The background is a solid blue color with a pattern of large, light-blue, 3D-style numbers and mathematical symbols. The symbols include the numbers 8, 4, 3, 2, 1, 0, 7, 6, 5, and the dollar sign (\$). They are arranged in a way that they appear to be floating or layered, creating a sense of depth. The text 'Matemáticas Financieras' is centered in the middle of the image in a white, bold, sans-serif font.

Matemáticas Financieras

Carlos Mario Morales C ©2012

Matemáticas Financieras

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito del titular del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 2011 por Carlos Mario Morales
C. carrera 77c No 61-63 Medellín-Colombia
Teléfono: 421.28.93
E_Mail: carlosmoralescastano@gmail.com

Impresión digital en Colombia.

Datos Catalográficos para citar este libro

Matemáticas Financieras

Carlos Mario Morales C.
Editorial propia. Medellín, 2012
ISBN: Pendiente
Formato 21x24 cm. Páginas:



Anualidades y gradientes

UNIDAD 3: ANUALIDADES Y GRADIENTES

OBJETIVO

Al finalizar la unidad los estudiantes estarán en capacidad de calcular operaciones financieras en las cuales la contraprestación se hace a través de cuotas periódicas. Para esto deducirá los modelos matemáticos para calcular el valor actual, futuro, interés y número de pagos para diferentes tipos de operaciones y aplicará estos en situaciones de la vida empresarial.

CONTENIDO

1. Anualidades
2. Anualidades anticipadas
3. Anualidades diferidas
4. Anualidades perpetuas
5. Gradientes

Introducción

Es corriente que se pacte entre el deudor y acreedor el pago de una obligación financiera en cuotas periódicas a una tasa de interés, durante un tiempo determinado. Cuando las cuotas son constantes la operación recibe el nombre de anualidad, por el contrario si las cuotas son cambiantes se le denomina gradiente. Cuando, por ejemplo, una persona compra un automóvil pagado una cuota inicial y el resto del dinero en cuotas mensuales iguales durante un tiempo determinado, se configura una operación financiera de anualidades; si por el contrario las cuotas crecen con la inflación por ejemplo, la operación se denomina gradiente.

Anualidad o gradiente es un sistema de pagos a intervalos iguales de tiempo; de esta forma, no significa pagos anuales, sino pagos a intervalo regular; definida así en la vida cotidiana se encuentran innumerables ejemplos de este tipo de operaciones: el pago de dividendos, los fondos de amortización, los pagos a plazos, los pagos periódicos a las compañías de seguros, los sueldos, y en general todo tipo de renta son, entre otros, ejemplos de anualidades o gradientes.

En este tipo de operaciones se distinguen los siguientes elementos: la renta o pago, el periodo de pago o de renta, el tiempo o plazo y la tasa de interés. La renta se define como el pago periódico, también denominado como cuota o depósito. El periodo de renta es el tiempo que se fija entre dos pagos consecutivos; el tiempo o plazo de la operación es el intervalo de tiempo que sucede desde el inicio del primer periodo de pago y el final del último. Finalmente la tasa de interés es el tipo de interés que se acuerda en la operación.

Dependiendo de la forma como se pacten los montos y periodos de pago las operaciones se pueden clasificar en ordinarias, variables, anticipadas, diferidas, perpetuas. En esta unidad de aprendizaje se analizan cada una de ellas determinándose los modelos matemáticos que permiten simular y analizar estos tipos de operación financiera.

1. Anualidades

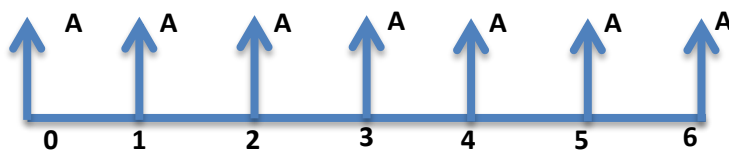
Son operaciones financieras en las cuales se pacta el cubrimiento de las obligaciones en una serie de pagos periódicos iguales que cumple con las siguientes condiciones:

- Los pagos (rentas) son de igual valor.
- Los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo
- A todos los pagos (rentas) se les aplica la misma tasa de interés
- El número de pagos y periodos pactados es igual

Las anualidades que cumplen con estas condiciones son las ordinarias o vencidas y las anticipadas. Los modelos matemáticos que se deducen para el cálculo y análisis de este tipo de anualidades tienen en cuenta las anteriores condiciones; por lo cual, es necesario que al momento de aplicarse las formulas a situaciones particulares, se asegure que se cumplan dichas condiciones.

Ejemplo 1.

Determinar si el siguiente sistema de pagos corresponde a una anualidad.

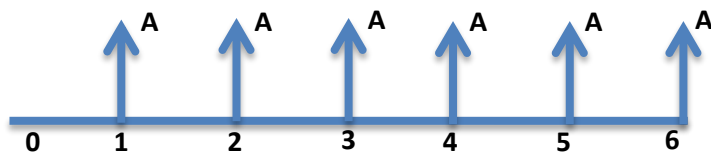


Respuesta

El sistema de pagos no corresponde a una anualidad ya que no obstante los pagos son iguales y se hacen a intervalos de tiempo igual, el número de pagos no es igual al número de periodos

Ejemplo 2.

Determinar si el siguiente sistema de pagos corresponde a una anualidad.

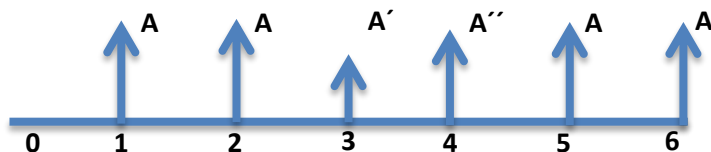


Respuesta

Si se supone que la tasa de interés que se aplica a cada pago es la misma, se puede afirmar que el sistema corresponde a una anualidad teniendo en cuenta que los pagos son iguales, se hacen a intervalo de tiempo igual y los periodos pactados corresponden al número de pagos. Es la forma general de una anualidad ordinaria o vencida

Ejemplo 3.

Determinar si el siguiente sistema de pagos corresponde a una anualidad.

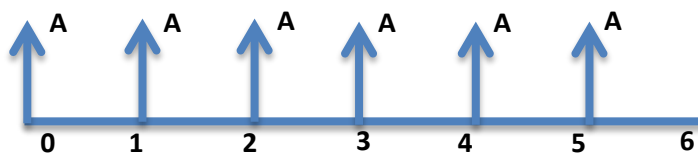


Respuesta

El sistema de pagos no corresponde a una anualidad ya que no obstante que el número de pagos es igual al número de periodos y los intervalos de tiempo son iguales los pagos no son iguales.

Ejemplo 4.

Determinar si el siguiente sistema de pagos corresponde a una anualidad.



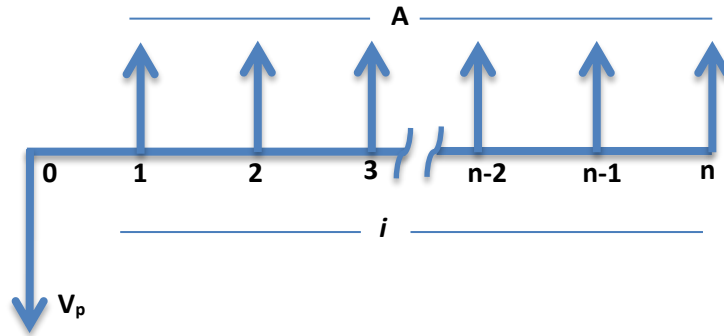
Respuesta

Si se supone que la tasa de interés que se aplica a cada pago es la misma, se puede afirmar que el sistema corresponde a una anualidad teniendo en cuenta que los pagos son iguales, se hacen a intervalo de tiempo igual y los periodos pactados corresponden al número de pagos. Es la forma general de una anualidad anticipada

1.1 Valor presente de la anualidad

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un préstamo V_p se paga en cuotas iguales A , a una tasa de interés efectiva por periodo i , durante n periodos. La situación se muestra en la grafica No 7.

GRAFICA NO 7 – VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD



Para calcular el valor presente se utiliza la formula (12), considerando cada valor de A como un valor futuro y sumando todos los resultados en 0.

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A}{(1+i)^{n-2}} + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A}{(1+i)^n}$$

Factorizando A , se obtiene:

$$V_p = A \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \quad (a)$$

Multiplicando esta por el factor $\frac{1}{(1+i)}$, esto da como resultado la siguiente ecuación:

$$\frac{V_p}{(1+i)} = A \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right] \quad (b)$$

Restando la ecuación (a) de la (b), se obtiene:

$$\frac{-i}{(1+i)} V_p = A \left[\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^1} \right]$$

Despejando de este resultado el V_p , se obtiene:

$$V_p = \frac{A}{-i} \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

La cual también se puede expresar como:

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]; \text{ para } i \neq 0 \quad (23)$$

Donde:

V_p : Valor presente de una serie de pagos

A : pagos periodicos

i : tasa efectiva de interes a la cual se trasladan los pagos a valor presente

n : numero de periodos en los cuales se hacen los pagos

El factor $\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$ suele nombrarse como: $(V_p/A, i\%, n)$. Este significa el factor para hallar V_p , dado el pago o renta A , la tasa de interés efectiva i a la cual son trasladados los pagos al valor inicial y el número de pagos n . La formula (23) se puede escribir en notación clásica, como:

$$V_p = A(V_p/A, i\%, n); \text{ para } i \neq 0 \quad (24)$$

Ejemplo 5.

Un pequeño empresario para reponer su equipo de producción hoy, está en capacidad de realizar 36 pagos de \$2'000.000 mensuales, a partir del próximo mes; si el banco que financia la operación cobra una tasa de interés del 24% N-m. ¿De cuánto dinero dispondrá para la reposición de los equipos?

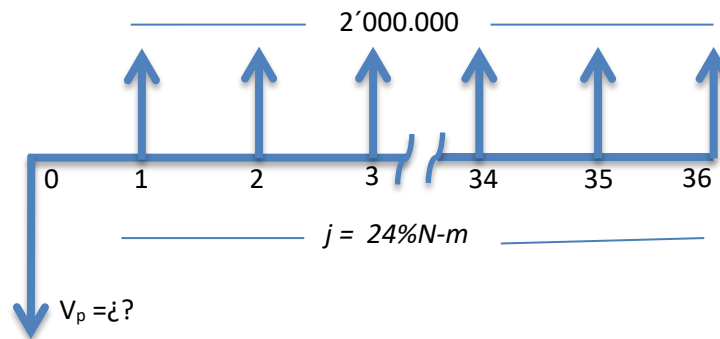
Solución

Parámetros

Pagos: \$2'000.000
 Numero de pagos: 36
 Tasa de interés: 24% N-m

Representación gráfica

Para determinar lo que el pequeño empresario tendrá disponible para reposición de equipos, se debe hallar el valor presente de los pagos mensuales. En la siguiente gráfica se representa la operación:

**Cálculos**

Para determinar el valor presente, lo primero que se debe hacer es hallar la tasa efectiva mensual a partir de la tasa nominal, para esto se utiliza la formula (15):

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0,24}{12} = 0,02 = 2\% \text{ EM}$$

Teniendo la tasa efectiva de interés se procede a calcular el valor presente, considerando $(V_p/2'000.000, 2\%, 36)$. Nótese que la tasa efectiva de interés coincide los periodos en los cuales se realiza los pagos. El calculo se realiza utilizando la formula (23)

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$V_p = 2'000.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,02)^{-36}}{0,02} \right] = 50'977.684,96$$

Respuesta

El pequeño empresario dispondrá de \$50'977.684,96 para la reposición de los equipos.

