

# Alteraciones en el espacio-tiempo

Franco Di Leo

January 31, 2025

## Abstract

Con este trabajo, se busca comprender como la presencia de materia afecta a la geometría del espacio-tiempo en el que estamos inmersos. En particular, buscamos entender como un planeta o estrella de simetría esférica de masa  $M$  y radio  $R$  que se encuentra sin velocidad angular curva el espacio-tiempo y como esto afecta a un cuerpo que se encuentra a una distancia  $r$  mayor al radio  $R$  de este objeto.

## 1 Herramientas de Geometría diferencial

### 1.1 Superficies

Hablando de manera informal, una superficie en  $R^3$  está formada por piezas del plano que han sido deformadas continuamente, ordenadas de forma tal que no existan puntos angulosos, lados marcados o intersecciones consigo misma. Con estas condiciones, la superficie  $M \subset R^3$  será diferenciable.

Con esto claro, un parche coordenado es una función inyectiva  $C^1$   $x : U \rightarrow R^3$ , donde  $U$  es un abierto en  $R^2$  con coordenadas  $u_1, u_2$  tal que:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \times \frac{\partial x}{\partial u_2} \neq 0 \text{ en } U. \quad (1)$$

Esta condición garantiza la regularidad en la superficie  $M$ . Se denomina superficie simple a la **imagen de un parche coordenado**.

### 1.2 Espacios tangentes y cotangentes en superficies

Se denomina *espacio tangente* al conjunto asociado a cada punto de una variedad diferenciable  $M$ , formado por todos los vectores tangentes a  $M$  en dicho punto. En particular, la unión disjunta de todos los espacios tangentes a cada punto de la variedad forman el **fibrado tangente**.

Un vector  $T$  es tangente a una superficie simple en el punto  $P = x(a, b)$  si  $\vec{U}$  es el vector velocidad de una curva en  $x$  cuando pasa por  $P$ .

$$dx_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}(a, b) \quad y \quad dx_2 = \frac{\partial x}{\partial u_2}(a, b)$$

$dx_1$  y  $dx_2$  representan los vectores tangentes a la superficie simple en  $P$ . Además, por ser regulares, son linealmente independientes. En consecuencia, cualquier vector tangente a la superficie  $M$  en  $P$  puede expresarse como combinación lineal de  $dx_1$  y  $dx_2$ , es decir:

$$T = \alpha dx_1 + \beta dx_2 \text{ con } \alpha, \beta \in R.$$

De esta forma, el conjunto  $\{dx_1, dx_2\}$  constituye una base del espacio tangente  $T_p M$  en el punto  $P$ .

**Espacio cotangente:** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $p \in M$ . El espacio cotangente en  $p$ , denotado como  $T_p^* M$  es el espacio dual del espacio tangente  $T_p M$ . Esto implica que  $T_p^* M = \{\omega : T_p M \rightarrow R | \omega \text{ es lineal} \}$

En este contexto  $T_p M$  representa el espacio tangente a  $M$  en  $p$  y  $T_p^* M$  es el espacio cotangente a  $M$  en  $p$ , compuesto por 1-formas que toman un vector tangente  $\vec{v} \in T$  y devuelven un número real  $\omega(\vec{v})$ .

### 1.3 Tensor métrico en Superficies

El tensor métrico es un tensor de rango (0,2) que generaliza el concepto de producto escalar en espacios curvos y define conceptos métricos como distancias y ángulos sobre una variedad diferenciable (espacio localmente euclídeo). El tensor métrico en coordenadas locales se define como:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle \quad (2)$$

$\frac{\partial x}{\partial u_i}$  representa la derivada parcial del parche respecto a la  $i$ -ésima variable y  $\frac{\partial x}{\partial u_j}$  es la parcial del parche en la  $j$ -ésima variable.

En el caso de una variedad  $M$  en  $R^2$ , definida a través de un parche  $x(u_1, u_2)$ , el tensor métrico se puede representar como una matriz  $G \in R^{2 \times 2}$ , que tiene la siguiente forma:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

donde los elementos  $g_{ij}$  son las componentes del tensor métrico y  $g_{ij} = g_{ji}$ .

En esta matriz, los elementos de la diagonal  $g_{11}, g_{22}$  corresponden a las componentes de la métrica en las direcciones locales, mientras que los elementos fuera de la diagonal  $g_{12} = g_{21}$  representan las covariancias entre las direcciones locales.

A partir del tensor métrico  $g_{ij}$  podemos definir el diferencial de longitud cuadrado  $ds^2$  que se obtiene de aplicar el tensor métrico a la variaciones  $dx_i$  y  $dx_j$  de las coordenadas locales  $x^i, x^j$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3)$$

*Nota: En este caso se usa la notación de super-índice para mantener una coherencia con los subíndices del tensor métrico. No son potencias sino, más bien, siguen siendo las coordenadas.*

*Aclaración: Formalmente debería escribirse:  $ds^2 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$*

## 2 Definición de Tensor

Un **tensor** es un objeto matemático que describe una relación multilineal entre conjuntos de objetos relacionados con un espacio vectorial.

Para definir un tensor, consideremos un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita.  $V$  puede representar, por ejemplo, un espacio tangente a una variedad u otro espacio vectorial particular. Un tensor de tipo  $(p, q)$ , denotado como  $T^{(p, q)}$ , es una aplicación multilineal:

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ veces}} \rightarrow R,$$

donde:

- $V^*$  es el espacio dual de  $V$ , es decir, el espacio de covectores (funcionales lineales definidos en  $V$ ).
- La aplicación es lineal en cada uno de sus argumentos.

Un tensor de tipo  $(p, q)$  toma  $p$  covectores y  $q$  vectores, y devuelve un número real  $R$ . En términos más concretos:

- Las  $p$  copias de  $V^*$  representan los componentes **contravariantes** (índices bajos).
- Las  $q$  copias de  $V$  representan los componentes **covariantes** (índices altos).

Los tensores tienen una propiedad clave: **invariancia bajo cambios de base**, lo que significa que sus componentes transforman de manera predecible cuando se cambia la base de  $V$ . Propiedad extremadamente útil en muchas aplicaciones físicas.

### Ej 1: Escalar (Tensor de tipo $(0,0)$ )

Un escalar es un tensor de tipo  $(0,0)$ . Es simplemente un número real  $s \in \mathbb{R}$ . Los escalares no dependen del sistema de coordenadas ni del espacio vectorial, y son invariantes bajo transformaciones de base.

### Ej 2: Vector (Tensor de tipo $(1,0)$ )

Un vector es un tensor de tipo  $(1,0)$ . En un espacio vectorial  $V$ , un vector  $\mathbf{v}$  puede representarse en una base como:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i,$$

donde  $\{\mathbf{e}_i\}$  son los vectores base y  $\{v^i\}$  son los componentes contravariantes del vector.

### Ej 3: Covector (Tensor de tipo $(0,1)$ )

Un covector es un tensor de tipo  $(0,1)$ , elemento del espacio dual  $V^*$ . Asigna un número real a cada vector mediante una aplicación lineal. En una base, se escribe como:

$$\omega = \omega_i \mathbf{e}^i,$$

donde  $\{\mathbf{e}^i\}$  son los covectores base y  $\{\omega_i\}$  son los componentes covariantes.

## 2.1 Conexión de Levi-Civita

**Definición:** Sea  $(M,g)$  una variedad, entonces una conexión afín  $\nabla$  es una conexión de Levi-Civita si satisface:

1. Preserva la métrica para cualesquiera campos vectoriales  $X,Y,Z$  se tiene

$$X_g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (4)$$

Donde  $Xg(y,z)$  denota la derivada de la función  $g(Y,Z)$  a lo largo del campo vectorial  $X$ .

2. Es libre de torsión.

En palabras simples, la conexión de Levi-Civita es la conexión libre de torsión del fibrado tangente (unión disjunta de todos los espacios tangentes a cada punto de la variedad) preservando su tensor métrico  $g_{ij}$

Los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  son una representación específica de conexión (generalmente la de Levi-Civita) en un sistema de coordenadas específico. Los símbolos definen como cambia un vector cuando se transporta en la variedad y se calculan a partir de la métrica  $g_{ij}$ .

## 2.2 Símbolos de Christoffel

Los coeficientes de Christoffel son definidos a partir del tensor métrico de la variedad. Consideramos una variedad diferenciable  $M$  con un tensor métrico  $g_{ij}$  en coordenadas  $x^i$ . Como ya dijimos, el tensor  $g_{ij}$  permite calcular distancias y ángulos en  $M$  (variedad). Sin embargo, para el cálculo de derivadas de vectores en una superficie curva, necesitamos introducir otro concepto: **los coeficientes de Christoffel**.

En espacios euclideos, las derivadas de los vectores se comportan de forma predecible pero en variedades curvas las coordenadas locales no permanecen constantes al moverse de un punto a otro. Los simbolos de Christoffel permiten corregir esta diferencia de las coordenadas ya que se formulan a partir de la derivación y anulación de la derivada covariante del tensor métrico  $g_{ij}$ . La expresión general de los simbolos de Christoffel es:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad (5)$$

- $i, j$  y  $k$  son los índices de las componentes de la variedad.
  - $l$  es un componente de suma que itera sobre las coordenadas de la variedad.
- $g^{kl}$  es la inversa de la métrica  $g_{ij}$  tal que  $\mathbf{g}^{kl} = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\det(g)} \text{adj}(g)$

Estos coeficientes se definen, generalmente, sobre el espacio tangente y se refiere a como las bases locales de estos espacios cambian de un punto a otro sobre la variedad.

## 2.3 Ejemplo de aplicación sobre una esfera

Para afianzar estos conceptos, calcularemos el tensor métrico  $g_{ij}$  y los simbolos de Christoffel sobre una esfera de radio  $R$ . Tomamos la parametrización de esta variedad en coordenadas esféricas:

$$\vec{x}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} x(\theta, \phi) \\ y(\theta, \phi) \\ z(\theta, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{con } \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi).$$

Calcularemos las derivadas parciales del parche en la  $i$ -ésima coordenada  $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}$ . En este caso  $i \in \{\theta, \phi\}$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto, calculamos el tensor métrico  $g_{ij}$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = R^2$$

$$g_{\theta\phi} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = 0$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = R^2 \sin^2 \theta.$$

$$\text{Finalmente : } g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Con el tensor métrico  $g_{ij}$  calculamos los simbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Finalmente:

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot g(\theta), \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 0, \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = 0, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = 0.$$

Además, con el tensor métrico, podemos calcular el diferencial cuadrado de longitud:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

## 2.4 Curvatura geodésica en Variedades

Una geodésica es la curva de menor longitud que une dos puntos de una variedad y está contenida en esta. Las geodésicas son las líneas de menor curvatura fijado un punto y una dirección dada sobre la variedad.

En el caso de una variedad diferenciable  $M$  equipada con la conexión de Levi-Civita, las geodésicas quedarán definidas por la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0$$

Donde:

- $x^i, x^j, x^k$ : son las coordenadas de la variedad.
- $\lambda$ : Es un parámetro afín (por ejemplo el tiempo).
- $\Gamma_{ij}^k$ : Son los símbolos de Christoffel.

Siguiendo con el ejemplo de nuestra esfera, en este caso de radio unitario ( $R=1$ )

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot g(\theta), \quad (7)$$

En nuestro caso, tenemos dos ecuaciones diferenciales ya que contamos con dos coordenadas  $\phi, \theta$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0$$

Para resolver estas ecuaciones diferenciales debemos elegir un punto  $P_0 = (\theta_0, \phi_0)$  y una dirección. En este caso, elegimos la dirección del vector tangente a la curva en  $P_0$ . Vemos que las geodésicas en este caso están dadas por círculos máximos (meridianos).

En particular y para simplificar, vamos a suponer que  $P_0$  es el polo norte de la esfera  $P_0 = (\theta_0 = 0, \phi)$

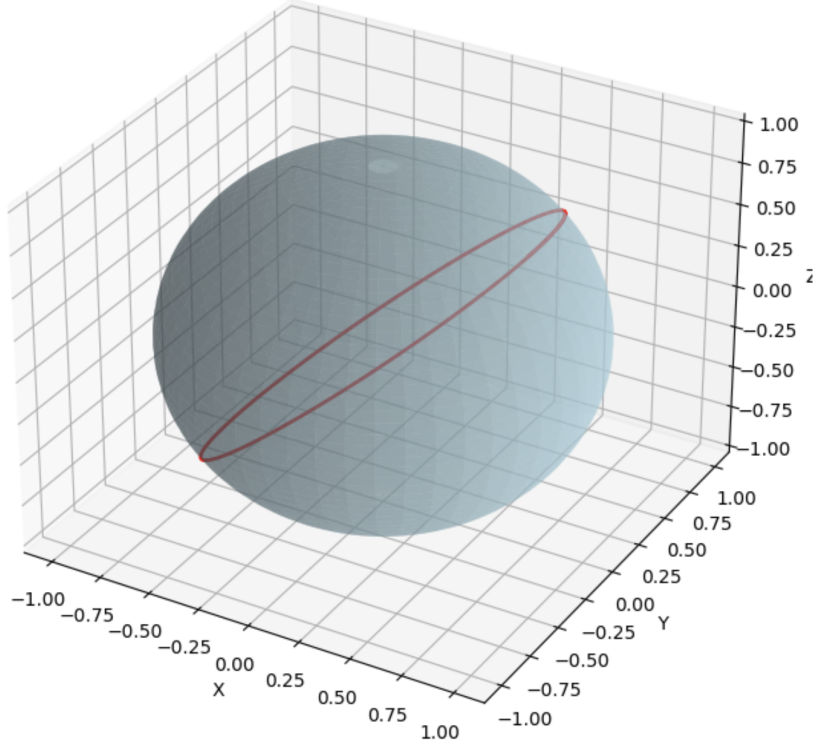


Figure 1: Línea geodésica resuelta por método de Runge Kutta en Python

## 2.5 Tensor de Curvatura

El **tensor de curvatura de Riemann** mide la no conmutatividad de las derivadas covariantes y se denota como  $R$ . Formalmente, se define como:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

donde  $X, Y, Z$  son campos vectoriales en una variedad diferenciable con una conexión  $\nabla$ , y  $[X, Y]$  representa el corchete de Lie entre  $X$  y  $Y$ .

Para los objetivos prácticos de este documento, el tensor de Riemann será usado con las siguientes notaciones:

En términos de componentes, el tensor de Riemann se expresa como:

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{jk}.$$

Si se baja el índice superior usando la métrica  $g_{ij}$ , obtenemos:

$$R_{ijkl} = g_{im} (\partial_k \Gamma^m_{jl} - \partial_l \Gamma^m_{jk} + \Gamma^m_{kn} \Gamma^n_{jl} - \Gamma^m_{ln} \Gamma^n_{jk}).$$

## Interpretación Conceptual

El tensor  $R(X, Y)Z$  describe cómo un vector  $Z$  cambia al ser transportado a lo largo de un camino cerrado definido por los campos  $X$  y  $Y$ . Su importancia radica en que captura la curvatura intrínseca de la variedad, independiente de cómo esté embebida en un espacio mayor.

## Propiedades del Tensor de Riemann

El tensor de Riemann satisface las siguientes simetrías:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} = R_{klij}.$$

Nota: Si usamos los índices contravariantes  $R_{jkl}^i$  representamos los componentes en relación a las direcciones de los vectores tangentes. El tensor de curvatura describe cómo los vectores tangentes cambian al transportarse a lo largo de la variedad.

Nota 2: En el caso de los índices covariantes  $R_{ijkl}$  obtenemos componentes relacionadas con la longitud y ángulo de los vectores teniendo en cuenta la métrica y la estructura del espacio en el que vive la variedad.

Vamos a desarrollar el tensor de Riemann para el caso de estudio previo: Una esfera de radio  $R$ . Partimos de la notación de componentes:

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^m.$$

Utilizamos Python para obtener cada componente de nuestro Tensor y aplanamos el resultado para obtener una visualización 2D.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \sin^2(\theta) \\ -\sin^2(\theta) & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Figure 2: Tensor de curvatura para una esfera

### 3 Espacio tiempo de Minkowski

Comenzamos a trabajar con relatividad especial. En este contexto, no vamos a tener en cuenta la curvatura que produce un objeto en nuestro ente espacio-tiempo pero tenemos que definir en donde vamos a estar trabajando de ahora en más. El espacio de Minkowski es una variedad de cuatro dimensiones y curvatura nula utilizada para describir fenómenos físicos en el marco de la teoría especial de la relatividad.

En este espacio, tenemos las 3 dimensiones ordinarias y una dimension adicional: el tiempo. Juntando estas en un mismo concepto; el Espacio-tiempo de Minkowski es un espacio plano de cuatro dimensiones representado por el cuadvivector posición  $x^\alpha$  o bien:  $x = (t, x, y, z)$  y, por lo general, para hacer que coincida el marco temporal con una distancia se lo expresa de esta forma:  $(ct, x, y, z)$  siendo  $c$  la velocidad de la luz.

Nota: El cuadvivector velocidad  $V^\mu$  se define como la derivada del cuadvivector posición  $x^\mu$  con respecto al tiempo propio  $\tau$ :

$$V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau},$$

donde  $x^\alpha = (ct, x, y, z)$ . Específicamente, las componentes del cuadvivector velocidad son:

$$V^\alpha = \left( \frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right).$$

Aquí,  $\tau$  es el tiempo propio, una cantidad invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Aquí, los índices  $\mu, \nu$  toman valores en  $\{0, 1, 2, 3\}$ , donde 0 representa la componente temporal y 1, 2, 3 representan las componentes espaciales.

Nota: La notación de subíndices sigue siendo la misma que en las secciones anteriores, solamente se reemplaza  $\{i, j\}$  por  $\{\mu, \nu\}$  que es algo propio de relatividad.

### 3.1 Intervalo espacio-temporal

La métrica de Minkowski se utiliza para calcular el intervalo espacio-temporal  $s^2$  entre dos eventos  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$  y  $(t_2, x_2, y_2, z_2)$ . Si desarrollamos  $ds^2$  a partir del tensor métrico:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (9)$$

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

donde  $ct$  es la coordenada temporal expresada en términos de la velocidad de la luz  $c$ , y  $x, y, z$  son las coordenadas espaciales.

El intervalo espaciotemporal  $s^2$  determina la naturaleza de la relación causal entre dos eventos:

- **Intervalo tipo tiempo** ( $s^2 < 0$ ): Los eventos pueden influirse causalmente.
- **Intervalo tipo luz** ( $s^2 = 0$ ): Los eventos están conectados por un rayo de luz.
- **Intervalo tipo espacio** ( $s^2 > 0$ ): Los eventos no pueden influirse entre sí.

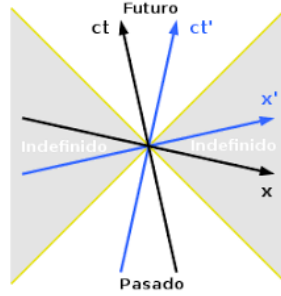


Figure 3: Espacio-tiempo de Minkowski

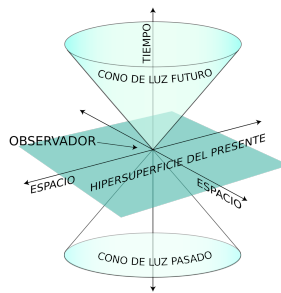


Figure 4: Cono de luz a partir de la métrica.

## Transformaciones de Lorentz

La métrica de Minkowski es invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales (aquellos que están en reposo o se mueven a velocidad constante):  $S$  y  $S'$ . El sistema  $S'$  se mueve con velocidad constante  $v$  a lo largo del eje  $x$



del sistema  $S$ . Supongamos que los orígenes de ambos sistemas coinciden en  $t = t' = 0$ . Queremos encontrar la relación entre las coordenadas  $(t, x, y, z)$  en  $S$  y las coordenadas  $(t', x', y', z')$  en  $S'$ .

#### Suposiciones iniciales:

Los postulados de la relatividad especial implican que:

- La velocidad de la luz  $c$  es la misma en ambos sistemas.
- Las transformaciones deben ser lineales, debido a la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo.

Por lo tanto, las transformaciones generales tienen la forma:

$$\begin{aligned}x' &= Ax + Bt, \\t' &= Cx + Dt,\end{aligned}$$

donde  $A, B, C, D$  son constantes a determinar.

Las coordenadas  $y$  y  $z$  permanecen invariantes, ya que el movimiento es solo en la dirección  $x$ :

$$y' = y, \quad z' = z.$$

### 3.1 Constancia de la velocidad de la luz

Consideremos una onda luminosa que se propaga en el vacío. En el sistema  $S$ , el frente de onda satisface:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

En el sistema  $S'$ , también debe cumplirse:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

Sustituyendo las transformaciones generales para  $x'$  y  $t'$  en esta ecuación:

$$(Ax + Bt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (Cx + Dt)^2.$$

Como  $y$  y  $z$  no cambian, podemos centrarnos en la relación en  $x$  y  $t$ :

$$(Ax + Bt)^2 = c^2 (Cx + Dt)^2.$$

### 3.2 Determinación de las constantes

Expandiendo y comparando los coeficientes de  $x^2$ ,  $t^2$ , y  $xt$ , obtenemos las siguientes restricciones:

$$A^2 - c^2 C^2 = 1, \quad B^2 - c^2 D^2 = -1, \quad AB = c^2 CD.$$

### 3.3 Condición de simetría y límite clásico

Cuando  $v = 0$ ,  $S$  y  $S'$  son idénticos, por lo que  $A = D = 1$  y  $B = C = 0$ . Para un sistema que se mueve con velocidad  $v$ , podemos parametrizar las constantes en términos de un factor  $\gamma$ , definido como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

De esta manera, las transformaciones toman la forma:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).\end{aligned}$$

### 3.4 Forma final de las transformaciones de Lorentz

Agrupando todas las ecuaciones, las transformaciones de Lorentz completas son:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \\y' &= y, \\z' &= z,\end{aligned}$$

donde el factor de Lorentz  $\gamma$  está dado por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10)$$

Estas ecuaciones describen cómo se relacionan las coordenadas espacio-temporales de un evento observado desde dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo.

#### Dilatación temporal

Un reloj en movimiento respecto a un observador en reposo mide un tiempo más largo. Esto se deriva de la transformación temporal:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t.$$

#### Contracción del espacio

Un objeto en movimiento respecto a un observador en reposo parece más corto en la dirección del movimiento:

$$L' = \frac{L}{\gamma}.$$

### Energía y momento en relatividad especial

La cuadrivelocidad  $V^\mu$  está relacionada con la cuádrimomento  $p^\mu$  de una partícula mediante su masa  $m$ :

$$p^\mu = mu^\mu.$$

Expresando las componentes del cuádrimomento:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right),$$

donde  $E$  es la energía total de la partícula, y  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$  es su momento lineal.

#### Relación fundamental del cuádrimomento

El cuádrimomento debe satisfacer la relación invariante de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 c^2.$$

Sustituyendo las componentes del cuádrimomento, obtenemos:

$$-\left(\frac{E}{c}\right)^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -m^2 c^2.$$

Simplificando:

$$\frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2,$$

o, multiplicando por  $c^2$ :

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4.$$

### Energía en reposo

Cuando la partícula está en reposo ( $|\vec{p}| = 0$ ), el término de momento desaparece y la ecuación se reduce a:

$$E^2 = m^2 c^4.$$

Por lo tanto, la energía total de una partícula en reposo es:

$$E = mc^2.$$

## 4 Relatividad general

La relatividad general amplía la relatividad especial para incluir marcos de referencia no inerciales y describe la gravedad como una curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de masa y energía.

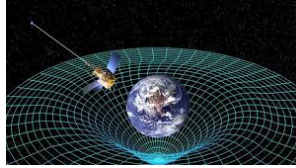


Figure 5: Representación de la curvatura espacio-tiempo por un cuerpo.

#### Características principales:

- **Gravedad como curvatura del espacio-tiempo:** La gravedad no es una fuerza en el sentido convencional, sino el resultado de la deformación del espacio-tiempo por objetos masivos.
- **Equivalencia de marcos acelerados:** Los efectos de un campo gravitacional son equivalentes a los efectos de un marco de referencia acelerado (Principio de equivalencia).
- **Ecuaciones de campo de Einstein:** Relacionan la curvatura del espacio-tiempo con la distribución de masa y energía.

### Ecuaciones de campo de Einstein

La ecuación fundamental de la relatividad general es:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

#### Componentes

- $G_{\mu\nu}$ : Tensor de Einstein, que describe la curvatura del espacio-tiempo. Se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

donde:

- $R_{\mu\nu}$ : Tensor de Ricci, que describe la curvatura local causada por la materia.
- $R$ : Escalar de Ricci, que es la traza del tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

- $g_{\mu\nu}$ : Tensor métrico, que define la geometría del espacio-tiempo.
- $\Lambda$ : Constante cosmológica, asociada con la energía oscura y la expansión acelerada del universo.
- $T_{\mu\nu}$ : Tensor energía-momento, que describe la densidad y flujo de energía y momento en el espacio-tiempo.
- $G$ : Constante de gravitación universal.
- $c$ : Velocidad de la luz en el vacío.

### Interpretación:

El lado izquierdo de la ecuación ( $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$ ) describe la geometría del espacio-tiempo, mientras que el lado derecho ( $\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ ) representa la distribución de masa y energía. Estas ecuaciones establecen cómo la materia y la energía afectan la curvatura del espacio-tiempo y cómo esta curvatura influye en el movimiento de la materia.

## 5 Caso de estudio

En nuestro caso particular, queremos entender como un planeta de radio  $R$  con simetría esférica de masa  $M$  perturba al espacio-tiempo (4-variedad) en un radio  $r > R$  por lo que las hipótesis de partida para aplicar en las ecuaciones de campo de la teoría general de la relatividad son:

- Planeta de radio  $R$  y masa  $M$  con simetría esférica.
- Cuerpo estático.
- Se estudiará para  $r > R$
- Se estudiará el efecto que tiene en las proximidades del objeto masivo por lo que podemos suponer que la constante cosmológica  $\Lambda = 0$

Con esto en cuenta, bajo estas condiciones  $T_{\mu\nu} = 0$  ya que estamos analizando las vecindades del espacio-tiempo  $R > r$ .

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (11)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, definido como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}.$$

Sustituyendo esta definición en las ecuaciones de campo, obtenemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0.$$

Agrupando los términos proporcionales a  $g_{\mu\nu}$ , la ecuación se reescribe como:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}.$$

$R_{\mu\nu}$  es el **tensor de Ricci**, que describe cómo el espacio-tiempo se curva debido a la presencia de masa y energía. Este tensor se obtiene mediante la contracción del tensor de Riemann  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  en dos de sus índices.  $R$  es el escalar de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}, \quad (12)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (13)$$

donde:

- $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  es el **tensor de curvatura de Riemann**.

- La contracción implica una suma sobre los índices repetidos  $\rho$  y  $\sigma$ , reduciendo el rango del tensor.

El tensor de Ricci depende del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , ya que el tensor de Riemann se calcula a partir de las **conexiones de Levi-Civita**.  $R_{\mu\nu}$  mide cómo las trayectorias geodésicas tienden a converger o divergir en una región del espacio-tiempo.

R es el escalar de Ricci donde:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

De esta forma y considerando todas nuestras hipótesis del caso de estudio:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (14)$$

#### Aclaración:

El escalar de Ricci es una generalización a variedades de  $n$  dimensiones del concepto de curvatura de Gauss. Este nos da una idea de la curvatura global de la variedad. En 2 dimensiones, el tensor de Riemann tiene solo una componente independiente y la curvatura de Gauss está definida por:

$$K = \frac{R_{1212}}{\det(g)}$$

Y el escalar de Ricci:

$$Ricci = 2K$$

## 6 Métrica de Schwarzschild

Del apartado anterior nos queda claro que debemos resolver la ecuación de campo de Einstein a partir del tensor de Ricci y la métrica.

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (15)$$

Para esto, podemos utilizar la métrica de **Schwarzschild** que es una ecuación exacta a las ecuaciones de campo de Einstein que describe el campo generado por una estrella o una masa esférica no rotante y sin carga. Este conforma un espacio Ricci-plano. Es plano hablando siempre de la deformación causada por la energía. Recordemos que tiene una curvatura intrínseca dada por el tensor métrico de Riemann.

Para llegar a las ecuaciones de **Schwarzschild** partimos de la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

Parametrizando  $x, y, z$  en coordenadas esféricas

$$x = x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi),$$

$$x(r, \theta, \phi) = (r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta))$$

Operando de esta forma, los diferenciales quedan:

$$dx = \sin\theta \cos\phi dr + r \cos\theta \cos\phi d\theta - r \sin\theta \sin\phi d\phi,$$

$$dy = \sin\theta \sin\phi dr + r \cos\theta \sin\phi d\theta + r \sin\theta \cos\phi d\phi,$$

$$dz = \cos\theta dr - r \sin\theta d\theta$$

Si reemplazamos en la métrica de Minkowski resulta:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (16)$$

Cuyo tensor métrico asociado de firma Lorentziana  $(-, +, +, +)$  viene dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

Y cuya inversa  $g^{\mu\nu}$  resulta:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Bajo las hipótesis propuestas (simetría esférica, espacio-tiempo estático) proponemos funciones que no dependan del tiempo ni de coordenadas angulares por lo que la métrica de SCHWARZWILD tendrá la siguiente forma:

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + g(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (19)$$

Proponemos dos exponenciales que dependen de  $r$  lo que refleja la simetría esférica del problema. No hay términos cruzados lo que asegura la condición estática del espacio-tiempo. Además, sabemos que lejos de la estrella / planeta, la métrica tiene que recuperar la estructura plana por lo que las funciones propuestas tendrán la forma:  $e^{2T(r)}$  y  $e^{2R(r)}$  y tienen que tender a cero cuanto más me alejo del cuerpo.

$$ds^2 = -c^2 e^{2T(r)} dt^2 + e^{2R(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (20)$$

donde  $T(r)$  y  $R(r)$  son funciones desconocidas de  $r$  que se determinan resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein.

## 6.1 Componentes del tensor métrico

$$g_{tt} = -c^2 e^{2T(r)}, \quad g_{rr} = e^{2R(r)}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta.$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 e^{2T(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2R(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (21)$$

## 6.2 Inversa del tensor métrico

Al ser diagonal, calcular la inversa de  $g_{\mu\mu}$  resulta simple:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2 e^{2T(r)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{2R(r)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (22)$$

## 6.3 Simbolos de Christoffel

Recordemos que en la sección 2 definimos los simbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Estos son los coeficientes no nulos que tenemos derivados de nuestro tensor métrico. Calcularemos algunos a mano y después usaremos Python para automatizar esta tarea.

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta \\
\Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi \\
\Gamma_{tt}^r, \Gamma_{rr}^r, \Gamma_{\theta\theta}^r, \Gamma_{\phi\phi}^r, \Gamma_{\phi\phi}^\theta
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt}\left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial t}\right)$$

$$\text{Donde: } \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} = 0 \implies \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt}\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{-1}{2e^{2T(r)}} \frac{-\partial e^{2T(r)}}{\partial r}$$

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{dT}{dr}$$

$$\text{Cálculo de } \Gamma_{r\theta}^\theta$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2r^2}2r$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$$

Operando sobre todos los simbolos obtenemos:

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{\partial T(r)}{\partial r}$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\Gamma_{tt}^r = c^2 e^{-2R(r)} e^{2T(r)} \frac{\partial T(r)}{\partial r}$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{\partial R(r)}{\partial r}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-2R(r)}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r e^{-2R(r)} \sin^2(\theta)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Una vez encontrados los simbolos de Christoffel, hallaremos el tensor de Ricci (recordando que resulta de una contracción del tensor de curvatura de Riemann)

$$R_{tt} = c^2 \left( -r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \frac{\partial T(r)}{\partial r} + r \left( \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right)^2 + r \frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right) \frac{e^{-2R(r)+2T(r)}}{r}$$

$$R_{rr} = \frac{\partial R(r)}{\partial r} \frac{\partial T(r)}{\partial r} - \left( \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + \frac{2 \frac{\partial R(r)}{\partial r}}{r}$$

$$R_{\theta\theta} = \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} - r \frac{\partial T(r)}{\partial r} + e^{2R(r)} - 1 \right) e^{-2R(r)}$$

$$R_{\phi\phi} = \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} - r \frac{\partial T(r)}{\partial r} + e^{2R(r)} - 1 \right) e^{-2R(r)} \sin^2(\theta)$$

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

A partir del tensor de Ricci, encontramos el escalar de Ricci:

$$R = \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \frac{\partial T(r)}{\partial r} - r^2 \left( \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right)^2 - r^2 \frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial R(r)}{\partial r} - 2r \frac{\partial T(r)}{\partial r} + e^{2R(r)} - 1 \right) \frac{e^{-2R(r)}}{r^2} \quad (23)$$

Recordamos que, para nuestro caso, el tensor de Einstein queda definido por el tensor de Ricci, el escalar de Ricci operados bajo la métrica de Schwarzschild:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

A partir del tensor de Einstein y despejando nuestras funciones exponenciales propuestas podemos encontrar una de las componentes de la métrica (aplicando las condiciones de vacío)

$$e^{2R} = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \quad (24)$$

$$e^{2T} = e^{2C} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \quad (25)$$

Reemplazando esto en la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -c^2 e^{2C} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (26)$$

O lo que es lo mismo:

$$ds^2 = -kc^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

Teniendo en cuenta que  $e^{2C}$  resulta una constante de integración, nos podemos deshacer de ella teniendo en cuenta que lejos de la estrella esta constante debe tender a su homóloga plana, es decir:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{tt} = -kc^2 = -c^2$$

Luego,  $k = 1$ , entonces obtenemos el Intervalo / métrica de Schwarzschild generada por las condiciones impuestas:

$$ds^2 = -c^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (27)$$

El espacio tiempo tiende a curvarse según la geometría de Schwarzschild en presencia de un objeto esférico masivo como el sol, estrellas o planetas. Esta métrica es clave para entender como se comporta la variedad en el exterior de una masa  $M$ . Además, nos permite estudiar el ángulo de los cuadvectores, medir distancias, etc.

## 7 Conclusiones

Si bien ya calculamos de forma general las componentes del tensor de Ricci y el escalar de Ricci de forma general. Ahora, aplicaremos la solución particular para las exponenciales propuestas que resultan del cálculo de las ecuaciones de campo de Einstein.

Recordemos que las componentes no nulas del tensor de Ricci son:

$$R_{tt} = c^2 \left( -r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \frac{\partial T(r)}{\partial r} + r \left( \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right)^2 + r \frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right) \frac{e^{-2R(r)+2T(r)}}{r}$$



$$\begin{aligned}
R_{rr} &= \frac{\partial R(r)}{\partial r} \frac{\partial T(r)}{\partial r} - \left( \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + \frac{2 \frac{\partial R(r)}{\partial r}}{r} \\
R_{\theta\theta} &= \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} - r \frac{\partial T(r)}{\partial r} + e^{2R(r)} - 1 \right) e^{-2R(r)} \\
R_{\phi\phi} &= \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} - r \frac{\partial T(r)}{\partial r} + e^{2R(r)} - 1 \right) e^{-2R(r)} \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

Para lograr esto, sustituimos las funciones y sus derivadas

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\
R &= -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\
\frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{m}{r^2(1 - 2m/r)} \\
\frac{\partial R}{\partial r} &= -\frac{m}{r^2(1 - 2m/r)}
\end{aligned}$$

Operando sobre las componentes del tensor de Ricci y sobre el escalar de Ricci, vemos que estas se anulan bajo estas condiciones.

$$R_{tt} = 0 \quad (28)$$

$$R_{rr} = 0 \quad (29)$$

$$R_{\theta\theta} = 0 \quad (30)$$

$$R_{\phi\phi} = 0 \quad (31)$$

$$R = 0 \quad (32)$$

Por lo que, el tensor de Einstein, también se anula:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (33)$$

Aclaración: No debemos olvidar que las ecuaciones de campo de Einstein complementan a las líneas geodésicas que describen como se mueve un objeto en ausencia de fuerzas exteriores por el espacio tiempo.

Las condiciones de vacío provocaron las ecuaciones de campo de Einstein del vacío. Pero, el hecho de que estas componentes sean cero, no significa que el espacio-tiempo de Schwarzschild sea plano. Quien determina esto es el tensor de Riemann y, bajo estas condiciones, el tensor de Riemann tiene 24 componentes no nulas. Esto sucede ya que el tensor de Ricci es una contracción en solo dos direcciones del tensor de Riemann  $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$  y es el tensor de Riemann el que contiene toda la información sobre la variedad (en este caso el espacio-tiempo). El tensor de Ricci nos habla sobre la curvatura debida a las distribuciones de materia y energía y, por los supuestos de la métrica de Schwarzschild este es nulo.

Otra conclusión importante es que aunque el tensor energía-impulso sea cero en la región exterior a un objetivo masivo, el campo gravitatorio sigue existiendo; manifestandose en la curvatura intrínseca del espacio-tiempo a través del tensor de Riemann. Esto refleja como la gravedad no es una fuerza en el sentido clásico, sino más bien, resulta una manifestación de la geometría de la variedad. Incluso en regiones donde no hay materia, la curvatura del espacio-tiempo tiene un impacto profundo en el movimiento de partículas y la propagación de la luz, lo cual ha sido confirmado experimentalmente. Vivimos en un mundo de (al menos) 4 dimensiones en donde las leyes generales de las matemáticas se confirman día a día.