# Aplicación de Anillos Conmutativos a Mecánica de Lagrange

Franco Di Leo

En la mecánica clásica, el estado de un sistema físico se describe mediante su espacio de fases (M). Este es un espacio geométrico donde cada punto representa una configuración completa del sistema (típicamente un espacio de fases involucra posición y momento).

Partimos de la hipótesis de que las funciones reales suaves sobre este espacio $C^\infty(M)$ forman un anillo conmutativo bajo las operaciones de suma y multiplicación de funciones.

La terna $(C^\infty(M), +, *)$ forma un anillo conmutativo con identidad. Las funciones de este conjunto y, en particular, del espacio fásico representan observables físicos como la energía, el momento $(m\bar{v})$, el momento angular o cualquier cantidad medible asociada al sistema físico.

Demostraremos que la terna $(C^\infty(M), +, *)$ forma un anillo conmutativo.
El conjunto $C^\infty(M)$ está formado por funciones suaves definidas sobre $M$, es decir, $f \in C^\infty(M) \implies f : M \to \mathbb{R}$ y todas las derivadas de $f$ existen y son continuas.

Vemos que esta es la forma correcta de modelar nuestro espacio de fases ya que las magnitudes involucradas en estos espacios son continuas y derivables ($x$, $\dot{x}$, etc.) y para demostrar esto, empezamos demostrando que $(C^\infty(M), +, *)$ es un grupo abeliano:

## A1) Cerradura bajo suma

Si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces $f + g$ definido como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$$

Luego, La suma de funciones $C^\infty$ también es $C^\infty$.

## A2) Asociatividad

La suma de funciones es asociativa porque la suma en $\mathbb{R}$ lo es:

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + (g + h))(x).$$

## A3) Elemento neutro de la suma de funciones

Proponemos la función $0 \in C^\infty(M)$ definida como $0(x) = 0$ para todo $x \in M$ como elemento neutro. Entonces:

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

## A4) Elemento inverso

Para cada $f \in C^\infty(M)$, su inverso aditivo será $-f$ también en $C^\infty(M)$, definido como:

$$(-f)(x) = -f(x).$$

Dado que $-f(x)$ también es suave, tenemos:

$$(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

## A5) Conmutatividad

La suma de funciones es conmutativa porque la suma en $\mathbb{R}$ lo es:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

**Por lo que queda demostrado que la terna $(C^\infty(M), +, *)$ es un grupo abeliano.**

## A6) Cerradura bajo multiplicación

Si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces el producto $f * g$ definido como:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

pertenece a $C^\infty(M)$, ya que $f * g$ es derivable infinitas veces.

## A7) Asociatividad de la multiplicación

La multiplicación de funciones es asociativa porque la multiplicación en $\mathbb{R}$ lo es:

$$((f * g) * h)(x) = (f * g)(x) * h(x) = f(x) * g(x) * h(x) = (f * (g * h))(x).$$

## A8) Distributividad de la multiplicación respecto a la suma

Sea $f, g, h \in C^\infty(M)$, queremos probar que:

$$(f * (g + h))(x) = (f * g)(x) + (f * h)(x) = f(x) * g(x) + f(x) * h(x).$$

Y también:

$$((h + g) * f)(x) = (g * f)(x) + (h * f)(x).$$

Por lo tanto, la terna $(C^\infty(M), +, *)$ es un anillo y, en particular, un anillo conmutativo.

## Identidad multiplicativa

La función constante $1 \in C^\infty(M)$ definida como $1(x) = 1$ para todo $x \in M$ es el elemento neutro multiplicativo. Para todo $f \in C^\infty(M)$:

$$(f * 1)(x) = f(x) * 1(x) = f(x).$$

La identidad multiplicativa en este caso es la función constante.

## Divisores de cero

Un tema interesante para explorar es si este anillo conmutativo admite divisores de cero.

**Definición:** En un anillo $(R, +, *)$, un par de elementos $a, b \in R$ son divisores de cero si:

$$a * b = 0 \quad \text{con } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0.$$

En el anillo $C^\infty(M)$, el problema consiste en encontrar funciones suaves $f, g \in C^\infty(M)$ tales que:

$$f(x) * g(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in M, \quad \text{con } f \neq 0 \text{ y } g \neq 0.$$

Sin embargo, observamos que para nuestro caso particular, el anillo $(C^\infty(M), +, *)$ no tiene divisores de cero. Esta propiedad es fundamental en este ejemplo.

Un anillo sin divisores de cero se denomina un anillo íntegro. Esto significa que si el producto de dos elementos es igual a cero, al menos uno de ellos debe ser cero. La ausencia de divisores de cero en nuestro anillo asegura que si el producto de dos funciones suaves es cero, al menos una de las funciones es nula en todo el dominio $M$. Esto es importante para preservar las propiedades topológicas y diferenciales de $M$.

Esta propiedad garantiza la integridad algebraica y la coherencia en las interacciones físicas y geométricas del espacio fase. Si nuestro anillo tuviera divisores de cero, se perdería la estructura matemática que permite una interpretación consistente de los sistemas físicos.

# Sistema masa-resorte sin fricción

Pongamos como ejemplo un sistema masa-resorte evolucionando sin fricción que describe el movimiento oscilatorio de una partícula de masa $m$ conectada a un resorte de constante elástica $k$.

Este sistema se analizará usando su espacio de fases y las funciones definidas sobre él. En este caso, el espacio de fases $M \in \mathbb{R}^2$ donde un punto en el espacio de fases $(x, p)$ describe la posición $x$ y el momento $\vec{p}$ de la masa.

Algunos observables importantes de este sistema son:

- **Energía cinética**: $T(p) = \frac{p^2}{2m}$, una función suave que depende del momento.
- **Energía potencial**: $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$
- **Energía total**:
$$H(x, p) = T(p) + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

Estas funciones pertenecen al anillo $C^\infty(M)$.

Veamos el caso del Hamiltoniano de nuestro sistema. Este está dado por la suma de dos funciones $f(p)+f(x)$. Al estar trabajando sobre un anillo conmutativo con identidad, la suma entre estas funciones nos garantiza que será una operación cerrada. Otra forma de verlo es que este anillo permite definir subvariedades como la curva:

$$\sigma = \{(x, p) \in M : H(x, p) = E\},$$

Donde $E$ es la energía total del sistema. Esto puede interpretarse como campos conservativos para el caso en que nuestro sistema no presente rozamiento.

Para simplificar el problema, primero presentaremos nuestro caso de estudio sin rozamiento y luego será agregado.

El **Lagrangiano** de un sistema se define como la diferencia entre la energía cinética $T$ y la energía potencial $V$:

$$L(x, \dot{x}) = T - V$$

Para el sistema masa-resorte sin rozamiento, las energías son:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

Donde $\dot{x}$ es la velocidad de la particula y x es la posición de la misma
Sustituyendo en la definición del Lagrangiano:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Ahora, aplicamos la **ecuación de Euler-Lagrange**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

**Cálculo de $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}.$$

**Derivada temporal de $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}.$$

**Cálculo de $\frac{\partial L}{\partial x}$**

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$

**Sustituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange**

$$m\ddot{x} - (-kx) = 0.$$

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Dando con la ecuación de **movimiento** del sistema masa-resorte sin rozamiento.

**Transformando la ecuación diferencial a variables en nuestro espacio fásico**

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} = -kx. \end{cases}$$

Se mostrará un ejemplo para condiciones iniciales $x_0 = 0[m], k = 1\ \frac{N}{m}$ y m = 1 [kg]

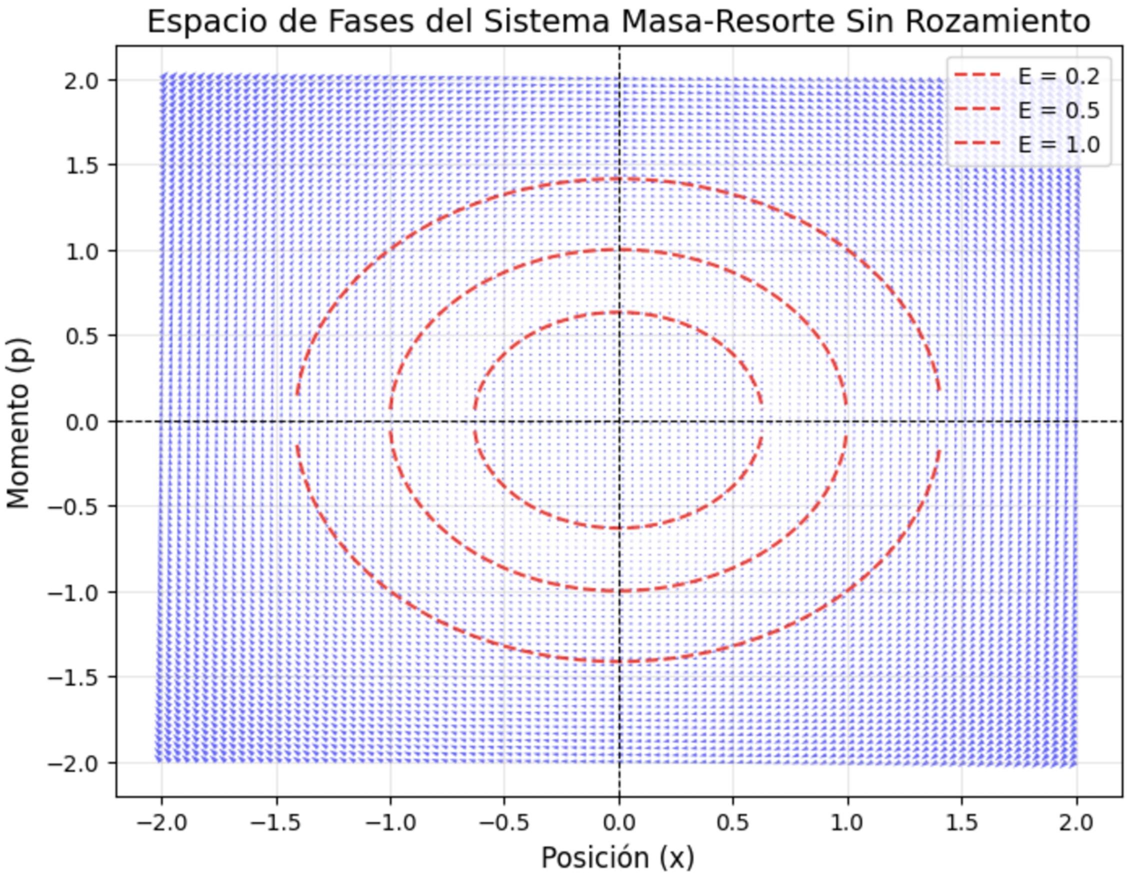



Figure 1: En rojo se representan las curvas de equipotenciales del campo conservativo

# Sistema masa-resorte con fricción

Cabe aclarar que esto no resulta un campo conservativo. La energia mecánica del sistema no se conserva debido a la fricción que termina disipandose en forma de calor. La coordenada generalizada de movimiento es la misma: $x$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

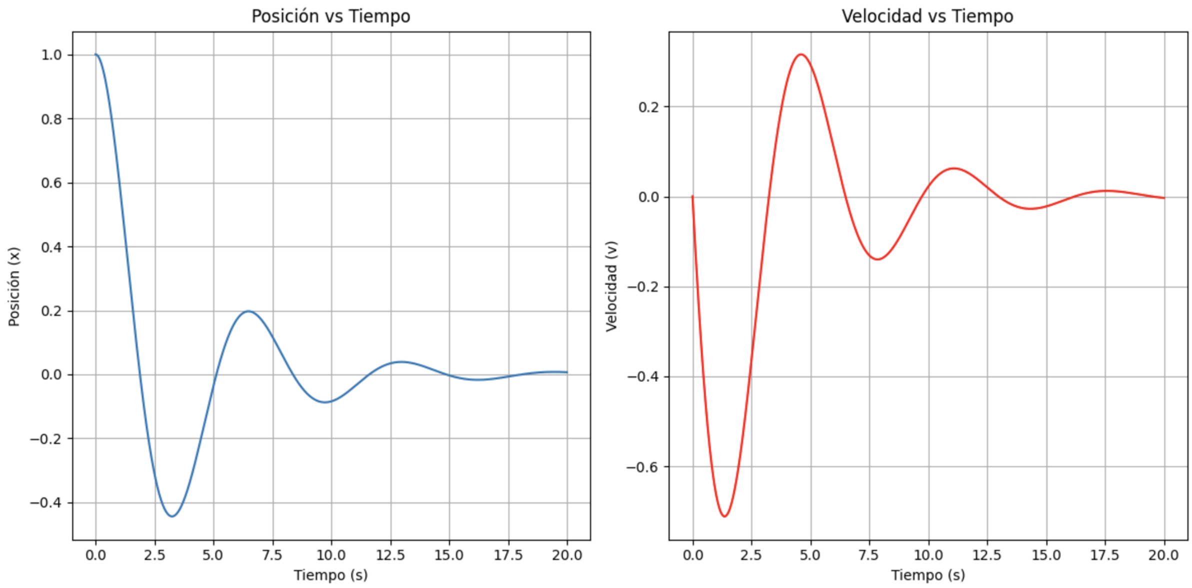
La ecuación de movimiento resultante se obtiene de la ecuación de Euler-Lagrange, que incluye el término de fricción $-b\dot{x}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -b\dot{x}$$

Sustituyendo $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$, obtenemos:

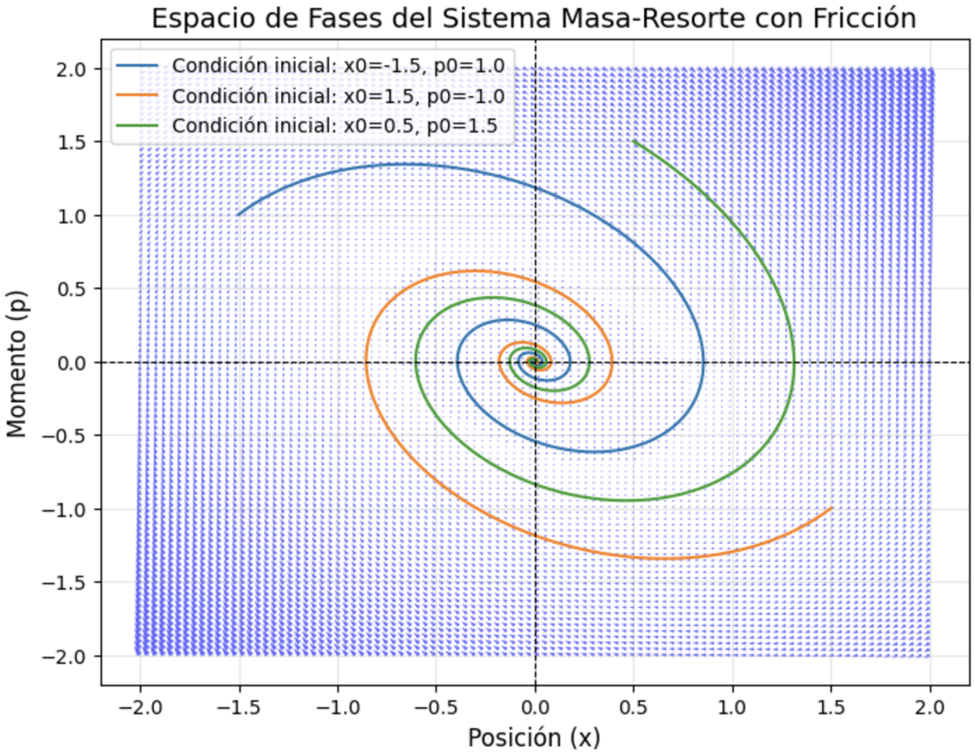
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Para la misma configuración que el ejemplo anterior tenemos la siguiente evolución:




El espacio fásico queda representado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} = -kx - b\dot{x}. \end{cases}$$




Como vemos, todas estas operaciones son posibles porque nuestro espacio fásico es un anillo conmutativo con identidad y sin divisores de cero representado por la terna $(C^{\infty}(M), +, *)$

Nota: En este estudio no se incluyó el concepto de espacio vectorial. Esto quizá quede para otro momento. Cabe aclarar, de todas formas, que $C^{\infty}(M)$ es un espacio vectorial sobre R