Representação de Curvas e Superfícies

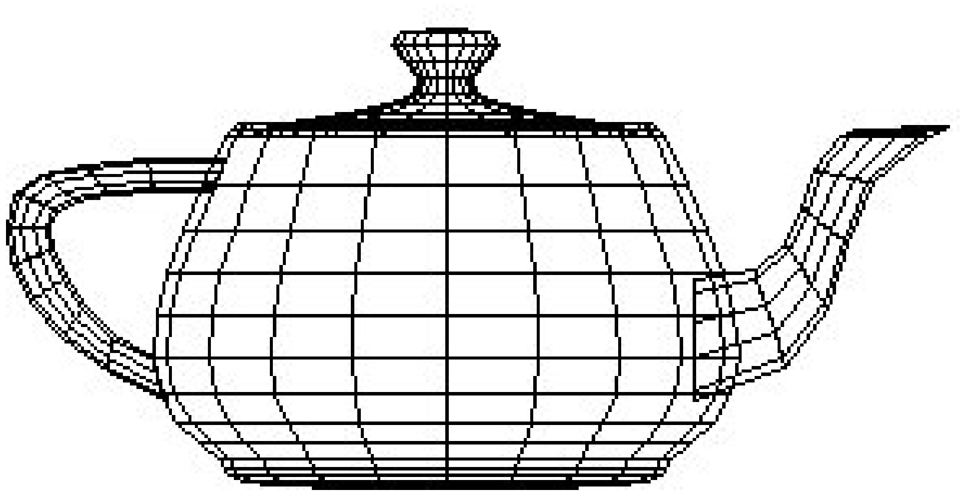
Sistemas Gráficos/
Computação Gráfica e Interfaces

Representação de Curvas e Superfícies

Representação de superfícies: permitem descrever objectos através das suas faces. As três representações mais comuns são:

- Malha poligonal
- Superfícies paramétricas bicúbicas
- Superfícies quadráticas

Representação paramétricas de curvas: importantes na computação gráfica 2D e pelo facto das superfícies paramétricas serem uma generalização destas curvas.



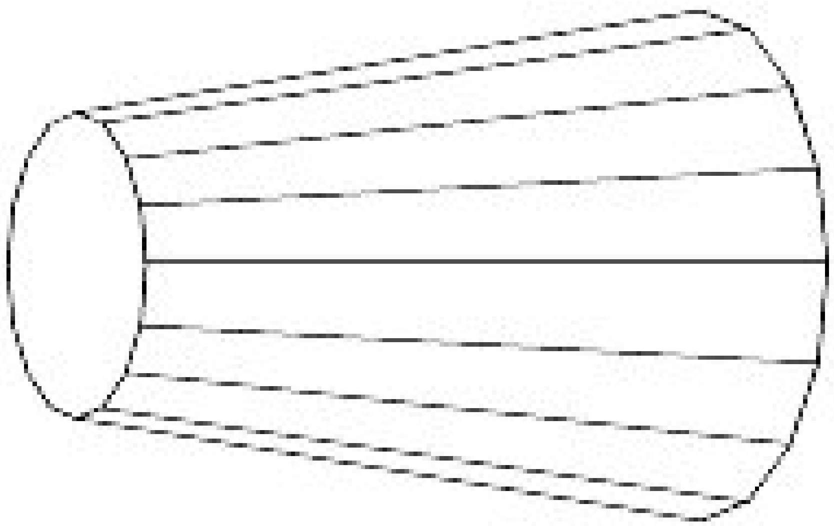
"Tea-pot" modelado por superfícies curvas suaves (bicúbicas).

Modelo de referência na Computação Gráfica, nomeadamente para teste de novas técnicas de realismo de textura e superfície.

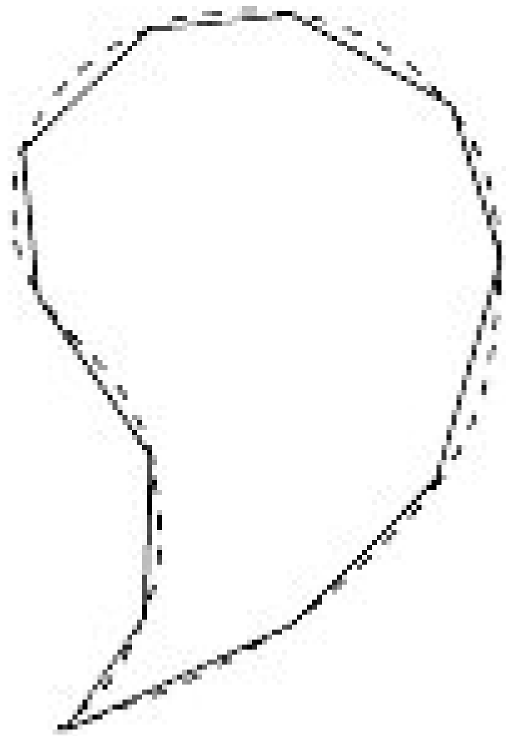
Criado por Martin Newel (1975)

Malha Poligonal

Malha Poligonal: é uma colecção de arestas, vértices e polígonos interligados de modo que cada aresta é apenas partilhado no máximo por dois polígonos.



Objecto 3D representado por malha de polígonos.



Curva ←→ linha poligonal

Secção de um objecto curvo.

O erro de aproximação pode ser reduzindo aumentando o número de polígonos.

Malha Poligonal

Características da malha poligonal:

- Uma aresta liga 2 vértices.
- Um polígono é definido por uma sequência fechada de arestas.
- Uma aresta é partilhada por 1 ou 2 polígonos adjacentes.
- Um vértice é partilhado pelo menos por 2 arestas.
- Todas as arestas fazem parte de algum polígono.

A estrutura de dados para **representar a malha poligonal** pode ter várias configurações, que são avaliadas pelo espaço de memória e tempo de processamento necessário para obter resposta, por exemplo, a:

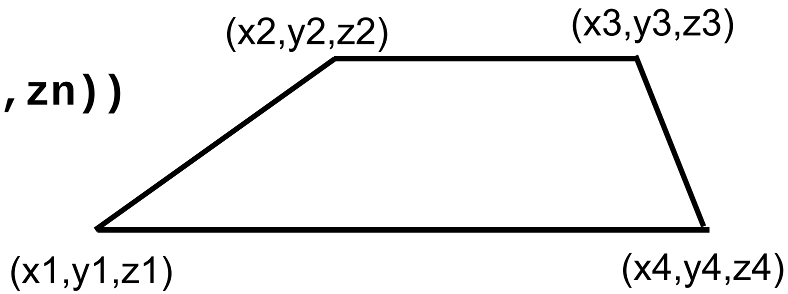
- Obter todas as arestas que se unem num dado vértice.
- Determinar os polígonos que partilham uma aresta ou um vértice.
- Determinar os vértices ligados a uma aresta.
- Determinar as arestas de um polígono.
- Representar graficamente a malha.
- Identificar erros na representação, como falta de uma aresta, vértice ou polígono.

Malha Poligonal

1. Representação Explicita: cada polígono é representado por uma lista de coordenadas dos vértices que o constituem.

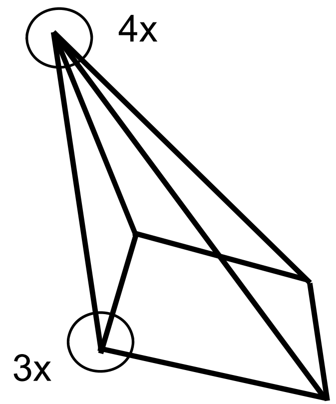
Uma aresta é definida por dois vértices consecutivos e entre o último e primeiro da lista.

