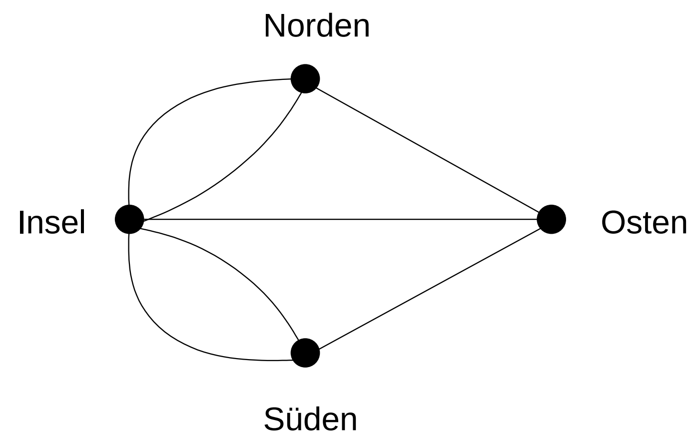
4. Kreis- und Wegeprobleme

- Charakterisierung von eulerschen Graphen
- Bestimmung von eulerschen Wegen und Kreisen
- Hamiltonsche Graphen
- Abstände in Graphen
- Berechnung kürzester Wege

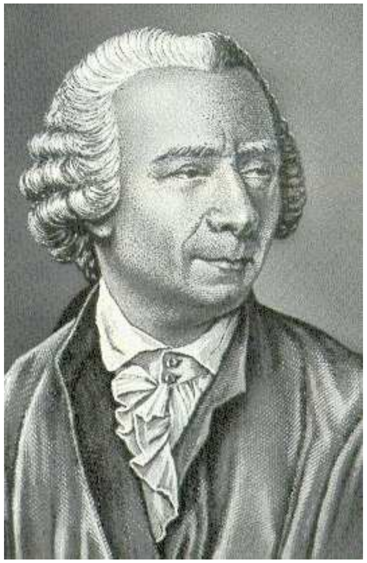
Das Königsberger Brückenproblem



Eulerweg, Eulerkreis

Definition 4.1. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein Weg, der jede Kante von G genau einmal enthält, heißt *eulerscher Weg* von G.
- Ein Kreis, der jede Kante von G genau einmal enthält, heißt *eulerscher Kreis* von G.
- G heißt *eulersch* gdw. G einen eulerschen Kreis enthält.

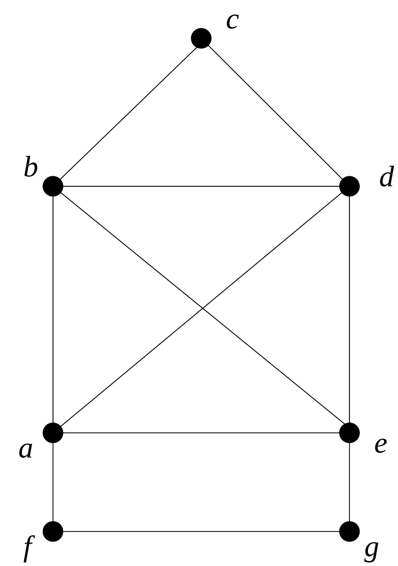


Leonhard Euler

Beispiel 4.1. Der Graph des Königsberger Brückenproblems scheint nicht eulersch zu sein, er scheint auch keinen eulerschen Weg zu enthalten.

Das “Haus des Nikolaus” enthält einen eulerschen Weg.

Das “Haus des Nikolaus mit Keller” ist eulersch:



Weitere Graphen: ✎.

Charakterisierung von eulerschen Graphen

Satz 4.1. [Euler 1736] *Es sei* $G = (V, E)$ *ein Graph.*

G *hat einen eulerschen Weg gdw.*

- G *bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist und*
- *für die Zahl* u *der Knoten mit ungeradem Grad gilt:* $u = 0$ *oder* $u = 2$*.*

Die Existenz eines Eulerkreises ist äquivalent mit $u = 0$*.*

Beweis. 1. “$\Longrightarrow$”: G habe einen eulerschen Kreis $K = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_0)$.

- Dann ist G bis auf isolierte Knoten zusammenhängend und
- tritt der Knoten v in der Folge $v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$ genau t-mal auf, so gilt $deg(v) = 2t$, d.h. v hat geraden Grad.

