Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εαρινό εξάμηνο 2022-23

Όραση Υπολογιστών

1ο Σύνολο Αναλυτ. Ασκήσεων

Δημήτριος Κοκκίνης

03118896

dimkok00@gmail.com

Άσκηση 1.1

α)(2.6)

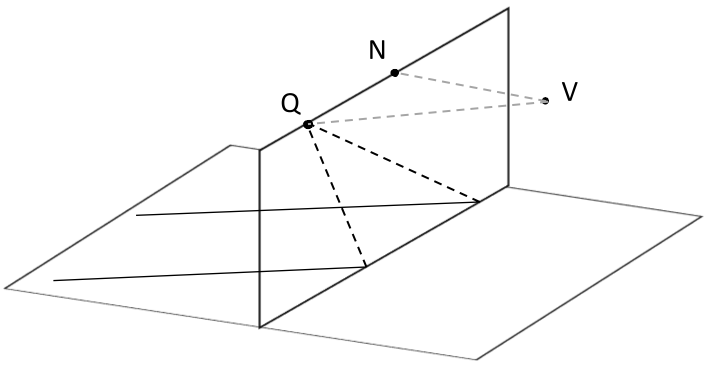
a) Ουσιαστικά γνωρίζουμε πως οι προβολές κάθε παράλληλης δέσμης ευθειών έχει ένα μοναδικό πεπερασμένο σημείο φυγής πάνω στην εικόνα και ένα σύνολο από τέτοιες δέσμες έχει το δικό της σημείο φυγής. Το σύνολο των σημείων φυγής ορίζουν μια ευθεία που ονομάζεται ορίζοντας και εφόσον οι προβολές των ευθειών τέμνονται στο σημείο Q που βρίσκεται πάνω στον ορίζοντα h, αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες l και m είναι παράλληλες.

Παρακάτω ωστόσο γίνεται μια πιο εκτενής απόδειξη της διατύπωσης αυτής.

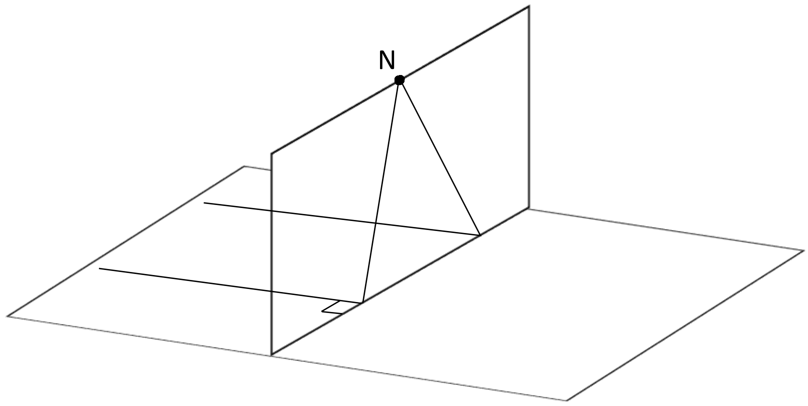
Η ευθεία που ορίζουν τα P και P' είναι συνεπίπεδη με τις ευθείες l και l' και εφόσον το V ανήκει στην ευθεία αυτή, τότε είναι και αυτό συνεπίπεδο με τις l και l'. Εφόσον το Q ανήκει στην ευθεία l', βρίσκεται και αυτό στο ίδιο επίπεδο που σημαίνει πως και το τμήμα VQ βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο.

Επειδή το Q ανήκει στο h σημαίνει ότι το VQ είναι παράλληλο στο Π. Επομένως οι ευθείες l και VQ είναι συνεπίπεδες χωρίς να έχουν κάποιο κοινό σημείο, άρα είναι παράλληλες. Το ίδιο ισχύει και για τις m, VQ οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως οι ευθείες l και m είναι παράλληλες.

b) Αφού αποδείξαμε ότι l || VQ και ξέρουμε ότι a || h τότε η γωνία (κατεύθυνση) της ευθείας l ή και m με τον άξονα a είναι ίδια με τη γωνία της VQ με τον ορίζοντα h. Άρα αν η ευθεία σχηματίσει γωνία 45^o με τον a τότε το τρίγωνο VNQ που σχηματίζεται θα είναι ισοσκελές, δηλαδή οι πλευρές VN και NQ θα είναι ίσες και έτσι με γνωστά τα σημεία N και Q στην εικόνα θα μπορούμε να βρούμε και την απόσταση VN.