`P=((x1,y1,z1),(x2,y2,z2), ..., (xn,yn,zn))`



Avaliação da estrutura de dados:

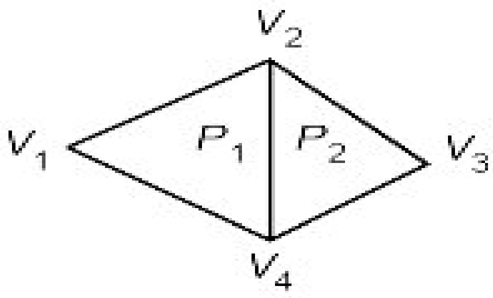
- Consumo de memória (vértices repetidos).
- Não há uma representação explicita das arestas e vértices partilhados.
- Na representação gráfica a mesma aresta é "*clipped*" e desenhada mais do que uma vez.
- Ao arrastar um vértice é necessário conhecer todas as arestas que partilham aquele vértice.



Malha Poligonal

2. Representação por Apontadores para Lista de Vértices: cada polígono é representado por uma lista de índices (ou apontadores) para uma lista de vértices.

Lista de Vértices **`V=((x1,y1,z1),(x2,y2,z2), ..., (xn,yn,zn))`**



`V=(V1,V2,V3,V4)=(x1,y1,z1),(x2,y2,z2), ..., (x4,y4,z4))`

`P1=(1,2,4)`

`P2=(4,2,3)`

Vantagens:

- Cada vértice da malha poligonal é guardado uma única vez na memória.
- A coordenada de um vértice é facilmente alterada.

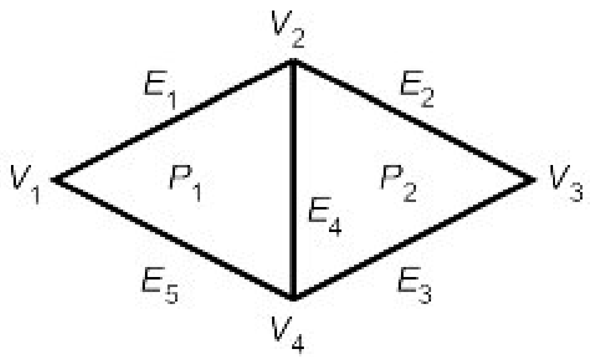
Desvantagens:

- Difícil obter os polígonos que partilham uma dada aresta.
- As arestas continuam a ser "*clipped*" e desenhada mais do que uma vez.

Malha Poligonal

3. Representação por Apontadores para Lista de Arestas: cada polígono é representado por uma lista de apontadores para uma lista de arestas, na qual cada aresta aparece uma única vez. Por sua vez, cada aresta aponta para os dois vértices que a definem e guarda também quais os polígonos a que pertence.

Um polígono é representado por **P=(E1,E2,...,En)** e uma aresta como **E=(V1,V2,P1,P2)**. Se a aresta pertence apenas a um polígono então **P2** é ***null***.



$$V = (V_1, V_2, V_3, V_4) = ((x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_4, y_4, z_4))$$

$$E_1 = (V_1, V_2, P_1,)$$

$$E_2 = (V_2, V_3, P_2,)$$

$$E_3 = (V_3, V_4, P_2,)$$

$$E_4 = (V_4, V_2, P_1, P_2)$$

$$E_5 = (V_4, V_1, P_1,)$$

$$P_1 = (E_1, E_4, E_5)$$

$$P_2 = (E_2, E_3, E_4)$$

Malha Poligonal

Vantagens:

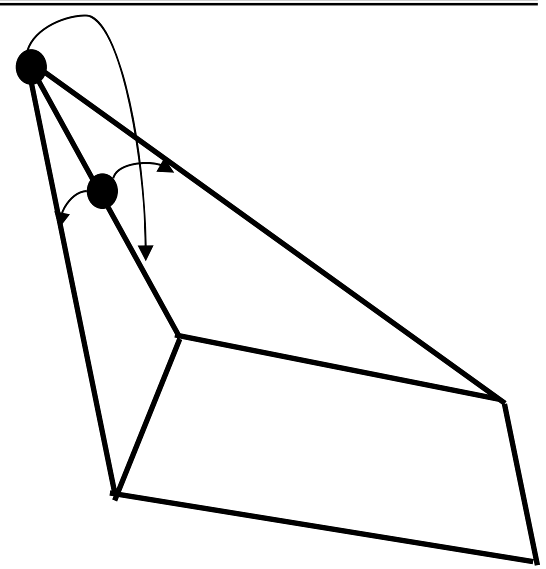
- O desenho gráfico é facilmente obtido percorrendo a lista de arestas. Não ocorre a repetição de *clipping* nem de desenho.
- Para o preenchimento (colorir) dos polígonos trabalha-se com a lista de polígonos. Fácil efectuar a operação de *clipping* sobre os polígonos.

Desvantagens:

- Continua a não ser imediato determinar quais as arestas que incidem sobre o mesmo vértice.

Solução de Baumgart

- Cada vértice tem um apontador para uma das arestas (aleatório) que incide nesse vértice.
- Cada aresta apresenta apontadores para as arestas que incidem num vértice.



Curvas Cúbicas

Motivação: Representar curvas suaves do mundo real.

- A representação por **malha poligonal** é uma aproximação de primeira ordem:
  - A curva é aproximada por uma sequência de segmentos lineares.
  - Grande quantidade de dados (vértices) para obter a curva com precisão.
  - Difícil manipulação para mudar a forma da curva, i.e. necessário posicionar vários pontos com precisão.

- **Geralmente utilizam-se polinómios de grau 3 (Curvas Cúbicas), sendo a curva completa formada por um conjunto de curvas cúbicas.**
  - **grau < 3** oferecem pequena flexibilidade no controlo da forma das curvas e não permitem uma interpolação entre dois pontos com a definição da derivada nos pontos extremos. Um polinómio de grau 2 é especificado por 3 pontos que definem o plano onde a curva toma lugar.
  - **grau > 3** podem introduzir oscilações indesejáveis e exigir maior cálculo computacional.

Curvas Cúbicas

A representação das curvas é feita na forma PARAMÉTRICA:

