第2章　　线性时不变系统

本章主要内容：

- 信号的时域分解——用 $\delta(n)$ 表示离散时间信号；用 $\delta(t)$ 表示连续时间信号。
- LTI系统的时域分析——卷积积分与卷积和。
- LTI系统的微分方程及差分方程表示。
- LTI系统的框图结构表示。
- 奇异函数。

2.0 引言 (Introduction)

LTI系统满足齐次性和叠加性，并且具有时不变性, 这些特点为建立信号与系统分析的理论与方法奠定了基础。

基本思想： 如果能把任意输入信号分解成基本信号的线性组合，那么只要得到了LTI系统对基本信号的响应，就可以利用系统的线性特性，将系统对任意输入信号产生的响应表示成系统对基本信号的响应的线性组合。

引言 (Introduction)

- **问题的实质：**

1. 研究信号的分解：

即以什么样的信号作为构成任意信号的基本信号单元，如何用基本信号单元的线性组合来构成任意信号；

2. 如何得到LTI系统对基本单元信号的响应。

- **作为基本单元的信号应满足以下要求：**

1. 本身尽可能简单，并且用它的线性组合能够表示（构成）尽可能广泛的其它信号；
2. LTI系统对这种信号的响应易于求得。

引言 (Introduction)

如果解决了信号分解的问题，即：若有

$$x(t)=\sum_i a_i x_i(t) \qquad x_i(t)\to y_i(t)$$

$$\downarrow$$

则 $$y(t)=\sum_i a_i y_i(t)$$

- **分析方法:**

将信号分解可以在时域进行，也可以在频域或变换域进行，相应地就产生了对LTI系统的时域分析法、频域分析法和变换域分析法。

2.1 离散时间LTI系统：卷积和

（Discrete-Time LTI Systems:The Convolution Sum）

一. 用单位脉冲表示离散时间信号

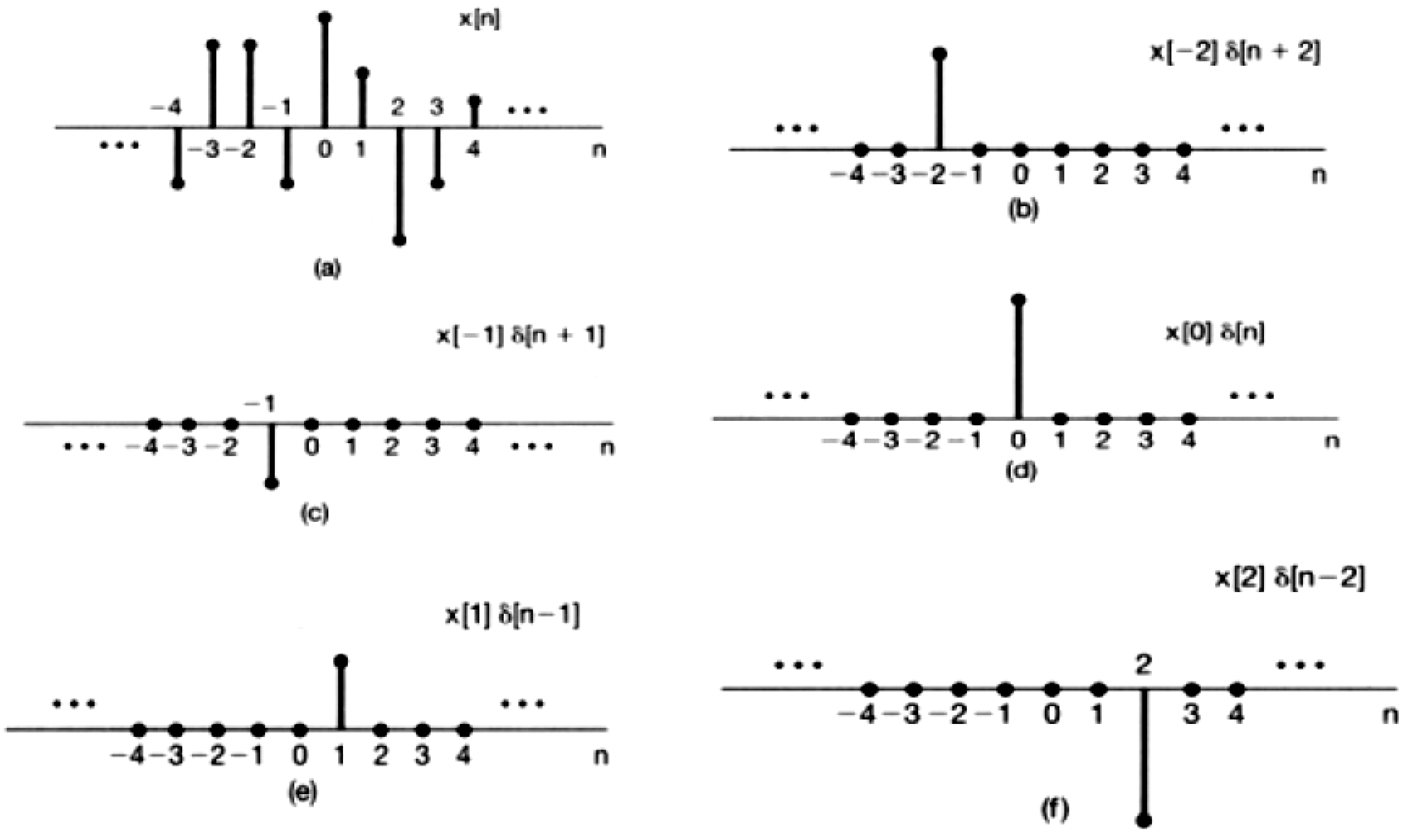
离散时间信号中,最简单的是 $\delta(n)$，

可以由它的线性组合构成 $u(n)$，即：

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

对任何离散时间信号 $x(n)$,如果每次从其中取出一个点，就可以将信号拆开来，每次取出的一个点都可以表示为不同加权、不同位置的单位脉冲。

一. 用单位脉冲表示离散时间信号



于是有：

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

表明：任何信号$x(n)$都可以被分解成移位加权的单位脉冲信号的线性组合。

二. 卷积和（Convolution sum）

如果一个线性系统对$\delta(n-k)$的响应是$h_k(n)$，由线性特性就有系统对任何输入$x(n)$的响应为：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h_k(n)$$

若系统具有时不变性，即：

若 $\delta(n)\rightarrow h(n)$, **则** $\delta(n-k)\rightarrow h(n-k)$

二. 卷积和（Convolution sum）

因此，只要得到了LTI系统对 $\delta(n)$的响应 $h(n)$

——单位脉冲响应(impulse response)，

就可以得到LTI系统对任何输入信号 $x(n)$的响应：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)$$

这表明：一个LTI系统可以完全由它的单位脉冲响应来表征。这种求得系统响应的运算关系称为卷积和（The convolution sum）。

三. 卷积和的计算—图解法计算卷积和

- 卷积和的定义为 $$x[k]*h[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]h[k-n]$$

- 计算步骤：

(1) 将$x[k]$、$h[k]$中的自变量由k改为n;

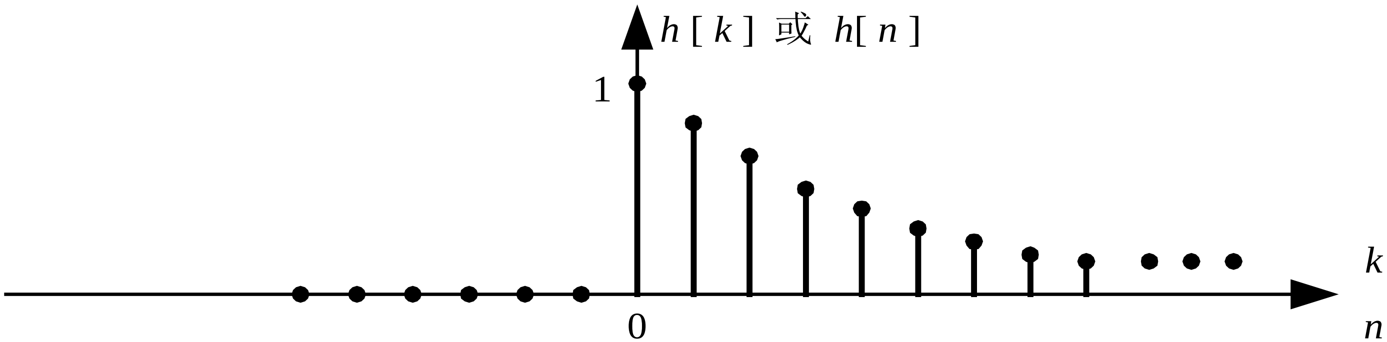
(2) 把其中一个信号翻转，如将$h[n]$翻转得 $h[-n]$ ；

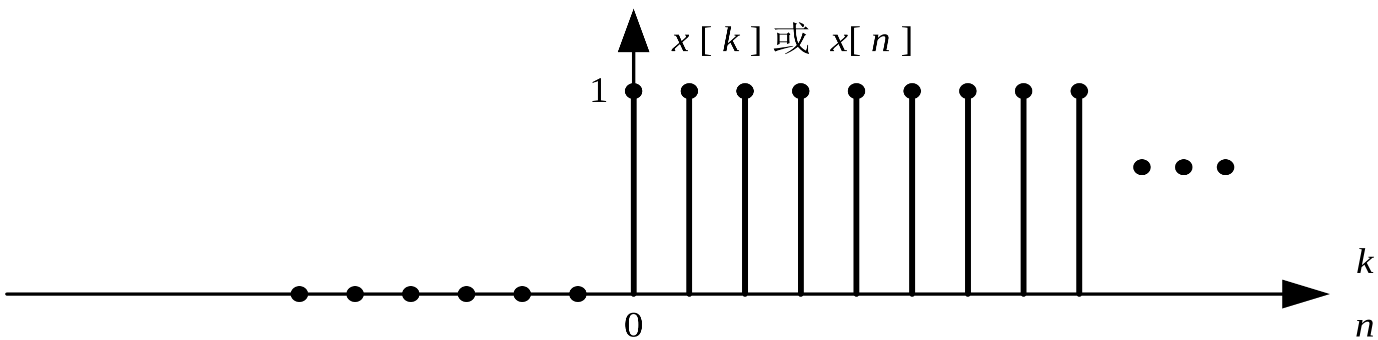
(3) 把$h[-n]$平移k，k是参变量。$k>0$图形右移，$k<0$图形左移。

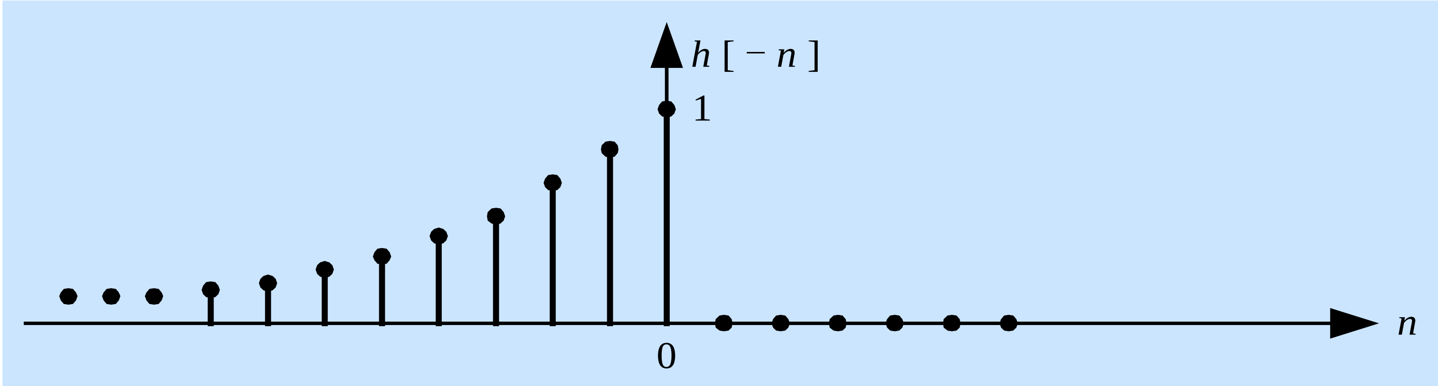
(4) 将$x[n]$与 $h[k-n]$ 相乘;

