

1. prove that the longest common subsequence (LCS) problem has an optimal substructure property

sequence  $X$  중  $\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$  이라고 하면, substructure property는 후자의 sequence의 prefix성에 대응된다.

자녀 prefix 자릿수는  $i=0, 1, \dots, m$  이라고 한다면  $X_i = \langle x_1, x_2, \dots, x_i \rangle$  이되며, 예로  $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$  라면  $X_4 = \langle A, B, C, B \rangle$  이고  $X_0 = \langle \rangle$  이다.

optimal structure property (최적부분구조)

$X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ,  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$  두 시퀀스가 있을 때,  
 $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$  라는  $X, Y$ 의 LCS가 있다고 하자.

1.  $x_m = y_n$  이면,  $z_k = x_m = y_n$  이고  $z_{k-1}$  은  $x_{m-1}$  과  $y_{n-1}$  의 LCS

2.  $x_m \neq y_n$  이고  $z_k \neq x_m$  이면  $z_k$  가  $x_{m-1}$  과  $y$  의 LCS

3.  $x_m \neq y_n$  이고  $z_k \neq y_n$  이면  $z_k$  가  $x$  과  $y_{n-1}$  의 LCS

prove

(1)  $x_m = y_n$  이면 당연히 LCS의 마지막인  $z_k$  은  $(x_m = y_n)$  이 될 것이다.  
이로 인해,  $z_{k-1}$  은  $x_{m-1}$  과  $y_{n-1}$  의 LCS가 된다.

(2)  $z_k \neq x_m$  이면  $z_k$  은  $x_{m-1}$  과  $y$  의 LCS가 된다. 만약 이보다 큰

$x_{m-1}$  과  $y$  의 LCS가 존재 한다면, 그 sequence도  $x_m$  과  $y$  의 common-sequence가 되므로 가정과 모순

(3) (2)와 같음

Ex) (1)

$X = \dots A, C, A, G, T, A$  m 번째

$Y = \dots A, T, T, C, G, A$  n 번째

$X_m = Y_n (A)$  그러니까  $X$ 의 마지막 sequence는  $A$ 가 될 것이고

$X_{m-1}$ 과,  $Y_{n-1}$ 까지의 공통 분포 sequence를 구해서, 마지막  $A$ 를 붙인 LCS 이다.

(2)  $X = \dots A, C, A, G, T$  m 번째

$Y = \dots A, T, T, C, G, A$  n 번째

$Z_k \neq X_m (A)$  이면

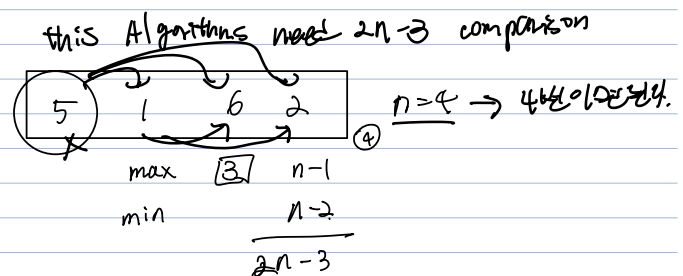
$Z_k$ 는  $X_{m-1}$ 과  $Y$ 의 공통 분포 sequence. 만약  $Z_k$ 보다 큰  $Z_{k+1}$ 이  
 $X_{m-1}$ 과  $Y$ 의 common sequence  
 라면  $Z_k$ 는  $X$ 와  $Y$ 의  
 LCS가 아니게 된다.

2. Design an algorithm that solves the following problem with  $\frac{3}{2}n - 2$  comparisons.

Input:  $2^m$  distinct integers, where  $m \geq 1$

Output: maximum and minimum

assume that  $n = 2^m$



Use  
 Divide and conquer.

Divide the array by half since length of Array  $n$  is 2's power.

Ex)  $\boxed{5 \ 1 \ 6 \ 2} \rightarrow \boxed{5 \ 1} \ \boxed{6 \ 2}$

compare each base since we are the two numbers they know which one is bigger / from  $\boxed{5, 1}$  5 is max, 1 is min

from  $\boxed{6, 2}$  6 is max, 2 is min.

then compare each max and min from both array

the Time complexity is  $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + 2$   
 $= 2 T(n/2) + 2$

we solve  $T(n) = 2 T(n/2) + 2$

$$= T(n) = 2 T(n/2) + 2 = 2 (2 T(n/4) + 2) + 2$$

$$= 2^{m-1} T\left(\frac{n}{2^{m-1}}\right) + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1}$$

$$n = 2^m$$

so

$$T(n) = \frac{n}{2} \cdot T(2) + \underbrace{2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1}}_{2(1-2^{m-1})}$$

$$= \frac{n}{2} \cdot T(2) + \frac{2(1-2^{m-1})}{1-2}$$

$$= -2 + 2 \cdot 2^{m-1}$$

$$= -2 + n$$

$$= \frac{n}{2} \cdot 1 + n - 2$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}n - 2}}$$