

Mecánica orbital

Franco Di Leo

February 26, 2025

Abstract

En este trabajo, pretendo hacer una breve introducción a la mecánica orbital analizando distintos tipos de trayectorias que puede realizar un satélite bajo la acción de fuerzas centrales y algunas perturbaciones. Partiré del caso más simple, una trayectoria circular, para luego adentrarme en movimientos elípticos y perturbaciones.

Si bien este trabajo será introductorio, en algunos casos resolveré los problemas mediante la formulación Lagrangiana utilizando el principio de acción mínima. Las ecuaciones diferenciales serán complejas de resolver por lo que usaré Python para dar con aproximaciones numéricas, modelar las trayectorias y los efectos que tienen diferentes perturbaciones sobre nuestro satélite.

Este es un trabajo con fines de aprendizaje por lo que cualquier comentario es más que bienvenido.

1 Introducción

En ciencias físicas, una órbita es una trayectoria que describe un objeto alrededor de otro mientras está bajo la influencia de una fuerza central (en nuestro caso, la gravitatoria).

Cuando un objeto orbita sobre otro, el **periastro** es el punto en el que los dos objetos se encuentran más próximos el uno al otro. Mientras que el **apoaastro** es el punto donde se encuentran más lejos.

Las trayectorias que puede seguir un cuerpo bajo la influencia de la gravedad dependen de la energía orbital total del sistema y se describen mediante cónicas. Los tipos de movimientos, en general, son:

- Circulares
- Elípticos
- Parabólicos
- Hiperbólicos

Los últimos 2 no serán caso de estudio ya que en general aplican a cometas.

2 Fuerzas centrales

Una fuerza central es una fuerza que está dirigida a lo largo de una recta a un centro fijo cuya magnitud solo depende de la coordenada radial r .

$$\mathbf{F} = F(r)\hat{r} \tag{1}$$

Los ejemplos más comunes de fuerzas centrales son:

- La fuerza gravitatoria
- La fuerza electrostática

Donde \hat{r} es un vector unitario dirigido radialmente desde el origen. En este contexto, el vector fuerza siempre es paralelo al vector posición. El origen creador de la fuerza se denomina centro de movimiento.

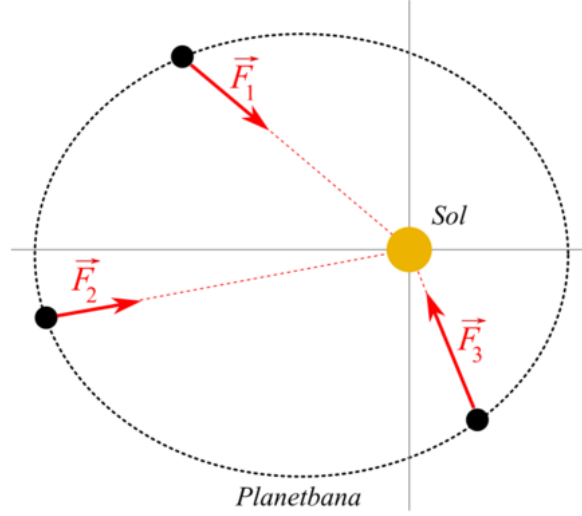


Figure 1: Fuerza central gravitatoria ejercida por el sol sobre un cuerpo (rojo) en una trayectoria elíptica con el sol en un foco.

2.1 Propiedades de interés

Una fuerza central siempre es conservativa, es decir, el trabajo total realizado por el campo de fuerzas sobre una partícula en una trayectoria cerrada, es nulo. Además, las fuerzas conservativas pueden expresarse como:

$$F(r) = -\nabla V(r) \quad (2)$$

Un dato que será bastante útil en este análisis es la conservación del momento angular del sistema.

$$\begin{aligned} L &= r \times \bar{p} \\ L &= r \times m\dot{r} \\ \frac{dL}{dt} &= d\left(\frac{r \times m\dot{r}}{dt}\right) \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{dr}{dt} \times m\dot{r} + r \times m\ddot{r} \end{aligned}$$

El primer término resulta 0 por ser producto vectorial entre vectores paralelos, resultando así:

$$\frac{dL}{dt} = r \times m\ddot{r}$$

Y como ya hablamos, en un sistema de fuerzas centrales, la fuerza siempre es paralela al radio vector posición. Por lo tanto:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad (3)$$

En ausencia de fuerzas exteriores, el momento angular bajo la acción de una fuerza central, se conserva respecto al centro de fuerzas. Como consecuencia, el movimiento resulta plano.

2.2 Conservación de la energía mecánica

Esta ley será de suma utilidad en nuestros futuros análisis. Esta afirma que la cantidad total de energía en cualquier sistema físico aislado (sin interacción con otros sistemas o en ausencia de fuerzas exteriores) es invariable en el tiempo. Esto, por supuesto, no colisiona con el primer principio de la termodinámica, más bien, la energía se transforma en otras formas de energía. En particular nos interesará la energía cinética y potencial (gravitatoria).

$E = T + V$ será una constante de movimiento independiente del tiempo. Solo dependerá de las condiciones iniciales.

Consideremos un movimiento de un cuerpo puntual bajo la acción de una fuerza \vec{f} sobre una trayectoria plana cualquiera. Descomponemos esta fuerza según una componente tangencial y una normal a dicha trayectoria. La componente normal de la fuerza \vec{f}_n es responsable de la aceleración centripeta (variación de dirección de la velocidad).

La componente tangencial de la fuerza \vec{f}_t es responsable de la variación del módulo de la velocidad (aceleración tangencial). Llamaremos ds al desplazamiento de nuestro punto material sobre la curva.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

Por lo que:

$$\frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_0} = \int_{P_0} \vec{f}_t ds$$

Integrando sobre la trayectoria entre dos puntos obtenemos:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = T - T_0 = \int_{P_0}^P \vec{f}_t ds = W$$

Sabemos que el trabajo de una fuerza \vec{f} a lo largo de una curva será:

$$W = \int_{P_0}^P \vec{f}_t ds \tag{4}$$

$$W = \int_{P_0}^P (\vec{f}_x dx + \vec{f}_y dy + \vec{f}_z dz)$$

\vec{f} no dependerá explícitamente del tiempo, sino sólo de la posición, esto quiere decir que \vec{f} será un campo de fuerzas por lo que W no depende del camino seguido por el cuerpo a lo largo de la trayectoria.

Si consideremo el movimiento a lo largo de una línea recta radial hacia o, desde la masa M el vector \vec{ds} estará alineado con \vec{r} .

$$W = \int_{P_0}^P \vec{f} ds$$

$$\vec{f} ds = \vec{f} dr \cos(0) = \vec{f} dr$$

$$\int_{r_0}^r \vec{f} dr = -GMm \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = -\left[\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r_0} \right]$$

El signo negativo del potencial indica que la fuerza gravitatoria es atractiva.

3 Introducción a la mecánica de Lagrange

La *mecánica de Lagrange* es un enfoque reformulado de la mecánica clásica que permite analizar sistemas físicos utilizando el principio de mínima acción. Esta formulación fue desarrollada por Joseph Louis Lagrange a finales del siglo XVIII y es una extensión del formalismo de Newton.

En lugar de describir el movimiento de un sistema mediante las fuerzas actuantes y las leyes de Newton, la mecánica de Lagrange se basa en el concepto de energía cinética y potencial. La idea central es la formulación de las *ecuaciones de Lagrange*, que son ecuaciones diferenciales que describen cómo evoluciona un sistema físico a lo largo del tiempo.

3.1 El Lagrangiano

El Lagrangiano L de un sistema es una función que se define como la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V del sistema:

$$L = T - V$$

Esta función se expresa en términos de las coordenadas generalizadas q_i del sistema, sus velocidades generalizadas \dot{q}_i , y el tiempo t .

3.2 Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange de segundo orden se derivan utilizando el principio de acción mínima, que establece que la trayectoria seguida por un sistema entre dos instantes de tiempo es aquella para la cual la integral de la acción S es mínima. La acción S se define como la integral del Lagrangiano sobre el tiempo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

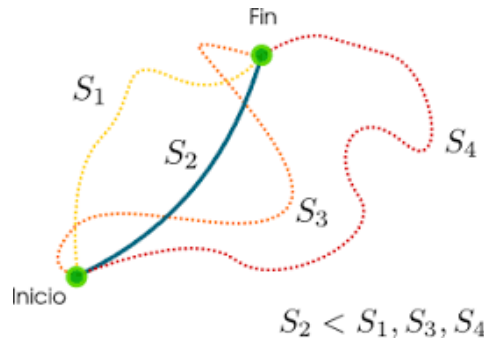


Figure 2: Principio de Mínima acción

El principio de mínima acción implica que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Este conjunto de ecuaciones son las ecuaciones de Lagrange para el sistema.

Nota: Se puede generalizar el problema e incluir fuerzas externas a la formulación de Lagrange. Estas serán fuerzas generalizadas y lo veremos luego.

3.3 Ventajas de la Mecánica de Lagrange

Una de las principales ventajas de la formulación lagrangiana es que no depende de la elección de un sistema de coordenadas cartesianas. Esto permite utilizar coordenadas generalizadas, que pueden ser especialmente útiles en sistemas con simetrías o restricciones complejas, como los sistemas con fuerzas centrales, sistemas con restricciones holonómicas, entre otros.

4 Órbitas circulares

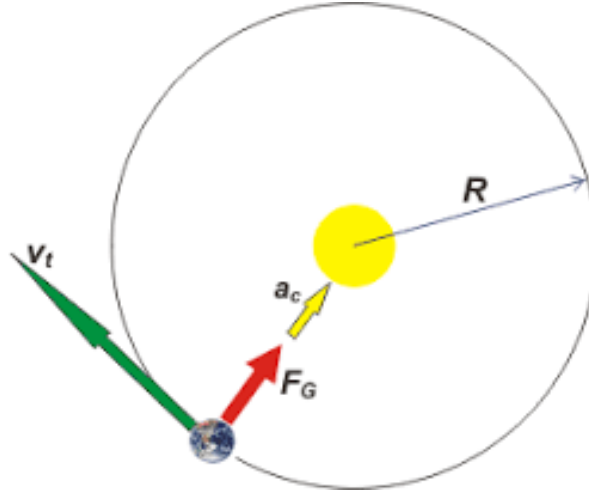


Figure 3: Órbita circular de radio R alrededor de un cuerpo de masa M

Para el caso de una trayectoria circular, utilizaremos la dinámica de Newton y utilizaremos dos conceptos claves:

1. La energía potencial gravitatoria.
2. La aceleración centripeta.

$$V(R) = -\frac{GMm}{R} \hat{r} \quad (5)$$

$$a_c = \frac{v_t^2}{R} \quad (6)$$

Recordemos también que la fuerza gravitatoria estará dada por el gradiente negativo del potencial gravitatorio. En este caso, como solo tenemos una componente radial, solo será la derivada parcial en esa dirección.

$$F_g = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{GMm}{R^2} \hat{r} \quad (7)$$

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R} \quad (8)$$

A partir de (9) vemos que el movimiento no depende de la masa "m" del cuerpo y queda completamente determinado por G, M, R, v .

Además, podemos determinar constantes de movimiento como la energía mecánica total del sistema:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

O bien, comenzar a trabajar mecánica de Lagrange para analizar el momento angular del sistema. Como se trató en la sección pasada, en Lagrangiano se define de la siguiente forma:

$$L = T - V \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (10)$$

En nuestro caso particular:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Siendo \dot{x} y \dot{y} las velocidades respecto a las coordenadas generalizadas x e y .

$$V = -\frac{GMm}{R}$$

Es conveniente, en este caso, expresar nuestro problema en coordenadas polares por la naturaleza del movimiento.

$$x = R \cos(\theta)$$

$$y = R \sin(\theta)$$

$$\dot{x} = -R \sin(\theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = R \cos(\theta) \dot{\theta}$$

En este escenario, teniendo en cuenta que el movimiento es plano y la trayectoria es una circunferencia de radio R , tenemos 2 movimientos posibles y una condición de vínculo por lo que, bajo la formulación de la mecánica de Lagrange, tenemos una coordenada generalizada (angular) θ .

