Algoritmos em Grafos: Fluxo Máximo e Fluxo de Custo Mínimo em Redes de Transporte

R. Rossetti, A.P. Rocha, J. Pascoal Faria

FEUP, MIEIC, CAL, 2013/2014

Índice

- Conceito de rede de transporte
- Fluxo máximo numa rede de transporte
- Fluxo de custo mínimo numa rede de transporte

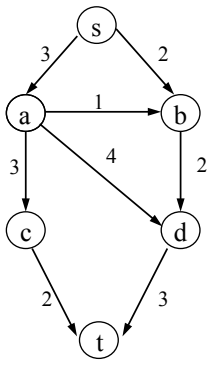
FEUP Universidade do Porto Faculdade de Engenharia
Algoritmos em Grafos: Fluxo máximo em redes de transporte – CAL, 2013/14 ‹#›

Conceito de rede de transporte

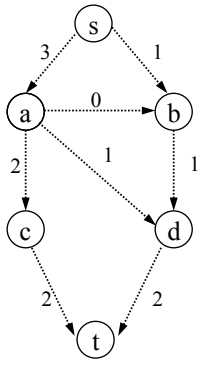
Rede de transporte

- Modelar fluxos conservativos entre dois pontos através de canais com capacidade limitada
  - s: fonte (produtor)
  - t: poço (consumidor)
  - Fluxo não pode ultrapassar a capacidade da aresta
  - Soma dos fluxos de entrada num vértice intermédio igual à soma dos fluxos de saída
- Exemplos:
  - Rede de abastecimento de líquido ponto a ponto
  - Tráfego entre dois pontos
- Em alguns casos, as arestas podem ter custos associados (custo de transportar uma unidade de fluxo)

Rede e capacidades

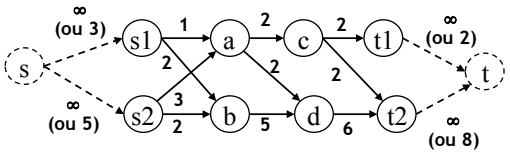


Rede e fluxos



Redes com múltiplas fontes e poços

- Caso de múltiplas fontes e poços (ou mesmo de vértices que podem ser simultaneamente fontes, poços e vértices intermédios) é facilmente redutível ao caso base (uma fonte e um poço)

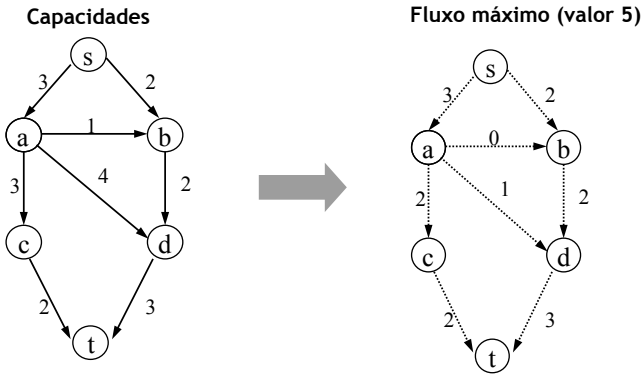


- Se a rede tiver custos nas arestas, as arestas adicionadas têm custo 0

Fluxo máximo numa rede de transporte

Problema

- Encontrar um fluxo de valor máximo (fluxo total que parte de s / chega a t)



Formalização

Dados de entrada:

c_{ij} - capacidade da aresta que vai do nó i a j (0 se não existir)

Dados de saída (variáveis a calcular):

f_{ij} - fluxo que atravessa a aresta que vai do nó i para o nó j (0 se não existir)

Restrições:

