Prova com consulta. Duração: 2h00m. Exame Época Recurso

Nome do estudante: .... Nº..................

Informação aos estudantes: A consulta permitida inclui slides das aulas teóricas, livros e outros materiais impressos. Não serão permitidas folhas manuscritas avulsas de qualquer tipo ou acesso à Internet (Tablets, portáteis, etc.) Telemóveis deverão permanecer DESLIGADOS durante a duração do exame. Responder os pares de questões (1, 2), (3, 4), (5, 6) em folhas separadas – uma folha para cada par.

1. [3,5 Valores] Salvador, o lenhador, serra um tronco de árvore por onde quisermos (numa das marcas existentes no tronco), sendo o preço cobrado por um corte dependente do comprimento (total) do pedaço de tronco que está a ser cortado. Imagine-se, por exemplo, que temos um tronco de comprimento L, com *n* marcas por onde se pretende serrar (*1, 2, ..., n*). Por uma questão de simplicidade, vamos assumir que os índices *0* e *n +1* são os extremos (esquerdo e direito) do tronco original de comprimento L. Seja d_i a distância da marca *i* ao extremo esquerdo do tronco, assume-se que $0 = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_n < d_{n+1} = L$. Este problema resume-se a determinar a **melhor sequência de cortes** no tronco por forma a **minimizar o custo total**. Se *c(i,j)* representar o custo de cortar o tronco entre uma marca à esquerda *i* e uma marca à direita *j* e todas as suas marcas intermédias, então a formula que minimiza esta função é:

$$c(i,j) = \boldsymbol{min}_{i<k<j}\left[c(i,k) + c(k,j) + (d_j - d_i)\right]$$

Elabore um algoritmo, em pseudo-código, que resolva este problema, recorrendo à programação dinâmica. Indique qual a complexidade espacial e temporal do mesmo algoritmo.

2. [2,5 Valores] Considere um grafo direcionado pesado *G = (V, E, w)*. Defina-se ***obesidade*** de um caminho *P* como o peso máximo de uma qualquer aresta em *P*. De que forma alteraria o algoritmo de Dijkstra para que, dado um grafo *G* e dois vértices, $u \in V$ e $v \in V$, onde $u \neq v$, este encontrasse a obesidade mínima possível de um caminho de *u* a *v* em *G?*

3. [4 valores] A árvore de codificação de Huffmann é representada na seguinte matriz M, onde "1" na célula *(linha, coluna)* significa que o elemento de índice *coluna* é nó pai do elemento de índice *linha*.

		pai								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
filhos	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	8	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Se um nó tiver dois filhos, considere que o filho de menor índice na matriz é o filho esquerdo.

O dicionário é o seguinte:

índice	1	3	4	6	7
caracter	R	A	S	E	P

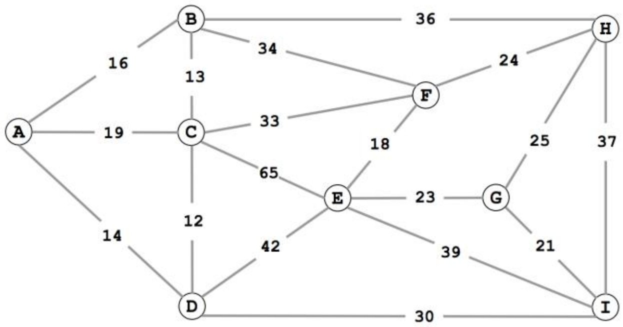
a) [1,5 valor] Apresente a árvore de codificação de Huffmann.

b) [0,5 valor] Quais são os dois caracteres menos comuns?

c) [1 valor] De acordo com a árvore de Huffmann apresentada, escreva a codificação da seguinte mensagem: PASSEAR.

