1. prove that the longest common subsequence (LCS) problem has an optimal substructure property

sequence X 를 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$ 이라고 할때, substructure property는 두개의 sequence의 prefix쌍에 대응된다.

여기서 prefix 라함은 $i = 0, 1, \ldots, m$ 이라고 할때 $X_i = \langle x_1, x_2, \ldots x_i \rangle$ 이되며, 예로 $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ 라면 $X_4 = \langle A, B, C, B \rangle$이고 $X_0 = \langle \ \rangle$ 이다.

optimal structure property (최적부분구조)

$X = \langle x_1, x_2, \ldots x_m \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2, \ldots y_n \rangle$ 두 시퀀스가 있을때, $Z = \langle z_1, z_2, \ldots z_k \rangle$ 라는 X, Y의 LCS 가 있다고 하자.

1. $x_m = y_n$ 이면, $z_k = x_m = y_n$ 이고 z_{k-1}은 X_{m-1}과 Y_{n-1}의 LCS
2. $x_m \neq y_n$ 와 $z_k \neq x_m$ 은 Z 가 X_{m-1}과 Y의 LCS
3. $x_m \neq y_n$ 와 $z_k \neq y_n$ 은 Z가 X와 Y_{n-1}의 LCS

prove

(1) $x_m = y_n$ 이면 당연히 LCS의 마지막인 z_k는 $x_m = y_n$ 이 될것이다 이로인해, z_{k-1}는 x_{m-1}과 y_{n-1}의 LCS 가된다.

(2) $z_k \neq x_m$ 이면 Z는 x_{m-1}과 Y의 LCS가 되는데, k길이보다큰 x_{m-1}와 Y의 LCS가존재 한다면, 그 sequence는 x_m과 Y의 common-sequence가 되므로 가정에위배

(3) (2)와 같음

Ex) (1)

m번째

$x = \ldots, A, C, A, G, T, A]$

n번째

$Y = \ldots, A, t, T, C, G, A]$

$x_m = y_n (A)$ 그에 따라 Z의 마지막 sequence도 A가 될 것이고 x_{m-1}과, y_{n-1} 까지의 공통 부분 sequence는 Z에서 마지막 A를 뺀 LCS 이다.

(2)

m번째

$x = \ldots, A, C, A, G, T]$

$Y = \ldots, A, t, t, C, G, A]$

n번째

$z_k \neq x_m (A)$ 이면

Z는 x_{m-1}와 Y의 공통 부분 시퀀스.

만약 z_k보다 큰 z_{k+1}이 x_{n-1}과 Y의 common sequence 라면 Z는 더이상 X와 Y의 LCS 가 아니게 된다.

2. Design an algorithm that solves the following problem with $\frac{3}{2}n - 2$ comparisons.

Input : 2^m distinct integers, where $m >= 1$

Output : maximum and minimum

assume that $n = 2^m$

this Algorithms need $2n-3$ comparison

5 1 6 2 ④

$n=4 \rightarrow$ 4번이 아닌 5번.

max $\boxed{3}$ $n-1$

min $n-2$

$2n-3$

use
Divide and conquer

Divide the array by half since length of Array n is 2S power.

Ex) $\boxed{5\ 1\ 6\ 2} \rightarrow \boxed{5\ 1}\ \boxed{6\ 2}$

compare each base since there are two numbers they know which one is bigger / from (5, 1) 5 is max, 1 is min

from $\boxed{6, 2}$ 6 is max, 1 is min.

then compare each max and min from both array

the Time complexity is $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + 2$

$$= 2T(n/2) + 2$$

we solve $T(n) = 2T(n/2) + 2$

$$= T(n) = 2T(\tfrac{n}{2}) + 2 = 2\left(2T(\tfrac{n}{4}) + 2\right) + 2$$

$$= 2^{m-1} T\left(\frac{n}{2^{m-1}}\right) + 2 + 2^2 + \cdots 2^{m-1}$$

$n = 2^m$

so

$$T(n) = \frac{n}{2} \cdot T(2) + \underbrace{2 + 2^2 \cdots 2^{m-1}}$$

$$= \frac{n}{2} \cdot T(2) + \frac{2(1-2^{m-1})}{1-2}$$

$$= -2 + 2 \cdot 2^{m-1}$$

$$= -2 + n$$

$$= \frac{n}{2} \cdot 1 + n - 2$$

$$= \frac{3}{2}n - 2$$