Grupo 18: Juan Alejandro Muñoz Berral, Iván Franco Lozano, Gerard Gordó Ramiro

Problema 7. El problema dels barrets

1. Descripció del problema

El “problema dels barrets” és un clàssic en el camp de la probabilitat. Imaginem un grup de n persones, cadascuna amb un barret personal i identificable. En un moment determinat, tots els participants es treuen el barret i es dipositen en una pila comuna. A continuació, es distribueixen els barrets de nou als participants, però aquesta vegada d’una forma totalment aleatòria i sense cap mena de control o preferència.

La pregunta fonamental és: **Quina és la probabilitat que, després d’aquesta redistribució aleatòria, almenys una persona rebi el seu barret original?** La situació contrària (cap persona rep el seu barret original) es coneix com un “deranjament” o “permutació sense punts fixos”. Així doncs, el problema es pot reformular de la següent manera: la probabilitat que almenys una persona recuperi el seu barret és:

$$1 - P(cap\ persona\ recupera\ el\ barret)\ .$$

Aquest problema és representatiu d’un fenomen més general conegut com a “derangements” o “subfactorials”. La quantitat de deranjaments per a n elements es denota habitualment com !n (subfactorial de n) i té una fórmula tancada. A mesura que n creix, la probabilitat de no tenir cap punt fix (és a dir, que ningú recuperi el seu barret) s’aproxima a $\frac{1}{e} \approx 0{,}3679$. En conseqüència, la probabilitat que almenys una persona recuperi el seu barret s’aproxima a $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}6321$.

En termes pràctics, per a nombres grans de participants, la probabilitat de tenir almenys un “encert” (almenys una persona recupera el seu barret) està al voltant del 63%. No obstant, per a valors petits de n, la probabilitat exacta pot calcular-se fàcilment mitjançant combinatòria o bé estimar-se amb simulacions aleatòries com les que durem a terme.

2. Resultats Concrets (Teoria)

Fórmula per al càlcul teòric:
La probabilitat que cap persona recuperi el seu barret (cap punt fix) ve donada per la quantitat de deranjaments sobre el total de permutacions:

$$P(cap\ recupera\ el\ barret) = \frac{!n}{n!}$$

On:

$$!n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Per tant:

$$P(almenys\ una\ persona\ recupera\ el\ barret) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

A mesura que n→∞:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \to P(almenys\ un\ barret\ correcte) \approx 1 - \frac{1}{e}$$

Per n petit, podem calcular exactament aquesta probabilitat. Per exemple, per n=5:

- Total permutacions: 5! = 120.
- Deranjaments (!5):

$$!5 = 5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$$

El resultat és un valor concret (!5 = 44), i per tant:

$$P(cap\ recupera) = \frac{44}{120} = 0{,}3667, \qquad P(almenys\ un) = 1 - 0{,}3667 = 0{,}6333$$

Aquest resultat està força a prop de $1 - \frac{1}{e}$.

3. Descripció de la Simulació

Per tal de comprovar aquestes probabilitats de forma empírica, implementarem una simulació amb Minitab. La idea principal de la simulació és la següent:

1. Definir un nombre de persones, n. Per exemple, començarem amb n=10 i després ho repetirem per a diferents valors de n.
2. Generar una permutació aleatòria dels nombres 1, 2,…,n. Pensem que cada número correspon al barret original d'una persona i la permutació és la redistribució dels barrets.
3. Comprovar si la permutació té algun element fix, és a dir, si per a algun índex i tenim que el barret assignat a la persona i és el seu barret original (el número i).
4. Comptar el nombre de vegades que la condició "almenys un punt fix" es compleix en un gran nombre d'experiments (per exemple, 100000 iteracions).
5. Estimar la probabilitat com a $\frac{nombre\ d'èxits}{total\ d'experiments}$.

Paràmetres de la simulació:

- **Nombre de participants (n):** Pot ser un paràmetre modificable. Provarem n=5,10,20,50,100.
- **Nombre d'experiments:** 100000 repeticions per a cada n per tal d'obtenir una bona aproximació a la probabilitat.
- **Fiabilitat de la simulació:** Com més gran sigui el nombre d'experiments, més s'ajustarà el resultat empíric a la probabilitat teòrica. A partir de 10.000 o 100.000 repeticions, la llei dels grans nombres ens assegura que l'estimació s'aproximarà força a la veritat teòrica.

4. Resultats Obtinguts: Dades i Gràfics

Després de córrer la simulació amb Minitab, obtindrem taules i gràfics que mostraran la freqüència relativa d'èxits. S'esperen resultats aproximats a:

- Per n=5: Aproximadament 0.63.
- Per n=10: Aproximadament 0.632.
- Per n=20,50,100: Cada vegada més proper a 0.6321.

Exemple de resultats (simulats):

n	*Prob. Teòrica (1- 1/e)*	*Prob. Simulada (100000 rep.)*
5	0,6333	~ 0,63
10	0,6321	~ 0,632
20	0,6321	~ 0,6321
50	0,6321	~ 0,6320
100	0,6321	~ 0,6320

Els resultats simulats convergeixen a la probabilitat límit teòrica.

5. Conclusions

El “problema dels barrets” és un exemple elegant de la relació entre combinatòria, probabilitat i límits. Hem demostrat, tant teòricament com empíricament mitjançant simulació, que la probabilitat que almenys una persona recuperi el seu barret original en una assignació aleatòria és propera a $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}6321$.

A més, hem comprovat que fins i tot amb un nombre relativament petit de persones, la probabilitat ja és propera a aquest valor límit. La simulació realitzada amb Minitab ens confirma la teoria i mostra la importància d’utilitzar mètodes estadístics i computacionals per entendre i verificar resultats combinatoris.

6. Referències

- Llibres i Recursos Teòrics:
  - Ross, S. M. *A First Course in Probability*. Pearson Education, diverses edicions.
  - Grinstead, C. M., & Snell, J. L. (1997). *Introduction to Probability*. American Mathematical Society.
- Recursos en Línia:
  - Art of Problem Solving - Derangements
  - Wikipedia: Derangement
  - Wolfram MathWorld: Derangements

Grupo 18: Juan Alejandro Muñoz Berral, Iván Franco Lozano, Gerard Gordó Ramiro

Codi de la Simulació en Minitab

Pseudocodi:

```
Definir n = 10
Definir num_experiments = 100000

contador_exits = 0

Per i = 1 fins num_experiments:
  perm = PermutacióAleatòria( {1,...,n} )
  si Existeix i tal que perm[i] = i llavors
    contador_exits = contador_exits + 1
  fi
Fi

prob_estimada = contador_exits / num_experiments
Mostrar(prob_estimada)
```

Codi Minitab (Macro):

```
# Els paràmetres es poden demanar a l'usuari o fixar aquí

# Suposem n = 10
# Suposem num_experiments = 100000

GMACRO
Name "Simulacio_Barrets"
# Entrades: C1: Índex persones (1 a n)
# Sortides: Es mostra per pantalla la probabilitat
# Es fa servir C2 per generar la permutació

Let K1 = 10     # n
Let K2 = 100000 # num_experiments

# Creem una columna amb els nombres de l'1 al n
Set C1
1:K1
End

Let K3 = 0 # contador_exits

# Bucle d'experiments
# Minitab no té un bucle tradicional, s'ha de fer servir macros.
# Una aproximació és fer servir un bucle de macros via GOTO.

Let K4 = 1
Do K4 = 1:K2

  # Generar una permutació aleatòria dels números 1 a n
  Sample K1 C1 C2;
   WithoutReplacement.

  # Comprovar si hi ha algun i tal que C2[i] = i
  # Podem crear una columna indicadora i sumar el nombre de coincidències
  Let C3 = C2 - C1
```

```
    # Si C3 conté algun zero, hi ha un èxit
    Count C3;
      Equals 0;
      Store K5.

    If K5 > 0
       Let K3 = K3 + 1
    EndIf

EndDo

Let K6 = K3 / K2
Print K6

ENDMACRO
```