$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}, \forall_{ij}$

$\sum_j f_{ij} = \sum_j f_{ji}, \forall_{i \neq s,t}$

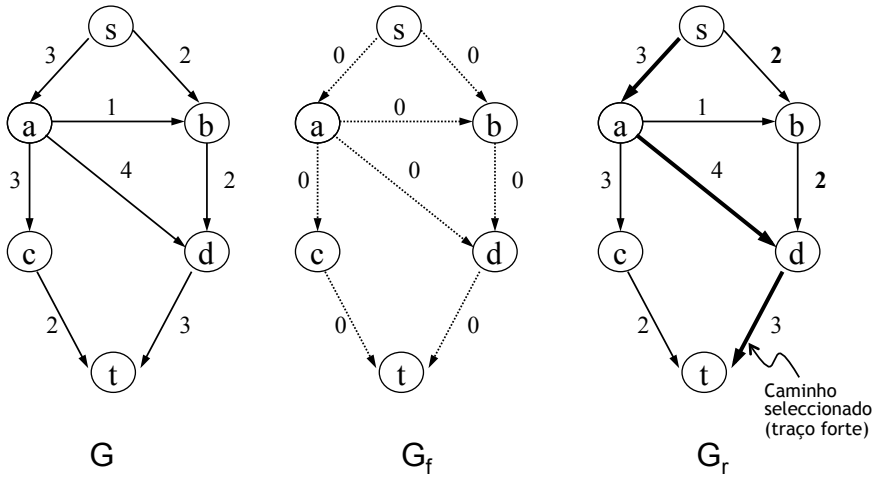
Objectivo:

$\max \sum_j f_{sj}$

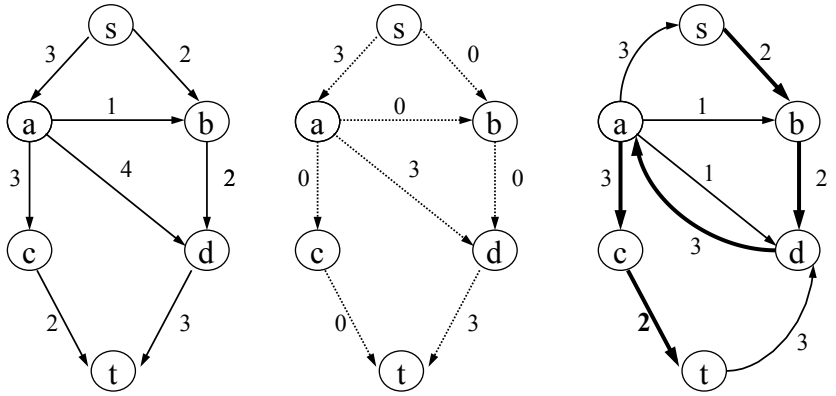
Algoritmo de Ford-Fulkerson (1955)

- Estruturas de dados:
  - G - grafo base de capacidades *c(v,w)*
  - Gf - grafo auxiliar de fluxos *f(v,w)*
    - inicialmente fluxos iguais a 0
    - no fim, tem o fluxo máximo
  - Gr - grafo residual (auxiliar)
    - para cada arco (v, w) em G com c(v,w) > f(v,w), cria-se um arco no mesmo sentido em Gr de capacidade igual a c(v,w) - f(v,w) (capacidade disponível)
    - para cada arco (v, w) em G com f(v,w) > 0, cria-se um arco em sentido inverso em Gr de capacidade igual a f(v,w)
      - arcos necessários para garantir que o algoritmo encontra a solução óptima (ver exemplo)!
- Método (dos caminhos de aumento):
  - Enquanto existirem caminhos entre *s* e *t* em Gr
    - Seleccionar um caminho qualquer em Gr entre *s* e *t* (caminho de aumento)
    - Determinar o valor mínimo (f) nos arcos desse caminho
    - Aumentar esse valor de fluxo (f) a cada um dos arcos respectivos em Gf
    - Recalcular Gr