$x = f_x(t)$, $y = f_y(t)$ ex: $x=3t^3 + t^2$ $y=2t^3+t$

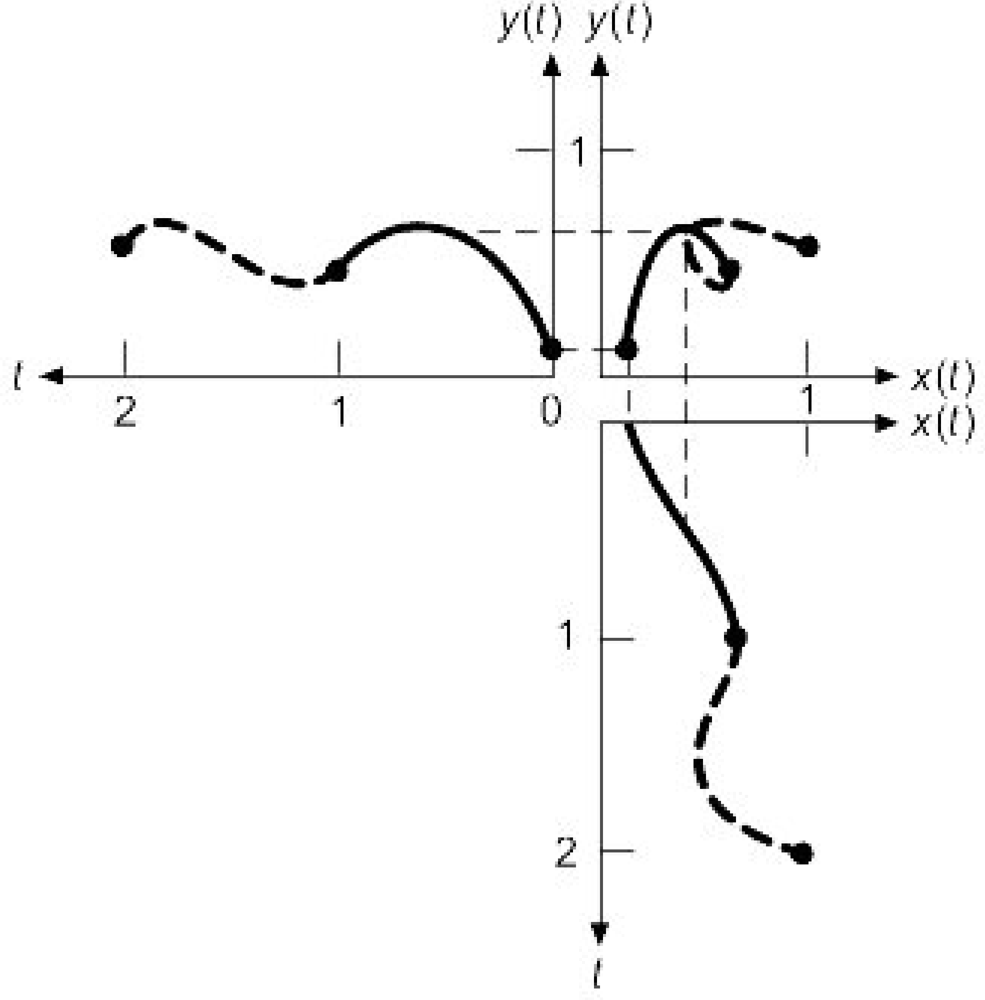
A forma Explicita: $y=f(x)$ ex: $y=x^3+2x^2$

1. Não podemos ter vários valores de **y** para o mesmo **x**
2. Não podemos descrever curvas com tangentes verticais

A forma Implícita: $f(x,y)=0$ ex: $x^2+y^2-r^2 = 0$

1. Necessita de restrições para poder modelar apenas uma parte da curva
2. Difícil juntar duas curvas de forma suave

Curvas Cúbicas Paramétricas



A figura mostra uma curva formada por duas curvas cúbicas paramétricas em 2D.

Curvas Cúbicas Paramétricas

Forma geral de representação da curva:

$x(t)=a_x t^3+b_x t^2+c_x t+d_x$

$y(t)=a_y t^3+b_y t^2+c_y t+d_y$

$z(t)=a_z t^3+b_z t^2+c_z t+d_z$ $\quad 0 \leq t \leq 1$

Sendo: $T=\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$

$$C=\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

$$Q(t)=\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}=T.C$$

Curvas Cúbicas Paramétricas

A representação anterior é usada para representar uma única curva. **Como juntar os vários segmentos de curva ?**

Pretendemos a junção num ponto → continuidade geométrica e,

Que tenham o mesmo declive na junção → suavidade (continuidade da derivada).

A garantia de continuidade e suavidade na junção é garantida fazendo coincidir as derivadas (tangentes) das curvas no ponto de junção. Para isso calcula-se:

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t} \quad \frac{\partial y(t)}{\partial t} \quad \frac{\partial z(t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial (CT)}{\partial t} = C\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

Com: $$\frac{\partial T}{\partial t} = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Curvas Cúbicas Paramétricas

Tipos de Continuidade:

G^0 – continuidade geométrica zero → as curvas juntam-se num ponto.

G^1 – continuidade geométrica um → a direcção dos vectores tangentes é igual.

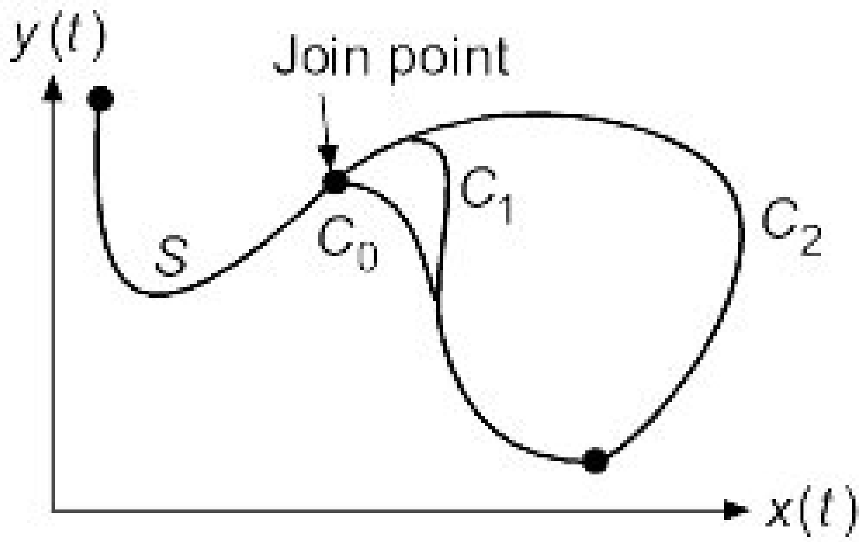
C^1 – continuidade paramétrica 1 → as tangentes no ponto de junção têm a mesma direcção e amplitude (primeira derivada igual).

C^n – continuidade paramétrica n → as curvas têm no ponto de junção todas as derivadas iguais até à ordem n.

Curvas Cúbicas Paramétricas

Se considerarmos ***t*** como **tempo**, a continuidade C^1 significa que a velocidade de um objecto que se desloque ao longo da curva se mantém contínua

A continuidade C^2 implicaria que a aceleração seria também contínua.



No ponto de junção da curva ***S*** com as curvas $\boldsymbol{C_0}$, $\boldsymbol{C_1}$ e $\boldsymbol{C_2}$ temos:

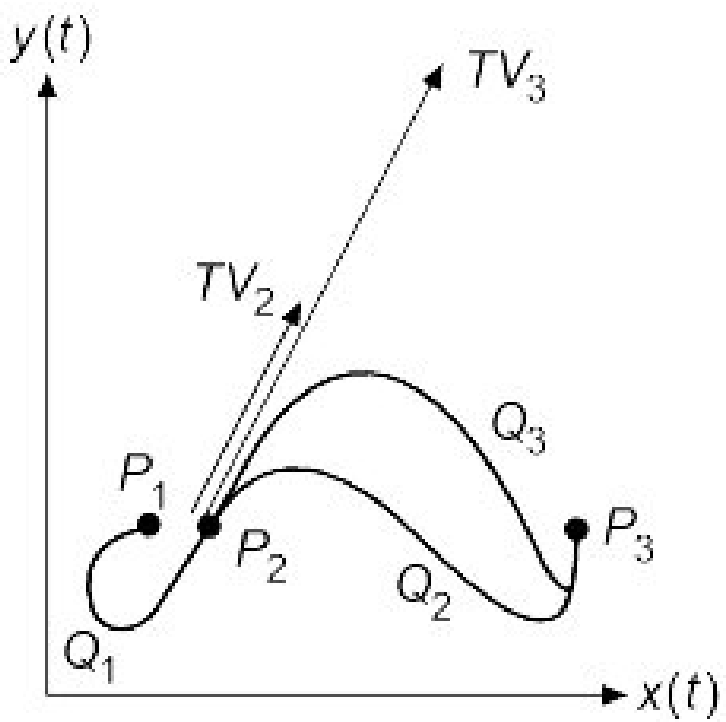
Continuidade G^0 entre ***S*** e $\boldsymbol{C_0}$

