



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**PROJETO 3
SINCRONIZAÇÃO DE NEURÔNIOS EM REDES**

Nomes: Ana Júlia de Oliveira Bellini
Luiz Filipe Moraes Saldanha Oliveira
Willian Dihanster Gomes de Oliveira

RA: 111774
RA: 112229
RA: 112269

**SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
2018**

Introdução

Redes são formas de representação de objetos, formas, ou coisas que possuem uma relação de conexão com outras coisas. Algumas das topologias de redes são as redes regulares, redes aleatórias e redes livre de escala. Comumente, são representadas por grafos e baseadas em diversas aplicações. Dessa forma, servem para modelar por um exemplo, uma rede de neurônios acoplados. [1]

Biologicamente, esses neurônios são formados por três partes: dendrito, corpo celular e axônio. Os dendritos recebem os estímulos transmitidos pelos outros neurônios, o corpo celular coleta e combina informações vindas dos outros neurônios e o axônio transmite os estímulos para outras células. A comunicação entre os neurônios é feita através de sinapses por seus dendritos. Os dendritos captam os estímulos recebidos em um determinado período de tempo e os transmitem ao corpo do neurônio, onde são processados. Quando esses estímulos atingem um limiar, um sinal é propagado no axônio, que é transmitido para outros neurônios. [2]

No modelo de neurônios acoplados, os disparos de um neurônio são dados pela interação com outros neurônios, definido por um fator de acoplamento e pode-se ainda, adicionar uma corrente externa, que é um estímulo externo [3]. Dessa forma, faremos o estudo da influência da porcentagem de neurônios inicialmente ativos, o tempo e diferentes topologias de redes, para a sincronização de uma rede de neurônios acoplados. Essa rede simulada será modelada através de grafos, e analisaremos os resultados utilizando modelagem matemática e computacional.

Grafos

Um grafo G é definido pela tripla ordenada $G = (V, E, \psi_G)$, em que V é um conjunto de vértices não vazio, E é o conjunto de arestas e ψ_G , uma função de incidência que associa uma aresta de E sobre dois vértices de V . [4]

Topologias de Rede

Rede Regular (Iatices ou reticulados)

Uma rede k -regular é um grafo G , onde $d_G(v) = k$, $\forall v \in V$ e $k \in \mathbb{N}$. Isto é, todos os vértices possuem grau k , assim, cada vértice está conectado a exatamente k outros vértices. Na figura 1, temos um exemplo de uma rede k -regular representado por um grafo. [4]

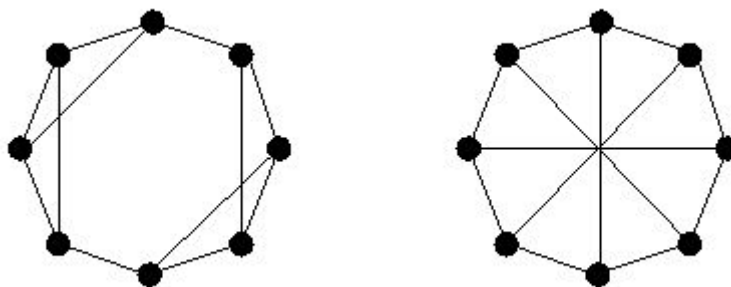


Figura 1: Exemplos de Grafos 3-regulares ou duas redes regulares.

Disponível em: <http://miltonborba.org/Algf/Grafos.htm>

Rede Aleatória (Erdős-Rényi)

Uma rede aleatória pelo modelo de Erdős-Rényi [5] pode ser representada por um grafo $G = (V, E)$, com $n = |V|$ e $m = |E|$. Nesse caso, os n vértices são ligados a outros vértices aleatoriamente, por arestas, com uma probabilidade p de existir uma aresta entre dois vértices, resultando em uma rede com grau médio k .

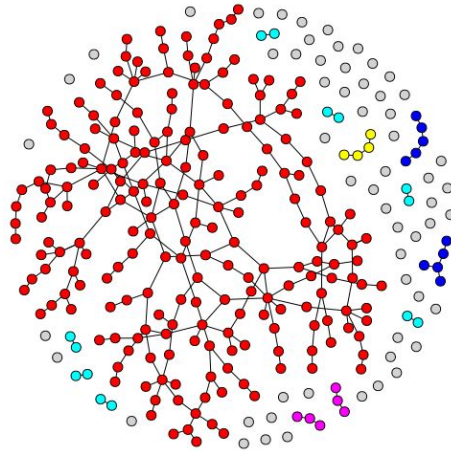


Figura 2: Exemplo de uma rede aleatória

Disponível em: <https://linbaba.wordpress.com/2010/10/15/fluid-limits-and-random-graphs/>

Rede Livre de Escala (Barabási–Albert)

A rede livre de escala (Barabási–Albert [6]) é uma rede em que os vértices possuem uma maior tendência de serem conectados a vértices que possuem maior grau, denominados *hubs*. Dessa forma, a rede gerada é uma rede com poucos vértices altamente conectados (*hubs*) e muitos vértices com poucas conexões.



Figura 3: Exemplo de uma rede livre de escala

Disponível em: <https://sarauparatodos.wordpress.com/2015/12/22/albert-laszlo-barabasi-hungaros-e-redes/>

Modelagem Matemática

Modelo de Van der Pol

O modelo matemático utilizado é uma variação bidimensional do oscilador de relaxamento de Van der Pol adaptado para neurônios, onde a variação de um oscilador pelo tempo é dada pelas seguintes equações:

$$\frac{dx}{\Delta t} = 3x - x^3 + 2 - y + I + \rho$$

$$\frac{dy}{\Delta t} = \varepsilon(\alpha(1 + \tanh(\frac{x}{\beta})) - y)$$

Onde x é uma variável excitatória, y é uma variável inibitória, I é o estímulo externo do neurônio, ρ é um parâmetro não necessariamente fixo que representa o amortecimento do oscilador, ε é um número pequeno e α e β são parâmetros do modelo.