c)

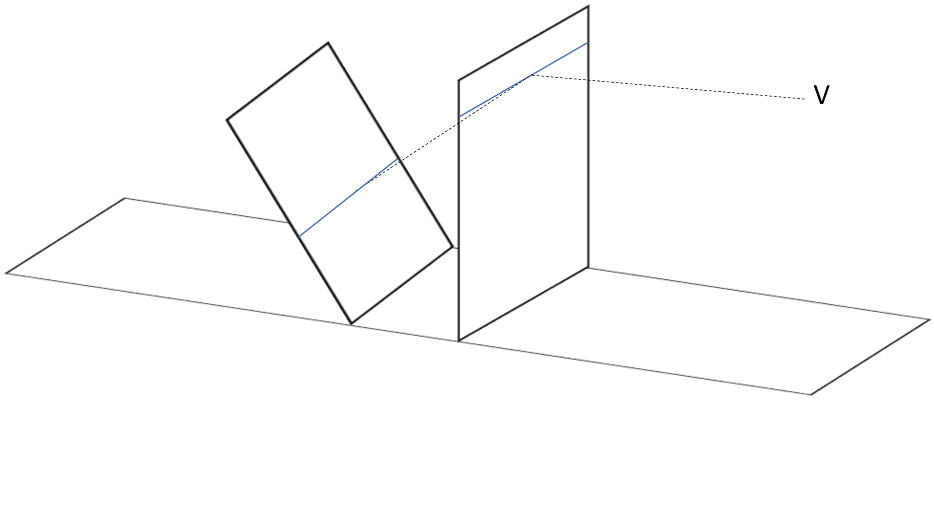


Διαισθητικά βλέπουμε πως για να βρίσκεται το σημείο φυγής στο κέντρο της γραμμής του ορίζοντα, πρέπει οι ευθείες l και m να σχηματίζουν ορθή γωνία με τον άξονα a δηλαδή να είναι κάθετες στο επίπεδο της εικόνας.

Αυτό συμβαίνει διότι όπως ειπώθηκε και στο προηγούμενο ερώτημα, η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες με τον άξονα a είναι ίδια με τη γωνία που σχηματίζει το τμήμα VQ με τον ορίζοντα h. Επομένως, όταν οι ευθείες βρίσκονται σε γωνία 90^o, το τμήμα VQ θα είναι κάθετο πάνω στο επίπεδο της εικόνας δηλαδή το σημείο Q θα ταυτίζεται με το σημείο N.

d) Όταν το επίπεδο της εικόνας E δεν είναι κάθετο στο επίπεδο Π, οι προβολές παράλληλων ευθειών του επιπέδου Π πάνω στο E πάλι καταλήγουν σε ένα σημείο φυγής του ορίζοντα, ωστόσο η θέση του μεταβάλλεται με το προσανατολισμό του επιπέδου E.

Για παράδειγμα, όταν το επίπεδο της εικόνας έχει μια κλίση προς τα κάτω, ο ορίζοντας εμφανίζεται χαμηλότερα στην εικόνα ενώ αντίθετα όταν πάρει μια κλίση προς τα πάνω εμφανίζεται πιο ψηλά.



β)(2.9)

Έστω T ο 3D αφινικός μετασχηματισμός T(x) = s*R*(x - C) όπου s είναι ο συντελεστής κλιμάκωσης, R ο πίνακας περιστροφής και C το κέντρο του αντικειμένου.

Η ορθογραφική προβολή είναι μια παράλληλη προβολή δηλαδή οι ακτίνες φωτός οδεύουν παράλληλα στον οπτικό άξονα αντί να διέρχονται από την αρχή των αξόνων, για αυτό ο πίνακας προβολής P στην ορθογραφική προβολή είναι ένας απλός 4x4 πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}$$

Έστω ένα σημείο x στο τρισδιάστατο αντικείμενο και η προβολή του πάνω στο επίπεδο της εικόνας x'. Τότε θα ισχύει:

$$x' = P * T(x) = P * \big(S * R * (x - C)\big) = \big(S * R * (x - C)\big)[1:2] = A * x$$

Όπου A ο 2D αφινικός μετασχηματισμός

Άσκηση 1.2

α)(2.12)