Continuidade C^1 entre ***S*** e $\boldsymbol{C_1}$

Continuidade C^2 entre ***S*** e $\boldsymbol{C_2}$

Curvas Cúbicas Paramétricas

A continuidade paramétrica é mais restritiva que a continuidade geométrica:



Por exemplo: C^1 implica G^1

No ponto de junção P_2 temos:

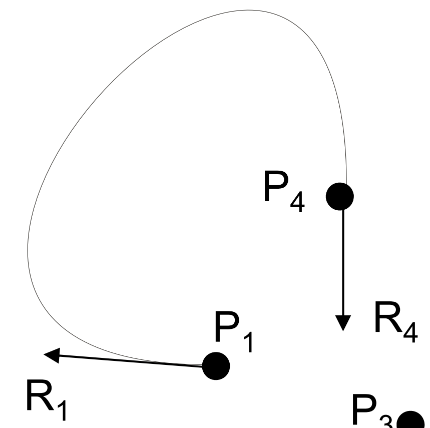
Q_2 e Q_3 são G^1 com Q_1

Só Q_2 é C^1 com Q_1 (TV_1=TV_2)

Curvas Cúbicas Paramétricas – Tipos de Curvas

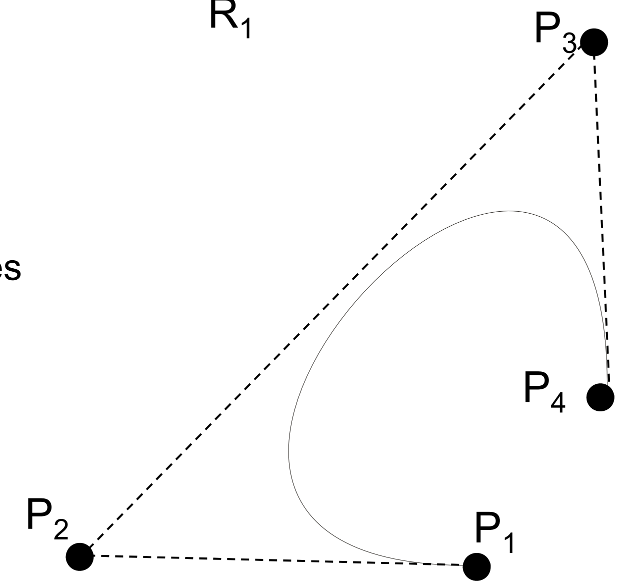
1. Curvas de Hermite

- Continuidade **G¹** nos pontos de junção
- Vector geométrico:
  - 2 pontos extremos e
  - Os vectores tangentes nesses pontos



2. Curvas de Bézier

- Continuidade **G¹** nos pontos de junção
- Vector geométrico:
  - 2 pontos extremos e
  - 2 pontos que controlam os vectores tangentes nesses extremos



3. Curvas Splines

- Família de curvas muito alargada
- Maior controlo da continuidade nos pontos de junção (Continuidade C^1 e C^2)

Notação comum

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = T.C$$

$$Q(t) = T.M.G$$

$$\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

Matriz *T* **Matriz de Base** **Matriz Geométrica**

Matriz de Base: Caracteriza o tipo de curva

Matriz Geométrica: Condiciona geometricamente uma dada curva e contém valores relacionados com a geometria da curva.

Notação comum

$$Q(t) = T.M.G$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = (t^3 m_{11} + t^2 m_{21} + t m_{31} + m_{41}).G_1 + (t^3 m_{12} + t^2 m_{22} + t m_{32} + m_{2}).G_2 +$$
$$(t^3 m_{13} + t^2 m_{23} + t m_{33} + m_{43}).G_3 + (t^3 m_{14} + t^2 m_{24} + t m_{34} + m_{44}).G_4$$

Conclusão 1: Q(t) é uma soma pesada dos elementos do vector geométrico

Conclusão 2: Os pesos são polinomiais cúbicas em t → FUNÇÕES DE MISTURA

(Blending functions) $Q(t) = T.C = T.M.G = B.G$

Curvas de Hermite

$$Q(t) = T.M_H.G_H = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} .M_H.G_H = B_H.G_H$$

$$Q'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} .M_H.G_H$$

Vector geométrico:

$$G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Q(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .M_H.G_H = P_1 \\ Q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .M_H.G_H = P_4 \\ Q'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .M_H.G_H = R_1 \\ Q'(1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} .M_H.G_H = R_4 \end{cases}$$

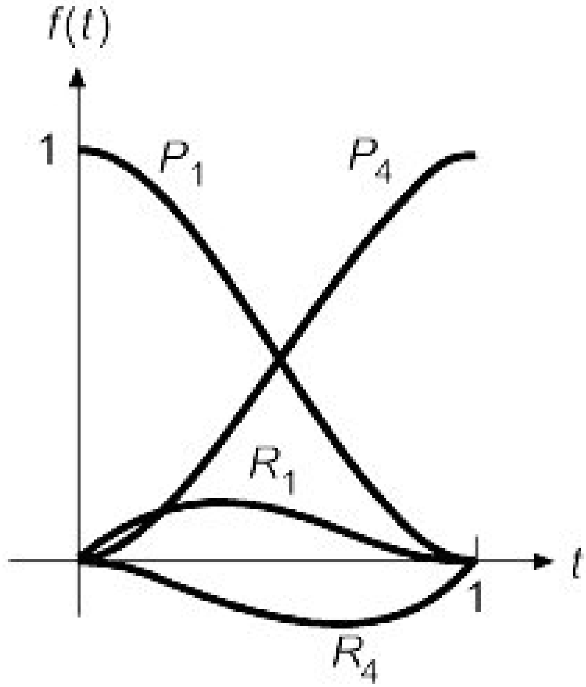
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} .M_H.G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = G_H \quad \Rightarrow \quad M_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Curvas de Hermite
Funções de Mistura (Blending functions)

$$Q(t) = T.M_H.G_H = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} .M_H.G_H = B_H.G_H$$

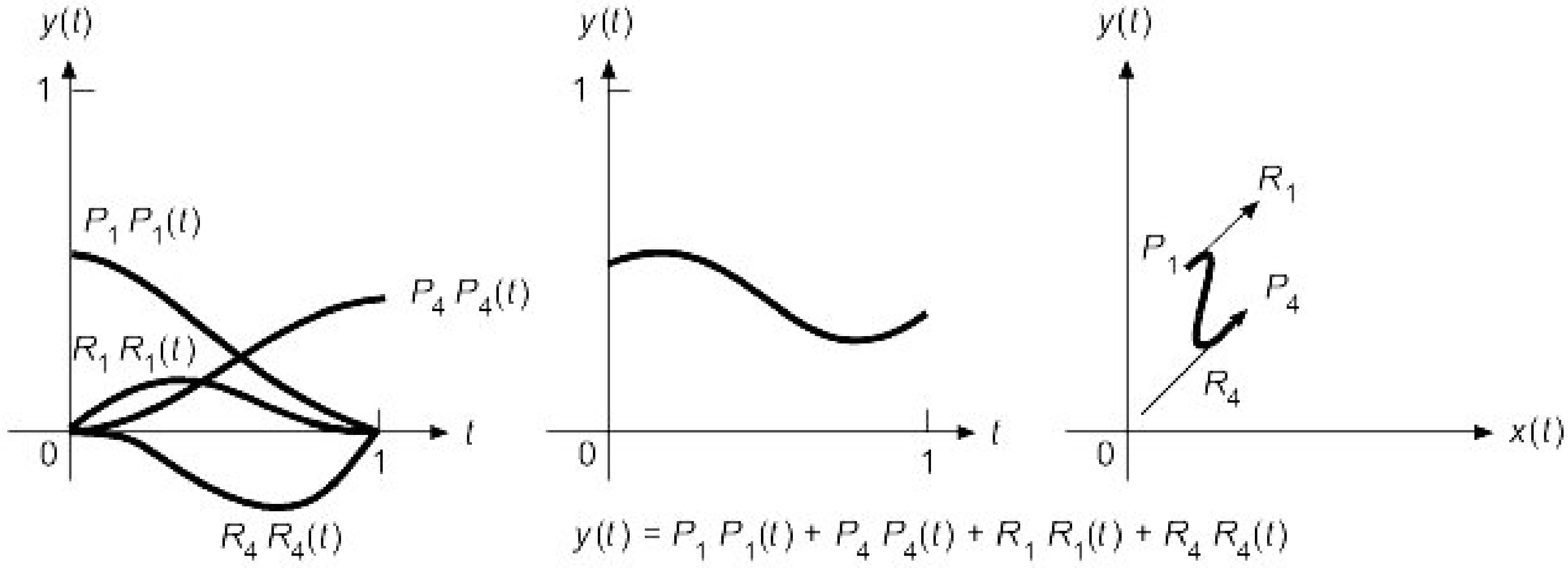
$$M_H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q(t) = \; & (2t^3-3t^2+1)P_1 + \\ & (-2t^3+3t^2)P_4 + \\ & (t^3-2t^2+t)R_1 + \\ & (t^3-t^2)R_4 \end{aligned}$$



