

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

Βαμβακίδης Δημήτρης – ΑΕΜ: 9501

Θέμα 1^ο: Στόχος της συγκεκριμένης άσκησης είναι ο προσδιορισμός των σταθερών του μοντέλου που περιγράφεται από την εξίσωση: $\ddot{y} = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{1}{m}u$. Το συγκεκριμένο μοντέλο αντιστοιχεί σε ένας σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα και περιγράφει την κίνηση του σώματος όταν σε αυτό ασκείται μία εξωτερική δύναμη u . Στην συγκεκριμένη εργασία η δύναμη δίνεται από την σχέση $u = 5 \sin(2t) + 10.5N$, ενώ η τάξη της διαφορικής που περιγράφει το σύστημα θεωρείται γνωστή οπότε το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των σταθερών συντελεστών που χαρακτηρίζουν την εξίσωση. Για το σκοπό αυτό γίνεται χρήση του αλγορίθμου των ελαχίστων τετραγώνων.

Θέτοντας $\alpha_1 = \frac{b}{m}, \alpha_2 = \frac{k}{m}, b_0 = \frac{1}{m}$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται στο πεδίο των συχνοτήτων: $s^2 y = -\alpha_1 s y - \alpha_2 y + b_0 u$. Αναλύοντας το s^2 σε $\Lambda(s) - \Delta_1(s)$ και περνώντας τα μέλη της εξίσωσης μέσα από φίλτρο $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$ προκύπτει σε μορφή διανυσμάτων: $y = [a_1 - 3, a_2 - 2, b_0] \left[-\frac{s}{\Lambda(s)} y, -\frac{1}{\Lambda(s)} y, \frac{1}{\Lambda(s)} u \right]^T$ (1), έχει έρθει δηλαδή το σύστημα σε γραμμική μορφή όπου στη δεξιά πλευρά υπάρχει το διάνυσμα των σταθερών θ_0 και ένα διάνυσμα καλούμενο έστω Φ που περιέχει μόνο γνωστούς όρους, δηλαδή τις τιμές των u και y . Με αυτή τη μέθοδο γραφής του συστήματος εξαλείφεται το πρόβλημα ύπαρξης παραγώγων στην εξίσωση του αγνώστου μορφής σήματος y . Το φίλτρο επιλέχθηκε σε αυτή τη μορφή ώστε να είναι πρώτον ευσταθές (πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο) και δευτέρου βαθμού ώστε να είναι υλοποιήσιμο καθώς η διαφορική είναι δευτέρου βαθμού και δεύτερον προκειμένου να επιτρέψει την ορθή διεύλευση όλων των συχνοτήτων του σήματος εξόδου, δηλαδή η συχνότητα καμψής (δεξιότερος πόλος) να είναι μεγαλύτερη από τη μέγιστη συχνότητα του δείγματος.

Πραγματοποιώντας δειγματοληψία της εξόδου του συστήματος για συγκεκριμένη είσοδο είναι δυνατή η δημιουργία, μέσω του διανύσματος Φ , του πίνακα Φ διαστάσεων $N \times d$, όπου N είναι ο αριθμός δειγμάτων του y και άρα και ο αριθμός δειγμάτων της κάθε συνιστώσας του Φ και d είναι η διάσταση του Φ . Έτσι, θεωρώντας το διάνυσμα y που περιέχει όλες τις μετρήσεις της εξόδου μπορεί να οριστεί το σφάλμα ανάμεσα στο προσεγγιστικό μοντέλο (1) και την έξοδο του πραγματικού συστήματος ως $e = y - \Phi \theta_0$. Παραγοντίζοντας το προηγούμενο ως προς θ και όντας κυρτή συνάρτηση, οπότε το ελάχιστο σφάλμα παρατηρείται στο σημείο όπου μηδενίζεται η παράγωγος, προκύπτει το γραμμικό σύστημα $\Phi^T y = \Phi^T \Phi \theta_0$ με λύση του οποίου προκύπτει η προσέγγιση για τους σταθερούς συντελεστές του συστήματος.

Η αξιοπιστία αυτής της προσέγγισης εξαρτάται τόσο από τον τύπο *grey box* του μοντέλου που έχει επιλεγεί, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση το βαθμό της διαφορικής, όσο και από την ποιότητα-πυκνότητα των μετρήσεων. Στην προκειμένη περίπτωση η μορφή του μοντέλου είναι απολύτως γνωστή, οπότε την ποιότητα της προσέγγισης θα καθορίσει η δειγματοληψία της εξόδου του συστήματος. Όσο πιο πυκνά τα δείγματα τόσο καλύτερη θα είναι η προσέγγιση αφού θα ληφθούν καλύτερα στον αλγόριθμο υπ' όψιν η παράμετροι της εξόδου.

Προκειμένου να προσομοιωθεί ο παραπάνω αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκαν οι εξής συναρτήσεις σε περιβάλλον *matlab*: Α) *Ode15s* – ο λόγος που επιλέχθηκε η συγκεκριμένη συνάρτηση για την παραγωγή των μετρήσεων είναι ότι για τη συγκεκριμένη μορφή διαφορικής εξίσωσης συστήματος παράγει την ακριβέστερη λύση. Επίσης η ίδια συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε και για την παραγωγή των αποτελεσμάτων του προσεγγιστικού συστήματος, Β) *lsim* – προκειμένου να παραχθούν τα αποτελέσματα για τα στοιχεία του πίνακα Φ και παράγει αποτελέσματα παραπλήσιας αξιοπιστίας με την *ode* ενώ η πιο εύκολη η χρήση της στην προκειμένη περίπτωση, Γ) *linsolve* – προκειμένου να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα για το διάνυσμα θ_0 . Ως διάστημα δειγματοληψίας εφαρμόστηκε το προτεινόμενο διάστημα 0.1s για 10 δευτερόλεπτα λειτουργίας του συστήματος και άρα παράχθηκαν 101 δείγματα της εξόδου. Οι σταθερές που προέκυψαν για το ελατήριο, τη μάζα και τη σταθερά του αποσβεστήρα είναι οι ακόλουθες: $k = 2.0004 \frac{kg}{sec^2}, b = 0.1936 \frac{kg}{sec}, m = 15.0278 \frac{kg}{sec^2}$.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του πραγματικού συστήματος και αυτού που προσομοιώνεται με τις εκτιμήσεις των σταθερών όπως αυτές προέκυψαν από τον αλγόριθμο.

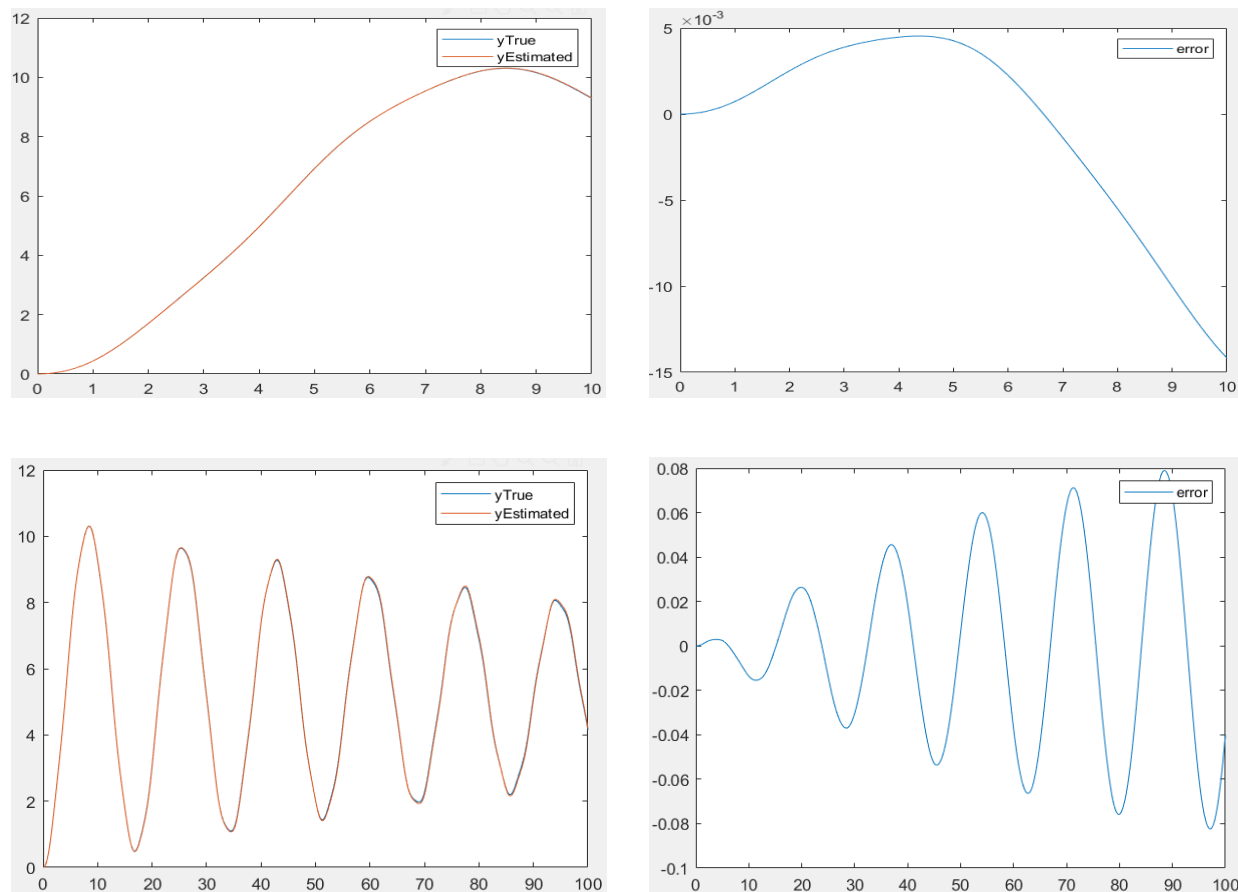


Figure 1: Simulation results comparing real and estimated system for output y and error. xAxis is in seconds. Output measured every 0.1s.

Τα αποτελέσματα στα πρώτα δύο διαγράμματα είναι αυτά που προκύπτουν για τον προτεινόμενο από την εκφώνηση χρόνο δειγματοληψίας και συχνότητα αυτής. Όπως φαίνεται από τη δεξιά κυματομορφή του error, αν και μικρό φαίνεται να παρουσιάζει μία αύξηση με την πάροδο του χρόνου. Πράγματι αν το σύστημα προσομοιωθεί για μεγαλύτερη διάρκεια (κυματομορφές 3 και 4) το σφάλμα του πραγματικού συστήματος από το μοντελοποιημένο αυξάνεται. Συγκεκριμένα η αύξηση φαίνεται να συμβαίνει στις καμπές της εξόδου, γεγονός που υποδηλώνει ότι στην έξοδο υπάρχουν συχνοτικές παράμετροι που η συγκεκριμένη δειγματοληψία αδυνατεί να συλλάβει. Ενδεικτικά το παραπάνω επιβεβαιώνεται από τις παρακάτω κυματομορφές όπου και τα δείγματα αυξήθηκαν κατά δέκα φορές στο ίδιο χρονικό διάστημα των 10s.

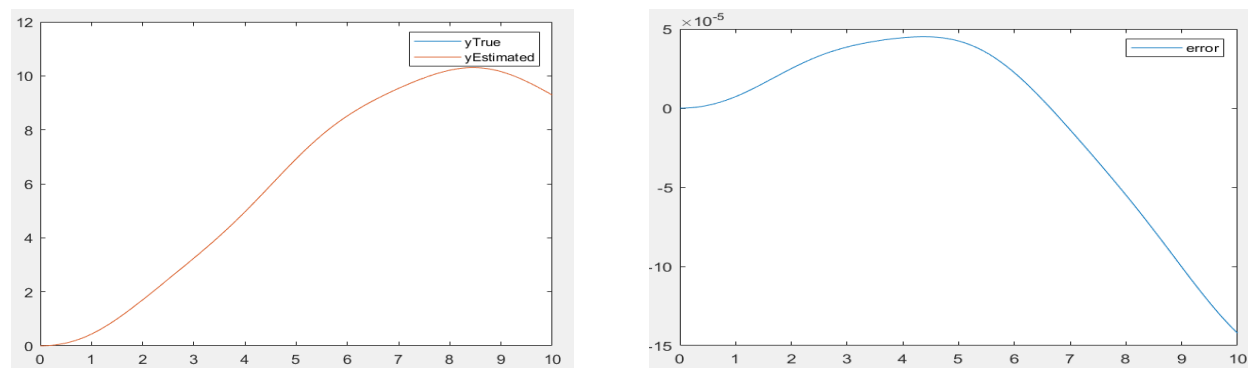


Figure 2: Simulation results comparing real and estimated system for output y and error. xAxis is in seconds. Output measured every 0.01s.

Όπως φαίνεται και παραπάνω με αύξηση του ρυθμού δειγματοληψίας κατά 10 το σφάλμα αν και υπαρκτό μειώνεται ήδη κατά δύο τάξης μεγέθους. Προκειμένου να επιτύχουμε λοιπόν την καλύτερη δυνατή προσέγγιση, είναι σημαντικό να επιλεγεί κατάλληλος ρυθμός δειγμάτων ώστε να απεικονίζουν ορθότερα την δυναμική του συστήματος. Η αύξηση του ρυθμού αυτού σταματάει όταν έχει εξασφαλιστεί το όριο σφάλματος που έχει τεθεί από τις προδιαγραφές. Στο συγκεκριμένο δε σύστημα, καθώς το σφάλμα αυξάνεται με το χρόνο θα πρέπει να ληφθεί υπ όψιν και ο αναμενόμενος uptime του μοντέλου ώστε να παραμένει το σφάλμα εντός των προδιαγραφών για όλες τις χρονικές στιγμές.

Θέμα 2^ο: Στόχος αυτού του θέματος ήταν και παλι ο προσδιορισμός σταθερών ενός συστήματος κάνοντας χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Το σύστημα αποτελούσε ένα κύκλωμα RLC με δύο εισόδους και το οποίο αποτελούσε και παλι τύπο γκρι κουτί αφού είναι γνωστή η τοπολογία του αλλά άγνωστες οι τιμές των παραμέτρων RLC.

Κάνοντας χρήση της αρχής της επαλληλίας για τις δύο πηγές, αφού είναι γνωστό πως είναι διαφορετικής συχνότητας, και αναλύοντας το σύστημα στο πεδίο των συχνοτήτων προκύπτουν οι τέσσερις παρακάτω εξισώσεις:

$$s^2 V r_2 + s \frac{V r_2}{RC} + \frac{1}{LC} V r_2 = s^2 u_2 \quad (1)$$

$$s^2 V r_1 + s \frac{V r_1}{RC} + \frac{1}{LC} V r_1 = s^2 u_1 + \frac{1}{LC} u_1 \quad (2)$$

$$s^2 V c_2 + s \frac{V c_2}{RC} + \frac{1}{LC} V c_2 = \frac{s u_2}{RC} + \frac{1}{LC} u_2 \quad (3)$$

$$s^2 V c_1 + s \frac{V c_1}{RC} + \frac{1}{LC} V c_1 = \frac{s u_1}{RC} \quad (4)$$

Όπου u_1 και u_2 ανφέρονται στις δύο εισόδους και αντίστοιχα διαμορφώνονται οι συνιστώσες των μεταβλητών που αναφέρονται. Το παραπάνω αποτελεί τον πίνακα μεταφοράς του συστήματος, ενώ με πρόσθεση των 1-2 και 3-4 προκύπτουν και οι εξισώσεις που συνδυάζουν την συνολική είσοδο με τις δύο εξόδους του συστήματος. Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι οι παρακάτω:

$$s^2 V r + s \frac{V r}{RC} + \frac{1}{LC} V r = s^2 u + \frac{1}{LC} u_1 \quad (*)$$

$$s^2 V c + s \frac{V c}{RC} + \frac{1}{LC} V c = \frac{s u}{RC} + \frac{1}{LC} u_2 \quad (**)$$

Όπως φαίνεται οι δύο αυτές εξισώσεις περιέχουν όλους τους άγνωστους συντελεστές έκαστη και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επομένως αρκεί η εξέταση μόνο μίας εκ των δύο με την αντίστοιχη έξοδο προκειμένου να προσδιοριστούν οι σταθερές του συστήματος. Προς το σκοπό αυτό γίνεται εξέταση της εξίσωσης που περιγράφει την τάση του πυκνωτή V_c (**).

Θέτοντας: $a_1 = \frac{1}{RC}, a_2 = \frac{1}{LC}, b_1 = \frac{1}{RC}, b_0 = \frac{1}{LC}$ και αναλύοντας και πάλι το s^2 με την ίδια μέθοδο όπως στο θέμα 1^ο προκύπτει: $V c = y = [-3 + a_1, -2 + a_2, b_1, b_0] \left[-\frac{s}{\Lambda(s)} y, -\frac{1}{\Lambda(s)} y, \frac{s}{\Lambda(s)} u, \frac{1}{\Lambda(s)} u_1 \right]^T$ (***) , με $\Lambda(s) = \frac{1}{s^2 + 140s + 4900}$, ευσταθές και υλοποιήσιμο φίλτρο. Ακόμα οι πόλοι του φίλτρου επιλέχθηκαν ώστε ακόμα και με το μέγιστο ρυθμό δειγματοληψίας που εφαρμόστηκε, να μην υπάρχουν συχνοτικές παράμετροι του σήματος εξόδου που το φίλτρο να αποκόπτει και άρα να οδηγείται ο αλγόριθμος σε εσφαλμένη προσέγγιση. Σε περίπτωση που μικρότερο σφάλμα και άρα μεγαλύτερη δειγματοληψία είναι επιθυμητά, οι πόλοι του φίλτρου θα πρέπει να μετακινηθούν ακόμη αριστερότερα, ώστε να επιτρέπουν τη διέλευση του υψηλότερου συχνοτικού περιεχομένου της εξόδου. Ο αλγόριθμος *matlab* που υλοποιήθηκε είναι όμοιος με αυτόν του προηγούμενου ερωτήματος, με τη διαφορά ότι οι τιμές της εισόδου λαμβάνονται από την δοσμένη συνάρτηση $v(t)$. Η *ode15s* χρησιμοποιήθηκε στο τέλος για την παράσταση του προσεγγιστικού συστήματος και της επικύρωσης των αποτελεσμάτων.

Η διαφορά με το προηγούμενο ερώτημα έγκειται στο γεγονός ότι δεν υπάρχει κάποιος προτεινόμενος ρυθμός δειγματοληψίας. Προς το σκοπό του προσδιορισμού αυτού εξετάζεται η αναμενόμενη έξοδος του συστήματος για τις δύο εισόδους και γίνεται μία πρώτη εκτίμηση. Λόγω της σταθερής εισόδου η έξοδος του πυκνωτή αναμένεται να σταθεροποιηθεί γύρω από την τιμή του 1V και η τάση στα άκρα της αντίστασης να ακολουθεί την ημιτονοειδή είσοδο. Και στις δύο εξόδους αναμένεται να υπάρχει κάποια ταλάντωση μικρού έστω πλάτους λόγω του RLC, όπως αναφέρθηκε και στην επιλογή του φίλτρου. Με μια πρώτη εξέταση θα μπορούσε να γίνει η επιλογή του ρυθμού δειγματοληψίας 0.01s αφού θα καλυπτε ικανοποιητικά και τις δύο εισόδους. Ωστόσο πιθανά μεταβατικά φαινόμενα υψηλής συχνότητας δεν θα γίνονταν αρκούντως αντιληπτά από τον αλγόριθμο. Έτσι ως αρχικός ρυθμός δειγματοληψίας επιλέχθηκαν τα 0.001s. Να σημειωθεί ότι τα στοιχεία R,L,C εμφανίζονται μόνο εντός γινόμενων οπότε γίνεται να υπολογιστούν μόνο αυτά. Όπως δηλαδή ήταν αναμενόμενο οποιοδήποτε σύστημα με τιμές που ικανοποιούν τα γινόμενα αυτά θα παράξει την ίδια απόκριση στο χρόνο για τις εξεταζόμενες κυματομορφές.

Επίσης να σημειωθεί ότι λόγω έλλειψης αρχικών συνθηκών για τις πρώτες παραγώγους των μεταβλητών στο ερώτημα αυτό, δεν έγινε χρήση της ode15s για την προσομοίωση του προσεγγιστικού συστήματος αλλά πολλαπλασιάστηκε ο ήδη υπάρχων πίνακας Φ με τη το διάνυσμα θ_hat_0 ώστε να προκύψουν οι προσεγγιστικές τιμές του y .

Για τον παραπάνω ρυθμό δειγματοληψίας οι τιμές του θ_0 προέκυψαν: $\theta_1 = -133.0664, \theta_2 = 1.8763 * 10^6, \theta_3 = -0.3018, \theta_4 = 1.8812 * 10^6$, χωρίς να παρουσιάζονται όλα τα δεκαδικά για θ_2 και θ_4 . Ένας πρώτος έλεγχος για το αν ο αλγόριθμος δειγματοληπτεί σωστά είναι η εξέταση των διαφορών των τιμών του θ_0 όπως αυτές θα έπρεπε να διαμορφώνονται από την (**). Στην προκειμένη περίπτωση αυτές οι διαφορές δεν προσεγγίζουν ικανοποιητικά την τιμή που θα έπρεπε να έχουν και αυτό επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα που ακολουθούν:

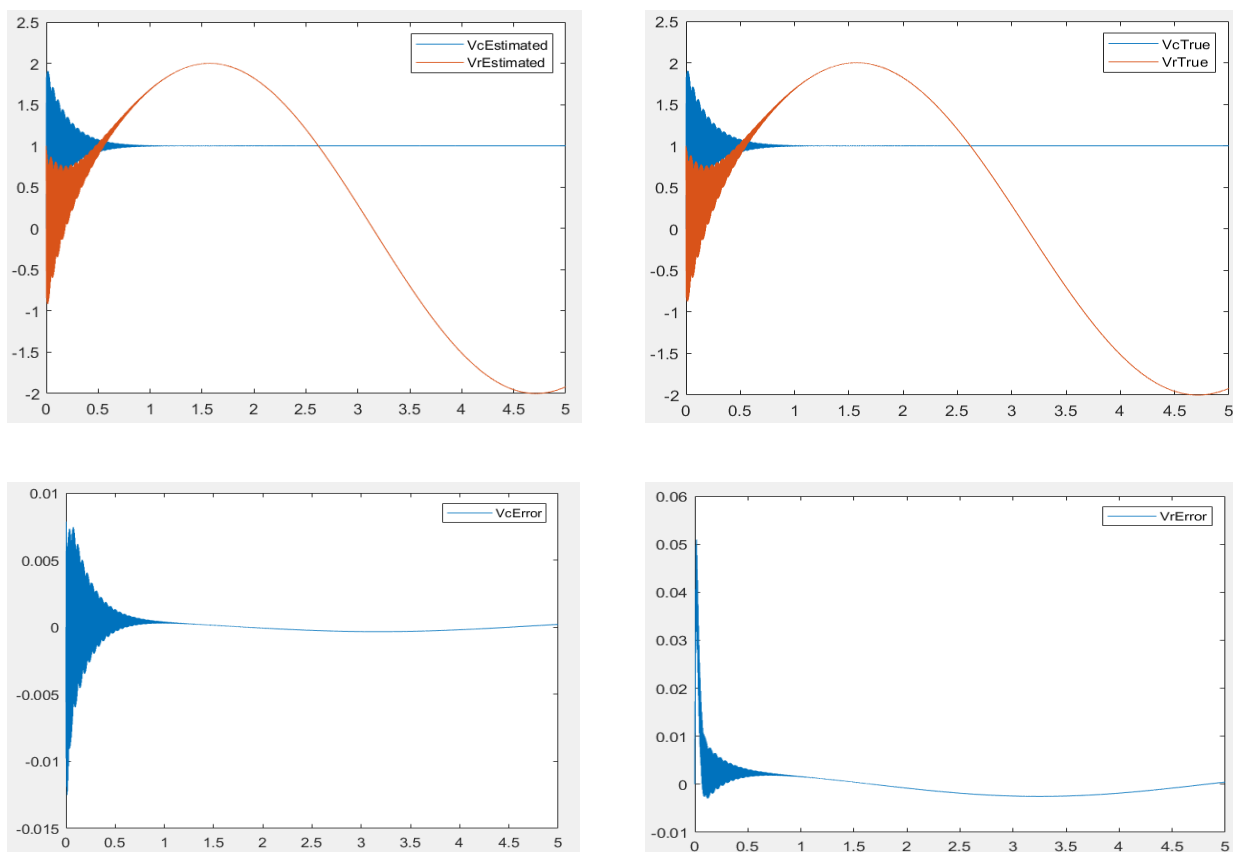


Figure 3: Graphs for estimated response and true response of the system along with error graphs. Sampling rate was 0.001s.

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω διαγράμματα η απόκριση που πρέκυψε κάνοντας χρήση των προσεγγιστικών τιμών σταθερών του συστήματος ($RC = 0.0083, LC = 5.3131 * 10^{-7}$) δεν ταυτίζεται ικανοποιητικά με την πραγματική. Αν και στη μόνιμη κατάσταση το σφάλμα σταθεροποιείται κοντά στο 0 κατά τη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου παρατηρείται

μεγάλο αναλογικά με τις τιμές εξόδου σφάλμα και ουσιαστικά δεν απεικονίζεται από το προσεγγιστικό μοντέλο ικανοποιητικά η μεταβατική κατάσταση, που παρουσιάζει υψηλό συχνοτικό περιεχόμενο. Προκειμένου να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια μοντέλου δοκιμάστηκαν και δείγματα ανα 0.0001s, 0.00001s και 0.000001s. Παρακάτω παρουσιάζεται μόνο η τρίτη περίπτωση χάριν συντομίας.

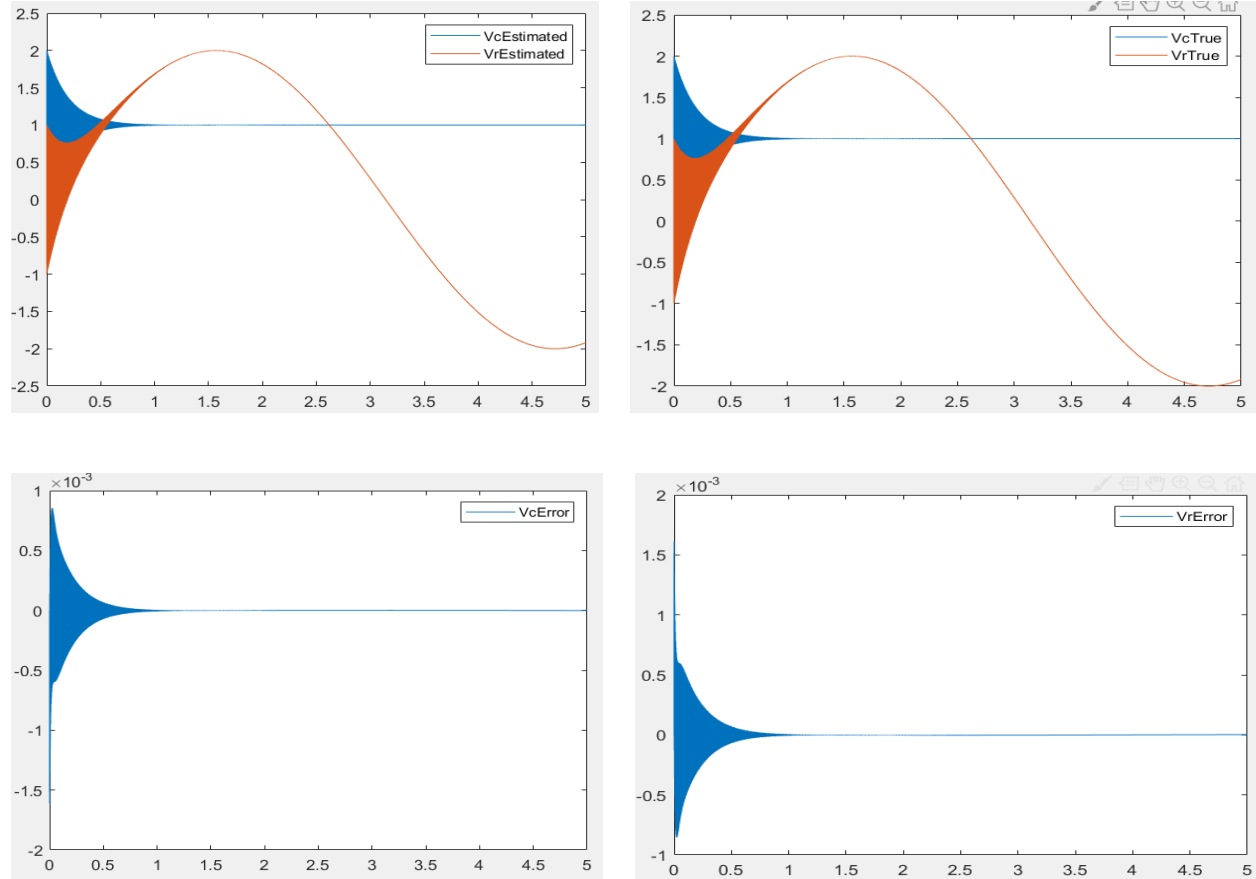


Figure 4: Graphs for estimated response and true response of the system along with error graphs. Sampling rate was 0.000001s.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα για μεγαλύτερο ρυθμό δειγματοληψίας τα σφάλματα μειώνονται κατά τρεις τάξεις μεγέθους κατά το μεταβατικό φαινόμενο, ενώ οι προσεγγιστικές τιμές για RC και LC σταθεροποιούνται γύρω από το 0.01 και $4 \cdot 10^{-8}$ αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές φανερώνουν ότι το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος εξόδου, κάνοντας και χρήση των γνωστών για τα RLC κυκλώματα τύπων, φτάνει τα 800Hz περίπου. Επομένως για να απεικονισθεί στο μοντέλο ακόμα καλύτερα το πραγματικό σύστημα πρέπει να γίνει ακόμα γρηγορότερη δειγματοληψία ώστε να γίνει capture το μεταβατικό φαινόμενο ενώ ταυτόχρονα, όπως προαναφέρθηκε, να αυξηθεί το εύρος ζώνης του φίλτρου ώστε να ειτρέψει να διέλθουν ακόμα περισσότερες συχνότητες. Εφόσον το σφάλμα παραμένει μη αποδεκτό τότε πρέπει να συνεχίσει η δειγματοληψία έως ότου κινείται εντός των αποδεκτών ορίων.

Για την τελευταία ανάλυση ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος προκύπτει ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} V_r \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 1/3.9707 \cdot 10^{-8}}{s^2 + s/0.099 + 1/3.9707 \cdot 10^{-8}} & \frac{s^2}{s^2 + s/0.099 + 1/3.9707 \cdot 10^{-8}} \\ \frac{s/0.099}{s^2 + s/0.099 + 1/3.9707 \cdot 10^{-8}} & \frac{s/0.099 + 1/3.9707 \cdot 10^{-8}}{s^2 + s/0.099 + 1/3.9707 \cdot 10^{-8}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Η συγκεκριμένη μέθοδος δειγματοληψίας και εκτίμησης βασίζεται στην ορθή μέτρηση των τιμών εισόδου-εξόδου. Ύπαρξη θορύβου στα μετρικά όργανα ή σφάλμα κατά την μέτρηση μπορεί να οδηγήσουν στην παραγωγή τιμών που αποκλίνουν σημαντικά από τις πραγματικές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία των λεγόμενων outlier, σημεία που αλλοιώνουν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου, αφού ως best fit προσπαθεί να συμπεριλάβει και αυτά τα μη ορθά σημεία στην εκτίμηση και άρα αυτή μπορεί να αποκλίνει σημαντικά. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου για το μέγιστο ρυθμό δειγματοληψίας που χρησιμοποιήθηκε, αλλάζοντας τυχαία μόλις λίγες τιμές από την μετρούμενη έξοδο του συστήματος V_c .

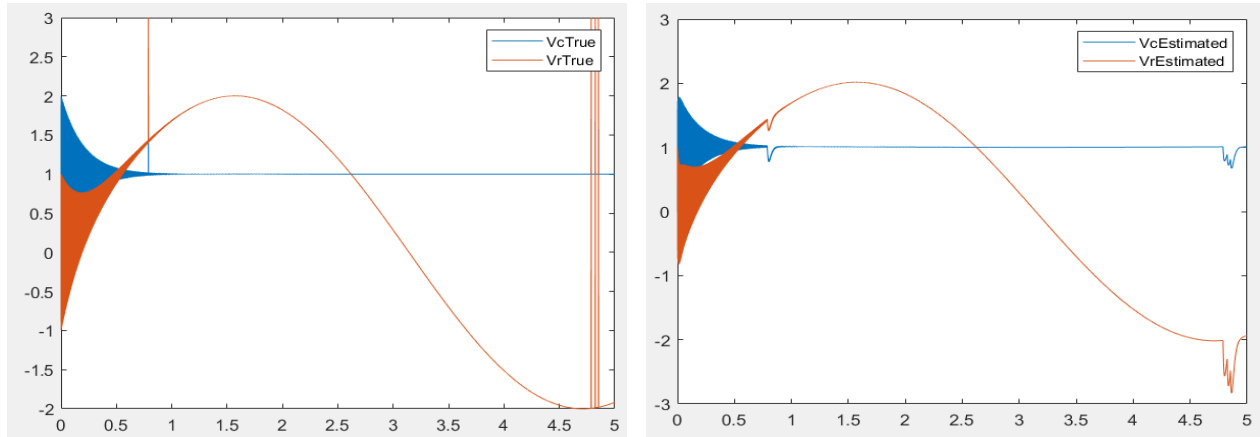


Figure 5: True and estimated response with outliers present.

Όπως φαίνεται και παραπάνω έχουν προστεθεί τυχαία στις μετρούμενες τιμές εσφαλμένες μετρήσεις ύψους, στην προκειμένη περίπτωση 3V (έστω σφάλμα οργάνου). Είναι προφανές ότι η ύπαρξη τέτοιων στοιχείων, προκαλώντας σημαντική απόκλιση στην πραγματική έξοδο του συστήματος, οδηγούν σε εσφαλμένη εκτίμηση γύρω από το σημείο του σφάλματος αφού ο αλγόριθμος προσπαθεί να προσεγγίσει μια τιμή μη πραγματική. Να σημειωθεί ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση Outliers έχουν τοποθετηθεί μόνο στην έξοδο αφού θεωρήθηκε γνωστή η είσοδος και άρα απαλλαγμένη από εσφαλμένες μετρήσεις. Με αυτά τα outliers οι προσεγγίσεις των σταθερών του συστήματος έγιναν: $RC = 0.02$ και $LC = 4.7 \cdot 10^{-8}$, παρουσιάζεται δηλαδή μία υπολογίσιμη απόκλιση από τις αντίστοιχες τιμές για τον ίδιο ρυθμό δειγματοληψίας χωρίς outliers.

Ακολουθούν και τα σφάλματα πραγματικής και εκτιμώμενης εξόδου του συστήματος, όπου όπως αναμενόταν και από τις νέες προσεγγίσεις των σταθερών, η επίδραση των outliers είναι γενική στο σφάλμα εκτίμησης, καθώς αυτό έχει αυξηθεί κατά τρεις τάξεις μεγέθους από το αντίστοιχο χωρίς outliers.

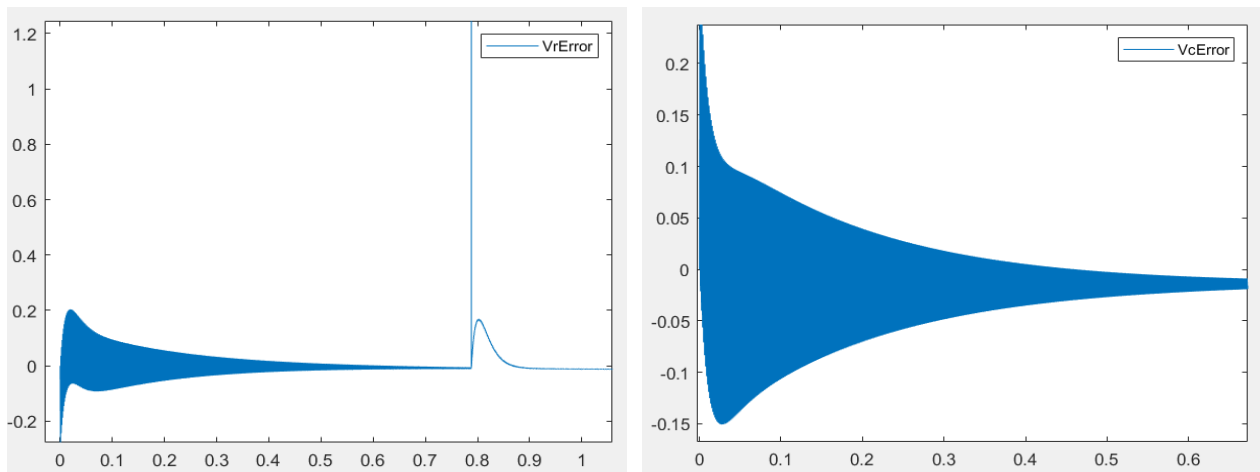


Figure 6: Error of estimation for system output with outliers present.