Amélioration de la formule A001035-OEIS donnant le nombre de posets d'un ensemble à 19 éléments

Didier GARCIA

Villeurbanne, France

October 12, 2024

La fonction Ord est la fonction qui à un entier v associe $Ord(v)$, le nombre d'ordres partiels d'un ensemble à v éléments, notons qu'un ordre partiel est aussi appelé *poset*. Dans A001035-OEIS, $Ord(v)$ est noté $a(v)$. La notation $a \ (mod \ n)$ désigne le reste de la division euclidienne de a par n, appelé aussi le résidu de a modulo n. La notation $a * b$ désigne le produit ab.
Je donne une amélioration de la formule internet de A001035-OEIS :

$$\text{Il existe un entier } n \text{ tel que } Ord(19) = 9699690 * n - 1615151$$

en établissant la formule suivante :

$$\text{Il existe un entier } n \text{ tel que } Ord(19) = 232792560 * n + 163279579. \quad (\spadesuit)$$

Pour l'instant nous avons les valeurs de $Ord(v)$ jusqu'à $v = 18$ comme indiqué dans [5].
Pour établir ($\spadesuit$), je montre d'abord que $Ord(19)$ est congru à 4 modulo ($3^2 = 9$) et à 11 modulo ($2^4 = 16$) grâce au tableau "Table 1" (page 4); dans ce tableau :

- Il y a des lignes de valeurs de v allant de 1 à 18 et des colonnes de valeurs de j allant de 1 à 36.
- À l'intersection de la ligne v et de la colonne j, il y a la valeur de $Ord(v) \ (mod \ j)$ que j'ai calculé avec Sagemath, en récupérant les valeurs de $Ord(v)$ publiées dans [5].
- La dernière ligne est $\varphi(j)$ où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

Soit E un ensemble à n éléments. Un espace topologique E est dit de Kolmogorov ou T_0 si pour tout couple d'éléments distincts x et y de E, il existe un ouvert qui contient l'un des deux points mais pas l'autre. Rappelons le résultat suivant :

Theorem 0.1 *([1, 2, 4]) Soit E un ensemble fini non vide à n éléments, alors l'ensemble des T_0-topologies sur E et l'ensemble des ordres sur E sont équipotents, et par suite ils ont le même nombre d'éléments noté $T_0(n)$.*

- Dans l'article de Borevitch [3], j'extrais son théorème de périodicité pour p nombre premier et sa remark 2.

E-mail address: digama@free.fr (D. Garcia).

Theorem 0.2 *(Borevitch [3]) Soit p un nombre premier. Soit k et ℓ deux entiers naturels vérifiant $k \equiv \ell \pmod{p-1}$. Alors $T_0(k) \equiv T_0(\ell) \pmod{p}$, et alors la suite $(T_0(n) \pmod{p})_{n\geq 1}$ est périodique.*

Remark 0.3 *(Remark 2 de Borevitch [3]) Soit p un nombre premier et soit $a \geq 1$ un entier. Alors la suite $(T_0(n) \pmod{p^a})_{n\geq 1}$ est périodique seulement à partir de $n \geq p^{a-1}$ et la période est égale à $\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$.*

Dans ce qui suit, le motif périodique (à visualiser verticalement dans les colonnes de j de la Table 1) c'est par exemple :

- La suite finie de 2 termes (1, 0) des restes de $Ord(v)$ modulo ($j = 3$). où l'on remarque au passage que $Ord(2*n)$ est congru à 0 modulo 3, i.e. $Ord(2*n)$ multiple de 3.

- La suite finie des 6 termes (1, 3, 5, 2, 3, 5) des restes des congruences modulo $j = p = 7$ que l'on trouve verticalement dans la Table 1.

- Pour $j = 16 = 2^4$ la période est de $\varphi(16) = 8$ et elle commence à $v = 2^3 = 8$. Comme $8 + 8 = 16$ est inférieur à 19, nous observons le motif périodique de huit termes (à lire verticalement sur notre tableau) : (3, 15, 15, 11, 11, 7, 7, 3).

Pour $Ord(v = 19)$ modulo ($j = 16$) nous trouvons le résidu 11 comme prolongement du tableau vers le bas.

- Pour $j = 9 = 3^2$ la période est $9 - 3 = 6$ et débute à $v = 3$, c'est encore bon car $6 + 3 = 9$ est inférieur à 19. Donc on observe le motif périodique (1, 3, 1, 0, 4, 3) verticalement sur notre tableau.

Pour $Ord(19)$ modulo ($j = 9$), nous trouvons le résidu 4 comme prolongement. Par contre, si on prend $p = 5$ et $s = 2$ alors on a $25 = 5^2 = p^s$. La période est de $\varphi(25) = 5^2 - 5 = 20$ et débute à partir de 5. Or $20 + 5 = 25$ dépasse $v = 19$, le motif est trop long (longueur de 20) pour que l'on puisse en voir la répétition. C'est pour cela que je n'ai pas deviné la valeur de $Ord(19)$ modulo 25. Par contre, dans la Table 1, nous pouvons deviner par prolongation à la ligne $v = 19$ des colonnes des valeurs de j.

Pour cela on se rappelle qu'en choisissant p premier il y a une périodicité de $\varphi(p) = p-1$ de l'apparition des résidus d'après Remark 0.3.

Il s'agit finalement de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} Ord(19) & \equiv 11 \ (mod\ 16) \text{ au lieu de prendre } Ord(19) \equiv 1 \ (mod\ 2) \\ Ord(19) & \equiv 4 \ (mod\ 9) \text{ au lieu de prendre } Ord(19) \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ Ord(19) & \equiv 4 \ (mod\ 5) \\ Ord(19) & \equiv 1 \ (mod\ 7) \\ Ord(19) & \equiv 1 \ (mod\ 11) \\ Ord(19) & \equiv 8 \ (mod\ 13) \\ Ord(19) & \equiv 2 \ (mod\ 17) \\ Ord(19) & \equiv 1 \ (mod\ 19) \end{cases}$$

Notons que les différents j sont deux à deux premiers entre eux. Nous pouvons résoudre ce système avec Sagemath en utilisant le théorème des restes chinois, avec la fonction `crt` :

$$\texttt{crt}([\texttt{11}, \texttt{4}, \texttt{4}, \texttt{1}, \texttt{1}, \texttt{8}, \texttt{2}, \texttt{1}], [\texttt{16}, \texttt{9}, \texttt{5}, \texttt{7}, \texttt{11}, \texttt{13}, \texttt{17}, \texttt{19}])$$

c pour chinois
r pour reste
t pour théorème.

qui donne 163279579.

Nous trouvons que :

$$Ord(19) \equiv 163279579 \ (mod\ 232792560 = 16 * 9 * 5 * 7 * 11 * 13 * 17 * 19).$$

Donc $Ord(19)$ est de la forme annoncée :

$$Ord(19) = 232792560 * n + 163279579 \quad (\spadesuit)$$

Nous obtenons ainsi pour $Ord(19)$ une formule plus précise que celle de A001035-OEIS d'internet. On peut retrouver cette dernière à partir de ($\spadesuit$) en posant $n' = 24\,n + 17$, ce qui conduit à : $Ord(19) = 9699690 * n' - 1615151$ (formule de A001035-OEIS).

j \ v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	0	1	1	3	4	1	5	3	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
4	0	1	0	3	4	3	2	3	3	9	10	3	11	9	9	11	15	3	10	19	9	21	12	3	19	11	3	23	16	9	2	27	21	15	9	3
5	0	1	1	3	1	1	3	7	1	1	7	7	6	3	1	7	15	1	13	11	10	7	22	7	6	19	19	3	26	1	15	7	7	15	31	19
6	0	1	0	3	3	3	5	7	0	3	3	3	10	5	3	7	7	9	6	3	12	3	4	15	23	23	18	19	16	3	9	7	3	7	33	27
7	0	1	1	3	4	1	1	3	4	9	10	7	8	1	4	3	16	13	3	19	1	21	14	19	9	21	22	15	13	19	12	3	10	33	29	31
8	0	1	0	3	4	3	3	3	3	9	10	3	9	3	9	3	15	3	2	19	3	21	16	3	4	9	21	3	2	9	19	19	21	15	24	3
9	0	1	1	3	1	1	5	7	1	1	1	7	0	5	1	15	5	1	18	11	19	1	20	7	11	13	1	19	25	1	0	15	1	5	26	19
10	0	1	0	3	3	3	2	7	3	3	6	3	8	9	3	15	15	3	10	3	9	17	7	15	8	21	12	23	12	3	18	15	6	15	23	3
11	0	1	1	3	4	1	3	3	1	9	1	7	12	3	4	11	0	1	2	19	10	1	7	19	24	25	10	3	13	19	29	11	1	17	24	19
12	0	1	0	3	4	3	5	3	0	9	3	3	6	5	9	11	8	9	8	19	12	3	7	3	24	19	18	19	3	9	14	27	3	25	19	27
13	0	1	1	3	1	1	1	7	4	1	8	7	1	1	1	7	8	13	12	11	1	19	2	7	1	1	22	15	24	1	17	23	19	25	1	31
14	0	1	0	3	3	3	3	7	3	3	10	3	3	3	3	7	5	3	8	3	3	21	11	15	8	3	12	3	22	3	13	23	21	5	3	3
15	0	1	1	3	4	1	5	3	1	9	7	7	6	5	4	3	14	1	14	19	19	7	21	19	14	19	10	19	17	19	21	19	7	31	19	19
16	0	1	0	3	4	3	2	3	3	9	3	3	11	9	9	3	3	3	2	19	9	3	16	3	4	11	21	23	8	9	1	3	3	3	9	3
17	0	1	1	3	1	1	3	7	1	1	10	7	6	3	1	15	1	1	14	11	10	21	20	7	1	19	1	3	16	1	23	31	10	1	31	19
18	0	1	0	3	3	3	5	7	0	3	10	3	10	5	3	15	3	9	0	3	12	21	20	15	23	23	18	19	2	3	6	31	21	3	33	27
$\varphi(j)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28	8	30	16	20	16	24	12

Table 1: Valeurs de $Ord(v)$ $(mod\ j)$.

References

[1] P. S. Aleksandrov, Combinatorial topology, Vol. 1, Graylock, Rochester, N. Y., 1956.

[2] G. Birkhoff, Lattice Theory. Revised edition. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 25 American Mathematical Society, New York, 1948. xiii+283 pp.

[3] Z. I. Borevich, On the periodicity of residues of the number of finite labeled topologies. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 103 (1980), 5–12, 155.

[4] H. Sharp, Jr., Quasi-orderings and topologies on finite sets. Proc. Amer. Math. Soc.17(1966), 1344–1349.

[5] N. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org.