Funções de Mistura das curvas de Hermite, referenciadas pelo elemento do vector geométrico que as multiplica, respectivamente.

Curvas de Hermite - Exemplo



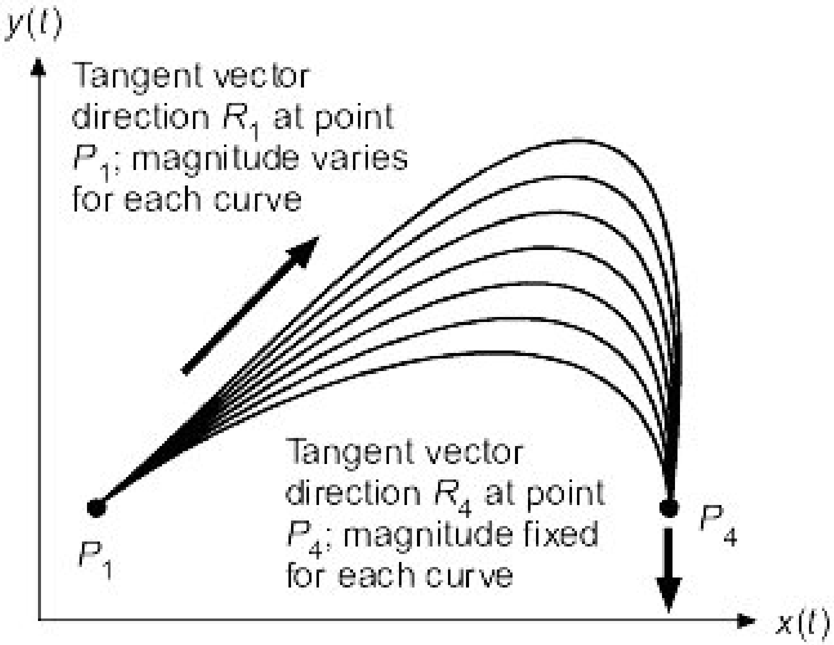
Esquerda: Funções de mistura pesadas pelo factor correspondente do vector geométrico.

Centro: y(t) = soma das quatro funções da esquerda

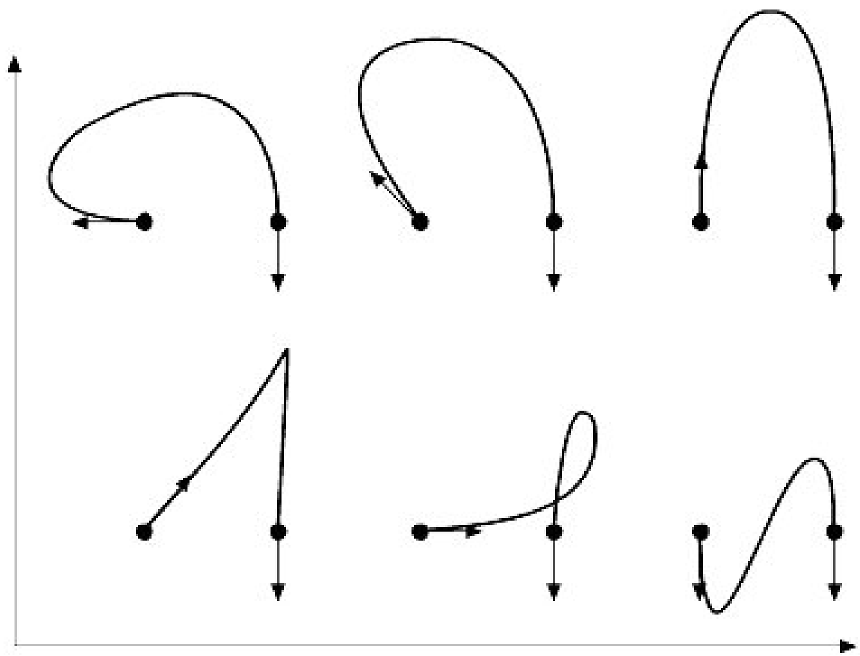
Direita: Curva de Hermite

Curvas de Hermite - Exemplos

- P_1 e P_4 fixos
- R_4 fixo
- R_1 varia em amplitude

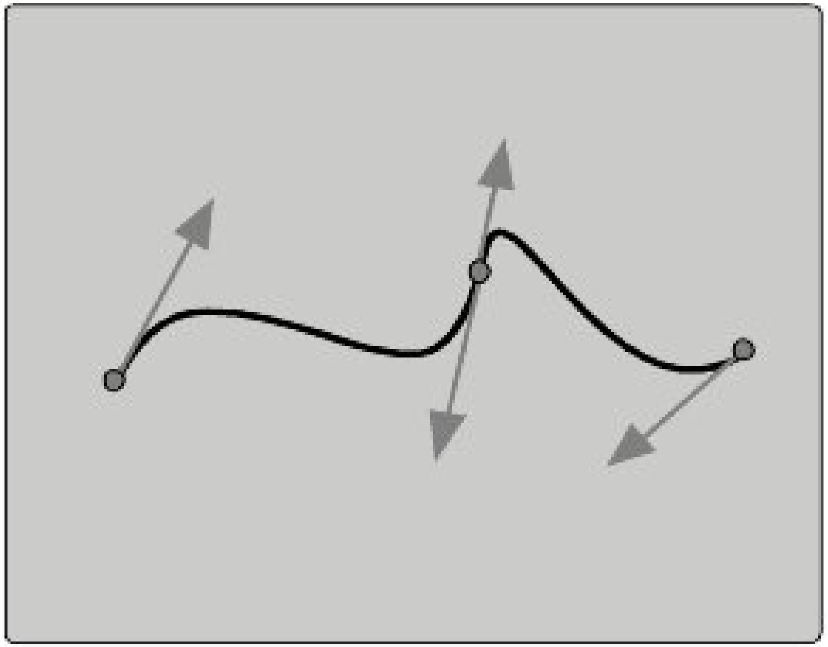


- P_1 e P_4 fixos
- R_4 fixo
- R_1 varia em direcção



Curvas de Hermite
Exemplo de Desenho Interactivo

- Os pontos extremos podem ser reposicionados
- Os vectores tangentes podem ser alterados puxando as setas
- Os vectores tangentes são forçados a serem colineares (continuidade G^1) e R_4 é visualizado em sentido contrário (maior visibilidade)
- É comum dispor de comandos para forçar continuidade G^0, G^1 ou C^1