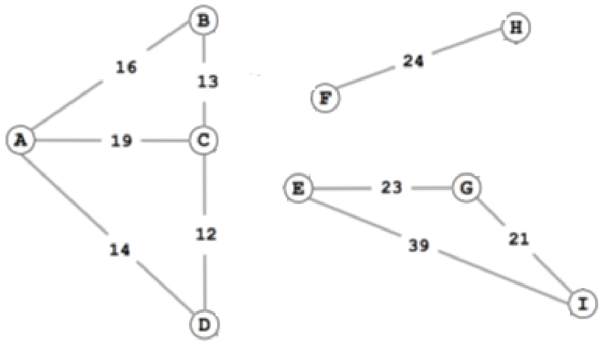
d) [1 valor] Qual a mensagem codificada pela seguinte sequência de bits: 100111011000 ?

4. [3 valores] A figura seguinte representa um possível projeto de um sistema de irrigação, em que os valores apresentados nas arestas indicam a distância entre locais de rega (comprimento das tubulações).

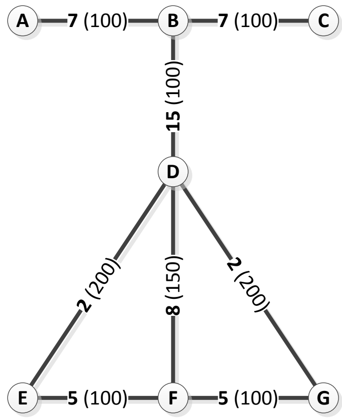


a) [1,5 valor] Determine a configuração ótima de um sistema de irrigação a construir, sabendo que se pretende regar todos os locais (vértices) A, …, I, e minimizar o comprimento de tubulação a usar. Explique.

b) [1,5 valor] Após um estudo mais cuidado, verificou-se que algumas ligações do projeto inicial não são economicamente viáveis, sendo agora o projeto o identificado na figura seguinte. Para implementar agora um sistema de irrigação, pode ser necessário mais que uma bomba de rega. Explique como pode determinar o número de bombas necessárias, usando o algoritmo de Kruskal.



5. **[4 valores]** Agora, considere que o sistema de rega a implementar terá a seguinte configuração, como mostra a figura abaixo. Considere que há duas bombas que alimentam o sistema de rega a uma taxa (litros/hora) constante, localizadas nos pontos A e C. Três aspersores, utilizados para efectivamente regar o campo, estão localizados nos pontos E, F, e G. As linhas indicam as tubulações do sistema, com a sua capacidade (litros/hora) indicada a **bold**, e o seu comprimento (metros), indicado entre parêntesis. Responda, justificadamente, às alíneas seguintes:



a) [2 valores] Qual o fluxo máximo a alimentar o sistema de rega?

b) [1 valor] O que aconteceria com o fluxo máximo ao se elevar a capacidade das tubulações (E, F) e (F, G) para 10 (litros/hora)?

c) [1 valor] O que aconteceria com o fluxo máximo ao se colocar um aspersor a meio da tubulação (B, D)?

6. **[3 valores]** Os estudantes do curso informática de uma universidade organizam-se em grupos para disputar regularmente campeonatos de *pair programming*, em que dois programadores trabalham juntos numa mesma *workstation* para resolver um problema. Há vários níveis nos campeonatos e um estudante pode participar de grupos diferentes. O diretor do curso resolveu então solicitar a implementação de um algoritmo, executável em tempo polinomial, para seleccionar o número mínimo de grupos que, juntos, incluíssem todos os estudantes do curso. A implementação de tal algoritmo é possível? Responda justificadamente.

Caso necessário, considere que os problemas seguintes são reconhecidamente NP-completo. Se desejar, poderá também considerar outros problemas da classe NP-completo, para além dos enunciados abaixo:

<u>Soma dos subconjuntos</u> (*the Subset Sum problem, SS*): Dado um conjunto de inteiros positivos, S, e um inteiro t, o problema resume-se em encontrar um subconjunto $S' \subseteq S$, tal que a soma dos elementos de S' seja t.

<u>Cobertura de vértices</u> (*Vertex-Cover Problem*, VCP): Dado um grafo $\mathbf{G}=(V, E)$, encontrar uma cobertura dos vértices de $\mathbf{G}$ é encontrar um subconjunto W de V tal que para toda aresta $\{i, j\} \in E$ tem-se $i \in \mathbf{W}$ ou $j \in \mathbf{W}$.

Bom Exame!