1.2 Pagos o renta a partir del valor presente

De la ecuación (23) se puede deducir el factor para hallar A , dado el valor presente V_p , o lo que es igual $(A/V_p, i\%, n)$.

$$A = V_p \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right] \quad (25)$$

$$V_p = V_p(A/V_p, i\%, n); \text{ para } i \neq 0 \quad (26)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la ecuación (23)

Ejemplo 6.

Una persona desea comprar un automóvil que tiene un precio de \$64'000.000 a través de un crédito. Si la empresa de financiamiento ofrece las siguientes condiciones: préstamo del 90% del valor total en cuotas iguales durante 60 meses y una tasa efectiva de interés del 0,95% EM, ¿Cuál será el valor de la cuota mensual?

Solución

Parámetros

Valor del automóvil: \$64'000.000

Financiación: 90% del valor total

Numero de pagos: 60

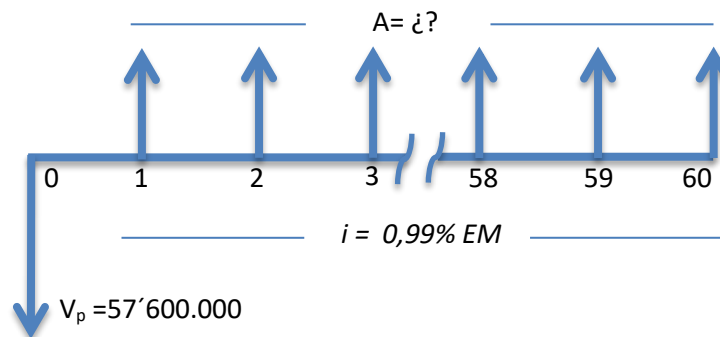
Tasa de interés: 0,95% EM

Representación gráfica

Considerando que solo se financia el 90% del valor del vehículo el préstamo debe ser por un valor de:

$$\text{Préstamo} = V_p = 64'000.000 \times 0,9 = 57'600.000$$

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor de los pagos mensuales, $(A/V_p, i\%, n)$, para lo cual se aplica

directamente la formula (25), considerando la tasa efectiva de interés mensual:

$$A = V_p \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right]$$

$$A = 57'600.000 \left[\frac{0,0095}{1 - (1 + 0,0095)^{-60}} \right] = 1'263.884,42$$

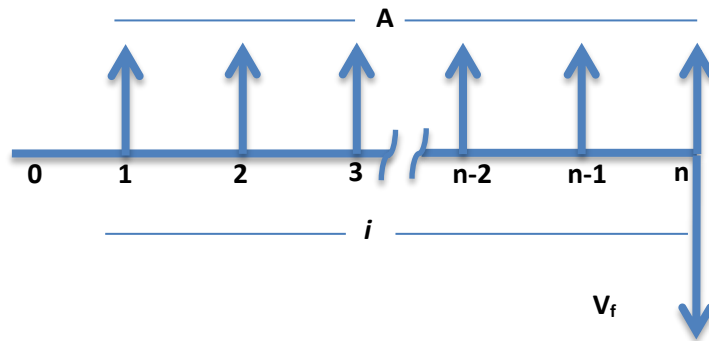
Respuesta

El valor de la cuota mensual será de \$1'263.884,42

1.3 Pagos o renta con base en el valor futuro

Igual que se hizo en el la deducción anterior, para determinar este modelo, se considera una operación en la cual el valor final V_f es equivalente a n pagos iguales A , a una tasa de interés efectiva por periodo i , durante n periodos. La situación se muestra en la grafica No 8.

GRAFICA NO 8 – VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD



Para determinar el valor futuro $(V_f/A, i\%, n)$ remplazamos en la formula (24) el valor presente en función del valor futuro, formula (12).

$$V_p = V_f(1 + i)^{-n} \quad (a)$$

$$A = V_p \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right] \quad (b)$$

Remplazando (a) en (b), se obtiene:

$$A = V_f(1 + i)^{-n} \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right]$$

$$A = V_f \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (26)$$

$$A = V_f(A/V_f, i\%, n) \quad (27)$$

Ejemplo 8.

De cuánto deberá ser el ahorro mensual de una persona que proyecta adquirir una casa de \$100'000.000 dentro de cinco años, si la fiducia le asegura una tasa de interés efectiva mensual del 0,7%.

Solución

Parámetros

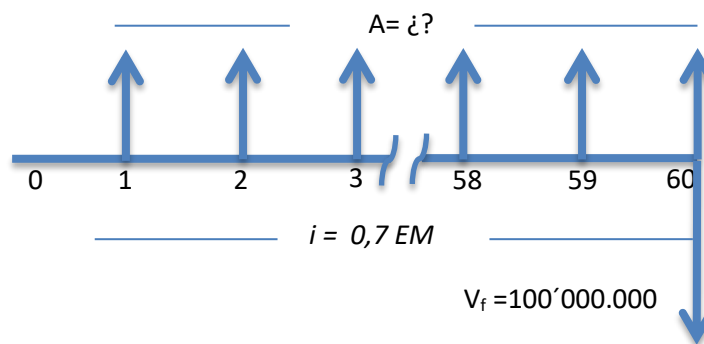
Valor futuro: \$100'000.000

Numero de pagos: 5 años = 60 meses (inicia un mes después de tomar la decisión)

Tasa de interés: 0,7% EM

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar los pagos del ahorro $(A/V_f, i\%, n)$ se aplica directamente la formula (26), considerando la tasa efectiva de interés mensual:

$$A = V_f \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = 100'000.000 \left[\frac{0,007}{(1 + 0,007)^{60} - 1} \right] = 1'346.836,88$$

Respuesta

Se deberá realizar un ahorro de \$1'346.836,88 mensual

1.4 Valor futuro de la Anualidad

De la formula (26) se puede determinar el valor futuro en función de los pagos, así:

$$V_f = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (28)$$

$$V_f = A(V_f/A, i\%, n) \quad (29)$$

Ejemplo 7.

Un padre de familia quiere conocer de cuánto dispondrá para la educación superior de su hijo, si inicia un ahorro mensual de 300.000, un mes antes de que cumpla 10 años y hasta cuando cumpla 18, edad en la cual estima iniciara los estudios universitarios; la fiducia donde se realiza el ahorro asegura una de interés del 10% N-m

Solución

Parámetros

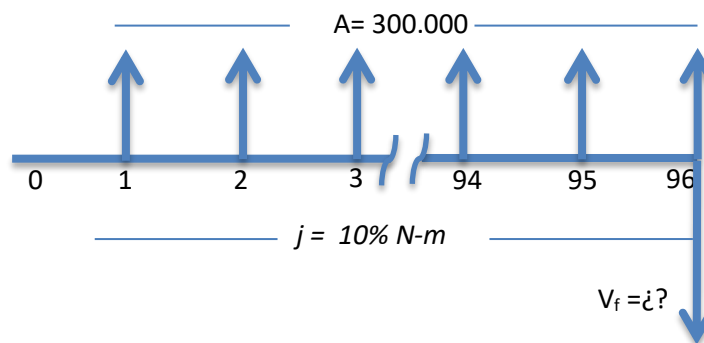
Valor de los pagos: \$300.000

Numero de pagos: 8 años = 96 meses

Tasa de interés: 10% N-m

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor futuro del ahorro $(V_f/A, i\%, n)$ inicialmente se debe hallar la tasa de interés efectiva mensual, para esto se aplica la formula (15), considerando que la tasa de interés que ofrece la fiducia esta expresa en nominal:

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0,10}{12} = 0,0083 = 0,833\% \text{ EM}$$

Con esta tasa de interés efectiva se puede calcular, $(V_f/A, i\%, n)$, para lo cual se aplica directamente la formula (28), considerando la tasa efectiva de interés mensual:

$$V_f = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$V_f = 300.000 \left[\frac{(1+0,0083)^{96} - 1}{0,0083} \right] = 43'776.403,87$$

Respuesta

El Padre de familia dispondrá de \$43'776.403,87 cuando su hijo cumpla 18 años

1.5 Número de pagos con base en el valor futuro

Si se conocen el V_f , los pagos A , y la tasa de interés i , de la ecuación (28) se puede determinar el valor de n ; es decir, el número de pagos. Lo mismo se podría hacer a partir de la ecuación (23) cuando se conocen V_p , los pagos A , y la tasa de interés i . A continuación se deduce la formula para calcular el valor de n , a partir de la ecuación (28).

$$V_f = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$V_f \times i = A(1+i)^n - A$$

$$A(1+i)^n = V_f i + A$$

Aplicando logaritmo en ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\text{Log}(A(1+i)^n) = \text{Log}(V_f i + A)$$

Por propiedades de los logaritmos, se obtiene:

$$\text{Log}A + \text{Log}(1+i)^n = \text{Log}(V_f i + A)$$

$$\text{Log}A + n\text{Log}(1+i) = \text{Log}(V_f i + A)$$

$$n\text{Log}(1+i) = \text{Log}(V_f i + A) - \text{Log}A$$

Despejando n , se obtiene:

$$n = \frac{\text{Log}(V_f i + A) - \text{Log}A}{\text{Log}(1+i)} \quad (30)$$

Ejemplo 8.

