Prova com consulta. Duração: 2h00m. Exame Época Normal

Nome do estudante: ....

Informação aos estudantes: A consulta permitida inclui slides das aulas teóricas, livros e outros materiais impressos. Não serão permitidas folhas manuscritas avulsas de qualquer tipo. Responder as questões 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6 em folhas separadas.

1. [5 Valores] Numa prova de sobrevivência, os concorrentes serão abandonados numa ilha deserta. Para os ajudar a superar os obstáculos da prova, podem levar um conjunto de itens distintos (apenas um de cada) de uma lista predefinida *I*, desde que estes não excedam a capacidade *C* (em peso) da sua mochila. Os concorrentes conhecem os obstáculos a ultrapassar, logo conseguem atribuir um valor *v* diferente (mediante a facilidade que lhes concede a ultrapassar os obstáculos) a cada item, tendo estes pesos distintos.

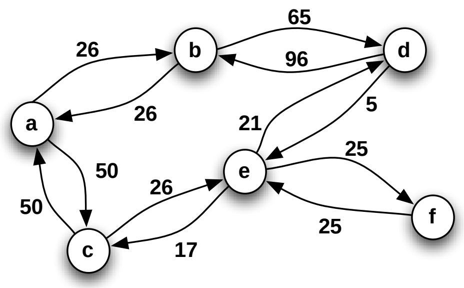
a) [2 Valores] Elabore uma solução gananciosa para a escolha de qual a melhor combinação de itens a levar.

b) [3 Valores] Este problema é uma variante do *problema da mochila*, onde apenas temos um exemplar de cada item a colocar na mochila. Sendo $f(j, w)$, a melhor solução de peso w após considerar j itens, a formula dada para a solução ótima será:

$$f(j,w) = \begin{cases} f(j-1,w), & w + w_j > C \\ \max\limits_{restantes\ itens} \begin{cases} f(j-1,w) \\ f(j-1, w-w_j) + v_j \end{cases}, & nos\ restantes\ casos \end{cases}$$

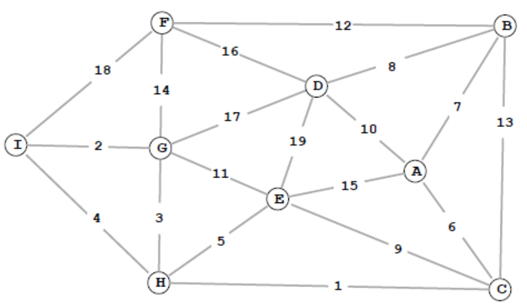
Elabore o algoritmo que permita obter a solução ótima para este problema.

2. [3 Valores] Atente ao seguinte grafo dirigido:



Determine qual o caminho mais curto entre os nós *a* e *f*.

3. [4 Valores] Considere o grafo pesado não dirigido apresentado na figura abaixo. Os pesos das arestas são valores inteiros w, sendo 1 ≤ w ≤ 19.



a) **[1 Valor]** Indique a sequência de arestas da árvore de expansão mínima na ordem pela qual são consideradas quando aplica o algoritmo de Prim. Considere A o vértice inicial.

b) **[1 Valor]** Uma nova aresta D-I é adicionada ao grafo. Para que a nova aresta D-I pertença à árvore de expansão mínima, qual a gama de valores possível para o peso desta aresta? Explique.

c) **[2 Valores]** Seja T uma árvore de expansão mínima de um grafo pesado G que contém V vértices. Descreva um algoritmo O(V) para determinar se T se mantém uma árvore de expansão mínima após a inserção, no grafo G, de uma nova aresta x-y de peso w.

4. [**3 Valores**] É conhecida a sequência de ADN um indivíduo: CGTA. Pretende-se comparar esta sequência de ADN com duas outras: seqA=ACGT e seqB=GAT. Determine qual a sequência de ADN (seqA ou seqB) mais próxima da sequência de ADN do indivíduo, efetuando o cálculo da distância de edição para pesquisa aproximada de strings. Considere que <u>apenas são permitidas operações de inserção e remoção</u> de caracteres (a operação de substituição é inválida). Apresente todos os cálculos que efetuar.

5. [1 valor] Considere que um algoritmo aleatório precisa manipular objetos com atributos (membros-dado) implementados como variáveis aleatórias. Sendo o conjunto total de objetos instanciados **S** = $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, com $\mathbf{V}^s$ variáveis aleatórias $\{v^s{}_1, v^s{}_2, \ldots, v^s{}_m\}$. Sendo $k^{s,v}$ o número máximo de vezes que se atribui valores aos atributos aleatórios de cada objeto, qual o tamanho mínimo necessário do ciclo (ou período), *C*, a ser garantido pela função de geração de números pseudo-aleatórios?

6. [4 valores] Na teoria dos grafos, um *clique* de um grafo não dirigido é um subconjunto dos seus vértices tal que, para quaisquer pares de vértices *u* e *v* neste subconjunto, existe uma aresta do grafo que liga os vértices *u* e *v*. Mais formalmente, dado um grafo não dirigido **G** = (**V**, **E**), um subconjunto $\mathbf{V_C} \subseteq \mathbf{V}$ é um *clique* do grafo **G** se, e se somente, $\forall\, u, v \in \mathbf{V_C}$ então $(u, v) \in \mathbf{E}$.

a) **[1 valor]** Reformule o problema do *clique* em grafos não dirigidos, *C*, como um problema de decisão.

Considere também o problema do Conjunto Independente (*Independent Set* ou *IS*), que é um problema *NP*-completo conhecido, sendo definido da seguinte forma: Dado um grafo **G** = (**V**, **E**), o grafo **G** tem um conjunto independente $\mathbf{V_I}$ de tamanho *k*, onde $\mathbf{V_I} \subseteq \mathbf{V}$, tal que não há dois vértices em $\mathbf{V_I}$ que partilham uma aresta em **E**?

b) **[3 valores]** Prove, por redução de *IS* ($IS \geq_P C$), que *C* é NP-completo, sucintamente explicando, passo-a-passo, o processo utilizado.

Bom Exame!