Ξεκινάμε από τον ορισμό της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας L

$$L = \frac{d\Phi}{A*\cos(\theta)*d\Omega} = \frac{1}{A*\cos(\theta)} * J(\theta) \;=>\; J(\theta) = L * A * \cos(\theta) \; \textit{(1)}$$

Ξέρουμε ότι μια Lambertian επιφάνεια ακτινοβολεί με τέλεια διάχυση, δηλαδή η εκπεμπόμενη ακτινοβολία (radiance) L = const είναι σταθερή. Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον όρο L*A ως μια σταθερά J(0) η οποία συμβολίζει τη μέγιστη ακτινοβόλο ένταση, και έτσι η (1) γράφεται:

$$J(\theta) = J(0) * \cos(\theta)$$

Οπότε αποδείχτηκε ο νόμος του Lambert.

β)(2.14)

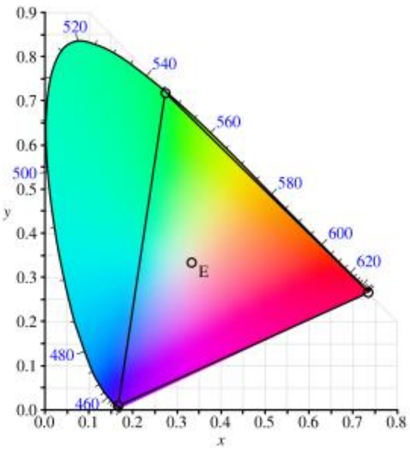
Από το λ, βάση του σχήματος 2.18(b) του βιβλίου βρίσκουμε τη τιμή της LEF (luminous efficiency) η οποία είναι εδώ $K(\lambda = 650nm) = 165$

- Για την ακτινοβόλο ένταση έχουμε ότι: $J = \varphi/4\pi = 100/4\pi = 7{,}95$ N/sr
- Για την φωτοβόλο ένταση έχουμε ότι: $J_v = K(\lambda)J_e \Rightarrow J = 1311{,}75$ cd

Άσκηση 1.4

α)(5.5)

Παραθέτουμε για λόγους επεξήγησης το σχήμα του διαγράμματος CIE-xy



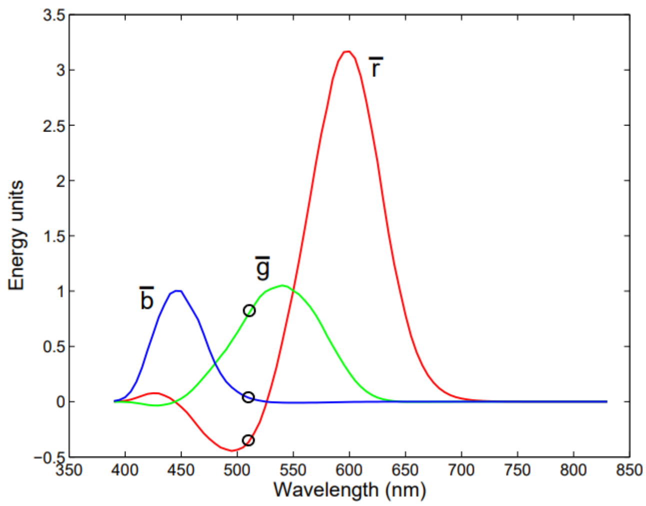
Όλα τα ορατά από τον άνθρωπο χρώματα φαίνονται εντός της χρωματισμένης περιοχής, η οποία παριστάνει όλες τις χρωματικότητες αντιληπτές από τον άνθρωπο και ονομάζεται gamut of human vision (GHV).

Εντός του GHV βρίσκεται το τρίγωνο με κορυφές τα τρία πρωταρχικά χρώματα RGB δηλαδή όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί με προσθετική μίξη των τριών αυτών χρωμάτων αντιστοιχούν σε ένα σημείο-χρώμα εντός του τριγώνου.

Από το σχήμα και μόνο μπορούμε να διαπιστώσουμε πως υπάρχουν χρώματα που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν ως θετικές τιμές RGB.

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να ταιριάξουμε, προσθέτοντας RGB χρώματα, το φασματικό χρώμα κυανό το οποίο βρίσκεται έξω από το τρίγωνο στην αριστερή περιοχή. Για να το πετύχουμε, θα χρειαστεί να προσθέσουμε μπλε (B) και πράσινο(G). Ωστόσο με οποιαδήποτε μίξη των δύο αυτών χρωμάτων, το χρώμα που προκύπτει θα βρίσκεται πάντα εντός του τριγώνου και σε αυτή τη περίπτωση στην αριστερή πλευρά του. Για να 'μετακινηθούμε' αριστερά θα πρέπει επίσης να αφαιρέσουμε και κόκκινο, δηλαδή να κάνουμε αφαιρετικό ταίριασμα. Αυτό είναι ουσιαστικά σαν ένας αποχρωματισμός του κυανού.