Para simular uma rede de neurônios, cada neurônio foi tratado como um oscilador e foi adicionado um fator de acoplamento entre neurônios, para que houvesse sincronização nas oscilações. O acoplamento utilizado é dado por:

$$S_i = \sum_{k \in N(i)} w_{ik} H(x_k - \theta)$$

Onde S_i é a força total de acoplamento sobre o neurônio i , $N(i)$ é a vizinhança do neurônio i , w é a força de acoplamento do neurônio k no neurônio i (não é necessariamente igual para todo neurônio na rede), x é a variável excitatória do modelo e θ é o limiar de corte e $H(a)$ é uma função dada por:

$$\begin{aligned} H(a) &= 1, \text{ se } a \geq 0; \\ H(a) &= 0, \text{ se } a < 0 \end{aligned}$$

Método de Euler

No modelo de Van der Pol, foi aplicado o método de Euler para equações diferenciais, para aproximação dos resultados. As equações obtidas foram as seguintes:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + (3x - x^3 + 2 - y + I + \rho)\Delta t \\ y(t + \Delta t) &= y(t) + \varepsilon(\alpha(1 + \tanh(\frac{x}{\beta})) - y)\Delta t \end{aligned}$$

Modelagem Computacional

Após a aplicação do Método de Euler, obtivemos a versão iterativa das equações, que podem então ser calculadas por um software computacional. Dessa forma, escolhemos fazer os cálculos, geração dos grafos e todo o programa principal na linguagem de programação C, e assim gerar os pontos dos neurônios para serem plotados no software R. Assim, podemos observar a oscilação dos neurônios com as variações de neurônios inicialmente ativos, ao longo do tempo.

Parâmetros

Os parâmetros utilizados para os experimentos são detalhados a seguir:

- $n = 500$ é definido como o número de neurônios;
- k como o parâmetro de grau e grau médio das redes regulares e redes aleatórias, respectivamente;
- $contAtivos$ é o número de neurônios inicialmente ativados e é variado conforme os experimentos;
- I , o estímulo externo em um neurônio *ativo* = 0.2 e *inativo* = -0.02;
- t a variável para definir o tempo e também variando conforme os experimentos;
- $w = 0.3$, a força de acoplamento;
- $\theta = 0.5$, o limiar de corte;
- $\alpha = 6.0$, $\beta = 0.1$, $\varepsilon = 0.02$, os parâmetros do modelo;
- $\Delta T = 0.01$;

- x, y, I, Si , são variáveis para definir o índice da posição da matriz referentes ao x, y, I, Si dos neurônios, respectivamente;

Simulações

Rede Regular

Primeiramente, foi simulada uma rede de neurônios com acoplamento, com todos os 500 neurônios ativos, com potenciais iniciais aleatórios e com $t = 2000$.

É possível notar que, no início, todos os neurônios têm fases bem discrepantes, mas seus ciclos variam com os mesmos valores mínimos, máximos e de potencial de ação. Isso ocorre, pois todos estão ligados a um mesmo número de neurônios. É possível perceber, também, que a rede entra em sincronia após um tempo.

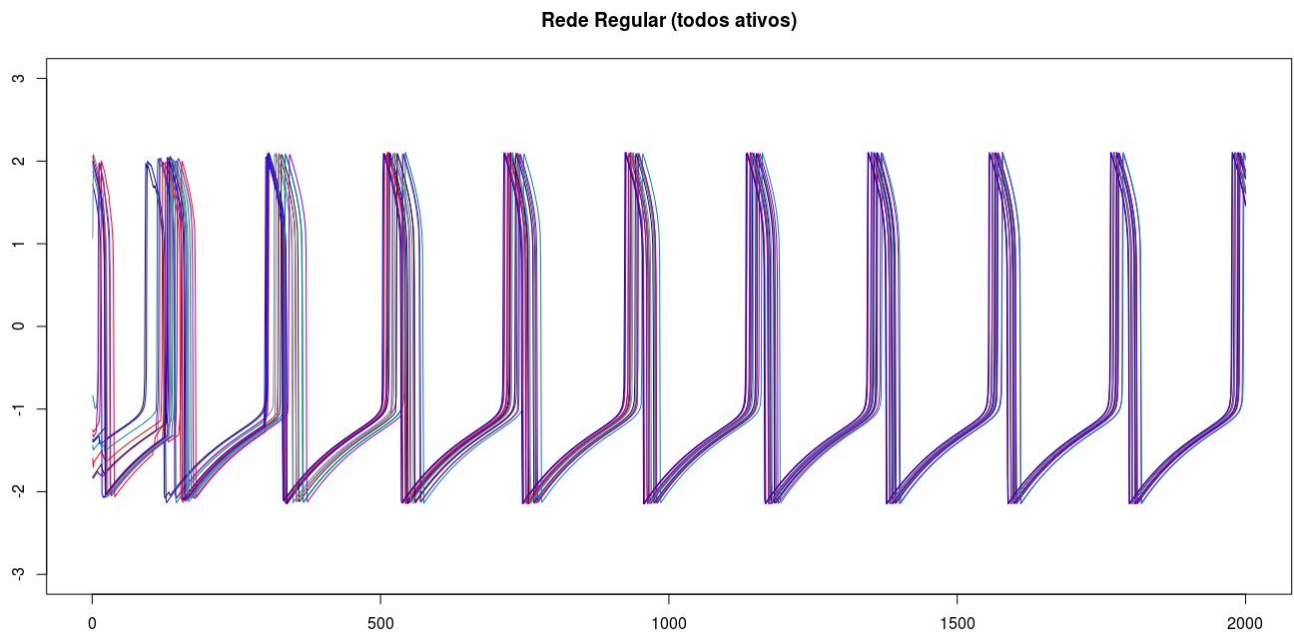


Figura 4: Rede regular com todos os neurônios ativos

Em seguida, a rede foi testada com 250 dos 500 neurônios ativos, para $t = 8000$. Neste caso, também há uma discrepância inicial, sincronização após um tempo e ciclos com valores semelhantes, mas nota-se uma maior dificuldade na sincronização, fato que ocorre devido ao menor número de neurônios inicialmente ativos.