Por lo que:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[(-R \sin(\theta) \dot{\theta})^2 + (R \cos(\theta) \dot{\theta})^2] = \frac{1}{2}mR^2 \dot{\theta}^2$$

Entonces nuestro Lagrangiano resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{GMm}{R}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = 0$$

$$mr^2 \dot{\theta} = 0 \quad (11)$$

La ecuación (12) es nada más y nada menos que la ecuación de conservación de momento angular.

5 Órbitas elípticas

La primera ley de Kepler afirma que todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos.

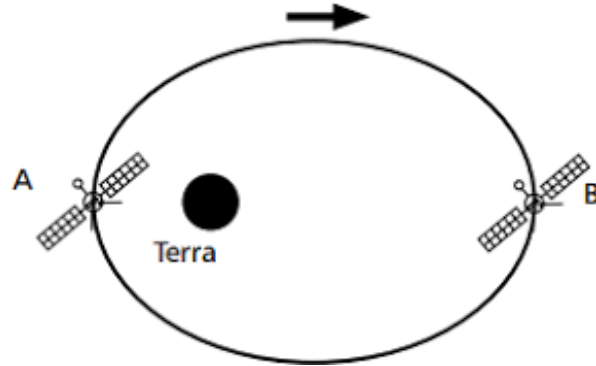


Figure 4: Órbita elíptica de un satélite alrededor de la tierra. En A tenemos el periapsis y en B el apoapsis.

Las trayectorías circulares no son, ni por asomo, la forma más común de orbitar un cuerpo celeste. Kepler se dio cuenta de estos movimientos y así nacieron sus leyes. En particular, la segunda ley afirma que el radio vector que une un planeta y el sol recorre áreas iguales en tiempos iguales. Esto es equivalente a la constancia de momento angular que nos dejó la sección 4.

En una órbita elíptica podemos distinguir dos puntos muy marcados.

- Periapsis: Es el punto más cercano de la trayectoria al cuerpo central.
- Apoapsis: Es el punto más alejado de la trayectoria al cuerpo central.

5.1 Ecuaciones de la elipse

Recordemos la ecuación cartesiana de una elipse en el plano:

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (12)$$

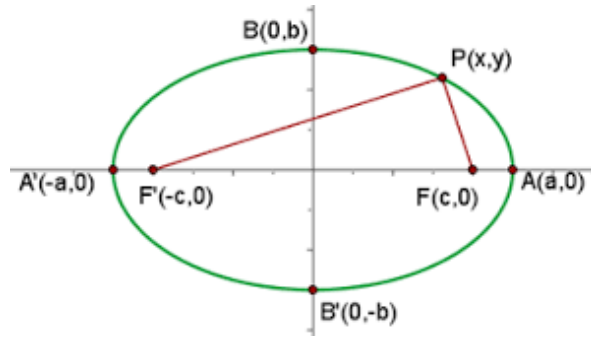


Figure 5: Geometría de la elipse

Donde a es el semieje mayor, b el semieje menor y c es la distancia focal dada por:

$$c^2 = a^2 - b^2. \quad (13)$$

La excentricidad de la elipse se define como:

$$e = \frac{c}{a}. \quad (14)$$

Ahora, expresamos la ecuación en coordenadas polares con el foco como origen. Usamos la relación entre coordenadas cartesianas y polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (15)$$

En una cónica con un foco en el origen, la ecuación general en coordenadas polares es:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (16)$$

donde p es el parámetro de la cónica, dado por:

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (17)$$

Sustituyendo p en la ecuación:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (18)$$

- a : Representa el semieje mayor
- $p = a(1 - e^2)$ se lo conoce como parámetro orbital.
- r : Distancia del punto en consideración al foco.

5.2 Energía en órbitas elípticas

Sabemos que la energía mecánica total de un sistema viene dado por:

$$E = T + V$$

La cual, en ausencia de fuerzas exteriores, resulta una constante de movimiento. Vamos a analizar el caso de un satélite de masa "m" orbitando alrededor de un cuerpo central de masa M. Tomemos por caso a la figura 4 que nos servirá de guía.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Siendo r(t) la distancia entre el cuerpo central y el objeto que lo orbita.

Nota: El potencial gravitatorio es negativo por ser atractivo.

5.3 Ecuación Vis-Viva

En astrodinámica, la ecuación vis-viva, también conocida como ley de invariancia de energía orbital, es una de las ecuaciones que modelan el movimiento de los cuerpos en órbita. Es el resultado directo del principio de conservación de la energía mecánica que se aplica cuando la única fuerza que actúa sobre un objeto es su propio "peso".

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (19)$$

Donde $\mu = GM$

5.4 Energía específica

Tomando de partida la ecuación Vis-Viva y la conservación de la energía mecánica, podemos determinar la energía específica (energía por unidad de masa del sistema)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2}v^2 - \mu/r \\ \epsilon &= \frac{-\mu}{2a} \end{aligned} \quad (20)$$

Con esto, podemos concluir que la energía de un sistema que orbita un cuerpo central no depende de la excentricidad de la órbita, solo depende del semieje mayor (a), de G y de la masa M del cuerpo central.

5.5 Excentricidad en función de E y L

Una forma conveniente de expresar la excentricidad de la órbita es en función de su Energía y su momento angular (ya sea totales o específicos)

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$E = \frac{-GMm}{2a}$$

$$v = \frac{L}{mr}$$

Luego: Una forma conveniente de expresar la excentricidad de la órbita es en función de su Energía y su momento angular (ya sea totales o específicos)

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$E = \frac{-GMm}{2a}$$

$$v = \frac{L}{mr}$$

Luego:

$$E = \frac{1}{2}m \frac{L^2}{m^2 r^2} - \frac{GMm}{2a}$$

$$L = \sqrt{GMma(1-e)^2}$$

Una forma conveniente de expresar la excentricidad de la órbita es en función de su Energía y su momento angular (ya sea totales o específicos)

$$L = mr^2 \dot{\theta}$$

$$E = \frac{-GMm}{2a}$$

$$v_{\theta} = \frac{L}{mr}$$

Sabemos que la velocidad puede expresarse en sus componentes radial y transversal:

$$v^2 = v_r^2 + v_{\theta}^2$$

$$v^2 = v_r^2 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2 = v_r^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Luego:

$$E = \frac{1}{2}m(v_r^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}) - \frac{GMm}{r}$$

Resolviendo la integral que relaciona la posición r con el ángulo θ llegamos a que se cumple la siguiente relación:

$$\alpha = p = \frac{l^2}{GMm}$$

Recordando que $\alpha = p = a(1 - e^2)$

$$\alpha = p = \frac{l^2}{GMm}$$

$$GMma(1 - e^2) = l^2$$

$$l = \sqrt{GMma(1 - e^2)}$$

Y recordemos que:

$$a = \frac{-GMm}{2E}$$

Reemplazando en "a" del momento angular L

$$L = \sqrt{GMm \frac{-GMm}{2E} (1 - e^2)}$$

$$L^2 = -GMm \frac{-GMm}{2E} [(1 - e)^2]$$

$$-\frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^2} = 1 - e^2$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^2}}$$

Si lo planteamos como h, μ que son el momento angular específico y la energía específica:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Ch^2}{\mu^2}} \quad (21)$$

Con esto concluimos en que la excentricidad de la órbita va a ser función de la energía específica, el momento angular específico y de μ

Otra ecuación que resultará útil es la expresión del momento angular en función del semieje mayor y de la excentricidad.

Partimos de la energía específica, de la ecuación vis-viva y del momento angular específico. Calcularemos el momento angular en el **periapsis**

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{\mu}{2a} \\ v_p^2 &= \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \\ h_p &= r_p v_p \\ r_p &= a(1 - e) \end{aligned}$$

Por lo que la velocidad de nuestro objeto en el periapsis es:

$$v_p^2 = \mu\left(\frac{2}{a(1 - e)} - \frac{1}{a}\right) = \mu\left[\frac{1 + e}{a(1 - e)}\right] \quad (22)$$

Tomando al momento angular y reemplazando:

$$\begin{aligned} h &= a(1 - e)\sqrt{\mu\left[\frac{1 + e}{a(1 - e)}\right]} \\ h &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \end{aligned} \quad (23)$$

5.6 Formulación de Lagrange

Seguiremos por simplicidad con coordenadas polares. En este caso, tanto r como θ son variables. Es decir, no tenemos ninguna condición de vínculo para plantear las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\theta) \\ y &= R \sin(\theta) \end{aligned}$$

Derivando cada componente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R \sin(\theta) \dot{\theta} \\ \dot{y} &= R \cos(\theta) \dot{\theta} \end{aligned}$$

La energía cinética en coordenadas polares es:

$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) \quad (24)$$

La energía potencial gravitatoria es:

$$V = -\frac{GMm}{r} \quad (25)$$

5.7 Lagrangiano

El lagrangiano del sistema es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{GMm}{r} \quad (26)$$

5.8 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (27)$$

donde q_i representa las coordenadas generalizadas (r, θ) .

5.9 Ecuación para r

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2} \right) = 0 \quad (28)$$

Simplificando:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (29)$$

Vemos que el movimiento no es función de la masa m del satélite.

5.10 Ecuación para θ

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (30)$$

Esto implica la conservación del momento angular:

$$mr^2\dot{\theta} = h \quad (31)$$

donde h es una constante.

5.11 Visualización en Python

Daremos un ejemplo de como puede visualizarse una órbita elíptica de un objeto de masa m alrededor de un cuerpo central de masa M . Supongamos que el cuerpo central es la tierra:

- $M = 5.972 \times 10^{24}$ kg
- $G = 6.674 \times 10^{-11}$
- Distancia apoapsis: $r_a = 10000$ km
- Distancia periapsis: $r_p = 8000$ km

Recordemos que la elipse cuenta con algunos parámetros geométricos fundamentales. "a" representa la distancia el semieje mayor y "e" la excentricidad de la elipse.

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

Pondremos condiciones iniciales para simular la trayectoria.

- Distancia inicial $r_i = 8000$ km (periapsis)
- $\theta_0 = 0$ (ángulo inicial)
- $v_p = \sqrt{GM(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a})}$ velocidad inicial de trayectoria.
- $v_{r0} = 0$ velocidad radial inicial
- $\omega_0 = v_p/r_i$ velocidad angular inicial

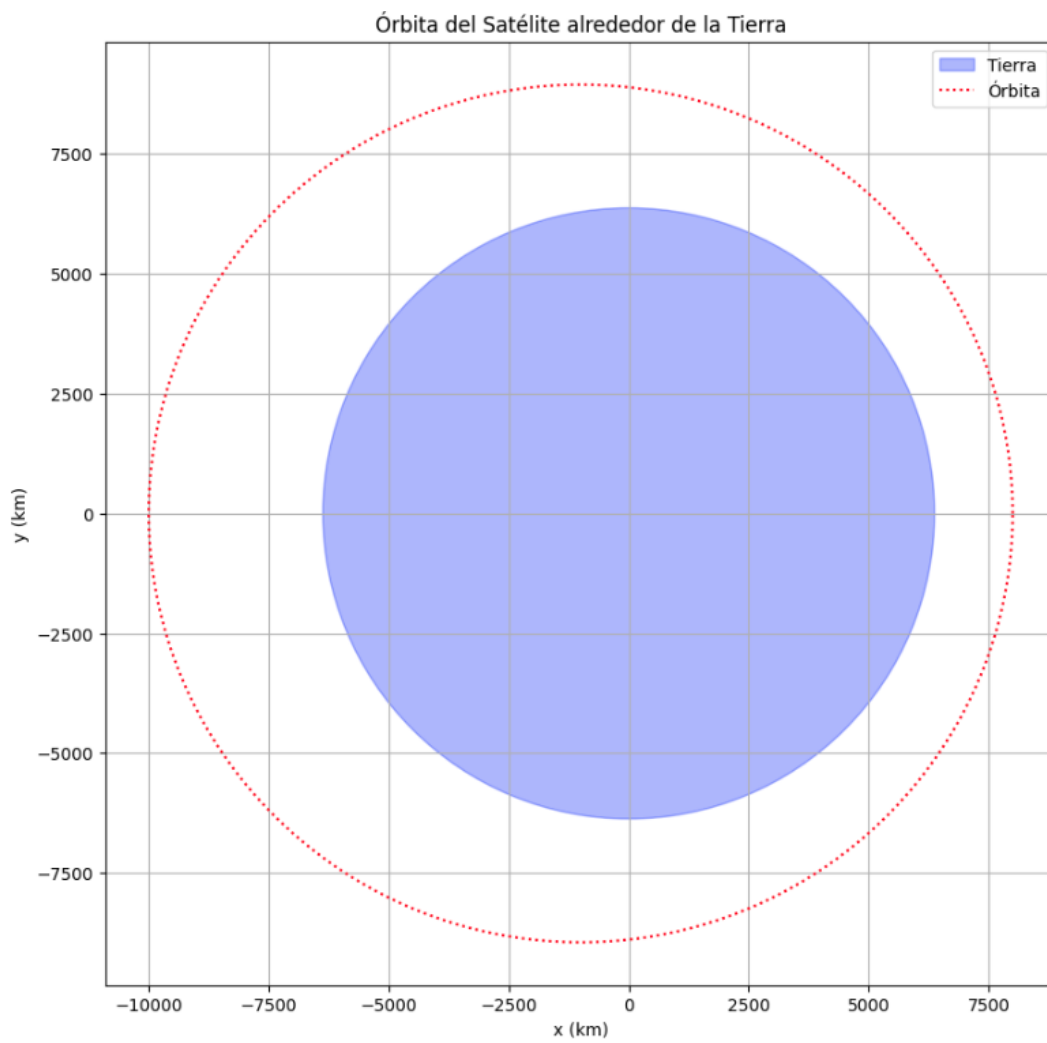


Figure 6: Órbita elíptica de un satélite alrededor de la tierra

Como vemos, la velocidad será máxima en el periapsis y disminuirá cuanto más nos alejemos del cuerpo central.

