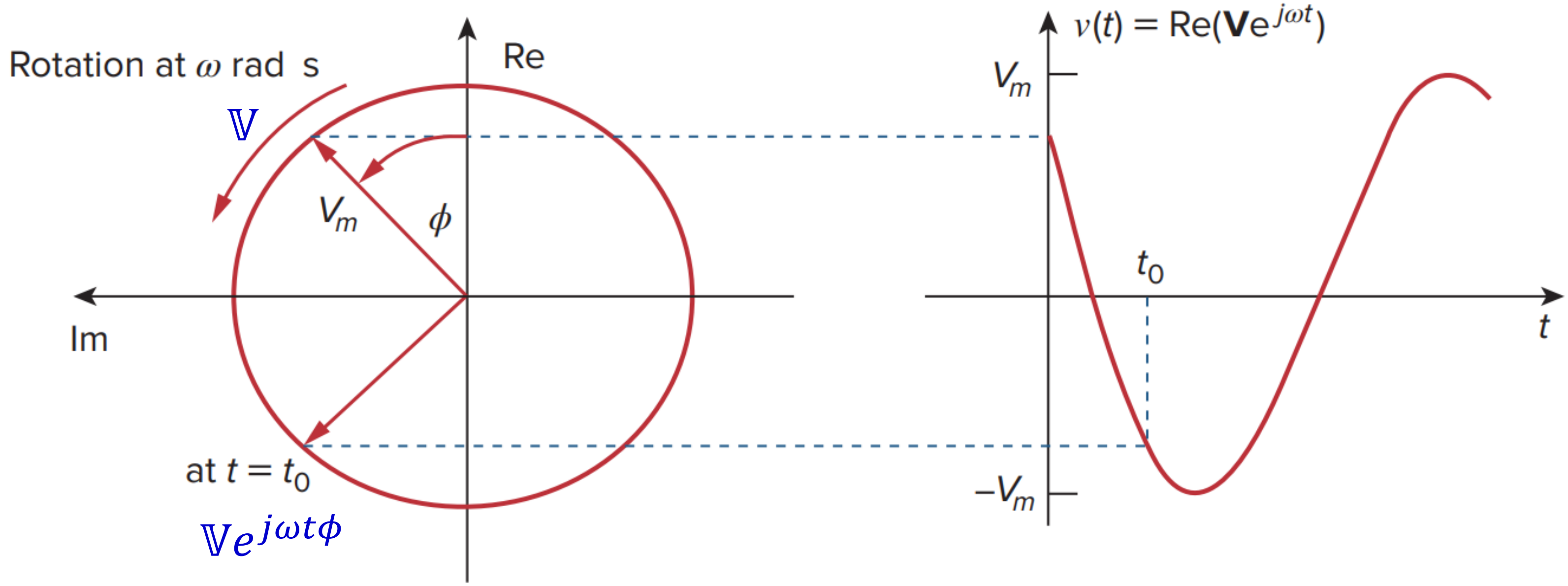
- 复数中的时不变部分为

$$\mathbb{V} = V_m e^{j\phi} \qquad\qquad v(t) = Re\left[\mathbb{V} e^{j\omega t}\right]$$

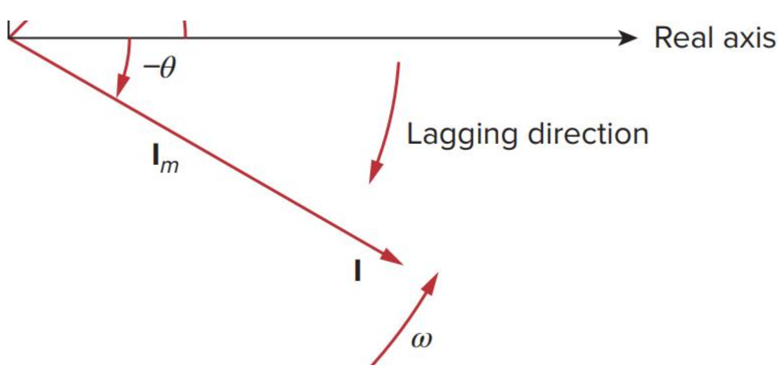
- 称为$\mathbb{V}$正弦信号 v(t) 的相量表示。
  – 它是省略了时间依赖关系的正弦信号的等效数学表达式。