Cuántos pagos semestrales de \$600.000 deberá realizar un padre de familia para pagar la universidad de su hijo que en futuro estima le costará \$4'500.000; el banco reconoce por este tipo de ahorros una tasa de interés del 7% N-s

Solución

Parámetros

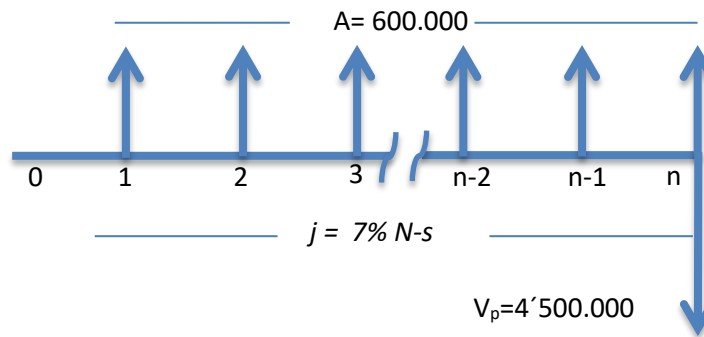
Valor futuro: 4'500.000

Valor de los pagos: \$600.000

Tasa de interés: 7% N-s

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Inicialmente se hallar la tasa de interés efectiva semestral aplicando la formula (15), considerando que la tasa de interés nominal que cobra el banco:

$$j = i \times m$$
$$i = \frac{0,07}{2} = 0,035 = 3,5\% \text{ ES}$$

Con esta tasa de interés efectiva, el valor futuro V_f , y el valor de los pagos A , se puede determinar el valor de n , para lo cual se aplica directamente la formula (30), considerando la tasa efectiva de interés semestral:

$$n = \frac{\text{Log}(V_f i + A) - \text{Log} A}{\text{Log}(1 + i)}$$
$$n = \frac{\text{log}(4'500.000 \times 0,035 + 600.000) - \text{Log}(600.000)}{\text{Log}(1 + 0,035)} = 6,77$$

Esta respuesta indica que deben hacerse 6,77 pagos semestrales. No obstante, desde el punto de vista practico el ahorrador (deudor) tiene dos opciones:

a) Terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 6, aumentando el último pago

b) O terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 7, disminuyendo el ultimo pago

Respuesta

Se deben realizar 6 o 7 pagos.

1.6 Número de pagos con base en el valor presente

Si se conocen el V_p , los pagos A , y la tasa de interés i , de la ecuación (23) se puede determinar el valor de n ; es decir, el número de pagos. A continuación se deduce la fórmula para calcular el valor de n , a partir de la ecuación (23).

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]; \text{ para } i \neq 0$$

$$V_p i = A[1 - (1 + i)^{-n}]$$

$$V_p i = A - A(1 + i)^{-n}$$

$$-V_p i + A = \frac{A}{(1 + i)^n}$$

$$(1 + i)^n = \frac{A}{A - iV_p}$$

Aplicando logaritmo en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$n \log(1 + i) = \log A - \log(A - iV_p)$$

$$n = \frac{\log A - \log(A - iV_p)}{\log(1 + i)} \quad (31)$$

Ejemplo 9.

Cuántos pagos semestrales de \$600.000 deberá realizar un padre de familia para pagar la universidad de su hijo que hoy día cuesta \$4'500.000; el banco cobra tasa de interés del 3,5% ES

Solución

Parámetros

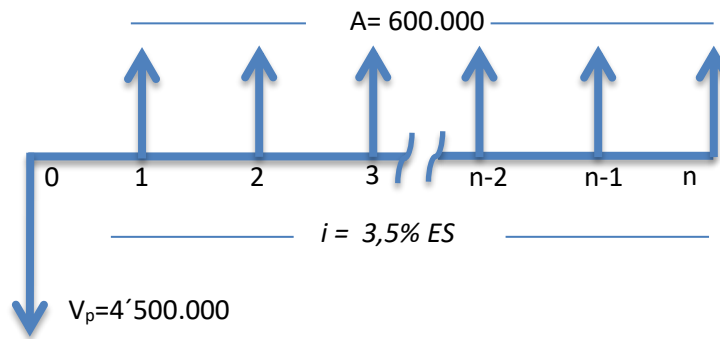
Valor presente: 4'500.000

Valor de los pagos: \$600.000

Tasa de interés: 3,5% ES

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

El número de pagos se puede calcular directamente de la fórmula (31), considerando la tasa efectiva de interés semestral:

$$n = \frac{\log A - \log (A - iV_p)}{\log(1 + i)}$$
$$n = \frac{\log 600.000 - \log (600.000 - 0,035 \times 4'500.000)}{\log(1 + 0,035)} = 8,85$$

Esta respuesta indica que deben hacerse 8,85 pagos semestrales. No obstante, desde el punto de vista práctico el ahorrador (deudor) tiene dos opciones:

- a) Terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 8, aumentando el último pago
- b) O terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 9, disminuyendo el último pago

Respuesta

Se deben realizar 8 o 9 pagos.

1.7 Tasa efectiva de interés a partir del valor presente

Cuando se tienen los demás elementos de la anualidad, es decir: el valor presente V_p o valor futuro V_f , el valor y número de pagos A , se puede determinar el valor de la tasa de interés i a partir de la fórmula (23) o (28). No obstante por tratarse de ecuaciones con más de una raíz, no es posible hallar la solución analíticamente; por esta razón se debe utilizar un método de tanteo y error.

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$V_f = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

La forma de proceder en estos casos, es la siguiente:

- Se asigna un valor inicial a la tasa de interés i y se calcula la ecuación.
- Si el valor es menor que la igualdad V_p o V_f entonces se disminuye la tasa y se vuelve a calcular, en caso contrario se aumenta la tasa y se vuelve a calcular
- Cuando se logre determinar dos valores, uno mayor y otro menor, suficientemente aproximados a los valores de la igualdad, se procede a calcular la tasa de interés por interpolación.

Con el siguiente ejemplo se ilustra el anterior procedimiento:

Ejemplo 10.

Si una compañía de pensiones ofrece, por un pago inmediato de \$90 millones, una renta de \$5 millones durante 30 años. ¿Qué tasa de interés está reconociendo?

Solución

Parámetros

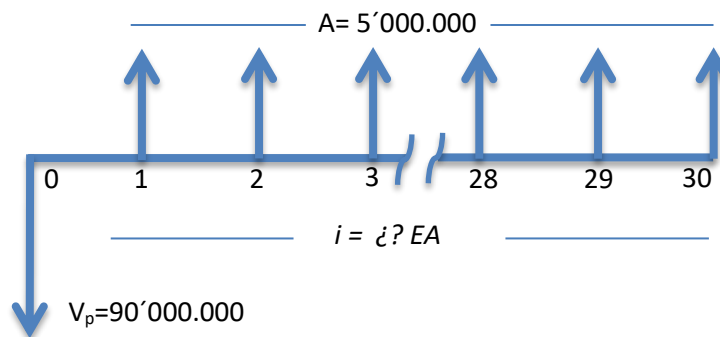
Valor presente: 90'000.000

Valor de los pagos: \$5'000.000

Numero de pagos: 30 anuales

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar la tasa de interés se parte de la formula (23):

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

De acuerdo al procedimiento descrito se le da valor inicial a la tasa (efectiva anual) y se calcula el valor del lado derecho, así para un valor de $i = 2\%$, se obtiene:

$$90'000.000 < 111'982.277,8$$

Considerando que el valor de la derecha es mucho mayor al lado izquierdo, aumentamos el valor de i , y se vuelve a calcular. En este caso se calcula para $i = 3\%$, obteniendo:

$$90'000.000 < 98'002.206,75$$

Considerando que el valor de la derecha es mayor al lado izquierdo, aumentamos el valor de i , y se vuelve a calcular. En este caso se calcula para $i = 4\%$, obteniendo:

$$90'000.000 > 86'460.166,50$$

Considerando que en este caso el valor de la menor al lado derecho, se puede concluir que la tasa de interés está entre 3% y 4%. El valor exacto se calcula por interpolación como se indica a continuación:

98'002.206,75	3%
90'000.000	X
86'460.166,50	4%

Aplicando una sencilla regla de tres: si para una diferencia entre 98'002.206,75 y 86'460.166,50, existe una diferencia del 1%; que diferencia en % habrá para diferencia entre 98'002.206,75 y 90'000.000, así se obtiene la fracción que sumada a 3% completa la tasa de interés.

$$X = \frac{8'002.206,75 \times 1\%}{11'542.040,25} = 0,693$$

Sumando el resultado a 3%, se obtiene la tasa de interés buscada: 3,693%

Este resultado se puede comprobar remplazando este valor en la ecuación (23) y verificando que se cumple la igualdad.

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$90'000.000 \cong 89'776.298,32$$

Respuesta

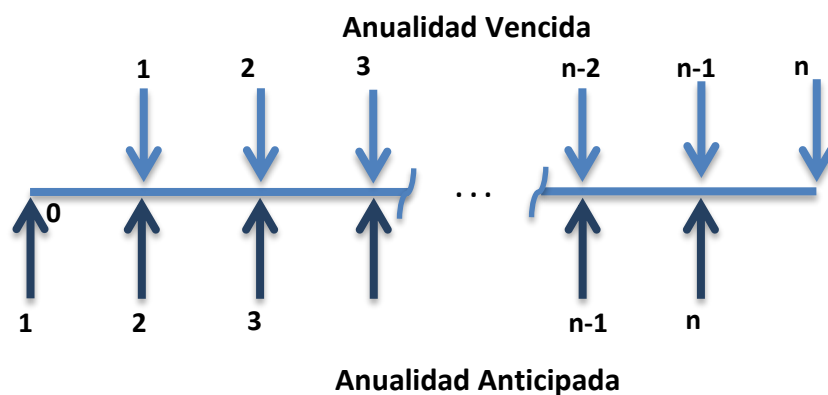
La compañía de pensiones reconoce una tasa efectiva anual de: 3,693%

2. Anualidades anticipadas

En los negocios es frecuente que los pagos se efectúen al comienzo de cada periodo; es el caso de los arrendamientos, ventas a plazos, y contratos de seguros, este tipo de operaciones financieras reciben el nombre de anualidades anticipadas.

Una anualidad anticipada es una sucesión de pagos o rentas que se efectúan o vencen al principio del periodo del pago. En la gráfica No 9 se comparan las anualidades vencidas y anticipadas

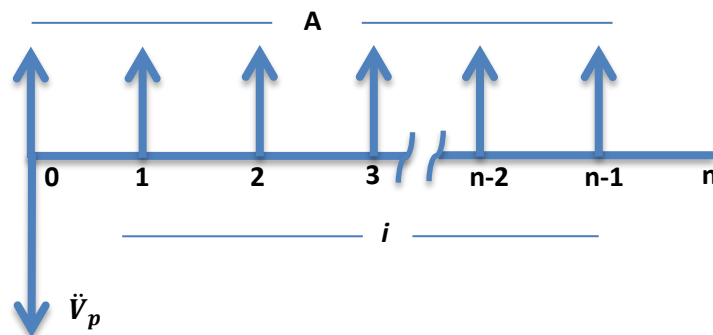
GRAFICA NO 9 – COMPARACIÓN DE ANUALIDADES VENCIDAS Y ANTICIPADAS



2.1 Valor presente de las anualidades anticipadas

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un préstamo V_p se paga en cuotas iguales A , a una tasa de interés efectiva por periodo i , durante n periodos, desde el periodo 0. La situación se muestra en la grafica No 10.

GRAFICA NO 10 – VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA



Si se analiza la operación se puede afirmar que el valor presente en este caso se puede determinar como la suma de A y el valor presente de una anualidad durante $n-1$ periodos.

$$\ddot{V}_p = A + A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} \right]$$

$$\ddot{V}_p = A \left[1 + \frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} \right] \quad (32)$$

Ejemplo 11.

