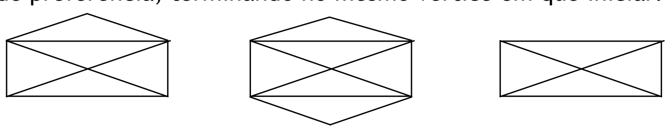
Algoritmos em Grafos: Circuitos de Euler e Problema do Carteiro Chinês

R. Rossetti, A.P. Rocha, J. Pascoal Faria

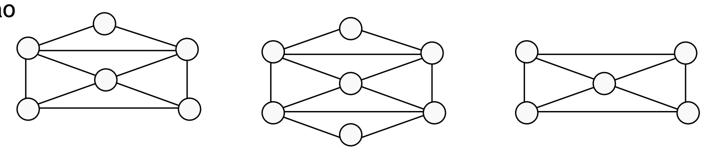
FEUP, MIEIC, CAL, 2013/2014

Circuitos de Euler

- Puzzle: desenhar as figuras abaixo sem levantar o lápis e sem repetir arestas; de preferência, terminando no mesmo vértice em que iniciar.



- Reformulação como problema em Teoria de Grafos: pôr um vértice em cada intersecção



- **Caminho de Euler**: caminho que visita cada aresta exatamente uma vez
- Problema resolvido por Euler em 1736 e que marca o início da Teoria dos Grafos
- **Circuito de Euler:** caminho de Euler que começa e acaba no mesmo vértice

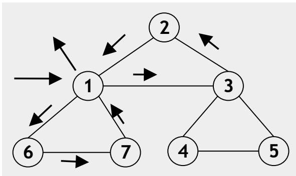
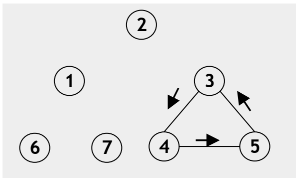
Condições necessárias e suficientes

- Um grafo *não dirigido* contém um *circuito* de Euler sse
  (1) é conexo e
  (2) cada vértice tem grau (nº de arestas incidentes) par.
- Um grafo *não dirigido* contém um *caminho* de Euler sse
  (1) é conexo e
  (2) todos menos dois vértices têm grau par (estes dois vértices serão os vértices de início e fim do caminho).
- Um grafo *dirigido* contém um *circuito* de Euler *sse*
  (1) é (fortemente) conexo e
  (2) cada vértice tem o mesmo grau de entrada e de saída.
- Um grafo *dirigido* contém um *caminho* de Euler *sse*
  (1) é (fortemente) conexo e
  (2) todos menos dois vértices têm o mesmo grau de entrada e de saída, e os dois vértices têm graus de entrada e de saída que diferem de 1.

Método baseado em pesquisa em profundidade para encontrar um circuito de Euler

- Método:
  1. Escolher um vértice qualquer e efetuar uma pesquisa em profundidade a partir desse vértice (se o grafo satisfizer as condições necessárias e suficientes, esta pesquisa termina necessariamente no vértice de partida, formando um circuito, embora não necessariamente de Euler)
  2. Enquanto existirem arestas por visitar
     2.1 Procurar o primeiro vértice no caminho (circuito) obtido até ao momento que possua uma aresta não percorrida
     2.2 Lançar uma sub-pesquisa em profundidade a partir desse vértice (sem voltar a percorrer arestas já percorridas)
     2.3 Inserir o resultado (circuito) no caminho principal
- Tempo de execução: O(|E| + |V|)
  - Cada vértice e aresta é percorrido uma única vez
  - Cada vez que se percorre um adjacente, avança-se o apontador de adjacentes (para não voltar a percorrer as mesmas arestas)
  - Usam-se listas ligadas para efetuar inserções em tempo constante

Exemplo em grafo não dirigido

	Arestas por visitar	Caminho desta iteração	Caminho acumulado
1ª iter.		1-3*-2-1-6-7-1 Com arestas por visitar	1-3*-2-1-6-7-1
2ª iter.		3-4-5-3	1-3-4-5-3-2-1-6-7-1 (Circuito de Euler)

Problema do carteiro chinês (*Chinese postman problem*)