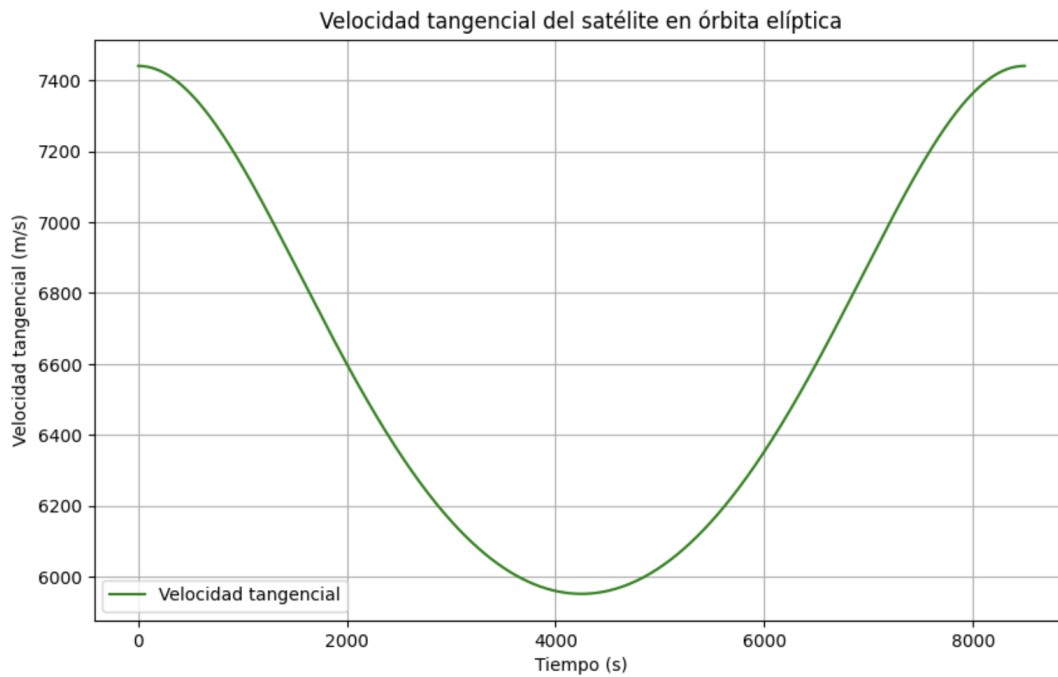


Figure 7: Variación de velocidad tangencial

6 Parámetros orbitales

Los elementos orbitales son los parámetros necesarios para identificar de forma única la órbita específica de un cuerpo celeste. Para definir estos parámetros es necesario definir un plano y una dirección de referencia. Comúnmente, para la tierra, utilizamos el plano de la eclíptica y como dirección de referencia se utiliza el primer punto de Aries.

- a : Semieje mayor de la elipse. En caso de ser una trayectoria circular, no está definido.
- e : Excentricidad de la elipse.
- i : Inclinación de la órbita respecto al plano de referencia.
- Ω : Longitud recta del nodo ascendente (RAAN). Esta mide el ángulo entre la dirección de referencia y el Nodo ascendente.
- ω o \argp : Argumento de periapsis. Se mide desde el Nodo ascendente hasta el periapsis.
- ν o f : Anomalía verdadera. Es el ángulo entre el argumento del periapsis y el cuerpo celeste.

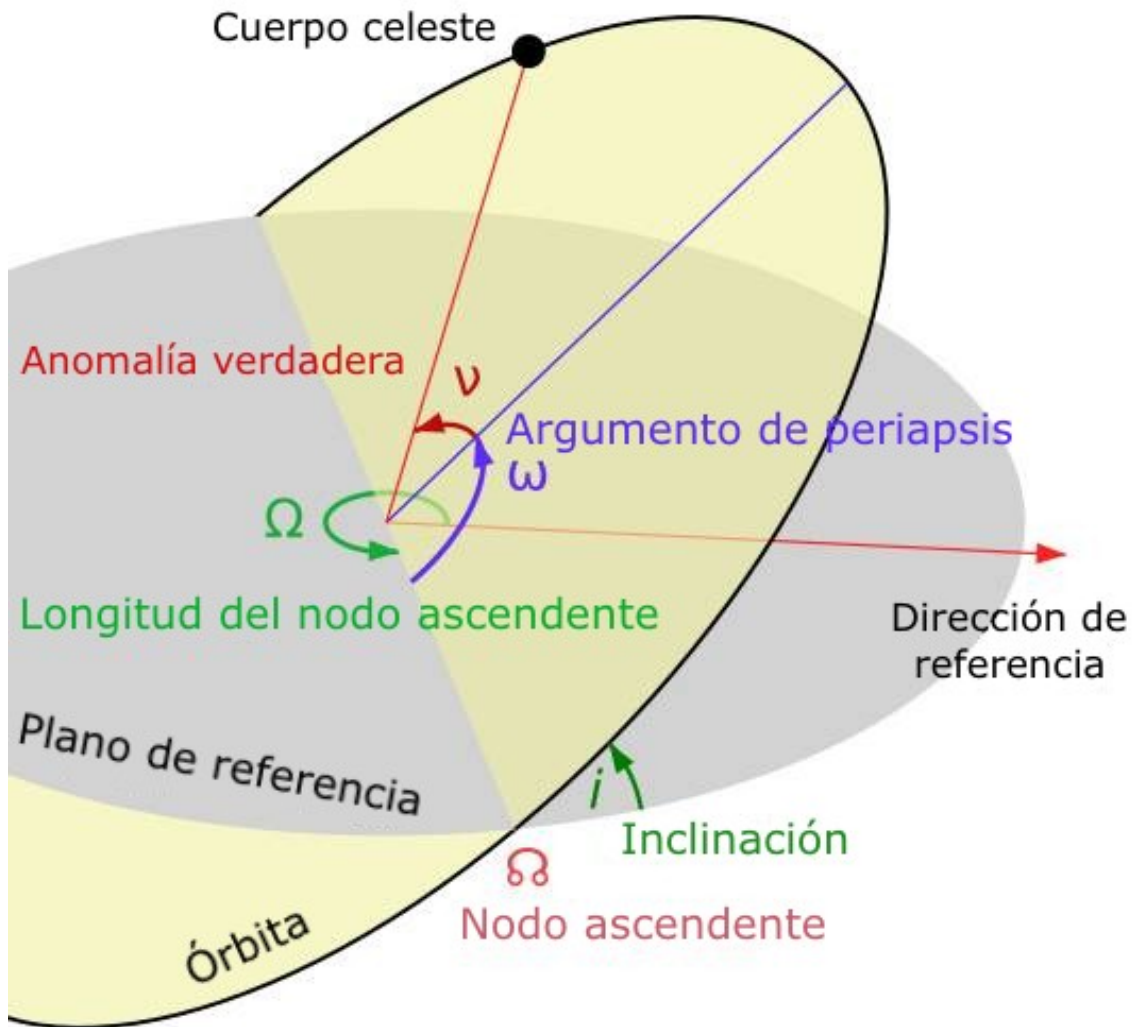


Figure 8: Elementos orbitales - Fuente Wikipedia

Nota: El **nodo ascendente** es donde la órbita cruza el plano de referencia de Sur a Norte y el **nodo descendente** es donde la órbita cruza el plano de referencia de Norte a Sur. Cabe destacar que los nodos aparecen cuando el cuerpo que está orbitando tiene cierta inclinación respecto al plano de referencia, sino, no habrá nodos.

De esta forma, la órbita queda completamente determinada por estos seis parámetros: ($a, e, i, \Omega, \omega, \nu$)

Los parámetros orbitales no siempre son estáticos. Hay diferentes tipos de órbitas (secular, caótica, aleatoria, resonante, etc)

En muchos casos, modelamos a los satélites orbitando alrededor de un cuerpo haciéndolos coincidir con su plano de referencia. Este no es el caso general por lo que me parece interesante modelar diferentes órbitas con distintos parámetros orbitales para lograr el entendimiento de la importancia de los parámetros.

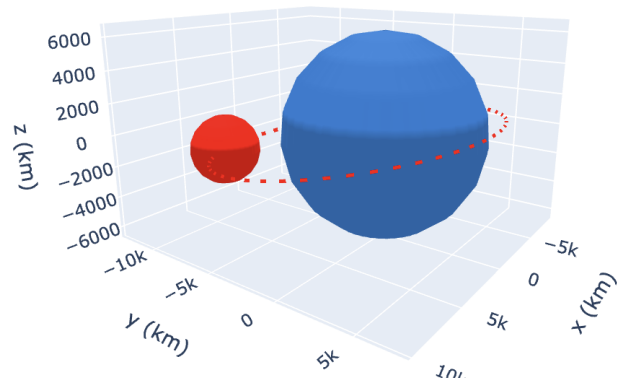


Figure 9: Elementos orbitales

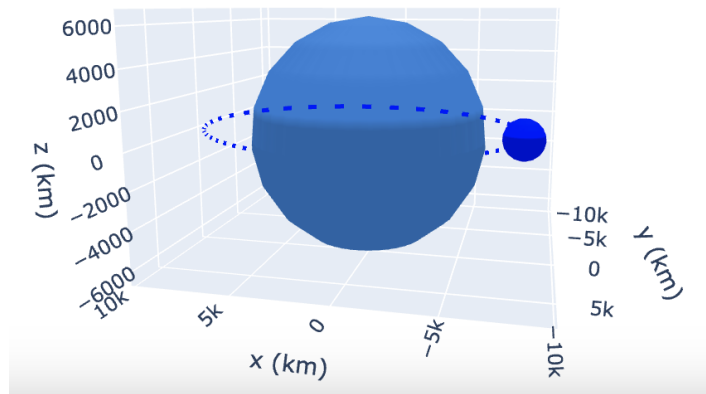


Figure 10: Elementos orbitales

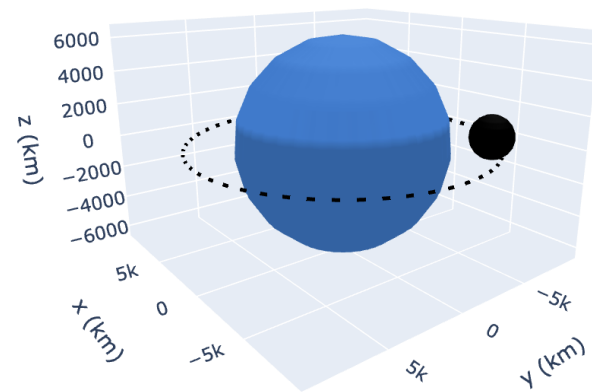


Figure 11: Elementos orbitales

7 Órbitas perturbadas

Las órbitas perturbadas son aquellas que no siguen una trayectoria puramente Kepleriana (una elipse perfecta con un foco en el centro de masas), sino que experimentan desviaciones debido a fuerzas externas adicionales a la atracción gravitatoria de un solo cuerpo. Estas perturbaciones pueden hacer que los parámetros orbitales cambien con el tiempo. Las perturbaciones pueden clasificarse en internas y externas, dependiendo de su origen.

7.1 Perturbaciones internas

Estas provienen de irregularidades en el campo gravitatorio del cuerpo central, debido a su forma no perfectamente esférica o a la presencia de otros cuerpos masivos cercanos.

- **Achatamiento del cuerpo central:** Los planetas no son esferas perfectas, sino que están ligeramente achatados en los polos (oblaticidad) por su rotación intrínseca. Esto afecta la órbita de los satélites artificiales y naturales.
- **Influencias gravitacionales de otros cuerpos:** La presencia de otros cuerpos masivos (por ejemplo, el Sol y la Luna en el caso de la Tierra) ejerce una fuerza adicional sobre un satélite.
- **Efecto de resonancias:** Ocurre cuando el período orbital de un cuerpo es un múltiplo simple del de otro, generando perturbaciones acumulativas.

7.2 Perturbaciones externas de origen no gravitacional

Estas fuerzas no dependen directamente de la gravedad, pero pueden modificar la órbita de un cuerpo.

- **Presión de radiación solar:** Los fotones del Sol ejercen una pequeña fuerza sobre un satélite, modificando su trayectoria con el tiempo.
- **Fricción atmosférica:** Afecta a los satélites en órbitas bajas (LEO), disminuyendo su altitud con el tiempo.
- **Efectos relativistas:** En órbitas cercanas a cuerpos muy masivos (por ejemplo el Sol), los efectos de la Relatividad General pueden modificar la órbita (la precesión del perihelio de Mercurio).

7.3 Componentes de la Fuerza Perturbadora F_P

La perturbación en una órbita se analiza descomponiendo la fuerza perturbadora F_P en tres componentes en un sistema de referencia local ligado a la órbita.

- **Componente radial (F_R):** Actúa en la dirección desde el cuerpo central hacia el objeto en órbita. Puede afectar el semieje mayor y la excentricidad de la órbita.
- **Componente transversal (F_T):** Actúa transversalmente a la trayectoria. Puede modificar la velocidad y afectar la energía de la órbita, alterando el período orbital.
- **Componente normal (F_N):** Actúa perpendicular al plano orbital, causando cambios en la inclinación y la ascensión recta del nodo ascendente.

La ecuación que describe la fuerza perturbadora está dada por:

$$\vec{F}_P = F_r \hat{r} + F_t \hat{t} + F_n \hat{n} \quad (32)$$

A partir de esto, podemos deducir como variarán los parámetros orbitales en función de la Fuerza perturbadora \vec{F}_P . Hablaremos de esto luego.

8 Tipos de Satelites según sus órbitas

En la mayoría de los casos, tras ser lanzados, los satelites se colocan en una de las varias órbitas predeterminadas alrededor de la tierra. Los satélites se clasifican según su altitud orbital (distancia desde la superficie terrestre). Esta afecta directamente a su cobertura y a la velocidad a la que viajan alrededor del planeta. Esto es crucial ya que dependiendo de su finalidad, los datos que obtendrán y los servicios que ofrecen, se debe elegir a que altura respecto a la tierra deberán encontrarse.

Los 5 tipos principales de satélites considerando su altitud orbital son:

- Órbita terrestre baja (LEO)
- Órbita terrestre media (MEO)
- Órbita geoestacionaria (GEO)
- Órbita heliosíncronos (SSO)
- Órbita de transferencia geoestacionaria (GTO)

8.1 LEO

Los satelites en este tipo de órbita se mueven a una altitud aproximada de 160 a 1500km sobre la superficie de la Tierra. Su período orbital oscila entre 90 y 120 minutos lo que significa que pueden dar hasta 16 vueltas al día. Los satélites en esta órbita son especialmente útiles para teledetección, observación terrestre de alta resolución e investigación científica por la periodicidad de los datos y la rápida transmisión.

Este tipo de órbita es muy común, ya que ofrece más trayectorias potenciales para las naves espaciales. Sin embargo, debido a su proximidad a la Tierra, tienen un área de cobertura menor que otros tipos de satélites. A menudo, se lanzan juntos grupos de satélites LEO, conocidos como constelaciones de satélites, para formar una especie de red que rodea la Tierra.

Algunos elementos perturbadores de la órbita del satellite son:

- Resistencia atmosférica
- Efecto J2 debido a la geometría de la tierra
- Presión de radiación

Por fines prácticos nos centraremos en este tipo de órbitas considerando efectos debido al J2 y a la resistencia atmosférica.

8.2 MEO

Los satélites de tipo MEO se sitúan entre las órbitas terrestre baja y la geoestacionaria, normalmente a una altitud de entre 5.000 y 20.000 kilómetros. Los servicios de posicionamiento y navegación, como el GPS, se apoyan habitualmente en satélites de tipo MEO. Recientemente se han puesto en funcionamiento constelaciones de satélites MEO de alto rendimiento (HTS) para permitir la comunicación de datos de baja latencia a proveedores de servicios y organizaciones comerciales y gubernamentales.

- Efecto J2 debido a la geometría de la tierra.
- Atracción gravitacional de la Luna y el Sol.
- Presión de radiación.

Algo a tener en cuenta es la interacción con el campo magnético terrestre. Al estar más cerca de la magnetosfera, los satelites en MEO están sujetos a perturbaciones debidas a las interacciones con el campo magnético. Esto puede afectar cuestiones diversas como el control de actitud y el funcionamiento de ciertos sistemas electrónicos del satellite.

8.3 GEO

La órbita geoestacionaria se sitúa a 35.786 kilómetros sobre la superficie terrestre, precisamente sobre el ecuador. Tres satélites GEO espaciados de forma uniforme pueden dar una cobertura casi mundial gracias a la enorme superficie que cubren en la Tierra.

Los objetos situados en órbita geoestacionaria parecen inmóviles desde la Tierra porque su periodo orbital es idéntico a la rotación de la Tierra: 23 horas, 56 minutos y 4 segundos. Esto permite que una antena terrestre apunte siempre hacia el mismo dispositivo en el espacio. Por eso, estos satélites son perfectos para los servicios de comunicación siempre activos, como la televisión y los teléfonos. Además, pueden utilizarse en meteorología para monitorizar el tiempo en regiones concretas. El mayor inconveniente del tipo GEO frente a otros tipos de satélites espaciales para la comunicación en tiempo real es el mayor retardo de la señal causado por la gran distancia con la Tierra.

- Efecto J2 debido a la geometría de la tierra.
- Atracción gravitacional de la Luna y el Sol.
- Presión de radiación.

En este caso, el efecto de la luna es más notorio ya que se encuentra mucho más cerca y puede inducir variaciones en la orientación del satélite (precesión y nutación) a lo largo del tiempo.

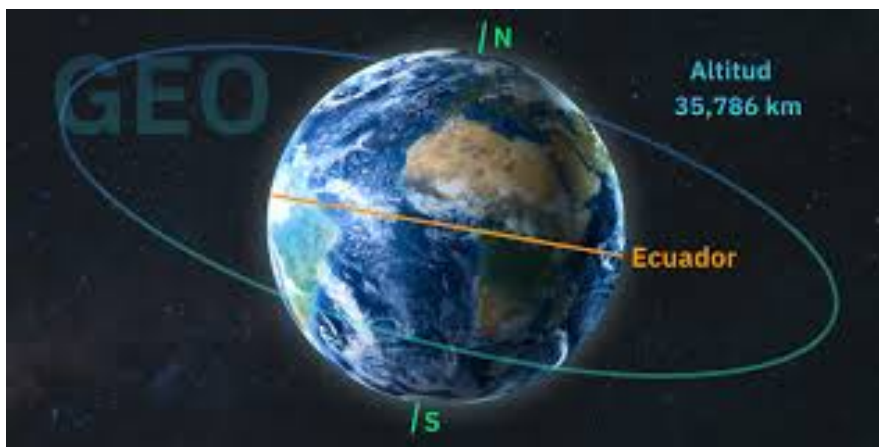


Figure 12: Órbita GEO. Fuente imagen EOS Data Analytics

8.4 Satélites Heliosíncronos (SSO)

Los satélites heliosíncronos atraviesan de norte a sur las regiones polares a una altitud de 600 a 800 km sobre la Tierra. La inclinación orbital y la altitud de estas naves están calibradas de modo que siempre cruzan un lugar cualquiera dado de forma precisa a la misma hora solar local. Así, las condiciones de iluminación son constantes para la obtención de imágenes, lo que hace que de entre todos los tipos de satélites, éste sea ideal para la observación de la Tierra y la monitorización del medioambiente.

8.5 Satélites De Órbita De Transferencia Geoestacionaria (GTO)

La órbita más frecuente de entre todos los tipos de satélites es la de transferencia geoestacionaria, utilizada para pasar de una órbita de transición (generalmente LEO) a la geoestacionaria. Los satélites no siempre se colocan directamente en su órbita definitiva cuando son propulsadas desde la Tierra al espacio por vehículos de lanzamiento como Falcon 9. Los cohetes que transportan la carga útil a la órbita geoestacionaria la dejan en órbitas de transferencia, que son puntos intermedios en el camino hacia su posición final. A continuación, el motor del satélite se enciende para alcanzar su órbita de destino y ajustar su inclinación. Este atajo permite alcanzar la órbita geoestacionaria con un mínimo de recursos. Hablaremos de la transferencia de Hohmann en otro artículo.

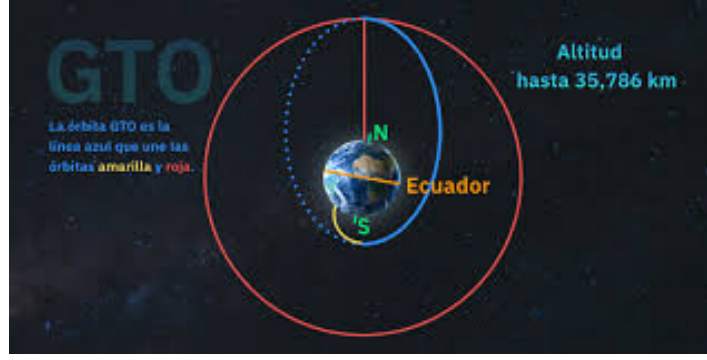


Figure 13: Órbita GTO. Fuente imagen EOS Data Analytics

9 Fuerza de arrastre

Una de los factores que debemos tener en cuenta para modelado en órbitas bajas es la **fuerza de arrastre**. Esta es una resistencia aerodinámica debido a la presencia de la atmósfera terrestre causando desaceleración del satélite y disminución de altitud con el tiempo.

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho |v| \vec{v} A \quad (33)$$

- C_D es el coeficiente de arrastre (depende de la forma)
- ρ es la densidad del aire
- v es la velocidad relativa del satélite
- A : Área efectiva del satélite (en la dirección del movimiento)

La fuerza de arrastre siempre actúa en dirección opuesta al movimiento por lo que el satélite pierde energía cinética con el tiempo reduciendo la altitud de la órbita, produciendo a la larga el reingreso a la atmósfera. Cabe destacar que para altitudes superiores a 600km (exosfera) la influencia de la fuerza de arrastre es muy pequeña pero nosotros lo tendremos en cuenta para fines de cálculo y estudio de movimiento.

10 Modelando un satélite bajo la influencia de \vec{F}_D

Cuando se trata de órbitas en altitudes bajas (menor a 500km), influye considerablemente la fuerza de arrastre (\vec{F}_D) producto del rozamiento de nuestro satélite con la atmósfera.

En la formulación Lagrangiana que detallamos antes no se consideró la acción de fuerzas no conservativas pero, para este y muchos casos, vemos la necesidad de introducirlas en nuestros modelos.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_j \quad (34)$$

Q_j serán las **fuerzas generalizadas** actuantes sobre nuestro sistema.

