Równanie transportu ciepła MES

Michał Proć

Styczeń 2024

1 Problem

Równanie transport ciepła:

$$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

$$u(2) = 3$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in [0,1] \\ 2 & \text{dla} \quad x \in (1,2] \end{cases}$$

gdzie *u(x)* to poszukiwana funkcja

$$[0,2] \ni x \mapsto u(x) \in R$$

2 Rozwiazanie

Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego:

$$-k(x)u''(x) = 0$$

$$-k(x)u''(x)v(x) = 0 * v(x) \qquad v(2) = 0$$

$$-\int_0^2 u''v\,dx = 0 \qquad k(x) \neq 0$$

$$\int_0^2 u''vdx = -[u'v]_0^2 + \int_0^2 u'v'dx = 0$$

$$v(0)[20 - u(0)] + \int_0^2 u'v'dx = 0$$

$$-v(0)u(0) + \int_0^2 u'v'dx = -20v(0)$$

$$B(u,v) = \ -v(0)u(0) + \int_0^2 u'v'dx$$

$$L(v) = \ -20v(0)$$

$$B(u,v) = L(v)$$

3 Macierz

Układ równań zapisany macierzowo:

$$
\begin{bmatrix}
B(e_0, e_0) & B(e_0, e_1) & B(e_0, e_2) & \dots & B(e_0, e_{n-1}) \\
B(e_1, e_0) & B(e_1, e_1) & B(e_1, e_2) & \dots & B(e_1, e_{n-1}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
B(e_{n-1}, e_0) & B(e_{n-1}, e_1) & B(e_{n-1}, e_2) & \dots & B(e_{n-1}, e_{n-1})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
L(e_0) \\ L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1})
\end{bmatrix}
$$