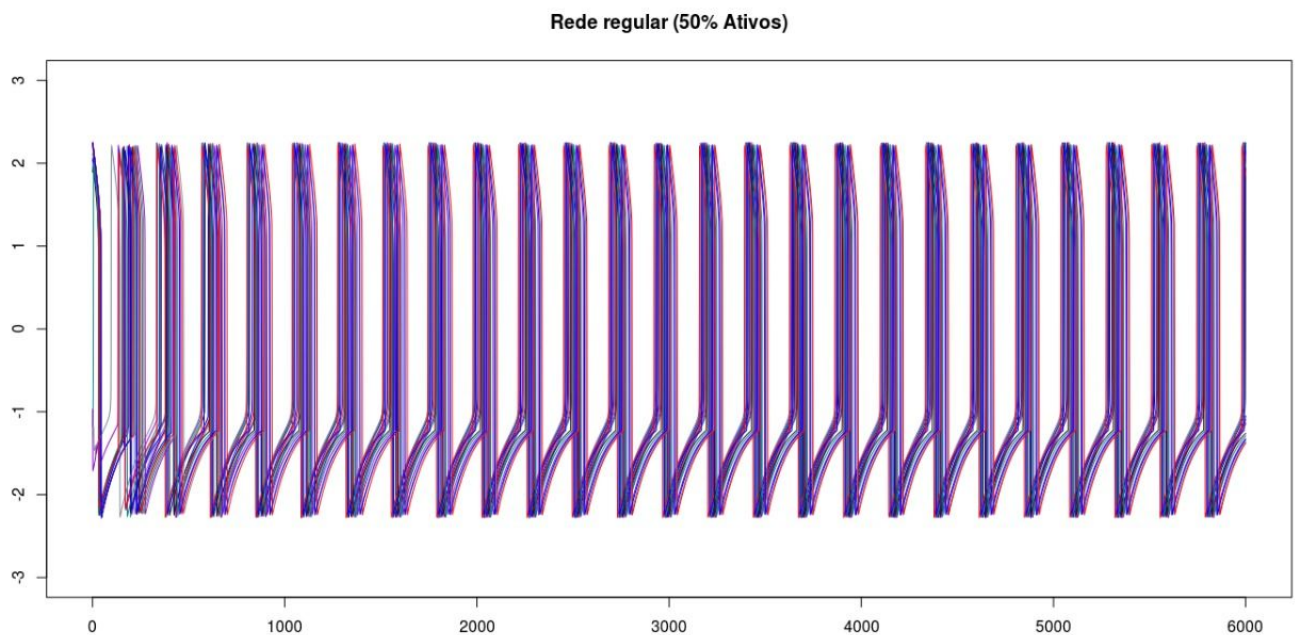


Figura 5: Rede regular com 50% dos neurônios ativos

Para o estudo da rede de neurônios, também foram simuladas situações com quantidades de neurônios inicialmente ativos para verificar o observado nos dois casos já apresentados (todos ou metade dos neurônios inicialmente ativos). Como no caso seguinte, com 23% dos neurônios ativos, nota-se uma maior dificuldade na sincronização em relação aos dois casos anteriores.

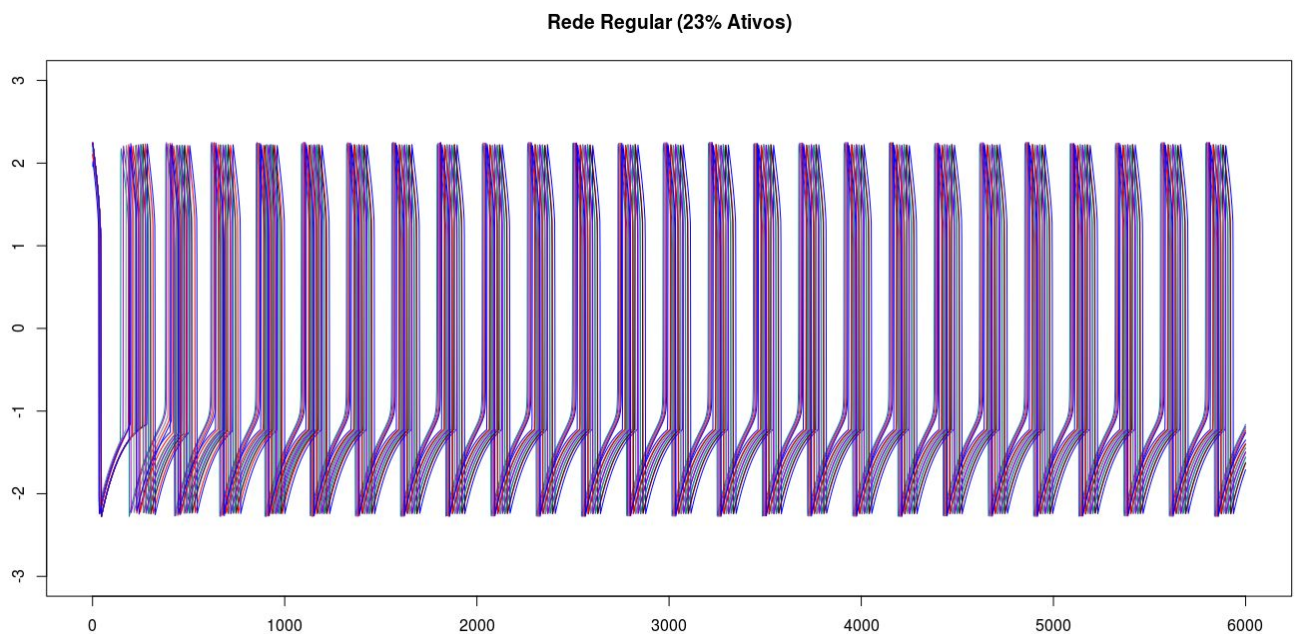


Figura 6: Rede regular com 23% dos neurônios ativos

Sem acoplamento, percebe-se que os ciclos iniciais não são alterados, portanto, não há sincronização.