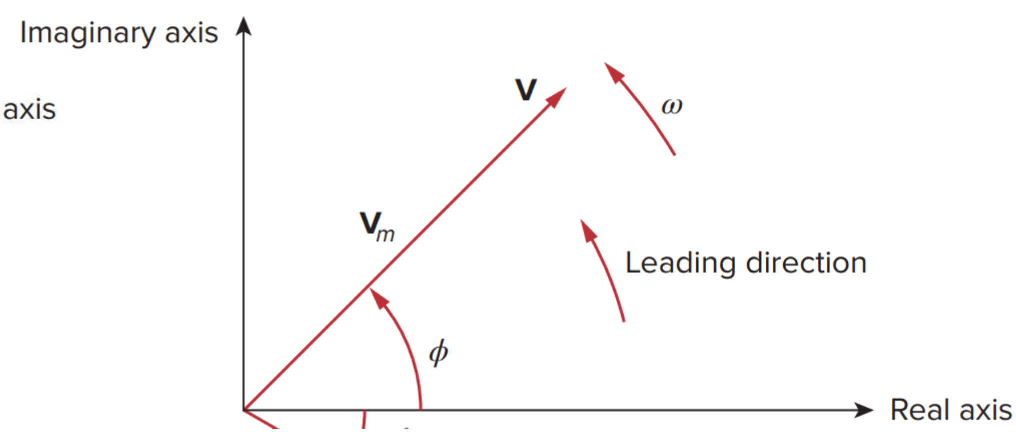
复平面

- 可以在复平面上表示相量和正弦信号



- 相位滞后或者超前





时域相域等价性

- 在给定频率的情况下，时域表达式和相域表达式有一一对应的关系。

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \qquad v(t) = Re\left[\mathbb{V}e^{j\omega t}\right]$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = V_m \underline{/\phi}$$

(Time-domain representation) (Phasor-domain representation)

Time domain representation	Phasor domain representation
$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \underline{/\phi}$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m \underline{/\phi - 90^\circ}$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \underline{/\theta}$
$I_m \sin(\omega t + \theta)$	$I_m \underline{/\theta - 90^\circ}$

- 用相量表达电压的微分 $\dfrac{dv}{dt} = -\omega V_m \sin(\omega t + \phi)$

$$\frac{dv}{dt} = \omega V_m \cos(\omega t + \phi + 90^o) \qquad \frac{dv}{dt} = Re\left[\omega \mathbb{V} e^{j90^o} e^{j\omega t}\right]$$

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow j\omega\mathbb{V} \qquad \mathbb{V}e^{j90^o} = j\omega\mathbb{V} \qquad \int v dt \Leftrightarrow \frac{\mathbb{V}}{j\omega}$$

相域求解

- 求解电路的电压波形，可以先在相域求解，然后再转换为时域表达式。

- 背后的逻辑 $\alpha \cdot v(t) + \beta \cdot \frac{dv}{dt} + \gamma \cdot \int v dt = A\cos(\omega t + \theta)$

$$\alpha \cdot Re[\mathbb{V}e^{j\omega t}] + \beta \cdot Re[\omega \mathbb{V}e^{j90^o}e^{j\omega t}] + \gamma \cdot Re\left[\frac{1}{\omega}\mathbb{V}e^{-j90^o}e^{j\omega t}\right] = Re[Ae^{j\theta}e^{j\omega t}]$$

$$\alpha \cdot \mathbb{V}e^{j\omega t} + \beta \cdot \omega \mathbb{V}e^{j90^o}e^{j\omega t} + \gamma \cdot \frac{1}{\omega}\mathbb{V}e^{-j90^o}e^{j\omega t} = Ae^{j\theta}e^{j\omega t}$$

$$\alpha \cdot \mathbb{V} + \beta \cdot j\omega \mathbb{V} + \gamma \cdot \frac{1}{j\omega}\mathbb{V} = Ae^{j\theta}$$