Continuidade na junção:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_4 \\ P_7 \\ K.R_4 \\ R_7 \end{bmatrix}$$

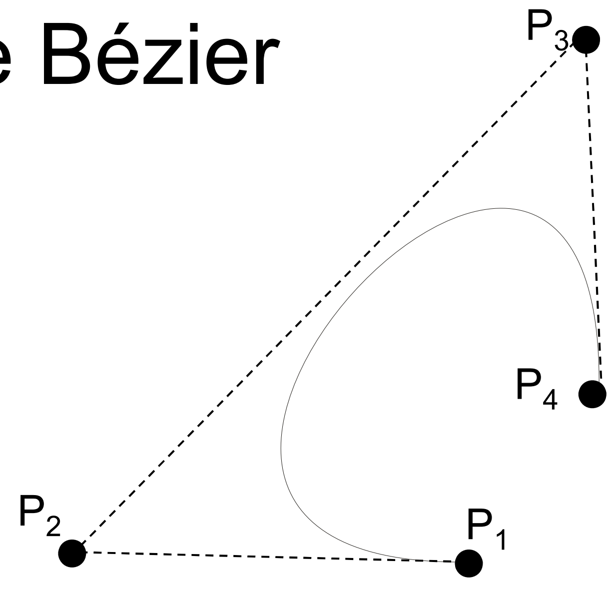
- $K > 0 \rightarrow G^1$
- $K = 1 \rightarrow C^1$

Curvas de Hermite

3. Seja a sucessão $\boldsymbol{C1, C2, C3, C4}$ de curvas de Hermite representadas pelos vectores geométricos juntos. Complete estes com os valores em falta, de forma a obter continuidade do tipo $\boldsymbol{C^1}$ em todos os pontos de junção e justifique os casos em que isso não seja possível, de acordo com os dados fornecidos.

$$C1 = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 3,3 \\ 0,2 \\ ?,? \end{bmatrix}; \quad C2 = \begin{bmatrix} ?,? \\ ?,? \\ 2,0 \\ 0,2 \end{bmatrix}; \quad C3 = \begin{bmatrix} 6,6 \\ 3,6 \\ 0,1 \\ 0,-1 \end{bmatrix}; \quad C4 = \begin{bmatrix} 3,3 \\ 6,3 \\ ?,? \\ 2,0 \end{bmatrix}$$

Curvas de Bézier



Vector Geométrico:

$$G_B = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Para uma mesma curva, demonstra-se que, comparando com G_H:

$R_1 = Q'(0) = 3.(P_2 - P_1)$

$R_4 = Q'(1) = 3.(P_4 - P_3)$

$$G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{G_H = M_{HB} \,.\, G_B}$$

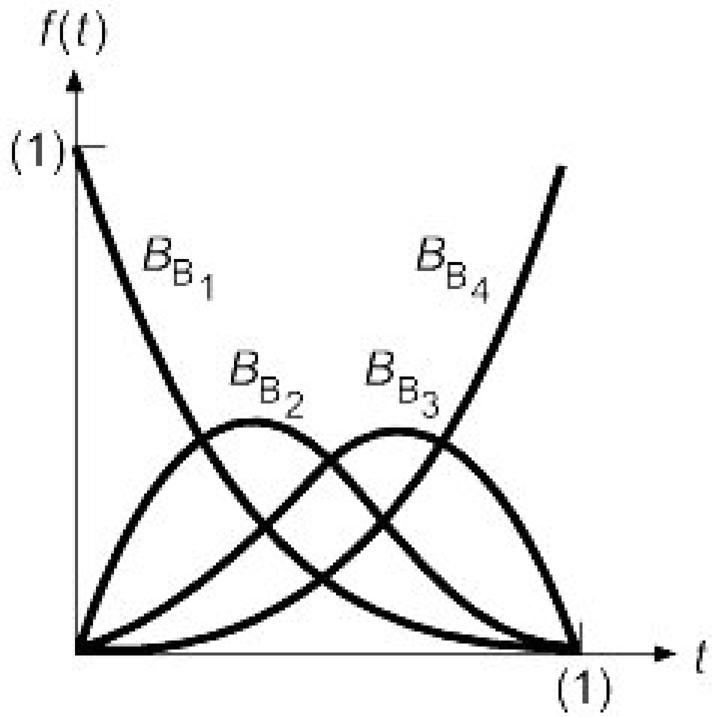
Curvas de Bézier

$$Q(t) = T.M_H.G_H = T.M_H.(M_{HB}.G_B) = T.\underbrace{(M_H.M_{HB})}.G_B$$

- A mesma curva em representação Bézier: $Q(t) = T \,.\, M_B \,.\, G_B$

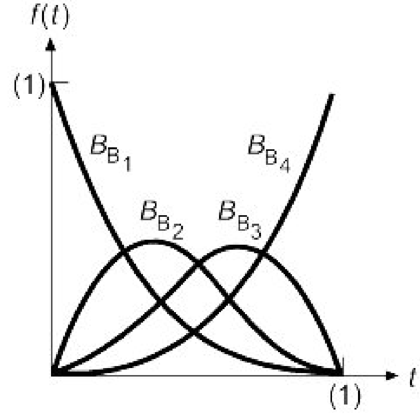
$$M_B = M_H.M_{HB} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q(t) = \; & (1-t)^3 P_1 + \\ & 3t(1-t)^2 P_2 + \\ & 3t^2(1-t) P_3 + \\ & t^3 P_4 \end{aligned}$$



Curvas de Bézier

$$Q(t) = (1-t)^3\ P_1 + 3t(1-t)^2\ P_2 + 3t^2(1-t)\ P_3 + t^3\ P_4$$



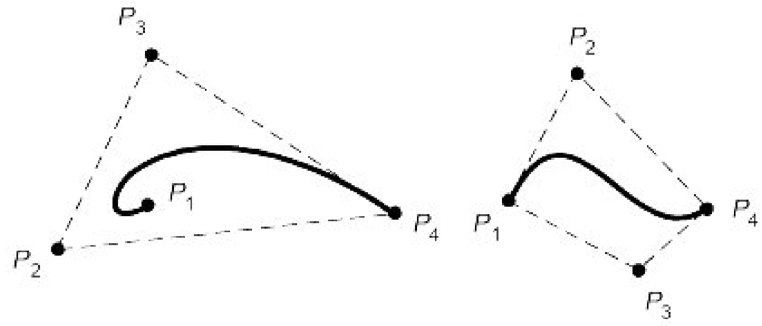
Observações sobre as funções de Mistura:

- Para t=0 $Q(t)=P_1$, para t=1 $Q(t)=P_4$ → A curva passa em P_1 e P_4

- A soma em qualquer ponto é 1.

- Verifica-se que Q(t) é uma **média pesada dos 4 pontos de controlo**, logo a **curva está contida no interior do polígono** convexo (2D) ou poliedro convexo (3D) definido por esses pontos, designado de "convex hull".

  Que vantagem podemos extrair daqui ?



