Algoritmos em Grafos: Conectividade

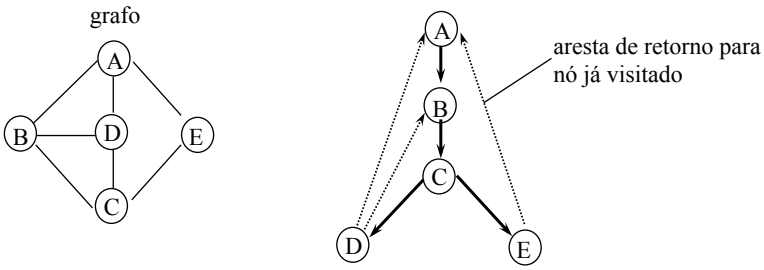
R. Rossetti, A.P. Rocha, J. Pascoal Faria

FEUP, MIEIC, CAL, 2013/2014

Grafos não dirigidos

Conectividade

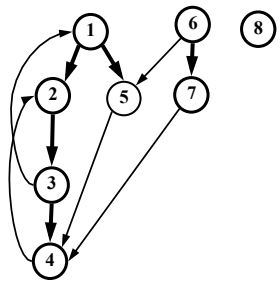
- Um grafo não dirigido é conexo sse uma pesquisa em profundidade a começar em qualquer nó visita todos os nós



Pesquisa em profundidade

```
1:class Graph { …
2:  void dfs() {
3:    for (Vertex v : vertexSet)
4:       v.visited = false;
5:    for (Vertex v : vertexSet)
6:      if (! v.visited)
7:        dfs(v);
          //v passa a ser raiz duma árvore dfs
8:  }
9:  void dfs( Vertex v ) {
10:   v.visited = true;
11:     // fazer qualquer coisa c/ v aqui
12:   for(Edge e : v.adj)
13:     if( ! e.dest.visited )
14:       dfs( e.dest );
15:     // ou aqui
16:   }
17: }
```

Exemplo em grafo dirigido (vértices numerados por ordem de visita e dispostos por profundidade de recursão):



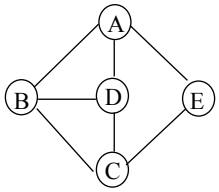
Arestas a traço forte: árvore de expansão em profundidade

Na DFS podem ser produzidas várias árvores, porque a pesquisa pode ser repetida a partir de várias fontes (ao contrário da BFS que só produz uma). O conjunto das várias árvores é conhecido como Floresta DFS.

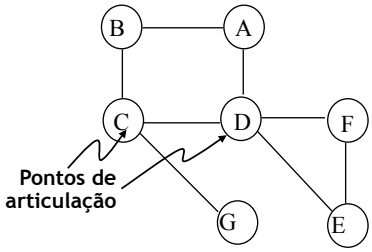
Biconectividade e Pontos de Articulação

- Grafo conexo não dirigido é **biconexo** se não existe nenhum vértice cuja remoção torne o resto do grafo desconexo
- Pontos de articulação - vértices que tornam o grafo desconexo
- Aplicação - rede com tolerância a falhas

Biconexo



Não biconexo



Algoritmo de detecção de pontos de articulação

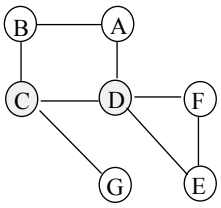
- Início num vértice qualquer
- Pesquisa em profundidade, numerando os vértices ao visitá-los
  - Num(v), em pré-ordem (antes de visitar adjacentes)
- Para cada vértice *v*, na árvore de visita em profundidade, calcular *Low(v)*: o menor número (nível) de vértice que se atinge com zero ou mais arestas na árvore e possivelmente uma aresta de retorno
- Vértice v é ponto de articulação se tiver um filho w tal que Low(w) ≥ Num(v)
- A raiz é ponto de articulação sse tiver mais que um filho na árvore

Cálculo de Low(v)

- Low(v) é mínimo de
  - Num(v)
  - o menor Num(w) de todas as arestas (v, w) de retorno
  - o menor Low(w) de todas as arestas (v, w) da árvore
- Na visita em profundidade, inicializa-se Low(v)=Num(v) antes de visitar adjacentes, e vai-se actualizando o valor de Low(v) a seguir a visita a cada adjacente
- Realizável em tempo O(|E| + |V|)

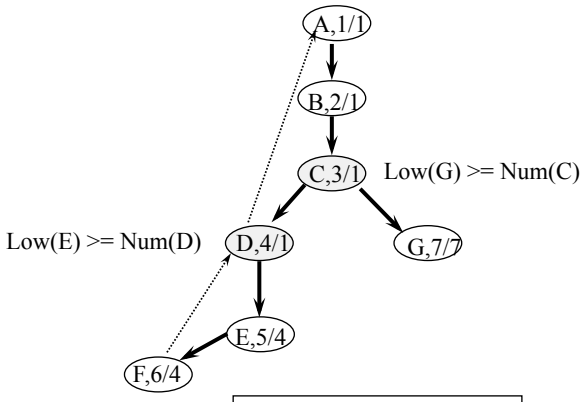
Exemplo

Grafo



Uma árvore de expansão em profundidade

v, Num(v)/Low(v)



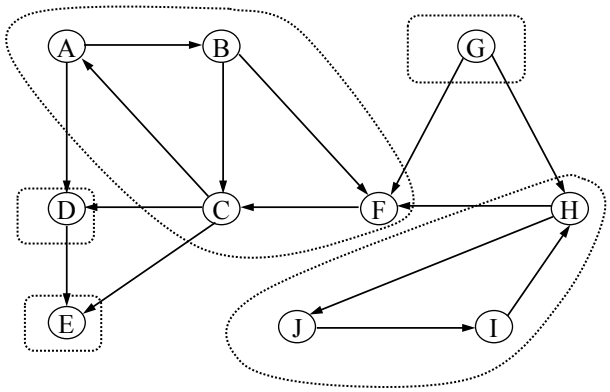
Pontos de articulação: C e D

Pseudo-código

```
// Procura Pontos de Articulação usando dfs
// Contador global e inicializado a 1
void findArt( Vertex v) {
     v.visited = true;
     v.low = v.num = counter++;
     for each w adjacent to v
          if( !w.visited ) {               // ramo da árvore
               w.parent = v;
               findArt(w);
               v.low = min(v.low, w.low);
               if(w.low >= v.num )
                    System.out.println(v, "Ponto de articulação");
          }
          else
             if ( v.parent != w )          //aresta de retorno
               v.low = min(v.low, w.num);
}
```

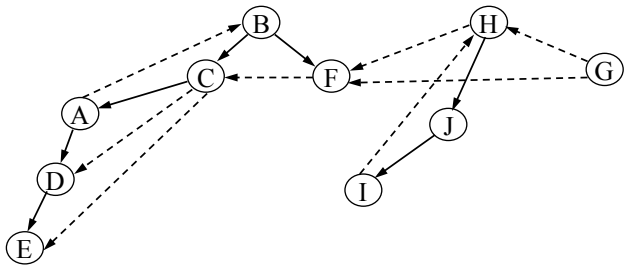

Grafos dirigidos

Componentes fortemente conexos



Árvore de expansão

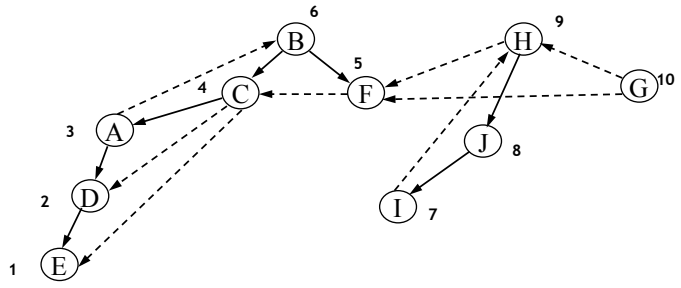
- Pesquisa em profundidade induz uma árvore/floresta de expansão
- Para além das arestas genuínas da árvore, há arestas para nós já marcados
  - arestas de retorno para um antepassado – (A,B), (I,H)
  - arestas de avanço para um descendente – (C,D), (C,E)
  - arestas cruzadas para um nó não relacionado – (F,C), (G,F)



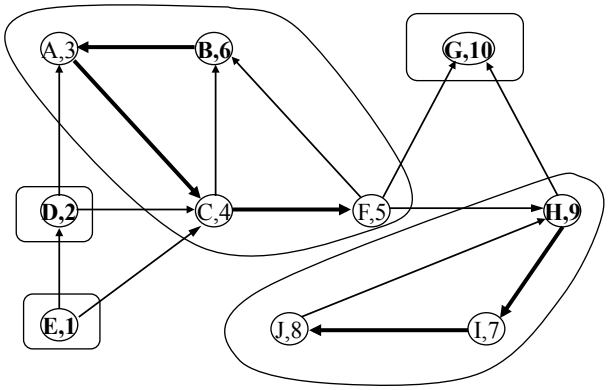
Componentes fortemente conexos

- Método:
  - Pesquisa em profundidade no grafo G determina floresta de expansão, numerando vértices em pós-ordem (ordem inversa de numeração em pré-ordem)
  - Inverter todas as arestas de G (grafo resultante é Gr)
  - Segunda pesquisa em profundidade, em Gr, começando sempre pelo vértice de numeração mais alta ainda não visitado
  - Cada árvore obtida é um componente fortemente conexo, i.e., a partir de um qualquer dos nós pode chegar-se a todos os outros

Numeração em pós-ordem

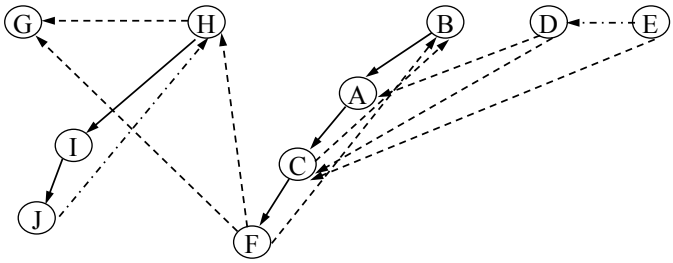


Inversão das arestas e nova visita



G_r: obtido de G por inversão de todas as arestas
Numeração: da travessia de G em pós-ordem

Componentes fortemente conexos



Travessia em pós-ordem de G_r
Componentes fortemente conexos:
{G}, {H, I, J}, {B, A, C, F}, {D}, {E}

Componentes fortemente conexos *

- Prova
  - mesmo componente => mesma árvore de expansão
    - se dois vértices v e w estão no mesmo componente, há caminhos de v para w e de w para v em G e em Gr; se v e w não pertencerem à mesma árvore de expansão, também não estão no mesmo componente
  - mesma árvore de expansão => mesmo componente
    - i.e., há caminhos de v para w e de w para v ou, equivalentemente, se x for a raiz de uma árvore de expansão em profundidade, há caminhos de x para v e de v para x, de x para w e de w para x e portanto entre v e w
    - como v é descendente de x na árvore de Gr, há um caminho de x para v em Gr, logo de v para x em G; como x é a raiz tem o maior número de pós-ordem na primeira pesquisa; portanto, na primeira pesquisa, todo o processamento de v se completou antes de o trabalho em x ter terminado; como há um caminho de v para x, segue-se que v tem que ser um descendente de x na árvore de expansão — caso contrário v terminaria depois de x; isto implica um caminho de x para v em G.

Referência e informação adicional

- "Data Structures and Algorithm Analysis in Java", Second Edition, Mark Allen Weiss, Addison Wesley, 2006