例题

- 例一：试将下列正弦信号转换为相量。

$i(t) = 6\cos(50t - 40^o)$

$v(t) = -4\sin(30t + 50^o)$

答案

$\mathbb{I} = 6e^{-j40^o}$

答案

$\mathbb{V} = 4e^{+j140^o}$

- 例二：试以相量来表示下列正弦信号。

$\mathbb{I} = -3 + j4$

$\mathbb{V} = j8e^{-j20^o}$

答案

$i(t) = 5\cos(\omega t + 126.87^o)$

答案

$v(t) = 8\cos(\omega t + 70^o)$

电路元件的相量关系

电阻

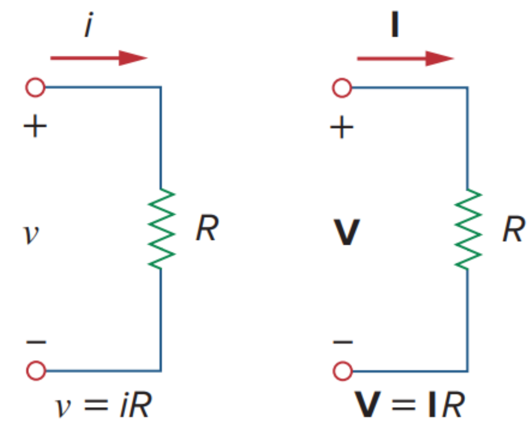
- 电阻的电流

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \mathbb{I} = I_m e^{j\phi}$$

- 电阻的电压

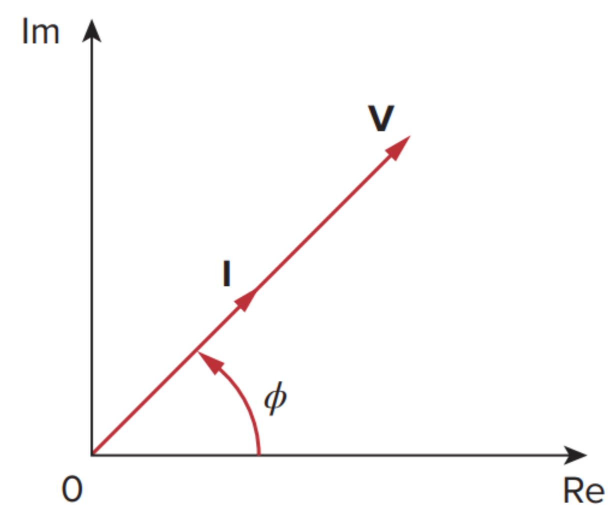
$$v(t) = Ri(t) \qquad v(t) = RI_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\mathbb{V} = (RI_m)e^{j\phi}$$



- 电压与电流的关系 $\mathbb{V} = R \times \mathbb{I}$

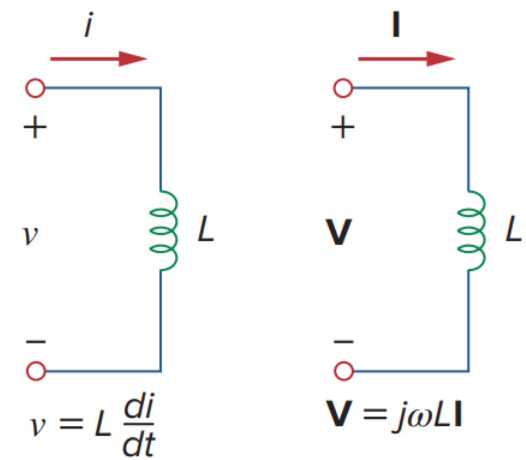
- 电阻的阻抗 $Z = \dfrac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = R$



电感

- 电感的电流

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \mathbb{I} = I_m e^{j\phi}$$

