Asignment 2

January 31, 2025

1. **[2pts]** A **conic in the plane** can be described through an equation of the form:

$$\mathbf{p}^T\mathbf{Q}\mathbf{p} = 0,$$

where $\mathbf{p}$ is a vector of homogeneous coordinates for a point ($\in \mathbb{R}^3$).

1. What form does the matrix $\mathbf{Q}$ take for a circle centered on $(2, 1)$ with radius 4? Is it unique?
2. Demonstrate that the image of this conic through a projective transformation $\mathbf{H}$ is still a conic and that its equation can be written with the matrix

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}.$$

2. **[2pts]** We have seen that the basic projection operator in vision is the **pinhole camera model**:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- What is the projection of 3D points

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

and what are those points corresponding to, geometrically speaking?

- Verify through an example of your choice that the images through $\mathbf{P}$ of two parallel lines are in general **not parallel**.

3. **[2pts]** Suppose you spot an interesting pixel of coordinates (u, v) in an image. Determine the equation of the 3D ray passing through this pixel and the optical center of the camera, in the camera frame, in function of the intrinsic parameters matrix $\mathbf{K}$.

4. **[2pts]** We consider a camera with the following projection matrix:

$$\mathbf{P} \propto \mathbf{K}[\mathbf{R}\mathbf{t}]$$

such that the 3D reference frame has its z axis as the **vertical direction in the workd. Describe a possible process to determine the equation of the** horizon line** in the image.

5. **[2pts]** Suppose you are given a set of pairs $\mathbf{p}^i, \mathbf{p}^m \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$ corresponding to 3D points and their corresponding projections. Show that there are always at least two possible "theoretical" cameras such that the $\mathbf{p}^m$ project onto the $\mathbf{p}^i$.

1. [2pts] A **conic in the plane** can be described through an equation of the form:

$$\mathbf{p}^T\mathbf{Q}\mathbf{p} = 0,$$

where $\mathbf{p}$ is a vector of homogeneous coordinates for a point ($\in \mathbb{R}^3$).

1. What form does the matrix $\mathbf{Q}$ take for a circle centered on $(2, 1)$ with radius 4? Is it unique?
2. Demonstrate that the image of this conic through a projective transformation $\mathbf{H}$ is still a conic and that its equation can be written with the matrix

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una cónica en el plano: $p^T Q p = 0$, p vector homogéneo $\in \mathbb{R}^3$

1) ¿Qué forma tiene la matriz Q para ser un círculo centrado en $(2,1)$ con radio $r=4$? ¿Es único?

$$p^T Q p = 0$$

Círculo en $(2,1)$ $\Rightarrow$ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4^2$

Círculo unitario $x^2+y^2-1=0$ $\Rightarrow$ $[x \;\; y \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{[x \;\; y \;\; 1]}_{p^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -11 \end{bmatrix}}_{Q \text{ buscada}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}_{p}$$

$x^2+y^2-4x-2y-11=0$

$$\begin{bmatrix} x-2 & y-1 & -2x-y-11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$x^2-2x + y^2-y -2x-y-11=0$

$x^2+y^2-4x-2y-11=0$ ✓

$5-16=-11$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ -h & -k & h^2+k^2-r^2 \end{bmatrix}$$

¿Es única? No es única, podemos tomar múltiplos de Q, como kQ, por ejemplo, sea $k=2$.

$$2Q = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -22 \end{bmatrix}$$

y tendríamos la ecuación

$$[x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[2x-4 \quad 2y-2 \quad -4x-2y-22]\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$2x^2-4x+2y^2-2y-4x-2y-22=0$$

$$2x^2+2y^2-8x-4y-22=0$$

$$2(x^2+y^2-4x-2y-11)=0$$

$$x^2+y^2-4x-2y-11=0 \leftarrow \text{Llevándonos a la misma cónica} :)$$

② La imagen de esta cónica bajo una transformación proyectiva H sigue representando una cónica y que su ecuación puede ser escrita con la matriz $Q' = H^{-T}QH^{-1}$

Consideremos H una transformación proyectiva, y sea p un punto de manera que $p' = Hp$.

Ahora veamos la ecuación de la cónica transformada

$$p' = Hp$$

$$H^{-1}p' = p$$

y sustituimos en la ecuación de la cónica $p^TQp=0$, por lo que tenemos

$$(H^{-1}p')^T Q (H^{-1}p') = 0$$

$$p'^T H^{-T} Q H^{-1} p' = 0$$

$$p'^T (H^{-T} Q H^{-1}) p' = 0$$

Por lo que la matriz de la cónica transformada es

$$H^{-T} Q H^{-1}$$

Como se requería.

2. [2pts] have seen that the basic projection operator in vision is the **pinhole camera model**:

$$\mathbf{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

- What is the projection of 3D points

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f'x \\ f'y \\ 0 \end{pmatrix}$$

and what are those points corresponding to, geometrically speaking?