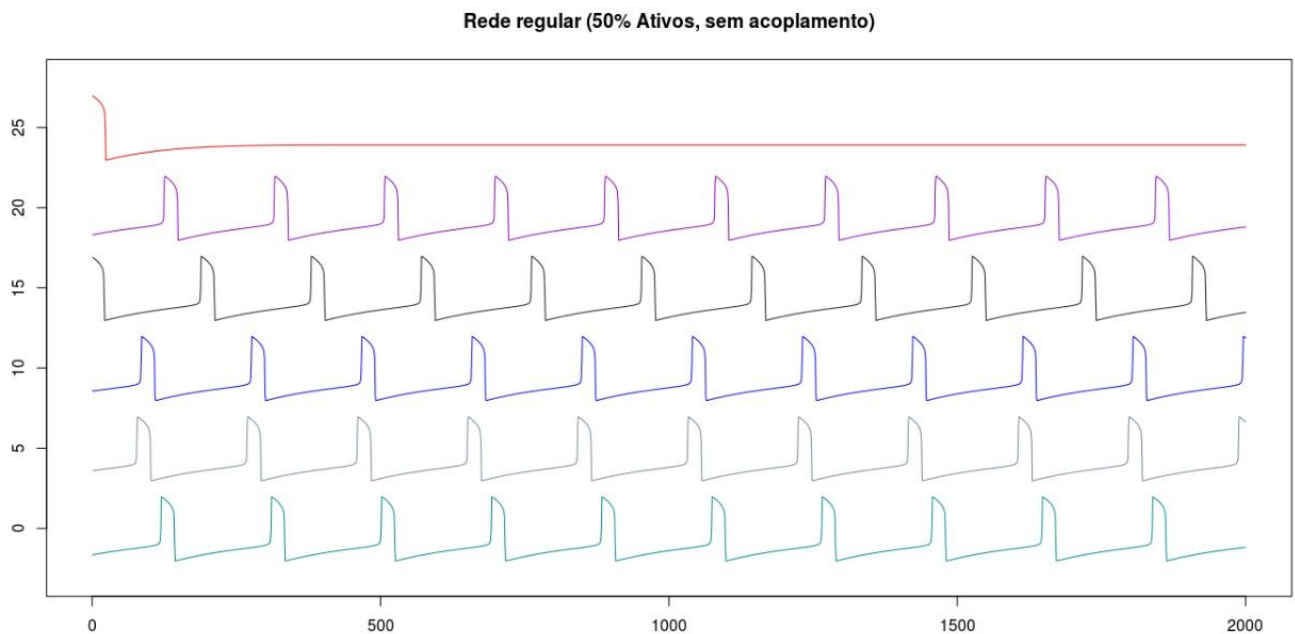


Figura 7: Rede regular com 50% dos neurônios ativos, sem acoplamento

Rede Aleatória

Para o caso de todos os neurônios ativos desde o início da simulação, temos que o caso da rede aleatória é quase igual ao primeiro caso da rede regular, com exceção da igualdade dos valores do potencial de membrana, que não é igual para todos os neurônios, uma vez que os números de ligações são diferentes, mudando a força de acoplamento e causando uma maior ou menor variação na variável x de cada oscilador.

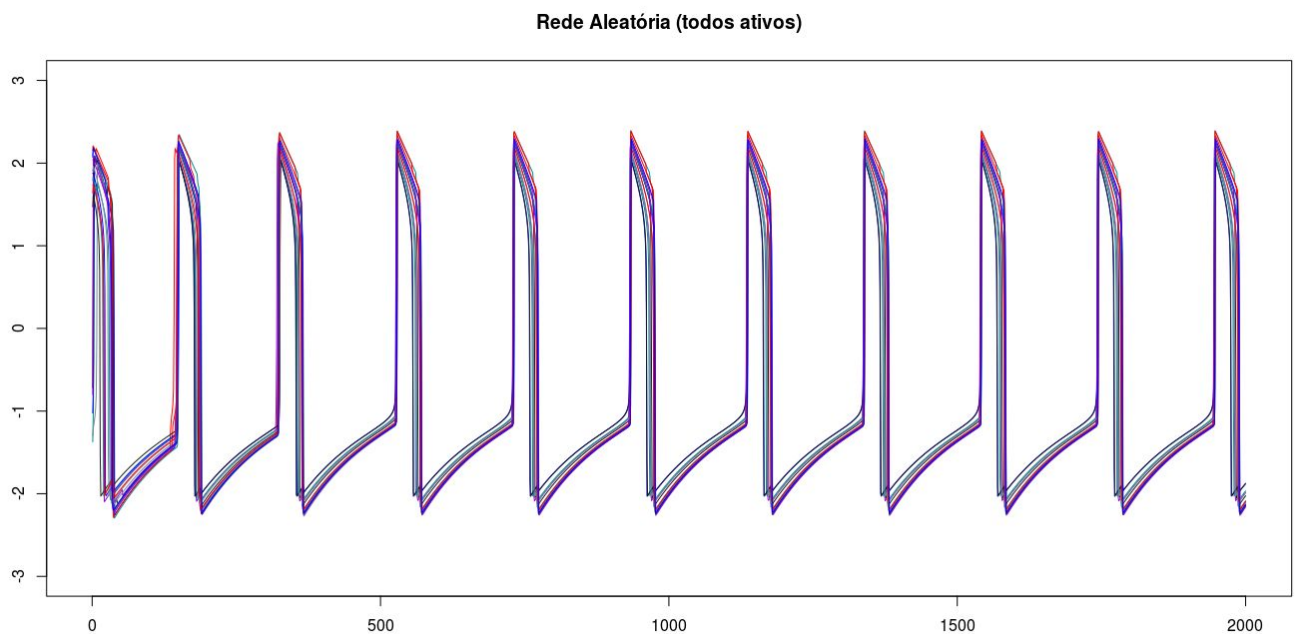


Figura 8: Rede aleatória com todos os neurônios ativos

Na rede aleatória com 250 neurônios inicialmente ativos, temos um caso semelhante ao segundo caso da rede regular. Porém, também há diferença no fato de o potencial de cada neurônio variar um pouco.