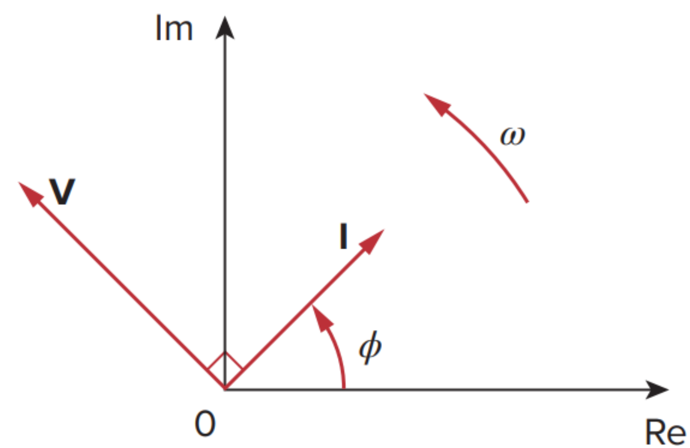


- 电感的电压

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \qquad v(t) = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90^o)$$

$$\mathbb{V} = (j\omega L I_m)e^{j\phi}$$



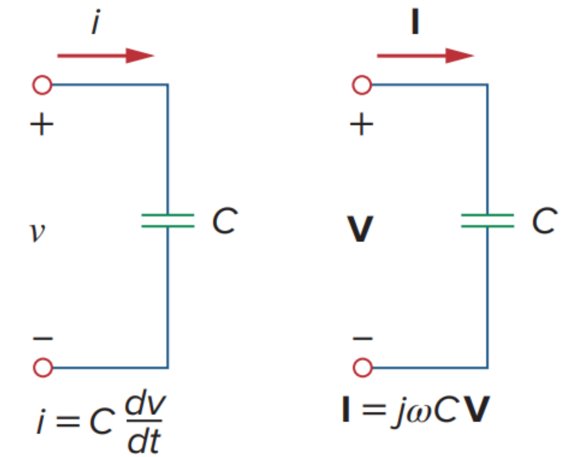
- 电压与电流的关系 $\mathbb{V} = j\omega L \times \mathbb{I}$

- 电感的阻抗 $Z = \dfrac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = j\omega L$

电容

- 电容的电压

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \mathbb{V} = V_m e^{j\phi}$$



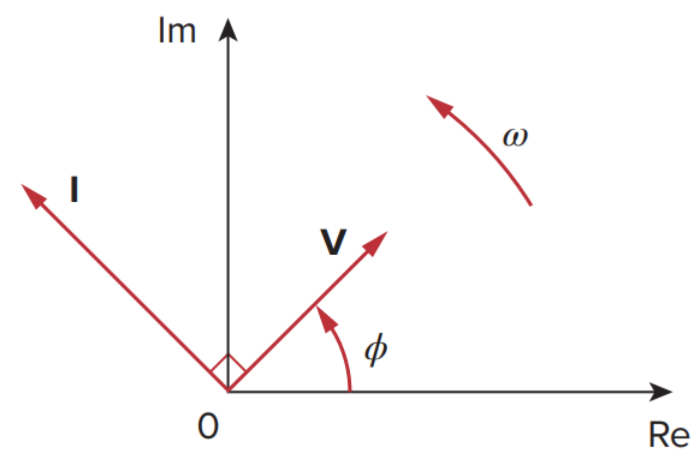
- 电容的电流

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} \qquad i(t) = -\omega C V_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = \omega C V_m \cos(\omega t + \phi + 90^o)$$

$$\mathbb{I} = (j\omega C V_m)e^{j\phi}$$

- 电压与电流的关系 $\mathbb{I} = j\omega C \times \mathbb{V}$



- 电容的阻抗

$$Z = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$

阻抗和导纳

阻抗

- 三个元件在相域的电流电压关系

$\mathbb{V} = R \times \mathbb{I}$ $\quad$ $\mathbb{V} = j\omega L \times \mathbb{I}$ $\quad$ $\mathbb{I} = j\omega C \times \mathbb{V}$

电阻 电感 电容

$Z = R$ $\quad$ $Z = j\omega L$ $\quad$ $Z = \dfrac{1}{j\omega C}$

- 电路的阻抗是指相量电压与相量电流的比值，单位是欧姆。

$$Z = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} \qquad \mathbb{V} = Z \times \mathbb{I}$$