- Verify through an example of your choice that the images through **P** of two parallel lines are in general **not parallel**.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'x \\ f'y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ Convirtamos esta en coordenadas de imagen 2D dividiendo por la 3ra componente

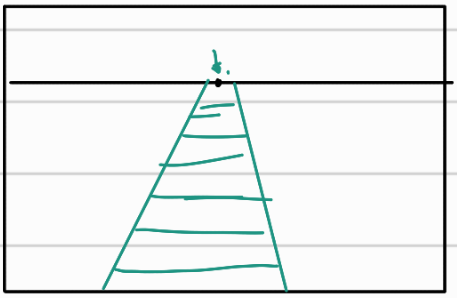
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w} \right) = \left(\frac{f'x}{0}, \frac{f'y}{0} \right)$$

Tenemos una división por cero, la proyección esta indefinida !!

Su interpretación geométrica

Nos marca una línea al horizonte, además los puntos están en el mismo plano que el pinhole

⊙ Verifica con un ejemplo de tu elección que las imágenes a través de P de dos líneas paralelas son en general no paralelas



Definamos $P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

nuestra matriz de proyección.

Ahora tomemos dos líneas paralelas en el espacio 3-dimensional.

$l_1 : (x, 0, z)$ y $l_2 : (x, 10, z)$

Entonces para ambas líneas

$$x = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x + 8z \\ 10y + 8z \\ z \end{pmatrix}$$

Luego las coord. de imagen $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10x + 8z}{z} \\ \frac{10y + 8z}{z} \end{pmatrix}$

Luego queremos encontrar el punto de fuga donde se intersectan ambas rectas

Para $l_1 : y = 0$, tomamos valores de z grandes (y luego $z \to \infty$)

$$v_1 = \frac{10(0) + 8(10{,}000)}{10{,}000} = \frac{10y}{z} + 8 = 8$$

Similarmente para $l_2 : y = 10$

$$v_2 = \frac{10(10) + 8(10{,}000)}{10{,}000} = 8.01$$

Ahora si $z \to \infty$

$$\lim_{z\to\infty} \left(\frac{10y}{z} + 8 \right) = \lim_{z\to\infty} \left(\frac{10(0)}{z} + 8 \right) = 8$$

para $l_2 : y = 10$ para $l_1 : y = 0$

Similarmente, para la coordenada v, tenemos, que para z grande y x arbitrario en ambos casos l_1 y l_2.

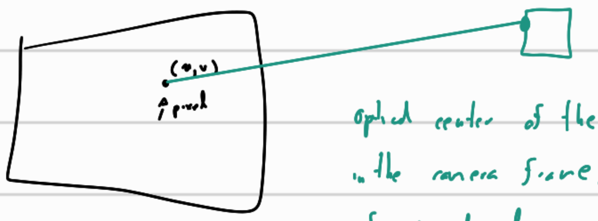
$$v = \frac{10x + 8z}{z} = 10\frac{x}{z} + 8$$

Pero si: $z \to \infty$

$$\lim_{z \to \infty} \left(\frac{10x}{z} + 8 \right) = 8$$

Por lo que podemos decir que ambas rectas se intersectan en el punto de fuga $(8, 8)$.

3. **[2pts]** Suppose you spot an interesting pixel of coordinates (u, v) in an image. Determine the equation of the 3D ray passing through this pixel and the optical center of the camera, in the camera frame, in function of the intrinsic parameters matrix $\mathbf{K}$.



optical center of the camera in the camera frame, en función de los parámetros intrínsecos de la matriz K

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_u & -\alpha_u \cot(\theta) & u_0 \\ 0 & \frac{\alpha_u}{\operatorname{sen}(\theta)} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

intrinsic parameters matrix

Por lo que vamos a encontrar la inversa de K

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda K^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow K \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

with $\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} \alpha_u & -\alpha_u \cot\theta & u_0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_v}{\sin\theta} & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

We use more often $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha_u & -\alpha_u \cot\theta & u_0 \\ 0 & \frac{\alpha_v}{\sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

The 3×3 matrix $\mathbf{K}$ is the **intrinsic parameters matrix**.

The projection finally results in

$$\mathbf{p}^i = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \propto \mathbf{K} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

But this equation holds with 3D coordinates in a camera-centered frame!

La proyección podemos verla como $\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix} =$

Luego $K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix}$; suponiendo que $z = 1$, tenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

y finalmente el rayo buscado, para un escalar $\lambda \geq 0$, es

$$r(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que primero nos tocaría encontrar K^{-1}