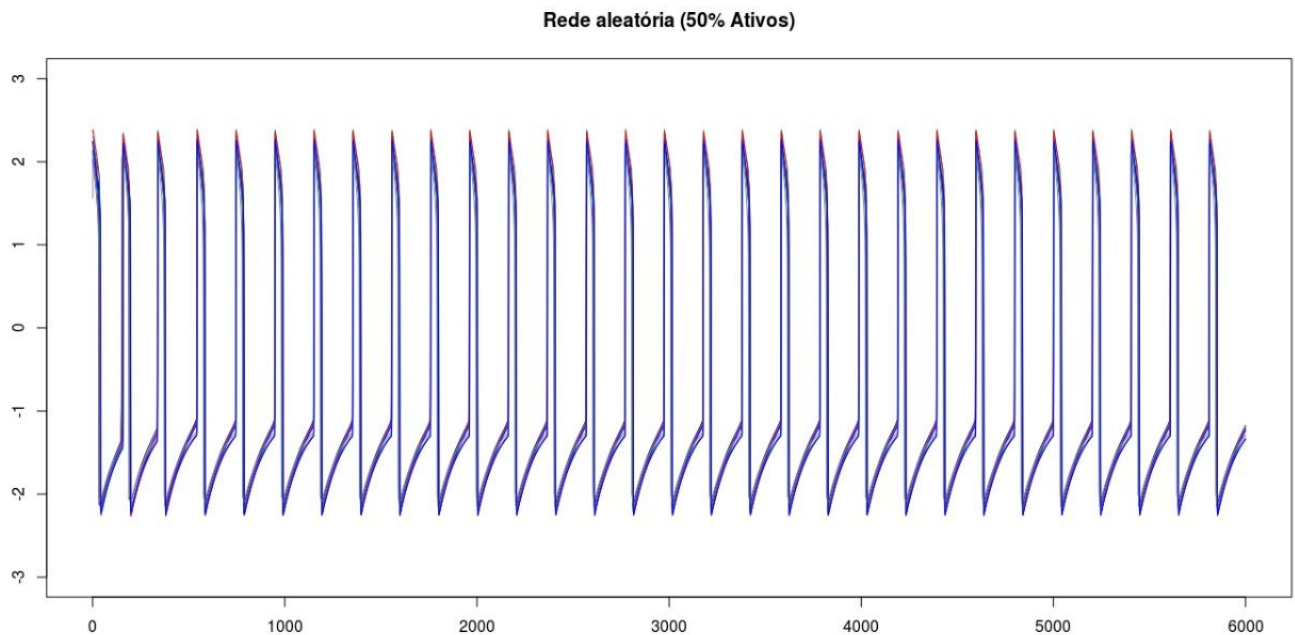


Figura 9: Rede aleatória com 50% dos neurônios ativos

Assim como no caso da rede regular com 23% dos neurônios ativos, na rede aleatória, nota-se uma dificuldade maior de sincronização do que nos casos de 100% e 50% de neurônios inicialmente ativos.

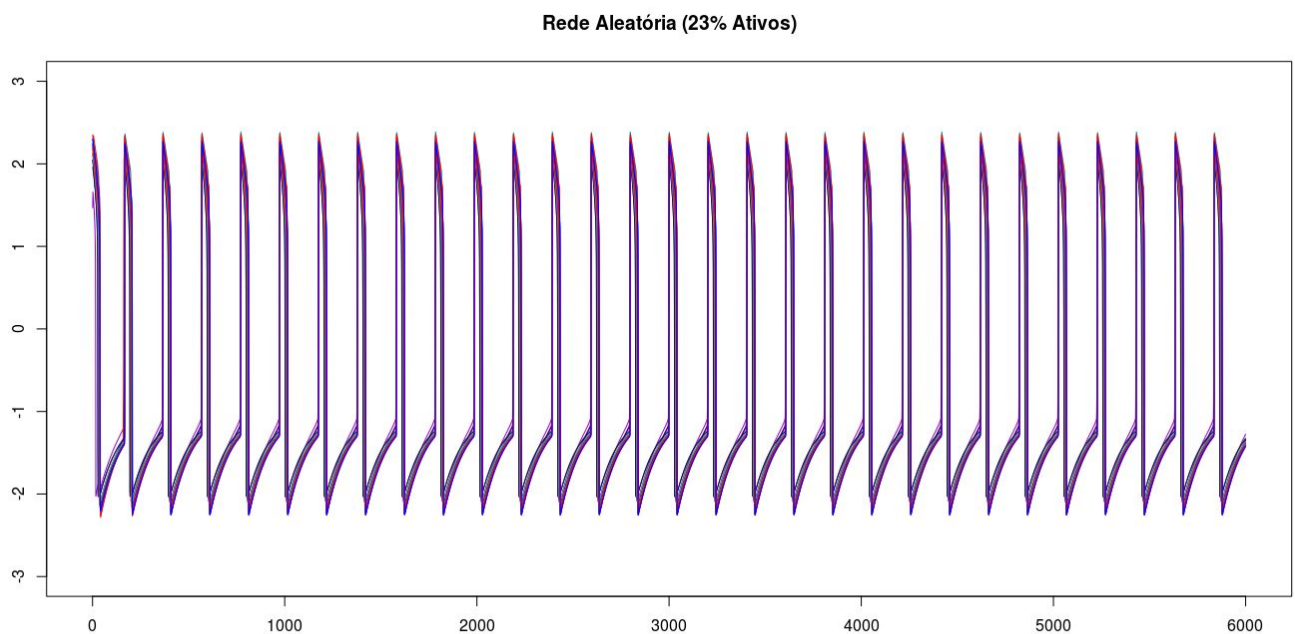


Figura 10: Rede aleatória com 23% dos neurônios ativos

Na rede aleatória, assim como na regular, percebe-se que na simulação da rede sem acoplamento, os ciclos não são afetados pelos outros neurônios. Mas, diferente das simulações com a rede aleatória mostradas, temos que os neurônios têm ciclos iguais, exceto pela fase.