El contrato de arriendo de una oficina fija pagos de \$4'000.000 mensuales al principio de cada mes, durante de un año. Si se supone un interés del 2,5% efectivo anual; ¿Cuál será el pago único al inicio del contrato que cubre todo el arriendo?

Solución

Parámetros

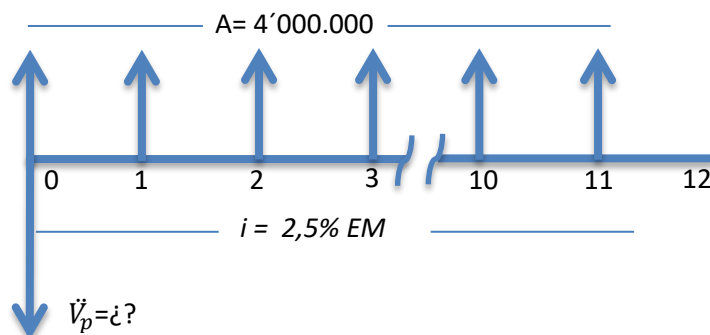
Valor de los pagos anticipados: \$4'000.000

Numero de pagos: 12 mensuales

Tasa de interés efectiva mensual: 2,5%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor presente de la anualidad anticipada se aplica directamente la formula (32):

$$\ddot{V}_p = A \left[1 + \frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} \right]$$

$$\ddot{V}_p = 4'000.000 \left[1 + \frac{1 - (1 + 0,025)^{-(12-1)}}{0,025} \right] = 42'056.834,85$$

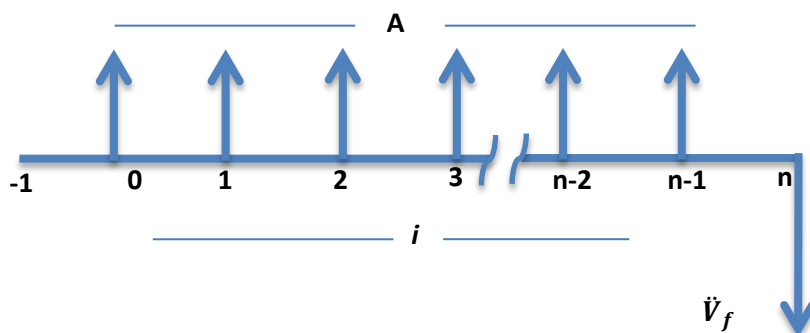
Respuesta

El valor total del contrato al momento de su firma es: \$42'056.834,85

2.2 Valor futuro de las anualidades anticipadas

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un ahorro V_f se paga en cuotas iguales A , a una tasa de interés efectiva por periodo i , durante n periodos, desde el periodo 0. La situación se muestra en la grafica No 11.

GRAFICA NO 11 – VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA



Si se analiza la operación se puede afirmar que el valor futuro de la anualidad anticipada es igual al valor futuro de la anualidad durante n periodos (desde -1 hasta $n-1$) trasladada 1 periodo, ha través de la formula (11), hasta el periodo n .

$$\ddot{V}_f = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i) \quad (33)$$

Ejemplo 12.

Una empresa arrienda una bodega que tiene de sobra por \$5'000.000 mensuales, los cuales se pagan de manera anticipada. Si cada que recibe el arriendo lo coloca en un fondo de inversiones que promete una tasa de interés del 2% EM. ¿Cuánto podrá retirar al cabo de un año?

Solución

Parámetros

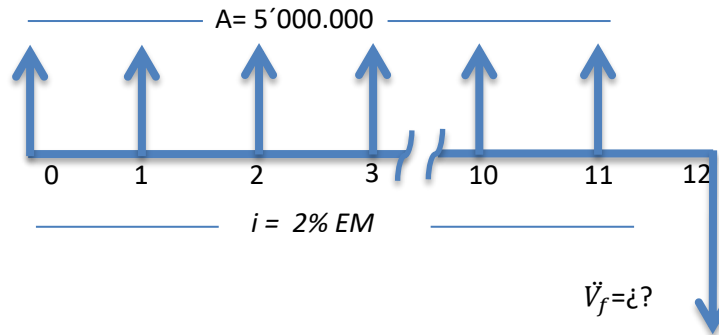
Valor de los pagos anticipados: \$5'000.000

Numero de pagos: 12 mensuales

Tasa de interés efectiva mensual: 2%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor futuro de la anualidad anticipada se aplica directamente la formula (33):

$$\ddot{V}_f = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i)$$

$$\ddot{V}_f = 5'000.000 \left[\frac{(1+0,02)^{12} - 1}{0,02} \right] (1+0,02) = 68'401.657,61$$

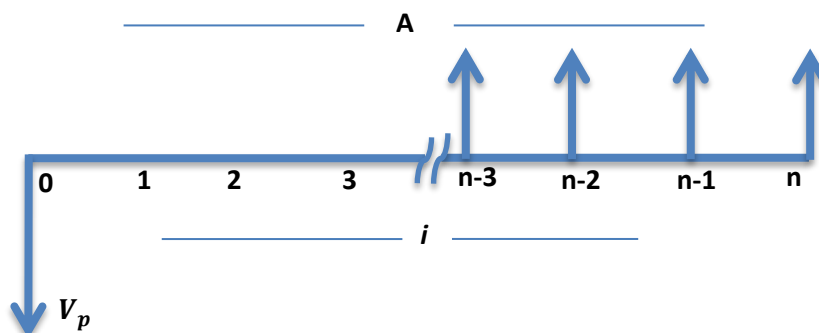
Respuesta

El valor ahorrado por el empresario al cabo de un año es: \$68'401.657,61

3. Anualidades diferidas

Hasta el momento se ha considerado que el pago de las rentas se inicia inmediatamente después de que se plantea la operación; no obstante, existen transacciones donde los pagos o rentas se realizan después de haber pasado cierta cantidad de periodos, en estos casos la operación se denomina anualidad diferida. En la gráfica No 12 se ilustran este tipo de actividades.

GRAFICA NO 12 –ANUALIDAD DIFERIDA



3.1 Valor presente de las anualidades diferidas

En este caso se halla el valor presente de la anualidad en un periodo antes de iniciarse los pagos, utilizando para ello la formula (23), el valor hallado se traslada al periodo 0 utilizando para ello la formula (12)

Ejemplo 12.

Una empresa acepta que un cliente le pague el valor de una compra realizada el día de hoy, en seis cuotas mensuales de \$800.000 a partir del séptimo mes. Si la empresa aplica una tasa efectiva de interés del 2,5% EM, ¿Cuál será el valor de la venta?

Solución

Parámetros

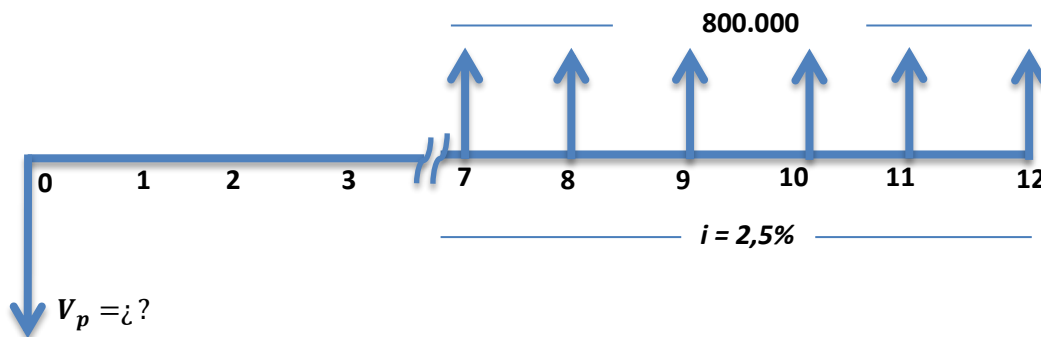
Valor de los pagos: \$800.000

Numero de pagos: 6 mensuales, a partir del mes 7

Tasa de interés efectiva mensual: 2,5%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor presente inicialmente calculamos el valor presente de la anualidad en el periodo 6, utilizando para ello la ecuación (23):

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]; \text{ para } i \neq 0$$

$$V_{p6} = 800.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,025)^{-6}}{0,025} \right] = 4'406.500,28$$

Este valor se traslada al periodo 0, para esto se utiliza la formula (12)

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{4'406.500,28}{(1+0,025)^6} = 3'799.711,38$$

Respuesta

El valor de la venta realizada por la empresa es: \$3'799.711,38

3.2 Valor futuro de las anualidades diferidas

En este caso se halla el valor presente de la anualidad un periodo antes de iniciarse los pagos, utilizando para ello la formula (23), el valor hallado se traslada al periodo n utilizando para ello la formula (11)

Ejemplo 13.

Si un padre inicia un ahorro mensual de \$50.000, cuando su hijo cumple 1 año, ¿Cuál será el valor ahorrado, cuando este cumpla 18 años, si el banco donde hace el deposito le reconoce un interés anual del 0,6% EM?

Solución

Parámetros

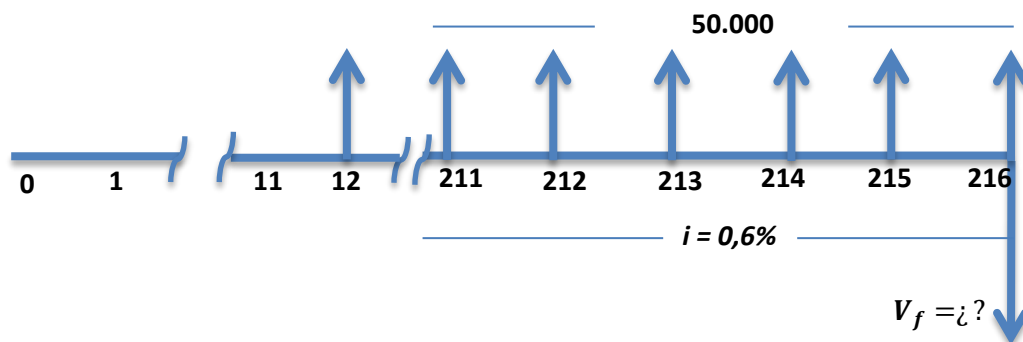
Valor de los pagos: \$50.000

Numero de pagos: 204 mensuales, a partir del mes 12

Tasa de interés efectiva mensual: 0,6%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor futuro inicialmente calculamos el valor presente de la

anualidad en el periodo 11, utilizando para ello la ecuación (23):

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]; \text{para } i \neq 0$$

$$V_{p6} = 50.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,006)^{-204}}{0,006} \right] = 5'873.924,73$$

Este valor se traslada al periodo 216, para esto se utiliza la formula (11)

$$V_f = V_p(1 + i)^n$$

$$V_f = 5'873.924,73(1 + 0,006)^{205} = 20'022.321,23$$

Respuesta

El valor del ahorro cuando el hijo cumpla 18 años es : \$20'022.321,23

4. Anualidades perpetuas

Cuando el número de pagos de una anualidad es muy grande, o cuando no se conoce con exactitud la cantidad de pagos se dice que la anualidad es perpetua.