Curvas de Bézier

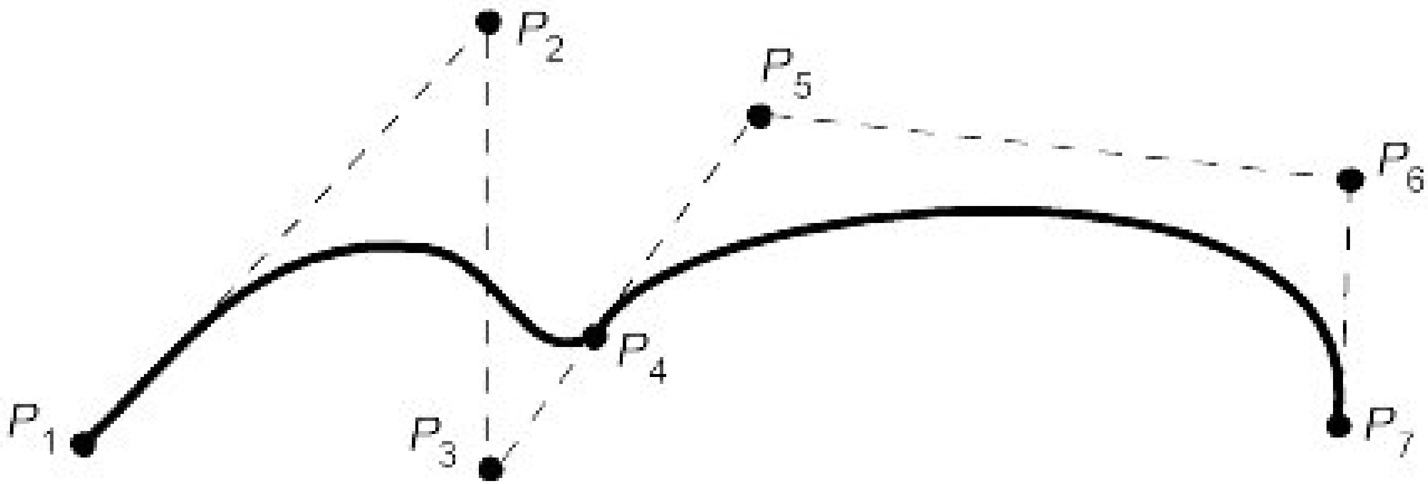
Junção de curvas de Bézier

Continuidade G^1:

$P_4 - P_3 = K(P_5 - P_4)$ com $K > 0$ i.e. P_3,P_4 e P_5 devem ser colineares

Continuidade C^1:

$P_4 - P_3 = K(P_5 - P_4)$ restringindo $K = 1$



Desenho de Curvas Cúbicas

Dois algoritmos:

1. Avaliação de *x(t), y(t)* e *z(t)* para valores incrementais de *t* entre 0 e 1.
2. Subdivisão da curva: Algoritmo de Casteljau

1. Avaliação de *x(t), y(t)* e *z(t)*

   Regra de Horner permite reduzir o número de operações de 11 multiplicações e 10 adições para 9 e 10, respectivamente.

   $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = ((at + b).t + c).t + d$

2. Algoritmo de Casteljau

   Efectua a subdivisão recursiva da curva, parando apenas quando a curva em questão é suficientemente "plana" para poder ser aproximada por um segmento de recta.

   Algoritmo eficiente: requer apenas 6 *shifts* e 6 adições em cada divisão.

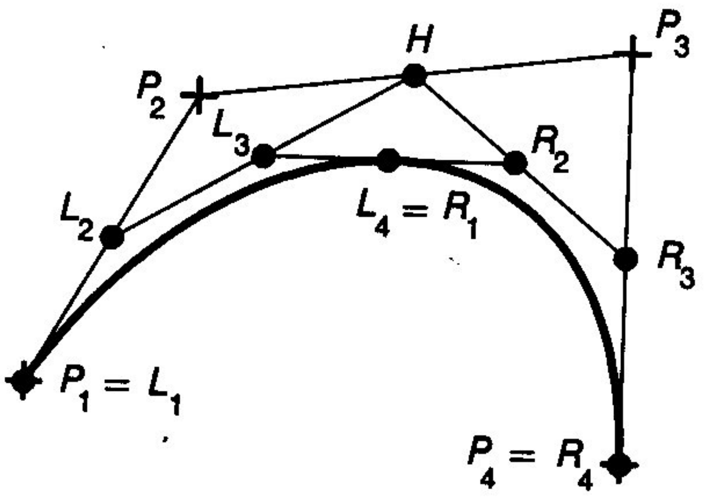
Desenho de Curvas Cúbicas - Algoritmo de Casteljau

Critérios possíveis de paragem:

- A curva em questão é suficientemente "plana" para poder ser aproximada por um segmento de recta.
- Os 4 pontos de controlo estão no mesmo pixel.

$L_2 = (P_1+P_2)/2$, $H=(P_2+P_3)/2$, $L_3 = (L_2+H)/2$, $R_3 = (P_3+P_4)/2$

$R_2 = (H+R_3)/2$, $L_4 = R_1 = (L_3 + R_2)/2$



Desenho de Curvas Cúbicas

Algoritmo de Calteljau

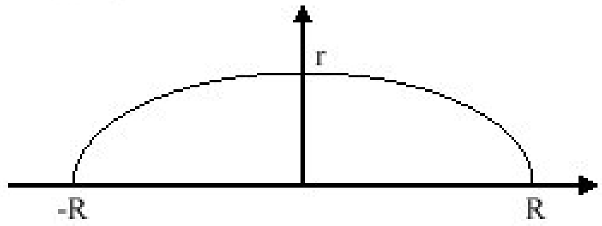
```
void DrawCurveRecSub(curve,ε)
{    if (Straight(curve,ε))
        DrawLine(curve);
     else {
        SubdivideCurve(curve, leftCurve, rightCurve);
        DrawCurveRecSub(leftCurve, ε);
        DrawCurveRecSub(rightCurve, ε);
     }
}
```

Exercício

6. Determine as posições dos quatro pontos de controlo de uma curva de Bézier equivalente à elipse da figura junta:

a)- Analiticamente.

b)- Usando métodos baseados no algoritmo de Casteljou.



Superfícies Cúbicas

As superfícies cúbicas são uma generalização das curvas cúbicas. A equação da superfície é obtida a partir da equação da curva:

Q(t) = T . M . G, sendo G constante.

Mudar para a variável *s*: *Q(s) = S . M . G*

Fazendo variar os pontos do vector Geométrico em 3D ao longo de um percurso parametrizado por *t* obtém-se:

$$Q(s,t) = S.M.G(t) = S.M.\begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \\ G_3(t) \\ G_4(t) \end{bmatrix}$$

A matriz geométrica é composta por 16 pontos.

Superfície de Hermite

Para a coordenada x:

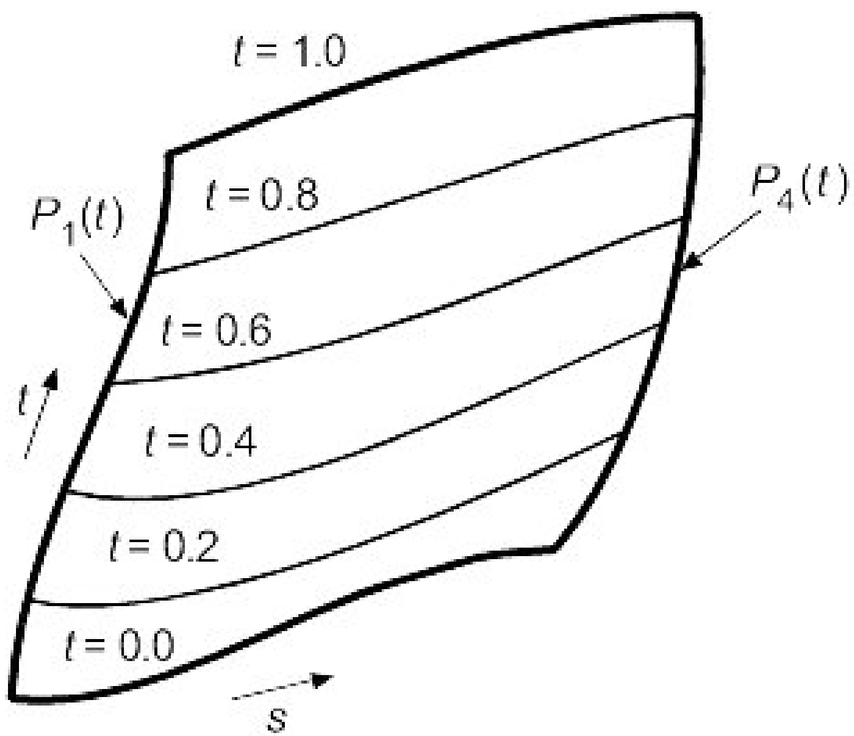
$$x(s,t) = S.M_H.G_{Hx}(t) = S.M_H.\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_4(t) \\ R_1(t) \\ R_4(t) \end{bmatrix}_x$$