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_u & -\alpha_u \cot(\theta) & u_0 \\ 0 & \frac{\alpha_u}{\operatorname{sen}(\theta)} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

con $A = \begin{pmatrix} \alpha_u & -\alpha_u \cot(\theta) \\ 0 & \frac{\alpha_u}{\operatorname{sen}(\theta)} \end{pmatrix}$

intrinsic parameter matrix

y $B = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

Por lo que su inversa está dada por:

$$K^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} B D^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_u}{\operatorname{sen}(\theta)} & \alpha_u \cot(\theta) \\ 0 & \alpha_u \end{pmatrix}$; $\det(A) = \frac{\alpha_u^2}{\operatorname{sen}(\theta)}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_u} & \frac{\cos\theta}{\alpha_u} \\ 0 & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\alpha_u} \end{pmatrix} \qquad \frac{\alpha_u}{\frac{\alpha_u^2}{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\alpha_u}$$

luego $-A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_u} & \frac{\cos\theta}{\alpha_u} \\ 0 & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\alpha_u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_0}{\alpha_u} - \frac{v_0 \cos\theta}{\alpha_u} = -\frac{u_0 + v_0\cos\theta}{\alpha_u} \\ -\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{\alpha_u} \end{pmatrix}$

Por lo que

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_u} & \frac{\cos(\theta)}{\alpha_u} & -\frac{u_0 + v_0\cos\theta}{\alpha_u} \\ 0 & \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\alpha_u} & -\frac{v_0 \operatorname{sen}(\theta)}{\alpha_u} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que ahora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_u} & \frac{\cos(\theta)}{\alpha_u} & -\frac{u_0 + v_0\cos\theta}{\alpha_u} \\ 0 & \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\alpha_u} & -\frac{v_0 \operatorname{sen}(\theta)}{\alpha_u} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u \cdot \frac{1}{\alpha_u} + v \cdot \frac{\cos\theta}{\alpha_u} - \frac{u_0 + v_0\cos\theta}{\alpha_u} \\ v \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\alpha_u} - \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta}{\alpha_u} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u-u_0)\cdot\frac{1}{\alpha_u} + (v-v_0)\cdot\frac{\cos\theta}{\alpha_u} \\ (v-v_0)\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\alpha_u} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que finalmente

$$r(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} (u-u_0)\cdot\frac{1}{\alpha_u} + (v-v_0)\cdot\frac{\cos\theta}{\alpha_u} \\ (v-v_0)\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\alpha_u} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \ \lambda \geq 0$$

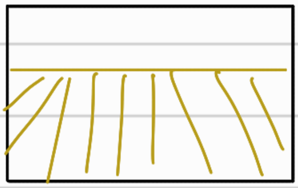
el rayo buscado.

4. **[2pts]** We consider a camera with the following projection matrix:

$$\mathbf{P} \propto \mathbf{K}[\mathbf{Rt}]$$

such that the 3D reference frame has its z axis as the **vertical direction in the workd. Describe a possible process to determine the equation of the** horizon line** in the image.

Horizon line → Es la imagen del plano al infinito



Primero: eje z como dirección vertical en el mundo.
(Tomamos $z = 0$, aquí vamos a encontrar dicha línea al horizonte)

Por lo que tenemos puntos de la forma $(x, y, 0, 1)$, al tener $z = 0$.
Luego, tenemos, al aplicar la matriz de proyección, nuestro $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como nuestra P es arbitraria

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{x}{P_{11}x + P_{12}y + P_{14}} & \overset{y}{P_{21}x + P_{22}y + P_{24}} & \overset{z}{P_{31}x + P_{32}y + P_{34}} \end{pmatrix}$$

Luego como $z = 0$, hacemos

$$P_{31}x + P_{32}y + P_{34} = 0$$

siendo esta nuestra línea al horizonte en coordenadas de imagen

5. **[2pts]** Suppose you are given a set of pairs $\mathbf{p}^i, \mathbf{p}^m \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$ corresponding to 3D points and their corresponding projections. Show that there are always at least two possible "theoretical" cameras such that the $\mathbf{p}^m$ project onto the $\mathbf{p}^i$.

Primero consideremos P como en el modelo de cámara pinhole

$$P = \begin{pmatrix} f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Por lo que si consideramos el punto $p^n = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

tenemos entonces que

$$p^i = Pp^n = \begin{pmatrix} f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xf' & f'y & z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{xf'}{z}, \frac{f'y}{z} \right)$$

Por lo que si ahora consideramos el modelo

$$P' = \begin{pmatrix} f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$$

$$Pp^m = \begin{pmatrix} -f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'x & -f'y & -z \end{pmatrix}$$

Esto a 2D es $\Rightarrow \left(\frac{-f'x}{-z}, \frac{-f'y}{-z} \right) = \left(\frac{f'x}{z}, \frac{f'y}{z} \right)$

Lo cual nos llevó al mismo punto p^i

Ahora si nuestra cámara es arbitraria al tener

$$Pp^n = p^i,$$

si tomamos $P' = -P$ (el negativo de P),

obtendríamos como punto 3D a

$$(-x, -y, -z) = (-1)(x, y, z)$$

Luego, al convertir a coordenadas en 2D, tenemos que

$$\left(\frac{-x}{-z}, \frac{-y}{-z}\right) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

obteniendo el mismo punto.

Por lo que al tener una cámara P, podemos asegurar que $-P$ nos lleva a la misma proyección p^i y así siempre tenemos dos cámaras teóricas que nos llevan al mismo punto