(5) 对乘积后的图形求和。

例1 已知$x[k] = u[k]$，$h[k] = a^k u[k]$，$0<a<1$，计算$y[k] = x[k]*h[k]$

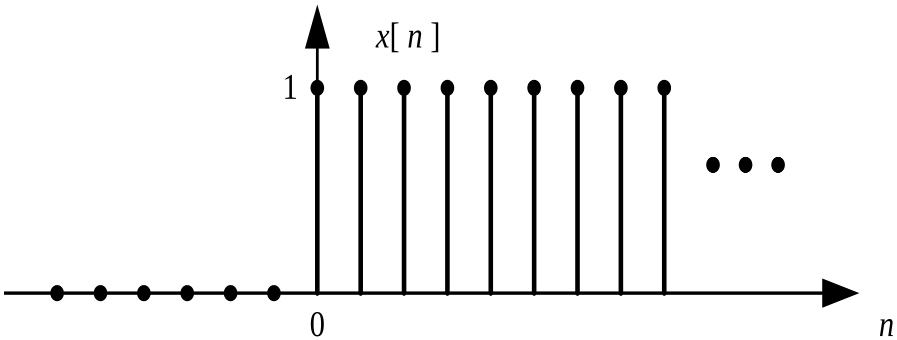


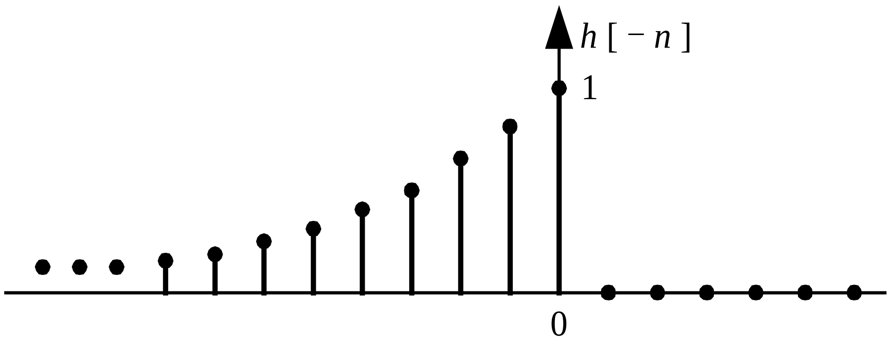




例1 已知$x[k] = u[k]$，$h[k] = a^k u[k]$，$0<a<1$，

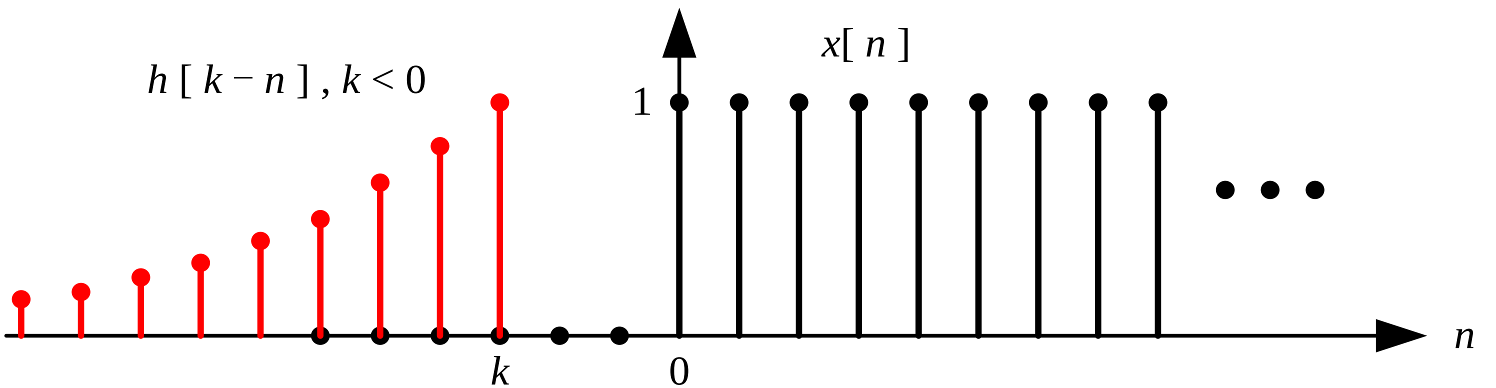
计算$y[k] = x[k]*h[k]$





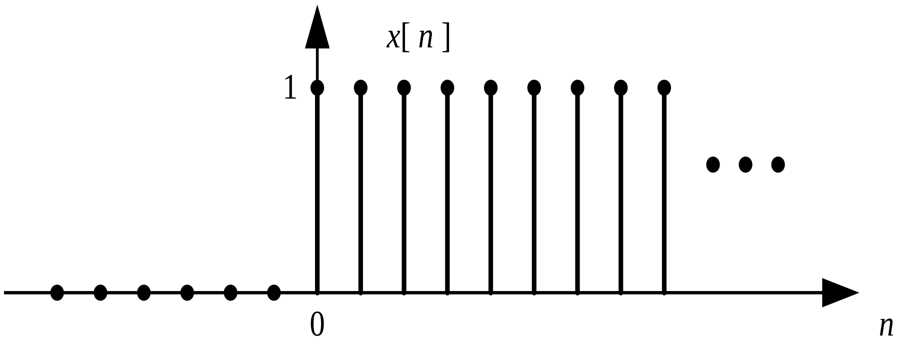
$k < 0$, $x[n]$与$h[k-n]$图形没有相遇

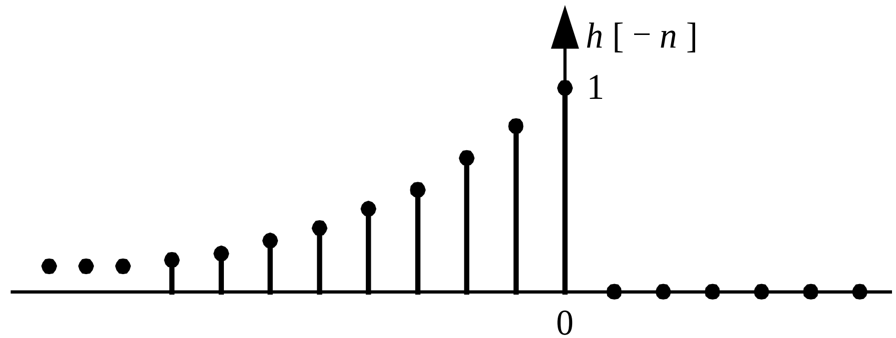
$y[k]=0$



例1 已知$x[k] = u[k]$，$h[k] = a^k u[k]$，$0<a<1$，

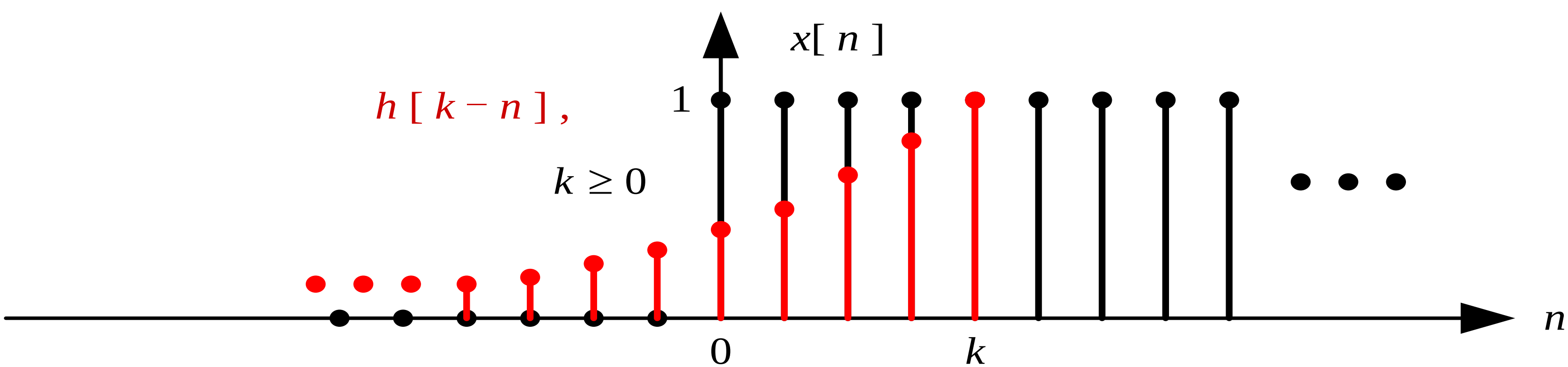
计算$y[k] = x[k]*h[k]$





$k \geq 0$, $x[n]$与$h[k-n]$图形相遇

$$y[k] = \sum_{n=0}^{k} a^{k-n}$$



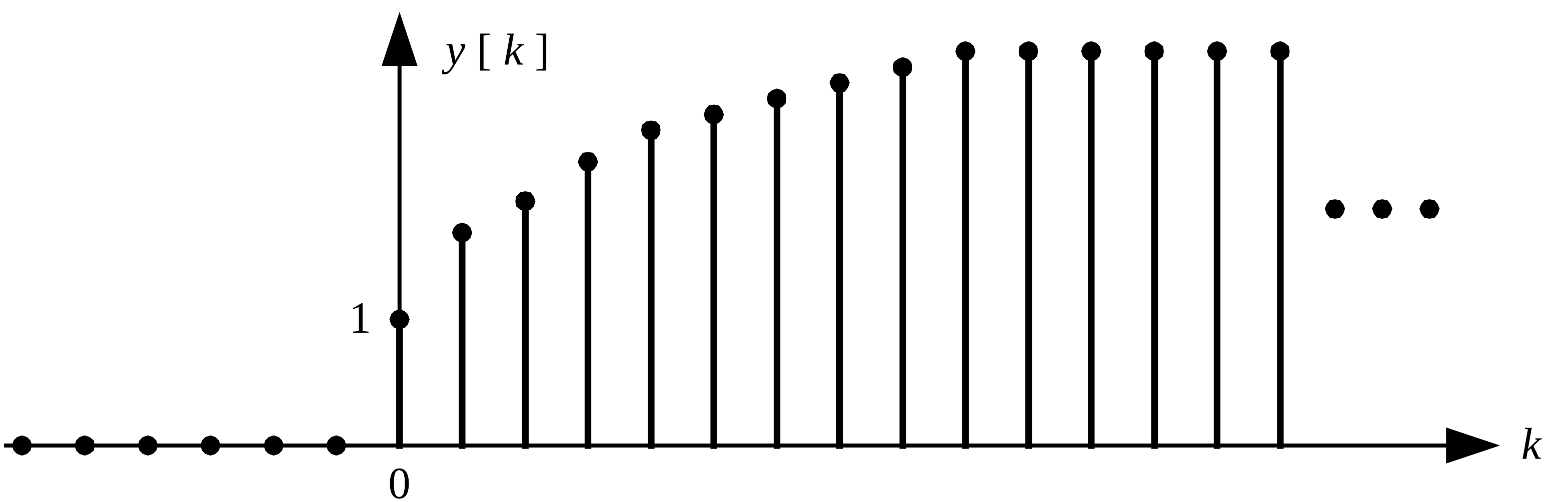
例1 已知$x[k] = u[k]$，$h[k] = a^k u[k]$，$0<a<1$，
计算$y[k] = x[k]*h[k]$

$k < 0$， $x[n]$与$h[k-n]$图形没有相遇

$y[k]=0$

$k \geq 0$，$x[n]$与$h[k-n]$图形相遇

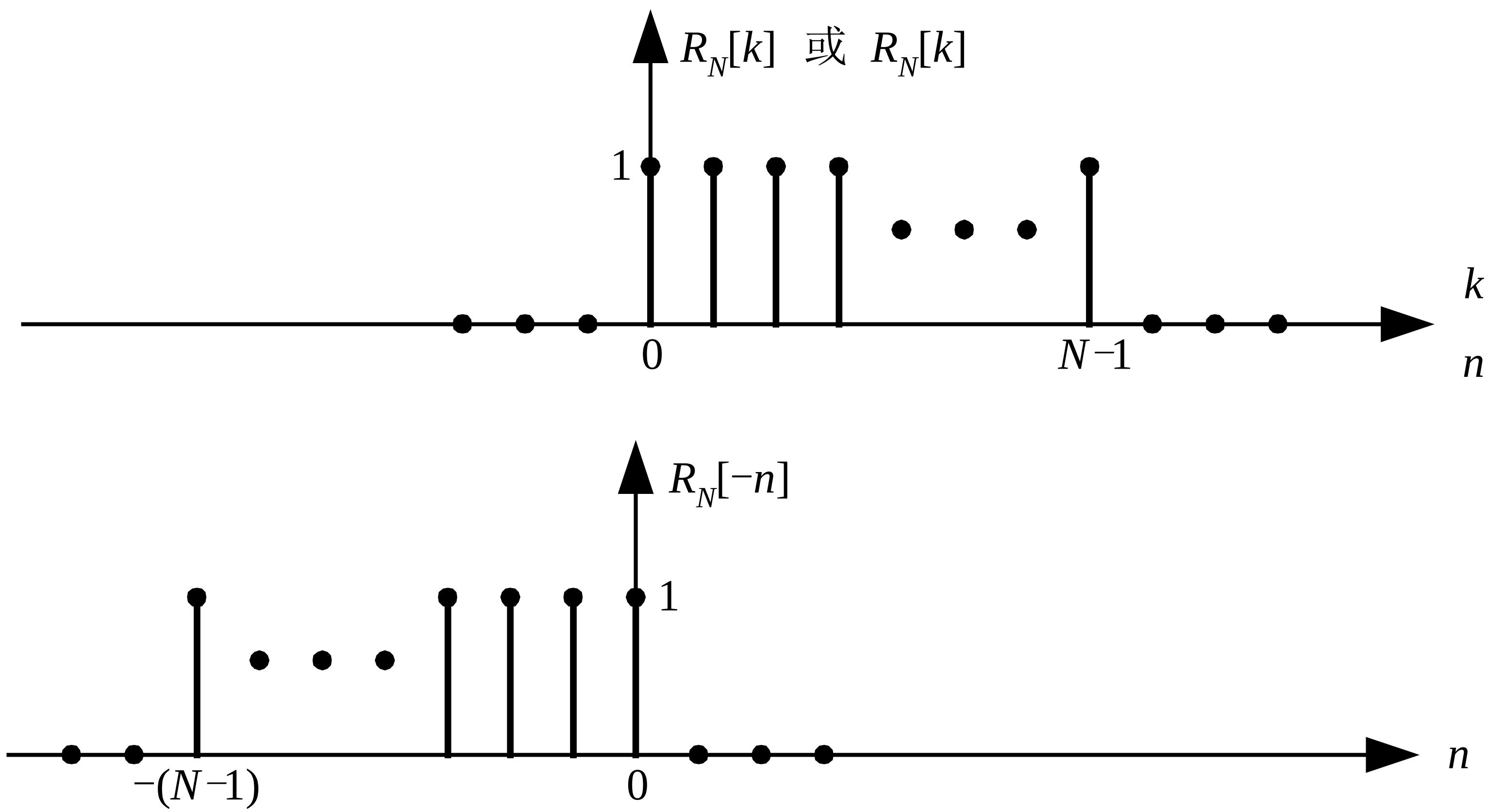
$$y[k] = \sum_{n=0}^{k} a^{k-n}$$



例2　计算

$$y[k] = R_N[k] * R_N[k]$$

$$R_N[k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



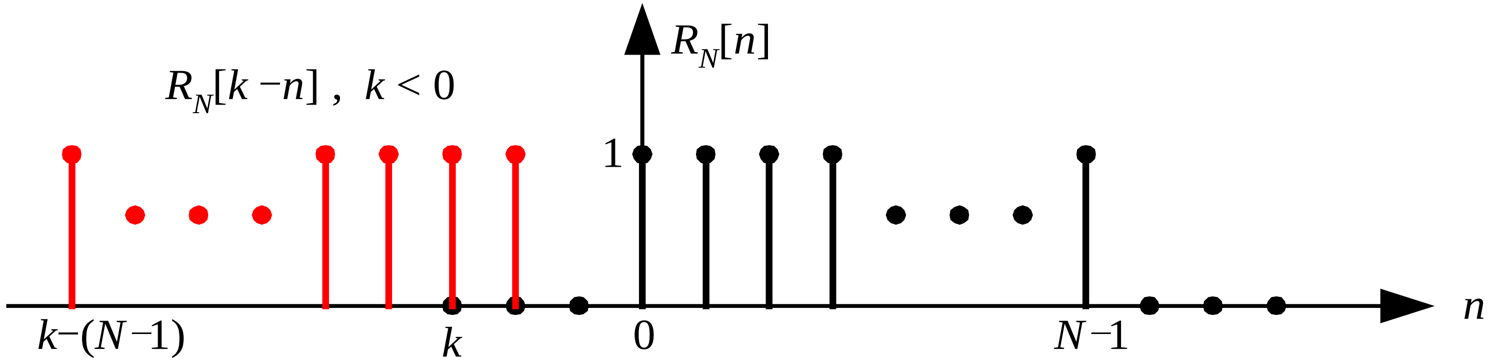
例2 计算

$$y[k] = R_N[k] * R_N[k]$$

$$R_N[k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

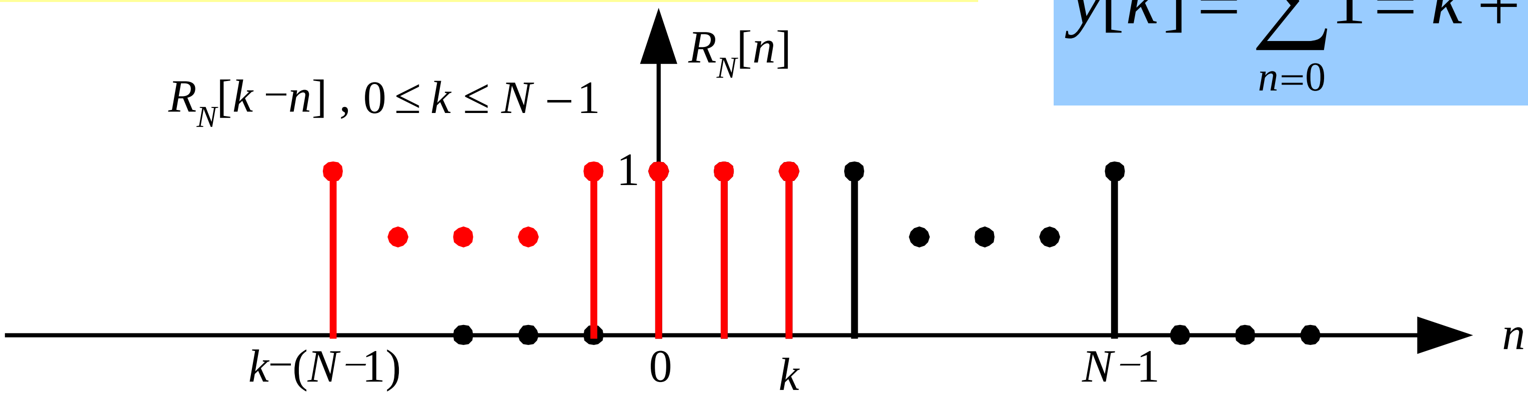
- $k<0$时, $R_N[n]$与$R_N[k-n]$图形没有相遇

$y[k]=0$



- $0 \le k \le N-1$时，重合区间为[0，k]

$$y[k] = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$$



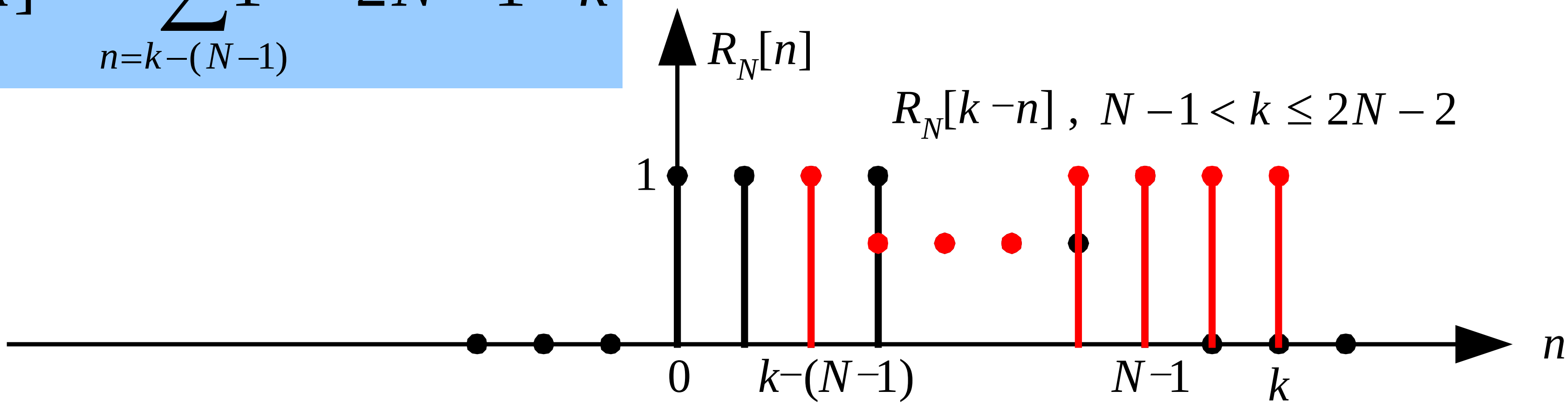
例2 计算

$$y[k] = R_N[k] * R_N[k]$$

$$R_N[k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $N-1 < k \le 2N-2$时，重合区间为$[k-(N-1)，N-1]$

$$y[k] = \sum_{n=k-(N-1)}^{N-1} 1 = 2N-1-k$$



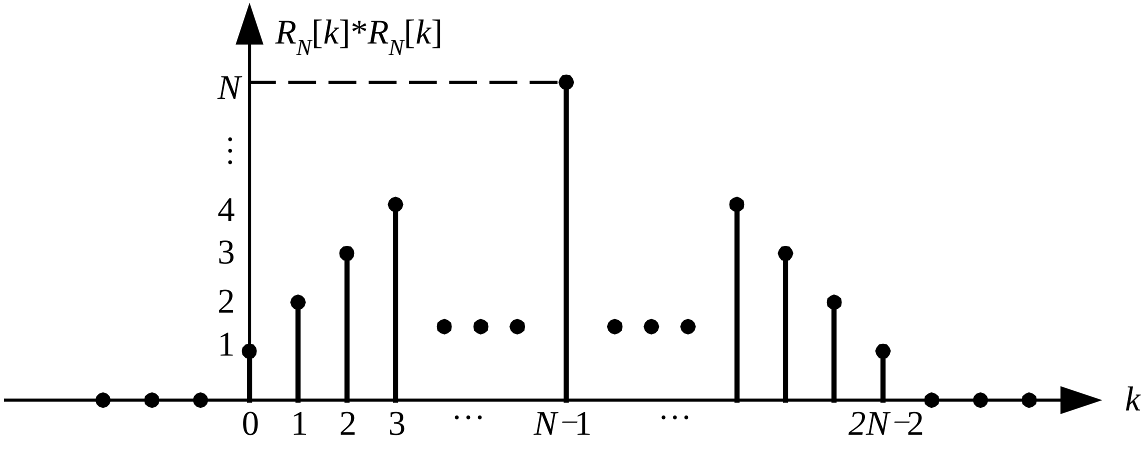
- $k > 2N-2$时，$R_N[n]$与$R_N[k-n]$图形不再相遇

$$y[k] = 0$$

例2 计算 $y[k] = R_N[k] * R_N[k]$

$$R_N[k]=\begin{cases}1 & 0\le k\le N-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

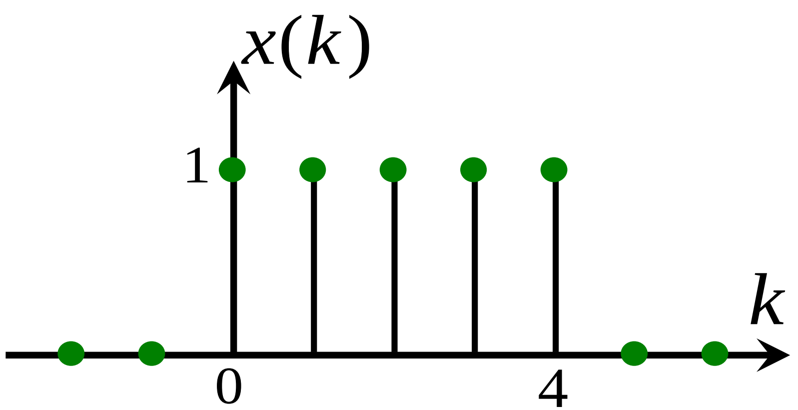
- $k<0$时, $R_N[n]$与$R_N[k-n]$图形没有相遇 $y[k]=0$
- $0\le k\le N-1$时，重合区间为$[0, k]$ $y[k]=\sum_{n=0}^{k}1=k+1$
- $N-1<k\le 2N-2$时，重合区间为$[k-(N-1), N-1]$ $y[k]=\sum_{n=k-(N-1)}^{N-1}1=2N-1-k$
- $k>2N-2$时，$R_N[n]$与$R_N[k-n]$图形不再相遇 $y[k]=0$

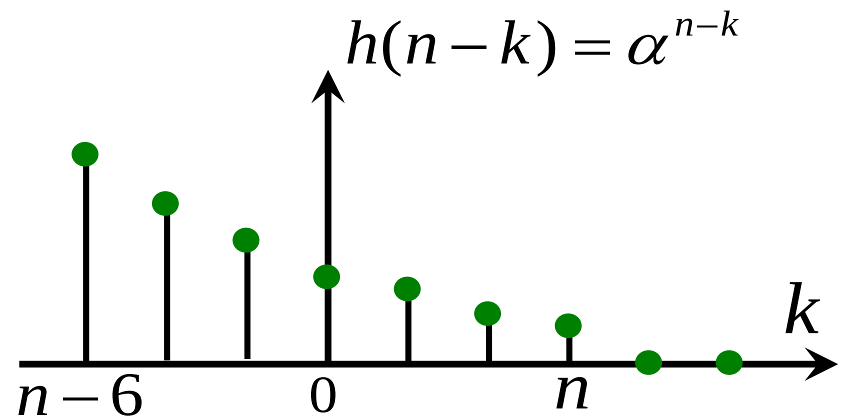


例3：

$$x(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}\alpha^n & \alpha>1,0\le n\le 6\\ 0 & otherwise\end{cases}$$