- Dado um grafo pesado conexo G=(V,E), encontrar um caminho fechado (i.e., com início e fim no mesmo vértice) de peso mínimo que atravesse cada aresta de *G* pelo menos uma vez.
  - A um caminho nessas condições chama-se *percurso ótimo do carteiro Chinês*.
  - A qualquer caminho fechado (não necessariamente de peso mínimo) que atravesse cada aresta de *G* pelo menos uma vez chama-se *percurso do carteiro*.
- Problema estudado pela primeira vez p/ Mei-Ku Kuan em 1962, relacionado com a distribuição de correspondência ao longo de um conjunto de ruas, partindo e terminando numa estação de correios.
- Se o grafo *G* for Euleriano, então qualquer circuito de Euler é um percurso ótimo do carteiro Chinês.
- Se o grafo *G* não for Euleriano, pode-se construir um grafo Euleriano *G** duplicando algumas arestas de *G*, selecionadas por forma a conseguir um grafo Euleriano com peso total mínimo – ver a seguir. Nunca é necessário visitar cada aresta mais do que duas vezes!

Algoritmo para achar um percurso óptimo do carteiro chinês num grafo não dirigido

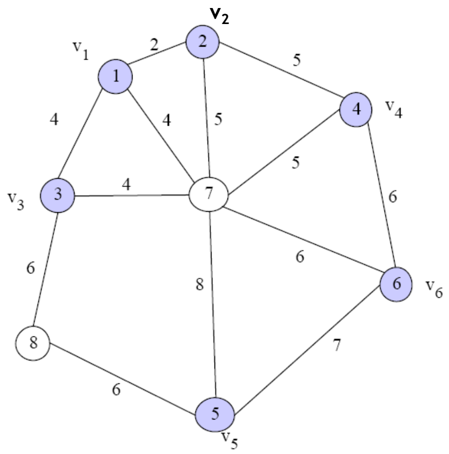
1. Achar todos os vértices de grau ímpar (com nº ímpar de arestas incidentes) em *G*. Seja *k* o nº (par!) destes vértices. Se *k*=0, fazer *G**=*G* e saltar para o passo 6.
2. Achar os caminhos mais curtos (e distâncias mínimas) entre todos os pares de vértices de grau ímpar em *G*.
3. Construir um grafo completo *G'* com os vértices de grau ímpar de *G* ligados entre si por arestas de peso igual à distância mínima calculada no passo 2.
4. Encontrar um emparelhamento perfeito de peso mínimo em *G'* (ver a seguir). Isto corresponde a emparelhar os vértices de grau ímpar de *G*, por forma a minimizar a soma das distâncias entre vértices emparelhados.
5. Para cada par *(u, v)* no emparelhamento perfeito encontrado, adicionar pseudo-arestas (arestas paralelas duplicadas) a *G* ao longo de um caminho mais curto entre *u* e *v*. Seja G* o grafo resultante.
6. Achar um circuito de Euler em G*. Este circuito é um percurso óptimo do carteiro Chinês.

Realização do passo 4

- Passo mais complexo
- Um emparelhamento perfeito é um emparelhamento que envolve todos os vértices
- O problema de encontrar um emparelhamento perfeito de peso mínimo pode ser reduzido ao problema de encontrar um emparelhamento de peso máximo num grafo genérico por uma simples mudança de pesos
  - Basta substituir cada peso w_{ij} por $M+1-w_{ij}$, *em* que *M* é o peso da aresta mais pesada
  - Sendo o grafo completo e com número par de vértices, um emparelhamento de peso máximo é necessariamente perfeito
- Um emparelhamento de peso máximo num grafo genérico pode ser encontrado em tempo polinomial - ver referências

Exemplo (1/4)

- Grafo *G* e vértices de grau ímpar (sombreados)



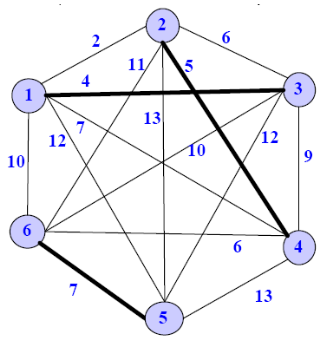
Exemplo (2/4)

- Distâncias (pelo caminho mais curto) entre todos os pares de vértices de grau ímpar

$d(v_i,v_j)$	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	-	2	4	7	12	10
v2		-	6	5	13	11
v3			-	9	12	10
v4				-	13	6
v5					-	7
v6						-

Exemplo (3/4)

- Grafo G' correspondente (com vértices unidos por arestas de peso igual à distância) e emparelhamento perfeito de peso mínimo (arestas a traço forte):



Exemplo (4/4)

- Grafo G* correspondente, com uma possível numeração das arestas ao longo de um circuito de Euler (distâncias não são mostradas):