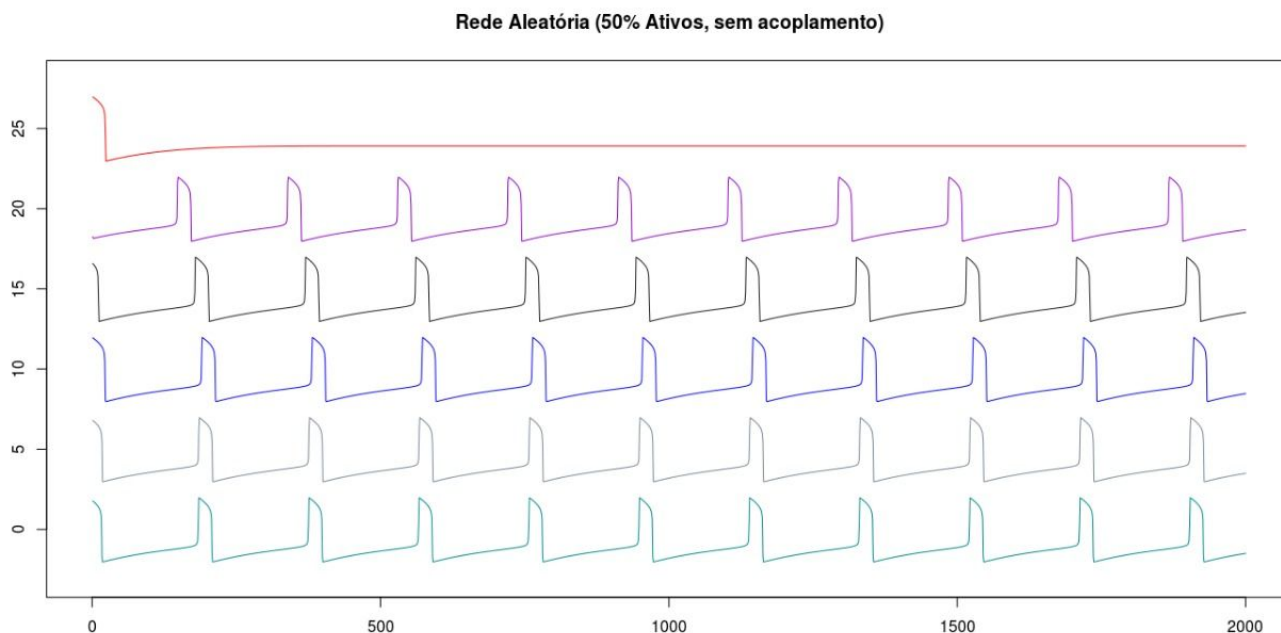


Figura 11: Rede aleatória com 50% dos neurônios ativos, sem acoplamento

Rede Livre de Escala

Em uma rede livre de escala, o caso com todos os neurônios ativos também se assemelha ao primeiro caso da rede regular, mas nota-se que alguns assumem valores máximos maiores, esses neurônios são os que têm grau maior que os demais (*hubs*), o que resultou em uma força de acoplamento maior, levando a variável x a um pico maior.

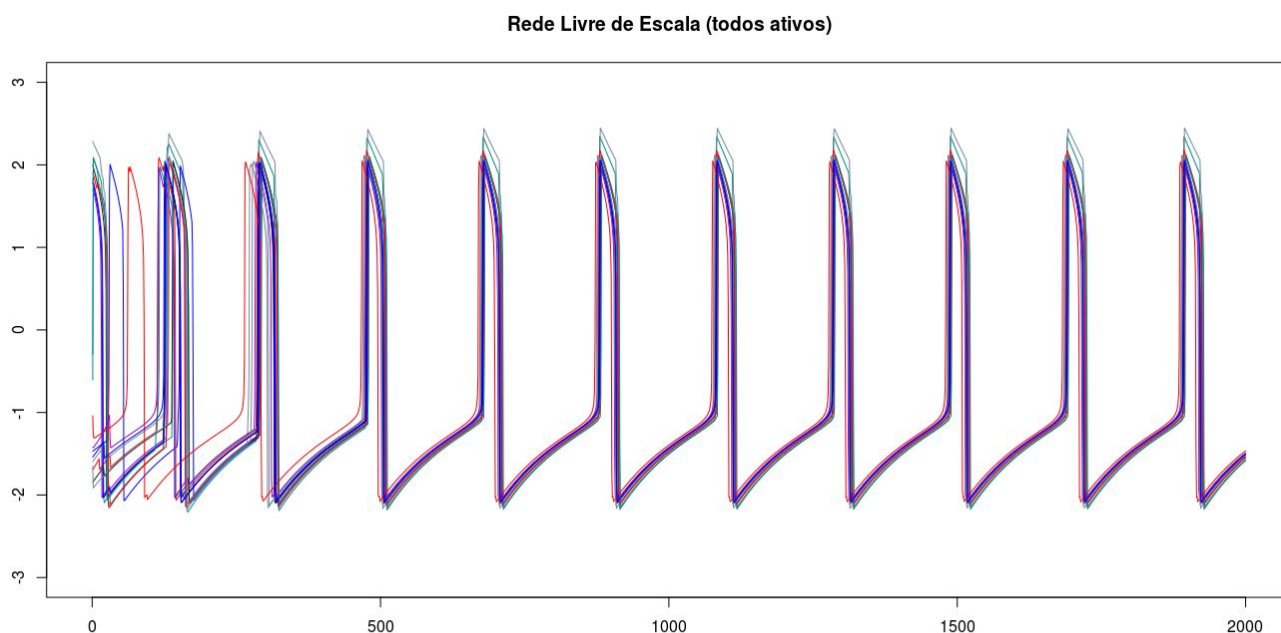


Figura 12: Rede livre de escala com todos os neurônios ativos

Na rede livre de escala com apenas metade dos neurônios inicialmente ativos, temos um caso semelhante ao segundo caso da rede regular, mas com as variações em x discutidas no primeiro caso da rede livre de escala.

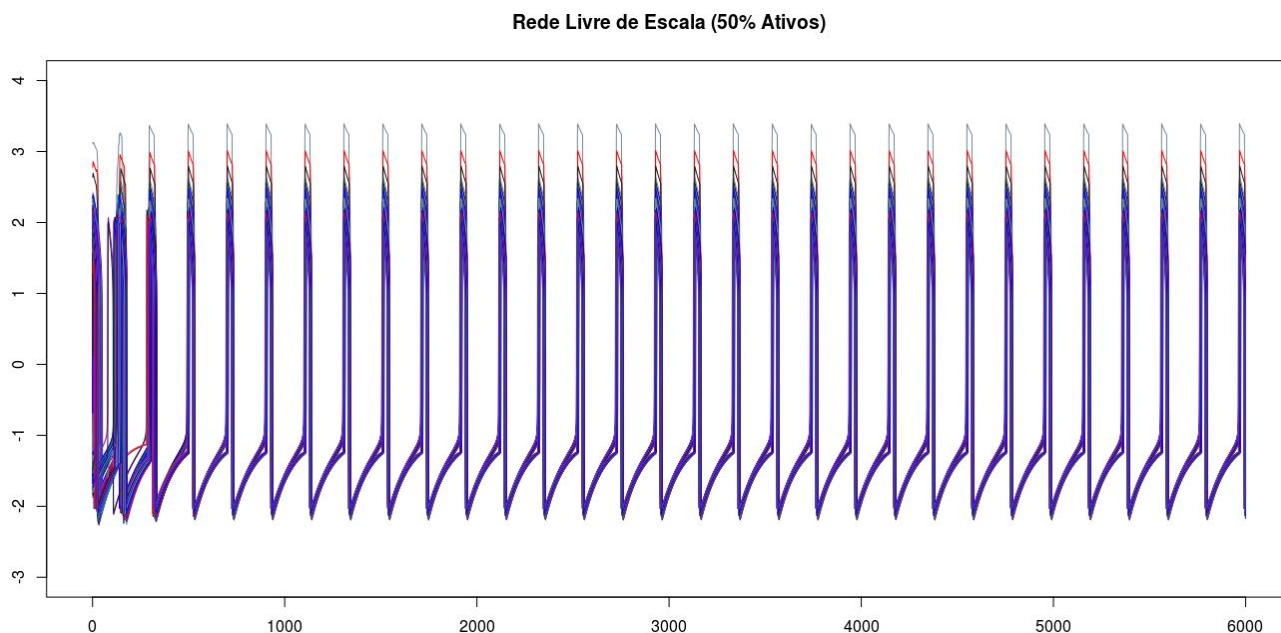


Figura 13: Rede livre de escala com 50% dos neurônios ativos

No caso da rede livre de escala com 23% dos neurônios iniciais ativos, também nota-se uma maior dificuldade inicial antes de atingir a sincronização, em relação aos casos com todos ou metade dos neurônios ativos.

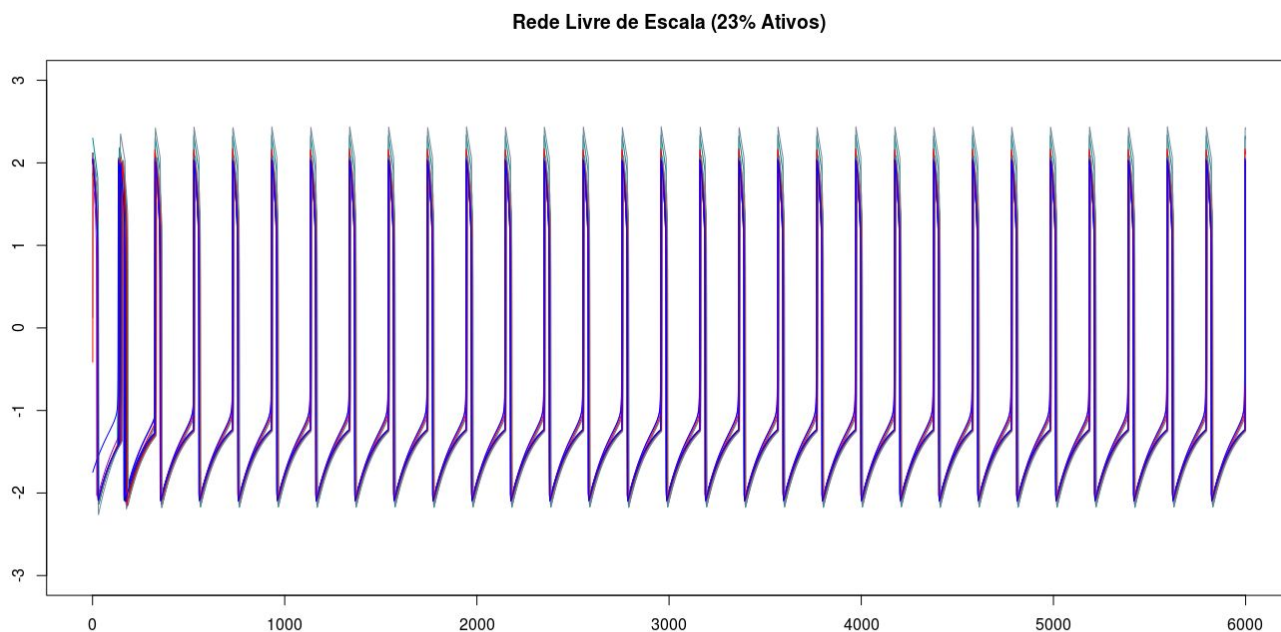


Figura 14: Rede livre de escala com 23% dos neurônios ativos

Na rede livre de escala, temos um caso semelhante à rede regular, os neurônios têm ciclos semelhantes, mas com fases diferentes e não entram em sincronia, diferente do caso com acoplamento, onde entram em sincronia e alguns variam mais que outros.