Exemplo: estado inicial



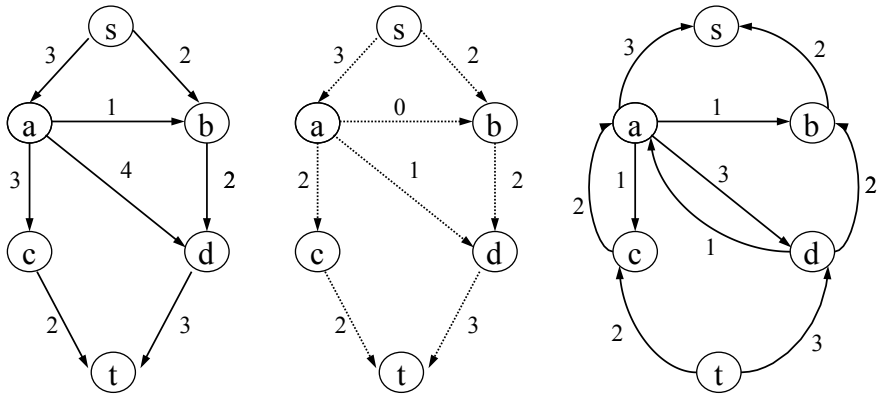
Exemplo: 1ª iteração



G G_f G_r

Se não tivesse as arestas em sentido inverso, parava aqui com solução não óptima!

Exemplo: 2ª iteração



G G_f G_r

FIM

(valor do fluxo máximo = 5)

Análise do algoritmo de Ford-Fulkerson

- Se as capacidades forem números racionais, o algoritmo termina com o fluxo máximo
- Se as capacidades forem inteiros e o fluxo máximo M
  - Algoritmo tem a propriedade de integralidade: os fluxos finais são também inteiros
  - Bastam M iterações (fluxo aumenta pelo menos 1 por iteração)
  - Cada iteração pode ser feita em tempo O(|E|)
  - Tempo de execução total: O(M |E|) – mau

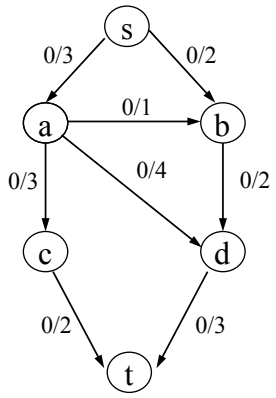
Algoritmo de Edmonds-Karp (1969) *

- Em cada iteração do algoritmo de Ford-Fulkerson escolhe-se um caminho de aumento de comprimento mínimo
  - O exemplo apresentado anteriormente já obedece a este critério!
  - Nº máximo de aumentos é |E|.|V| (*ver explicação nas referências*)
  - Um caminho de aumento mais curto pode ser encontrado em tempo O(|E|) através de pesquisa em largura (*ver explicação nas referências*)
  - Tempo de execução: $O(|E|^2 |V|)$
- Interessa apenas como preparação para o algoritmo de Dinic

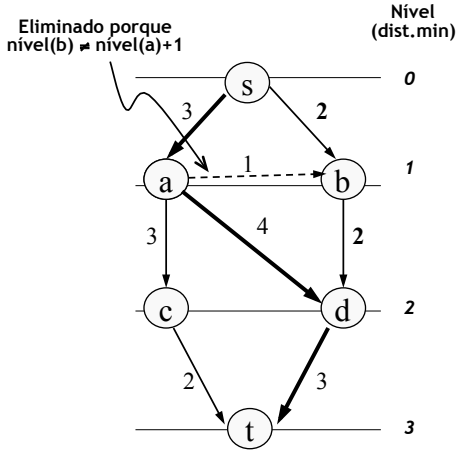
Algoritmo de Dinic (1970)