- 阻抗是个复数，但不是相量，不是正弦波。

阻抗的表达

- 可以用实部和虚部的形式
  - 实部叫电阻，虚部叫电抗

$$Z = R + jX$$

- 也可以用幅度和相位的形式

$$Z = |Z|e^{j\theta}$$

- 通过幅相计算实虚部

$$R = |Z|\cos\theta \qquad X = |Z|\sin\theta$$

- 通过实虚部计算幅相

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{X}{R}$$

导纳

- 导纳就是阻抗的导数

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{V}}$$

- 导纳的实部叫电导，虚部叫电纳。

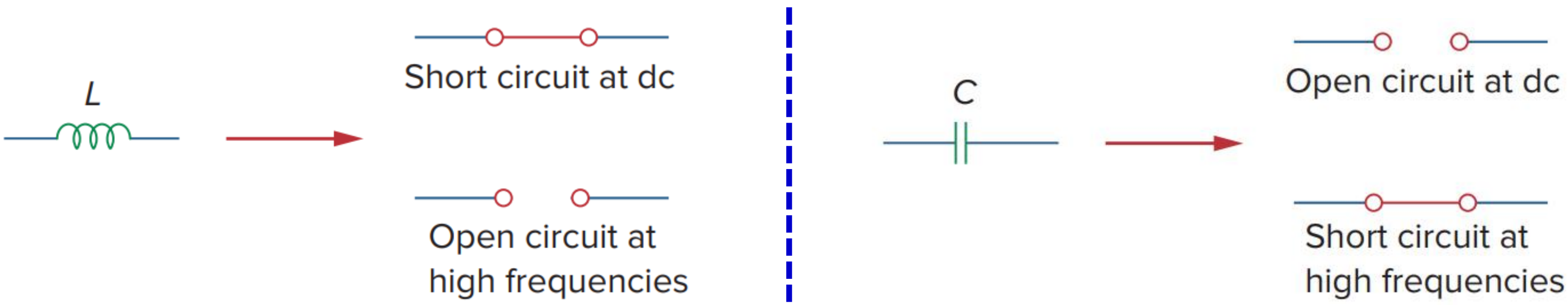
$$Y = G + jB$$

- 从阻抗的实部，可以算出导纳的时虚部

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

特殊情况

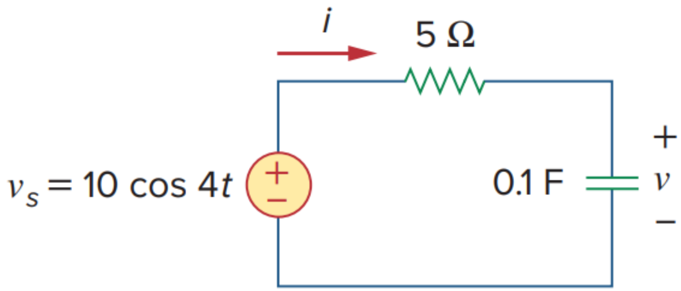
- 电感
  - 在频率为0时，阻抗为0，等效为导线。
  - 当频率为无穷大时，阻抗为无穷大，等效为开路。
  - 因此电感有通直流和阻高频交流的特性。



- 电容
  - 在频率为0时，阻抗为无穷大，等效为开路。
  - 当频率为无穷大时，阻抗为0，等效为导线。
  - 因此电容有通高频交流和阻直流的特性。

例题

- 问题：求下面电路的 v(t) 和 i(t) 。



$$\mathbb{V} = 10e^{j0}$$

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

- 解答：
  - 首先写出电压源的相量表达式
  - 然后写出电阻的阻抗和电容的阻抗
  - 电流的表达式：$\mathbb{I} = \dfrac{\mathbb{V}_S}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \dfrac{10}{5 + \dfrac{1}{j4 \times 0.1}} = \dfrac{10}{5 - j2.5} = \dfrac{4}{2 - j}$
  - 电压的表达式：$\mathbb{V} = \mathbb{I}\dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{4}{2 - j} \times -j2.5 = \dfrac{10}{1 + 2j}$

频域的基尔霍夫定律

有效性

- 实数表达的电流电压是满足基尔霍夫定律的。
- 相量表达的电流电压是否满足基尔霍夫定律?
- 这要看从实数表达式出发，能否推导出相量表达式。

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$\Big\Downarrow ?$$

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + \mathbb{V}_3 = 0$$

- 下面就从实数表达式出发推导相量表达式。

KVL的有效性

- 假设某环路有n个电压，根据KVL有

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$$

- 写成正弦波表达式

$$V_{m1}\cos(\omega t + \theta_1) + V_{m2}\cos(\omega t + \theta_2) + \cdots + V_{mn}\cos(\omega t + \theta_n) = 0$$