Al deducirse los modelos matemáticos se debe tener en cuenta que solo existe el valor presente ya que por tratarse de una anualidad perpetua el valor futuro de este tipo de anualidades sería infinito.

Partiendo del valor presente de la anualidad formula (23) se puede hallar el limite cuando n tiende a infinito, teniendo en cuenta la definición de anualidad perpetua.

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]; \text{para } i \neq 0$$

$$V_p = \lim_{n \rightarrow \infty} A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} A \frac{1 - 0}{i} = \frac{A}{i}$$

$$V_p = \frac{A}{i}; \text{para } i \neq 0 \quad (34)$$

Ejemplo 14.

El consejo municipal de Santa Fe de Antioquia resuelve crear un fondo para proveer a perpetuidad las reparaciones del puente colonial de esa población que se estima tendrá un costo anual de \$91 millones de pesos, doce años después de una reparación general. ¿Cuánto se deberá colocar en el fondo al momento de terminar la reparación general, si

la tasa de interés de colocación del mercado es del 7% anual?

Solución

Parámetros

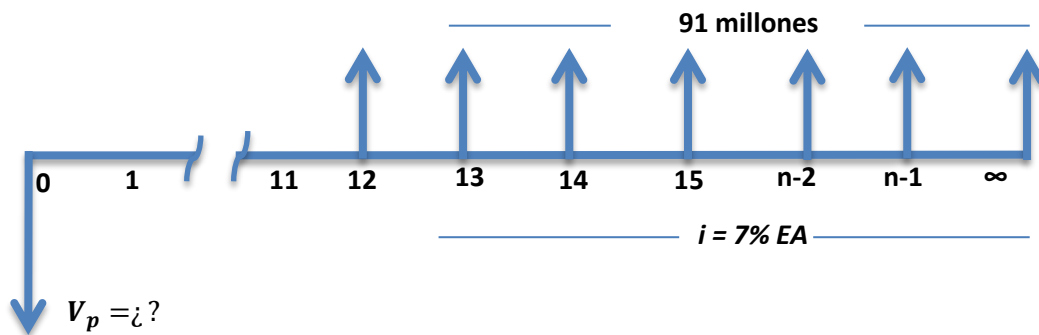
Valor de los pagos: \$91 millones

Numero de pagos: infinitos, a partir del año 12

Tasa de interés efectiva anual: 7%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Lo que habrá que depositar en el fondo será igual al valor presente de la anualidad perpetua calculada en el año 11, para lo cual se utiliza la formula (34), y este valor trasladado al momento 0, que es donde se supone se termino la reparación general, para esto se utiliza la formula (12):

$$V_{p11} = \frac{A}{i}; \text{ para } i \neq 0$$

$$V_{p11} = \frac{91'000.000}{0,07} = 1.300'000.000$$

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{1.300'000.000}{(1+0,07)^{12}} = 577'215.547$$

Respuesta

En el fondo se deben colocar: \$577'215.547

5. Gradientes

Son operaciones financieras en las cuales se pacta cubrir la obligación en una serie de pagos periódicos crecientes o decrecientes que cumplen con las siguientes condiciones:

- Los pagos cumplen con una ley de formación
- Los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo
- A todos los pagos (rentas) se les aplica la misma tasa de interés
- El número de pagos y periodos pactados es igual

La ley de formación, la cual determina la serie de pagos, puede tener un sinnúmero de variantes; no obstante, en la vida cotidiana las más utilizadas son el gradiente aritmético y el geométrico; las cuales a su vez pueden generar cuotas crecientes o decrecientes.

Como el lector ya lo habrá deducido, las anualidades son casos particulares de los gradientes donde el crecimiento es cero, lo que causa que los pagos sean todos iguales; entonces igual que el caso de la anualidad los modelos matemáticos que se deducen para el cálculo y análisis de los gradientes tienen en cuenta las anteriores condiciones por lo cual, es necesario que al momento de aplicarse las formulas a situaciones particulares, se asegure que se cumplan dichas condiciones

5.1 Gradiente aritmético

Para el gradiente aritmético, la ley de formación indica que cada pago es igual al anterior, más una constante k ; la cual puede ser positiva en cuyo caso las cuotas son crecientes, negativa lo cual genera cuotas decrecientes. En el caso de que la constante sea cero, los pagos son uniformes, es decir se tiene el caso de una anualidad.

5.1.1 Ley de formación

Considerando que los pagos en cada periodo serán diferentes, entonces estos se identificaran con un subíndice que indica el consecutivo del pago.

De acuerdo a la ley de formación, en este caso, cada pago será igual al anterior más una constante, así como se muestra a continuación:

A_1 Primer pago

$A_2 = A_1 + k$ Segundo pago

$A_3 = A_2 + k = A_1 + 2k$ Tercer pago

$A_4 = A_3 + k = A_1 + 3k$ Cuarto pago

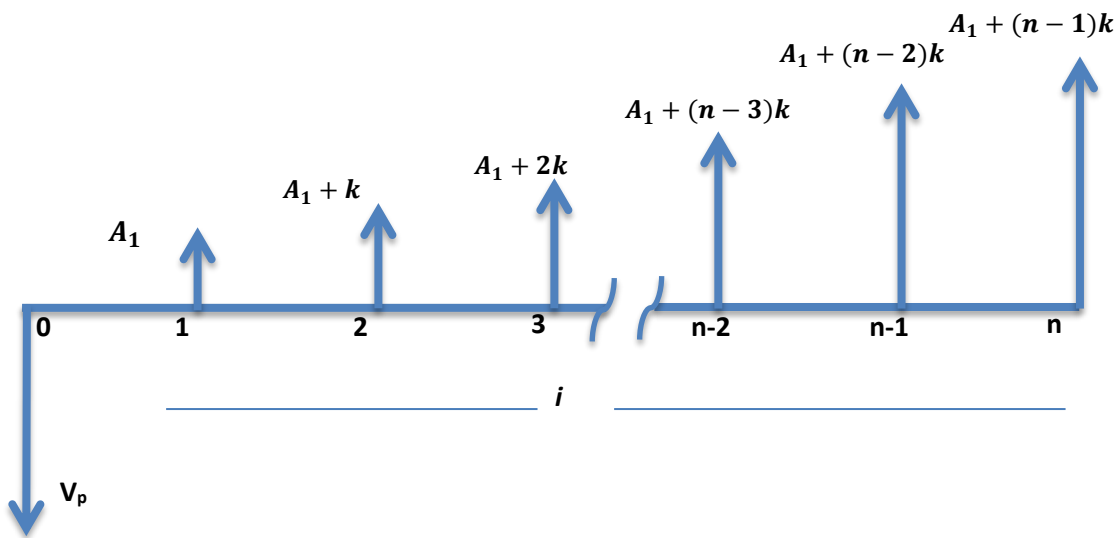
... ..

$A_n = A_1 + (n - 1)k$ Neavo pago

5.1.2 Valor presente de un gradiente aritmético

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un préstamo V_p se paga en una serie de cuotas formada a través de un gradiente aritmético, a una tasa de interés efectiva por periodo i , durante n periodos. La situación se muestra en la grafica No 13.

GRAFICA NO 13 – VALOR PRESENTE DE UN GRADIENTE ARITMÉTICO



Para calcular el valor presente se utiliza la formula (12), considerando cada valor de las cuotas $A_1 + jk$ y sumando todos los resultados en 0.

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{A_1 + k}{(1+i)^2} + \frac{A_1 + 2k}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A_1 + (n-3)k}{(1+i)^{n-2}} + \frac{A_1 + (n-2)k}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A_1 + (n-1)k}{(1+i)^n}$$

Rescribiendo la ecuación se obtiene el siguiente resultado:

$$V_p = \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{A_1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{A_1}{(1+i)^n} + \frac{k}{(1+i)^2} + \frac{2k}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(n-1)k}{(1+i)^n}$$

De la anterior expresión se puede concluir que la primera parte, las fracciones con numerador A_1 corresponde al valor presente de la anualidad y que las otras expresiones tienen como factor común K ; de esta forma la ecuación se puede escribir como:

$$V_p = A_1 \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] + K \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(n-1)}{(1+i)^n} \right] \quad (a)$$

Supongamos que el factor de K es igual F , es decir:

$$F = \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(n-1)}{(1+i)^n} \right]$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por $(1+i)$, entonces se obtiene:

$$F(1+i) = \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}} \right]$$

Si se resta $F(1+i)$ de F , se obtiene:

$$F(1+i) - F = \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}} \right] - \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(n-1)}{(1+i)^n} \right]$$

$$Fi = \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}$$

$$Fi = \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] - \frac{n}{(1+i)^n}$$

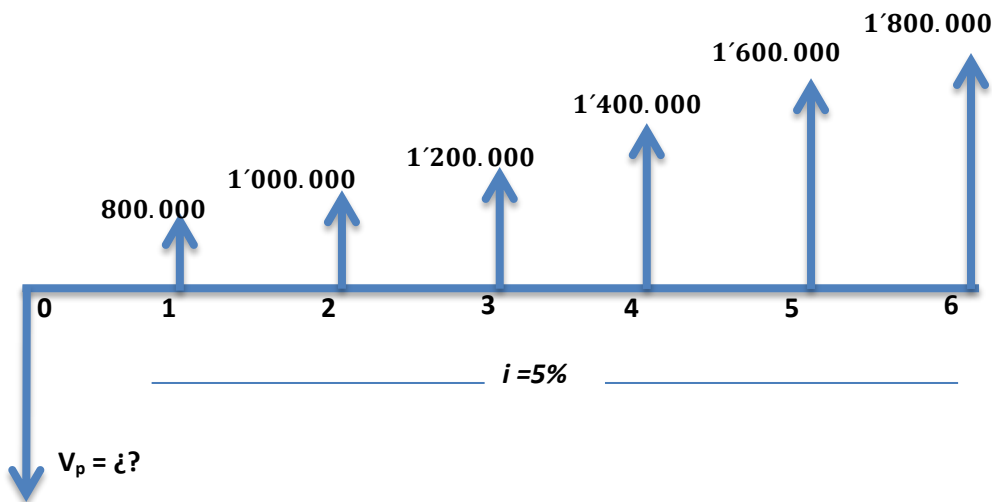
$$F = \frac{1}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] - \frac{n}{(1 + i)^n} \quad (b)$$

Remplazando (b) en (a), se obtiene:

$$V_p = A_1 \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] + \frac{K}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right] \quad (35)$$

Ejemplo 15.

Un padre de familia esta dispuesto a realizar el ahorro que se muestra en la grafica; de cuánto debería ser la inversión hoy para igualar dicho ahorro, si el banco reconoce una tasa de interés del 5% semestral.



