II - Transformations géométriques

1 - Dans le plan

1 - Définitions

Définitions : Une transformation **linéaire** (et respectivement **affine**) d'un point $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une application de la forme :

$$F(P_{2,1}) = T_{2,2}P_{2,1} \text{ } (et\ respectivement\ TP + V)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

ATTENTION: notation anglosaxone

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}$$

2 - Composition de tranformations linéaires

$$(F \circ F)P = F(G(P))$$

Respectivement,

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P \underset{G}{\longrightarrow} P' \underset{F}{\longrightarrow} P"$$

Ce qui renvient à faire,

$$\begin{pmatrix} a'ab'c & a'b + b'd \\ c'ad'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

La multiplication matricielle **n'est pas communtative**. Mais elle est assiciative: $(F \times G) \times H = F \times (G \times H)$

3 - Invariance par tranformation affine

La transformation d'une droit $D = P + \lambda\overrightarrow{V}$
$T(D) = T(P) + \lambda T(\overrightarrow{V})$ avec $D'_1 \parallel D'_2$.
Par cette transformation, il y a **invariance** du *parallélisme.*

preuve :
$T(I)$
$(P_1) + \lambda T(\overrightarrow{V_1})$
$(P_2) + \lambda T(\overrightarrow{V_2})$

4 - Transformation en 2D

a - Translation

$$P' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

b - rotation p/r à l'otigine

Pour rappel, $\cos = \frac{adj}{hyp}$ et $\sin = \frac{opp}{hyp}$

$x = r\cos(\phi)$
$y = r\sin(\phi)$

$x = r\cos(\theta + \phi) = r\cos(\theta)\cos(\phi) - r\sin(\theta)\sin(\phi) = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$
$y' = r\sin(\theta + \phi) = r\cos(\theta)\sin(\phi) + rsin(\theta)\cos(\phi) = x\sin(\theta) + y\sin(\theta)$

exemple :

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

propritété de la matrice de rotation : le déterminant est toujours égal à 1

$$ad - bc = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Usages:

- application de la ou des tranformations affines aux points d'un object
- transformation d'un repère

c - Symétrique

- **symétrie axiale à $\mathbf{O_y}$:**

  $x' = -x$ $y' = y$

Ce qui revient à utiliser les matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- **symétrie ponctuelle à O :**

De la même manière nous avons $> x' = -x > y' = -y$

équivalent à

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d - autre transformation

5 - Coordonnées homogène dans le plan

définition: On appelle X, Y les coordonnées affines homogènes d'un point dans le repère affine $\overrightarrow{O_{ij}}$, et W la coordonnée associé à X et Y lors de l'ajout de l'axe z, tel que :

- Si $W \neq 0$ alors $x = \frac{X}{W}$, $x = \frac{X}{W}$
- si $W = 0$ alors $M(X, Y, W)$ représente le vecteurs $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} ontunedirection$

  exemple de coordonnées homogènes aux coordonnées cartésiennes (3D → 2D):
  $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
  $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
  $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

  exemple de coordonnées cartésiennes aux coordonnées homogènes (2D → 3D):

  Point $P \begin{pmatrix} 5/2 \\ 8/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5/2 \\ 8/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Vecteur $\overrightarrow{V} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a parte
coordonées homogènes dans l'espace, idem

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \xrightarrow[si\ W \neq 0]{} \begin{pmatrix} X/W \\ Y/W \\ Z/W \end{pmatrix}$$