$$P_{1x}(t) = T.M_H.\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \\ g_{14} \end{bmatrix}_x \quad P_{4x}(t) = T.M_H.\begin{bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ g_{23} \\ g_{24} \end{bmatrix}_x \quad R_{1x}(t) = T.M_H.\begin{bmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \\ g_{34} \end{bmatrix}_x \quad R_{4x}(t) = T.M_H.\begin{bmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_{44} \end{bmatrix}_x$$

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_4(t) \\ R_1(t) \\ R_4(t) \end{bmatrix}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{24} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{24} \end{bmatrix}}_{G_{Hx}}.M_H^T.T^T = G_{Hx}.M_H^T.T^T$$

Conclui-se que: $x(s,t) = S.M_H.G_{Hx}.M_H^T.T^T$

Superfície de Hermite



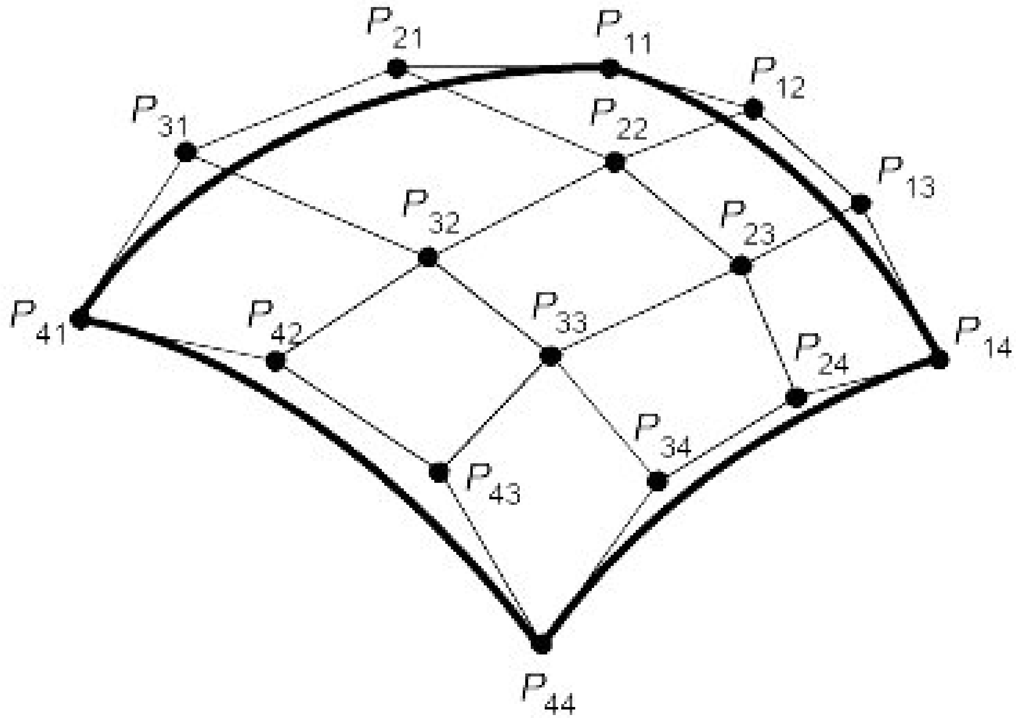
Superfície de Bézier

As equações para a superfície de Bézier podem ser obtidas da mesma forma que as de Hermite, resultando:

$$x(s,t) = S.M_B.G_{Bx}.M_B^T.T^T$$

$$y(s,t) = S.M_B.G_{By}.M_B^T.T^T$$

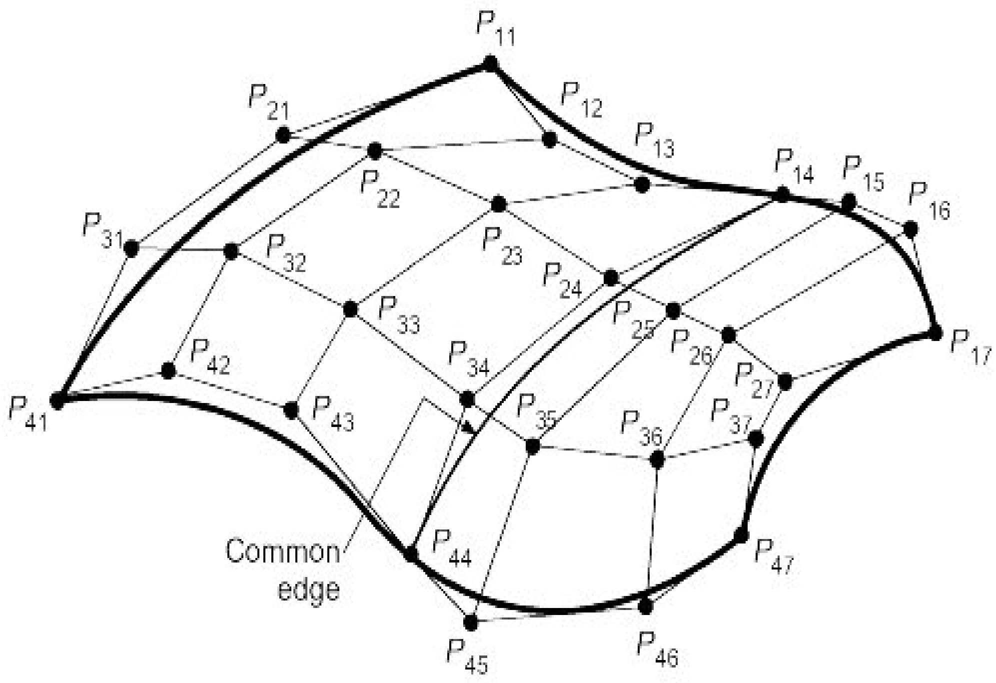
$$z(s,t) = S.M_B.G_{Bz}.M_B^T.T^T$$



A matriz geométrica tem 16 pontos de controlo.

Superfície de Bézier

Continuidade C^0 *e* G^0 é obtida fazendo coincidir os quatro pontos de controlo de fronteira: P_{14}, P_{24}, P_{34}, P_{44}



Para obter G^1 devem ser colineares:

P_{13}, P_{14} e P_{15}

P_{23}, P_{24} e P_{25}

P_{33}, P_{34} e P_{35}

P_{43}, P_{44} e P_{45}

e

$(P_{14}-P_{13}) / (P_{15} - P_{14}) = K$

$(P_{24}-P_{23}) / (P_{25} – P_{24}) = K$

$(P_{34}-P_{33}) / (P_{35} – P_{34}) = K$

$(P_{44}-P_{43}) / (P_{45} – P_{44}) = K$