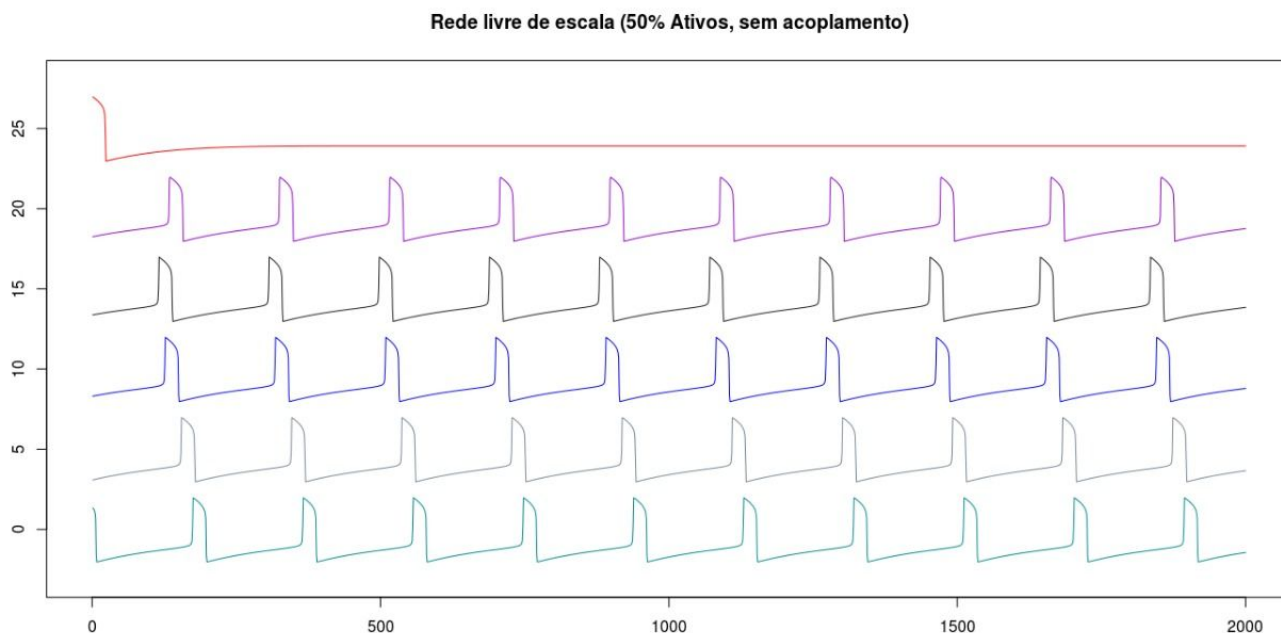


Figura 15: Rede livre de escala com 50% dos neurônios ativos, sem acoplamento

Observações

- Não foram gerados os gráficos de todos osciladores, pois, por ser um número muito alto, o gráfico ficaria muito confuso. Com isso, foram selecionados alguns neurônios da rede para demonstrar um comportamento geral;
- Algumas das simulações não mostram a sincronização completa da rede, mas apenas um tempo antes que esta ocorra; devido ao comportamento da rede até o tempo exibido, foi assumido que a rede entre em sincronia após um tempo.

Conclusão

Após todas as simulações feitas, foi possível concluir que a representação de uma rede de neurônios pelo modelo de Van de Pol, nas três topologias, é semelhante. Cada uma ainda possui suas particularidades, mas o comportamento da rede não varia muito entre as três topologias simuladas. Por exemplo, no caso com acoplamento, nota-se que havia sincronização nas três topologias e, que com uma menor quantidade de neurônios ativos, a sincronização é mais difícil de ser alcançada.

Também foi possível notar que nas simulações das redes sem acoplamento, nos três casos, não há sincronização, pois o acoplamento é o fator que leva à sincronização das fases dos osciladores.

Pelas simulações com a rede livre de escala, nota-se que neurônios com maiores graus atingem um potencial de membrana maior, portanto, o tamanho da vizinhança de um neurônio está diretamente relacionada ao potencial de membrana máximo que ele pode atingir. Pelas simulações com a rede aleatória, conclui-se que neurônios com diferentes números de vizinhos têm ciclos diferentes. Ambos os fatos verificados valem, devido à força de acoplamento utilizada na simulação.

Vale lembrar que os resultados obtidos são válidos para redes de neurônios nas condições gerais definidas para estudo (todos os neurônios têm mesmo limiar de corte, vizinhos com mesma força

de acoplamento, ruído desconsiderado), e que redes com parâmetros definidos de maneiras muito diferentes podem apresentar outros resultados.

Referências

- [1] ICMC, D. (2007). Redes Complexas: conceitos e aplicações.
- [2] Haykin, S. (2007). Redes neurais: princípios e prática. Bookman Editora.
- [3] Andrade, G. C., & Erichsen Junior, R. (2000). Redes de osciladores neurais acoplados. *Salão de Iniciação Científica (12.: 2000: Porto Alegre). Livro de resumos. Porto Alegre: UFRGS, 2000.*
- [4] Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications* (Vol. 290). London: Macmillan.
- [5] Erdős, P., & Rényi, A. (1959). On random graphs, I. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 6, 290-297.
- [6] Barabási, A. L., & Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *science*, 286(5439), 509-512.