

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^Η

Βαμβακίδης Δημήτρης – ΑΕΜ: 9501

Θέμα 1^ο : Στόχος αυτού το μέρους είναι η εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος της μορφής $\dot{x} = -\theta_1 x + \theta_2 u$, όπου u η είσοδος της μορφής $u=5\sin(3t)$. Προκειμένου να επιτευχθεί το παραπάνω έγινε χρήση της online μεθόδου της κλίσης.

Προσθαφαιρώντας των όρο $\theta_m x$ και κάνοντας αλγεβρικές πράξεις στο πεδίο της συχνότητας το σύστημα

μπορεί να γραφεί στη μορφή: $x(s) = [\theta_m - \theta_1, \theta_2] \begin{bmatrix} \frac{x(s)}{s+\theta_m} \\ \frac{u(s)}{s+\theta_m} \end{bmatrix}$, δηλαδή σε γραμμικοποιημένη μορφή.

Καθώς το θ_m αποτελεί τον πόλο του φίλτρου επιλέχθηκε ίσο με 5 ώστε να επιτρέπει σε όλες τις συχνότητες της εισόδου να διέλθουν απ αυτό. Οι συχνότητες της εξόδου δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων, αφού οι σταθερές του συστήματος δεν είναι γνωστές, ωστόσο από τη μορφή της διαφορικής αναμένεται να υπάρξει ένα ,μεταβατικό φαινόμενο και τελικά μία έξοδος συχνότητας ίδιας με την είσοδο. Οπότε ο πόλος μπήκε πιο αργότερα από της συχνότητα της εισόδου ώστε να εντοπίσει το αναμενόμενο μεταβατικό φαινόμενο.

Στη συνέχεια αναπτύχθηκε η μέθοδος κλίσης με επιλογή της συνάρτησης $K(\theta)$ ως το σφάλμα εκτιμώμενης εξόδου με την πραγματική: $K(\theta) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x-\hat{x})^2}{2} = \frac{(x-\theta\phi)^2}{2}$, όπου θ και ϕ τα διανύσματα που περιγράφηκαν παραπάνω αλλά στο πεδίο του χρόνου. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς θ προκύπτει το διάνυσμα: $\begin{bmatrix} \phi_1 \cdot x - (5 - \theta_1) \cdot \phi_1^2 - \theta_2 \cdot \phi_2 \cdot \phi_1 \\ -\phi_2 \cdot x - (5 - \theta_1) \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 - \theta_2 \cdot \phi_2^2 \end{bmatrix} = \nabla K(\theta)$. Αντικαθιστώντας όπου $\theta \rightarrow \hat{\theta}$ και πολλαπλασιάζοντας με $-\gamma$, προκύπτει η παράγωγος των εκτιμήσεων. Ακολουθώντας την ανάλυση της συνάρτησης *Lyapunov*: $V = \frac{\tilde{\theta}^2}{2}$, όπου $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$, προκύπτει ότι με τη συγκεκριμένη επιλογή κλίσης το σφάλμα εκτίμησης κατάστασης καθώς και ο ρυθμός μεταβολής των θ τήνει στο μηδέν. Ωστόσο δεν είναι γνωστό εάν το σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων τήνει στο 0. Προκειμένου να εξασφαλιστεί αυτό θα πρέπει να ισχύει μια ΣΕΔ για την είσοδο ϕ του γραμμικοποιημένου συστήματος. Καθώς η μορφή της εξόδου x και άρα και ο όρος ϕ_1 δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων το παραπάνω θα επιβεβαιωθεί γραφικά μετά την εκτίμηση των παραμέτρων όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

Προκειμένου να προσομοιωθεί ο αλγόριθμος σε *Matlab*, τόσο το πραγματικό όσο και το γραμμικοποιημένο προσεγγιστικό αλλά και τα φίλτρα αναπτύχθηκαν σε διαφορικές στο χρόνο και έγινε έπειτα χρήση της *ode15s* συνάρτησης ώστε να παραχθούν τα αποτελέσματα. Χρησιμοποιήθηκε αυτή η συνάρτηση ώστε να αντιμετωπιστεί τυχόν stiffness των διαφορικών εξισώσεων και διότι παράγει αποτελέσματα με μεγάλη ακρίβεια. Οι εξισώσεις που χαρακτηρίζουν τα φίλτρα και μετά την επιλογή του θ_m προκύπτουν: $\dot{\phi}_i = -5 \cdot \phi_i + u$, όπου u η είσοδος του εκάστοτε φίλτρου.

Να σημειωθεί ότι σε πραγματικό on line σύστημα προκειμένου να γίνουν οι υπολογισμοί, στην περίπτωση λόγου χάρη ενός μικροελεγκτή που λαμβάνει μετρήσεις, θα γίνονταν με τη χρήση κάποιας

αριθμητικής μεθόδου όπως η *Runge-Kutta*, ωστόσο χάριν συντομίας για την εργασίας η δειγματοληψία αφέθηκε στην *ode15s*, η οποία και πάλι από πίσω υλοποιεί μία αριθμητική μέθοδο, μεταβλητού βήματος και άρα ακόμα μεγαλύτερης ακρίβειας. Το ίδιο ισχύει για όλες τις πτυχές της συγκεκριμένης εργασίας.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα γραφήματα για x και \hat{x} για διάφορες τιμές της σταθεράς γ , όπως επίσης και το σφάλμα εξόδου. Για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής εξόδου χρησιμοποιήθηκε η γραμμικοποιημένη μορφή που περιγράφηκε παραπάνω.

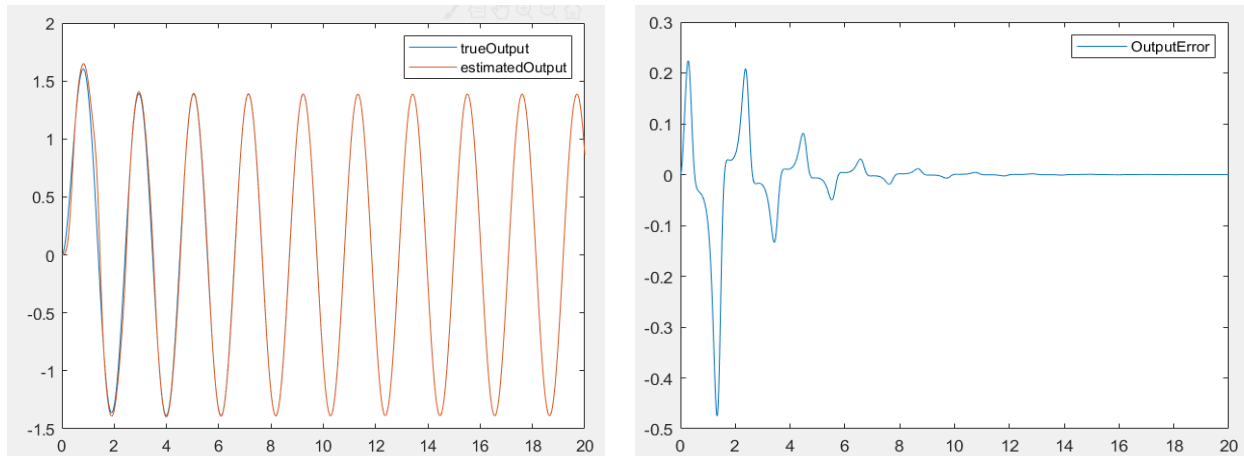


Figure 1: Estimated and true output for gamma=30. Error between the two vectors is also presented.

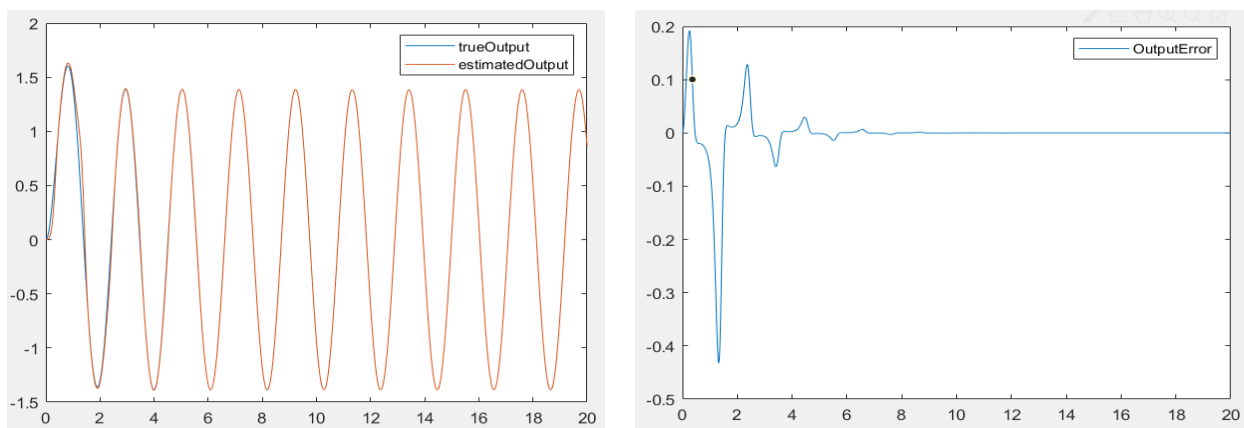


Figure 2: Estimated and true output for gamma=50. Error between the two vectors is also presented.

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω διαγράμματα και ήταν αναμενόμενο, η προσεγγιστική έξοδος τήνει και εν τέλει ταυτίζεται με την πραγματική, δηλαδή το σφάλμα ανέμεσα στις δύο γίνεται μηδενικό. Φανερα καθίσταται και από τα παραπάνω διαγράμματα η επίδραση του γ στην απόκριση του αλγορίθμου. Όσο μεγαλύτερο το γ τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει η προσεγγιστική στην πραγματική έξοδο, καθώς τόσο πιο αρνητική γίνεται η κλίση $-\gamma \nabla K(\hat{\theta})$. Βέβαια η επίδραση αυτής της παραγώγου είναι προφανής μόνο στην περίπτωση που οι σταθερές θ συγκλίνουν πράγματι στις πραγματικές, δηλαδή πληρείται μια ΣΕΔ. Σε άλλη περίπτωση το σφάλμα θα τήνει πάλι στο 0 ενώ το σφάλμα των σταθερών όχι.

Παρακάτω παρουσιάζονται και τα διαγράμματα σύγκλισης των σταθερών του συστήματος για τις ίδιες τιμές του γ , όπου και πάλι φαίνεται η επίδραση του τελευταίου στην ταχύτητα σύγκλισης.

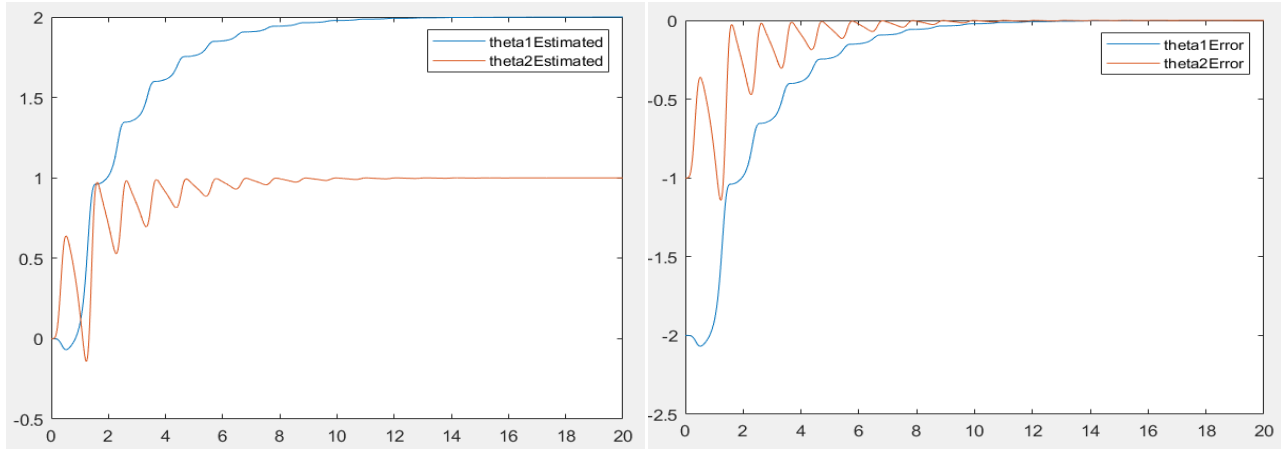


Figure 3: Convergence of theta estimates for $\gamma=30$. Error of estimation also presented. Initial theta values set to zero.

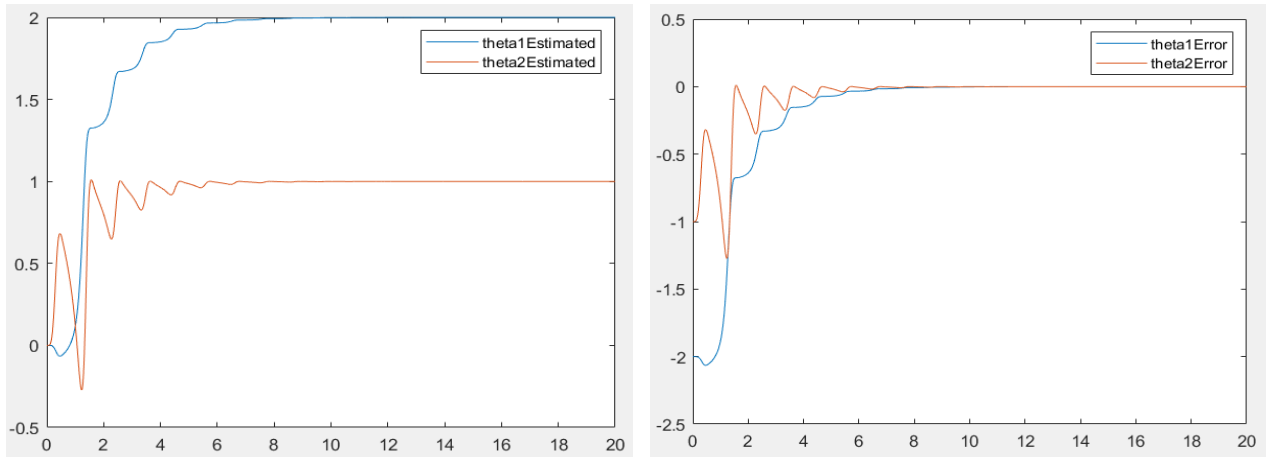


Figure 4: Convergence of theta estimates for $\gamma=50$. Error of estimation also presented. Initial theta values set to zero.

Στα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται και η εκθετική σύγκλιση του σφάλματος των σταθερών, καθώς το σφάλμα εκτίμησης είναι φραγμένο από εκθετική περιβάλλουσα.

Μέχρι στιγμής δεν έχει επιβεβαιωθεί η συνθήκη ΣΕΔ που πρέπει να πληροί η είσοδος παρά μόνο από τα εκθετικά φραγμένα σφάλματα σύγκλισης. Παρακάτω παρουσιάζονται δυο διαγράμματα προς επιβεβαίωση της ΣΕΔ.

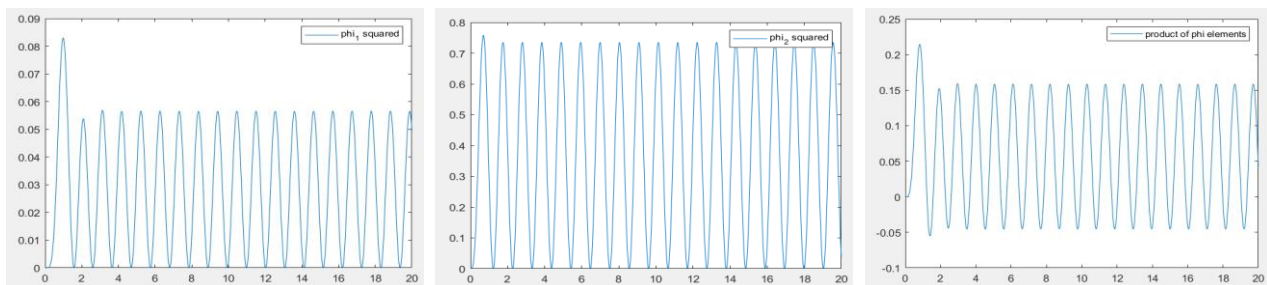


Figure 5: Charts presenting the phi terms considered to derive the persistent excitation condition.

Στα παραπάνω διαγράμματα φαίνονται οι όροι που προκύπτουν από το ολοκλήρωμα: $\int_t^{t+T_0} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T d\tau$, δηλαδή τα γινόμενα των όρων ϕ_1, ϕ_1 και $\phi_1 \phi_2$. Όπως φαίνεται και τα διαγράμματα αποτελούν περιοδικές συναρτήσεις που για διάστημα μίας περιόδου έχουν θετικό ολοκλήρωμα (τα δύο πρώτα διαγράμματα είναι καθαρά θετικά, ενώ το τελευταίο είναι μετατοπισμένο στα θετικά). Είναι επομένως δυνατό να ληφθεί το T_0 ως μία περίοδος και έστω $\boldsymbol{\Lambda} = \int_t^{t+T_0} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T d\tau$, άρα μπορεί να βρεθεί σταθερά α_0 και α_1 τέτοια ώστε $\alpha_1 I \geq \boldsymbol{\Lambda} \geq \alpha_0 I$, όπου $\boldsymbol{\Lambda}$ ο πίνακας παραπάνω και I ο μοναδιαίος. Επομένως πράγματι έχουμε εκθετική σύγκριση του σφάλματος εκτίμησης στο 0.

Θεμα 2^ο: Στόχος του συγκεκριμένου θέματος είναι η εκτίμηση των παραμέτρων του ίδιου συστήματος με παραπάνω κάνοντας χρήση της online μεθόδου εκτίμησης Lyapunov χρησιμοποιώντας τόσο τη μικτή όσο και την παράλληλη δομή συστήματος εκτίμησης.

- Μικτή δομή - Η μορφή της μεικτής δομής είναι η ακόλουθη: $\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \hat{x})$.

Ορίζοντας το σφάλμα εξόδου και παραγωγίζοντας προκύπτει η σχέση: $\dot{e} = -\theta_m e + \hat{\theta}_1 x - \hat{\theta}_2 u$ και στη συνέχεια ορίζοντας τη συνάρτηση Lyapunov $V = \frac{1}{2}(e^2 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2)$ και παραγωγίζοντας προκύπτει αρνητικά ημιορισμένη παράγωγος αυτής για την επιλογή: $\dot{\hat{\theta}}_1 = -ex, \dot{\hat{\theta}}_2 = eu$. Ακολουθώντας την ανάλυση που αναφέρθηκε και στο 1^ο θέμα προκύπτει το συμπέρασμα ότι για την συγκεκριμένη επιλογή παραγώγων το σφάλμα εξόδου συγκλίνει εκθετικά στο 0 όπως και ο ρυθμός μεταβολής των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$. Στην προκειμένη περίπτωση ωστόσο ο προσδιορισμός της ΣΕΔ μπορεί να γίνει εκ των προτέρων αφού ενδιαφέρει μόνο η είσοδος u ο τύπος της οποίας είναι γνωστός. Έτσι πρέπει $\int_t^{t+T_0} 25 \sin(3t)^2 d\tau \geq \alpha_0 T_0 \Rightarrow \frac{25}{2} [x - \frac{1}{2} \sin(6x)]_t^{t+T_0}$, όπου επιλέγοντας σαν T_0 την περίοδο του ημιτόνου προκύπτει ότι οποιαδήποτε σταθερά $\alpha_0 \leq \frac{25}{2}$ αποτελεί ικανή ΣΕΔ.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα για τη μικτή δομή όπου $\theta_m=2$.

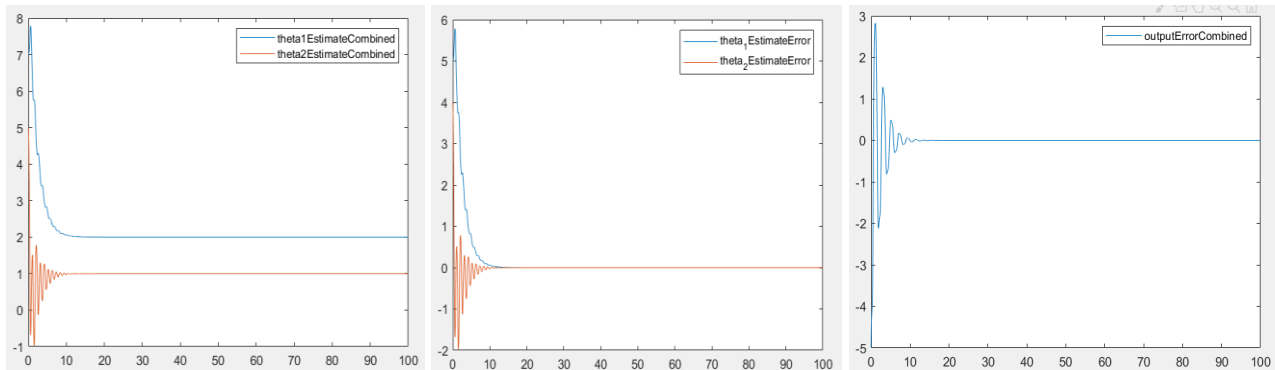


Figure 6: Charts presenting theta estimates and theta and output error for the series parallel estimation scheme. Initial values for $\hat{\theta}$ set to 5 and 7 respectively (choice was made randomly but relatively close to true values).

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω charts λόγω της πλήρωσης της ΣΕΔ οι εκτιμήσεις των σταθερών θ συγκλίνουν στις πραγματικές με το σφάλμα να συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν. Το σφάλμα εκτίμησης εξόδου συγκλίνει στο μηδέν, όπως ήταν αναμενόμενο, λόγω της επιλογής των παραγώγων των σταθερών που οδηγούν στην αρνητικά ημιορισμένη παράγωγο Lyapunov. Να σημειωθεί ότι η επιλογή

της σταθεράς θ_m παίζει έμμεσα ρόλο στην ταχύτητα σύγκλισης του συστήματος. Με μεγαλύτερη σταθερά ακόμα και για αρνητικά ημιορισμένη παράγωγο η συνάρτηση Lyapunov οδηγείται πιο γρήγορα στην ισοσταθμική επιφάνεια μηδέν και άρα και οι όροι που αυτοί περιέχει. Φυσικά η σύγκλιση των σταθερών πρέπει να αποδειχθεί όπως παραπάνω αλλά και διαισθητικά η επιρροή του θ_m είναι ικανοποιητική. Βέβαια μεγάλες τιμές της σταθεράς οδηγούν σε αριθμητικά ζητήματα και εεπιτα από δοκιμές κρίθηκε ως κατάλληλη η παραπάνω τιμή.

- Παράλληλη δομή - Η μορφή της παράλληλης δομής είναι η ακόλουθη: $\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u$.

Ορίζοντας και πάλι την ίδια μορφή σφάλματος με προηγουμένως και παίρνοντας ως συνάρτηση ίδια Lyapunov καταλήγει στη μορφή μεταβολής σταθερών $\dot{\hat{\theta}}_1 = -e\hat{x}$, $\dot{\hat{\theta}}_2 = eu$, με τι οποίες και πάλι εξασφαλίζεται η σύγκλιση του σφάλματος εξόδου στο μηδέν και λόγω της εισόδου και η σύγκλιση του σφάλματος εκτίμησης σταθερών σε αυτό.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης των σταθερών θ και του σφάλματος εξόδου.

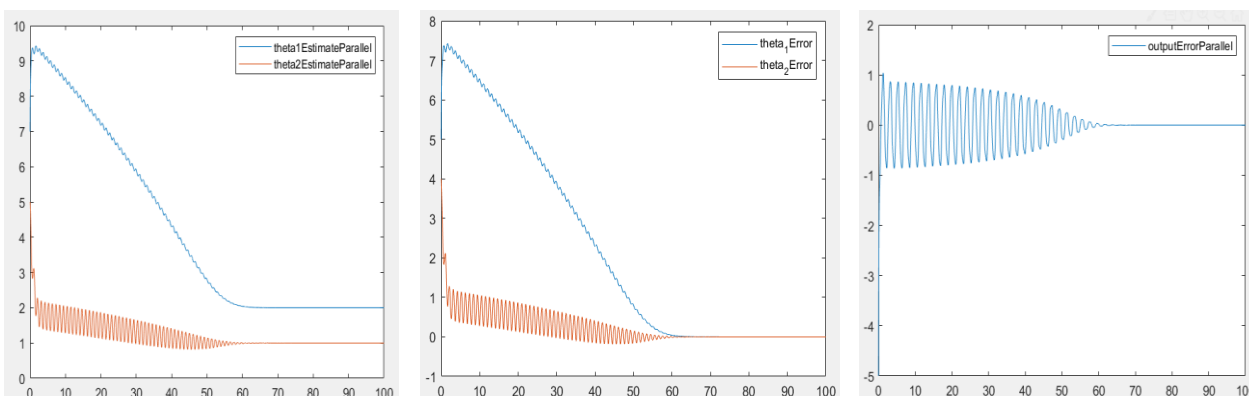


Figure 7: Theta estimates response and theta estimates and output error for the parallel series system scheme. Initial conditions same as figure 6.

Όπως φαίνεται και παραπάνω και πάλι οι προσεγγίσεις του θ συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές με το σφάλμα προσέγγισης να συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν. Στο μηδέν συγκλίνει και το σφάλμα εξόδου. Παρατηρείται ότι για το συγκεκριμένο σύστημα η προσέγγιση μικτής δομής συγκλίνει γρηγορότερα στην πραγματική τιμή, γεγονός που είναι διαισθητικά σωστό, αφού στην παράλληλη δομή δεν υπάρχει υπάρχει η πληροφορία σφάλματος εξόδου όπως στη μικτή. Ωστόσο όπως παρουσιάζεται παρακάτω η παράλληλη δομή υπερτερεί σε περίπτωση παρουσίας θορύβου στην μέτρηση της κατάστασης x .

Παρακάτω παρουσιάζονται διαγράμματα των προσεγγίσεων των σταθερών και για τα δύο προσεγγιστικά συστήματα όπως επίσης και το σφάλμα εξόδου για διαφορετικές τιμές θορύβου προστιθέμενου στη μέτρηση x . Ο θόρυβος είναι ημιτονοειδής και μεταβάλλεται το πλάτος και η συχνότητα του ώστε να μελετηθεί η επίδραση του στην εκτίμηση.

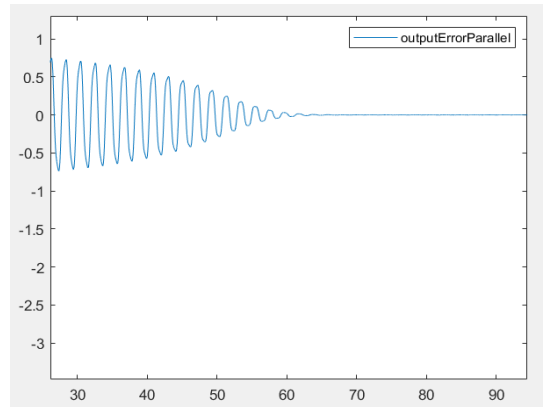
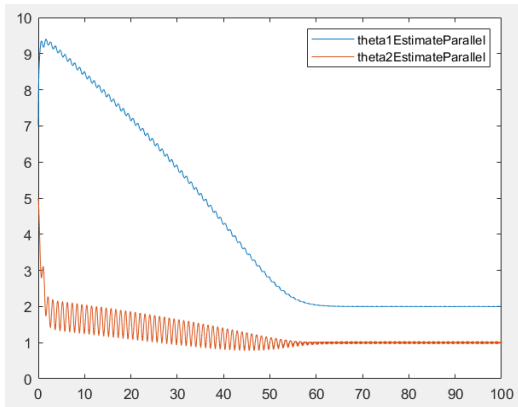
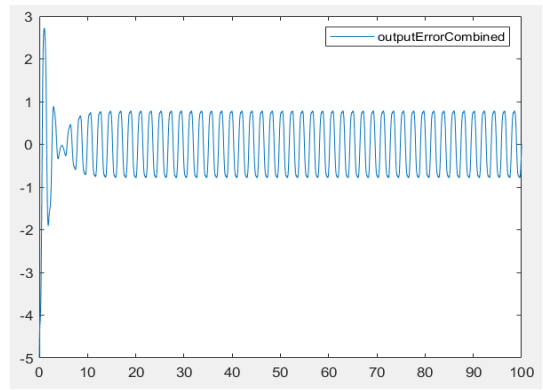
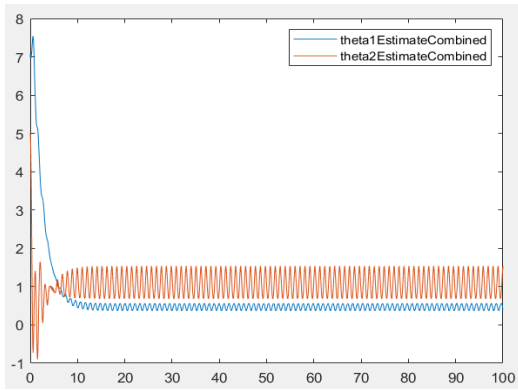


Figure 8: Theta estimates and output error with added noise in x measurements. Noise magnitude is 1 unit and frequency is 20Hz.

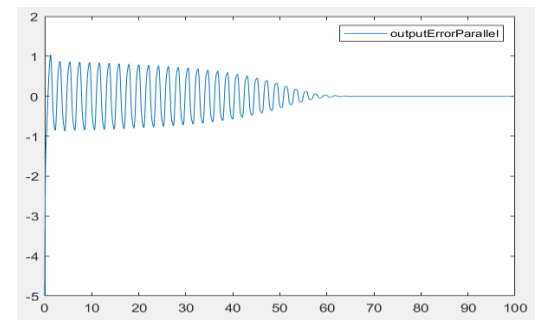
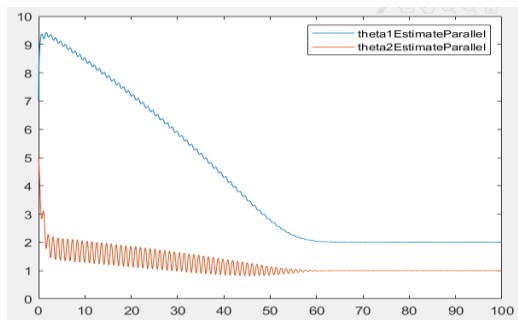
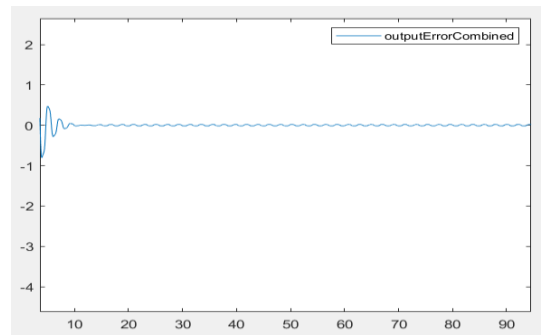
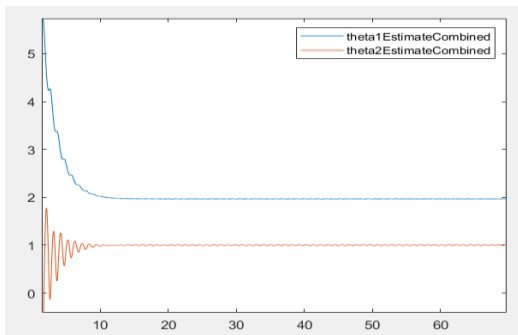


Figure 9: Theta estimates and output error with added noise in x measurements. Noise magnitude is 0.15 unit and frequency is 20Hz.

Όπως φαίνεται και παραπάνω το πλάτος του θορύβου επηρεάζει σημαντικότερα τη σύγκλιση της μικτής μορφής, όπως και ήταν αναμενόμενο αφού στο σφάλμα εμφανίζεται το τετράγωνο αυτού. Για μεγάλο πλάτος η μικτή μορφή επηρεάζεται τόσο που ούτε το σφάλμα εξόδου συγκλίνει στο μηδέν ούτε οι σταθερές στις σωστές τιμές. Αντίθετα η παράλληλη μορφή μένει σχεδόν ανεπηρέαστη από το θόρυβο με μόνο μια μικρή ταλάντωση στην εκτίμηση των παραμέτρων αλλά και πάλι πρακτικά αμελητέα. Να σημειωθεί πως η συχνότητα του θορύβου δεν παρουσίασε μεταβολές στην απόκριση, τουλάχιστον σημαντικές ώστε να αναφερθούν, οπότε χάριν συντομίας δεν παρουσιάζονται τα διαγράμματα μεταβλητών συχνοτήτων. Επομένως η παράλληλη μορφή, αν και συγκλίνει πιο αργά έχει πολύ καλύτερη συμπεριφορά παρουσία θορύβου από τη μικτή.

Θεμα 3^ο: Στόχος του τμήματος αυτού της εργασίας είναι ο υπολογισμός των σταθερών συστήματος με τη μέθοδο Lyapunov, με το σύστημα να είναι σε μορφή πινάκων. Η μορφή του πραγματικού συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2.2 \end{bmatrix} u$$

Με $u=10\sin(2t)+5\sin(7.5t)$. Ορίζοντας ως μορφή αναγνώρισης την παράλληλα δομή όπως περιγράφηκε παραπάνω και λαμβάνοντας την παράγωγο του σφάλματος εξόδου προκύπτει η εξίσωση: $\dot{e} = Ae - \tilde{A}\hat{x} - \tilde{B}u$. Ορίζοντας τη συνάρτηση Lyapunov $V = \frac{1}{2}[e^T e + \text{tr}\{\tilde{A}^T \tilde{A}\} + \text{tr}\{\tilde{B}^T \tilde{B}\}]$ παίρνοντας την παράγωγο αυτής και κάνοντας χρήση της εξίσωσης παραγώγου του σφάλματος προκύπτει ότι για να συγκλίνει στο μηδέν το σφάλμα εξόδου, σύμφωνα με την ανάλυση στο 2^ο θέμα, πρέπει να επιλεγούν: $\dot{\tilde{A}} = e\hat{x}^T, \dot{\tilde{B}} = eu$. Επιπλέον, όπως αναλύθηκε και παραπάνω για ημιτονοειδή είσοδο, έτσι και το άθροισμα ημιτόνων ικανοποιεί μία ΣΕΔ και ως εκ τούτου και το σφάλμα προσέγγισης σταθερών των πινάκων A και B τήνει στο μηδέν.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα εκτίμησης σταθερών και σφάλματος εξόδου για την παραπάνω μέθοδο εκτίμησης για το σύστημα.

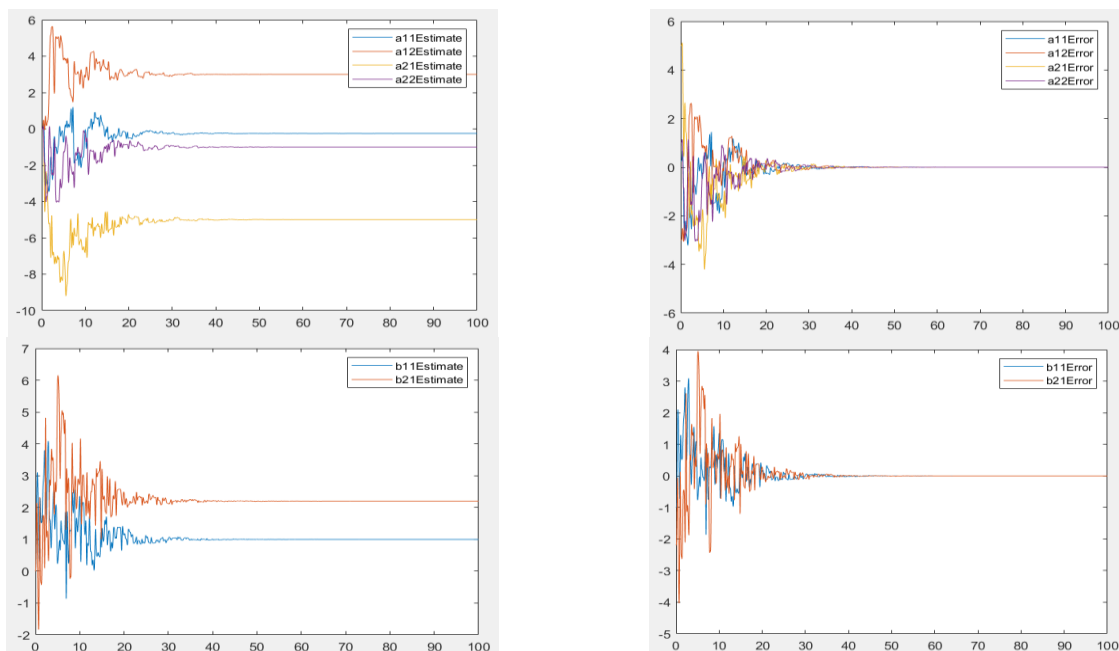


Figure 10: Charts presenting estimations and error for A and B matrices' coefficients. All initial values were set to 0.

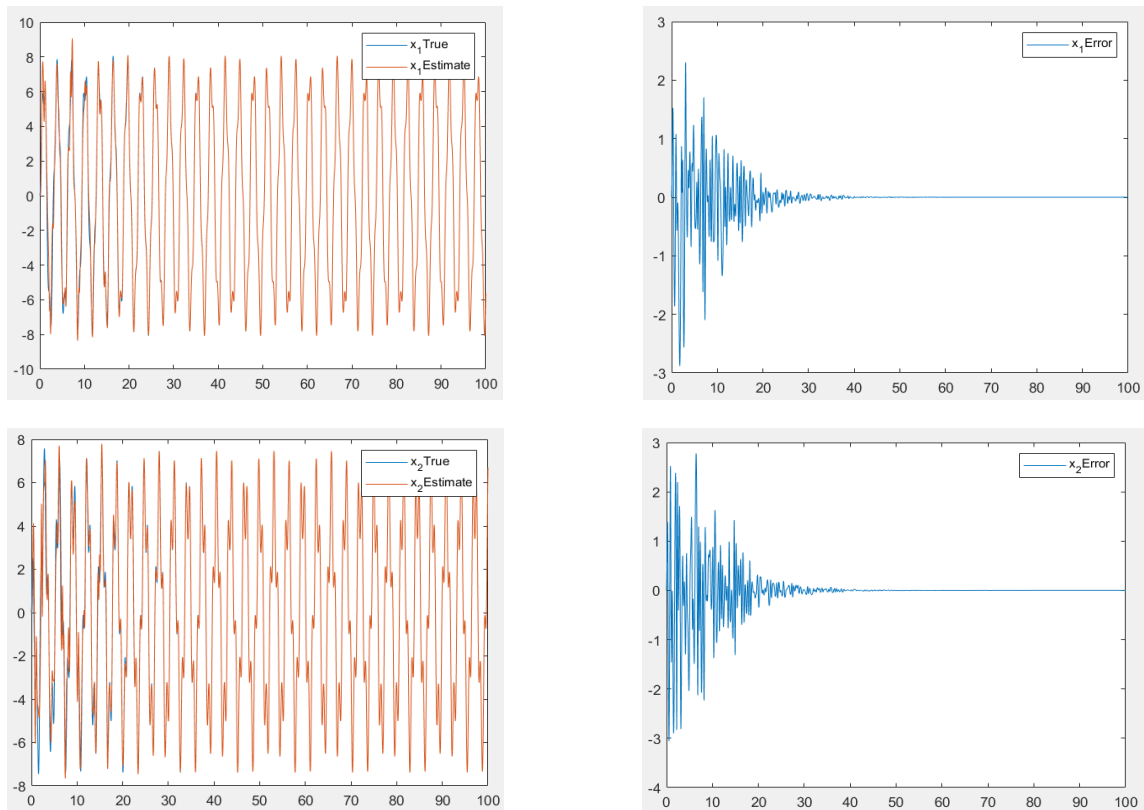


Figure 11: True and estimated output for both state variables. Error of estimation also presented. Initial values were set to 0.

Όπως φαίνεται παραπάνω το σφάλμα εξόδου και για τις δύο μεταβλητές κατάστασης τήνει στο 0 και η εκτιμώμενη έξοδο ταυτίζεται τελικά με την πραγματική, όπως και ήταν αναμενόμενο. Λόγω της ΣΕΔ που η είσοδος πληροί, το ίδιο συμβαίνει και για τις σταθερές του συστήματος.