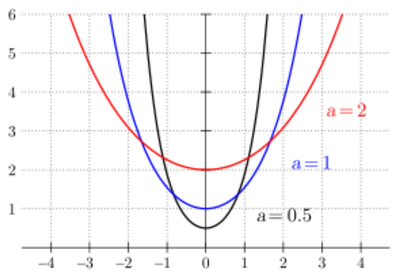
Вариант 16. Цепная линия



Разработать класс, определяющий кривую – цепную линию.

Цепная линия – линия, по которой провешивается однородная нерастяжимая нить, закрепленная в двух ее концах.

1) Определить состояние класса.
2) Разработать необходимые конструкторы и методы получения и изменения параметров, определяющих кривую.
3) Вернуть ординату цепной лини по значению абсциссы (начало координат находится ниже вершины цепной линии на длину такого отрезка, вес которого равен горизонтальной составляющей натяжения нити).
4) Вернуть длину дуги цепной линии от ее проекции на оси абсцисс.
5) Вернуть радиус кривизны цепной линии относительно координаты по оси абсцисс.
6) Вернуть координаты центра кривизны цепной линии в декартовой системе координат относительно координаты по оси абсцисс.
7) Вернуть площадь криволинейной трапеции образованной цепной линией и ее проекцией на ось абсцисс.

Разработать диалоговую программу для тестирования класса.

Уравнение линии в декартовых координатах: $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a\cosh\frac{x}{a}$

Все цепные линии подобны одна другой, изменение **a** эквивалентно равномерному растяжению или сжатию графика функции вдоль оси **x.**
Переменная **x** графика отсчитывается от самой низкой точки на оси ординат цепной линии.

- Длина дуги от вершины до произвольной точки $(x,\ y)$:

$$s = a\ \mathrm{sh}\,\frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2}$$

$$L_{\text{дуг.цеп}} = R\left(sh\frac{x_2}{R} - sh\frac{x_1}{R}\right)$$

- Радиус кривизны:

$$R = a\ \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}$$

- Площадь, ограниченная цепной линией, двумя её ординатами и осью абсцисс:

$$S = a^2\left(\mathrm{sh}\,\frac{x_2}{a} - \mathrm{sh}\,\frac{x_1}{a}\right) = a\left(\sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}\right).$$

Первая производная:

$$\sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Вторая производная:

$$\frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{a}$$

По формулам $\begin{cases} x_C = x - \frac{y' \cdot (1+y'^2)}{y''} \\ y_C = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$ находим координаты центра кривизны для произвольной точки $M\,(x;y)$.

2. Уравнение. Если за начало координат принять вершину цепной линии (что представляется довольно естественным), а ось ординат направить вертикально вверх, то цепная линия представится уравнением

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) - a,$$

где a (параметр цепной линии) есть длина такого отрезка нити, вес которого равен горизонтальной составляющей натяжения нити (эта составляющая постоянна на всем протяжении дуги провеса).

Однако обычно начало координат берут в точке O, лежащей ниже точки A на расстоянии a. Тогда получаем более простое уравнение

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

или, пользуясь обозначениями гиперболических функций (§ 403)

$$\frac{y}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Возможные тесты (подтверждаются калькулятором):

```
a = 1
            x1 = 0  x2 = 2  ------- area = 3,62686
                                    perimeter = 3,62686
                                    radius(5) = 22.5505
                                    center(5) = (-15.997;16.4501)

a = 2
            x1 = 0  x2 = 2  ------- area = 4.7008
                                    perimeter = 2.3504

a = 3
            x1 = 0  x2 = 2  ------- area = 6.45443
                                    perimeter = 2.15148
                                    radius(5) = 22.5505
                                    center(5) = (-15.997;16.4501)
```

Tele2 LTE 15:36 27 %

Калькулятор Закрыть

$$3\cosh\left(\frac{5}{3}\right) \times \cosh\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$= \frac{3e^{7}\sqrt[3]{e} + 6e^{4} + 3\sqrt[3]{e^{2}}}{4e^{4}}$$

Альтернативная форма

$\approx 22{,}55047$

Показать Решение

Tele2 LTE 15:40 22 %

Калькулятор Закрыть

$$5 - 3\frac{\sinh\left(\frac{5}{3}\right)\left(1 + \sinh\left(\frac{5}{3}\right) \times \sin\right.}{\cosh\left(\frac{5}{3}\right)}$$

$$= 5 - \frac{3e^{17}\sqrt[3]{e} - 3e^{10}\sqrt[3]{e^{2}} + 3e^{7}\sqrt[3]{e} - 3\sqrt[3]{e^{2}}}{4e^{14} + 4e^{4}}$$

Альтернативная форма

$\approx -15{,}99696$

Показать Решение

Tele2 LTE 15:41 21 %

Калькулятор Закрыть

$$\text{osh}\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{\frac{1 + \sinh\left(\frac{5}{3}\right) \times \sinh\left(\frac{5}{3}\right.}{\cosh\left(\frac{5}{3}\right)}}{3}$$

$$= \frac{3e^{3}\sqrt[3]{e^{2}} + 3\sqrt[3]{e}}{2e^{2}} + \frac{3e^{10}\sqrt[3]{e} + 3e^{3}\sqrt[3]{e^{2}} + 3e^{13}\sqrt[3]{e^{2}} + 3\sqrt[3]{e}}{2e^{12} + 2e^{2}}$$

Альтернативная форма

$\approx 16{,}4501$

Показать Решение