# Géométrie pour la 3D

Se donner des outils pour résoudre des problèmes géométriques.

Concevoir des algorithmes **efficaces** et **robustes** :

- Complexité
- Précision numérique
- Strucure et certification

# I - Polygone et Polyèdre

## 1 - Polygone (2D)

### a - Définition

**définition :**

Soient $P_0$, $P_1$, ..., $P_{n+1}$, une suite de points ordonnés et cyclique ($P_n$=$P_0$).
Soient $E_0$ = $P_0P_1$, ..., $E_i$=$P_iP_{i+1}$, ..., $E_{n-1}$=$E_{n-1}E_0$ et E l'ensemble ordonné des segments fermés, incluant des points d'extrémité. Les segments définissent un polygone *P*.

Si et seulement si,

- L'intersection de deux segments adjacents est un point :

$$E\ i\ \cap E\ i-1\ = P\ i+1\ , i = 0 \rightarrow n-1$$

- L'intersection de deux segments non adjacents est vide :

$$E\ i\ \cap E\ j\ = \varnothing, i \neq i+1$$

*Pour la suite, un **polygone** est un bord de la région.*

**Orientation :** On prendra le sens trigonométrique dans ce cours.

*Propriété :*

- *Théorème de Jordan :* Une courbe fermée simple divise le plan en deux régions, ou en deux composantes, son intérieur et sont extérieur.
- Concavité
  - concave : Ange intérieur inférieur à pi rad(180 deg)
  - convexe : tout ce qui n'est pas concave

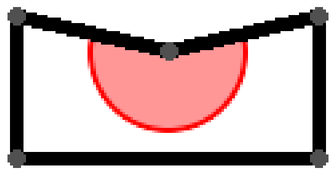

Figure 1: Polygone concave

### b - Localisation d'un point dpar rapport à un polygone

1. Méthode des angles

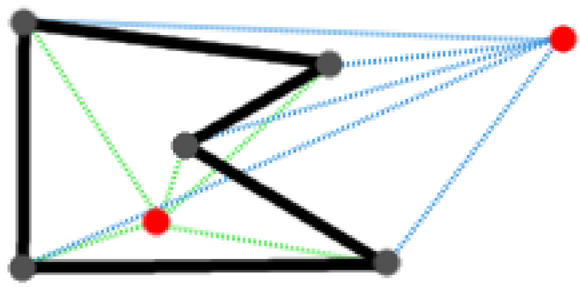

Figure 2: Localisation d'un point par les anges

- La somme des angles est égale à 360 si le point est à l'intérieur du polygone
- La somme des angles est égale à 0 si le point est à l'extérieur

2. Méthode de l'index

   **Théorème** : Soit un polygone et D une droite ne passant ni par un sommet ni par un arrête. Alors la droite D coupe P en un nombre de point pair, $Q_1$, ..., $Q_{n-1}$, tous distincts

   **Définition :** Soit $M(x, y) \in \mathbb{R}^2, \notin P$ On appelle **index** de M par apport à P. Selon une demi-droite $\Delta$ issue de M et passant par P

   **Théorème :** La parité de $I\ p(M)$ ne dépends pas du choix de la demi-droite $\Delta$ :

   - M est à l'intérieur de $P$ si $I\ P\ (M)[2] \equiv 1$
   - M est à l'extérieur de $P$ si $I\ P\ (M)[2] \equiv 0$

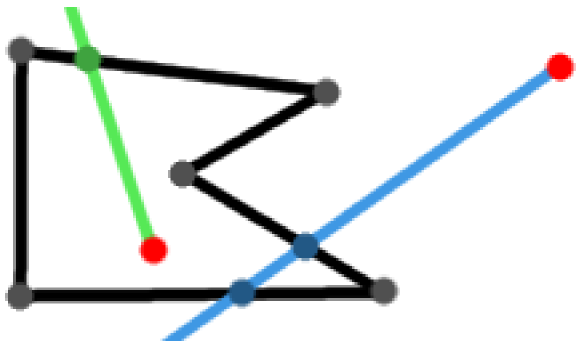

Figure 3: Localisation d'un point par index

## 2 - Polygone (3D)

**Théorème de Jordan :**
Le complémentaire dans $\mathbb{R}^3$ d'un polyèdre à deux composantes connexes, l'une bornée (*intérieur*) et l'autre infini (*extérieur*).

**Définition :** Un polyèdre est un ensemble de polygones $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\mathrm{f}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

> ***1.*** La condition géométrique est $int(P\ i\ ) \cap int(P\ j\ ), i \neq j$ (*nb:* $int(P\ i\ )$ est une face)
>
> ***2.*** Conditions topologique :
>
> - Toute arrête de polygone $\mathrm{P}_\mathrm{i}$ appartientà exactement deux polygones adjacents.
> - Tout sommet de tout polygone $\mathrm{P}_\mathrm{i}$ appartient à au moins deux polygones

### a - Localisation d'un point dpar rapport à un polygone

1. Méthode des angles

   Si un point est dans le polyèdre, la somme des angles est égale à 0

2. Méthode de l'index

   *Idem* que pour les polygones *2D*

### b - Représentation du polyèdre

les polyèdres sont représentés par les faces, ces faces sont représentées par les somets et arrêtes.

$F\ 1\ = (S\ 1\ , ..., S\ j\ ), \ldots, F\ i\ = ...$

$E = E\ 1\ (S\ 1\ S\ 2\ ), ..., E\ n\ (S\ n - 1S\ 0\ )$