Géométrie pour la 3D

Se donner des outils pour résoudre des problèmes géométriques.
Concevoir des algorithmes **efficaces** et **robustes** :

- Complexité
- Précision numérique
- Strucure et certification

I - Polygone et Polyèdre

1 - Polygone (2D)

a - Définition

définition :

Soient P_0, P_1, ..., P_{n+1}, une suite de points ordonnés et cyclique (P_n=P_0).
Soient E_0 = P_0P_1, ..., E_i=P_iP_{i+1}, ..., E_{n-1}=$E_{n-1}E_0$ et E l'ensemble ordonné des segments fermés, incluant des points d'extrémité. Les segments définissent un polygone *P*.

Si et seulement si,

- L'intersection de deux segments adjacents est un point :

$$E\ i\ \cap E\ i-1\ = P\ i+1\ , i = 0 \to n-1$$

- L'intersection de deux segments non adjacents est vide :

$$E\ i\ \cap E\ j\ = \varnothing, i \neq i+1$$

*Pour la suite, un **polygone** est un bord de la région.*

Orientation : On prendra le sens trigonométrique dans ce cours.

Propriété :

- ***Théorème de Jordan :*** Une courbe fermée simple divise le plan en deux régions, ou en deux composantes, son intérieur et sont extérieur.
- **Concavité:**
  - **concave :** Ange intérieur inférieur à pi rad(180 deg)
  - **convexe :** tout ce qui n'est pas concave

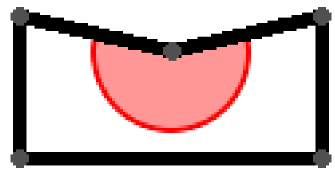

Figure 1: Polygone concave

b - Localisation d'un point dpar rapport à un polygone

1. **Méthode des angles**

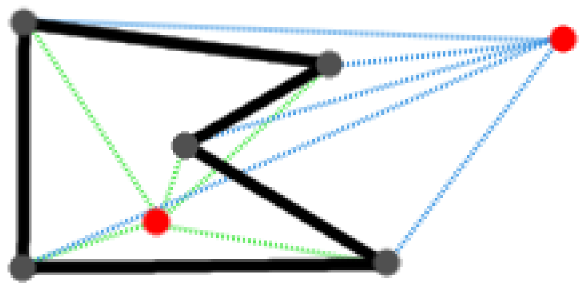

Figure 2: Localisation d'un point par les anges

- La somme des angles est égale à 360 si le point est à l'intérieur du polygone
- La somme des angles est égale à 0 si le point est à l'extérieur

2. **Méthode de l'index**

   Théorème : Soit un polygone et D une droite ne passant ni par un sommet ni par un arrête. Alors la droite D coupe P en un nombre de point pair, $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$, tous distincts

   Définition : Soit $M(x, y) \in \mathbb{R}^2, \notin P$ On appelle **index** de M par apport à P. Selon une demi-droite Δ issue de M et passant par P

   Théorème : La parité de $I\ p(M)$ ne dépends pas du choix de la demi-droite Δ :

   - M est à l'intérieur de P si $I\ P\ (M)[2] \equiv 1$
   - M est à l'extérieur de P si $I\ P\ (M)[2] \equiv 0$
   - **Cas d'exception :**
     - comptage de **1** si le point B est au **`dessus`** de Δ
     - comptage de **0** si le point B est au **`dessous`** de Δ
     - comptage de **0** si le point B est **`sur`** Δ

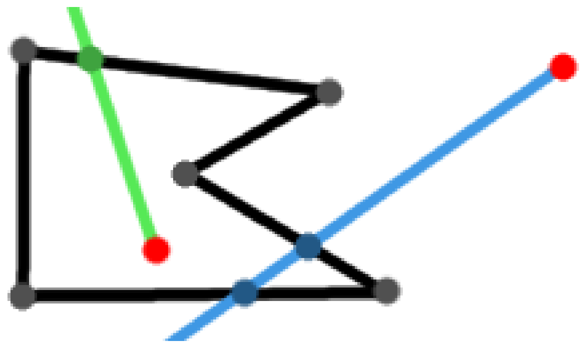

Figure 3: Localisation d'un point par index

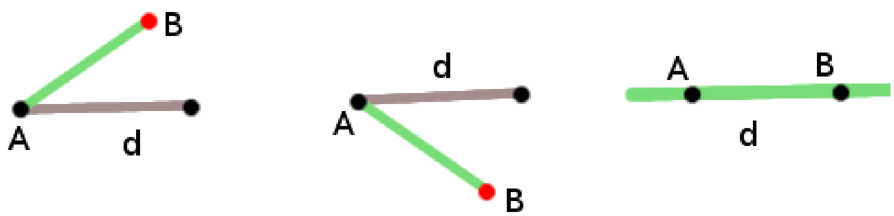

Figure 4: Exception de la méthode par l'index

c - Algorithme de localisation par test de parité

Soit un point M qui n'est pas sur le polygone P, Δ une demi-droite horizontale issue de M vers P.

- **Initialisation**: $0 \to I$
- **Pour tout,** coté C du polygone P
  - **faire :** calculer $card(C \cap \Delta)$
  - **répéter :** $I = I + card(C \cap \Delta)$
- **Si** I est ***impair*** alors $M \in P$, sinon $M \notin P$

2 - Polygone (3D)

Théorème de Jordan :
Le complémentaire dans $\mathbb{R}^3$ d'un polyèdre à deux composantes connexes, l'une bornée (*intérieur*) et l'autre infini (*extérieur*).

Définition : Un polyèdre est un ensemble de polygones $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\mathrm{f}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

1. La condition géométrique est $int(P\ i\ ) \cap int(P\ j\ ), i \neq j$ (*nb:* $int(P\ i\ )$ est une face)

2. Conditions topologique :

- Toute arrête de polygone $\mathrm{P_i}$ appartientà exactement deux polygones adjacents.
- Tout sommet de tout polygone $\mathrm{P_i}$ appartient à au moins deux polygones

a - Localisation d'un point dpar rapport à un polygone

1. Méthode des angles

   Si un point est dans le polyèdre, la somme des angles est égale à 0

2. Méthode de l'index

   Idem que pour les polygones *2D*

b - Représentation du polyèdre

les polyèdres sont représentés par les faces, ces faces sont représentées par les somets et arrêtes.

$F\ 1\ = (S\ 1\ , ..., S\ j\ ), \dots, F\ i\ = ...$

$E = E\ 1\ (S\ 1\ S\ 2\ ), ..., E\ n\ (S\ n - 1S\ 0\ )$