

Nome do estudante: ..... N.º .....

**Informação aos estudantes:** A consulta permitida inclui slides das aulas teóricas, livros e outros materiais impressos. Não serão permitidas folhas manuscritas avulsas de qualquer tipo ou acesso à Internet (Tablets, portáteis, etc.) Telemóveis deverão permanecer DESLIGADOS durante a duração do exame. Responder as questões 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6 em folhas separadas.

1. [4 Valores] Suponha que está a planear uma longa viagem. Ao longo do caminho existem  $n$  hotéis aos quilómetros  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  ( $a_i$  corresponde, portanto, à distância desde o início da viagem, de  $a_0$ ). Quando pretender parar para passar a noite, terá de o fazer, obrigatoriamente num destes hotéis (mas pode escolher em que hotéis pernoitar). É obrigatório parar no último hotel, pois este é o seu destino final. Foi decidido que a distância ideal para viajar diariamente é, sensivelmente, 300 Km. Logo, se  $x$  for o número de quilómetros que se viajou num dia, assume-se que a função de custo a minimizar é  $(300 - x)^2$ .

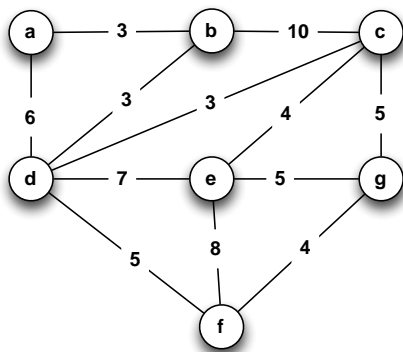
- a) [1.5 valores] Elabore e descreva uma solução gananciosa, de tempo linear, para a escolha de quais os hotéis a pernoitar. Indique qual a complexidade temporal da sua solução.
- b) [1.5 valores] Sendo a fórmula de recorrência que minimiza a função de custo:

$$C_i = \min_{0 \leq k < i} (C_k + (300 - (a_i - a_k))^2)$$

Escreva um algoritmo (em pseudo-código) que, utilizando programação dinâmica, permita obter a solução ótima para este problema.

- c) [1 valores] Analise o algoritmo quanto à sua complexidade temporal e espacial.

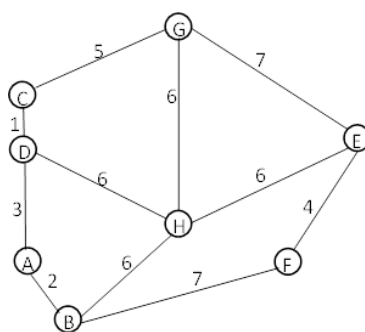
2. [3 Valores] Atente ao seguinte grafo não-dirigido, e determine qual o caminho mais curto entre os nós  $a$  e  $g$ , indicando qual o algoritmo que utilizou e mostrando todos os passos intermédios.



3. [3,5 valores] Uma banda de rock pretende efetuar um conjunto de concertos em 5 cidades europeias: Paris, Berlim, Lisboa, Londres, Atenas. A companhia aérea EulerAirlines possui uma promoção nos seus voos que a banda quer aproveitar. Mas essa promoção só é válida para a 1ª viagem de um determinado voo. A tabela seguinte apresenta os voos da companhia EulerAirlines com promoção (assinalados com “1”). A linha representa a cidade de origem e a coluna a cidade de destino.

	Paris	Berlim	Lisboa	Londres	Atenas
Paris	0	0	1	0	1
Berlim	0	0	1	1	0
Lisboa	1	1	0	1	1
Londres	0	1	0	0	0
Atenas	1	0	1	0	0

- a) [1 valor] Para aproveitar a promoção de EulerAirlines, é possível determinar um circuito de Euler para a banda realizar? Se sim, enumere-o. Se não, explique porquê.
- b) [1 valor] E é possível determinar um caminho de Euler? Se sim, enumere-o. Se não, explique porquê.
- c) [1,5 valores] Por uma estratégia de negócio, a companhia EulerAirlines decide agora só efetuar voos de ida e volta (grafo não dirigido), entre os pares de cidades Atenas-Paris, Atenas-Lisboa, Paris-Lisboa, Lisboa-Berlim, Londres-Berlim. Analise esta estratégia de negócio, calculando os pontos de articulação do grafo representativo dos voos da companhia. Discuta tal estratégia.
4. [4 valores] Considere o seguinte grafo pesado não dirigido, para o qual se pretende determinar uma árvore de expansão mínima.



- a) [1 valor] Enumere, pela ordem obtida com o algoritmo de Prim, as arestas que compõem a árvore de expansão mínima.
- b) [1 valor] Uma árvore de expansão mínima pode conter ciclos? Justifique.
- c) [2 valor] Para um grafo pesado não dirigido  $G$  é determinada a árvore de expansão mínima  $M$ . Suponha que se diminuiu o peso de uma aresta não pertencente a  $M$ .  $M$  continua a ser uma árvore de expansão mínima de  $G$ ? Se não, apresente um algoritmo, em texto ou pseudo-código, que determine a nova árvore de expansão mínima em tempo linear.

5. [4 valores] Cobertura de Conjuntos (*Set-Cover Problem*, SCP) é um problema clássico em Teoria da Complexidade, que pode ser definido da seguinte forma: dado um conjunto de elementos  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ , chamado universo, e um conjunto  $S$  de  $n$  conjuntos cuja união resulta no universo, o problema de cobertura de conjuntos é encontrar o menor subconjunto de  $S$  cuja união contenha todos os elementos do universo. Mais formalmente, dado um universo  $U$  e uma família de  $S$  de subconjuntos de  $U$ , uma *cobertura* de  $U$  é uma família  $C \subseteq S$  de conjuntos cuja união é  $U$ .
- a) [1 valor] Reformule o problema da Cobertura de Conjuntos (SCP) como um problema de decisão.
- b) [3 valores] Considere agora a cobertura de vértices, que é um problema NP-completo conhecido (*Vertex-Cover Problem*, VCP), sendo definido da seguinte forma: Dado um grafo  $G=(V, E)$ , uma cobertura dos vértices de  $G$  é um subconjunto  $W$  de  $V$  tal que para toda aresta  $\{i, j\} \in E$  tem-se  $i \in W$  ou  $j \in W$ . Assim sendo, prove por redução de VCP ( $VCP \geq_p SCP$ ), que SCP é NP-completo, sucintamente explicando, passo-a-passo, o processo utilizado.
6. [1,5 valores] Numa universidade, ao início de cada semestre os estudantes ficam a saber, ao matricular-se numa disciplina de laboratório de informática, o computador que irão ocupar na sala de aula, pela duração do semestre. Cada computador dos laboratórios pode ser ocupado por até dois estudantes e a função de atribuição dos lugares, invocada no momento da matrícula, implementa um algoritmo aleatório. Considere  $E$  o conjunto dos estudantes da universidade,  $L$  o conjunto das disciplinas que necessitam de laboratórios de informática,  $S$  o conjunto das salas de computadores disponíveis,  $c$  uma função ( $c: S \rightarrow \mathbb{N}^+$ ) que retorna o número de lugares disponíveis numa sala, e  $|E| \gg |L| \gg |S|$ . Sabendo-se que um estudante pode matricular-se em muitas disciplinas de laboratório num semestre, uma função de geração de números pseudo-aleatórios de ciclo (ou período) de tamanho  $(|L| \times |S|)/2$  será adequada para a função de atribuição de lugares? Justifique a sua resposta.

**Bom Exame!**