Solución

Parámetros

Valor del pago inicial: $A_1 = \$800.000$

Numero de pagos: 6 semestrales

Tasa de interés efectiva anual: 5% ES

El gradiente tiene un crecimiento de \$200.000, es decir $K = 200.000$

Cálculos

Para hallar el equivalente del ahorro se debe calcular el valor presente del gradiente, para lo cual se utiliza la formula (35):

$$V_p = A_1 \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] + \frac{K}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right]$$

$$V_p = 800.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,05)^{-6}}{0,05} \right] + \frac{200.000}{0,05} \left[\frac{1 - (1 + 0,05)^{-6}}{0,05} - \frac{6}{(1 + 0,05)^6} \right] = 6'454.152,40$$

Respuesta

El valor equivalente del ahorro al día de hoy es: \$6'454.152,40

5.1.3 Valor futuro de un gradiente aritmético

Para hallar el valor futuro (V_f), basta remplazar el valor presente (V_p) del gradiente, formula (37), en la formula (11).

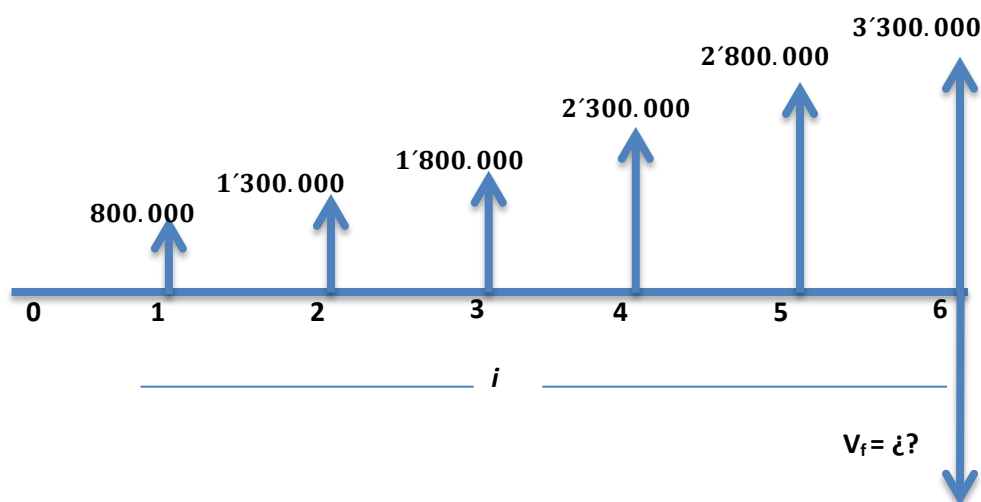
$$V_f = V_p(1 + i)^n$$

$$V_p = A_1 \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] + \frac{K}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right]$$

$$V_f = A_1 \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] + \frac{K}{i} \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} - n \right] \quad (36)$$

Ejemplo 15.

¿Qué valor recibirá una persona que realiza el ahorro semestral que se indica en la gráfica? El banco donde se realiza el ahorro reconoce una tasa de interés del 6% semestral.



Solución

Parámetros

Valor del pago inicial: $A_1 = \$800.000$

Numero de pagos: 6 semestrales

Tasa de interés efectiva anual: 6% ES

El gradiente tiene un crecimiento de \$500.000, es decir $K = 500.000$

Cálculos

Para hallar el valor final del ahorro se debe calcular el valor futuro del gradiente, para lo cual se utiliza la formula (38):

$$V_f = A_1 \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{K}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

$$V_f = 800.000 \left[\frac{(1+0,06)^6 - 1}{0,06} \right] + \frac{500.000}{0,06} \left[\frac{(1+0,06)^6 - 1}{0,06} - 6 \right] = 13'707909,31$$

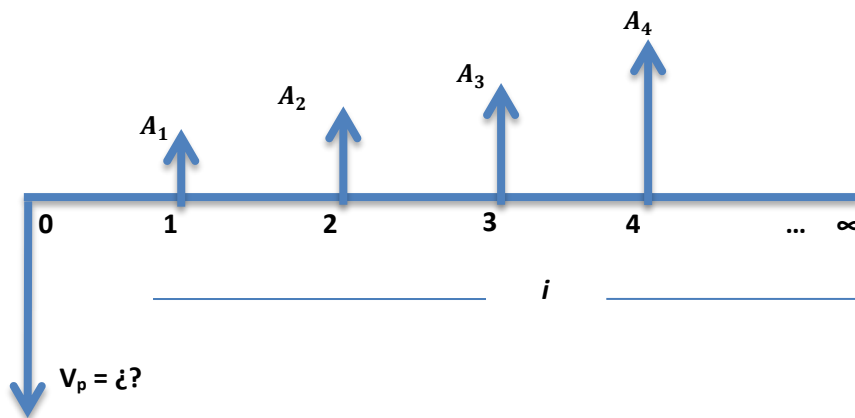
Respuesta

El valor final del ahorro es: \$13'707909,31

5.1.4 Valor presente de un gradiente aritmético infinito

Cuando se habla de pagos de gradientes matemáticos infinitos, solo tiene sentido hablar del valor presente, como equivalente de dichos pagos. La principal aplicación de dicha serie es el cálculo del costo de capital.

GRAFICA NO 14 – VALOR PRESENTE DE UN GRADIENTE ARITMÉTICO INFINITO



Modelo matemático

Planeando la ecuación de valor de la serie se obtiene:

$$V_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[A_1 \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] + \frac{K}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right]$$

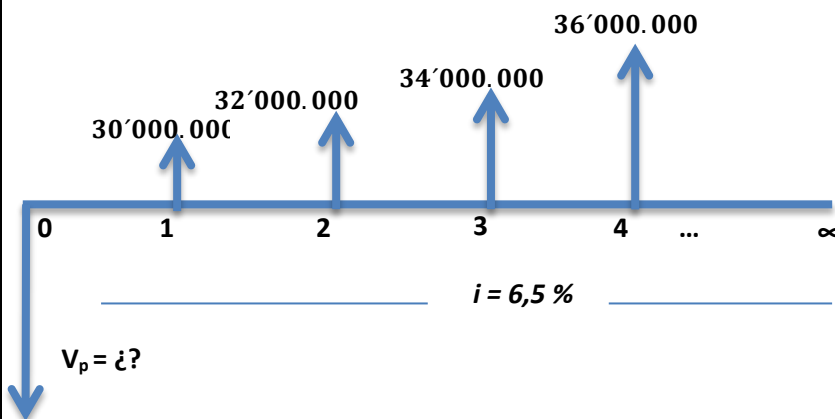
$$V_p = \lim_{n \rightarrow \infty} A_1 \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{i} \left[\frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

$$V_p = \left[\frac{A_1}{i} \right] + \frac{K}{i^2} - 0$$

$$V_p = \frac{A_1}{i} + \frac{K}{i^2} \quad (37)$$

Ejemplo 16.

¿Qué valor deberá cancelar una persona un año antes de su retiro para recibir anualmente una pensión de 30 millones, la cual se incrementara 2 millones cada año? El fondo de pensiones reconoce una tasa de interés del 6,5% anual.



Solución

Parámetros

Valor del pago inicial: $A_1 = \$30'000.000$

Numero de pagos: infinitos

Tasa de interés efectiva anual: 6,5% EA

El gradiente tiene un crecimiento de \$2'000.000, es decir $K = 2'000.000$

Cálculos

Para hallar el valor inicial que debe colocar la persona se debe calcular el valor presente del gradiente infinito, para lo cual se utiliza la formula (37):

$$V_p = \frac{A_1}{i} + \frac{K}{i^2}$$

$$V_p = \frac{30'000.000}{0,065} + \frac{2'000.000}{(0,065)^2} = 934'911.242,60$$

Respuesta

El futuro pensionado deberá cancelar : \$934'911.242,60

5.2 Gradiente geométrico

Para el gradiente aritmético, la ley de formación indica que cada pago es igual al anterior, multiplicado por una constante (1+G); si G es positiva el gradiente será con cuotas crecientes, si G es negativo el gradiente será decreciente y si G es igual a 0, los pagos son uniformes, es decir se tiene el caso de una anualidad.

5.2.1 Ley de formación

Considerando que los pagos en cada periodo serán diferentes, entonces estos se identificarán con un subíndice que indica el consecutivo del pago.

De acuerdo a la ley de formación, en este caso, cada pago será igual al anterior multiplicado por una constante, así como se muestra a continuación:

A_1 Primer pago

$A_2 = A_1(1 + G)$ Segundo pago

$A_3 = A_2(1 + G) = A_1(1 + G)^2$ Tercer pago

$A_4 = A_3(1 + G) = A_1(1 + G)^3$ Cuarto pago

... ..

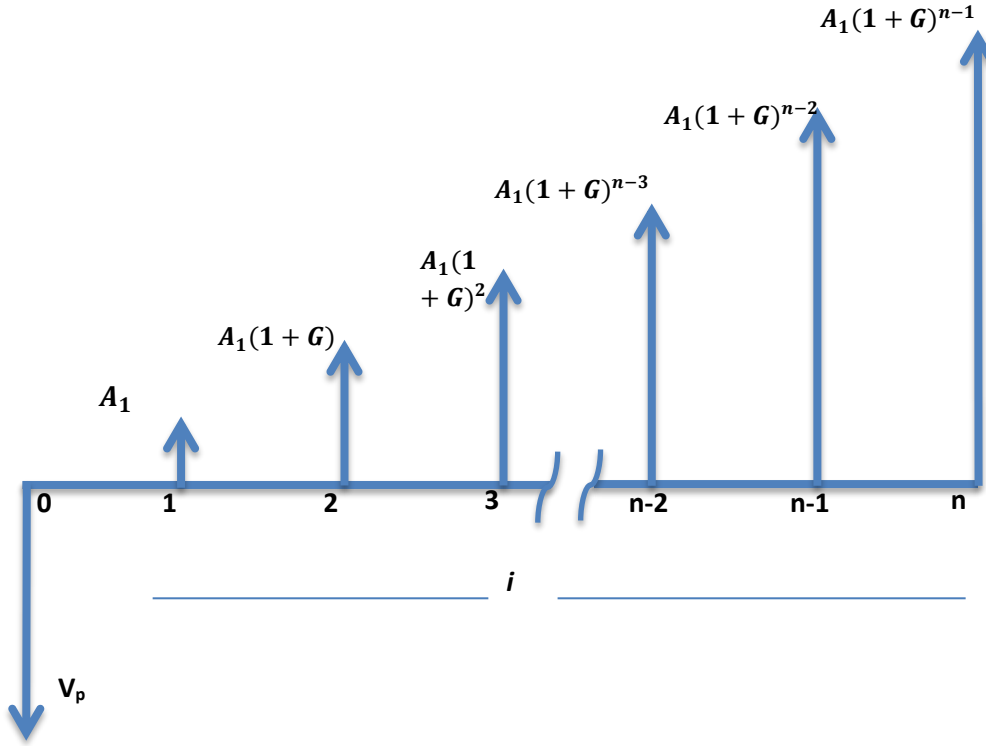
$A_n = A_1(1 + G)^{n-1}$ Neavo pago

5.2.2 Valor presente de un gradiente geométrico

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un préstamo V_p se paga en una serie de cuotas formadas a través de un gradiente

geométrico, a una tasa de interés efectiva por periodo i , durante n periodos. La situación se muestra en la grafica No 14.

GRAFICA NO 14 – VALOR PRESENTE DE UN GRADIENTE GEOMÉTRICO



Para calcular el valor presente se la ecuación de valor, para lo cual se utiliza la formula (12), considerando cada valor de las n cuotas y sumando todos los resultados en 0.

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{A_1(1+G)}{(1+i)^2} + \frac{A_1(1+G)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A_1(1+G)^{n-3}}{(1+i)^{n-2}} + \frac{A_1(1+G)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A_1(1+G)^{n-1}}{(1+i)^n} \quad (a)$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{(1+G)}{(1+i)}$, se obtiene:

$$V_p \frac{(1+G)}{(1+i)} = \frac{A_1(1+G)}{(1+i)^2} + \frac{A_1(1+G)^2}{(1+i)^3} + \frac{A_1(1+G)^3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{A_1(1+G)^n}{(1+i)^{n+1}} \quad (b)$$

Restando (a) de (b), se obtiene:

$$V_p \frac{(1+G)}{(1+i)} - V_p = \frac{A_1(1+G)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{A_1}{(1+i)^1}$$

$$V_p \left[\frac{(1+G)}{(1+i)} - 1 \right] = \frac{A_1}{(1+i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

$$V_p \left[\frac{(G-i)}{(1+i)} \right] = \frac{A_1}{(1+i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

$$V_p = \frac{A_1}{(G-i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1 \right] \text{ si } G \neq i \quad (c)$$

Si $G = i$ el valor presente es indeterminado; no obstante, esta situación se puede aclarar usando la regla de L'ôpital y derivando la expresión con respecto a i ; así como se muestra a continuación:

$$V_p = \lim_{i \rightarrow G} \frac{A_1}{(G-i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

$$V_p = \lim_{i \rightarrow G} \frac{A_1}{\frac{d}{di}(G-i)} \frac{d}{di} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

$$V_p = A_1 \lim_{i \rightarrow G} n \left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}} \right]$$

$$V_p = \frac{nA_1}{(1+i)} \text{ si } G = i \quad (d)$$

De (c) y (d) se puede concluir que:

$$V_p \left| \begin{aligned} &= \frac{A_1}{(G-i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1 \right] \text{ si } G \neq i \\ &= \frac{nA_1}{(1+i)} \text{ si } G = i \end{aligned} \right. \quad (38)$$

Ejemplo 17.

¿Cuál será el valor hoy de una pensión de un trabajador que le pagaran durante su época de jubilación 24 pagos anuales iniciando en 2'000.000 y con incrementos del 10% anual? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 7% EA

Solución

Parámetros

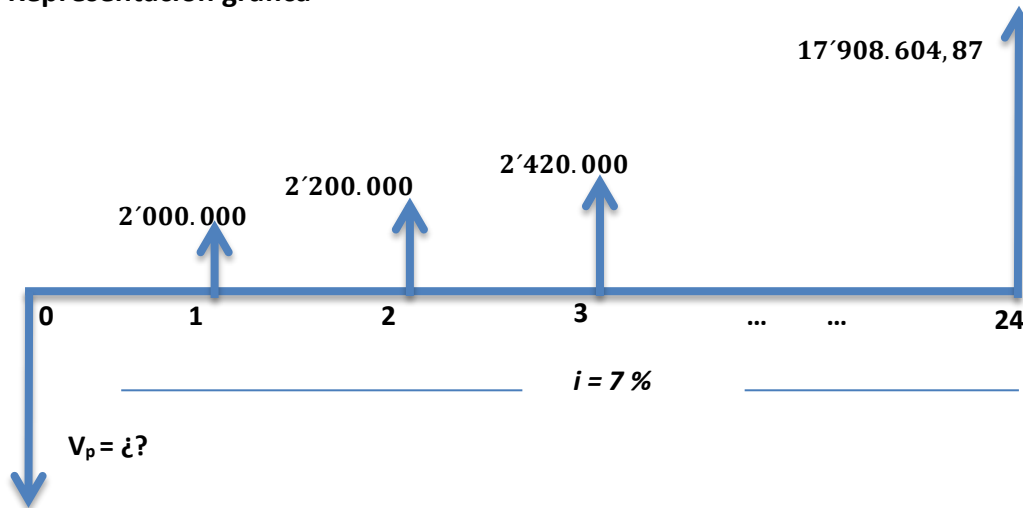
Valor del pago inicial: $A_1 = \$2'000.000$

Numero de pagos: 24 anuales

Tasa de interés efectiva anual: 7% EA

El gradiente tiene un crecimiento del 10% anual, es decir $G = 10\%$

Representación grafica



Cálculos

Para hallar el valor inicial de la pensión que se deberá pagar se aplica la formula (38) cuando $G \neq i$, considerando que se trata de un gradiente geométrico con un crecimiento del 10%.

$$V_p = \frac{A_1}{(G - i)} \left[\frac{(1 + G)^n}{(1 + i)^n} - 1 \right]$$

$$V_p = \frac{2'000.000}{(0,1 - 0,07)} \left[\frac{(1 + 0,1)^{24}}{(1 + 0,07)^{24}} - 1 \right] = 62'789.433,63$$

Respuesta

El valor presente de la pensión es : \$62'789.433,63

Ejemplo 18.

¿Cuál será el valor hoy de una pensión de un trabajador que le pagaran durante su época de jubilación 24 pagos anuales iniciando en 2'000.000 y con incrementos del 10% anual? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 10% EA

Solución

Parámetros

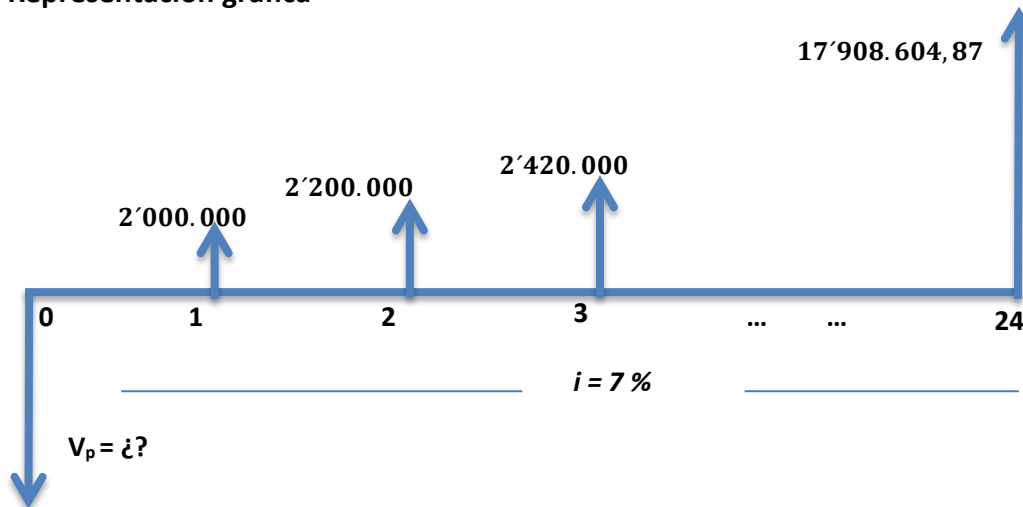
Valor del pago inicial: $A_1 = \$2'000.000$

Numero de pagos: 24 anuales

Tasa de interés efectiva anual: 10% EA

El gradiente tiene un crecimiento del 10% anual, es decir $G = 10\%$

Representación grafica



Cálculos

Para hallar el valor inicial de la pensión que se deberá pagar se aplica la formula (38) cuando $G = i$, considerando que se trata de un gradiente geométrico con un crecimiento del 10%.

$$V_p = \frac{nA_1}{(1+i)} \text{ si } G = i$$

$$V_p = \frac{24 \times 2'000.000}{(1+0,1)} = 43'636.363,64$$

Respuesta

El valor presente de la pensión es : \$43'636.363,64

5.2.3 Valor futuro de un gradiente geométrico

Para hallar el valor futuro (V_f), basta remplazar el valor presente (V_p) del gradiente, formula (40), en la formula (11).

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$V_f = \frac{A_1}{(G-i)} \left[\frac{(1+G)^n}{(1+i)^n} - 1 \right] (1+i)^n$$

$$V_f = \frac{A_1}{(G - i)} [(1 + G)^n - (1 + i)^n]; \text{ si } G \neq i$$

De otro lado,

$$V_f = \frac{nA_1}{(1 + i)} (1 + i)^n$$

$$V_f = \frac{nA_1}{(1 + i)^{-n+1}}; \text{ si } G = i$$

De esta manera,

$$V_f \left| \begin{array}{l} = \frac{A_1}{(G - i)} [(1 + G)^n - (1 + i)^n]; \text{ si } G \neq i \\ = \frac{nA_1}{(1 + i)^{-n+1}}; \text{ si } G = i \end{array} \right. \quad (39)$$

Ejemplo 19.

¿Cuál será el valor final de un ahorro que se realiza durante 36 semestres iniciando con un pago de 3'000.000 e incrementos del 4%? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 3,5% ES

Solución

Parámetros

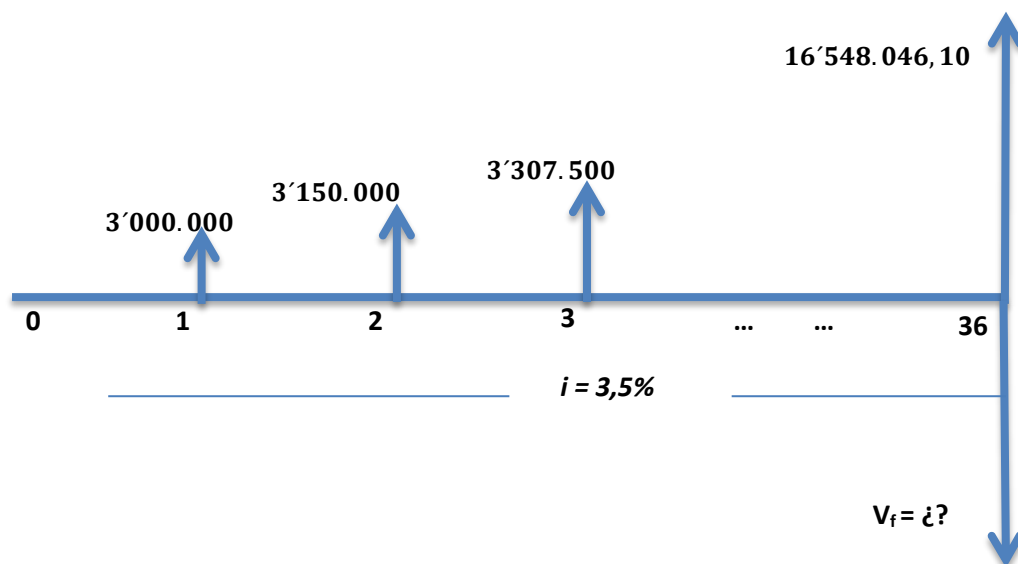
Valor del pago inicial: $A_1 = \$3'000.000$

Numero de pagos: 36 semestrales

Tasa de interés efectiva semestral: 3,5% ES

El gradiente tiene un crecimiento del 4% anual, es decir $G = 4\%$

Representación grafica



Cálculos

Para hallar el valor final del ahorro se aplica la formula (39) cuando $G \neq i$, considerando que se trata de un gradiente geométrico con un crecimiento del 4%.

$$V_f = \frac{A_1}{(G - i)} [(1 + G)^n - (1 + i)^n]; \text{ si } G \neq i$$

$$V_f = \frac{3'000.000}{(0,04 - 0,035)} [(1 + 0,04)^{36} - (1 + 0,035)^{36}]; = 392'199.865,50$$

Respuesta

El valor del ahorro es: \$392'199.865,50

Ejemplo 20.

¿Cuál será el valor final de un ahorro que se realiza durante 36 semestres iniciando con un pago de 3'000.000 e incrementos del 4%? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 4% ES

Solución

Parámetros

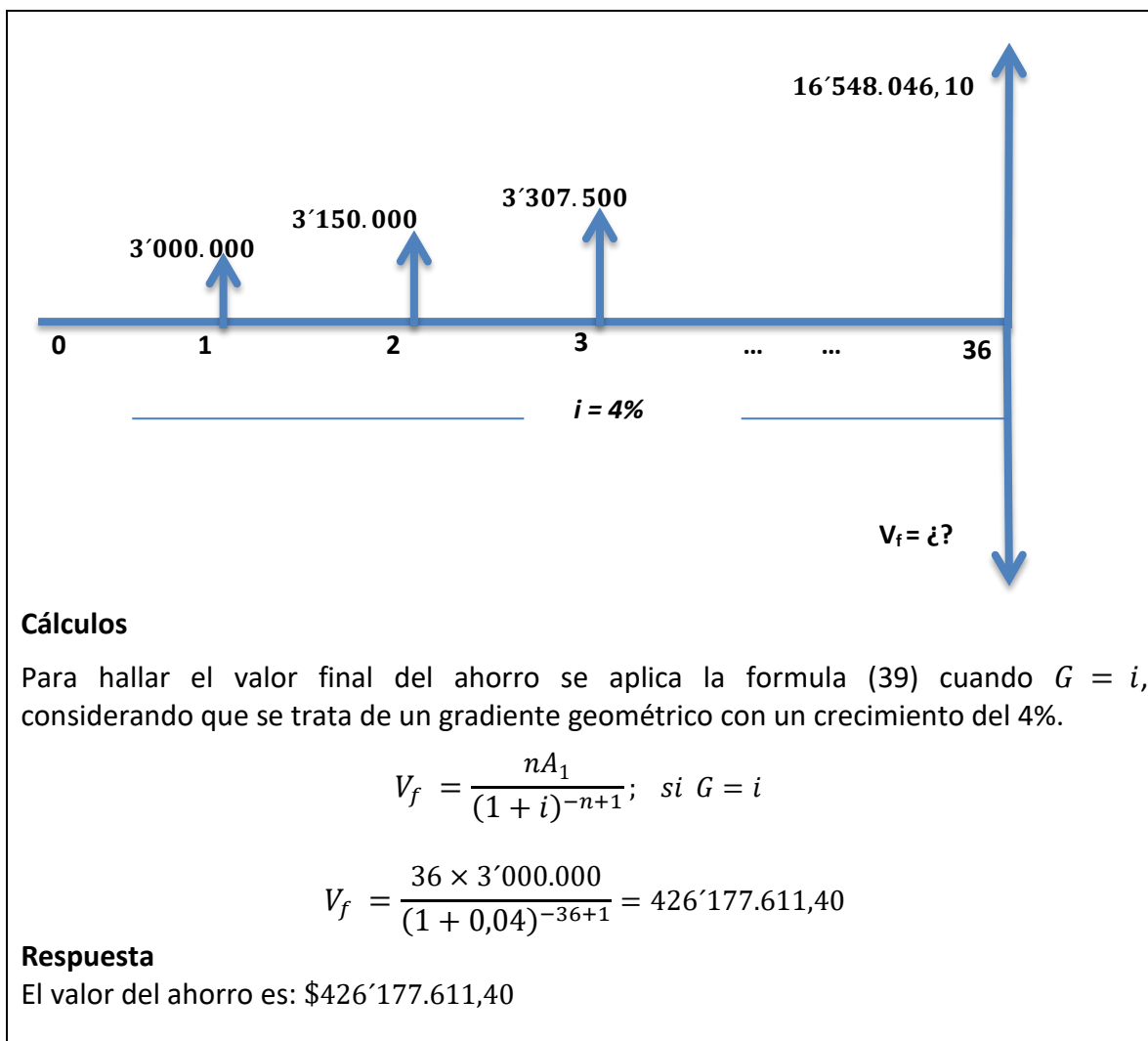
Valor del pago inicial: $A_1 = \$3'000.000$

Numero de pagos: 36 semestrales

Tasa de interés efectiva semestral: 4% ES

El gradiente tiene un crecimiento del 4% anual, es decir $G = 4\%$

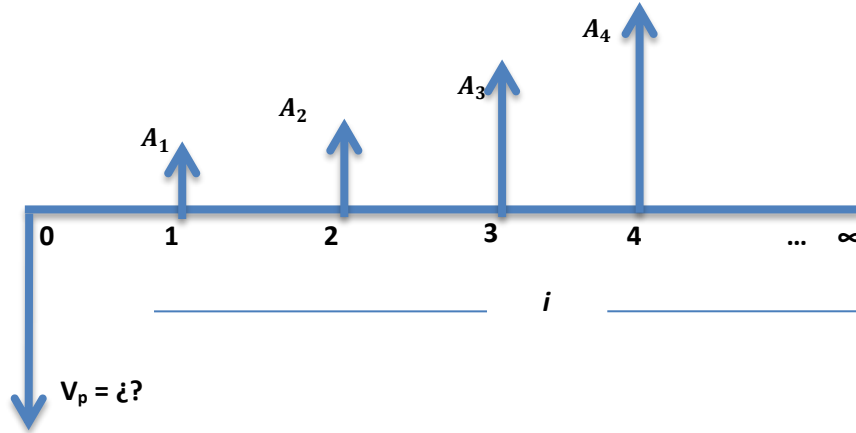
Representación grafica



5.2.4 Valor presente de un gradiente aritmético infinito

Cuando se habla de pagos de gradientes geométricos infinitos, solo tiene sentido hablar del valor presente, como equivalente de dichos pagos. La situación se ilustra en la grafica No 16.

GRAFICA NO 16 – VALOR PRESENTE DE UN GRADIENTE GEOMÉTRICO INFINITO



Modelo matemático

De la ecuación (40) para cuando $G \neq i$, se obtiene:

$$V_p = \frac{A_1}{(G - i)} \left[\frac{(1 + G)^n}{(1 + i)^n} - 1 \right] \text{ si } G \neq i$$

$$V_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1}{(G - i)} \left[\frac{(1 + G)^n}{(1 + i)^n} - 1 \right]$$

$$V_p = \frac{A_1}{(G - i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{(1 + G)}{(1 + i)} \right)^n - 1 \right]$$

Si $G > i$ entonces la expresión $\left(\frac{(1+G)}{(1+i)} \right)^n$ es mayor que 1, y no tendrá límite cuando n tiende a ∞ .

Si $G < i$ entonces la expresión $\left(\frac{(1+G)}{(1+i)} \right)^n$ es menor que 1, y por consiguiente el límite será igual a 0, cuando n tiende a ∞ .

$$V_p = \frac{A_1}{(G - i)} [0 - 1] = \frac{A_1}{(i - G)} \quad (a)$$

De la ecuación (40) para cuando $G = i$, se obtiene:

$$V_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nA_1}{(1 + i)} \text{ si } G = i \quad (b)$$

En este caso, no hay límite

De (a) y (b) entonces se puede escribir el valor presente de un gradiente geométrico infinito, como:

$$V_p \left| \begin{array}{l} = \frac{A_1}{(i - G)}; \text{ si } G < i \\ = \infty; \text{ si } G \geq i \end{array} \right. \quad (40)$$

Ejemplo 21.

¿Cuál será el valor de la prima de un seguro que pretende realizar pagos de forma indefinida, iniciando en 4'000.000 con incrementos mensuales del 1%? Suponga que se reconoce una tasa de interés del 1,5% EM

Solución

Parámetros

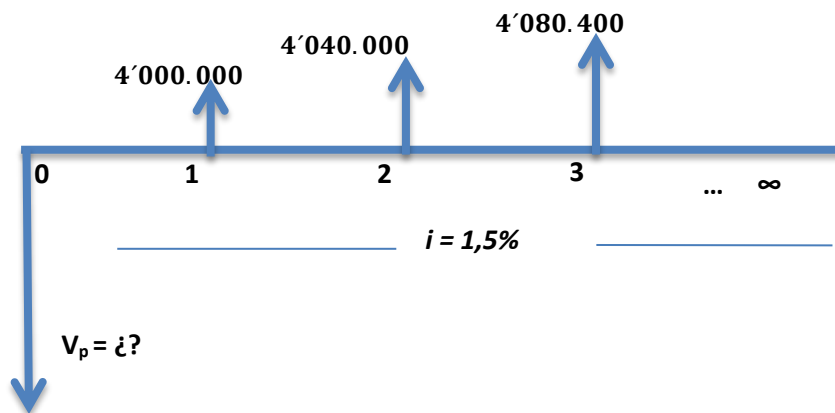
Valor del pago inicial: $A_1 = \$4'000.000$

Numero de pagos: infinitos

Tasa de interés efectiva mensual: 1,5% EM

El gradiente tiene un crecimiento del 1% mensual, es decir $G = 1\%$

Representación grafica



Cálculos

Para hallar el valor de la prima del seguro se debe calcular el valor presente de la serie infinita de la formula (42), considerando que $G \leq i$, y teniendo en cuenta que se trata de un gradiente geométrico con un crecimiento del 1%.

$$V_p = \frac{A_1}{(i - G)}; \text{ si } G < i$$

$$V_p = \frac{4'000.000}{(0,015 - 0,01)} = 800'000.000,00$$

Respuesta

El valor del ahorro es: \$800'000.000,00