Μια άλλη εξήγηση είναι τα συμπληρωματικά χρώματα. Γνωρίζουμε ότι προσθέτοντας δύο συμπληρωματικά χρώματα, προκύπτει το λευκό. Αυτό συνεπάγεται πως δύο συμπληρωματικά χρώματα ισαπέχουν από το σημείο που βρίσκεται το λευκό, σημείο E, δηλαδή τα άκρα μιας ευθείας που περνάει από το σημείο E είναι συμπληρωματικά. Ωστόσο βλέπουμε ότι εντός του τριγώνου κάποια χρώματα δεν έχουν το συμπληρωματικό τους, που σημαίνει ότι βρίσκεται εκτός του τριγώνου δηλαδή έχουμε αφαιρετικό ταίριασμα.



Επίσης, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, για ένα τυχαίο χρώμα, η R συνιστώσα του βρίσκεται κάτω από το μηδέν.

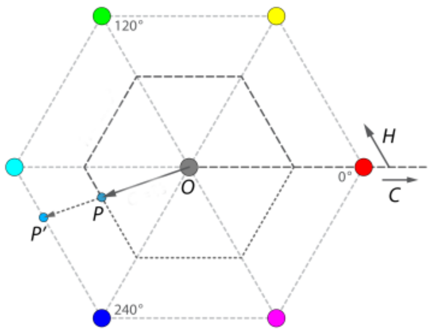
β)(5.12)

a)

Θέλουμε να εκφράσουμε τα (x,y) ως προς τα (R,G,B).

Αρχικά, περιστρέφουμε τον RGB κύβο ώστε η αχρωματική διαγώνιος να συμπέσει με τον z-άξονα ενός συστήματος x,y,z και έτσι προβάλλεται ο κύβος στο χρωματικό επίπεδο (x,y).

Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος, έχουμε:



- $x = R * cos0^o + G * cos120^o + B * cos240^o = R - \frac{1}{2}G - \frac{1}{2}B$
- $y = R * cos90^o + G * \cos(120^o - 90^o) + B * \cos(240^o - 90^o) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}G - \frac{\sqrt{3}}{2}\,B$

Από τα οποία συνεπάγεται πως:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\,(2R - G - B) \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}(G - B \end{cases}$$

b)

Για να αποδείξουμε ότι οι ορισμοί των chroma C_2 και hue H_2 αντιστοιχούν με την ευκλείδεια νόρμα και τη γωνία προβολής του (R,G,B) στο χρωματικό επίπεδο, θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (5.24) και (5.25) του βιβλίου, δηλαδή ότι:

$$C_2 = \sqrt{R^2 + G^2 + B^2 - R * G - R * B - G * B} \qquad (III)$$

$$H_2 = \begin{cases} \cos^{-1}\left[\frac{(2R-G-B}{2*C_2}\right] & G \geq B \\ 360^O - \cos^{-1}\left[\frac{2R-G-B}{2*C_2}\right] & G \leq B \end{cases} \qquad (IV)$$

(III) => $C_2 = \sqrt{R^2 + G^2 + B^2 - R*G - R*B - G*B} =$

$\sqrt{R^2 - R*G - R*B + \frac{G^2}{4} + \frac{2GB}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{3G^2}{4} - \frac{6GB}{4} + \frac{3B^2}{4}} =$

$\sqrt{\frac{1}{4}\left[4R^2 - 4R(G+B) + (G+B)^2 + \frac{3}{4}(G^2 - 2GB + B^2)\right]} =$

$\sqrt{\left[\frac{1}{2}(2R-G-B)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(G-B)\right]^2}$ => $C_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, δηλαδή η Ευκλείδεια νόρμα.

(IV) =>

- G ≥ B:

$H_2 = \theta = \cos^{-1}\left[\frac{2R-G-B}{2C_2}\right]$ =>

$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(2R-G-B)}{C_2}$ και από τα (III),(IV) προκύπτει:

$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ => $cos^2\theta = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ => $x^2 - x^2 cos\theta = y^2 cos^2\theta$ =>

$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1 - cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} = tan^2\theta$ => $tan\theta = \frac{y}{x} = \tan(\theta - \pi)$

Άρα $\theta - \pi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ => $H_2 = \theta = \pi + atan2(\frac{y}{x})$

- G ≤ B:

$H_2 = 360^o - \theta$

και η απόδειξη εν συνεχεία είναι όπως και για G ≥ B και καταλήγει επομένως στην ίδια εξίσωση σχετικά με το hue.

Επομένως: $H_2 = \pi + atan2(\frac{y}{x})$

Άσκηση 1.5

a) $h(x,y) = h_1(x)h_2(y)$

$$(f * h)(x,y) = \iint h(a,b)f(x-a,y-b)dadb = \iint h_1(a)h_2(b)f(x-a,y-b)dadb$$
$$= \int h_2(b)\left[\int f(x-a,y-b)h_1(a)da\right]db$$
$$= \int h_2(b)(f *_1 h_1)(x,y-b)db = [(f *_1 h_1) *_2 h_2](x,y)$$

b) $h(x,y) = h_1(x) + h_2(y)$

$$(f \oplus h)(x,y) = \bigvee_a \bigvee_b h(a,b) + f(x-a,y-b)$$
$$= \bigvee_a \bigvee_b h_1(a) + h_2(b) + f(x-a,y-b)$$
$$= \bigvee_b h_2(b)$$
$$+ (\bigvee_a h_1(a) + f(x-a,y-b))$$
$$= \bigvee_b h_2(b) + (f \oplus_1 h_1)(x,y-b) = [(f \oplus_1 h_1) \oplus_2 h_2](x,y)$$

Άσκηση 1.6

Παρακάτω παραθέτω ως εικόνες από σκαναρισμένο σελίδα πρόχειρου μου τη λύση της άσκησης αυτής καθώς ο χρόνος δεν επέτρεπε τη συγγραφή της στο word.

Άσκηση 1.6

a1) ▸ $X \circ B \overset{\text{opening}}{=} (X \ominus B) \oplus B \overset{\text{erosion}}{=} (X^c \oplus B^s)^c \oplus B$

$$\overset{\text{dilation}}{=} \left[\left((X^c \oplus B^s)^c \right)^c \ominus B^s \right]^c = \left[(X^c \oplus B^s) \ominus B^s \right]^c$$

$$\overset{\text{closing}}{=} (X^c \bullet B^s)^c$$

a2) ▸ $X \ominus B = \bigcap_{y \in B} X_{-y} \Rightarrow X \ominus B \subseteq X$, $0 \in B$

▸ $X \oplus B = \bigcup_{y \in B} X_{+y} \Rightarrow X \oplus B \supseteq X$

▸ $X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B \subseteq X \oplus B$

▸ $X \circ B = (X \ominus B) \oplus B \supseteq X \ominus B$

Άρα $X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B$

(b) b1) $(f \ominus g) \ominus h = f \ominus (g \oplus h)$

Είναι $f \ominus g = \bigwedge_{i \in I} f_i \ominus g_i$ (1) και $\bigwedge_{i \in I} f_i \ominus g_i = (\bigwedge_{i \in I} f_i) \ominus g_i$ (2)

και $f \oplus g = \bigvee_{i \in I} f_i \oplus g_i$ (3)

Άρα $(f \ominus g) \ominus h \overset{(1)}{=} (\bigwedge_i f_i \ominus g_i) \ominus h \overset{(2)}{=} \bigwedge_i f_i \ominus g_i \ominus h$

$$= \bigwedge_i f_i \ominus (\bigvee_i g_i \oplus h_i) = \bigwedge_i f_i \ominus (g \oplus h)$$

$$= f_i \ominus (g \oplus h)$$

bα) $f = f\circ g \overset{\text{opening}}{=} (f\ominus g)\oplus g = h\oplus g$

Αντίστροφα, αν $f = h\oplus g \Rightarrow f\circ g = (h\oplus g)\circ g$

$$\overset{\text{opening}}{=} ((h\oplus g)\ominus g)\oplus g \overset{\text{closing}}{=} (h\bullet g)\oplus g \succeq h\oplus g = f = f\circ g \succeq f \quad (4)$$

αφού $h\bullet g \geq h$

όμως από (φ_2) $f\circ g \leq f$ (5)

Από (4),(5) $\Rightarrow f\circ g = f$

Άρα η διπλή συνεπαγωγή ισχύει μόνο $\exists h$ τ.ω. $f = h\oplus g$

c) $\Phi(x) = X\bullet B = (X\oplus B)\ominus B = \varphi_2(\varphi_1(x))$ (6) όπου $\varphi_1(x) = X\oplus B$ (7)

$\varphi_2(x) = X\ominus B$ (8)

Είναι $\varphi(f)(x) = \sup\{u\in R : x\in\Phi[X_0(f)]\}$

$$\overset{(6)}{=} \sup\{u\in R : x\in\Phi_2[\Phi_1[X_0(f)]]\}$$

$$= \varphi_2(\varphi_1(f))(x)$$

$$\underset{(7)}{\overset{(8)}{=}} (f\oplus B)\ominus B \overset{\text{closing}}{=} f\bullet B$$

d) Είναι $\Phi(x) = X\bullet B = (X\oplus B)\ominus B \underset{\text{erosion}}{\overset{\text{dilation}}{=}} \bigcap_{y\in B} (\cup X_{+y})$

$$= \bigcap_{y\in B} (X_{(0,0)-z} \cup X_{(0,1)-z} \cup X_{(1,0)-z}) \quad \text{όπου } z = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$$

$$= (X_{(0,0)-(0,0)} \cup X_{(0,1)-(0,0)} \cup X_{(1,0)-(0,0)}) \cap (X_{(0,0)-(0,1)} \cup X_{(0,1)-(0,1)} \cup X_{(1,0)-(0,1)})$$

$$\cap (X_{(0,0)-(1,0)} \cup X_{(0,1)-(1,0)} \cup X_{(1,0)-(1,0)})$$

άρα $\beta(u) = (u_{(0,0)} + u_{(0,1)} + u_{(1,0)})\cdot(u_{(0,-1)} + u_{(0,0)} + u_{(1,-1)})\cdot$
$(u_{(-1,0)} + u_{(-1,1)} + u_{(0,0)})$

$= \min\{\max[f(x,y), f(x,y-1), f(x-1,y)], \max[f(x,y+1), f(x,y),$
$f(x-1,y+1)], \max[f(x+1,y), f(x+1,y-1), f(x,y)]\}$

Άσκηση 1.7

a)(10.2)

α)

Εξετάζουμε τη πρώτη περίπτωση όπου δεν υπάρχει θόρυβος στην εικόνα. Τότε θα είναι:

$I[x,y] = k_1 + k_2x + k_3y$

Οι τιμές της εικόνας στο παράθυρο $\{-1,0,1\}^2$ είναι:

$k_1 - k_2 - k_3$ I[-1,-1]	$k_1 - k_3$ I[0,-1]	$k_1+k_2-k_3$ I[1,-1]
$k_1 - k_2$ I[-1,0]	k_1 I[0,0]	k_1+k_2 I[1,0]
$k_1 - k_2 + k_3$ I[-1,1]	$k_1 + k_3$ I[0,1]	$k_1+k_2+k_3$ I[1,1]

Το gradient της εικόνας στη κατεύθυνση του x θα είναι:

$g_x = k_1 - (k_1 - k_2) = k_1 - k_1 + k_2 = k_2$

και αντίστοιχα στη κατεύθυνση του y θα είναι:

$g_y = k_1 - (k_1 - k_3) = k_1 - k_1 + k_3 = k_3$

Άρα το μέτρο του gradient της εικόνας θα είναι $g_{MAGNITUDE} = \sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}$ [1]

Συνελίσσοντας την εικόνα με τις μάσκες

a	0	$-a$
b	0	$-b$
a	0	$-a$

$-a$	$-b$	$-a$
0	0	0
a	b	a

για να πάρουμε τις προσεγγίσεις των παραγώγων προκύπτει:

$g_x = a(k_1 - k_2 - k_3) + b(k_1 - k_2) + a(k_1 - k_2 + k_3) - a(k_1 + k_2 - k_3) - b(k_1 + k_2) - a(k_1 + k_2 + k_3) = -2k_2(2a+b)$

$g_y = -a(k_1-k_2-k_3) - b(k_1-k_3) - a(k_1+k_2-k_3) + a(k_1-k_2+k_3) + b(k_1+k_3) + a(k_1+k_2+k_3) = 2k_3(2a+b)$

Το μέτρο του gradient στο θα είναι:

$$g_{magnitude} = \sqrt{{g_x}^2 + {g_y}^2} = \sqrt{\left(-2k_2(2a+b)\right)^2 + \left(2k_3(2a+b)\right)^2} =$$

$$2(2a+b)\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2} \quad [2]$$

Επομένως για να είναι [1] και [2] ίσα θα πρέπει $2(2a+b) = 1 \Rightarrow 2a+b = ½$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2} - 2a$

β)

Εξετάζουμε τώρα τη περίπτωση όπου υπάρχει η παρουσία θορύβου στην εικόνα. Τότε, θα είναι: $I[x,y] = k_1 + k_2x + k_3y + w[x,y]$

Τώρα, τα pixel της εικόνας θα είναι:

$k_1 - k_2 - k_3 + w(-1,1)$	$k_1 - k_3 + w(0,-1)$	$k_1 + k_2 - k_3 + w(1,-1)$
$k_1 - k_2 + w(-1,0)$	$k_1 + w(0,0)$	$k_1 + k_2 + w(1,0)$
$k_1 - k_2 + k_3 + w(-1,-1)$	$k_1 + k_3 + w(0,1)$	$k_1 + k_2 + k_3 + w(1,1)$

Επομένως, το g_x θα έχει τώρα τη τιμή:

$g_x = a(k_1-k_2-k_3+w(-1,-1)) + b(k_1-k_2+w(-1,0)) + a(k_1-k_2+k_3+w(-1,1)) - a(k_1+k_2-k_3+w(1,-1)) - b(k_1+k_2+w(1,0)) - a(k_1+k_2+k_3+w(1,1))$

$= -2k_2(2a + b) + a(w(-1,-1) + w(-1,1) - w(1,-1) - w(1,1)) + b(w(-1,0) - w(1,0))$

Ισχύει ότι $Var(x) = E[(X-\mu)^2]$ για μια τυχαία μεταβλητή X, δηλαδή η διακύμανση της X ισούται με την εκτιμώμενη τιμή της τετραγωνικής διαφοράς από τη μέση τιμή της.

Ορίζουμε στη θέση της τυχαίας μεταβλητής X την $g_x[0,0]$

Επειδή ο θόρυβος w[x,y] έχει μέση τιμή 0 θα είναι $\mu = -2k_2(2a+b) + a(0+0-0-0) + b(0-0) = -2k_2(2a+b)$ που είναι η μέση τιμή της $g_x[0,0]$.

Οπότε θα είναι

$Var(g_x[0,0]) = E[(g_x[0,0]-\mu)^2] = E[(-a(w(-1,-1)+w(-1,1)-w(1,-1)-w(1,1)-b[w(-1,0)-w(1,0)])^2]$

$= E[a^2(w(-1,-1)+w(-1,1)-w(1,-1)-w(1,1))^2 + 2ab(w(-1,-1)+w(-1,1)-w(1,-1)-w(1,1))\,(w(-1,0)-w(1,0)) + \ b^2(w(-1,0)-w(1,0)^2]$

Προωθώντας μέσα το τελεστή E και επεκτείνοντας τους τετραγωνικούς όρους προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
a^2(&E[w^2(-1,1)] + 2E[w(-1,-1)w(-1,1)] - 2E[w(-1,-1)w(1,-1)] \\
&- 2E[w(-1,-1)w(1,1)] + E[w^2(-1,1)] - 2E[w(-1,1)w(1,-1)] \\
&- 2E[w(-1,1)w(1,1)] + E[w^2(1,-1)] + 2E[w(1,-1)w(1,1)] \\
&+ E[w^2(1,1)]) \\
&+ 2ab(E[w(-1,1)w(-1,0)] + E[w(-1,1)w(-1,0)] \\
&- E[w(1,-1)w(-1,0)] - E[w(1,1)w(-1,0)] - E[w(1,0)w(-1,1)] \\
&- E[w(-1,1)w(1,0)] + E[w(1,-1)w(1,0)] + E[w(1,1)w(1,0)]) \\
&+ \ b^2(E[w^2(-1,0)] - 2E[w(-1,0)w(1,0)] + E[w^2(1,0)])
\end{aligned}
$$