- 写成复数的实部之和

$$Re\left(V_{m1}e^{j\theta_1}e^{j\omega t}\right) + Re\left(V_{m2}e^{j\theta_2}e^{j\omega t}\right) + \cdots + Re\left(V_{mn}e^{j\theta_n}e^{j\omega t}\right) = 0$$

- 写成复数之和的实部

$$Re\left(V_{m1}e^{j\theta_1}e^{j\omega t} + V_{m2}e^{j\theta_2}e^{j\omega t} + V_{mn}e^{j\theta_n}e^{j\omega t}\right) = 0$$

KVL的有效性

- 接上页，复数之和的实部

$$Re\left(V_{m1}e^{j\theta_1}e^{j\omega t}+V_{m2}e^{j\theta_2}e^{j\omega t}+V_{mn}e^{j\theta_n}e^{j\omega t}\right)=0$$

- 合并同类项

$$Re\left[\left(V_{m1}e^{j\theta_1}+V_{m2}e^{j\theta_2}+V_{mn}e^{j\theta_n}\right)e^{j\omega t}\right]=0$$

- 上式对任意时间 t 都成立，因此时间部分系数为0

$$V_{m1}e^{j\theta_1}+V_{m2}e^{j\theta_2}+V_{mn}e^{j\theta_n}=0$$

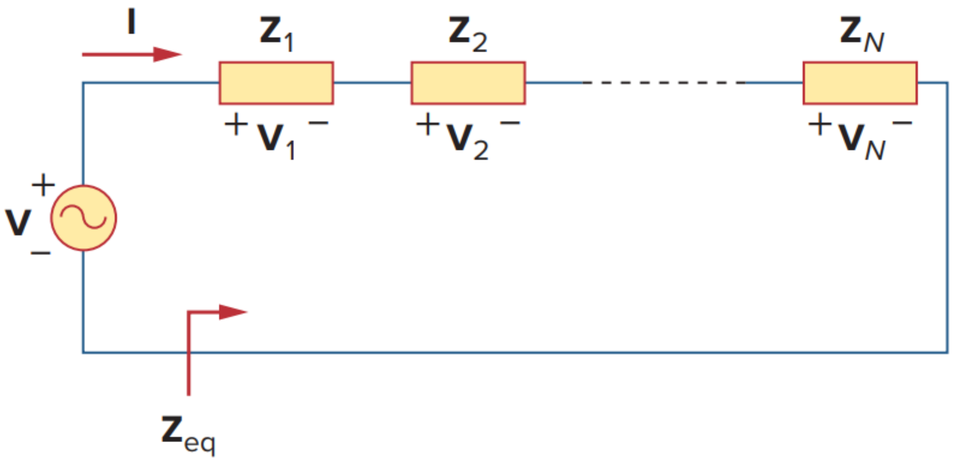
- 写成相量形式

$$\mathbb{V}_1+\mathbb{V}_2+\cdots+\mathbb{V}_n=0$$

阻抗合并

阻抗的串联

- 串联阻抗的总阻抗（等效阻抗）等于各个阻抗之和。



$$\mathbb{V} = \mathbb{I} \times (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$$

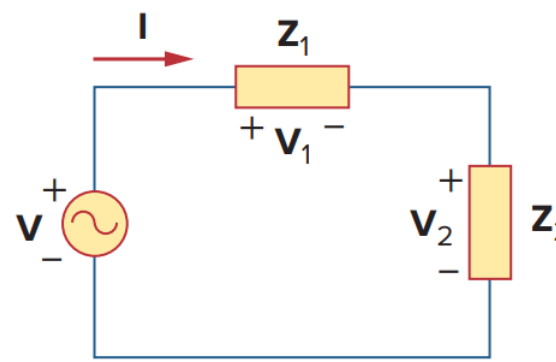
$$Z_{eq} = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}}$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

- 分压计算式

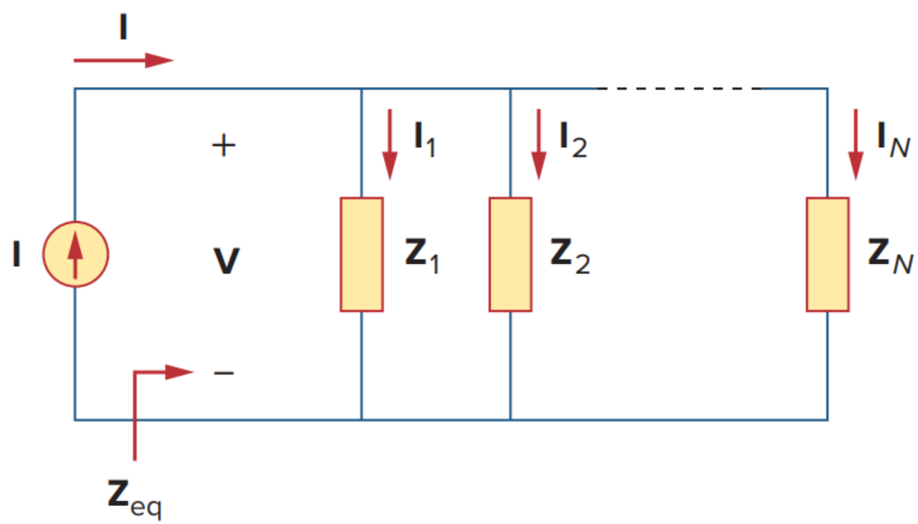
$$\mathbb{V}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\mathbb{V} \qquad \mathbb{V}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\mathbb{V}$$

当 Z_1 和 Z_2 为复数时，可能出现分压大于总电压。



阻抗的并联

- 并联导纳的总导纳（等效导纳）等于各个导纳之和。



$$\mathbb{I} = \mathbb{V} \times \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n} \right)$$

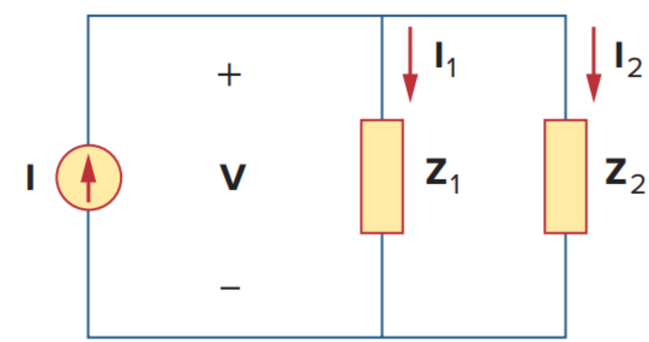
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{V}}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$

- 分流公式

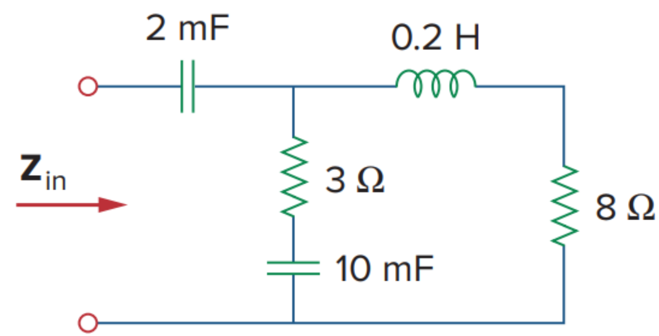
$$\mathbb{I}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \mathbb{I} \qquad \mathbb{I}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \mathbb{I}$$

当 Z_1 和 Z_2 为复数时，可能出现分流大于总电流。



例题

- 问题：求右图电路的
  - 输入阻抗，
  - 和各元件的电压相量；
  - 假设电路的 ω = 50 rad/s。



- 解答：
  - 在给定角频率下，算出各个元件的阻抗；

$$Z_1 = \frac{1}{j50 \times 0.002} \qquad Z_2 = 3 + \frac{1}{j50 \times 0.01} \qquad Z_3 = 8 + j50 \times 0.2$$

  - 然后根据阻抗串并联结构计算等效电阻；

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 \parallel Z_3$$

  - 使用分压和分流公式计算各个元件的电压和电流。

作业

- 画出本章思维导图
- 9.5
- 9.51
- 9.54
- 9.66
- 9.67