

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Βαμβακίδης Δημήτρης ΑΕΜ:9501

Στόχος της εργασίας ήταν η αναγνώριση ενός άγνωστου συστήματος και ο προσδιορισμός της μορφής του με offline και online αλγορίθμους.

Την έξοδο του συστήματος παρήγαγε μια συνάρτηση *out*, ενώ γνωστό για το σύστημα ήταν μόνο η αιτιότητα του και η ευστάθεια του.

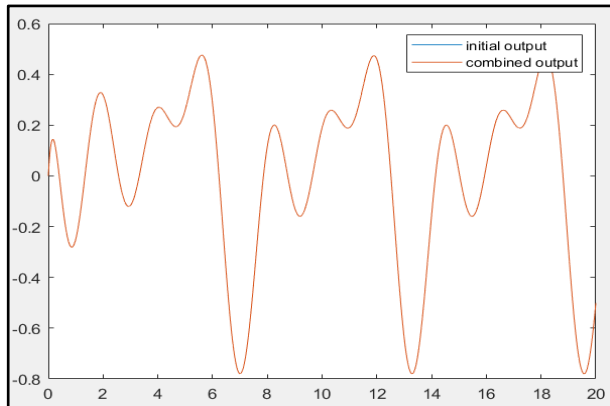
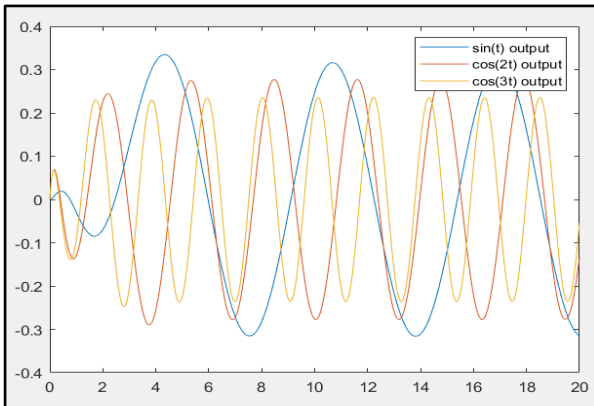
Έλεγχος γραμμικότητας του μοντέλου:

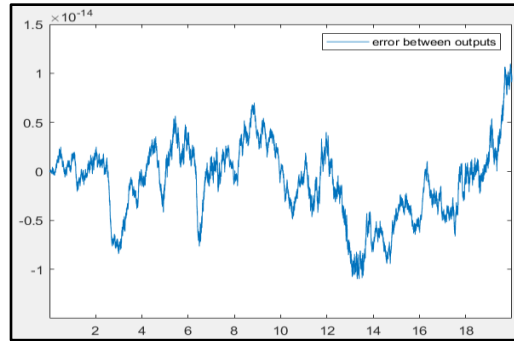
Προκειμένου να μπορέσει να διερευνηθεί η αναλυτική μορφή του μοντέλου διαπιστώθηκε πρώτα εφόσον αυτό είναι γραμμικό, ώστε να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια η κατάλληλης μορφής εξισώσεις στους αλγορίθμους εκτίμησης.

Καθώς δεν ήταν δυνατή η επιλογή και των αρχικών συνθηκών του συστήματος ο προσδιορισμός της γραμμικότητας του περιορίστηκε στην πειραματική απόδειξη της συνθήκης:

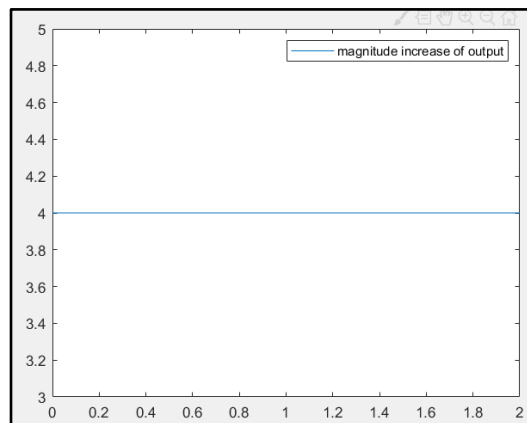
$$y(t, \alpha * u_1 + \beta * u_2) = y(t, \alpha * u_1) + y(t, \beta * u_2) \quad (a)$$

Όπου α , β σταθερές και u_1 , u_2 διαφορετικοί είσοδοι του συστήματος. Προκειμένου να αποδειχθεί το παραπάνω η διαδικασία χωρίστηκε σε δύο βήματα: πρώτα προσδιορίστηκε το *scaling* ανάλογα με αυτό της εισόδου και έπειτα η προσεταριστικότητα της εξόδου ως προς την είσοδο. Το παραπάνω έγινε μέσω ενός πολύ απλού *script Matlab* και παραγωγή αντίστοιχων γραφημάτων.





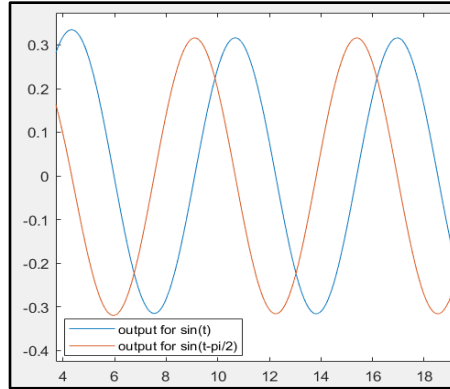
Όπως παρουσιάζεται και στα παραπάνω η έξοδος του συστήματος για είσοδο: $u = \sin(t) + \cos(2t) + \cos(3t)$ είναι η ίδια με αυτή που προκύπτει αν προστεθούν οι έξοδοι του συστήματος για τις τρεις παραπάνω εισόδους ξεχωριστά. Αυτό γίνεται αντιληπτό όχι μόνο από την ταύτιση των εξόδων στο σχετικό διάγραμμα αλλά και από την τιμή του μεταξύ τους σφάλματος, το οποίο είναι πρακτικά μηδέν. Ο λόγος που δεν προκύπτει καθαρά μηδέν οφείλεται στο *floating point error* που παρουσιάζει η Matlab και καθιστά αδύνατη την απόλυτη ισότητα *floating point numbers*.



Επιπλέον το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται ο λόγος της εξόδου που προκύπτει για είσοδο στο σύστημα $u_1 = 4\cos(3t)$ προς την έξοδο που προκύπτει για είσοδο $u_2 = \cos(3t)$. Όπως φαίνεται αυτός ο λόγος είναι πράγματι 4 δηλαδή πληρείται και η δεύτερη προϋπόθεση *scaling* που παρουσιάζεται στη σχέση (α).

Επομένως το σύστημα είναι πράγματι γραμμικό και άρα για την αναγνώριση του προσφέρεται η χρήση γραμμικών εξισώσεων.

Παράλληλα να σημειωθεί ότι δεν είναι γνωστό εάν το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο ώστε να χρησιμοποιηθούν σταθερές στις εξισώσεις αναγνώρισης. Από το παρακάτω διάγραμμα ωστόσο φαίνεται ότι για είσοδο $u_3 = \sin(t - \pi/2)$ η έξοδος είναι πράγματι η ίδια με αυτή της εισόδου χωρίς φάση μετατοπισμένη προς δεξιά κατά $t=\pi/2$.



Αναγνώριση συστήματος με offline αλγόριθμο:

Προκειμένου να αναγνωρισθεί το σύστημα χρησιμοποιήθηκε αρχικά μια offline μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων και συγκεκριμένα αυτή των *ελαχίστων τετραγώνων*.

Προς το σκοπό και έχοντας αποδείξει τη γραμμικότητα του συστήματος, χρησιμοποιήθηκε η ακόλουθη μορφή διαφορικής εξίσωσης: $\frac{dy^n}{dt} + a_1 \frac{dy^{n-1}}{dt} + \dots + a_n y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{du^m}{dt}$ (1), όπου u, y η είσοδος και η έξοδος του συστήματος αντίστοιχα και $n \geq m$ καθώς μελετάμε κανονικό σύστημα, αφού στην έξοδο δεν γίνεται, σε μορφή συνάρτησης μεταφοράς, σε ένα αιτιατό σύστημα όπως αυτό, δεδομένο που δίνεται, να εμφανιστεί παράγωγος της εισόδου. Να σημειωθεί ότι η επιλογή της συγκεκριμένης μορφής γραμμικής εξίσωσης έγινε και για την απλότητα που προσφέρει η ανάλυση της. Εάν η επιλογή αυτή είναι η κατάλληλη μορφή γραμμικού συστήματος αναμένεται να επιβεβαιωθεί από την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του εκάστοτε μοντέλου.

Επιπλέον, όπως και στα ακόλουθες μεθόδους, έγινε χρήση της γραμμικοποιημένης μορφής του συστήματος. Η γραμμικοποιημένη μορφή προκύπτει λαμβάνοντας την διαφορική εξίσωση στο πεδίο των συχνοτήτων και κάνοντας χρήση ενός φίλτρου βαθμού $\geq n$, προκειμένου να είναι υλοποιήσιμο. Πιο συγκεκριμένα η διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$L(s) \xrightarrow{\text{yields}} s^n y + a_1 s^{n-1} y + \dots + a_n y = b_0 u + b_1 s u + \dots + b_m s^m u \xrightarrow{/\Lambda(s)} y = [\lambda_{n-1} - a_1, \lambda_{n-2} - a_2, \dots, \lambda_0 - a_n, b_m, \dots, b_0] [s^{n-1} y / \Lambda(s), \dots, y / \Lambda(s), s^m b_m / \Lambda(s) u, \dots, b_0 / \Lambda(s) u]^T \quad (2).$$

Το $\Lambda(s)$ είναι της μορφής $\Lambda(s) = s^n + \lambda_{n-1} s^{n-1} + \dots + \lambda_n = (s + \rho)^n$ όπου ο πόλος ρ καθορίστηκε πειραματικά. Κάνοντας χρήση της γραμμικοποιημένης μορφής του συστήματος όλες οι εισοδοί ϕ είναι γνωστές και επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκπαίδευση του μοντέλου.

Η εκπαίδευση έγινε κάνοντας επιλογή εισόδου $u = \sin(7t)$ με 7 συχνότητες ώστε να πληρείται κάποια ΣΕΔ. Ο αριθμός 7 καθορίστηκε από την ανάγκη η είσοδος να είναι *sufficiently reach* βαθμού n όπου n όπως παραπάνω για γραμμικό σύστημα (κεφάλαιο 6' σημειώσεων μαθήματος) και το n να λαμβάνει για τα πειράματα που έγιναν να λαμβάνει τιμές μέχρι το 5. Ωστόσο, προστέθηκαν όχι μόνο 3 συχνότητες για

πληρότητα και καθώς δημιουργούν πιο περίπλοκο output και άρα διαισθητικά ενισχύουν το validity του μοντέλου που προκύπτει. Τα πλάτη των \sin και \cos της εισόδου επιλέχθηκαν τυχαία.

Η λειτουργία του αλγορίθμου έχει ως εξής: αρχικά συλλέγονται όλα τα δεδομένα των εξόδων των φίλτρων ϕ όπως αυτά εμφανίζονται στην (1), δημιουργώντας έναν $N \times M$ πίνακα Φ όπου N το πλήθος των χρονικών στιγμών για τις οποίες έγινε δειγματοληψία των εξόδων του συστήματος και M το πλήθος των στοιχείων ϕ_i , δηλαδή και το πλήθος των $\hat{\theta}$. Έτσι το σύνολο των εξόδων του συστήματος προκύπτει ως: $Y = \Phi * \theta_0(\alpha)$, όπου θ_0 η εκτίμηση των παραμέτρων της (1). Ορίζοντας έπειτα τη συνάρτηση εκτίμησης $K = \frac{(Y - \hat{Y})^2}{2} = \frac{(Y - \Phi \theta_0)^2}{2}(\beta)$ και παραγωγίζοντας αυτή ως προς θ_0 και μηδενίζοντας την παράγωγο ώστε να προκύψει το ολικό ελάχιστο (κυρτή ως προς θ η K) προκύπτει η $\Phi^T Y = \Phi \Phi^T \theta_0(\gamma)$, το οποίο γραμμικό σύστημα εφόσον λυθεί θα δώσει την εκτίμηση των θ για το συγκεκριμένο σύστημα.

Η επίλυση του συστήματος γίνεται σε *Matlab* μέσω τη συνάρτησης με πρότυπο:

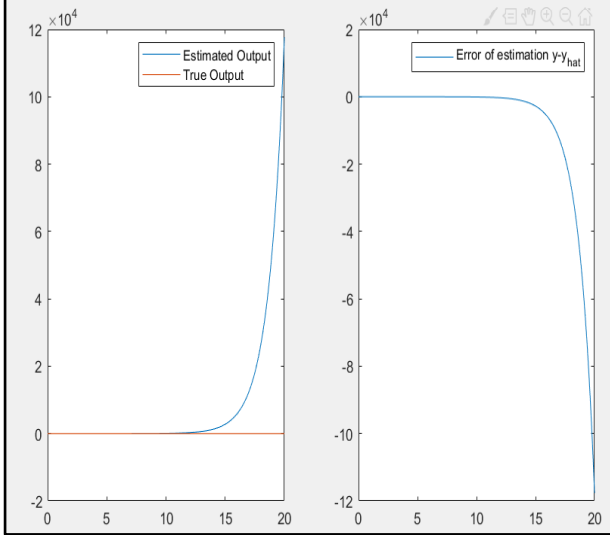
- `LSOffline(n,m,pole,timestep,time)`

Με το χρήστη να δίνει τα στοιχεία n, m του συστήματος τον πόλο των φίλτρων στα στοιχεία ϕ και τα $timestep$, δηλαδή περίοδο δειγματοληψίας και $time$, δηλαδή χρόνο εξέτασης του πραγματικού συστήματος.

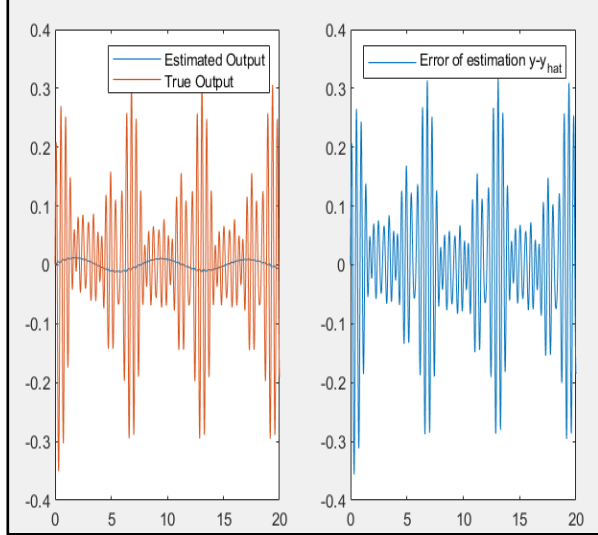
Πειραματικά προσδιορίστηκε ως καλύτερη τιμή για τον πόλο η -1 , καθώς έπρεπε να είναι ευσταθές το φίλτρο, αλλά και να παράγονται ικανοποιητικά αποτελέσματα, Χάριν συντομίας δεν παρουσιάζονται οι πειραματικές δοκιμές του πόλου αλλά μόνο αυτές για τις οποίες προέκυψαν τα καλύτερα αποτελέσματα, δηλαδή για την προαναφερθείσα τιμή. Επιπλέον η τιμή δειγματοληψίας ορίστηκε στα $0.0001s$, ώστε να μην παρουσιάζονται προβλήματα ιδιομορφίας των πινάκων κατά την επίλυση του συστήματος (γ). Η τιμή αυτή προσδιορίστηκε και πάλι πειραματικά.

Ακολουθούν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου για διάφορες τιμές των n, m . Να σημειωθεί ότι για τις κυματομορφές που παρουσιάζονται χρησιμοποιήθηκε νέα είσοδος, και πάλι που πληροί τη ΣΕΔ, ώστε να είναι έγκυρα τα αποτελέσματα και να μην επηρεάζονται από τη διαδικασία υπολογισμού των σταθερών.

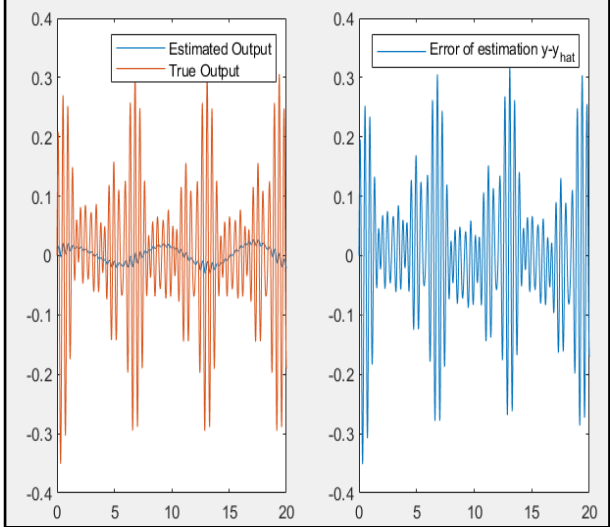
Results for model with $n=1$, $m=0$.



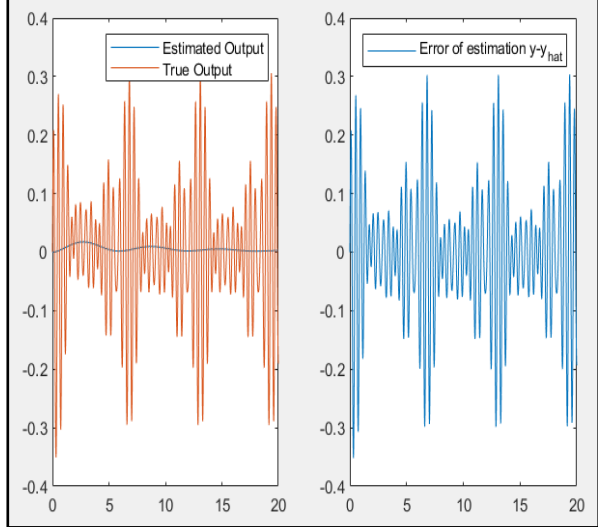
Results for model with $n=2$, $m=0$.

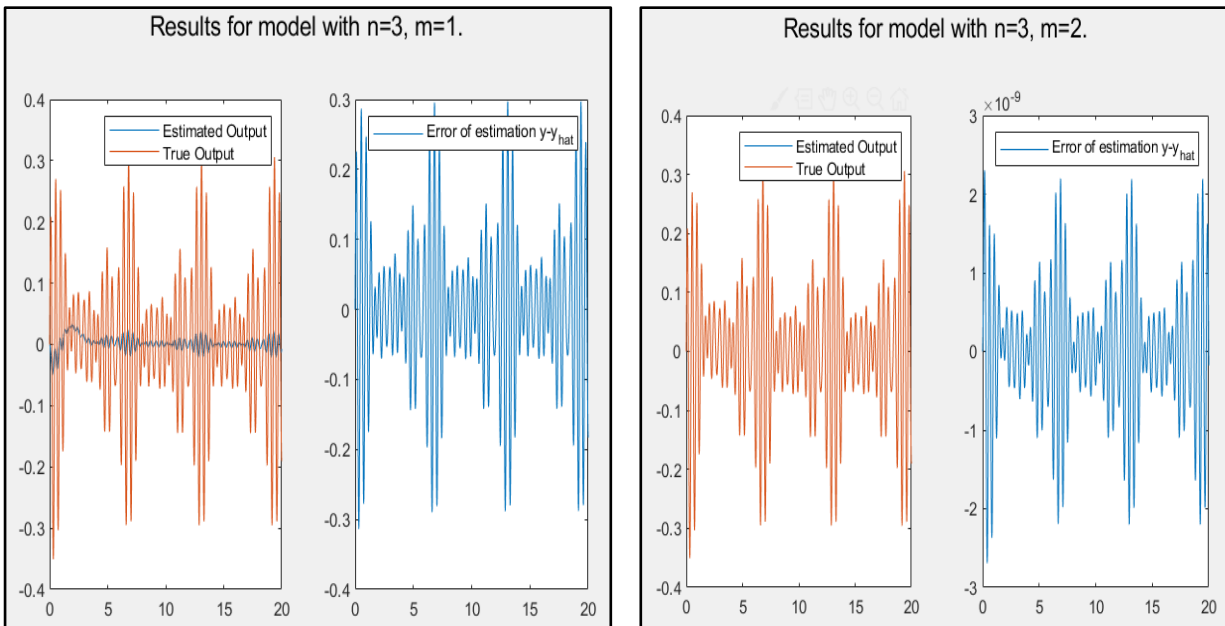


Results for model with $n=2$, $m=1$.



Results for model with $n=3$, $m=0$.

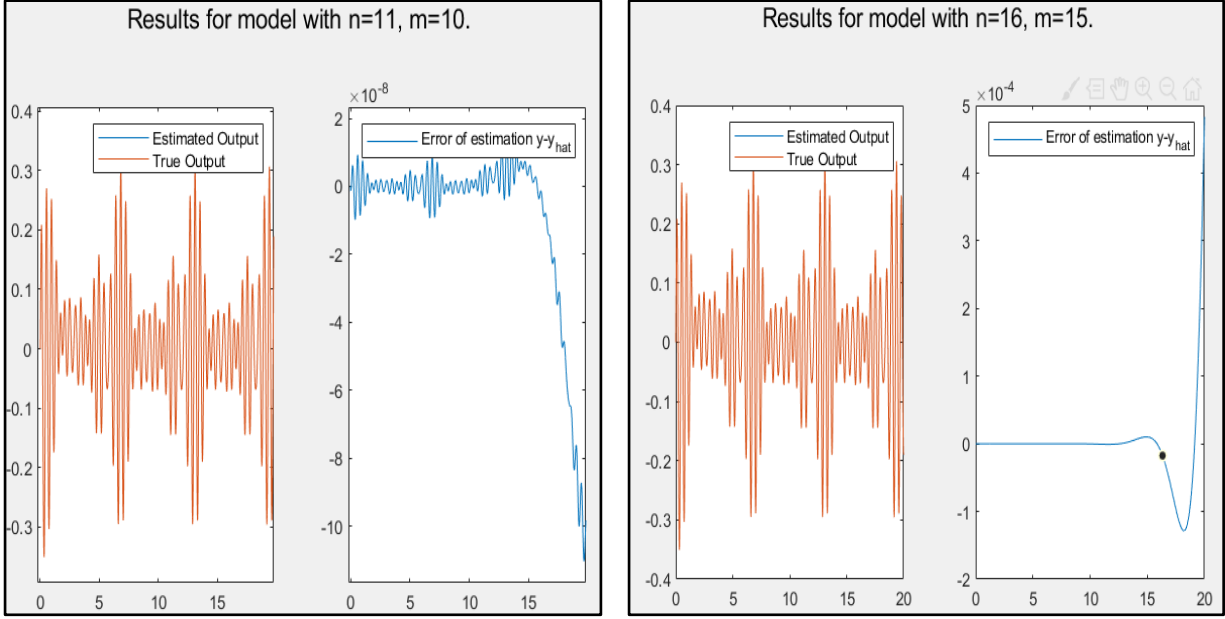




Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω διαγράμματα η καλύτερη προσέγγιση του συστήματος φαίνεται να είναι η $n=3, m=2$ (') καθώς παρουσιάζει το μικρότερο σφάλμα εξόδου από όλα τα μοντέλα. Να σημειωθεί ότι και σύστημα της μορφής $n=4, m=3$ δίνει εξίσου καλά αποτελέσματα ωστόσο αποτελεί πιο σύνθετη μορφή συστήματος και γι' αυτό δεν επιλέχθηκε.

Ιδιαίτερη αναφορά χρήζει η συμπεριφορά του αλγορίθμου στη μορφή συστήματος $n=1, m=0$ καθώς και σε μεγαλύτερους βαθμούς συστήματος της μορφής $n=m-1$. Όπως φαίνεται για την πρώτη περίπτωση ο αλγόριθμος (για οποιαδήποτε τιμή πόλου των φίλτρων ϕ ή ρυθμό δειγματοληψίας) οδηγεί σε προσέγγιση ασταθούς συστήματος, άρα σίγουρα δεν είναι κατάλληλη μορφή. Στις περιπτώσεις μεγαλύτερου βαθμού συμβαίνουν δύο πράγματα: 1^{ον}) το σφάλμα είναι τάξης μεγέθους μεγαλύτερο από την περίπτωση (') και 2^{ον}) παρουσιάζεται και πάλι αστάθεια στο προσεγγιστικό σύστημα.

Επομένως πράγματι η προσέγγιση (') αποτελεί την καλύτερη για το σύστημα και οδηγεί σε σύστημα της μορφής: $\frac{dy^3}{dt} + 6 \frac{dy^2}{dt} + 11 \frac{dy}{dt} + 6y = 2u - 3 \frac{du}{dt} + \frac{du^2}{dt}$. Παράλληλα αξίζει να σημειωθεί και ο μικρός αριθμός δειγμάτων για τα οποία ο αλγόριθμος δίνει καλά αποτελέσματα, αφού με αύξηση του ρυθμού δειγματοληψίας δεν επιτυγχάνονται καλύτερα αποτελέσματα.



Αναγνώριση συστήματος με online αλγόριθμο:

1. Τροποποιημένος αλγόριθμος κλίσης

Στο κομμάτι της εργασίας αυτό καλούμαστε να αναγνωρίσουμε το σύστημα *black box* που μας δόθηκε κάνοντας χρήση *online αλγορίθμων* εκτίμησης. Καθώς, όπως αναλύθηκε προηγουμένως, το σύστημα αποδείχθηκε πειραματικά ότι είναι γραμμικό χρησιμοποιήθηκε και πάλι μοντέλο της μορφής (1).

Σε πρώτη ανάλυση του μοντέλου επιλέχθηκαν εύρωστοι αναδρομικοί αλγόριθμοι εκτίμησης αυτού ώστε να αποφευχθεί το ενδεχόμενο παραμετρικής ολίσθησης των εκτιμήσεων. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε η τροποποιημένη μέθοδος κλίσης - *μέθοδος σίγμα*. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε η συνεχής διακοπτική μορφή αυτής, ώστε να υπάρχουν τα οφέλη που, ακόμα και με την ύπαρξη πιθανού σφάλματος πόλωσης, η μέθοδος κλίσης προσδίδει ενώ ταυτόχρονα να αποφεύγεται η παραμετρική ολίσθηση και η εμφάνιση υψίσυχων ταλαντώσεων στην διαφορική εξίσωση εκτίμησης παραμέτρων, που ενδεχομένως την καταστήσουν και άλυτη, λόγω των ασυνεχειών που παρουσιάζονται.

Για την εκτίμηση των παραμέτρων σύμφωνα με την εν λόγω μέθοδο η διαφορική εξίσωση ορίστηκε ως εξής:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \begin{cases} \gamma * error * \varphi_i, & |\hat{\theta}_i| < M \\ -\sigma * (|\hat{\theta}_i|/M - 1) * \gamma * \hat{\theta}_i + \gamma * error * \varphi_i, & M \leq |\hat{\theta}_i| \leq 2 * M \\ -\sigma * \gamma * \hat{\theta}_i + \gamma * error * \varphi_i, & 2 * M \leq |\hat{\theta}_i| \end{cases} (*)$$

Όπου ως φ_i ορίζεται η έξοδος που παράγει το filtered input όπως αυτό συναντάται στην γραμμικοποιημένη μορφή και $error \triangleq (y - \hat{y})$. Ακόμα γ, σ αποτελούν τις παραμέτρους του αλγορίθμου.

Τέλος η παράμετρος M και καθώς δεν είναι κάτι γνωστό για το σύστημα εκ των προτέρων, πέραν της γραμμικότητας του, τέθηκε στην τιμή 20 η οποία είναι μια λογική πρώτη επιλογή ώστε να μην υπάρξει παραμετρική ολίσθηση, ενώ δίνει τη δυνατότητα στον αλγόριθμο να λάβει την ιδανική μορφή για τμήμα των υπολογισμών. Και πάλι η καταλληλότητα της παραμέτρου θα επιβεβαιωθεί μέσω της πειραματικής διαδικασίας.

Ο αλγόριθμος που υλοποιήθηκε σε *Matlab* και πραγματοποιεί την αναγνώριση του συστήματος λειτουργεί ως ακολούθως με βάση το πρωτότυπο συνάρτησης:

- *Function*
`result=switchingSigmaOde(n,m,sigma,gamma,thetaBoundary,pole,time,timestep)`

Καθώς είναι δυνατό, όλες οι έξοδοι του συστήματος παράγονται εκ των προτέρων με βήμα που ορίζει ο χρήστης που καλεί τη συνάρτηση. Η είσοδος διέγερσης επιλέχθηκε να έχει και πάλι η ίδια με προηγουμένως για τους λόγους που αναλύθηκαν.

Ανάλογα με τον βαθμό της παραγώγου της εισόδου και της εξόδου αντίστοιχα που παρέχεται από τον χρήστη, ο αλγόριθμος δημιουργεί, κάνοντας χρήση της συνάρτησης *tf* τις κατάλληλες συναρτήσεις μεταφοράς που αντιστοιχούν στις εισόδους ϕ όπως αυτές περιγράφονται στην εξίσωση (2) και κάνοντας χρήση του πόλου p_{pole} για το πολυώνυμο $\Lambda(s)$.

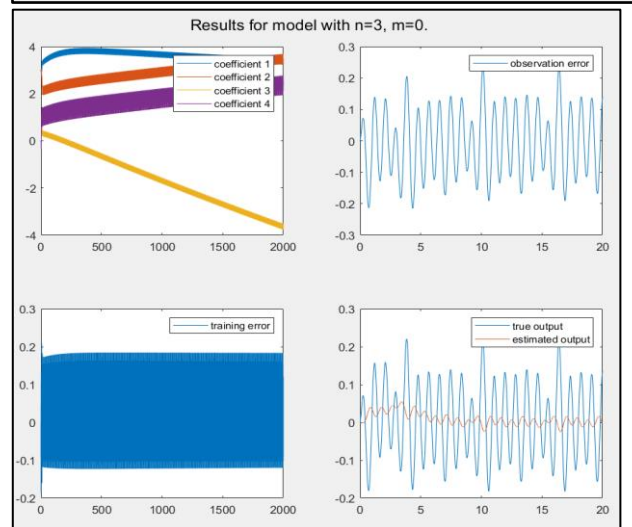
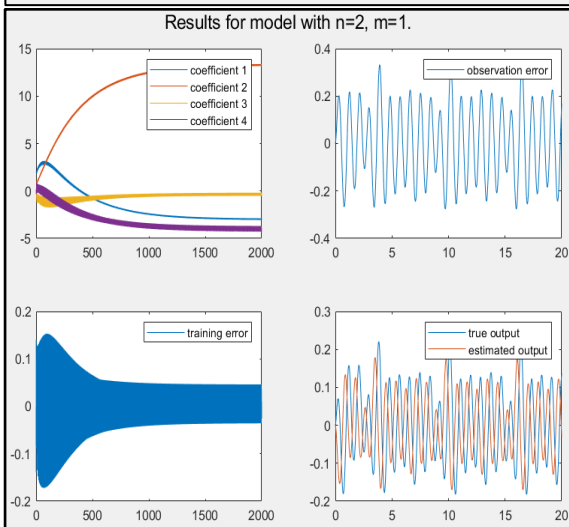
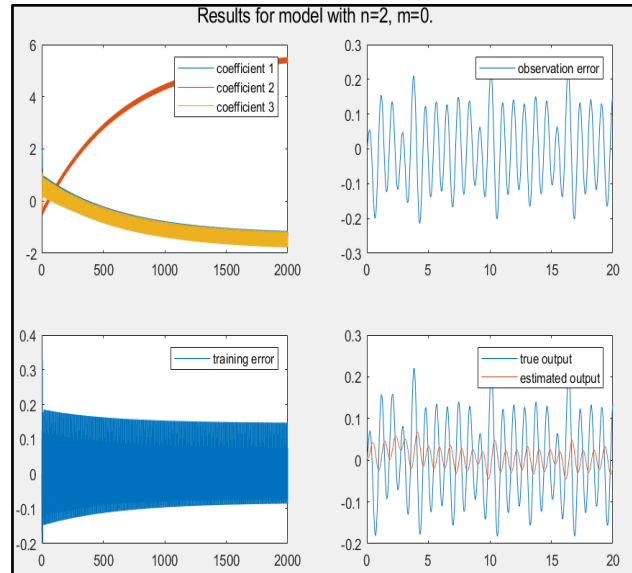
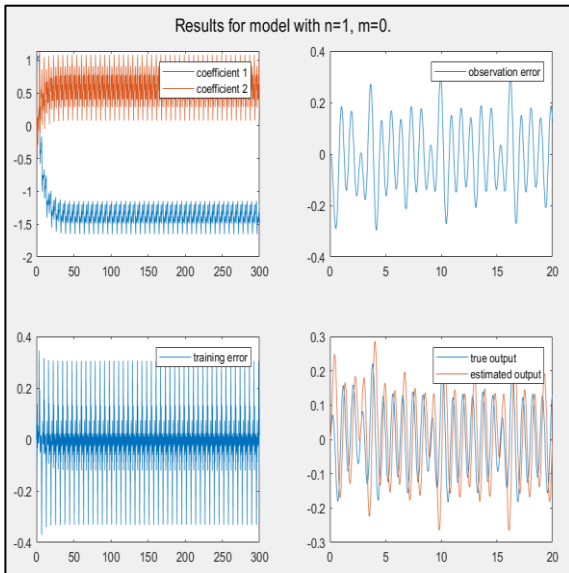
Έπειτα η συναρτήσεις μεταφοράς ϕ που αφορούν τα u και y αντίστοιχα μετατρέπονται σε γραμμικό σύστημα $[A,B,C,D]$ μέσω της συνάρτησης *tf2ss* και έπειτα τα δύο συστήματα συγχωνεύονται σε *block matrices*. Το παραπάνω γίνεται προκειμένου τα φίλτρα ϕ να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν στην ode στη συνέχεια ώστε να λυθεί η διαφορική εξίσωση υπολογισμού των $\hat{\theta}$.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το γραμμικό σύστημα που περιγράφει τα ϕ καθώς και οι παράμετροι που έχουν δοθεί ως ορίσματα στην συνάρτηση *switchingSigmaOde* περνούν στην ode45 ώστε να λυθεί η διαφορική (*). Καθώς βέβαια δεν είναι γνωστό το σύστημα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διαφορική του στην Ode και για αυτό το λόγω η τιμή της γ και u προσδιορίζονται μέσα στην συνάρτηση που δίνεται στην ode μέσω γραμμικής παρεμβολής για το εκάστοτε t που ζητάει η ode. Να σημειωθεί ότι δεν έγινε χρήση της *Interp1* καθώς προκαλούσε καθυστέρηση, οπότε δημιουργήθηκε μία απλή συνάρτηση γραμμικής παρεμβολής.

Τέλος, χρησιμοποιώντας την τελική τιμή που προέκυψε από τη λύση της διαφορικής μέσω ode για τα $\hat{\theta}$ και χρησιμοποιώντας άλλη είσοδο προκειμένου να παρατηρηθεί το συνολικό σφάλμα του μοντέλου και όχι απλώς το σφάλμα πόλωσης και άρα να μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα για τη σύγκριση των διαφόρων προσεγγίσεων, παράγεται μια νέα έξοδος από το πραγματικό σύστημα και συγκρίνεται με την έξοδο της προσέγγισης.

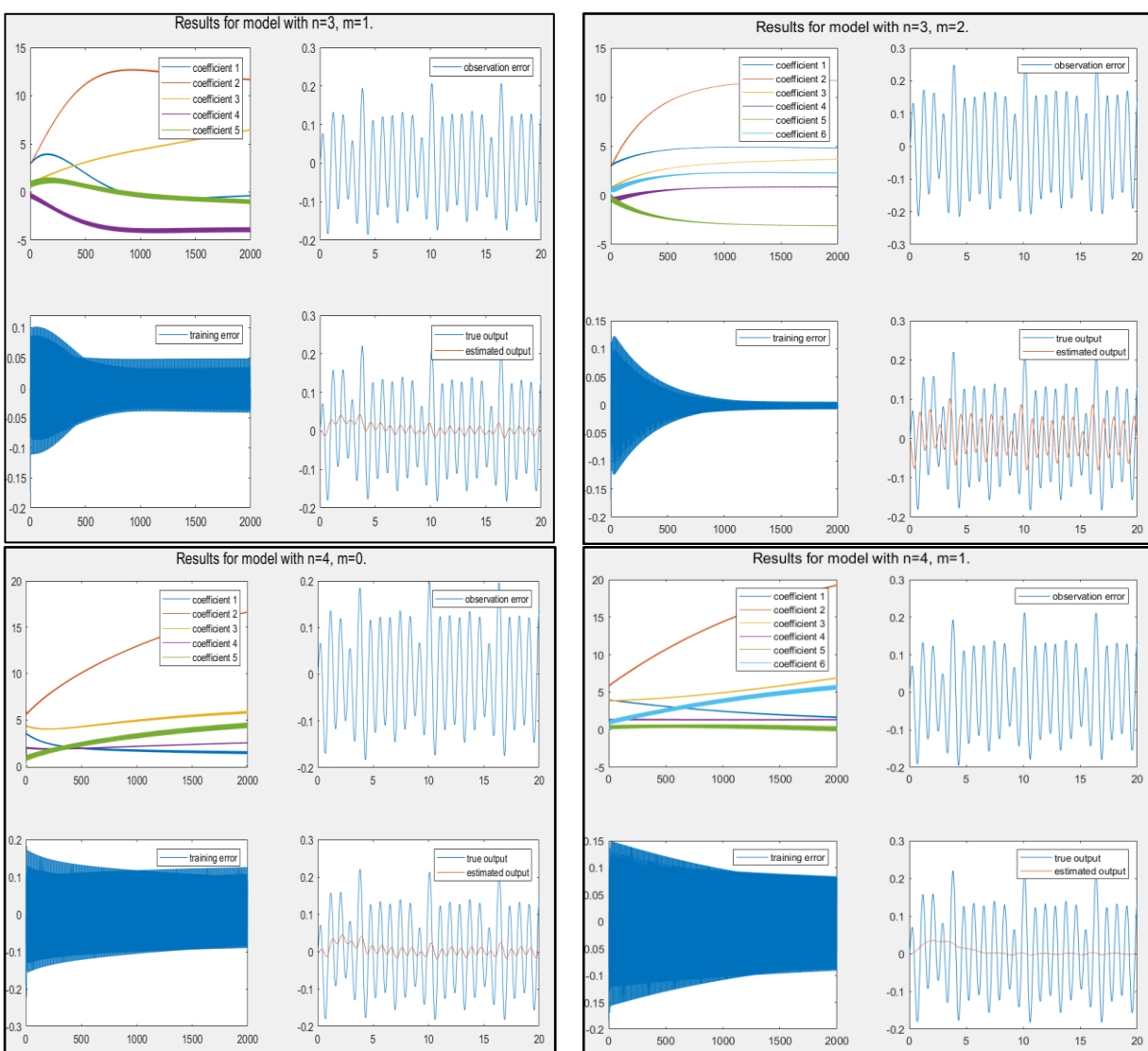
Να σημειωθεί ότι για την κατασκευή των μοντέλων προσέγγισης χρησιμοποιήθηκε κατά κάποιο τρόπο η προσθετική μέθοδος καθώς τα αποτελέσματα προέκυψαν αυξάνοντας τον βαθμό της διαφορικής για την έξοδο και έπειτα, για την τρέχουσα τάξη παραγώγου εξόδου, την αντίστοιχη τάξη παραγώγου της

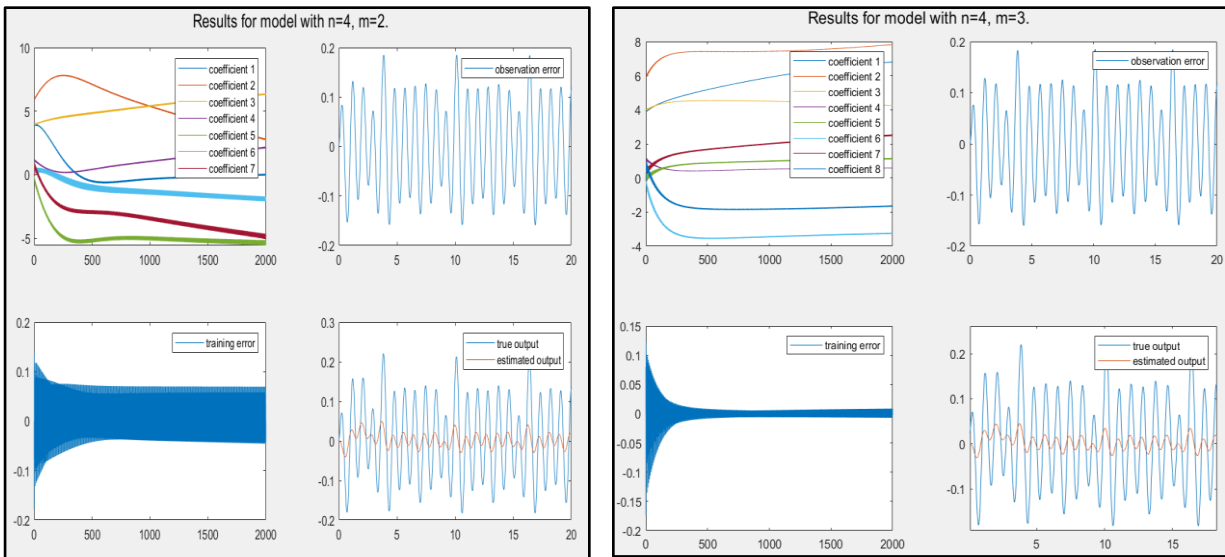
εισόδου. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου για διάφορες τάξης της διαφορικής. Παρουσιάζονται αποτελέσματα με τιμές παραμέτρων $\gamma=60, \sigma=1$, $\rho/\rho=-1$. Η τιμή του πόλου επιλέχθηκε καθώς παρουσίαζε την καλύτερη συμπεριφορά σαν φίλτρο, με αρνητικότερους πόλους να προκαλούν μεγαλύτερο σφάλμα προσεγγιστικού μοντέλου. Το σ διατηρήθηκε χαμηλό ώστε να περιοριστεί το σύνολο σύγκλισης του $\hat{\theta} \triangleq \hat{\theta} - \theta^*$, σύμφωνα με τον τύπο που προκύπτει από την ανάλυση Lyapunov της μεθόδου: $\frac{\gamma}{\alpha}(\omega_0^2 + \sigma\theta^{*2}) (**)$ με $0 < \alpha < \sigma\gamma$ και $\omega_0 > \omega(t) \triangleq$ σφάλμα πόλωσης. Καθώς βέβαια ούτε το θ^* ούτε το ω_0 είναι γνωστά για ένα προς προσδιορισμό σύστημα, η παραπάνω εξίσωση αποτέλεσε μόνο οδηγό με τον προσδιορισμό των καλύτερων φαινομενικά τιμών για τις παραμέτρους να γίνεται πειραματικά. Επιπλέον η επιλογή τη τιμής του γ έγινε ώστε και να επιτρέψει στο σύστημα προσέγγισης να συγκλίνει ενδεχομένως κάπου χωρίς το χρονικό διάστημα t_{span} να πρέπει να γίνει πολύ μεγάλο, ενώ ταυτόχρονα διατηρήθηκε στην τιμή 60 και για να μην οδηγήσει σε *stiff differential equation* αλλά και να διατηρηθεί μικρό το σύνολο (**).



Όπως φαίνεται και από τα γραφήματα ο αλγόριθμος σ τροποποίηση παρουσιάζει σημαντικά μειονεκτήματα για το συγκεκριμένο σύστημα. Ακόμα και με $M=20$, γεγονός που σημαίνει ότι πρακτικά, για αρχικές τιμές 0 που δόθηκαν, ο αλγόριθμος λειτουργεί σαν εύρωστος αλγόριθμος κλίσης, δεν παρουσιάζει μικρό σφάλμα παρατήρησης ακόμα και για το σύστημα με $n=3, m=2$ που όπως φάνηκε από την εφαρμογή της *offline* μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση του πραγματικού.

Ο τροποποιημένος αλγόριθμος κλίσης φαίνεται να παρουσιάζει ως καλύτερη την προσέγγιση συστήματος $n=2, m=1$ καθώς κατά την φάση της παρατήρησης η έξοδος του προσεγγιστικού συστήματος φαίνεται να μοιάζει ικανοποιητικά στην έξοδο του πραγματικού. Παρ' όλα αυτά,





Όπως γίνεται προφανές από τη μελέτη του σφάλματος παρατήρησης, αυτό λαμβάνει τιμές συγκρίσιμες με το πλάτος της εξόδου και άρα δεν αποτελεί εν τέλη ικανοποιητική προσέγγιση.

Και αυτός ο αλγόριθμος με μία πιο προσεκτική μελέτη, φαίνεται εν τέλη να παρουσιάζει πραγματικά το σύστημα $n=3, m=2$ ως την καλύτερη προσέγγιση. Παρά το , και στην περίπτωση αυτή, συγκρίσιμο με την έξοδο σφάλμα παρατήρησης, το σφάλμα πόλωσης συγκλίνει στο μικρότερο σύνολο κατά την διαδικασία της εκπαίδευσης, πράγμα που υποδηλώνει το μικρότερο άνω φράγμα για το σφάλμα πόλωσης, μικρότερο ακόμα και από σφάλμα πόλωσης που αντιστοιχεί σε μεγαλύτερο αριθμό σταθερών, όπως στην περίπτωση του συστήματος τέταρτης τάξης. Ο παραπάνω ισχυρισμός βασίζεται στην παρατήρηση ότι ο αλγόριθμος κλίσης οδηγεί στο σφάλμα εκπαίδευσης σε ένα σύνολο που φράσσεται από το ω_0 όπου $|\omega(t)| \leq \omega_0$, και ο οποίος ουσιαστικά εφαρμόζεται με την επιλογή του $M=20$ όπως προαναφέρθηκε. Ωστόσο, για να αποφευχθεί το φαινόμενο του *overtraining* πρέπει να εξεταστεί το συνολικό σφάλμα (*observation error*) ώστε να αξιολογηθεί το μοντέλο και το σφάλμα αυτό είναι και σε αυτή την περίπτωση μεγάλο.

Το παραπάνω οφείλεται στην αργή σύγκλιση του αλγορίθμου για το σύστημα αυτό, ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλο γ θα επιλεγεί (μεγαλύτερο γ οδηγεί σε όχι άμεση αλλά θετική επίδραση στη σύγκλιση των τιμών). Πράγματι ορισμένες από τις σταθερές – *coefficients* (η οποίες βρίσκονται σε αντιστοιχία με τη μορφή της εξίσωσης (2), δηλαδή $\text{coefficient } 1 = a_1$ κ.ο.κ) συγκλίνουν στις τιμές που είχαν βρεθεί και με τον offline αλγόριθμο. Ωστόσο δύο από αυτές καθυστερούν να συγκλίνουν και ειδικά σε πραγματικό σύστημα όπου τα δεδομένα που λαμβάνονται δεν είναι άπειρα, αναμονή για σύγκλιση είναι απαγορευτική.

Επιπλέον, όπως καθίσταται προφανές, η λύση της διαφορικής εξίσωσης σταθερών παρουσιάζει έντονες ταλαντώσεις, ακόμα και για μικρό γ , γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε πρόβλημα εύρεσης λύσης για την διαφορική.

Όλα τα παραπάνω μειονεκτήματα καθιστούν την τροποποιημένη μέθοδο κλίσης ακατάλληλη για το εν λόγω σύστημα. Το παραπάνω σε συνδυασμό με την παρατήρηση ότι δεν φαίνεται να συναντάται παραμετρική ολίσθηση, οδήγησαν στην εξέταση του μη εύρωστου αναδρομικού αλγορίθμου ελαχίστων τετραγώνων ως πιθανή λύση.

Να σημειωθεί ότι εξετάστηκε και ο εύρωστος αλγόριθμος *deadzone* για τη μελέτη του συστήματος. Ωστόσο καθώς και αυτός αποτελεί τροποποίηση του αλγορίθμου κλίσης ήταν αναμενόμενο και επιβεβαιώθηκε πειραματικά, ότι τα αποτελέσματα του είναι όμοια με αυτά της σ τροποποίησης. Τα αποτελέσματα αυτά δεν παρουσιάζονται εδώ χάριν συντομίας, αφού είναι όμοια αυτών που αναλύθηκαν προηγουμένως.

2. Αναδρομική μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Η ανάπτυξη της συνάρτησης Matlab που υλοποιεί την συγκεκριμένη μέθοδο βασίστηκε στην ίδια αρχή που ακολουθήθηκε για την συνάρτηση σ-τροποποίησης. Ο χρήστης δίνει στη συνάρτηση το βαθμό n και m του επιθυμητού συστήματος προς εξέταση καθώς και τον πόλο p αλλά και το *βαθμό απώλειας μνήμης* και η συνάρτηση εκτελεί τη λύση της διαφορικής εξίσωσης για τα $\hat{\theta}$. Ο βαθμός απώλειας μνήμης β προσδιορίστηκε πειραματικά και τα καλύτερα αποτελέσματα (αν και χωρίς τα βέβαια οφέλη όπως τη σύγκλιση σε σταθερή τιμή του μηδενικού βαθμού) προέκυψαν για $\beta=5$ με μεγαλύτερες τιμές να μην επηρεάζουν περεταίρω την ακρίβεια του προσεγγιστικού συστήματος. Το πρότυπο της συνάρτησης είναι το ακόλουθο:

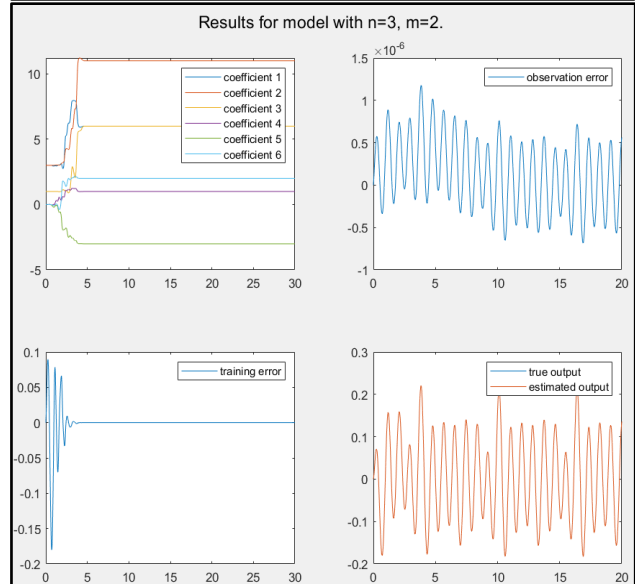
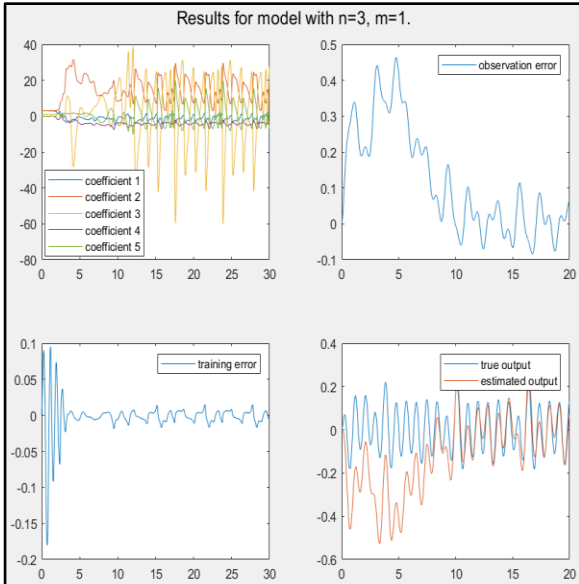
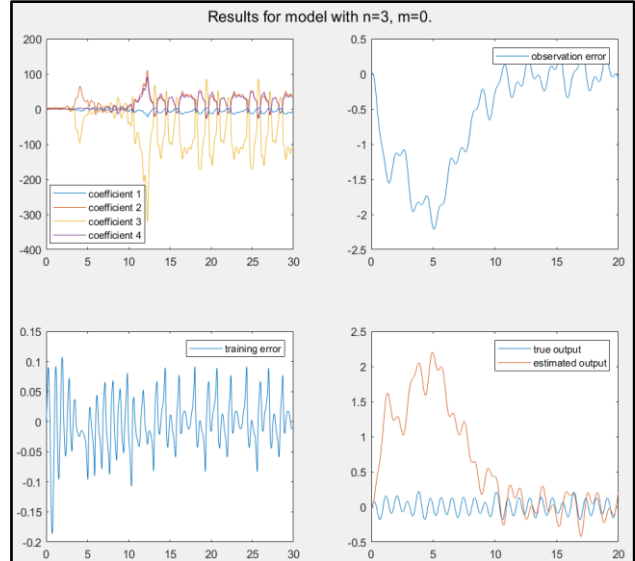
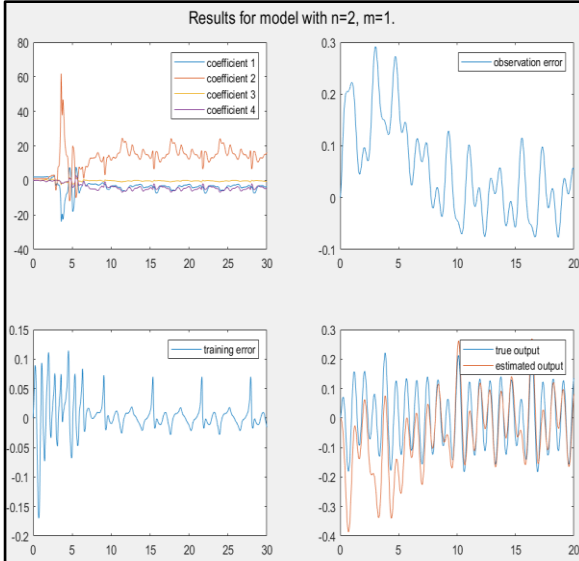
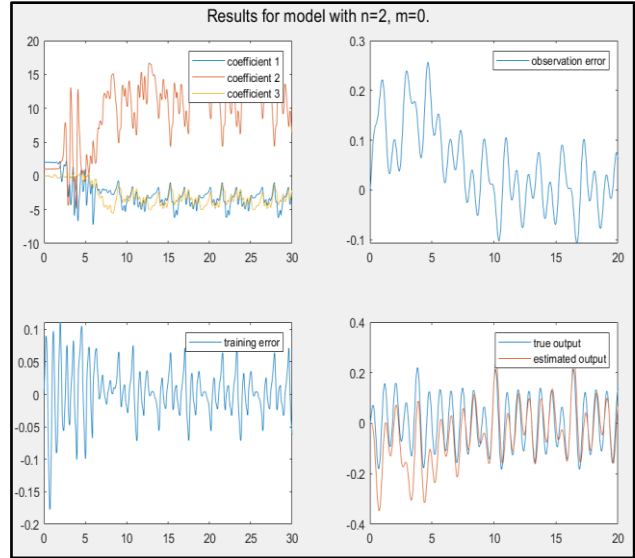
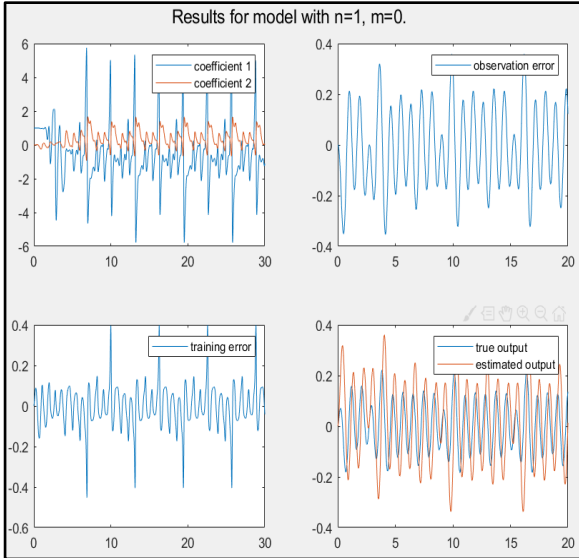
- `function result = LSODE(n,m,beta,pole,time,timestep)`

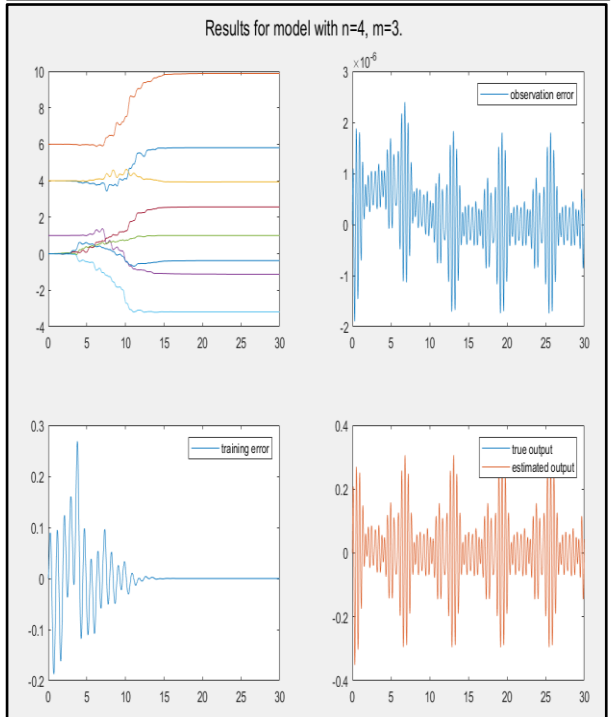
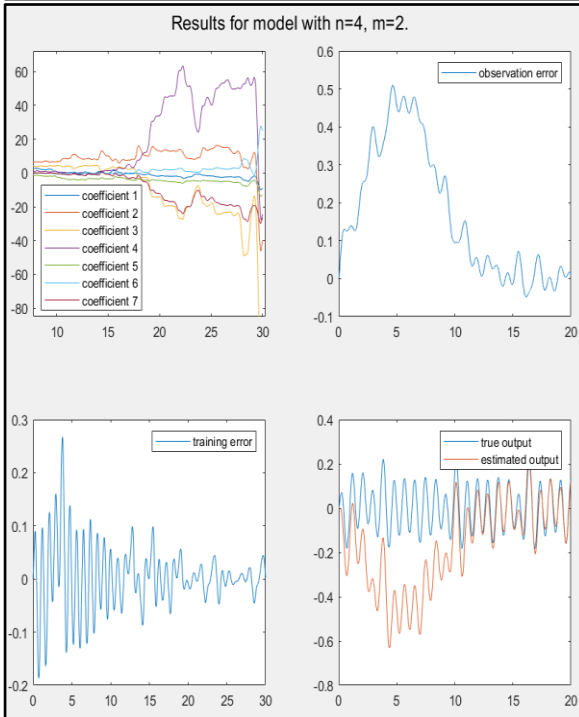
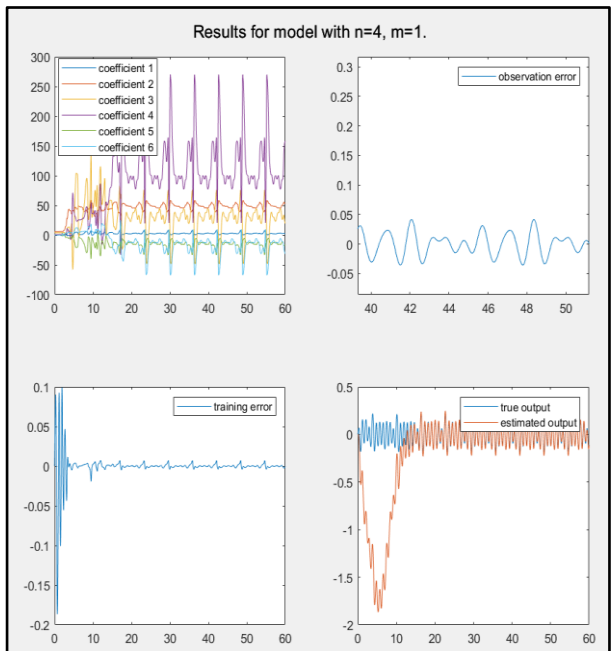
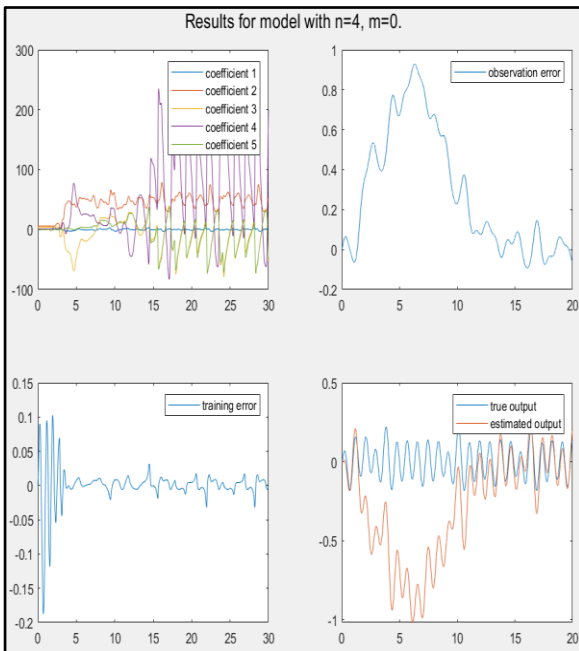
Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την μεταβολή των $\hat{\theta}$ είναι ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}} &= P\tilde{y}\varphi \\ \dot{P} &= \beta P - P\varphi\varphi^T P\end{aligned}\quad (3)$$

Όπου β ρυθμός απώλειας μνήμης, φ το διάνυσμα εισόδου του γραμμικώς παραμετροποιημένου συστήματος και P ένας πίνακας $K \times K$, όπου K είναι η διάσταση του διανύσματος φ και P δίνεται από τον τύπο: $P = [e^{-\beta t}Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\varphi\varphi^T d\tau]^{-1}$, με $Q_0^{-1} = P(0)$ και $P=P^T > 0$. Για την εφαρμογή του αλγορίθμου επιλέχθηκε ως αρχική για τον P ο μοναδιαίος πίνακας κατάλληλης διάστασης, ως απλή περίπτωση συμμετρικού θετικά ορισμένου πίνακα ενώ για τα $\hat{\theta}$ επιλέχθηκαν και πάλι μηδενικές αρχικές συνθήκες, αφού θεωρητικά τίποτα δεν είναι γνωστό για τις τιμές εκ των προτέρων.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής του αλγορίθμου εφαρμόζοντας την ίδια προσθετική μέθοδο με προηγουμένως για την μορφή του μοντέλου.



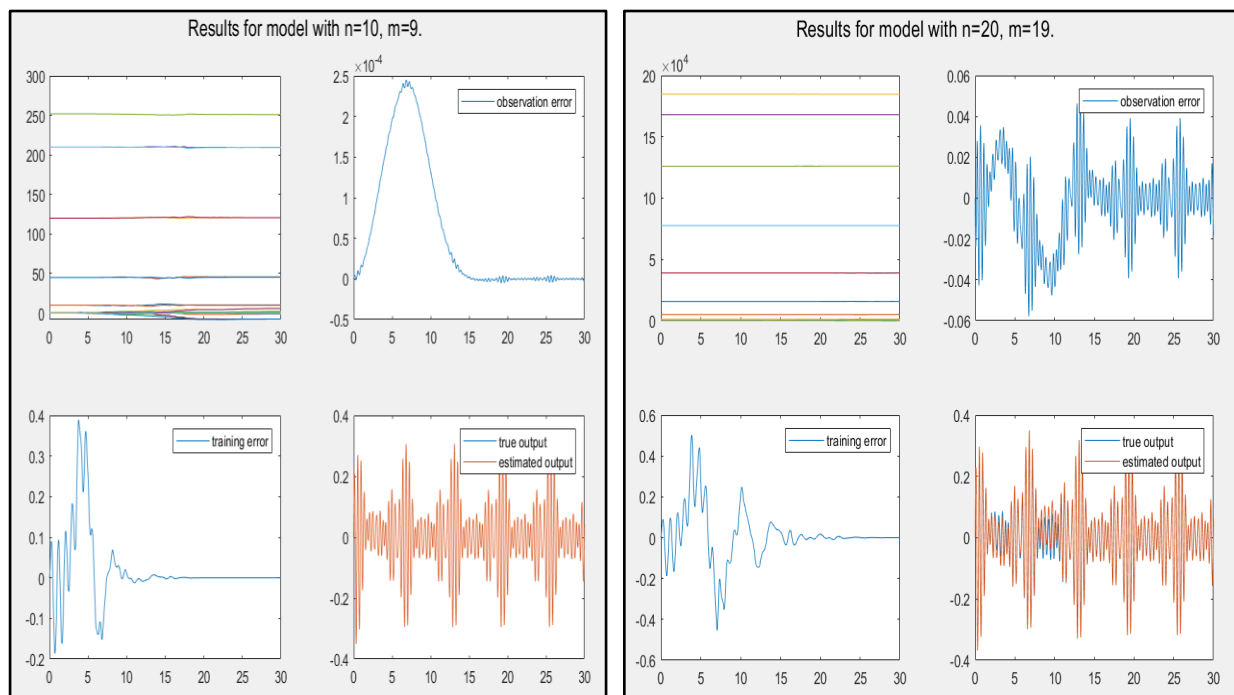


Όπως φαίνεται και από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις οι πρώτες εκτιμήσεις του συστήματος δεν αποτελούν καλές προσεγγίσεις αυτού. Το σφάλμα παρατήρησης στη μόνιμη κατάσταση είναι συγκρίσιμο με το πλάτος της εξόδου, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως π.χ. $n=1, m=0$, ο αλγόριθμος αδυνατεί να επιτύχει σύγκλιση παρά παρουσιάζει ταλάντωση των εκτιμήσεων, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει ακόμα και σε αστάθεια αν π.χ. ο αλγόριθμος, για την προαναφερθείσα περίπτωση, διακοπεί σε αρνητική

τιμή για τη σταθερά *coefficient1*, οπότε και θα οδηγούσε σε ασταθή χαρακτηριστικό πολυώνυμο με πόλο στο θετικό ημιεπίπεδο.

Καλύτερα αποτελέσματα φαίνεται να παρουσιάζει και πάλι το σύστημα με $n=3$, $m=2$, όπου το σφάλμα εκπαίδευσης συγκλίνει στο μηδέν ενώ το σφάλμα παρατήρησης είναι αρκετές τάξης μεγέθους μικρότερο από το πλάτος της πραγματικής εξόδου.

Αυτό που αξίζει να σχολιαστεί στην περίπτωση αυτή είναι το ακόλουθο: αν και δεν παρουσιάζεται για λόγους συντομίας και τα σύστημα με $n=4$, $m=3$ ή $n=5$, $m=4$ παρουσιάζουν εξίσου καλά αποτελέσματα με το $n=3$, $m=2$. Ωστόσο, όπως παρουσιάζεται και στα τελευταία δύο γραφήματα, αυξάνοντας διαρκώς τον αριθμό των σταθερών, διατηρώντας τη μορφή συστήματος $m=n-1$, το σφάλμα αξιολόγησης λαμβάνει πλέον όλο και μεγαλύτερες τιμές μέχρι που γίνεται συγκρίσιμο με το πλάτος της πραγματικής εξόδου. Αυτό συμβαίνει διότι το σφάλμα παρατήρησης παρουσιάζει μια καμπύλη (όπως είχε αναλυθεί και στις διαλέξεις) και αυξάνοντας διαρκώς τον αριθμό των παραμέτρων οδηγεί και πάλι σε αύξηση του συνολικού σφάλματος παρατήρησης, αν και όπως ήταν αναμενόμενο το σφάλμα εκπαίδευσης και πάλι συγκλίνει πρακτικά στο μηδέν.



Με βάση το παραπάνω και λαμβάνοντας υπ' όψιν την ανάγκη για σχετική απλότητα του συστήματος, επιλέχθηκε πράγματι το σύστημα $n=3$, $m=2$ ως καλύτερη προσέγγιση για το πραγματικό σύστημα, όπως είχε προκύψει και από την αντίστοιχη offline μέθοδο, καθώς είναι το σύστημα μικρότερου βαθμού και προσφέρεται π.χ. για γρήγορο και εύκολο γραμμικό έλεγχο. Ταυτόχρονα, έχει αποφευχθεί και το φαινόμενο του *undertraining* καθώς τα υψηλότερης τάξης μοντέλα δεν προσφέρουν καλύτερα

αποτελέσματα άρα το σύστημα βρίσκεται στο κατώτατο σημείο της καμπύλης. Επιπλέον να σημειωθεί ότι η ακαταλληλότητα των μοντέλων υψηλότερης τάξης οφείλεται και στο γεγονός ότι αν και δεν εμφανίζεται παραμετρική ολίσθηση οι σταθερές λαμβάνουν επικίνδυνα μεγάλες τιμές .

Επομένως το προσεγγιστικό σύστημα που προέκυψε είναι και πάλι της μορφής $\frac{dy^3}{dt} + 6\frac{dy^2}{dt} + 11\frac{dy}{dt} + 6y = 2u - 3\frac{du}{dt} + \frac{du^2}{dt}$.

Να σημειωθεί ότι εύρωστος αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων είναι δυνατό να υλοποιηθεί κάνοντας χρήση της μεθόδου προβολής. Αν και κάτι για το σύστημα δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων, θα μπορούσε να επιλεγεί αυθαίρετα κάποια συνθήκη που δεν επιτρέπει στις σταθερές να γίνουν μη φραγμένες. Ωστόσο στην εργασία αυτή ένας τέτοιος αλγόριθμος δεν υλοποιήθηκε καθώς δεν παρατηρείται παραμετρική ολίσθηση και ακόμα και όταν οι σταθερές λαμβάνουν μεγάλες τιμές, συγκλίνουν.

Να σημειωθεί τέλος ότι για τις μετρήσεις που αφορούν από τάξη παραγώγου εισόδου $n=4$ και πάνω ο βαθμός απώλειας μνήμης τέθηκε ίσος με μονάδα, αφού διαφορετικά η διαφορική εξίσωση γινόταν *stiff* και ήταν αδύνατη η λύση της αριθμητικά. Και πάλι για $\beta=1$ τα αποτελέσματα του αλγορίθμου ήταν καλύτερα απ' ότι για $\beta=0$.