- Refina algoritmo de Edmonds-Karp, evitando trabalho repetido a achar sucessivos caminhos de aumento de igual comprimento mínimo:
  1. Inicializar os grafos de fluxos (*Gf*) e de resíduos (*Gr*) como antes
  2. Calcular o nível de cada vértice, igual à distância mínima a *s* em *Gr*
  3. Se nível(*t*) = ∞, terminar
  4. "Esconder" as arestas *(u,v)* de *Gr* em que nível(*v*) ≠ nível(*u*) + 1
     - Não podem fazer parte de um caminho mais curto de *s* para *t* em *Gr*!
     - Sem elas, qualquer caminho de *s* para *t* em *Gr* tem comprimento mínimo!
  5. Enquanto existirem caminhos de aumento em *Gr* (ignorando as arestas escondidas), seleccionar e aplicar um caminho de aumento qualquer
     - Se forem adicionadas a Gr arestas de sentido inverso ao fluxo, ficam também escondidas, pois apenas servem para encontrar caminhos mais compridos
  6. Se nível(*t*) = |V|-1, terminar; senão saltar para o passo 2 para recalcular os níveis (voltando a considerar todas as arestas de *Gr*)

Exemplo: estado inicial

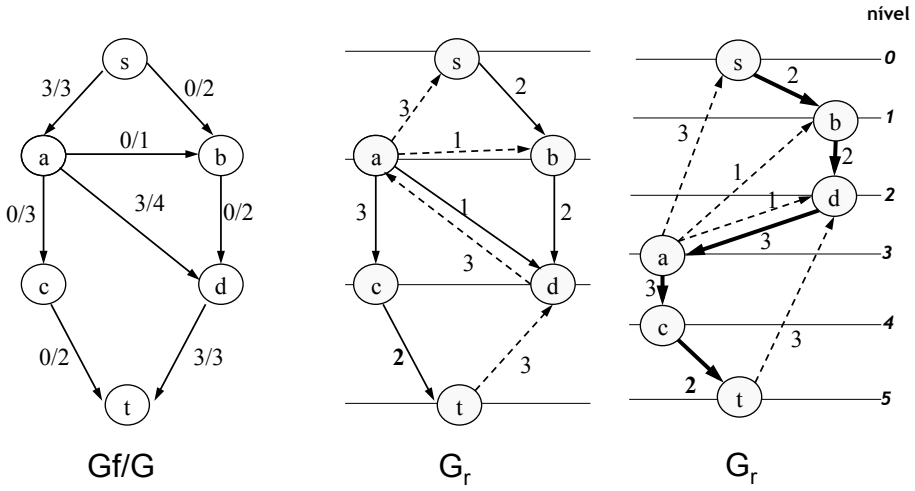


Gf/G



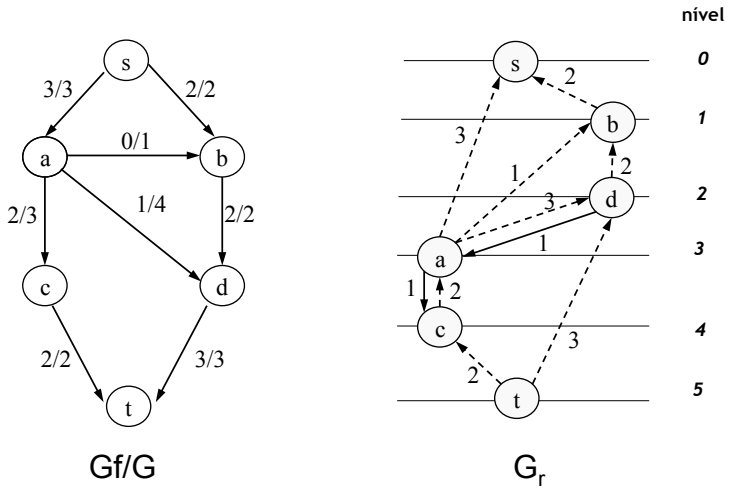
G_r (nivelado)

Exemplo: 1ª iteração



Não há mais caminhos de *s* para *t* deste nível (comprimento 3) ⇒ RENIVELAR

Exemplo: 2ª iteração



Não há mais caminhos de *s* para *t* deste nível e nível(t) = |V|-1 ⇒ TERMINAR

Eficiência do algoritmo de Dinic *

- Passo 2
  - Cada execução pode ser feita em tempo O(|E|) (assumindo |E|>|V|) por uma simples pesquisa em largura (*ver explicação das referências*)
  - O nº máximo de execuções é |V|, pois cada nova execução só acontece quando se esgotaram os caminhos de aumento de um dado comprimento, e o comprimento dos caminho de aumento só pode crescer até |V|
- Passo 5
  - O nº máximo de execuções (selecção e aplicação de um caminho de aumento) é o nº máximo de caminhos de aumento, que é o mesmo que no algoritmo de Edmonds-Karp, ou seja, O(|E|.|V|) (O(|E|) para cada comprimento, multiplicado por |V| comprimentos possíveis)
  - Cada caminho de aumento pode ser encontrado em tempo O(|V|) no grafo Gr (ignorando as arestas escondidas) por simples pesquisa em profundidade, pois já não há que ter a preocupação de encontrar um caminho mais curto
- Total: $O(|V|^2 |E|)$ (melhoria significativa para grafos densos)

Algoritmo de Dinic em redes unitárias *

- Rede unitária:
  - Capacidades unitárias
  - Todos os vértices excepto *s* e *t* têm no máximo uma aresta a entrar ou uma aresta a sair
- Surge em problemas de emparelhamento em grafos bipartidos
- Nesse caso o nº máximo de "renivelamentos" é $|V|^{1/2}$
- Para cada nível/comprimento, os vários caminhos de aumento podem ser seleccionados e aplicados em tempo O(|E|), numa única passagem de visita em profundidade pelo grafo nivelado
  - Uma vez que as capacidades são unitárias, as arestas usadas num caminho não têm de voltar a ser consideradas
- Total: $O(|V|^{1/2} |E|)$

Algoritmos mais eficientes *

year	authors	complexity
1955	Ford-Fulkerson [19]	$O(mnU)$
1970	Dinic [15]	$O(mn^2)$
1969	Edmonds-Karp [17]	$O(m^2n)$
1972	Dinic [15], Edmonds-Karp [17]	$O(m^2 \log U)$
1973	Dinic [16], Gabow [20]	$O(mn \log U)$
1974	Karzanov [37]	$O(n^3)$
1977	Cherkassky [11]	$O(n^2m^{1/2})$
1980	Galil-Naamad [21]	$O(mn(\log n)^2)$
1983	Sleator-Tarjan [44]	$O(mn \log n)$
1986	Goldberg-Tarjan [26]	$O(mn \log(n^2/m))$
1987	Ahuja-Orlin [3]	$O(mn + n^2 \log U)$
1987	Ahuja-Orlin-Tarjan [4]	$O(mn \log(2 + n\sqrt{\log U}/m))$
1990	Cheriyan-Hagerup-Mehlhorn [9]	$O(n^3/\log n)$
1990	Alon [5]	$O(mn + n^{8/3} \log n)$
1992	King-Rao-Tarjan [38]	$O(mn + n^{2+\epsilon})$
1993	Phillips-Westbrook [42]	$O(mn \log_{m/n} n + n^2(\log n)^{2+\epsilon})$
1994	King-Rao-Tarjan [39]	$O(mn \log_{m/(n \log n)} n)$
1997	Goldberg-Rao [23]	$O(\min\{m^{1/2}, n^{2/3}\}m \log(n^2/m) \log U)$

(m = |E|, n = |V|, U = capacidade máxima)

T. Asano and Y. Asano: recent developments in Maximum Flow Algorithms. Journal of the Operations Research, 1 (2000).

Dualidade entre fluxo máximo e corte mínimo *

- Teorema: O valor do fluxo máximo numa rede de transporte é igual à capacidade do corte mínimo
  - Um corte *(S,T)* numa rede de transporte *G=(V,E)* com fonte *s* e poço *t* é uma partição de *V* em conjuntos *S* e *T=V-S* tal que *s∈S* e *t∈T*
  - A capacidade de um corte *(S,T)* é a soma das capacidades das arestas cortadas dirigidas de *S* para *T*
  - Um corte mínimo é um corte cuja capacidade é mínima

Cortes mínimos na rede do exemplo: