

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εαρινό εξάμηνο 2022-23



Όραση Υπολογιστών

2ο Σύνολο Αναλυτ. Ασκήσεων

Δημήτριος Κοκκίνης

03118896

dimkok00@gmail.com

Άσκηση 2.7 (Ανάλυση Σχήματος με Μετ/σμό Απόστασης και Σκελετό)

(a)

$$X = \begin{array}{cccccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} = B^s.$$

Chamfer Distance $(a, b) = (1, +\infty)$

$u_0 \ (+ = +\infty)$											u_1											u_2											
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	1	2	2	2	2	2	2	1	0	
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	0	0	1	2	3	3	3	3	3	2	1	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	0	0	1	2	2	2	3	2	2	2	1	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	0	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Παρακάτω, ο σκελετός είναι το partial union of skeleton subsets για $n = 0$

Skeleton

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$X \ominus nB$			
$S_n(X)$			
$\bigcup_{k \geq n} S_k$			
$X \odot nB$			

skeleton
→

(c)

Τα σημεία τοπικού μεγίστου του μετασχηματισμού απόστασης με βάση τη γειτονιά B, φαίνονται παρακάτω. Βλέπουμε πως ταυτίζονται με τα σημεία σκελετού.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	3	3	3	2	1	0
0	1	2	2	2	3	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Άσκηση 2.2 (Σχήμα - Καμπυλότητα)

(a)

Οι νέες συντεταγμένες που θα προκύψουν μετά τη περιστροφή της καμπύλης κατά γωνία θ ως προς τον x-άξονα θα είναι:

$$x_2(t) = \cos\theta x(t) - \sin\theta y(t)$$

$$y_2(t) = \sin\theta x(t) + \cos\theta y(t)$$

Οπότε το διάνυσμα θέσης πλέον θα είναι

$$C(p) = (\cos\theta x(t) - \sin\theta y(t), \sin\theta x(t) + \cos\theta y(t))$$

Η ταχύτητα σάρωσης θα γίνει:

$$v_2(p) = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{(\cos\theta x - \sin\theta y)^2 + (\sin\theta x + \cos\theta y)^2} = \sqrt{(x'(p))^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (y'(p))^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = \sqrt{(x'(p))^2 + (y'(p))^2} = v_1(p)$$

Η καμπυλότητα θα γίνει:

$$\kappa_2(p) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{x_2' y_2'' - x_2'' y_2'}{v^3} = \frac{(x' \cos\theta - y' \sin\theta)(x'' \sin\theta + y'' \cos\theta) - (x' \sin\theta + y' \cos\theta)(x'' \cos\theta - y'' \sin\theta)}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$$

$$\text{Άρα } \kappa_2(p) = \kappa(p)$$

Επομένως η καμπυλότητα δεν αλλάζει με τη περιστροφή της καμπύλης κατά θ , αναμενόμενο εφόσον οι σχέσεις μεταξύ των σημείων της δεν αλλάζουν.

(b)

Αντίστοιχα, κατά τη μετατόπιση παράλληλα με διάνυσμα $v = (v_1, v_2)$ οι νέες συντεταγμένες των σημείων θα είναι

$$x_2(t) = x(t) + v_1$$

$$y_2(t) = y(t) + v_2$$

όποτε με παραγωγήφιση φεύγουν οι όροι v_1, v_2 έτσι η ταχύτητα σάρωσης και η γωνία του μοναδιαίου εφαπτομενικού διανύσματος με τον x-άξονα παραμένουν, ίδια με αποτέλεσμα και η καμπυλότητα να ταυτίζεται με την αρχική.

Άσκηση 2.4 (Ενεργές Καμπύλες)

Έστω μια κλειστή ομαλή καμπύλη, παραμετροποιημένη από $\vec{C}(p) = (x(p), y(p))$.

Το μήκος της καμπύλης αυτής θα είναι $L(C) = \int_0^1 \sqrt{x_p^2 + y_p^2} dp$ όπου το x_p δηλώνει τη παράγωγο του x ως προς p .

Παρατηρούμε πως ο όρος $\int_0^1 \sqrt{x_p^2 + y_p^2} dp$ είναι ένα συναρτησιακό (functional) το οποίο έχει ως εισόδους x_p και y_p και ως έξοδο την απόσταση τους.

Προσπαθώντας να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος αυτό καταλήγουμε σε ένα κλασικό πρόβλημα βελτιστοποίησης (optimization) όπου ψάχνουμε να βρούμε τη συνάρτηση u η οποία ελαχιστοποιεί το $L(C)$. Η συνάρτηση που ψάχνουμε σύμφωνα με το μεταβολικό λογισμό θα πρέπει να ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις:

$$F_x - \frac{d}{dp} F_{x'} = 0 \quad \text{και} \quad F_y - \frac{d}{dp} F_{y'} = 0$$

Δηλαδή $[F]_p = 0$ εφόσον θέλουμε ελαχιστοποίηση.

Έχουμε:

$$F_x - \frac{d}{dp} F_{x'} = - \frac{d}{dp} F_{x'}, \quad \text{καθώς ο πρώτος όρος μηδενίζεται ως σταθερός}$$

Συνεχίζοντας:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dp}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) &= -\frac{x''\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right) - x'\left(\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)'\right)}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^2} \\
 &= -\frac{x''\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'\left(\frac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^2} = \\
 &= -\frac{\frac{x''(x'^2 + y'^2) - x'(x'x'' + y'y'')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{x'^2 + y'^2} = -\frac{x''y'^2 - x'y'y''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \frac{y'(x'y'' - x''y')}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \kappa y'
 \end{aligned}$$

Όπου κ η καμπυλότητα της καμπύλης.

Αντίστοιχα για τη δεύτερη δ.ε έχουμε:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dp}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) &= -\frac{y''\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right) - \frac{y'(x'x'' + y'y'')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{x'^2 + y'^2} = \\
 &= -\frac{y''x'^2 + y''y'^2 - y'x'x'' - y'^2y''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x'(x'y'' - x''y')}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\kappa x'
 \end{aligned}$$

Επομένως οι εξισώσεις

$$F_x - \frac{d}{dp}F_{x'} = 0 \quad \text{και} \quad F_y - \frac{d}{dp}F_{y'} = 0$$

Έχουν γίνει: $xy' = 0$ και $-xx' = 0$ (1),(2)

Επομένως, θεωρώντας την καμπύλη $\vec{C}(p) = (x(p), y(p))$ η οποία εξελίσσεται στο χρόνο και $C(p,0) = C_0(p)$ το αρχικό της σχήμα τότε η ροή gradient descent με βάση τις εξισώσεις (1),(2) αντιστοιχεί με τη σχέση εξέλιξης της καμπύλης $\vec{C}_t = -\kappa \vec{N}_0$.

Αυτό σημαίνει πως η εξάπλωση καμπύλης από μέσω της καμπυλότητάς της αντιστοιχεί στη ροή που ελαχιστοποιεί το μήκος της στο ταχύτερο ρυθμό.

Άσκηση 2.3 (Ανάλυση Υφής με ενεργειακά μοντέλα)

Εφόσον γνωρίζουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος της g τότε εύκολα εξάγουμε το πλάτος και τις στιγμιαίες συχνότητες ως:

$$A = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) = \arctan\left(\frac{g_2}{g_1}\right)$$

Οι στιγμιαίες συχνότητες θα είναι το $\nabla\varphi(x,y)$. Επομένως η διαδικασία υπολογισμού είναι η εξής:

- Παίρνουμε τις εξόδους των quadrature φίλτρων οι οποίες αντιστοιχούν στο φανταστικό g_2 και πραγματικό μέρος g_1 της g .
- Για το πλάτος, τετραγωνίζουμε τα g_1 και g_2 (πολλαπλασιαστής) και τα αθροίζουμε (αθροιστής) και λαμβάνουμε ως έξοδο τη ρίζα αυτού του αθροίσματος (αποτετραγωνισμός)
- Για τις στιγμιαίες συχνότητες, αντιστρέφουμε το g_1 και το πολλαπλασιάζουμε με το g_2 και περνάμε το αποτέλεσμα από ένα τελεστή \arctan που έχει ως έξοδο τη φάση του g . Στη συνέχεια χωρίζουμε τις εξόδους και τις περνάμε από τελεστές παραγωγής ώστε να λάβουμε τις στιγμιαίες συχνότητες.

Άσκηση 2.5 ($3\Delta \rightarrow 2\Delta$ Κίνηση)

Η ταχύτητα του σημείου στο τρισδιάστατο χώρο είναι

$$\frac{dp}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = -T - \Omega xP$$

Όπου T είναι η ταχύτητα λόγω μετατόπισης και Ω η ταχύτητα λόγω περιστροφής και

$\dot{X} \dot{Y} \dot{Z}$ οι χρονικοί παράγωγοι των X, Y, Z συντεταγμένων θέσης στο 3Δ χώρο.

Θεωρώντας ως $T = (U, V, W)^T$ και $\Omega = (A, B, C)^T$ τις ταχύτητες μετατόπισης και περιστροφής σε κάθε άξονα αντίστοιχα, παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης του σημείου στον 3Δ χώρο.

$$\dot{X} = -U - BZ + CY$$

$$\dot{Y} = -V - CX + AZ$$

$$\dot{Z} = -W - AY + BX$$

Λόγω προοπτικής προβολής, οι συντεταγμένες της προβολής του σημείου στο επίπεδο της εικόνας θα σχετίζονται με τις συντεταγμένες στον 3δ χώρο ως εξής:

$$x = f \frac{X}{Z} \quad y = f \frac{Y}{Z}$$

και θα έχει διάνυσμα ταχύτητας (u, v) όπου

$$u = \frac{dx}{dt} = f \frac{\dot{X}}{Z} - f \frac{X\dot{Z}}{Z^2}, \quad v = \frac{dy}{dt} = f \frac{\dot{Y}}{Z} - f \frac{Y\dot{Z}}{Z^2}$$

υποθέτοντας απόσταση του σημείου από το προοπτικό κέντρο $f = 1$, έχουμε:

$$u = \frac{xW - U}{Z} + Axy - B(x^2 + 1) + Cy$$

$$v = \underbrace{\frac{yW - V}{Z}}_{\text{}} - \underbrace{A(y^2 + 1) - Bxy - Cx}_{\text{}}$$

Στις εξισώσεις αυτές ο πρώτος όρος αναφέρεται στη μετατόπιση και ο δεύτερος όρος στη περιστροφή. Εφόσον έχουμε απλή μεταφορική κίνηση ο δεύτερος όρος θα είναι μηδέν. Οπότε:

$$u = \frac{xW - U}{Z} \Rightarrow x' = Ax \quad \text{όπου} \quad A = \frac{W - U}{Z}$$

$$v = \frac{yW - V}{Z} \Rightarrow y' = By \text{ όπου } B = \frac{W - V}{Z}$$

Επομένως το σημείου κινείται σε μια ευθεία γραμμή.

Άσκηση 2.6 (Προβολική Γεωμετρία)

(P)

Θεωρούμε κωνική τομή με εξίσωση $x^T C_1 x = 0$ (1) και τον αφινικού μετασχηματισμό της $x' = H_A x \Rightarrow x = H_A^{-1} x'$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι $x'^T \underbrace{H_A^{-T} C_1 H_A^{-1}}_{C_2} x = 0$ (3)

Για το είδος των κωνικών τομών C_1 και C_2 μας ενδιαφέρουν τα στοιχεία $C_1[0:2][0:2]$ και $C_2[0:2][0:2]$. Είναι:

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{|H|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} & a_{12}t_y - a_{12}t_x \\ -a_{21} & a_{11} & a_{11}t_y - a_{21}t_x \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

Γράφοντας σε απλούστερη μορφή προκύπτει:

$$HA^{-1} = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C_1 = \begin{bmatrix} Q & b \\ b^T & f \end{bmatrix}$$

$$C_2 = H_A^{-1} C_1 H_A^{-1} = \begin{bmatrix} A^T Q A & A^T (Q t + b) \\ (Q t + b)^T A & X \end{bmatrix}$$

Άρα $C_2[0:2][0:2] = A^T Q A$. Υπολογίζοντας, έχουμε:

$$A^T Q A = \begin{bmatrix} a_{22}^2 a - a_{22} a_{21} b + a_{21}^2 c & -a_{12} a_{22} a + \frac{1}{2(a_{21} a_{12} + a_{11} a_{22})} b - a_{11} a_{21} c \\ -a_{12} a_{22} a + \frac{1}{2(a_{21} a_{12} + a_{11} a_{22})} b - a_{11} a_{21} c & a_{12}^2 a - a_{12} a_{11} b + a_{11}^2 c \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε πως ο πίνακας C_2 είναι συμμετρικός.

Μετασχηματισμός κύκλου σε έλλειψη:

Για να αντιπροσωπεύει ο C_1 κύκλο πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} b^2 - 4ac < 0 \\ a = c \\ b = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} ac > 0 \\ a = c \\ b = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = c \neq 0 \\ b = 0 \end{array}$$

Οπότε με αυτά τα δεδομένα προκύπτει ότι

$$A^T Q A = \begin{bmatrix} \alpha(a_{22}^2 + a_{21}^2) & -\alpha(a_{12} a_{22} + a_{11} a_{21}) \\ -\alpha(a_{12} a_{22} + a_{11} a_{21}) & \alpha(a_{12}^2 + a_{11}^2) \end{bmatrix}$$

Για να αντιπροσωπεύει η C_2 κύκλο, πρέπει $b^2 - 4ac < 0$

$$\Rightarrow [-2a(a_{12} a_{22} + a_{11} a_{21})]^2 - 4a^2(a_{22}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{11}^2) < 0$$

$\Rightarrow (a_{22} a_{11} - a_{21} a_{12})^2 > 0 \Rightarrow \det(H_A) \neq 0$ που ισχύει καθώς ο H είναι non-singular, επομένως ο κύκλος μπορεί να μετασχηματιστεί σε έλλειψη μέσω αφινικού μετασχηματισμού.

Μετασχηματισμός έλλειψης σε υπερβολή/παραβολή:

Αντίστοιχα για να αντιπροσωπεύει ο C_1 έλλειψη, πρέπει $b^2 - 4ac < 0$ και για να αντιπροσωπεύει υπερβολή/παραβολή ο C_2 πρέπει:

$$[-2a a_{12} a_{22} + (a_{22} a_{11} + a_{21} a_{12})b - 2a_{11} a_{21} c]^2 - 4(a_{22}^2 a - a_{22} a_{21} + a_{21}^2 c)(a_{12}^2 a - a_{12} a_{11} b + a_{11}^2 c) \geq 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})^2 b^2 - 4(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})^2 ac \geq 0$$

$\Rightarrow [\det(H_A)]^2 (b^2 - 4ac) \geq 0$ και επειδή η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός θα έχουμε: $(b^2 - 4ac) \geq 0$ που είναι άτοπο καθώς απαιτούμε η C_1 να αντιπροσωπεύει έλλειψη.

Επομένως η έλλειψη δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε υπερβολή ή υπερβολή μέσω αφινικού μετασχηματισμού.

(T)

Είναι $P = [M|p_4]:(3 \times 4)$

Ο πίνακας P είναι αντιστοίχιση από τις 3 στις 4 διαστάσεις, γι' αυτό θα έχει έναν μονοδιάστατο μηδενικό χώρο. Δηλαδή $\exists \vec{C} \in \mathbb{R}^4: P\vec{C} = 0$

Θεωρούμε την ευθεία l που ορίζεται από το \vec{C} κι ένα αυθαίρετο σημείο \vec{Q} . Ως γνωστόν, κάθε σημείο της l μπορεί να γραφεί ως:

$$x = \vec{C} + \lambda \vec{Q}$$

Μέσω του πίνακα P απεικονίζουμε τα σημεία της l στα σημεία y

$$y = Px = P(\vec{C} + \lambda \vec{Q}) = P\vec{C} + \lambda P\vec{Q} = \lambda P\vec{Q} \Rightarrow y = \lambda P\vec{Q}$$

Οι ομογενείς συντεταγμένες, μας εξασφαλίζουν πως κάθε σημείο της ευθείας l απεικονίζεται μέσω του P σε ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου της εικόνας. Αυτό μπορεί να ισχύει βέβαια μόνο όταν η κάμερα βρίσκεται στο σημείο \vec{C} λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος.

Πεπερασμένη κάμερα:

$$\det M \neq 0$$

$$P\vec{C} = \vec{0} \Rightarrow [M_{3 \times 3} | P_{3 \times 1}] \begin{bmatrix} C_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow C_{3 \times 1} = -M^{-1}_{3 \times 3} P_{3 \times 1} \Rightarrow \vec{C} = \begin{bmatrix} -M^{-1} P_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Κάμερα στο άπειρο: $\det M = 0$

$$\text{Θα είναι } \vec{C} = \begin{bmatrix} C_{3 \times 1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P\vec{C} = \vec{0} \Rightarrow [M|P_4] \begin{bmatrix} C_{3 \times 1} \\ 0 \end{bmatrix} = MC_{3 \times 1} = \vec{0} \Rightarrow MC_{3 \times 1} = \vec{0}$$

Ο M έχει $\det(M) = 0$ άρα έχει τουλάχιστον ένα 1Δ μηδενικό χώρο και υπάρχει $C_{3 \times 1}$ τέτοιο ώστε $MC_{3 \times 1} = \vec{0}$

Για τον δοθέντα P:

$$\det(M) = 2 * \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} - 6 * \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Για να βρούμε το $C_{3 \times 1}$

$$MC_{3 \times 1} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 6 \\ 10 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \lambda(-2/9) \\ C_2 = \lambda(-10/9) \\ C_3 = \lambda 1 \end{cases}$$

Επιλέγοντας $\lambda = -9$, το κέντρο της κάμερας είναι:

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Φ)

Τα principal points x_1 και x_2 των επιπέδων των εικόνων συνδέονται ως εξής:

$$x_2^t F x_1 = 0$$

Από την εκφώνηση έχουμε $x_1 = x_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$

$$\text{Άρα } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [F_{31} \ F_{32} \ F_{33}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{33} = 0$$

Άσκηση 2.1 (ΜΔΕ Ανάλυσης σε Πολλαπλές Κλίμακες)

Η $u(x,y,t)$ προκύπτει από τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση διάχυσης θερμότητας

$$\frac{du}{dt} = \|\nabla u\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)$$

Η μερική αυτή διαφορική εξίσωση, μοντελοποιεί τη μη γραμμική ανισοτροπική διάχυση, διαχέοντας το u μόνο κατά την ορθογώνια κατεύθυνση του ∇u , ομαλοποιεί έτσι την εικόνα κατευθυντικά χωρίς να αμβλύνει τις ισχυρές αιχμές της. Εξελίσσοντας τη συνάρτηση χώρου κλίμακας σύμφωνα με τη διαφορική αυτή εξίσωση, τα επιπεδοσύνολά της εξαπλώνονται με κανονική ταχύτητα ίση με τη καμπυλότητά τους.

Αναπτύσσουμε τη δ.ε και παίρνουμε:

$$\frac{du}{dt} = \|\nabla u\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2} \operatorname{div} \left(\frac{\left[\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right]}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2}} \right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2} \left[\frac{\frac{d^2u}{dx^2} \left(\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2} \right) - \frac{du}{dx} \left(\frac{2 \frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dx^2}}{2 \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2}} \right) + \frac{d^2u}{dy^2} \left(\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2} \right) - \frac{du}{dy} \left(\frac{2 \frac{du}{dy} \frac{d^2u}{dy^2}}{2 \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2}} \right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2} \right]$$

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{d^2u}{dy^2} + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \frac{d^2u}{dx^2}}{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2} = \frac{u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx}}{u_x^2 + u_y^2}$$

Παρατηρούμε την ομοιότητα με την εξίσωση της καμπυλότητας μια επίπεδης ομαλής καμπύλης.

Έστω ξ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη κατεύθυνση του grad .

$$\xi = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$$

Τότε θα είναι:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{u_{xx}\sqrt{u_x^2 + u_y^2} - u_x \frac{2u_x u_{xx}}{2\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} + u_{yy}\sqrt{u_x^2 + u_y^2} - u_y \frac{2u_y u_{yy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}}{u_x^2 + u_y^2}$$

Η οποία καταλήγει στη σχέση:

$$\frac{u_{yy}u_x^2 + u_{xx}u_y^2}{u_x^2 + u_y^2}$$

Δηλαδή, όπως βλέπουμε:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{d\xi^2}$$