① $n<0$ 时，$y(n)=0$

② $0\le n\le 4$ 时，

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\sum_{k=0}^{n}\alpha^{-k}$$

$$=\alpha^{n}\cdot\frac{1-\alpha^{-(n+1)}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

③ $4\le n\le 6$ 时，

$$y(n)=\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\cdot\frac{1-\alpha^{-5}}{1-\alpha^{-1}}$$

$$=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

④ $6\le n\le 10$ 时，

$$y(n)=\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{n-k}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$

⑤ $n>10$ 时，$y(n)=0$

例4 计算 $x[k]=\alpha^k u[k]$ 与 $h[k]=\beta^k u[k]$ 的卷积和。

解:

$$\alpha^k u[k] * \beta^k u[k]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u[n] \cdot \beta^{k-n} u[k-n]$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{k} \alpha^n \cdot \beta^{k-n} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}}{\beta-\alpha} u[k] & \alpha \neq \beta \\ (k+1)a^k u[k] & \alpha = \beta \end{cases}$$

三. 卷积和的计算—列表法计算序列卷积和

设$x[k]$和$h[k]$都是因果序列，则有

$$y[k]=x[k]*h[k]=\sum_{n=0}^{k}x[n]h[k-n], k\geq 0$$

- 当$k=0$时，$y[0]=x[0]h[0]$
- 当$k=1$时，$y[1]=x[0]h[1]+x[1]h[0]$
- 当$k=2$时，$y[2]=x[0]h[2]+x[1]h[1]+x[2]h[0]$
- 当$k=3$时，$y[3]=x[0]h[3]+x[1]h[2]+x[2]h[1]+x[3]h[0]$

$$\vdots$$

以上求解过程可以归纳成列表法。

三. 卷积和的计算——列表法计算序列卷积和

将$h[k]$ 的值顺序排成一行，将$x[k]$的值顺序排成一列，行与列的交叉点记入相应$x[k]$与$h[k]$的乘积，

	$h[0]$	$h[1]$	$h[2]$	$h[3]$	$\cdots$
$x[0]$	$x[0]\,h[0]$	$x[0]\,h[1]$	$x[0]\,h[2]$	$x[0]\,h[3]$	$\cdots$
$x[1]$	$x[1]\,h[0]$	$x[1]\,h[1]$	$x[1]\,h[2]$	$x[1]\,h[3]$	$\cdots$
$x[2]$	$x[2]\,h[0]$	$x[2]\,h[1]$	$x[2]\,h[2]$	$x[2]\,h[3]$	$\cdots$
$x[3]$	$x[3]\,h[0]$	$x[3]\,h[1]$	$x[3]\,h[2]$	$x[3]\,h[3]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

对角斜线上各数值就是 $x[n]h[k-n]$的值。

对角斜线上各数值的和就是$y[k]$各项的值。

例5 计算 $x[k]=\{1, 2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2\}$ 与 $h[k]=\{1, \overset{\downarrow}{4}, 2, 3\}$ 的卷积和。

解:

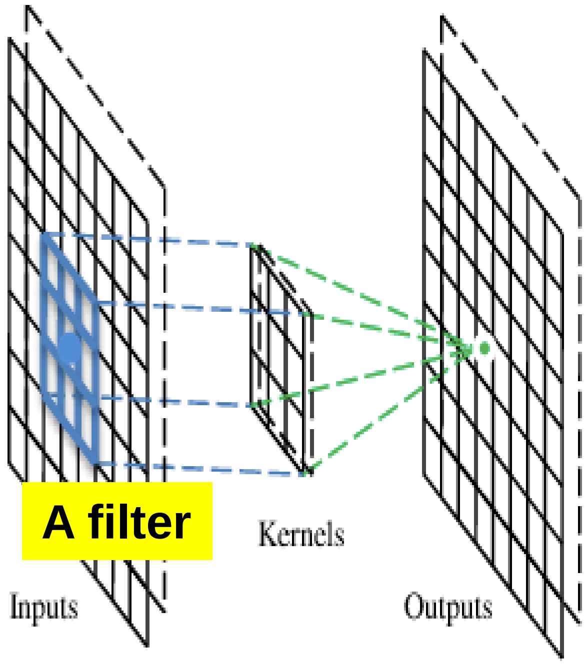
		$x[-2]$	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$
		1	2	0	3	2
$h[-1]$	1	1	2	0	3	2
$h[0]$	4	4	8	0	12	8
$h[1]$	2	2	4	0	6	4
$h[2]$	3	3	6	0	9	6

利用卷积和的起点坐标等于待卷积两序列起点之和，确定卷积和的原点。

$$y[k]=\{1, 6, 10, \overset{\downarrow}{10}, 20, 14, 13, 6\}$$

深度学习中的卷积

A CNN is a neural network with some convolutional layers (and some other layers). A convolutional layer has a number of filters that do convolutional operation.



Convolutional layer

These are the network parameters to be learned.

1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0

Input

1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	1

Filter 1

-1	1	-1
-1	1	-1
-1	1	-1

Filter 2

⋮ ⋮

Each filter detects a small pattern (3 x 3).

Convolution Operation

1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	1

Filter 1

stride=1

1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0

Input

Dot product → 3 -1

Convolution

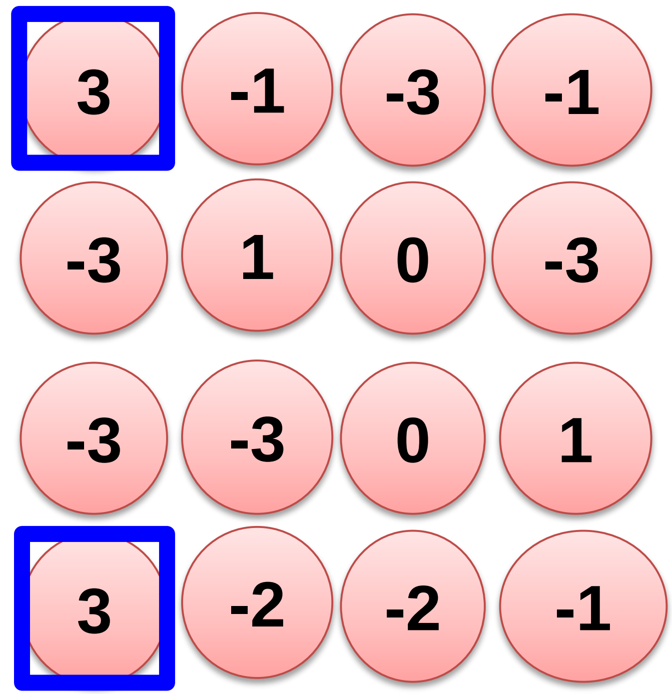
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	1

Filter 1

stride=1

1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0

Input



2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

（Continuous-Time LTI Systems:The convolution integral）

一. 用冲激信号表示连续时间信号

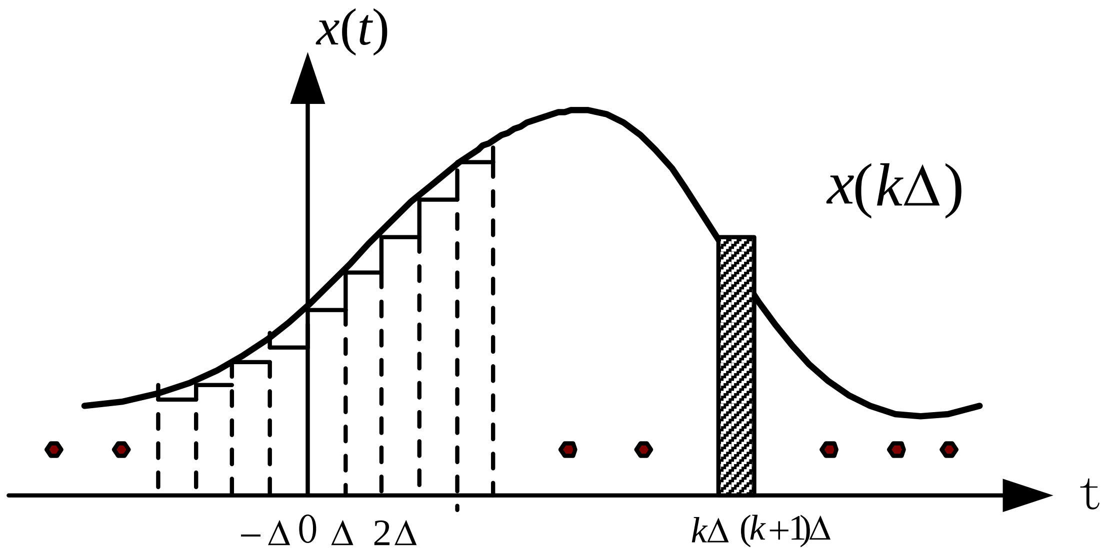
与离散时间信号分解的思想相一致，连续时间信号应该可以分解成一系列移位加权的**单位冲激信号的线性组合**。至少单位阶跃与单位冲激之间有这种关系：

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau$$

对一般信号 $x(t)$，可以将其分成很多Δ宽度的区段，用一个阶梯信号$x_{\Delta}(t)$ 近似表示 $x(t)$。当$\Delta\rightarrow 0$ 时，有

$$x_{\Delta}(t)\rightarrow x(t)$$

一 . 用冲激信号表示连续时间



连续信号表示为冲激信号的迭加

$$x(t) \approx \cdots + x(0)[u(t) - u(t - \Delta)] + x(\Delta)[u(t - \Delta) - u(t - 2\Delta)] + \cdots$$
$$+ x(k\Delta)[u(t - k\Delta) - u(t - k\Delta - \Delta)] + \cdots$$

一. 用冲激信号表示连续时间

$$x(t)=\cdots+x(0)\frac{[u(t)-u(t-\varDelta)]}{\varDelta}\varDelta+x(\varDelta)\frac{[u(t-\varDelta)-u(t-2\varDelta)]}{\varDelta}\varDelta+\cdots$$

$$+x(k\varDelta)\frac{[u(t-k\varDelta)-u(t-k\varDelta-\varDelta)]}{\varDelta}\varDelta+\cdots$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\varDelta)\frac{[u(t-k\varDelta)-u(t-k\varDelta-\varDelta)]}{\varDelta}\varDelta$$

当$\varDelta\to 0$时，$k\Delta\to\tau$，$\Delta\to \mathrm{d}\tau$，且

$$\frac{[u(t-k\Delta)-u(t-k\Delta-\Delta)]}{\Delta}\to\delta(t-\tau)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

信号分解$\delta(t)$为物理意义与实际应用

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

- **物理意义：**

　　不同的连续信号都可以分解为冲激信号，不同的信号只是它们的系数不同。

- **实际应用：**

　　当求解信号通过系统产生的响应时，只需求解冲激信号通过该系统产生的响应，然后利用线性时不变系统的特性，进行迭加和延时即可求得信号$x(t)$产生的响应。

二. 卷积积分（The convolution integral）

与离散时间系统的分析类似，如果一个线性系统对$\delta(t-\tau)$响应为 $h_\tau(t)$, 则该系统对 $x(t)$ 的响应可表示为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_\tau(t)d\tau$$

若系统是时不变的，即：若 $\delta(t)\rightarrow h(t)$，则有:

$\delta(t-\tau)\rightarrow h(t-\tau)$ 于是系统对任意输入$x(t)$的响应

可表示为：$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$

表明:LTI系统可以完全由它的单位冲激响应$h(t)$ 来表征。这种求得系统响应的运算关系称为卷积积分（The convolution integral）。

三. 卷积积分的计算

- 卷积的定义：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 卷积的计算步骤：

(1)将$x(t)$和$h(t)$中的自变量由t改为τ;

(2)把其中一个信号翻转得$h(-\tau)$，再平移t;

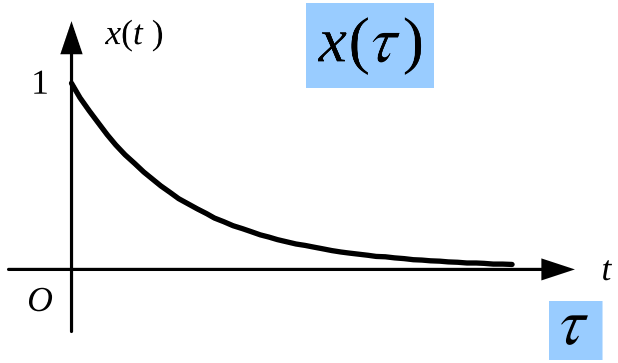
$$h(\tau)\xrightarrow{\text{翻转}}h(-\tau)\xrightarrow{\text{平移}t}h(-(\tau-t))=h(t-\tau)$$

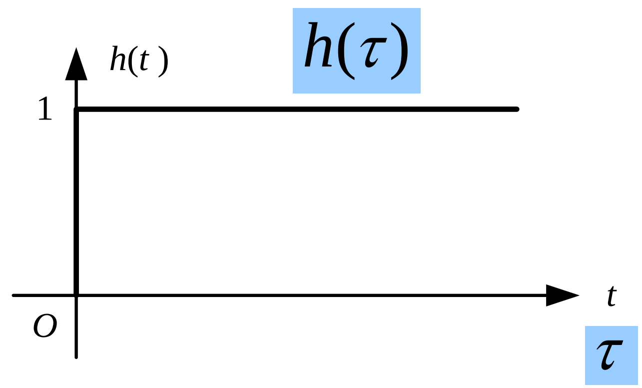
(3) 将$x(\tau)$ 与$h(\tau-t)$相乘；对乘积后信号的积分。

(4)不断改变平移量t，计算$x(\tau)\,h(t-\tau)$的积分。

[例] 计算 $x(t)*h(t),\ x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t),\ h(t)=u(t)$

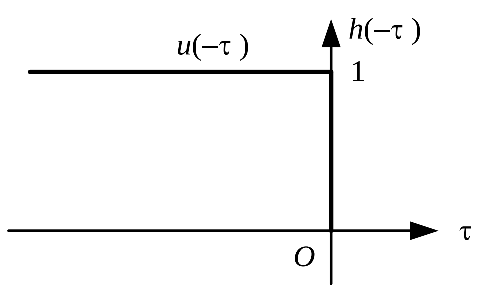
解： 将信号的自变量由 t 改为 τ





将 $h(\tau)$ 翻转得 $h(-\tau)$

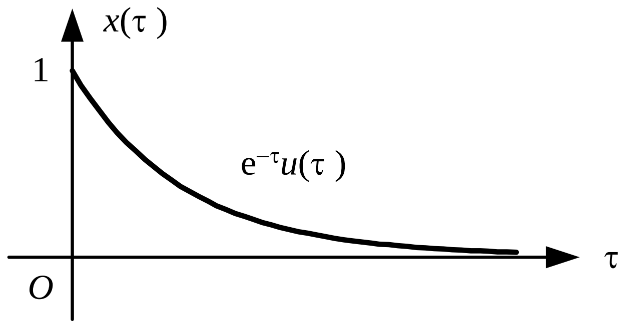
将 $h(-\tau)$ 平移 t。当 $t<0$ 时，$x(\tau)\,h(t-\tau)=0$

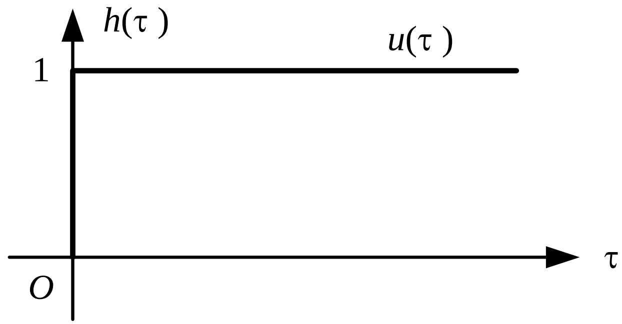


故 $x(t)*h(t)=0$

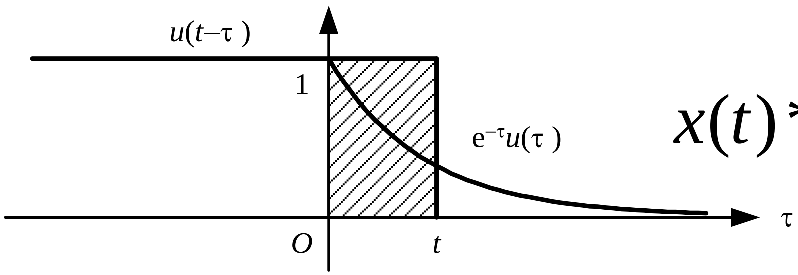
[例] 计算$x(t)*h(t), x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t), h(t)=u(t)$

解:

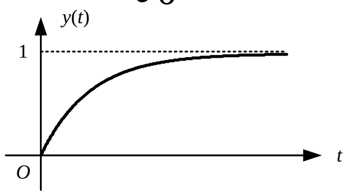




当$t>0$时， $x(\tau)h(t-\tau)=\mathrm{e}^{-\tau}[u(\tau)-u(\tau-t)]$



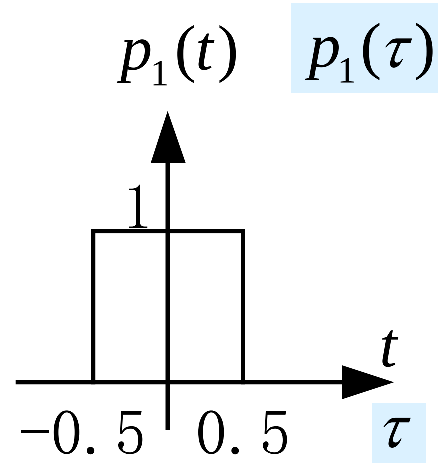
$$x(t)*h(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau=1-\mathrm{e}^{-t}$$



由此可得

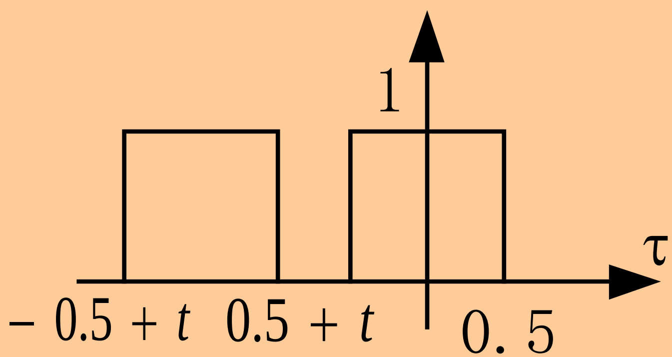
$$x(t)*h(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})u(t)$$

[例] 计算 $y(t) = p_1(t) * p_1(t)$。



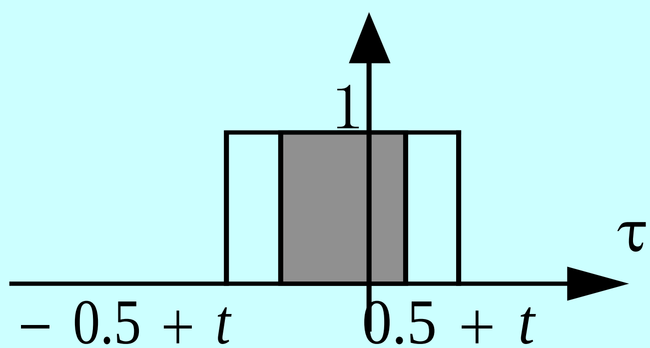
解： $-\infty < t < -1$

$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$



$-1 \le t < 0$

$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$



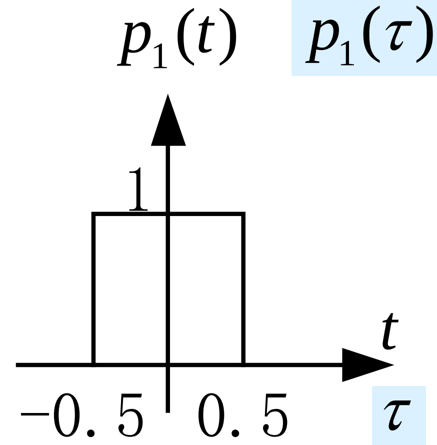
a) $-\infty < t \le -1$

$$y(t) = 0$$

b) $-1 < t \le 0$

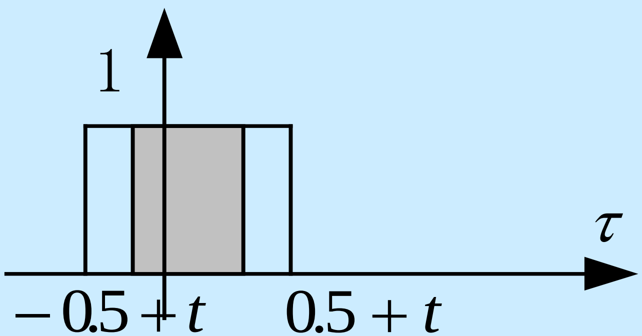
$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5+t} \mathrm{d}t = 1 + t$$

[例] 计算 $y(t) = p_1(t) * p_1(t)$。



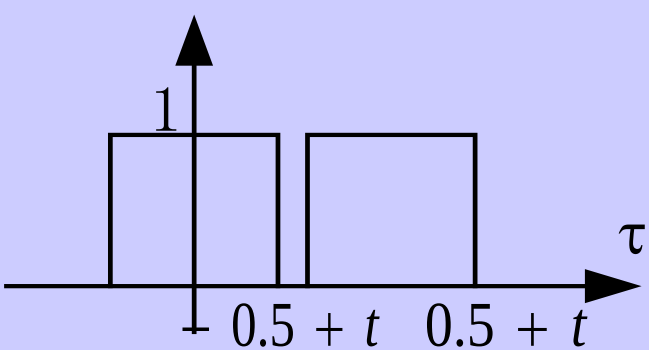
$0 < t \le 1$

$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$



$t > 1$

$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$



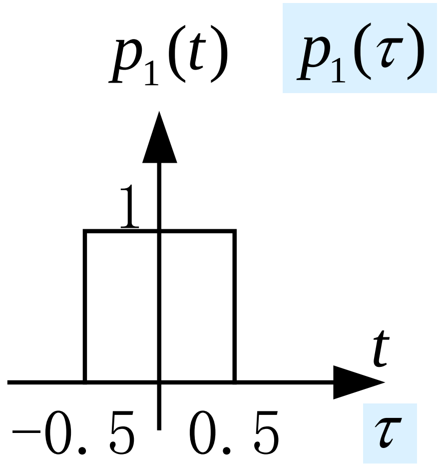
c) $0 < t \le 1$

$$y(t) = \int_{-0.5+t}^{0.5} \mathrm{d}t = 1 - t$$

d) $t > 1$

$$y(t) = 0$$

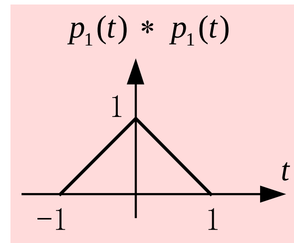
[例] 计算 $y(t) = p_1(t) * p_1(t)$。



a) $-\infty < t \le -1$ $y(t) = 0$

b) $-1 < t \le 0$

$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5+t} \mathrm{d}t = 1 + t$$



c) $0 < t \le 1$

$$y(t) = \int_{-0.5+t}^{0.5} \mathrm{d}t = 1 - t$$

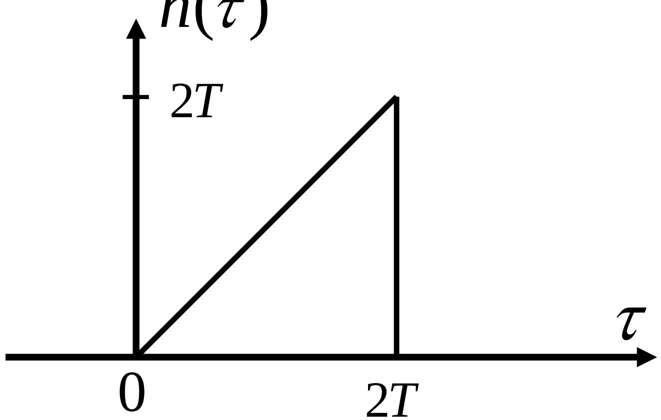
d) $t > 1$ $y(t) = 0$

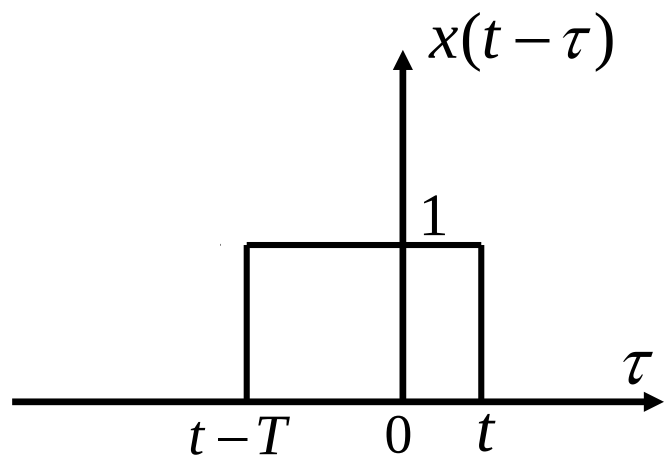
例：

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & otherwise\end{cases}\qquad h(t)=\begin{cases}t & 0<t<2T\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$





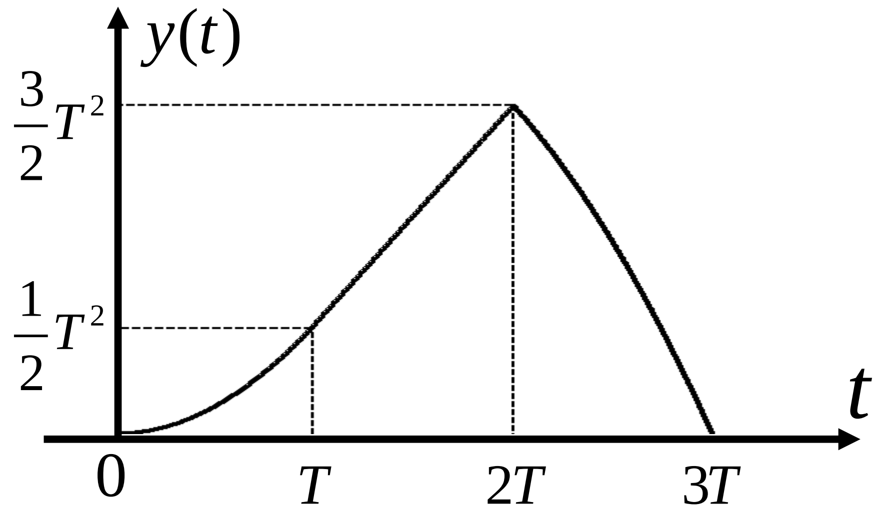
① 当 $t<0$ 时， $y(t)=0$

② 当 $0<t<T$ 时， $y(t)=\int_0^t \tau d\tau=\frac{1}{2}t^2$

③ 当 $T<t<2T$ 时， $y(t)=\int_{t-T}^{t} \tau d\tau=Tt-\frac{1}{2}T^2$

④ 当 $2T<t<3T$ 时， $y(t)=\int_{t-T}^{2T} \tau d\tau=2T^2-\frac{1}{2}(t-T)^2$

⑤ 当 $t>3T$ 时， $y(t)=0$



2.3 线性时不变系统的性质

（ Properties of Linear Time-Invariant Systems ）

一. 卷积积分与卷积和的性质

1. 交换律：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

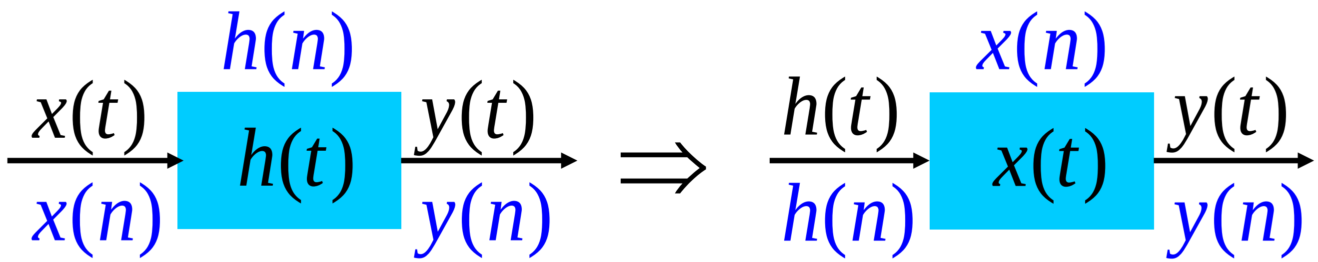
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-k)h(k)=h(n)*x(n)$$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x[n-r]h[r]=h[n]*x[n]$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=h(t)*x(t)$$

1. 交换律：



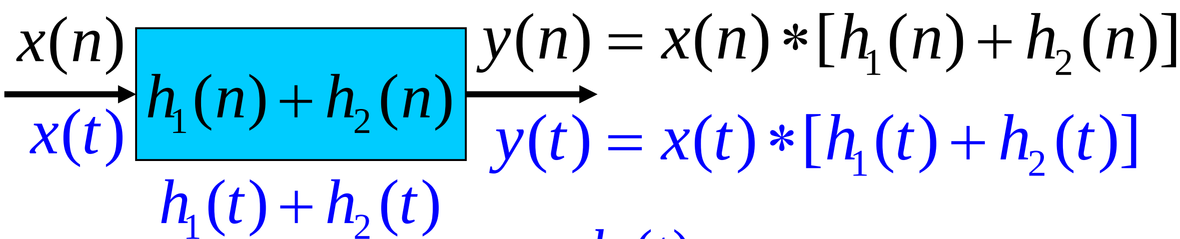
结论：

一个单位冲激响应是$h(t)$的LTI系统对输入信号$x(t)$所产生的响应，与一个单位冲激响应是$x(t)$的LTI系统对输入信号$h(t)$所产生的响应相同。

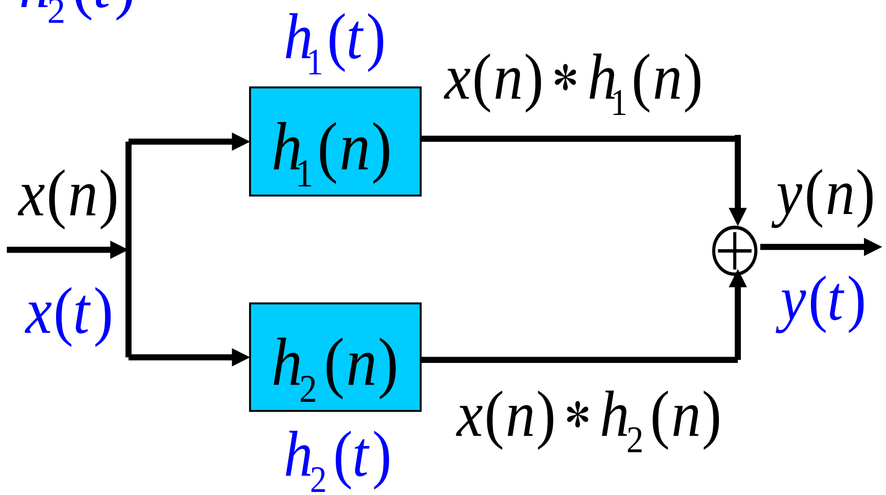
2. 分配律：

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$



$\Rightarrow$

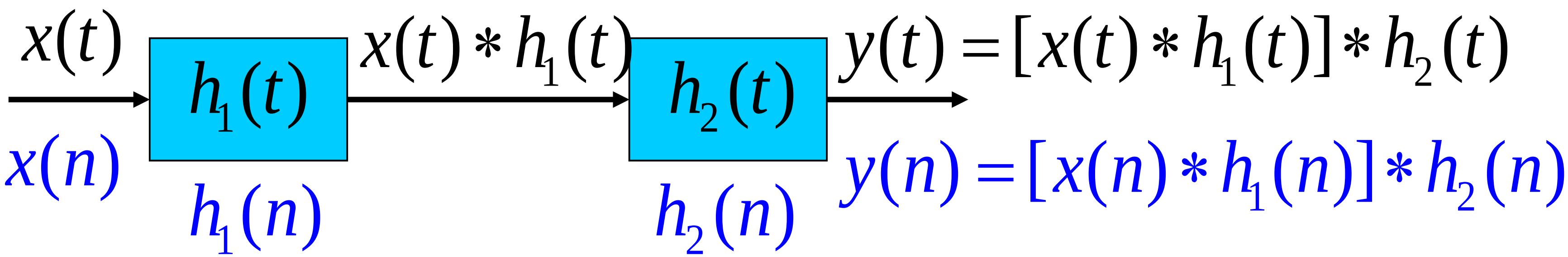


结论： 两个LTI系统并联，其总的单位脉冲(冲激)响应等于各子系统单位脉冲(冲激)响应之和。

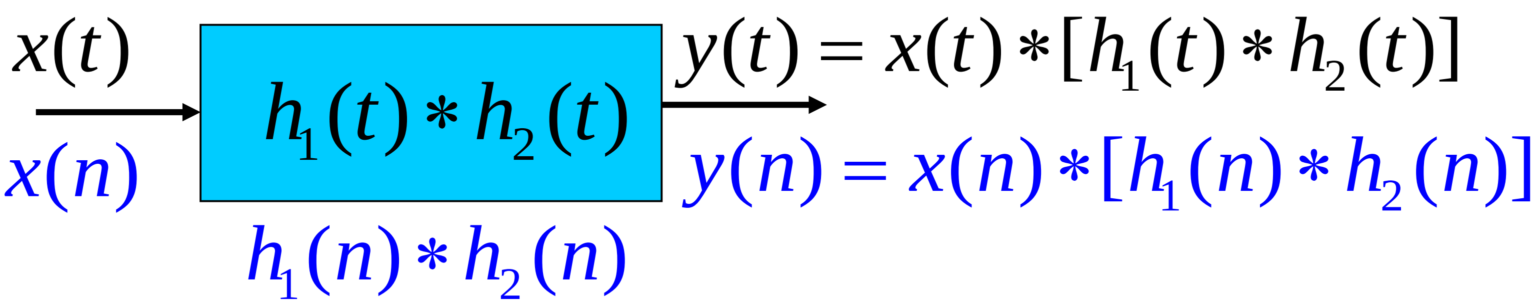
3. 结合律:

$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$



$$\Rightarrow$$



3. 结合律:

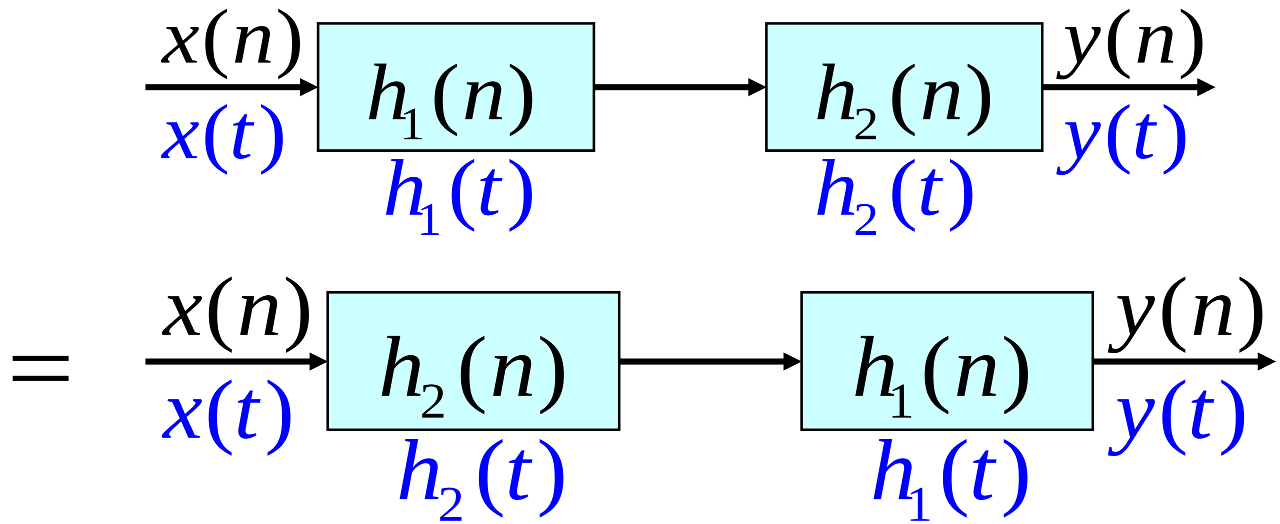
结论：

- 两个LTI系统级联时，系统总的单位冲激(脉冲)响应等于各子系统单位冲激(脉冲)响应的卷积。
- 由于卷积运算满足交换律，因此，系统级联的先后次序可以调换。

3. 结合律:

$$x(n)*h_1(n)*h_2(n)=x(n)*h_2(n)*h_1(n)$$

$$x(t)*h_1(t)*h_2(t)=x(t)*h_2(t)*h_1(t)$$



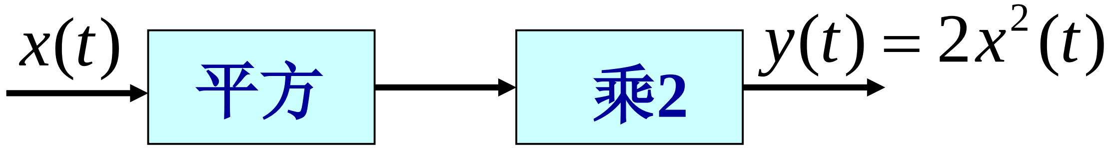
产生以上结论的前提条件：

①系统必须是LTI系统；

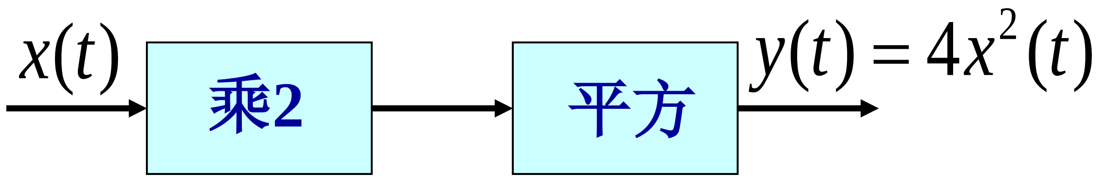
②所有涉及到的卷积运算必须收敛。

3. 结合律:

如：

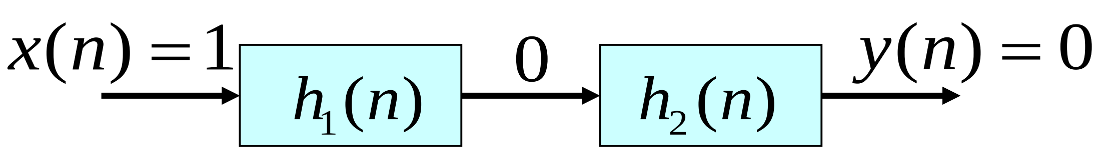


若交换级联次序，即成为：



显然与原来是不等价的。因为系统不是LTI系统。

又如：若 $h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-1),\quad h_2(n)=u(n)$ **，虽然系统都是LTI系统。当** $x(n)=1$ **时，如果交换级联次序，则由于** $x(n)*u(n)$ **不收敛，因而也是不允许的。**



4. 卷积运算还有如下性质：

卷积积分满足微分、积分及时移特性：

①若 $x(t) * h(t) = y(t)$**，则**

$$x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t) = y'(t)$$

$$[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau] * h(t) = x(t) * [\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau] = [\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau]$$

②若 $x(t) * h(t) = y(t)$**，则**

$$x(t-t_0) * h(t) = x(t) * h(t-t_0) = y(t-t_0)$$

5. 卷积运算还有如下性质：

卷积和满足差分、求和及时移特性：

① 若 $x(n) * h(n) = y(n)$，则

$$[x(n)-x(n-1)] * h(n) = y(n)-y(n-1)$$

$$[\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)] * h(n) = x(n) * [\sum_{k=-\infty}^{n} h(k)] = \sum_{k=-\infty}^{n} y(k)$$

② 若 $x(n) * h(n) = y(n)$，则

$$x(n-n_0) * h(n) = x(n) * h(n-n_0) = y(n-n_0)$$

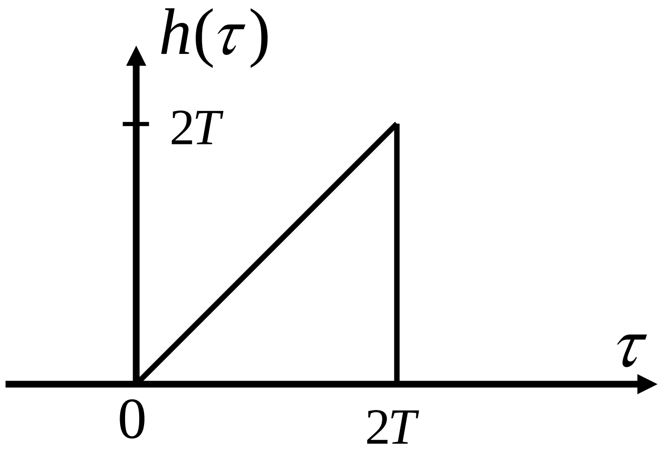
恰当地利用卷积的性质可以简化卷积的计算：

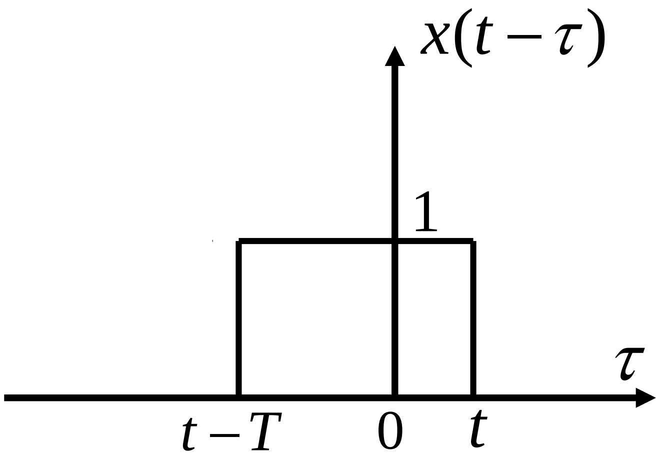
例：

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & otherwise\end{cases}\qquad h(t)=\begin{cases}t & 0<t<2T\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$





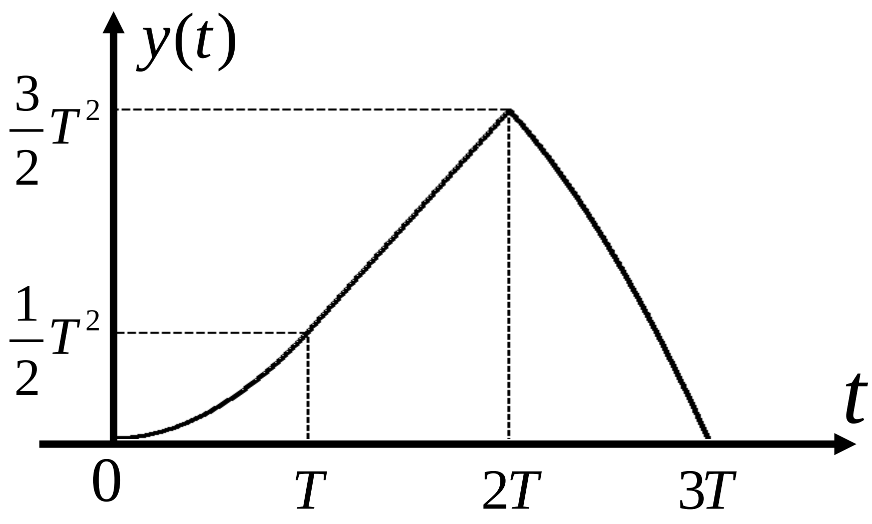
① 当 $t<0$ 时， $y(t)=0$

② 当 $0<t<T$ 时， $y(t)=\int_0^t \tau d\tau=\frac{1}{2}t^2$

③ 当 $T<t<2T$ 时， $y(t)=\int_{t-T}^t \tau d\tau=Tt-\frac{1}{2}T^2$

④ 当 $2T<t<3T$ 时， $y(t)=\int_{t-T}^{2T} \tau d\tau=2T^2-\frac{1}{2}(t-T)^2$

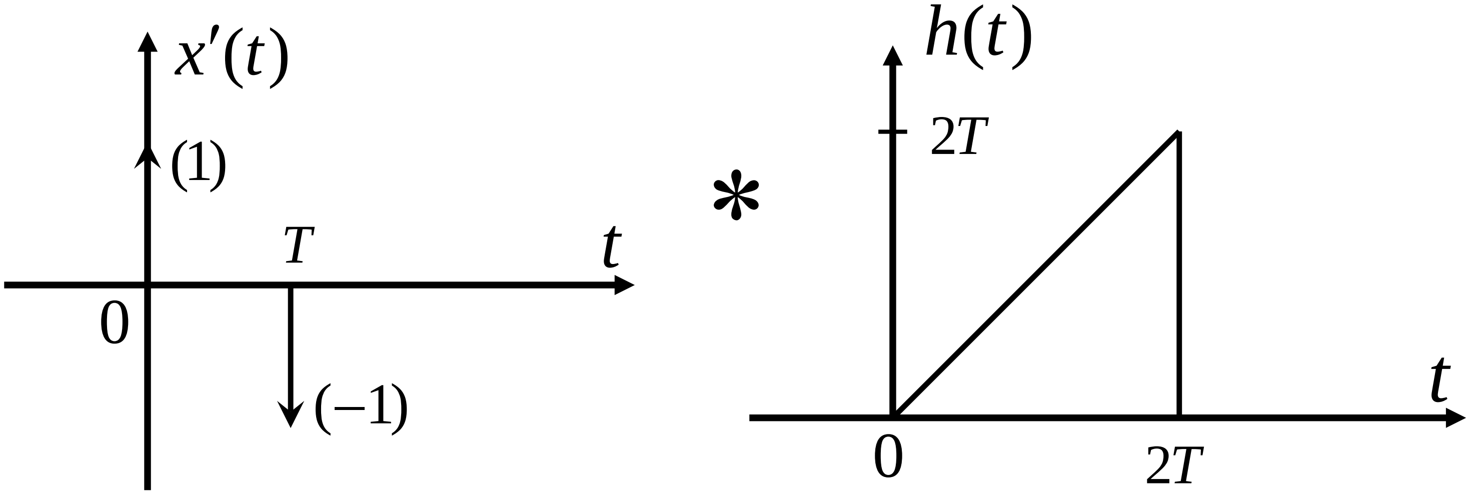
⑤ 当 $t>3T$ 时， $y(t)=0$



4. 卷积运算还有如下性质：

例如：2.2 中的例2

将$x(t)$ **微分一次有:** $x'(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$

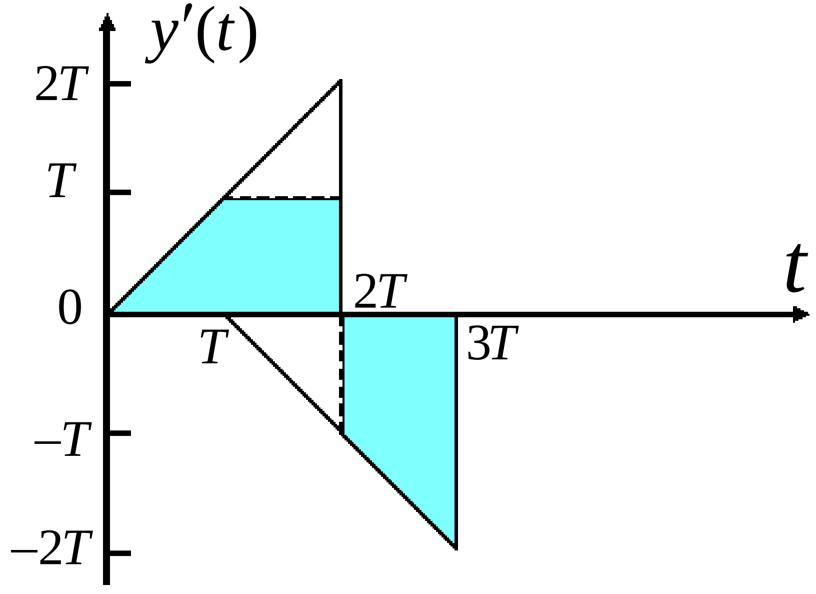


根据微分特性有:

$$y'(t)=x'(t)*h(t)=h(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$

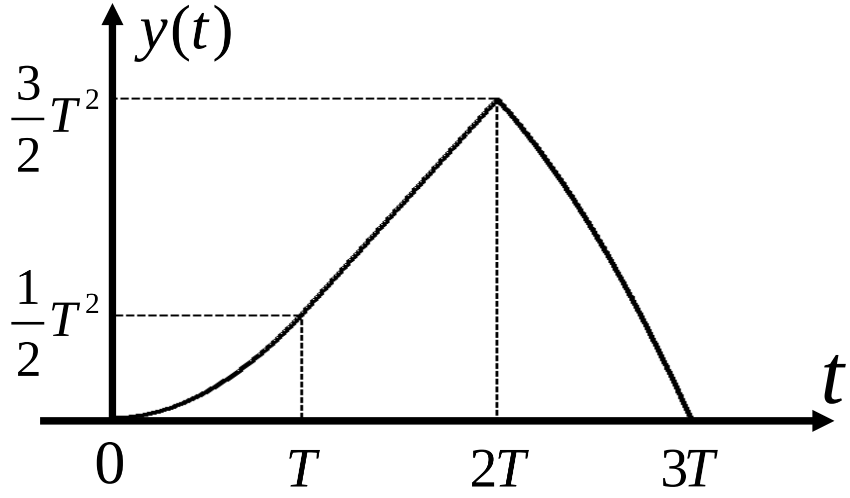
$$=h(t)-h(t-T)$$

4. 卷积运算还有如下性质：



利用积分特性即可得:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} y'(\tau)d\tau$$



二.LTI系统的性质

LTI 系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征，因而其特性：

- <u>记忆性</u>
- <u>可逆性</u>
- <u>因果性</u>
- <u>稳定性</u>

都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。

1. 记忆性：

根据 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$，如果系统是**无记忆的**，则在任何时刻 n，$y(n)$ 都只能和 n 时刻的输入有关，和式中只能有 $k=n$ 时的一项为非零，因此必须有：

$$h(n-k)=0,\quad k\neq n \qquad \text{即：} \boxed{h(n)=0,\quad n\neq 0}$$

所以，**无记忆系统**的单位脉冲/冲激响应为：

$$\boxed{h(n)=k\delta(n) \qquad h(t)=k\delta(t)}$$

此时，$x(n)*h(n)=kx(n) \quad x(t)*h(t)=kx(t)$

当 $k=1$ 时系统是**恒等系统**。

如果LTI系统的单位冲激/脉冲响应不满足上述要求，则系统是**记忆的**。

2. 可逆性：

如果LTI系统是可逆的，一定存在一个逆系统，且逆系统也是LTI系统，它们级联起来构成一个恒等系统。

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow x(t)$$

因此有： $h(t) * g(t) = \delta(t)$ $\quad h(n) * g(n) = \delta(n)$

例如：延时器是可逆的LTI系统，$h(t) = \delta(t - t_0)$，其逆系统是 $g(t) = \delta(t + t_0)$，显然有：$h(t) * g(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$

累加器是可逆的LTI系统，其 $h(n) = u(n)$，其逆系统是 $g(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$，显然也有：

$$h(n) * g(n) = u(n) * [\delta(n) - \delta(n-1)]$$
$$= u(n) - u(n-1) = \delta(n)$$

但差分器是不可逆的。

3. 因果性：

由 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$，当LTI系统是因果系统时，在任何时刻 n， $y(n)$ 都只能取决于n时刻及其以前的输入，即和式中所有 $k>n$ 的项都必须为零，即：

$$h(n-k)=0, \qquad k>n$$

或: $\boxed{h(n)=0, \qquad n<0}$

对连续时间系统有: $\boxed{h(t)=0, \qquad t<0}$

这是**LTI系统具有因果性的充分必要条件**。

4. 稳定性：

根据稳定性的定义，由 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$，

若 $x(n)$ 有界，则 $|x(n-k)| \le A$;若系统稳定，则要求 $y(n)$ 必有界，由

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \le A\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

可知，必须有: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

对连续时间系统，相应有: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

这是LTI系统稳定的充分必要条件。

5. LTI系统的单位阶跃响应：

在工程实际中，也常用单位阶跃响应来描述LTI系统。单位阶跃响应就是系统对 $u(t)$或$u(n)$所产生的响应。因此有:

$$s(t) = u(t) * h(t) \qquad s(n) = u(n) * h(n)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \qquad h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} h(k) \qquad h(n) = s(n) - s(n-1)$$

LTI系统的特性也可以用它的单位阶跃响应来描述。

2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

(Causal LTI Systems Described by Differential and Difference Equations)

在工程实际中有相当普遍的一类系统，其数学模型可以用线性常系数微分方程或线性常系数差分方程来描述。分析这类LTI系统，就是要求解线性常系数微分方程或差分方程。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad a_k, b_k \text{ 均为常数}$$

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = x(t) \qquad (2.95)$$

经典法求解

- 齐次解（自由响应）$r_h(t)$

上式右边为0

齐次方程 $$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)=0$$

：$r(t)=Ae^{\alpha t}$

特征方程 $$C_0\alpha^n+C_1\alpha^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\alpha+C_n=0$$

：求解

特征根： $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$

齐次解： $$r_h(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\alpha_i t}$$

待定系数

特征根

无重根的情况

例：求微分方程的齐次解

$$(1)\ \frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

特征方程：$\alpha^2+7\alpha+10=0$

特征根：$\alpha_1=-2,\alpha_2=-5$

齐次解：$r_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}$

例：求微分方程的齐次解

$$(2)\ \frac{d^3}{dt^3}i(t)+7\frac{d^2}{dt^2}i(t)+16\frac{d}{dt}i(t)+12i(t)=e(t)$$

特征方程： $\alpha^3+7\alpha^2+16\alpha+12=0$

特征根： $\alpha_{1,2}=-2,\alpha_3=-3$

齐次解： $r_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2te^{-2t}+A_3e^{-3t}$

- 特解（强迫响应）

e(t)带入方程右端 $\xrightarrow{\text{化简}}$ 自由项 $\xrightarrow{\text{观察}}$ 选特解函数 $\xrightarrow{\text{代入}}$ 求待定系数

自由项	响应函数$r(t)$的特解
E(常数)	B(常数)
t^p	$B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}$
$e^{\alpha t}$	$Be^{\alpha t}$
$\cos(\omega t)$	$B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)$
$\sin(\omega t)$	
$t^p e^{\alpha t}\sin(\omega t)$	$\left(B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}\right)e^{\alpha t}\cos(\omega t)$
$t^p e^{\alpha t}\cos(\omega t)$	$+\left(D_1 t^p + D_2 t^{p-1} + \cdots + D_p t + D_{p+1}\right)e^{\alpha t}\sin(\omega t)$

例：给定微分方程求特解

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+3r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$$

$$(1)e(t)=t^2;(2)e(t)=e^t$$

（1）带入求自由项 t^2+2t

特解函数 $r_p(t)=B_1t^2+B_2t+B_3$

带入原方程：$3B_1t^2+(4B_1+3B_2)t+(2B_1+2B_2+3B_3)=t^2+2t$

左右两边幂次相等：$B_1=\frac{1}{3},B_2=\frac{2}{9},B_3=-\frac{10}{27}$

（2）带入求自由项 $2e^t$

特解函数 $r_p(t)=Be^t$

带入原方程：$Be^t+2Be^t+3Be^t=2e^t\Rightarrow B=\frac{1}{3}$

- 完全解＝齐次解＋特解

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\alpha_i t}+r_p(t)$$

由初始条件确定

例：给定微分方程求完全解

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

$$e(t)=4$$

特征方程：$\alpha^2+7\alpha+10=0$

特征根：$\alpha_1=-2,\alpha_2=-5$

齐次解：$r_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}$

带入求自由项: 16

特解函数: $r_p(t)=B$

特解: $r_p(t)=\frac{8}{5}$

完全解：$r(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}+\frac{8}{5}$

例：描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$$

求当 $f(t)=2e^{-t}$，$t\geq 0$；$y(0)=2$，$y'(0)=-1$时的解。

解：① 根据特征方程求该微分方程的齐次解；

特征方程为：$\lambda^2+5\lambda+6=0$

$\lambda_1=-2$， $\lambda_2=-3$。

齐次解：$y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

② 由f(t)求该微分方程的特解;

当$f(t) = 2e^{-t}$时，设特解为：

$$y_p(t) = Pe^{-t}$$

代入微分方程得：

$$Pe^{-t} + 5(-Pe^{-t}) + 6Pe^{-t} = 2e^{-t}$$

解得：$P = 1$

特解：$y_p(t) = e^{-t}$

③ 全解=齐次解+特解。

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + e^{-t}$$

待定常数C_1, C_2由初始条件确定。

y(0)＝2，y’(0)＝-1

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ y'(0) = -2C_1 - 3C_2 - 1 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

全解：$y(t) = = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t} \quad t \geqslant 0$

二、关于0_+与0_-初始值

假定激励在$t=0$时刻接入，我们可以将初始值分解为两部分：0_-时刻的初值及0_+时刻的初值。

0-时刻的初值是系统激励尚未接入的前一瞬时，由系统的历史状况决定的。——起始条件（初始状态）

0+时刻的初值是激励接入到系统后的一瞬间系统的初值，它包含激励对其所起的作用。——初始条件

通常，$t=0_-$时刻的值比较容易求得。则$t=0_+$时刻的初值取决于0_-时刻的初值以及激励的形式。

例：描述某系统的微分方程为

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$

已知$y(0-)=2$，$y'(0-)= 0$，$f(t)=u(t)$，求$y(0_+)$和$y'(0_+)$。

解：将输入$f(t)=u(t)$代入上述微分方程得

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6u(t)$　　　（1）　利用系数匹配法分析：上式对于$t=0-$也成立，在$0-<t<0_+$ 区间等号两端$\delta(t)$项的系数应相等。

由于等号右端为$2\delta(t)$，故$y''(t)$应包含冲激函数，从而$y'(t)$在$t= 0$处将发生跃变，即$y'(0+)\neq y'(0-)$。

但$y'(t)$不含冲激函数，否则$y''(t)$将含有$\delta'(t)$项。由于$y'(t)$中不含$\delta(t)$，故$y(t)$在$t=0$处是连续的。

故　$y(0+) = y(0-) = 2$

对式(1)两端积分有

$$\int_{0-}^{0+} y''(t)dt + 3\int_{0-}^{0+} y'(t)dt + 2\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 2\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt + 6\int_{0-}^{0+} \upsilon(t)dt$$

由于积分在无穷小区间[0-，0_+]进行的，且y(t)在t=0连续故

$$\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 0, \int_{0-}^{0+} \upsilon(t)dt = 0$$

于是由上式得

$[y'(0_+) - y'(0-)] + 3[y(0_+) - y(0-)]=2$

考虑 y(0+) = y(0-)=2，所以

$y'(0_+) - y'(0-) = 2$ ， $y'(0+) = y'(0-) + 2 =2$

由上可见，**当微分方程等号右端含有冲激函数（及其各阶导数）时，响应y(t)及其各阶导数中，有些在t=0处发生跃变。但如果右端不含时，则不会跃变。**

经典法不足之处

- 若微分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

零输入响应$r_{zi}(t)$

没有外加激励信号的作用，只由起始状态（起始时刻系统储能）所产生的响应。

零状态响应$r_{zs}(t)$

不考虑起始时刻系统储能的作用（起始状态等于零），由系统的外加激励信号产生的响应。

零输入响应与零状态响应

经典法求解系统的完全响应可分为：

完全响应=自由响应+强迫响应

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

系统的完全响应也可分为：

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

三、零输入响应和零状态响应

求解LTI系统的响应时，可以分别求解其零输入响应和零状态响应，全响应即为两者之和。

不管是求解零输入响应$y_x(t)$还是零状态响应$y_f(t)$，都要确定系统的初始条件，以求得微分方程的待定系数。

通常我们已知系统的初始状态为$y(0_-)$及其各阶导数$y^{(j)}(0_-)$。如何由$y^{(j)}(0_-)$求出零输入响应的初值$y_x^{(j)}(0_+)$和零状态响应的初值$y_f^{(j)}(0_+)$？

$$y^{(j)}(t) = y_x^{(j)}(t) + y_f^{(j)}(t)$$

$t=0_-$即$t=0_+$时刻上式同样成立。

$$y^{(j)}(0_-) = y_x^{(j)}(0_-) + y_f^{(j)}(0_-)$$

$$y^{(j)}(0_+) = y_x^{(j)}(0_+) + y_f^{(j)}(0_+)$$

对于零输入响应来说：

$$y_x^{(j)}(0_+) = y_x^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-) - y_f^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-)$$

对于零状态响应来说：

$$y_f^{(j)}(0_-) = 0$$

$\mathbf{y_f^{(j)}(0_+)}$可以用微分方程两端奇异项系数平衡的方法求得。

例：描述某系统的微分方程为

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=0$，$f(t)=u(t)$。求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）**零输入响应$y_x(t)$** 激励为0，故$y_x(t)$满足

$y_x''(t) + 3y_x'(t) + 2y_x(t) = 0$

$y_x(0_+)= y_x(0_-)= y(0_-)=2$

$y_x'(0_+)= y_x'(0_-)= y'(0_-)=0$

该齐次方程的**特征根**为–1，–2，故 $y_x(t) = C_{x1}e^{-t} + C_{x2}e^{-2t}$

代入初始值并解得系数为$C_{x1}=4$，$C_{x2}=-2$，代入得

$y_x(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}, t > 0$

（2）零状态响应$y_f(t)$ 满足

$y_f''(t) + 3y_f'(t) + 2y_f(t) = 2\delta(t) + 6u(t)$ 并有

$y_f(0-) = y_f'(0-) = 0$

由于上式等号右端含有$\delta(t)$，故$y_f''(t)$含有$\delta(t)$，从而$y_f'(t)$跃变，即$y_f'(0+)\neq y_f'(0-)$，而$y_f(t)$在$t = 0$连续，即$y_f(0+) = y_f(0-) = 0$，积分得

$$[y_f'(0+)- y_f'(0-)]+ 3[y_f(0+)- y_f(0-)]+2\int_{0-}^{0+} y_f(t)\,dt = 2 + 6\int_{0-}^{0+} u(t)\,dt$$

因此，$y_f'(0+)= 2 + y_f'(0-)=2$

对$t>0$时，有 $y_f''(t) + 3y_f'(t) + 2y_f(t) = 6$

不难求得其齐次解为$C_{f1}e^{-t} + C_{f2}e^{-2t}$，其特解为常数3，

于是有 $y_f(t)=C_{f1}e^{-t} + C_{f2}e^{-2t} + 3$

代入初始值求得 $y_f(t)= -4e^{-t} + e^{-2t} + 3$，$t\geq 0$

求出初值后，即可分别求解零输入响应和零状态响应：

- 求解零输入响应的步骤（对于零输入响应来说，由于输入激励为零，相当于解系统的齐次微分方程）：

(1) 求系统的初始值$y_x^{(j)}(0_+)$：

(2) 由特征方程求取系统的齐次解$y_{xh}(t)$；

(3) 由系统的初值求出待定系数。

- 求解零状态响应的步骤：

(1) 求系统的初始值：

(2) 分别求取系统的齐次解$y_{fh}(t)$和特解$y_{fp}(t)$，全响应$y_f(t)=y_{fh}(t)+y_{fp}(t)$；

(3) 由系统的初值求出待定系数。

连续时间系统单位冲激响应的定义

在系统初始状态为零的条件下，以单位冲激信号激励系统所产生的输出响应，称为系统的单位冲激响应，以符号$h(t)$表示。

N阶连续时间LTI系统的冲激响应$h(t)$满足

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1h'(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$$

例 描述某系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$
求其冲激响应$h(t)$。

解 根据$h(t)$的定义 有

$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta(t)$ $h'(0-) = h(0-) = 0$

先求$h'(0+)$和$h(0+)$。

因方程右端有δ(t)，故利用系数平衡法。h″(t)中含δ(t)，h′(t)含u(t)，h′(0+)≠h′(0-)，h(t)在t=0连续，即h(0+)=h(0-)。积分得

$$[h'(0+) - h'(0-)] + 5[h(0+) - h(0-)] + 6\int_{0-}^{0+} h(t)dt = 1$$

考虑h(0+)= h(0-)，由上式可得 h(0+)=h(0-)=0 ，

$$h'(0+) = 1 + h'(0-) = 1$$

对t>0时，有 $h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = 0$

故系统的冲激响应为一齐次解。

微分方程的特征根为-2，-3。故系统的冲激响应为

$$h(t)=(C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t})u(t)$$

代入初始条件求得$C_1=1, C_2=-1$, 所以

$$h(t)=(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

例 描述某系统的微分方程为

$y''(t)+5y'(t)+6y(t)= f''(t) + 2f'(t) + 3f(t)$

求其冲激响应h(t)。

解 根据h(t)的定义 有

$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta''(t)+ 2\delta'(t)+3\delta(t) \quad (1)$

$h'(0-) = h(0-) = 0$

先求h'(0+)和h(0+)。 由方程可知， h(t) 中含δ(t)

故令 $h(t) = a\delta(t) + p_1(t)$ [$p_i(t)$ 为不含δ(t) 的某函数]

$h'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + p_2(t)$

$h''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t)+ p_3(t)$

代入式(1)，有

$a\,\delta''(t) + b\,\delta'(t) + c\,\delta(t) + p_3(t) + 5[a\,\delta'(t) + b\,\delta(t) + p_2(t)]$

$+ 6[a\,\delta(t) + p_1(t)] = \delta''(t) + 2\,\delta'(t) + 3\,\delta(t)$

整理得

$a\,\delta''(t) + (b+5a)\,\delta'(t) + (c+5b+6a)\,\delta(t) + p_3(t) + 5\,p_2(t) + 6\,p_1(t)$

$= \delta''(t) + 2\,\delta'(t) + 3\,\delta(t)$

利用 $\delta(t)$ 系数匹配，得 $a = 1$， $b = -3$， $c = 12$

所以 $h(t) = \delta(t) + p_1(t)$ （2）

$h'(t) = \delta'(t) - 3\,\delta(t) + p_2(t)$ （3）

$h''(t) = \delta''(t) - 3\,\delta'(t) + 12\,\delta(t) + p_3(t)$ （4）

对式(3)从0-到0+积分得 $h(0+) - h(0-) = -3$

对式(4)从0-到0+积分得 $h'(0+) - h'(0-) = 12$

故 $h(0+) = -3$， $h'(0+) = 12$

微分方程的特征根为-2， -3。故系统的冲激响应为

$$h(t)= C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}\,, \quad t>0$$

代入初始条件$h(0+) = -3$， $h'(0+) =12$

求得$C_1=3$，$C_2= -6$, 所以

$$h(t)= 3e^{-2t} - 6e^{-3t} \quad , t > 0$$

结合式(2)得

$$h(t)= \delta(t) + (3e^{-2t} - 6e^{-3t})u(t)$$

冲激平衡法求系统的单位冲激响应

由于t>0⁺后，方程右端为零，故n>m时

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t})u(t)$$

$n \le m$**时**, 为使方程两边平衡, $h(t)$应含有冲激及其高阶 导数,即

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t})u(t)+\sum_{j=0}^{m-n}A_j\delta^{(j)}(t)$$

将$h(t)$代入微分方程，使方程两边平衡,确定系数K_i，A_i

冲激平衡法小结

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t})u(t)+\sum_{j=0}^{m-n}A_j\delta^{(j)}(t)$$

1)由系统的特征根来确定$u(t)$前的指数形式.

2) 由动态方程右边$d(t)$的最高阶导数与方程左边$h(t)$的最高阶导数确定$d^{(j)}(t)$项.

连续系统的阶跃响应

$$g^{(n)}(t)+a_{n-1}g^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1g'(t)+a_0g(t)$$
$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1u'(t)+b_0u(t)$$

求解方法:

1)求解微分方程

2)利用单位冲激响应与单位阶跃响应的关系

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

例3 求例1所述系统的单位阶跃响应$g(t)$。

解：

例1系统的单位冲激响应为

$$h(t)=2e^{-3t}u(t)$$

利用单位冲激响应与单位阶跃响应的关系，可得

$$g(t)=\int_0^t 2e^{-3\tau}\,\mathrm{d}\tau=\frac{2}{3}(1-e^{-3t})u(t)$$

总结：

1. 微分方程的解可由哪两部分组成？

$$y(t)(\text{完全解}) = \underbrace{y_h(t)(\text{齐次解})}_{\text{自由响应}} + \underbrace{y_p(t)(\text{特解})}_{\text{强迫响应}}$$

2. 0_+与0_-初始值分别是什么意思？

0-时刻的初值是系统激励尚未接入的前一瞬时，由系统的历史状况决定的。——起始条件（初始状态）

0+时刻的初值是激励接入到系统后的一瞬间系统的初值，它包含激励对其所起的作用。——初始条件

3. 何谓零输入响应，何谓零状态响应，如何确定两张响应的初始条件？

$$y_x^{(j)}(0_+) = y_x^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-) \qquad y_f^{(j)}(0_-) = 0$$

4. 自由响应和零输入响应都满足其次方程的解，但两者相同吗？

不同，两者待定系数不同。

零输入响应的待定系数仅由起始条件决定。

自由响应的待定系数由起始条件及激励共同决定，即由初始条件决定。

5. 自由响应和零输入响应及零状态响应的关系？

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t)$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_{x_i}e^{\lambda_i t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_{f_i}e^{\lambda_i t}+y_p(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(C_{x_i}+C_{f_i})e^{\lambda_i t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_p(t)}_{\text{强迫响应}}$$

二. 线性常系数差分方程:

(Linear Constant-Coefficient Difference Equation)

一般的线性常系数差分方程可表示为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

与微分方程一样，它的解法也可以通过求出一个特解$y_p(n)$和通解，即齐次解$y_h(n)$来进行，其过程与解微分方程类似。

要确定齐次解中的待定常数，也需要有一组附加条件。同样地，当LCCDE具有一组全部为零的初始条件时，所描述的系统是线性、因果、时不变的。

二.线性常系数差分方程 (LCCDE)

对于差分方程，可以将其改写为：

$$y(n)=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)\right]$$

可以看出：要求出 $y(0)$ **，不仅要知道所有的** $x(n)$ **，还要知道** $y(-1), y(-2),\cdots\cdots, y(-N)$ **，这就是一组初始条件，由此可以得出** $y(0)$ **。进一步，又可以通过** $y(0)$ **和** $y(-1), y(-2),\cdots\cdots, y(-N+1)$ **，求得** $y(1)$ **，依次类推可求出所有** $n\ge 0$ **时的解。**差分方程本质上是递推的代数方程，若已知初始条件和激励，利用迭代法可求得其数值解。

二.线性常系数差分方程 (LCCDE)

若将差分方程改写为：

$$y(n-N)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)-\sum_{k=0}^{N-1}a_k y(n-k)\right]$$

则可由 $y(1),y(2),\cdots\cdots,y(N)$求得 $y(0)$,进而由 $y(0)$, $y(1),y(2),\cdots\cdots,y(N-1)$可求得$y(-1)$, 依次可推出 $n\le 0$ 时的解。

由于这种差分方程可以通过递推求解，因而称为**递归方程（recursive equation）**。

例：若描述某系统的差分方程为

$$y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = f(k)$$

已知初始条件 $y(0)=0,\ y(1)=2$，激励 $f(k)=2^k u(k)$，求 $y(k)$。

解：$y(k) = -3y(k-1) - 2y(k-2) + f(k)$

$$y(2) = -3y(1) - 2y(0) + f(2) = -2$$

$$y(3) = -3y(2) - 2y(1) + f(3) = 10 \ \ldots\ldots$$

一般不易得到解析形式的(闭合)解。

二、差分方程的经典解

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0 y(k-n)$$
$$=b_m f(k)+b_{m-1}f(k-1)+\cdots+b_0 f(k-m)$$

差分方程的全解即系统的完全响应, 由齐次解$y_h(k)$和特解$y_p(k)$组成:

$$y(k)=y_h(k)+y_p(k)$$

齐次解$y_h(k)$的形式由齐次方程的特征根确定

特解$y_p(k)$的形式由方程右边激励信号的形式确定

1.齐次解（自由响应）

齐次方程 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=0$

特征方程 $1+a_{n-1}\lambda^{-1}+\cdots+a_0\lambda^{-n}=0$

即 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0=0$

其根 λ_i(i=1，2，…，n)称为差分方程的特征根。

齐次解的形式取决于特征根。

当特征根λ为单根时，齐次解 $y_h(k)=\sum_{i=1}^{n}C_i\lambda_i^k$

2. 特解（强迫响应）

特解的形式与激励函数的形式有关

输入信号	特解
a^k (a不是特征根)	Aa^k
a^k (a是特征单根)	$A_1ka^k + A_0a^k$
k^n	$A_nk^n + A_{n-1}k^{n-1} + \cdots + A_1k + A_0$
a^kk^n	$a^k(A_nk^n + A_{n-1}k^{n-1} + \cdots + A_1k + A_0)$
$\sin k\Omega_0$ 或 $\cos k\Omega_0$	$A_1\cos k\Omega_0 + A_2\sin k\Omega_0$
$a^k\sin k\Omega_0$ 或 $a^k\cos k\Omega_0$	$a^k(A_1\cos k\Omega_0 + A_2\sin k\Omega_0)$

例 已知某二阶线性时不变离散时间系统的动态方程

$$y(k)-5y(k-1)+6y(k-2)=f(k)$$

初始条件$y(0)=0$, $y(1)=-1$, 输入信号$f(k)=2^k u(k)$，求系统的完全响应$y(k)$。

解 (1)求齐次方程$y(k)-5y(k-1)+6y(k-2)=0$的齐次解$y_h(k)$

特征方程为 $$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

特征根为 $$\lambda_1=2, \lambda_2=3$$

齐次解$y_h(k)$

$$y_h(k)=C_1 2^k+C_2 3^k$$

2) 求非齐次方程$y(k)-5y(k-1)+6y(k-2)=f(k)$的特解$y_p(k)$

由输入$f(k)$的形式，设方程的特解为

$$y_p(k) = A_1 k 2^k + A_0 2^k, \quad k \geq 0$$

将特解带入原微分方程即可求得常数$A_1 = -2$, $A_0 = 0$ 。

3) 求方程的全解

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) = C_1 2^k + C_2 3^k - k 2^{k+1}, \quad k \geq 0$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y(1) = 2C_1 + 3C_2 - 2 = -1$$

解得 $C_1=-1$，$C_2= 1$

$$y(k) = -2^k + 3^k - k 2^{k+1}, \quad k \geq 0$$

三、零输入响应和零状态响应

$$y(k)=y_x(k)+y_f(k)$$

若特征根是单根

$$y_x(k)=\sum_{i=1}^{n}C_{x_i}\lambda_i^k$$

$$y_f(k)=\sum_{i=1}^{n}C_{f_i}\lambda_i^k+y_p(k)$$

$$y(k)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_i\lambda_i^k}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_p(k)}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_{x_i}\lambda_i^k}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_{f_i}\lambda_i^k+y_p(k)}_{\text{零状态响应}}$$

若激励是在**k=0**时刻接入的

$y(-1)$、$y(-2)$、……$y(-n)$称为系统的初始状态

$y(0)$ 、$y(1)$、……$y(n-1)$称为系统的初始条件

$$y(j)=y_x(j)+y_f(j) \quad j=0,1,\cdots n-1$$

初始条件中同时包含了零输入初始条件和零状态初始条件，不便于区分。

考虑**k<0**即激励尚未接入时候

$$y_f(-1)=y_f(-2)=\cdots=y_f(-n)=0$$

$$y_x(-1)=y(-1),\ y_x(-2)=y(-2),\cdots,\ y_x(-n)=y(-n),$$

根据初始状态，利用迭代法分别求零输入和零状态的初始条件$y_x(j)$ 、$y_f(j)$，$j=0,1,\ldots,n-1$

例：若描述某离散系统的差分方程为

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$$

已知激励 $f(k)=2^k, k\geqslant 0$，初始状态 $y(-1)=0, y(-2)=1/2$，求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

解：（1）$y_x(k)$满足方程

$$y_x(k)+3y_x(k-1)+2y_x(k-2)=0$$

其初始状态 $y_x(-1)=y(-1)=0,\ y_x(-2)=y(-2)=1/2$

递推求出初始值 $y_x(k)=-3y_x(k-1)-2y_x(k-2)$

$$y_x(0)=-3y_x(-1)-2y_x(-2)=-1$$

$$y_x(1)=-3y_x(0)-2y_x(-1)=3$$

特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$

$$y_x(k) = C_{x1}(-1)^k + C_{x2}(-2)^k$$

$$\begin{cases} y_x(0) = C_{x1} + C_{x2} = -1 \\ y_x(1) = -C_{x1} - 2C_{x2} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{x1} = 1 \\ C_{x2} = -2 \end{cases}$$

所以 $y_x(k) = (-1)^k - 2(-2)^k，\ k \geqslant 0$

（2）零状态响应$y_f(k)$满足

$$y_f(k) + 3y_f(k-1) + 2y_f(k-2) = f(k)$$

初始状态$y_f(-1) = y_f(-2) = 0$

递推求初始值 $y_f(0)$、$y_f(1)$

$$y_f(k) = -3y_f(k-1) - 2y_f(k-2) + 2^k，\ k \geqslant 0$$

$$y_f(0) = -3y_f(-1) - 2y_f(-2) + 2^0 = 1$$

$$y_f(1) = -3y_f(0) - 2y_f(-1) + 2^1 = -1$$

分别求出齐次解和特解，得

$$y_f(k) = C_{f1}(-1)^k + C_{f2}(-2)^k + y_p(k)$$

$$= C_{f1}(-1)^k + C_{f2}(-2)^k + (1/3)\,2^k$$

$$\begin{cases} y_f(0) = C_{f1} + C_{f2} + (1/3) = 1 \\ y_f(1) = -C_{f1} - 2C_{f2} + (2/3) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{f1} = -1/3 \\ C_{f2} = 1 \end{cases}$$

$$y_f(k) = -(-1)^k/3 + (-2)^k + (1/3)\,2^k,\quad k \geqslant 0$$

（3）完全响应

$$y_x(k) = (-1)^k - 2(-2)^k,\quad k \geqslant 0$$

$$y(k) = y_x(k) + y_f(k)$$

$$= 2/3\,(-1)^k - (-2)^k + (1/3)\,2^k,\quad k \geqslant 0$$

二.线性常系数差分方程 (LCCDE)

当 $a_k = 0, k \neq 0$ 时，差分方程变为：

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x(n-k)$$

此时,求解方程不再需要迭代运算，因而称为**非递归方程（nonrecursive equation）**显然，此时方程就是一个卷积和的形式，相当于$h(n) = \frac{b_n}{a_0}, \quad 0 \leq n \leq M$

此时，系统单位脉冲响应 $h(n)$ 是有限长的,因而把这种方程描述的LTI系统称为**FIR（Finite Impulse Response）系统**。将递归方程描述的系统称为**IIR（Infinite Impulse Response）系统**,此时系统的单位脉冲响应是一个无限长的序列。

二.线性常系数差分方程 (LCCDE)

FIR系统与**IIR系统**是离散时间LTI系统中两类很重要的系统，它们的特性、结构以及设计方法都存在很大的差异。

由于无论微分方程还是差分方程的特解都具有与输入相同的函数形式，即特解是由输入信号完全决定的，因而特解所对应的这一部分响应称为**受迫响应**或**强迫响应**。齐次解所对应的部分由于与输入信号无关，也称为系统的**自然响应**。

三.由微分和差分方程描述的LTI系统的方框图表示

（Block-Diagram Representation of the LTI System described by LCCDE）

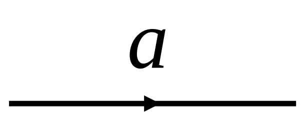
由LCCDE 描述的系统，其数学模型是由一些基本运算来实现的，如果能用一种图形表示方程的运算关系，就会更加形象直观；另一方面, 分析系统很重要的目的是为了设计或实现一个系统, 用图形表示系统的数学模型, 将对系统的特性仿真、硬件或软件实现具有重要意义。

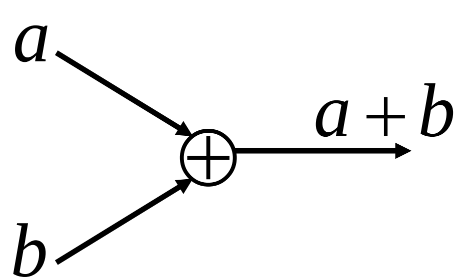
不同的结构也会在设计和实现一个系统时带来不同的影响：如系统的成本、灵敏度、误差及调试难度等方面都会有差异。

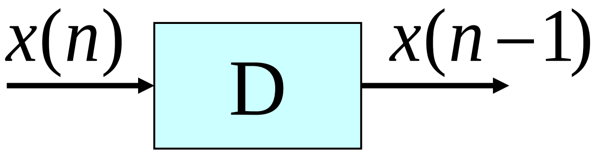
1. 由差分方程描述的LTI系统的方框图表示：

由 $$y(n)=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\right]$$

方程中包括三种基本运算：乘系数、相加、移位（延迟）。可用以下符号表示：





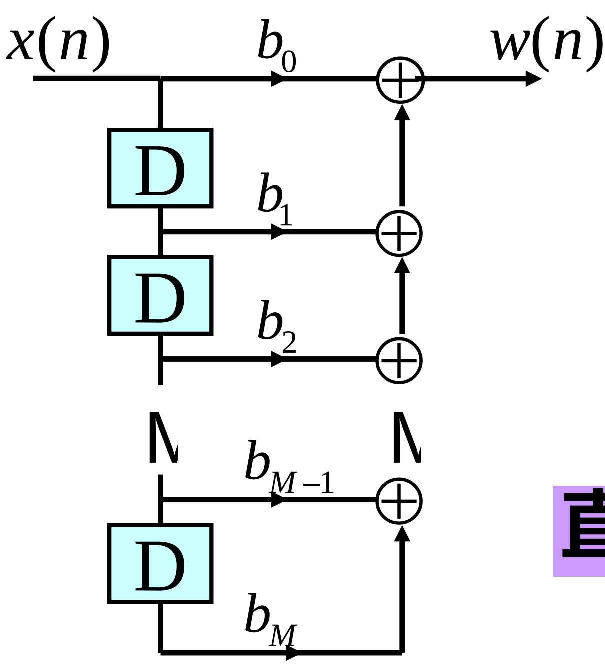


若令 $$w(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

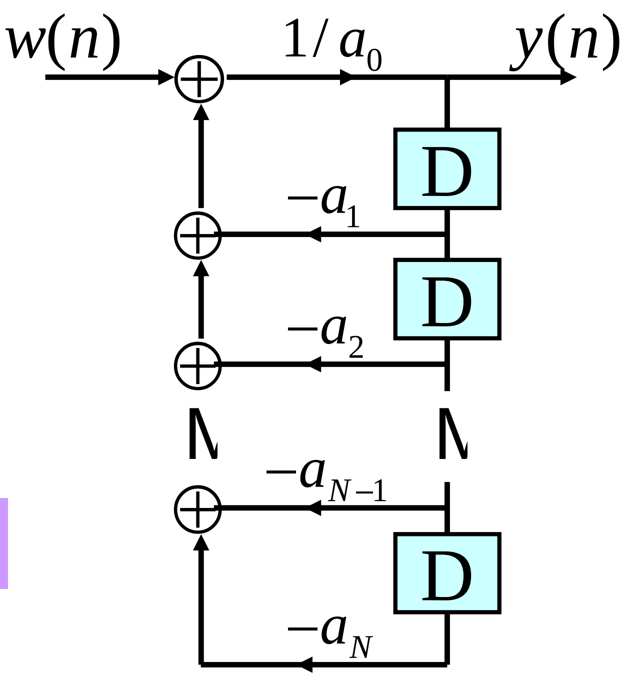
1. 由差分方程描述的LTI系统的方框图表示：

$$y(n)=\frac{1}{a_0}\left[w(n)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)\right]$$

据此可得方框图：

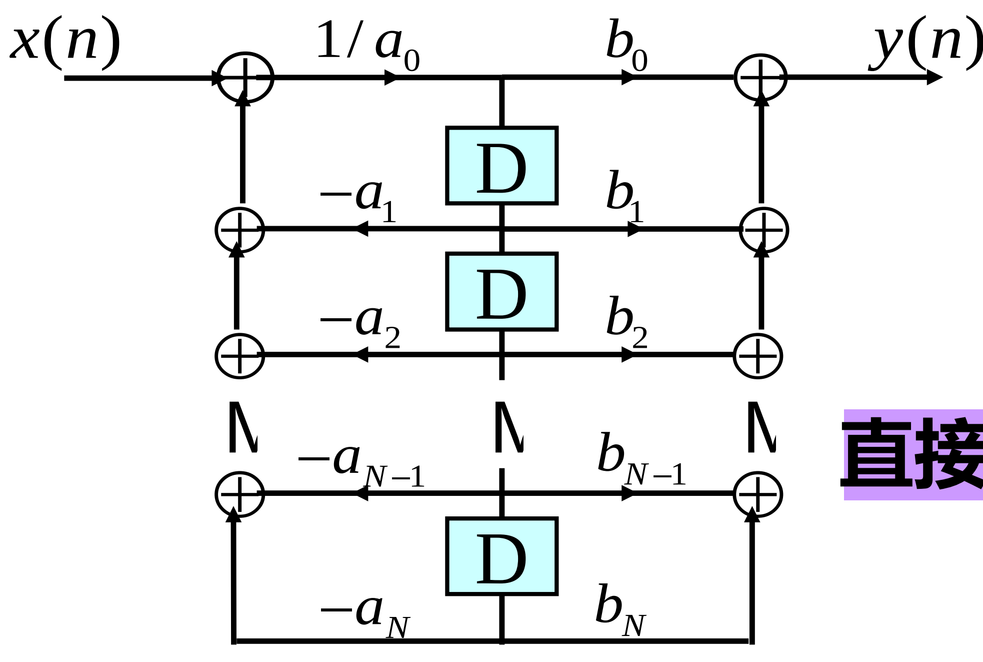


直接 I 型



1. 由差分方程描述的LTI系统的方框图表示：

将其**级联**起来,就成为LCCDE描述的系统，它具有与差分方程完全相同的运算功能。显然, 它可以看成是两个级联的系统，可以调换其级联的次序, 并将移位单元合并，于是得到：



直接II型

Equivalent Structures

- Two digital filter structures are defined to be equivalent if they have the same transfer function
- However, a fairly simple way to generate an equivalent structure from a given realization is via the transpose operation

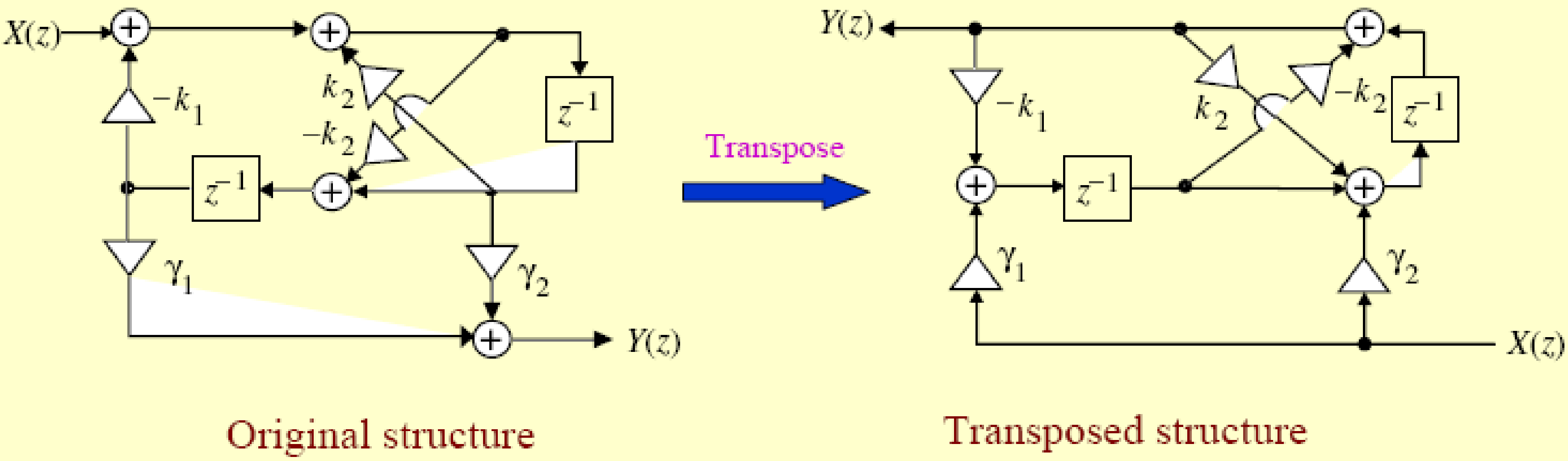
转置

Equivalent Structures

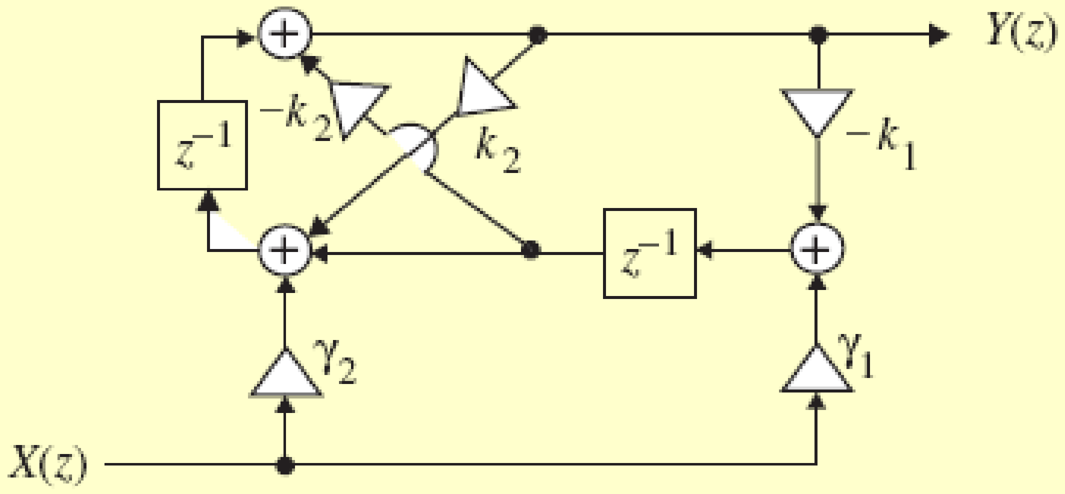
Transpose Operation

- **(1) Reverse all paths**
- **(2) Replace pick-off nodes by adders, and vice versa**
- **(3) Interchange the input and output nodes**

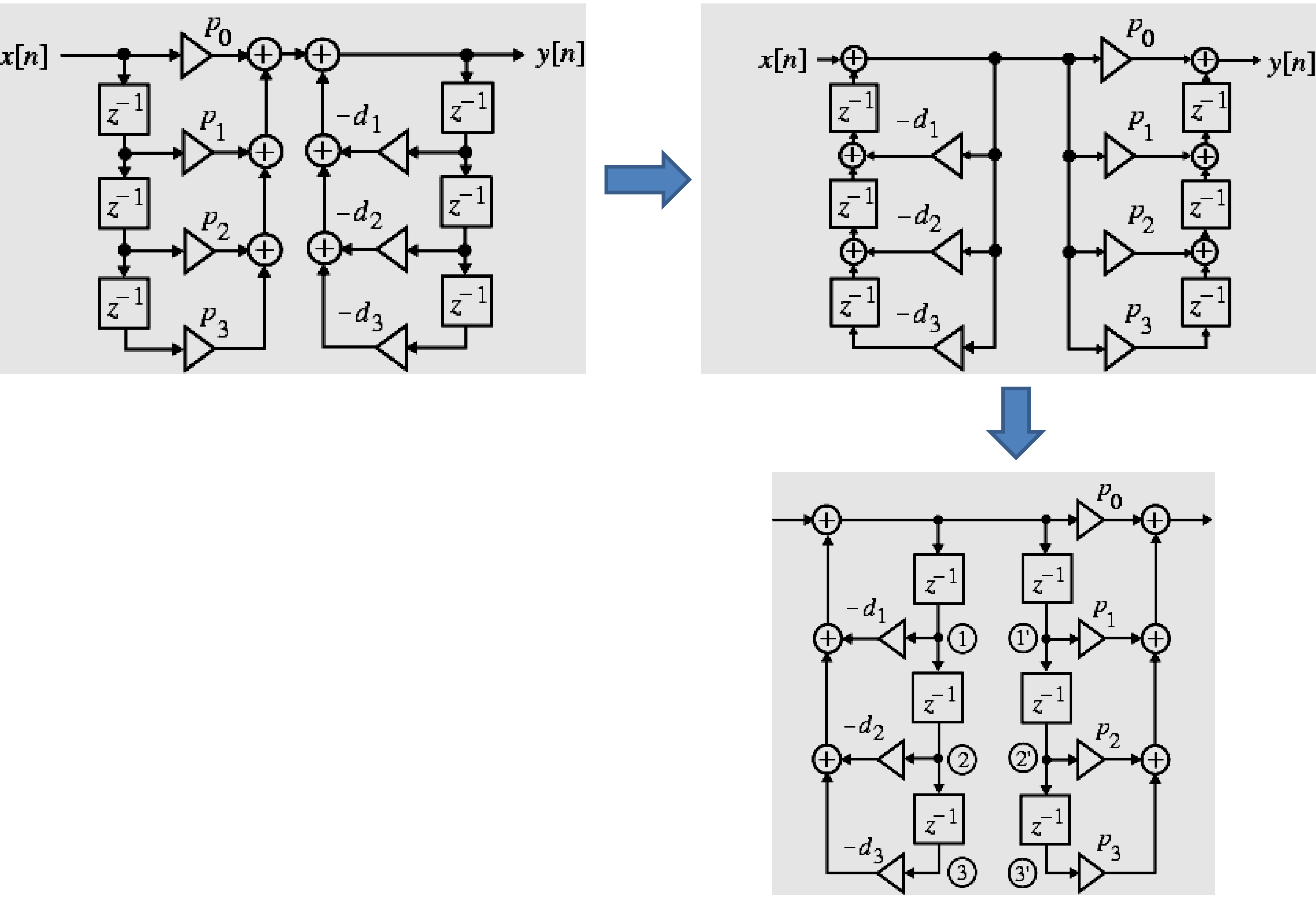
- **Example** – The transpose operation is illustrated below



- Redrawn transposed structure is shown below



- **All other methods for developing equivalent structures are based on a specific algorithm for each structure**



x[n]
y[n]
p_0
p_1
p_2
p_3
$-d_1$
$-d_2$
$-d_3$
z^{-1}
1
2
3
1'
2'
3'

Equivalent Structures

- There are literally an infinite number of equivalent structures realizing the same transfer function
- It is thus impossible to develop all equivalent realizations
- In this course we restrict our attention to a discussion of some commonly used structures

Equivalent Structures

- Under infinite precision arithmetic any given realization of a digital filter behaves identically to any other equivalent structure
- However, in practice, due to the finite wordlength limitations, a specific realization behaves totally differently from its other equivalent realizations

Equivalent Structures

- Hence, it is important to choose a structure that has the least quantization effects when implemented using finite precision arithmetic
- One way to arrive at such a structure is to determine a large number of equivalent structures, analyze the finite wordlength effects in each case, and select the one showing the least effects
- In certain cases, it is possible to develop a structure that by construction has the least quantization effects

2. 由微分方程描述的LTI系统的方框图表示：

由 $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ 也包括三种基本运算：**微分、相加、乘系数**。

但由于微分器不仅在工程实现上有困难，而且对误差及噪声极为灵敏，因此，**工程上通常使用积分器而不用微分器**。

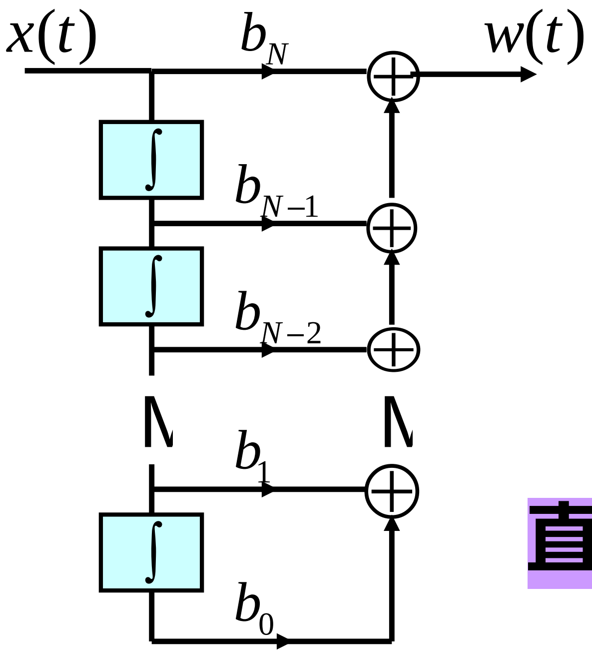
将微分方程两边同时积分 N 次，即可得到一个积分方程：

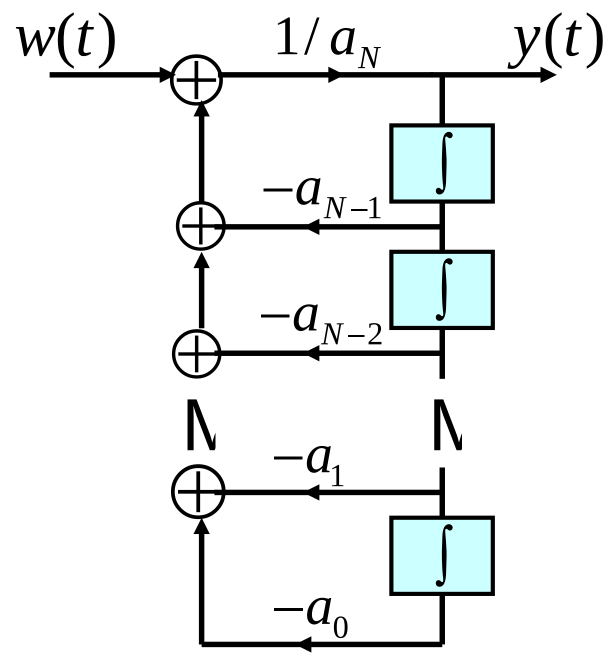
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)$$

2. 由微分方程描述的LTI系统的方框图表示：

对此积分方程完全按照差分方程的办法有：

$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{N}b_k x_{(N-k)}(t)-\sum_{k=0}^{N-1}a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$

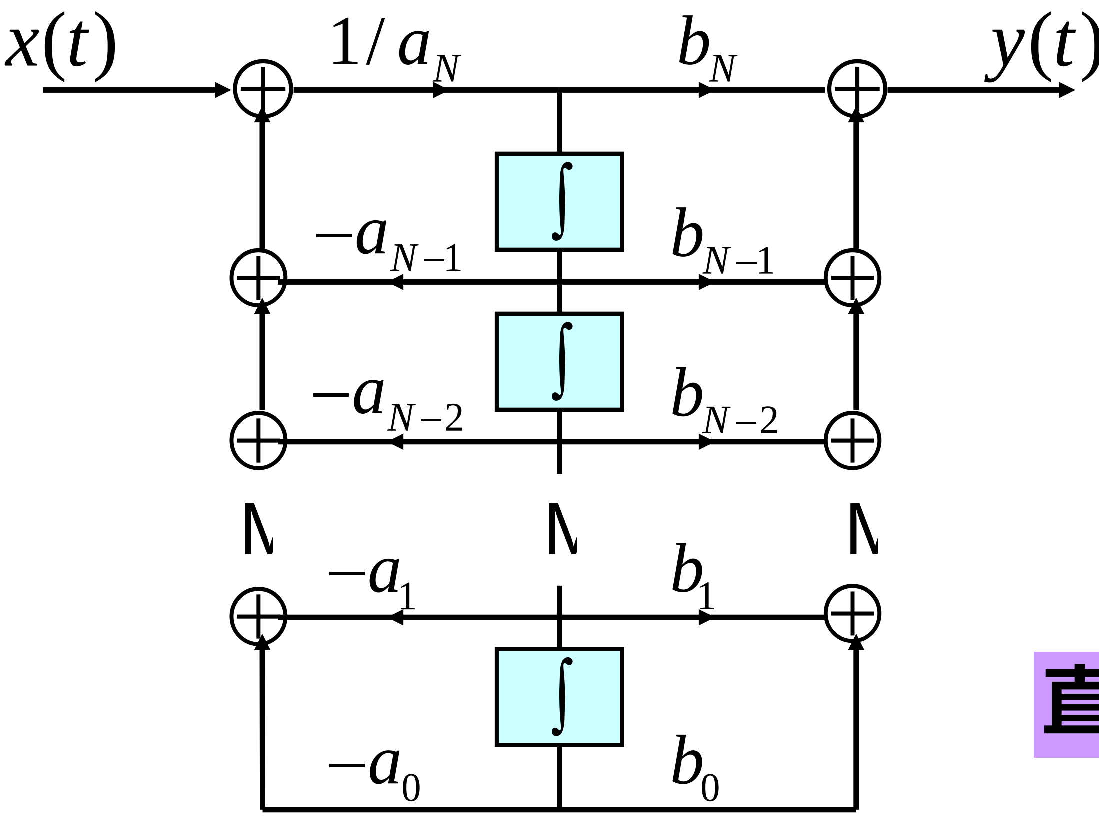




直接 I 型

2. 由微分方程描述的LTI系统的方框图表示：

通过交换级联次序，合并积分器可得直接Ⅱ型：



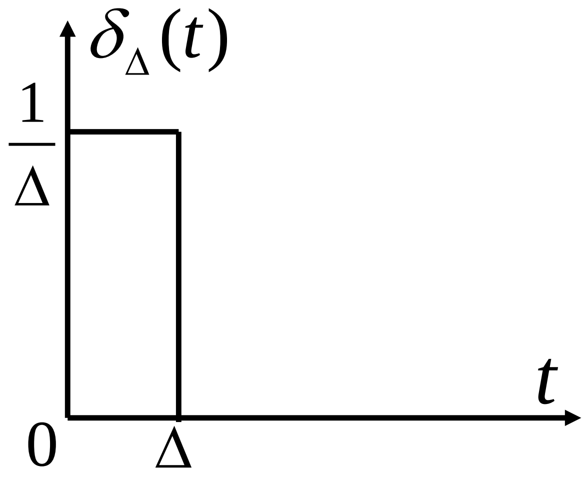
直接Ⅱ型

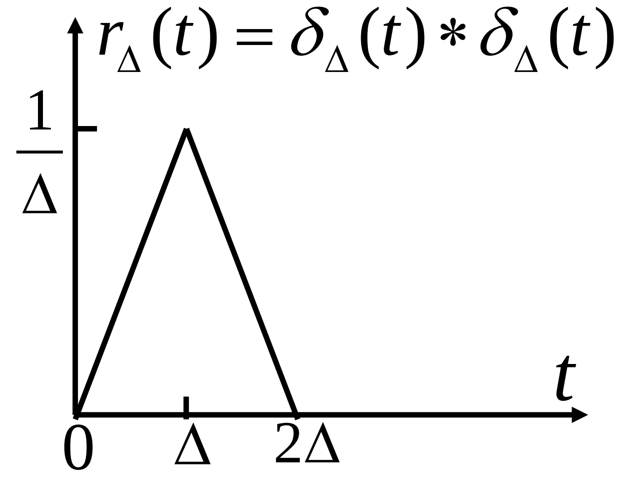
2.5 奇异函数(Singularity function)

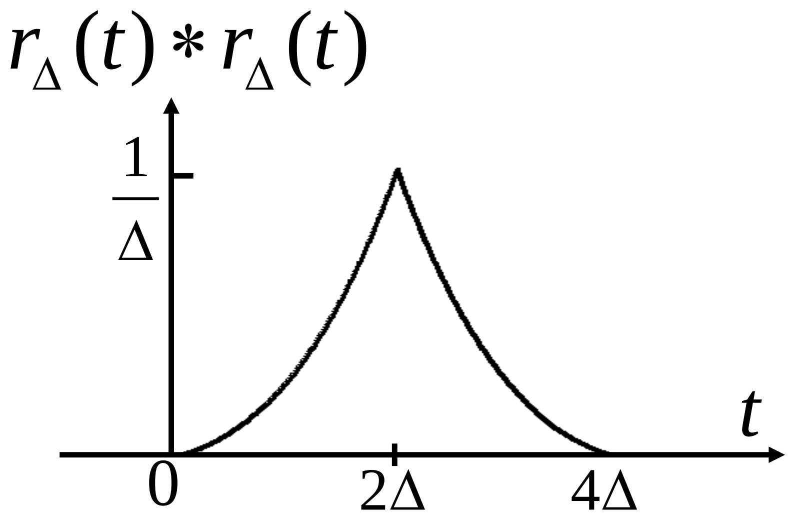
在第一章介绍单位冲激时，开始将$\delta(t)$ 定义为 $\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$ 显然是不严密的，因为$u(t)$ 在$t=0$不连续。进而采用极限的观点，将$\delta(t)$ 视为$\delta_{\Delta}(t)$在 $\Delta\to 0$时的极限。这种定义或描述$\delta(t)$的方法在数学上仍然是不严格的，因为可以有许多不同函数在$\Delta\to 0$ 时都表现为与$\delta_{\Delta}(t)$有相同的特性。

例如:以下信号的面积都等于1，而且在$\Delta\to 0$时，它们的极限都表现为单位冲激。

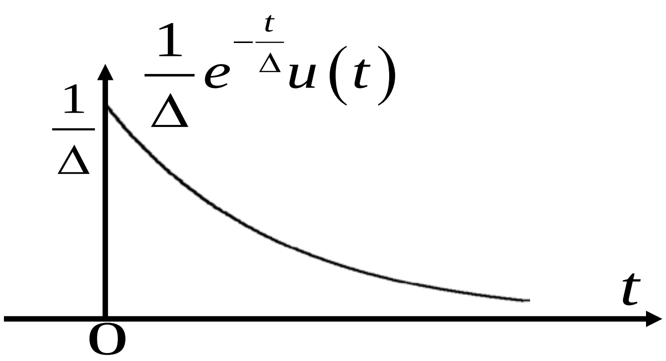
2.5 奇异函数（Singularity function）

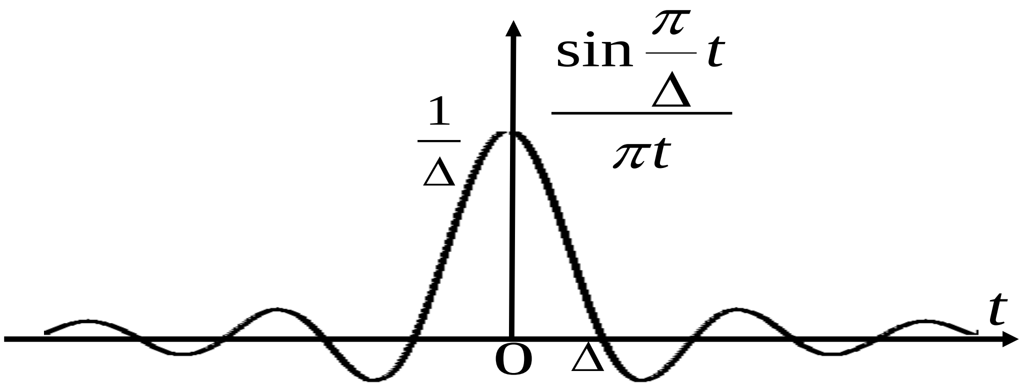






2.5 奇异函数（Singularity function）





之所以产生这种现象，是因为$\delta(t)$是一个理想化的非常规函数，被称为**奇异函数**。通常采用在卷积或积分运算下函数所表现的特性来定义奇异函数。

一. 通过卷积定义 $\delta(t)$

从系统的角度,可以说 $\delta(t)$ **是一个恒等系统的单位冲激响应,因此** $x(t) = x(t) * \delta(t)$**,**

这就是在卷积运算下 $\delta(t)$ **的定义。**

根据定义可以得出 $\delta(t)$ **的如下性质：**

1. $\because x(t) * \delta(t) = x(t)$

$\therefore \delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$ $\qquad \delta(t-t_0) * \delta(t) = \delta(t-t_0)$

一. 通过卷积定义 $\delta(t)$

2. 当 $x(t)=1$ 时，有

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)d\tau=1$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

3. 由此定义可得：

$$g(-t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau-t)\delta(\tau)d\tau=g(-t)$$

若 $t=0$ **，则有：** $g(0)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\delta(\tau)d\tau$

此式即可作为在积分运算下 $\delta(t)$ 的定义式。

二. 通过积分定义 $\delta(t)$

若令 $g(\tau)=x(t-\tau)$，代入积分定义式就有：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=x(t)*\delta(t)$$

这就是卷积运算下的定义。

4 $\delta(t)$ 是偶函数，即：$\delta(t)=\delta(-t)$。因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)\,\mathrm{d}t\overset{t=-\tau}{=}\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(\tau)f(-\tau)\,\mathrm{d}(-\tau)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)f(-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(0)$$

二. 通过积分定义 $\delta(t)$

5. 根据积分下的定义有：

$$g(0)f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)f(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(0)g(t)\delta(t)dt$$

$$\therefore\ f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

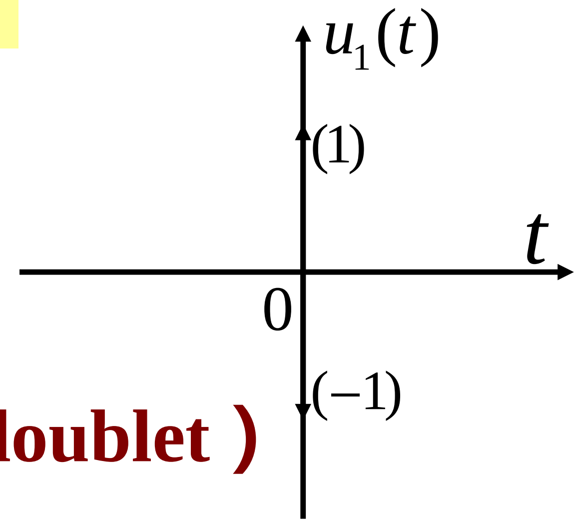
若 $f(t)=t$ **，则可推出** $t\delta(t)=0$

因此，若有 $tf_1(t)=tf_2(t)$ $f_1(t)=f_2(t)+C\delta(t)$

三. 单位冲激偶及其他奇异函数

理想微分器的单位冲激响应应该是 $\delta(t)$ 的微分，记为 $u_1(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$，从卷积运算或LTI系统分析的角度应该有：

$$x(t)*u_1(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$



$u_1(t)$ **称为单位冲激偶（Unit doublet）**

三. 单位冲激偶及其他奇异函数

由此定义出发可以推出：

1. 当 $x(t)=1$ **时，有：**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)u_1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)d\tau = 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)dt = 0$$

2. 考察 $g(-t)*u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau-t)u_1(\tau)d\tau$

$$= \frac{d}{dt}g(-t) = -\frac{d}{d\sigma}g(\sigma)\Big|_{\sigma=-t}$$

当 $t=0$ **时，有** $-g'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u_1(\tau)d\tau$ **，此积分可作为**$u_1(t)$ **在积分意义下的定义。**

三. 单位冲激偶及其他奇异函数

3. 若 $g(t)$ **是一个偶函数，则** $g'(0)=0$**。由此可推得** $u_1(t)$ **是奇函数，即：** $u_1(-t)=-u_1(t)$

4. 考察

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)u_1(t)dt = -\frac{d}{dt}\left[f(t)g(t)\right]\Big|_{t=0}$$

$$= -\left[f'(t)g(t)+f(t)g'(t)\right]\Big|_{t=0}$$

$$= -\left[f'(0)g(0)+f(0)g'(0)\right]$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(0)g(t)\delta(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(0)g(t)u_1(t)dt$$

$$\therefore\ f(t)u_1(t) = f(0)u_1(t) - f'(0)\delta(t)$$

三. 单位冲激偶及其他奇异函数

5. 若 $f(t)=t$，进而有：$tu_1(t)=-\delta(t)$，$t^2u_1(t)=0$

因此，若有 $t^2 f_1(t)=t^2 f_2(t)$

$$f_1(t)=f_2(t)+C_1\delta(t)+C_2u_1(t)$$

按此定义方法推广下去，有：

$$u_2(t)=u_1(t)*u_1(t)$$

$$\left(\because x(t)*u_2(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2} = x(t)*u_1(t)*u_1(t)\right)$$

$$u_k(t)=\underbrace{u_1(t)*\cdots*u_1(t)}_{k\text{次}}$$

三. 单位冲激偶及其他奇异函数

在积分运算下有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)u_k(t)dt = (-1)^k g^{(k)}(0)$$

例如：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)u_2(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)du_1(t) = g(t)u_1(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(t)u_1(t)dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} g'(t)d\delta(t) = -g'(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} g''(t)\delta(t)dt$$

$$= g''(0)$$

四. $\delta(t)$ 的积分

用类似方法也可以定义$\delta(t)$ 的积分。

若用 $u_0(t) \Leftrightarrow \delta(t)$, 则 $u_{-1}(t) \Leftrightarrow u(t)$

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

$u_{-1}(t)$是理想积分器的单位冲激响应。

$$x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$

因此：$u_{-2}(t) = u_{-1}(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t) dt = tu(t)$

——称为单位斜坡函数（Unit ramp function ）

四. $\delta(t)$ 的积分

$$u_{-3}(t) = u_{-1}(t) * u_{-1}(t) * u_{-1}(t) = \frac{1}{2}t^2 u(t)$$

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{k\text{次}} = \int_{-\infty}^{t} u_{-(k-1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)$$

事实上，$\delta(t)$ 的各次积分已经是常规函数了，当然可以按常规函数定义的方法去描述。

2.6 小结（Summary）

本章主要讨论了以下内容：

1. 信号的时域分解：

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

2. LTI系统的时域分析——卷积和与卷积积分

3. LTI系统的描述方法：

①用 $h(t)$、$h(n)$ 描述系统（也可用 $s(t)$、$s(n)$ 描述）；

②用LCCDE连同零初始条件描述LTI系统；

③用方框图描述系统（等价于LCCDE描述）。

本章主要讨论了以下内容

4. LTI系统的特性与 $h(t)$、$h(n)$ 的关系：

- 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与 $h(t)$、$h(n)$ 的关系；
- 系统级联、并联时，$h(t)$、$h(n)$与各子系统的关系。

5. 奇异函数。