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}$$

$$F_D = -\frac{1}{2} \rho C_D |v| v$$

Recordamos que la velocidad expresada en coordenadas polares tiene dos componentes.

$$v = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta$$

$$v = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

Siendo el módulo de la velocidad en coordenadas polares:

$$|v| = \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2} \quad (35)$$

Por lo que la fuerza generalizada tendría dos componentes:

$$F_{D\hat{r}} = -\frac{1}{2}\rho C_D \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2} \dot{r}$$

$$F_{D\hat{\theta}} = -\frac{1}{2}\rho C_D \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2} r\dot{\theta}$$

10.1 Análisis de la coordenada radial

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2}m \frac{\partial \dot{r}^2}{\dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial(\frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) + \frac{GMm}{r})}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2}$$

Finalmente, podemos expresar a la radial como:

$$m\ddot{r} - (mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2}) = -\frac{1}{2}\rho C_D \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2} \dot{r} \quad (36)$$

Y dividiendo cada término por la masa:

$$\ddot{r} - (r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2}) = -\frac{1}{2m}\rho C_D \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2} \dot{r} \quad (37)$$

10.2 Análisis de la coordenada angular

Se procede de forma análoga derivando respecto de la otra coordenada generalizada θ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -\frac{1}{2}\rho C_D \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2} r\dot{\theta} \quad (38)$$

Vemos, en este caso, que del lado izquierdo tenemos $mr^2\dot{\theta}$ que no es otra cosa que el momento angular. En este caso, vemos que por presencia de fuerzas no conservativas, esto nos lleva a la no conservación de esta magnitud.

$$2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}\rho C_D \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2} r\dot{\theta}$$

Dividiendo por la masa en cada término y simplificando r

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\frac{1}{2m}\rho C_D A \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2} r\dot{\theta} \quad (39)$$

10.3 Hipótesis y resolución

Primero operaremos sobre la componente radial que es donde podemos hacer asunciones y simplificar nuestro problema.

En la coordenada radial la fuerza de arrastre resulta despreciable frente a la atracción gravitatoria, por esto mismo, también podremos despreciar la aceleración radial \ddot{r}

$$\begin{aligned} r\dot{\theta}^2 &= \frac{GM}{r^2} \\ \dot{\theta}^2 &= \frac{GM}{r^3} \end{aligned} \quad (40)$$

Esta es la expresión usual para la velocidad angular de un satélite en órbita. Procederemos a calcular la velocidad angular (desaceleración) calculando la derivada de la velocidad angular $\dot{\theta}$

1. Empezamos con la expresión original:

$$\dot{\theta} = \sqrt{GM r^{-3}} = (GM)^{1/2} r^{-3/2}$$

2. Derivamos respecto al tiempo t , aplicando la regla de la cadena. Dado que GM es constante, lo dejamos fuera de la derivada:

$$\frac{d}{dt} \left((GM)^{1/2} r^{-3/2} \right) = (GM)^{1/2} \cdot \frac{d}{dt} \left(r^{-3/2} \right)$$

3. La derivada de $r^{-3/2}$ con respecto al tiempo t es:

$$\frac{d}{dt} \left(r^{-3/2} \right) = -\frac{3}{2} r^{-5/2} \frac{dr}{dt}$$

4. Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior:

$$\frac{d}{dt} \left((GM)^{1/2} r^{-3/2} \right) = (GM)^{1/2} \cdot \left(-\frac{3}{2} r^{-5/2} \dot{r} \right)$$

5. Simplificando:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} (GM)^{1/2} r^{-5/2} \dot{r}$$

Finalmente:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \sqrt{GM r^{-3}} \cdot \frac{\dot{r}}{r} \quad (41)$$

Mostraremos como cae la altura de un satélite que inicialmente se encuentra a 250km sobre la superficie terrestre.

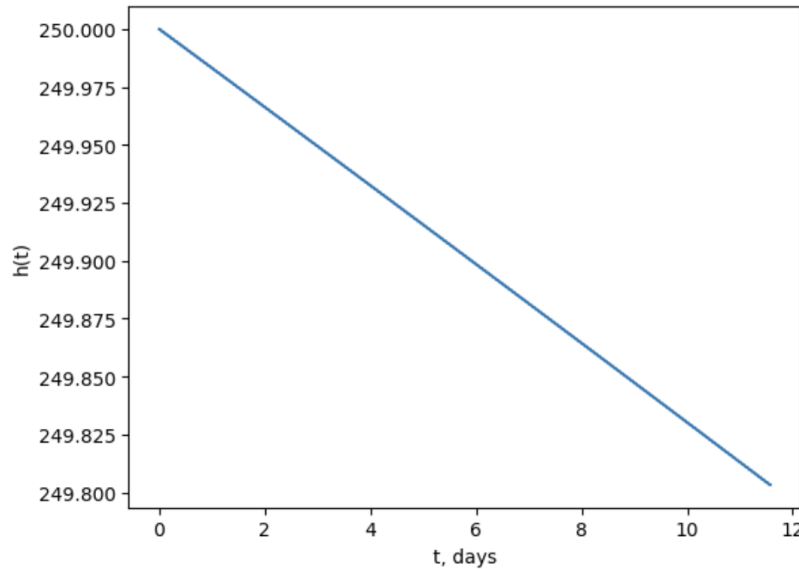


Figure 14: Variación de altura después de 12 días

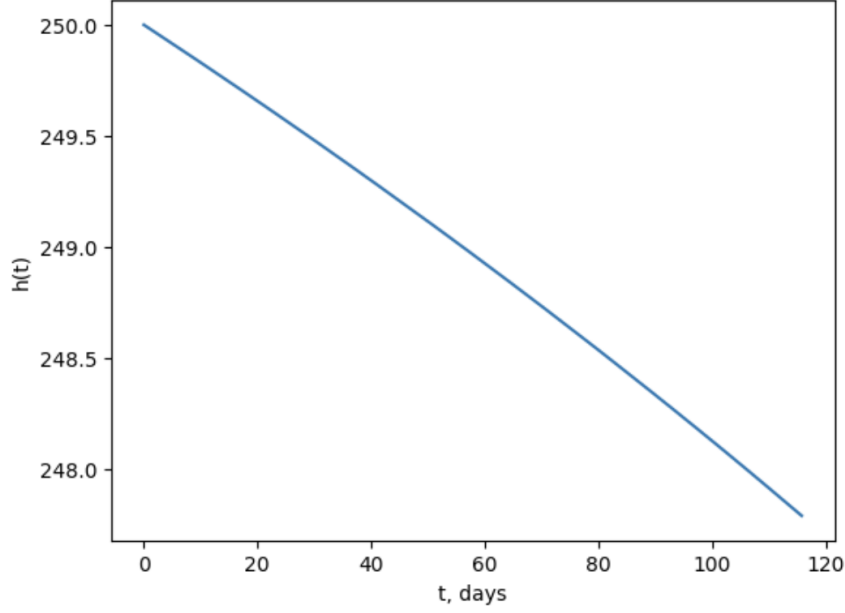


Figure 15: Variación de altura después de 120 días

Vemos que la pérdida de energía por fricción atmosférica es muy chica y vemos que, al inicio, parece una pérdida lineal pero, a medida que pasa el tiempo, esto se comporta como una curva que sigue la ecuación diferencial mencionada.

Usando la ecuación de la componente radial y angular

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{C_D A}{m} \rho (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)^{1/2} \dot{r}$$

$$r\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{C_D A}{m} \rho (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)^{1/2} r\dot{\theta}$$

Asumiendo que las aceleraciones (angular, radial) resultan despreciables por el proceso de reentrada, las ecuaciones pueden reducirse a:

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^2} \quad (42)$$

$$\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{4} \frac{C_D A}{m} \rho (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)^{1/2} r\dot{\theta} \quad (43)$$

Elevando al cuadrado la última expresión y simplificando:

$$\dot{r}^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{16} \left(\frac{C_D A}{m} \right)^2 \rho^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) r^2 \dot{\theta}^2 \quad (44)$$

Simplificando $r^2, \dot{\theta}^2$

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{C_D A}{m} \right)^2 \rho^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (45)$$

Sabemos por otra parte que T representa el tiempo característico de cambio radial. Si un satélite se mueve en una trayectoria en la que su radio cambia, T representa el tiempo asociado a la variación de la distancia radial al cuerpo central.

$$T = \left| \frac{r}{\dot{r}} \right| \quad (46)$$

Hacemos un cambio de variable:

$$f = \frac{1}{16} \left(\frac{C_D A}{m} \right)^2 \rho^2 \quad (47)$$

Por lo que:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{r^2 \dot{\theta}^2 f}{1 - f r^2} \quad (48)$$

Por ultimo, llegamos a la ecuación:

$$T = \frac{1}{C_D A \rho} \sqrt{\frac{r(16m^2 - C_D^2 A^2 \rho^2 r^2)}{GM}} \quad (49)$$

Lo que finalmente nos da el tiempo de reentrada de un satélite a la atmosfera terrestre.

11 Variación de parámetros orbitales

Como ya dijimos antes, una órbita queda perfectamente definida a través de 6 parámetros: $(a, e, i, \omega, \Omega, \nu)$. En presencia de perturbaciones, estos parámetros variarán y esto tendrá un efecto apreciable en la órbita que sigue nuestro satélite alrededor de un cuerpo central.

Sabemos también que la fuerza perturbadora tiene la siguiente forma:

$$F_P = F_r \hat{r} + F_t \hat{t} + F_n \hat{n}$$

Comúnmente estas fuerzas son nombradas de la siguiente forma:

$$F = R \hat{r} + T \hat{t} + N \hat{n} \quad (50)$$

O bien, expresarla en su forma diferencial:

$$dF = dR \hat{r} + dT \hat{t} + dN \hat{n} \quad (51)$$

11.1 Variación de la excentricidad orbital

Del apartado 5 pudimos calcular la excentricidad en función de la energía y el momento angular:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^2}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2 \mu^{-2}}{m^2}}$$

O bien, por unidad de masa:

$$e = \sqrt{1 + 2Ch^2 \mu^{-2}}$$

Recordar que la energía y el momento angular son funciones del tiempo.

$$\dot{e} = \frac{d}{dt} \sqrt{1 + 2Ch^2 \mu^{-2}}$$

$$\dot{e} = \frac{4h\dot{h}C\mu^{-2} + 2h^2\dot{C}\mu^{-2}}{2\sqrt{1 + 2Ch^2 \mu^{-2}}}$$

$$\dot{e} = 2h\mu^{-2} \left[\frac{2\dot{h}C + h\dot{C}}{2e} \right]$$

$$\dot{e} = h\mu^{-2} \left[\frac{2\dot{h}C + h\dot{C}}{e} \right]$$

Otra forma de expresar la excentricidad e:

$$e = \sqrt{1 + 2Ch^2\mu^{-2}}$$

Es despejando $h\mu^{-2}$

$$\frac{e^2 - 1}{2hC} = h\mu^{-2}$$

Por lo tanto, reemplazando:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \frac{e^2 - 1}{2ehC} [2\dot{h}C + h\dot{C}] \\ \dot{e} &= \frac{e^2 - 1}{2e} \left[\frac{2\dot{h}}{h} + \frac{\dot{C}}{C} \right]\end{aligned}\tag{52}$$

Deducimos entonces que la variación de la excentricidad de una órbita depende del cambio del momento angular, la energía orbital y las condiciones iniciales.

11.2 Variación de parámetros orbitales en función de R,T,N

Para encontrar la relación entre los parámetros orbitales y las fuerzas R, T y N debemos partir de la definición de energía.

$$dC = \vec{dr} \cdot \vec{F}\tag{53}$$

$$\dot{C} = \vec{r} \cdot \vec{F}\tag{54}$$

Si tomamos la velocidad en coordenadas polares: $\dot{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

Nota: θ representa la anomalía verdadera (válido en órbitas Keplerianas) y podemos expresarlo como f

$$\dot{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{f}\hat{\theta}$$

Estas velocidades también podemos expresarlas en función de parámetros orbitales.

$$\begin{aligned}r &= \frac{p}{1 + e \cos f} \\ \dot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{1 + e \cos f} \right) = \frac{pe \sin(f) \dot{f}}{(1 + e \cos f)^2}\end{aligned}\tag{55}$$

De la ecuación de momento angular expresado a través de la anomalía verdadera tenemos:

$$\dot{f} = \frac{h}{r^2}$$

$$h = \sqrt{\mu p}$$

Donde p es el semilatus rectum. Luego:

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu p}}{\left(\frac{p}{1 + e \cos f}\right)^2} = \frac{\sqrt{\mu p}(1 + e \cos(f))^2}{p^2}$$

Sustituyendo en la expresión de \dot{r} obtenemos:

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{\mu p}}{p} e \sin(f) = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin(f)\tag{56}$$

Procediendo de forma similar para la componente angular:

$$r\dot{f} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e \cos f) \quad (57)$$

Por las condiciones del producto escalar:

$$\dot{C} = \dot{r}\vec{R} + r\dot{f}\vec{T} \quad (58)$$

Luego, de la ecuación deducida de la energía:

$$\dot{C} = \frac{\mu}{2a^2}\dot{a}$$

Igualando las variaciones de energía:

$$\begin{aligned} \dot{r}\vec{R} + r\dot{f}\vec{T} &= \frac{\mu}{2a^2}\dot{a} \\ \dot{a} &= \frac{2a^2}{\mu}[\dot{r}\vec{R} + r\dot{f}\vec{T}] \end{aligned}$$

Reemplazando por la velocidad radial y transversal:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2a^2}{\mu}[\sqrt{\frac{\mu}{p}}e \sin(f)\vec{R} + \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e \cos f)\vec{T}] \\ \dot{a} &= \frac{2a^2}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{p}}[e \sin(f)\vec{R} + (1 + e \cos f)\vec{T}] \\ \dot{a} &= \frac{2a^2}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}}[e \sin(f)\vec{R} + (1 + e \cos f)\vec{T}] \\ \dot{a} &= 2a^{3/2}\sqrt{\frac{1}{\mu(1 - e^2)}}[e \sin(f)\vec{R} + (1 + e \cos f)\vec{T}] \\ \dot{a} &= \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1 - e^2)}}[\vec{R}e \sin(f) + \vec{T}(1 + e \cos f)] \end{aligned} \quad (59)$$

Variación de la excentricidad (e):

Recordando que la excentricidad podía ser expresada en función de h, μ, C :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Ch^2}{\mu^2}}$$

Y derivando respecto al tiempo:

$$\dot{e} = \frac{e^2 - 1}{2e}[\frac{\dot{2h}}{h} + \frac{\dot{C}}{C}]$$

Ya tenemos una función de como varía la energía respecto de las fuerzas R y T:

$$\dot{C} = \dot{r}\vec{R} + r\dot{f}\vec{T}$$

Para expresar correctamente la variación de excentricidad queda por entender como se puede expresar la variación del momento angular \dot{h} en función de parámetros orbitales y fuerzas.

Recordamos que la expresión general del momento angular es:

$$L = \vec{r} \times \vec{p} \quad (60)$$

Y, por unidad de masa:

$$h = \vec{r} \times \vec{v} \quad (61)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \vec{r} \times \vec{\dot{r}} + \vec{r} \times \vec{\ddot{r}}$$

Como \vec{r} y $\vec{\dot{r}}$ son vectores paralelos, su producto vectorial es 0. Y como se trata del momento angular por unidad de masa, entonces $\vec{F} = \vec{a}$

$$\dot{\mathbf{h}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\dot{\mathbf{h}} = r \times (\vec{R}\hat{r} + \vec{T}\hat{t} + \vec{N}\hat{n})$$

Recordemos algunas reglas del producto vectorial en coordenadas cilíndricas:

$$\hat{r} \times \hat{n} = -\hat{\theta}$$

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{n}$$

Entonces:

$$\dot{\mathbf{h}} = r\vec{T}\hat{n} - r\vec{N}\hat{\theta} \quad (62)$$

El término $r\vec{N}\hat{\theta}$ no cambia la magnitud de h , solo su dirección. Esto significa que \vec{N} contribuye a una precesión de la órbita, pero no afecta la excentricidad ni la velocidad angular de la partícula en el plano orbital, por lo que en la variación de la excentricidad deberíamos solo considerar la componente normal del momento angular.

$$\vec{\dot{h}} = r\vec{T}\hat{n} \quad (63)$$

Además, si expresamos la variación de la energía \dot{C} en función de las fuerzas y parámetros orbitales tenemos:

$$\dot{e} = \sqrt{a\mu^{-1}(1-e^2)}[\vec{R}\sin f + \vec{T}(\cos f + \cos E)] \quad (64)$$

- E representa la anomalía excéntrica

Esto quiere decir que la excentricidad de la órbita solo puede variar cuando se aplican fuerzas en el plano orbital (T,R)

Variación de la inclinación (i):

Para poder calcular la variación de este parámetro orbital sacaremos la información del momento angular. Como ya vimos, el **vector momento angular orbital \mathbf{h}** se define como:

$$\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} \quad (65)$$

donde:

- $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición del cuerpo en el espacio.
- $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es el vector de velocidad del cuerpo.

La norma del momento angular resulta:

$$|\mathbf{h}| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \quad (66)$$

El plano de referencia suele ser el **plano ecuatorial** o el **plano de la eclíptica**, considerado como el plano xy . La inclinación orbital i es el ángulo entre \mathbf{h} y el eje z .

Podemos escribir las componentes del momento angular en términos de los parámetros orbitales i y Ω :

$$h_x = |h| \sin i \sin \Omega \quad (67)$$

$$h_y = |h| \sin i \cos \Omega \quad (68)$$

$$h_z = |h| \cos i \quad (69)$$

El ángulo entre dos vectores \mathbf{h} y el eje z (representado por el vector unitario $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$) se obtiene mediante:

$$\cos i = \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{h}| |\mathbf{k}|} \quad (70)$$

Dado que $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, el producto escalar se reduce a:

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{k} = h_z \quad (71)$$

y como $|\mathbf{k}| = 1$, tenemos:

$$\cos i = \frac{h_z}{h} \quad (72)$$

Despejando i :

$$i = \cos^{-1} \left(\frac{h_z}{h} \right) \quad (73)$$

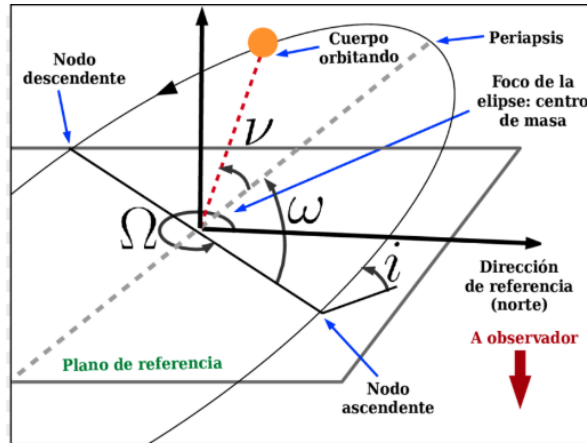


Figure 16: Elementos orbitales. En particular estamos interesados en i y en Ω

Para derivar i con respecto al tiempo, aplicamos la regla de la derivada de la función inversa del coseno:

$$\frac{d}{dt} \cos^{-1}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (74)$$

donde $x = \frac{h_z}{h}$. Entonces, derivamos ambos términos:

$$\dot{i} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h_z}{h}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{h_z}{h} \right) \quad (75)$$

Ahora aplicamos la regla del cociente para derivar $\frac{h_z}{h}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{h_z}{h} \right) = \frac{\dot{h}_z h - h_z \dot{h}}{h^2} \quad (76)$$

Sustituyendo en la ecuación de $\frac{di}{dt}$:

$$\dot{i} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h_z}{h}\right)^2}} \cdot \frac{\dot{h}_z h - h_z \dot{h}}{h^2} \quad (77)$$

Reescribiendo la raíz:

$$\dot{i} = \frac{h\dot{h}_z - h_z\dot{h}}{h\sqrt{h^2 - h_z^2}} \quad (78)$$

Luego, la variación temporal de la inclinación depende de la tasa de cambio de la componente normal del momento angular (\dot{h}_z), y de la tasa de cambio del momento angular total \dot{h} .

Para poder expresar esto en función de las fuerzas perturbadoras y parámetros orbitales, podemos utilizar la ecuación de Gauss para la variación de inclinación respecto al tiempo:

$$\dot{i} = \frac{r \cos(f + \omega)}{h} \vec{N} \quad (79)$$

De esta ecuación, entendemos que la inclinación solo cambia si hay una fuerza normal \vec{N} (perpendicular al plano orbital).

Algunas conclusiones importantes:

- Si $\vec{N} = 0$ entonces $\dot{i} = 0$ y la inclinación se mantiene constante.
- El factor $\cos(f + \omega)$ indica que la variación de la inclinación depende de la posición de la órbita.
- La máxima influencia se da en el periastro y apoastro (0 o 180 grados).
- Hay nula influencia en los nodos donde el coseno vale 0.

Perturbaciones gravitacionales: Un cuerpo central con un satélite en órbita ecuatorial puede recibir perturbaciones de otros planetas o de la Luna lo que cambiaría la inclinación con el tiempo.

Maniobras de cambio de inclinación: Para cambiar la inclinación de un satélite, los motores deben aplicar una fuerza \vec{N} perpendicular al plano orbital. La ecuación nos indica que hacerlo en el periastro o apoastro es lo más eficiente.

Variación de la longitud de nodo ascendente (RAAN) (Ω):

es el ángulo que mide la dirección del nodo ascendente con respecto a una referencia fija. El **nodo ascendente** es el ángulo que mide la dirección del nodo ascendente con respecto a una referencia fija (en dirección positiva de z). Su dirección se mide con el **vector nodo ascendente** \mathbf{N} , definido como:

$$\mathbf{N} = \mathbf{k} \times \mathbf{h} \quad (80)$$

Dado que $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, el producto cruz resulta en:

$$\mathbf{N} = (-h_y, h_x, 0) \quad (81)$$

La longitud del nodo ascendente se mide como el ángulo Ω en el plano xy , por lo que podemos calcularlo como:

$$\tan \Omega = \frac{h_x}{h_y} \quad (82)$$

Despejando Ω :

$$\Omega = \tan^{-1} \left(\frac{h_x}{h_y} \right) \quad (83)$$

Calcularemos ahora como varía el RAAN (Ω) respecto al tiempo:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} = \frac{d}{dt} \left(\tan^{-1} \left(\frac{h_x}{h_y} \right) \right)$$

Partimos de la expresión:

$$\dot{\Omega} = \frac{d}{dt} \left(\tan^{-1} \left(\frac{h_x}{h_y} \right) \right) \quad (84)$$

Utilizando la regla de derivación de la función arcotangente:

$$\frac{d}{dt} (\tan^{-1} u) = \frac{\dot{u}}{1 + u^2}, \quad (85)$$

con $u = \frac{h_x}{h_y}$, obtenemos:

$$\dot{\Omega} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{h_x}{h_y} \right)}{1 + \left(\frac{h_x}{h_y} \right)^2}. \quad (86)$$

Aplicando la regla del cociente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{h_x}{h_y} \right) = \frac{h_y \dot{h}_x - h_x \dot{h}_y}{h_y^2}, \quad (87)$$

y sustituyéndolo en la ecuación anterior:

$$\dot{\Omega} = \frac{\frac{h_y \dot{h}_x - h_x \dot{h}_y}{h_y^2}}{1 + \frac{h_x^2}{h_y^2}}. \quad (88)$$

Multiplicando numerador y denominador por h_y^2 , obtenemos:

$$\dot{\Omega} = \frac{h_y \dot{h}_x - h_x \dot{h}_y}{h_y^2 + h_x^2}. \quad (89)$$

Sabiendo que:

$$h_x^2 + h_y^2 = h^2 - h_z^2, \quad (90)$$

se tiene:

$$\dot{\Omega} = \frac{h_x \dot{h}_y - h_y \dot{h}_x}{h^2 - h_z^2}. \quad (91)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \vec{N} \sin(\omega + f)}{h \sin i} \quad (92)$$

Esto nos indica que:

- La variación de Ω solo ocurre si hay una fuerza perturbadora en la dirección normal N .
- Es inversamente proporcional a $h^2 - h_z^2$, lo que implica que en órbitas ecuatoriales ($i = 0^\circ$ o $i = 180^\circ$), la variación de Ω es indefinida o no existe.
- Si la inclinación es baja, $\dot{\Omega}$ es grande, lo que explica por qué los efectos de precesión nodal son más notables en órbitas de baja inclinación.

Variación del argumento del periapsis (w):

Operando de forma análoga, podemos expresar como varía el argumento del periapsis:

$$\frac{d\omega}{dt} = 2h\dot{h} \frac{r^{-1} + C(e\mu)^{-1} \cos(\theta - \omega)}{e\mu \sin(\theta - \omega)} + \dot{\theta} - \frac{h^2}{e^2 \mu^2} \dot{C} \cot(\theta - \omega)$$

Sustituyendo en función de las fuerzas:

$$\frac{d\omega}{dt} = e^{-1} \sqrt{a\mu^{-1}(1 - e^2)} [-\vec{R} \cos(f) + \vec{T} \sin(f) \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f}] - \dot{\Omega} \cos I \quad (93)$$

Destacar que $\dot{\Omega} \cos I$ es el efecto de la precesión nodal sobre ω causado por la inclinación orbital. Cuando la inclinación no es cero, la precesión nodal $\dot{\Omega}$ influye en ω .

Variación de la anomalía verdadera (f):

$$\frac{df}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{e}{h} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left(R \sin f + T \left(\cos f + \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \right) \right) \quad (94)$$

Donde:

- $h = \sqrt{\mu p}$
- $p = a(1 - e^2)$
- $\frac{h}{r^2}$: Es la variación de la anomalía verdadera en una órbita sin perturbaciones.

12 La Tierra No Ideal

Hasta ahora, hemos utilizado el problema de los dos cuerpos para modelar una órbita idealizada. En este enfoque simplificado, la Tierra se ha modelado como un cuerpo esférico con densidad homogénea, lo que permite describir su campo gravitatorio mediante un potencial gravitacional central.

Sin embargo, en la realidad, el campo gravitacional terrestre presenta irregularidades debido a la distribución heterogénea de masa en el interior del planeta. Estas irregularidades generan perturbaciones en las trayectorias orbitales que se desvían de las soluciones analíticas del problema de los dos cuerpos.

Para describir con mayor precisión el campo gravitacional terrestre, se utilizan **armónicos esféricos**, una técnica matemática que permite descomponer el potencial gravitatorio en una serie de términos que representan distintos niveles de asimetría del campo. Este modelo estacionario del potencial no incluye efectos transitorios como mareas o deformaciones dinámicas inducidas por interacciones con otros cuerpos celestes.

El potencial gravitatorio terrestre, en su forma más general, puede expresarse como la suma del potencial gravitatorio ideal de un cuerpo esférico y la contribución de diferentes componentes armónicas:

$$U(\phi_{gc}, \lambda, r) = \frac{\mu}{r} + U_{\text{zonal}} + U_{\text{teseral}} \quad (95)$$

donde:

- μ es el parámetro gravitacional estándar de la Tierra.
- U_{zonal} representa los armónicos zonales, que describen las variaciones en la simetría norte-sur del campo gravitatorio.
- U_{teseral} incorpora los armónicos teserales, que modelan variaciones en la dirección longitudinal, reflejando la distribución irregular de masa en la superficie y el interior terrestre.

Este enfoque proporciona una representación más precisa del campo gravitatorio terrestre y es fundamental para predecir con exactitud el comportamiento de satélites artificiales y otras trayectorias orbitales en proximidad a la Tierra.

El potencial gravitatorio terrestre estacionario puede expresarse como:

$$U(\phi_{gc}, \lambda, r) = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l (C_{l,m} \cos(m\lambda) + S_{l,m} \sin(m\lambda)) P_{l,m}(\sin \phi_{gc}) \left(\frac{R_e}{r} \right)^l \right] \quad (96)$$

donde:

- μ : Es la constante gravitacional del cuerpo central (como la Tierra), que está relacionada con su masa.
- r : Es la distancia radial desde el centro del cuerpo hacia el punto en el espacio donde estamos evaluando el potencial.
- ϕ_{gc} : Es la latitud geocéntrica, que es el ángulo entre el punto sobre la superficie y el plano ecuatorial, medido desde el polo.
- λ : Es la longitud geográfica, que es el ángulo en el plano ecuatorial entre el meridiano de referencia (generalmente el meridiano de Greenwich) y el meridiano que pasa por el punto.

- $P_{l,m}$: Son los polinomios de Legendre asociados, que son funciones matemáticas utilizadas en la expansión de potencias de l y m .
- $C_{l,m}$ y $S_{l,m}$: Son los coeficientes armónicos, que determinan la amplitud de cada término en la expansión. Estos coeficientes dependen de la distribución de masas en el planeta.
- R_e : Es el radio ecuatorial del cuerpo central (como la Tierra). Este radio es importante porque se usa para referirse a la distancia. $(\frac{R_e}{r})^l$ represente cómo disminuye la influencia gravitacional a medida que nos alejamos del planeta.

12.1 Armónicos zonales

Los armónicos zonales son aquellos con $m = 0$ ($C_{l,0}$). Generalmente se los identifica como $J_l = -C_{l,0}$. Estos reflejan el achatamiento de la tierra. El J_2 es el más significativo siendo 3 ordenes de magnitud mayor que el siguiente (J_3).

La Tierra como todos los planetas con rotación presenta un abultamiento en el Ecuador debido a la "fuerza centrífuga". El radio ecuatorial es de 6378 km que es mayor que el radio polar (6357 km) lo que en ocasiones nos lleva a utilizar el radio medio 6371 km. Esta deformación es conocida como achatamiento terrestre.

El achatamiento tiene efectos sobre las órbitas keplerianas (las que se darían si el planeta fuese un cuerpo esférico). El campo gravitatorio de un planeta esférico depende solo de la distancia a su centro, sin embargo, el achatamiento provoca una variación también con la latitud.

El parámetro adimensional que cuantifica los mayores efectos del achatamiento sobre las órbitas es J_2 o segundo armónico zonal. J_2 no es una constante universal si no que cada planeta presenta su propio valor. El valor de este segundo armónico zonal para la Tierra es:

$$J_2 = 1.08263 \times 10^{-3} \quad (97)$$

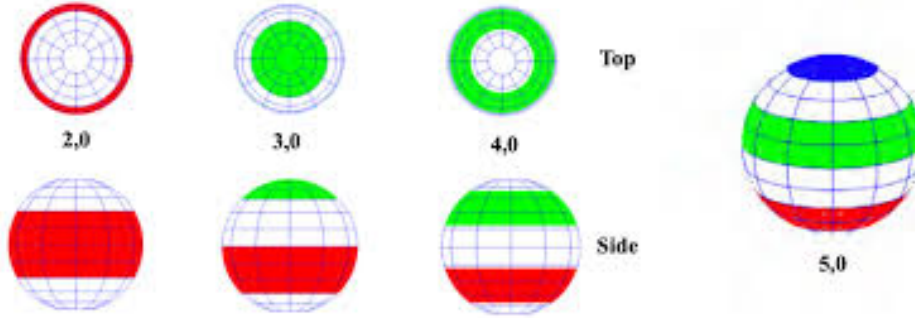


Figure 17: Armónicos zonales

Para nuestros cálculos utilizaremos solo el J_2 que corresponde al primer elemento de la figura $C_{2,0}$

12.2 Armónicos Sectoriales

Son aquellos donde el grado y el orden son iguales ($l = m$ y $C_{l,l}$). Representan bandas de longitud y reflejan heterogeneidades en la distribución de masas en regiones longitudinales. El más importante es el $C_{2,2}$ y representa la elipticidad del ecuador.

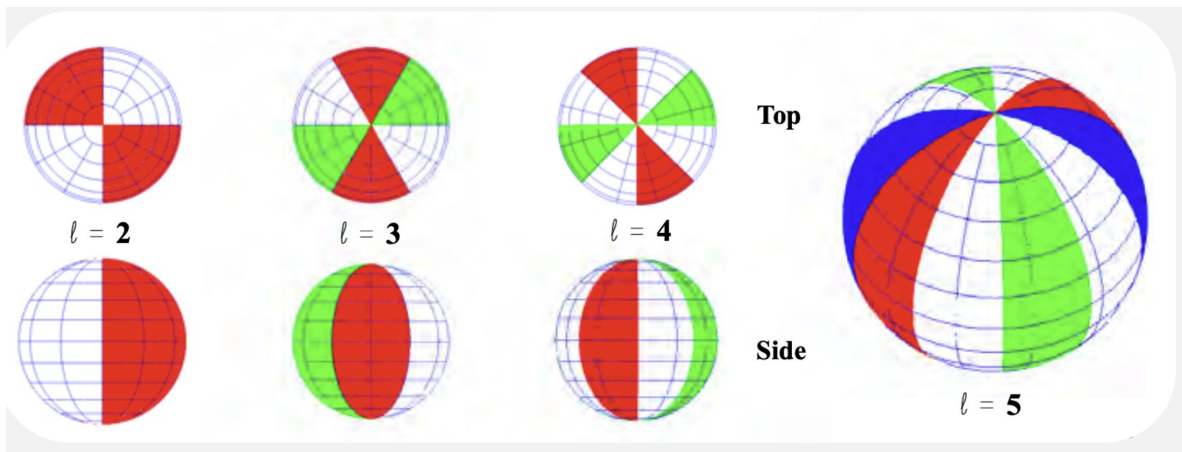


Figure 18: Armónicos sectoriales

12.3 Armónicos teserales

Son aquellos en los que $l \neq m \neq 0$, $C_{l,m}$. Divide a la esfera en un cuadrículado que representa la heterogeneidad en regiones específicas y, por esto, son más complejos de cuantificar. En nuestro caso, no lo estudiaremos ya que no es influyente para nuestro satélite que orbita alrededor de la tierra pero si será de suma importancia si estudiamos un cuerpo que orbita la luna (por sus accidentes).

12.4 Perturbación J2: Precesión del RAAN (Ω)

Como ya mencionamos, la *perturbación* J_2 describe el efecto de la *oblatividad* de un cuerpo central en las órbitas de satélites cercanos. Este efecto está relacionado con el achatamiento del planeta debido a su rotación, y tiene un impacto directo sobre la evolución de la órbita del satélite. Específicamente, una de las consecuencias más importantes es la *precesión del RAAN*.

Precesión del RAAN debido a J_2

La variación de Ω debido al efecto J_2 se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{n R_e^2}{(1 - e^2)^2 a^2} \cos i$$

Donde:

- J_2 es el coeficiente de oblatividad de la Tierra.
- $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ es la *frecuencia orbital media*, donde μ es el parámetro gravitacional de la Tierra.
- R_e es el *radio ecuatorial* de la Tierra, aproximadamente 6378.1 km.
- a es el *semieje mayor* de la órbita.
- e es la *excentricidad* de la órbita.
- i es la *inclinación orbital*.

La fórmula describe la *precesión del nodo ascendente* Ω , que es una variación lenta en el tiempo debido a la deformación del cuerpo central. El signo negativo indica que el nodo ascendente precesiona en sentido retrógrado debido al efecto de J_2 .

- **Dependencia de la inclinación (i):** Si $i = 90^\circ$ (órbita polar), el efecto es máximo. Si $i = 0^\circ$ o 180° (órbitas ecuatoriales), la perturbación desaparece, es decir, no hay precesión nodal.
- **Efecto de la excentricidad (e):** La perturbación es más significativa cuando la órbita tiene una mayor excentricidad, ya que $(1 - e^2)^{-2}$ amplifica el efecto.
- Al depender de la inclinación, se puede utilizar para favorecer ciertos comportamientos orbitales.

Consecuencias y Aplicaciones

El efecto J_2 es importante en la dinámica orbital de satélites, especialmente para misiones en órbitas bajas, como las órbitas polares o geosincrónicas. La precesión del RAAN es relevante en el diseño y seguimiento de órbitas de satélites de observación terrestre, donde el control preciso de la orientación de la órbita es necesario para mantener ciertas condiciones, como una observación constante del mismo punto de la Tierra. Además, este efecto también es esencial en el caso de satélites de comunicaciones y otros satélites de órbitas sincronizadas.

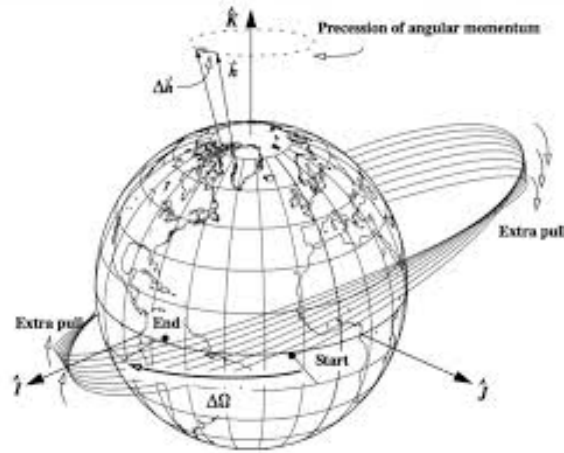


Figure 19: Precesión RAAN J_2 . Fuente Facultad Ingenieria de la Plata

Calcularemos con Python la precesión del RAAN. La órbita será la siguiente:
6678 x 9440 km x 28.0 deg (GCRS) orbit around Earth at epoch J2000.000 (TT)
Veremos como varía la el RAAN:

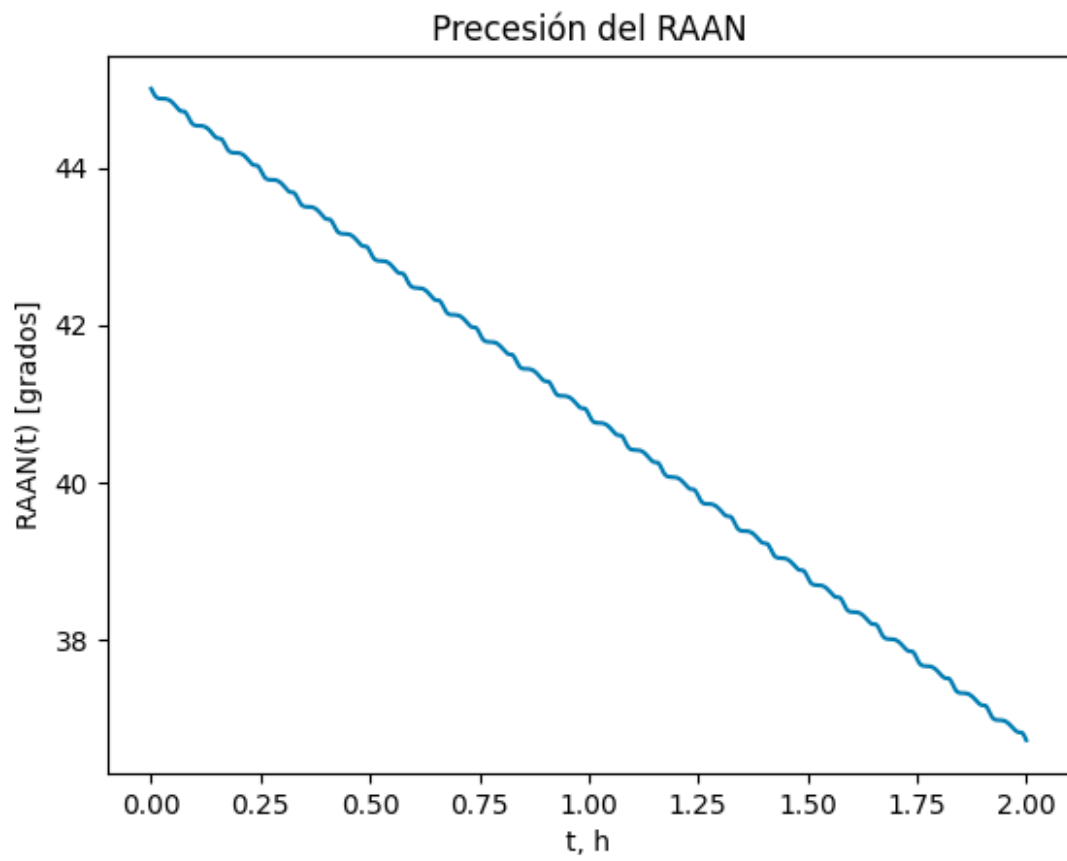


Figure 20: Precesión RAAN 48hs

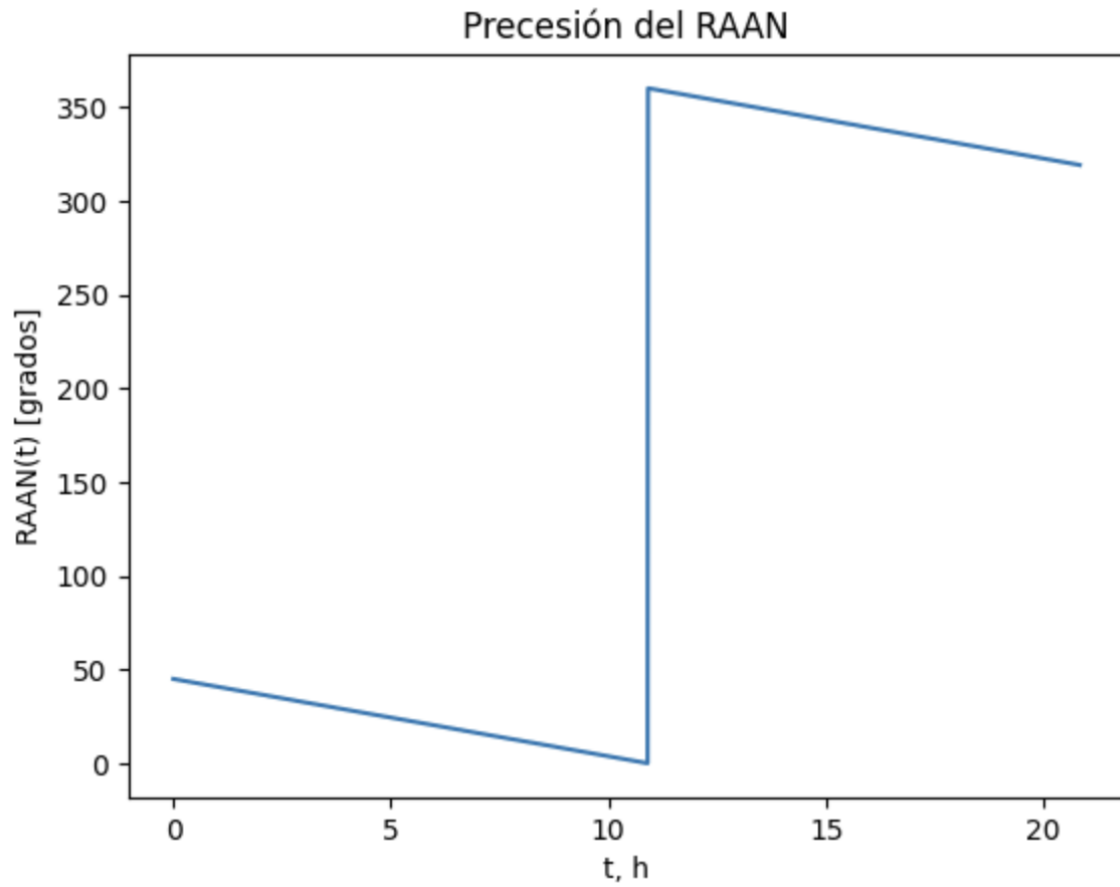


Figure 21: Precesión RAAN 500hs

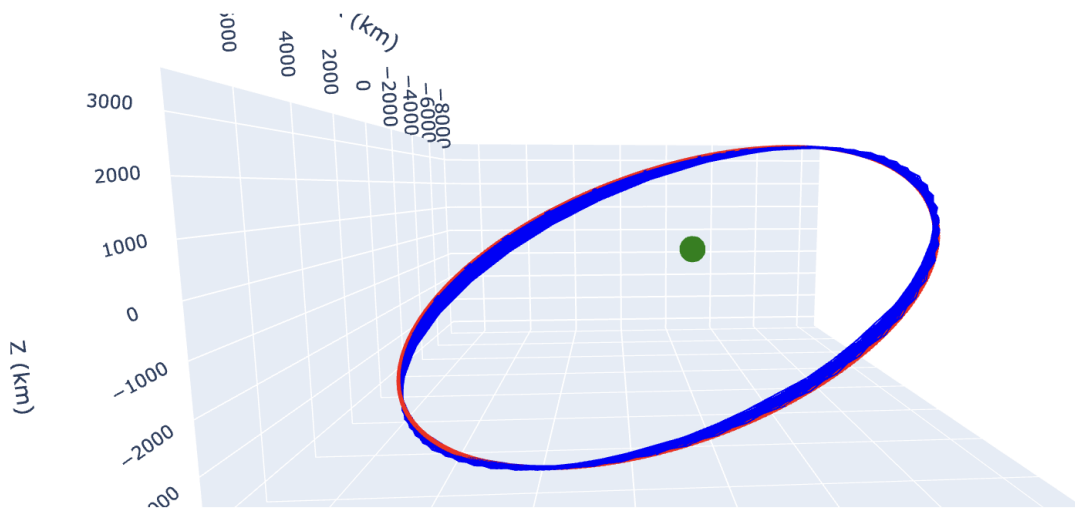


Figure 22: En azul veremos la precesión del RAAN debido a J_2 y en rojo vemos una órbita sin precesión estable.

Precesión del argumento del periapsis (ω) debido a J_2

La precesión del periapsis (periastro si orbitamos la Tierra) se refiere al movimiento gradual del periapsis a lo largo de la órbita. Este movimiento ocurre debido a diversas fuerzas, como las interacciones

gravitacionales de los cuerpos cercanos, la forma no esférica del objeto central, y otros efectos relativistas (que no vienen al caso acá). En este caso, estudiaremos como evoluciona el argumento del periapsis debido a J_2 . La dirección de este movimiento dependerá de la inclinación.

$$\dot{\omega}_{J_2} = \frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left[2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right] \quad (98)$$

- n : movimiento medio.
- p : semiparámetro.
- i : inclinación.

13 Significado del Coeficiente $C_{2,2}$

El coeficiente $C_{2,2}$ representa la contribución de la asimetría ecuatorial de la Tierra. Un valor distinto de cero indica que la Tierra no es perfectamente simétrica respecto a su eje polar.

- **Orden** $m = 2$: Indica variaciones en la longitud.
- **Grado** $n = 2$: Se refiere a la magnitud de la perturbación.

Este término induce una precesión longitudinal en las órbitas de los satélites.

13.1 Deriva Este-Oeste Inducida por $C_{2,2}$

Nota: No se detallarán de forma exhaustiva los efectos debido al $C_{2,2}$.

El efecto más significativo es la variación secular de la longitud del nodo ascendente Ω y del argumento del periapsis ω . Para un satélite en órbita terrestre:

$$\dot{\lambda} = -\frac{3nR^2}{2a^2(1-e^2)^2} C_{2,2} \sin(2\lambda) \quad (99)$$

donde:

- $n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$ es la velocidad media del satélite.
- a es el semieje mayor de la órbita.
- e es la excentricidad.
- λ es la longitud geográfica del nodo ascendente.

Este término provoca una **deriva longitudinal**, moviendo la órbita del satélite hacia el este o el oeste.

13.2 Ejemplo en Satélites GEO

Para satélites geoestacionarios, el efecto de $C_{2,2}$ causa una deriva oscilatoria en longitud. La ecuación de movimiento es:

$$\ddot{\lambda} + \omega_\lambda^2 \lambda = 0 \quad (100)$$

donde ω_λ es la frecuencia de oscilación impuesta por $C_{2,2}$. Este es un factor clave en la estabilidad de satélites artificiales y en la planeación de misiones espaciales.

14 Conclusión

Si bien es un trabajo introductorio con oportunidad de profundización en muchos aspectos, esto me dió los lineamientos generales detrás de las ecuaciones que rigen la mecánica orbital de un cuerpo que orbita alrededor de otro. Esto me permitió entender los tipos de fuerzas y perturbaciones que puede experimentar el mismo. En particular se hizo hincapié en satélites de órbitas bajas (LEO) concentrándonos en los efectos de la resistencia atmosférica y perturbaciones debido al J2.

En este trabajo no se detalla como varían los parámetros orbitales bajo la acción de un tercer cuerpo o bien debido a efectos relativistas. Este será un desafío que tomaré en otro momento.