$a^2(\sigma^2 + 2*0 - 2*0 - 2*0 + \sigma^2 - 2*0 - 2*0 + \sigma^2 + 2*0 + 6^2) + 2ab*0 + b^2(\sigma^2 - 2*0 + \sigma^2) = 4a^2\sigma^2 + 2b^2\sigma^2 \Rightarrow Var[g_x[0,0]] = 2\sigma^2(2\alpha^2 + b^2)$

και επειδή όπως έχει αποδειχθεί ισχύει: $b = \frac{1}{2} - 2a$ τότε:

$$Var[g_x[0,0]] = 2\sigma^2\left(2\alpha^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right)^2\right) = \sigma^2(12a^2 - 4a + \frac{1}{2}$$

Η $Var[g_x[0,0]]$ ελαχιστοποιείται όταν ελαχιστοποιείται και ο συντελεστής ($12a^2$ -4a + ½).

Παίρνουμε τη παράγωγο αυτού το συντελεστή ως προς a και το εξισώνουμε με το μηδέν για να βρούμε που ελαχιστοποιείται

$24a - 4 = 0 \Rightarrow 24a = 4 \Rightarrow a = 1/6$

Άρα προκύπτει ότι b = ½ - 2*1/6 = 1/6

Επομένως οι μάσκες είναι οι εξής:

1/6	0	-1/6
1/6	0	-1/6
1/6	0	-1/6

-1/6	-1/6	-1/6
0	0	0
1/6	1/6	1/6

Και αν βγάλουμε μπροστά τον παράγοντα 1/6 παρατηρούμε πως οι μάσκες είναι πολλαπλάσιες των Prewitt μασκών κατά 1/6.

b)

α)

Γνωρίζουμε ότι $G\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * \exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} * \exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})$

Και ότι η $LoG = \frac{d^2G\sigma}{dx^2} = \left(\frac{x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^4}\right)G\sigma$

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια σχέση ανάμεσα στη Gaussian και τη LoG

Αρχικά λογαριθμίζουμε και στη συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς το $2\sigma^2$

$$\ln G\sigma = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\right) => \ln G\sigma = -\ln\left(\sqrt{2\sigma^2}\right) - \ln\left(\sqrt{\pi}\right) - \frac{x^2}{2\sigma^2}$$

$$=> \frac{1}{G\sigma}\frac{dG\sigma}{d(2\sigma^2)} = -\frac{1}{4\sigma^2} + \frac{x^2}{(2\sigma^2)^2} => \frac{1}{G\sigma}\frac{dG\sigma}{d(2\sigma^2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right) => \frac{dG\sigma}{d(2\sigma^2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right)G\sigma$$

$$=> \frac{dG\sigma}{d(2\sigma^2)} = \frac{1}{4}LoG$$

Δηλαδή έχουμε φτάσει σε μια σχέση ανάμεσα στη μεταβολή της Γκαουσιανής ως προς τη παράμετρο της κλίμακας και τη LoG

Δηλαδή $\frac{1}{4}LoG = \lim_{h\to 0}\frac{G(x,\sigma^2+h)-G(x,\sigma^2)}{h}$ δηλαδή το όριο μια Γκαουσιανής μείον μια άλλη Γκαουσιανή μικρότερης κλίμακας όταν η διαφορά τους τείνει στο μηδέν ισούται με τη LoG, $LoG = G\sigma_1 - G\sigma_2$ όταν $\sigma_1 - \sigma_2 \to 0$

β)

Ο μετασχηματισμός Fourier της Γκαουσιανής είναι $G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$ και αντίστοιχα ο μετ.Fourier της LoG προκύπτει εύκολα πως είναι $F[LoG] = -\omega^2 G(\omega)$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτή στο προηγούμενο ερώτημα, δηλαδή πρώτα λογαριθμήζουμε και στη συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς $2\sigma^2$

$$lnG(\omega) = \ln\left(e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}\right) \Rightarrow lnG(\omega) = -\frac{\omega^2\sigma^2}{2}$$

Έστω $u = 2\sigma^2$, τότε $\sigma^2 = u/2$,άρα γίνεται:

$$lnG(\omega) = -\frac{\omega^2\frac{u}{2}}{2} = -\frac{\omega^2 u}{4}$$

Παραγώγιση ως προς $2\sigma^2$:

$$\frac{1}{G}\frac{dG}{du} = -\frac{\omega^2}{4} \Rightarrow \frac{dG}{du} = -\frac{1}{4}\omega^2 G = \frac{1}{4}F\{LoG\}$$

Επομένως και στο χώρο της συχνότητας καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα