**中山大学本科生期中考试答案**

**考试科目：《图论及其应用》（A卷）**

学年学期：**2019**学年第一学期 姓 名：

学 院/系：数据科学与计算机学院 学 号：

考试方式：闭卷 年级专业：

考试时长：100分钟 班 别：

对于下面的每个陈述，请给出证明或给出反例否证：

1.如果简单图G的每个顶点度数均为2，那么G是一个圈。

2.若图G恰有2个奇度顶点u和v，那么u与v连通。

正确。

证明：反证法。假设u和v不连通，则u和v在G不同的连通分支中。根据推论1.1，每个连通分支奇度顶点的数量必须是偶数，因而每个连通分支至少有2个奇度，图G至少有4个奇度顶点。矛盾。

3.所有树均是偶图。（注意：只有一个顶点的图既是树也是偶图。）

正确。

证明：设T是树，则T中没有圈，因而也没有奇圈，根据定理1.3，T是偶图。

4.一个有向图G是强连通的当且仅当将顶点集划分成任意两个非空子集S和T时，都至少存在一条从S到T的弧。

正确。

证明：先证必要性。如果存在一种划分，使得不存在S到T的弧，则S中的任一顶点u都不存在到T中任一顶点v的路径，和图强连通矛盾。

再证充分性。

设x是图的任一顶点，令S为从x可达的所有顶点的集合，若S不等于V，令T=V-S，由于T非空，因此存在S到T的弧，此时T中必有顶点也是从x可达的，这和S是所有从x可达的顶点集合矛盾，因此S=V，也即x可达图中所有顶点。由于x是任意顶点，所以图强连通。

5.如果T是赋权图G的一个最小权生成树，那么T中u到v的路一定是G中u到v的最短路。

6.每个树至多有一个完美对集。

正确。

证明：设树T有两个完美对集M和M’。考察M和M’的对称差M∆M’，由于M和M’都是完美对集，所以在对称差中，每个顶点的度数只能是0或2，因此每个连通分支要么是孤立的点要么是圈。又因为树中没有圈，所以可知连通分支全部是孤立的点，即M∆M’中没有任何边。由此可见M=M’。

7.每一个有偶数个顶点的简单连通Euler图一定有偶数条边。

8.如果G是2连通的，且P是G中一条(u, v)路，则G中必存在另一条(u, v)路Q，使得P和Q内部不相交。

9.所有连通Euler图都是Hamilton图。

10.每个竞赛图T中必然存在一个顶点u，u到T中每个顶点都存在一条长度至多为2的有向路。

正确。

证明：在T中任取一顶点x，若x满足要求则得证。否则必然存在另一个顶点y，x到y不存在长度小于等于2的有向路。那么对于x的每个后继x’，y都不是x’的后继。由于T是竞赛图，所以必然有x’是y的后继。又因为y也不是x的后继，所以x也是y的后继，因而y的后继数量至少比x的后继数量多1。若y满足要求则得证，否则重复上述过程，继续能找到一个顶点z，其后继数量比y的后继数量多1。这一过程一直进行下去，由于图T的顶点数有限，后继数量不可能无限增加，所以必然存在满足题目要求的顶点。