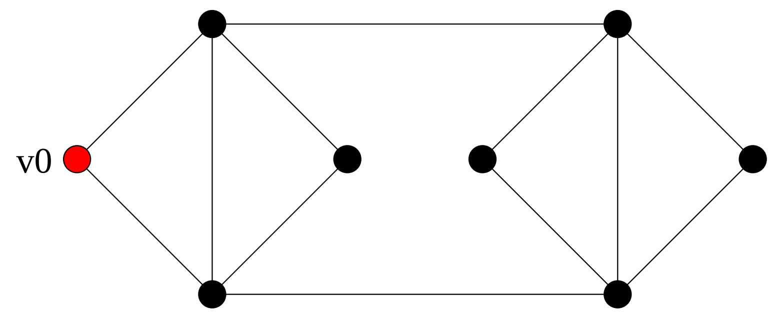
2. “$\Longleftarrow$”: Beweis durch vollständige Induktion über die Zahl der Knoten.

Induktionsanfang: Der Graph $G = (\{v_0\}, \{\})$ ist eulersch, denn (v_0) ist ein eulerscher Kreis.

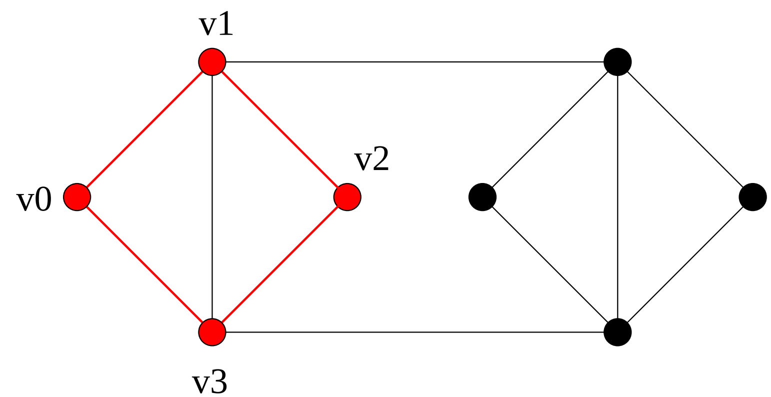
Induktionsannahme: Für Graphen mit höchsten n Knoten gelte die Behauptung.

Induktionsschritt: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $n + 1$ Knoten und und alle Knoten haben geraden Grad.

Wähle einen beliebigen Knoten $v_0 \in V$.



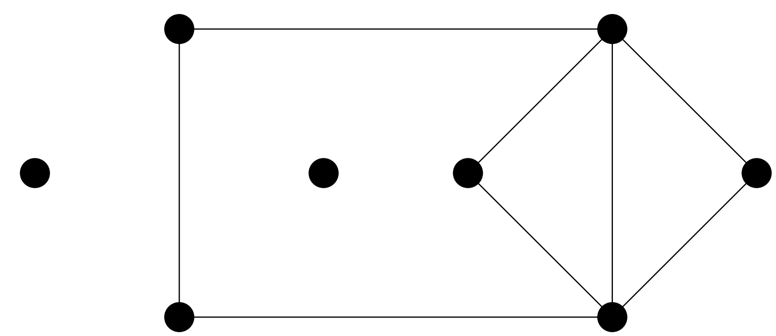
Wähle solange dies möglich ist Knoten $v_1, v_2, \ldots,$ so dass $(v_0, \ldots, v_i)$ jeweils ein Weg in G ist.



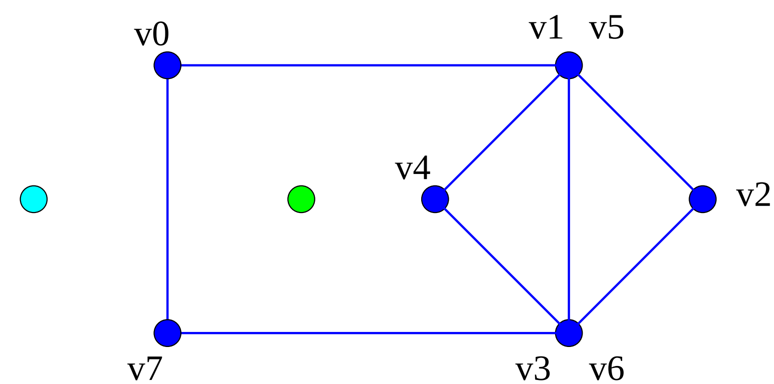
Unter den gegebenen Voraussetzungen entsteht so automatisch ein Kreis K. Sei E_k die Menge der Kanten in K.

Wenn K alle Kanten aus E enthält, so ist K ein Eulerkreis.

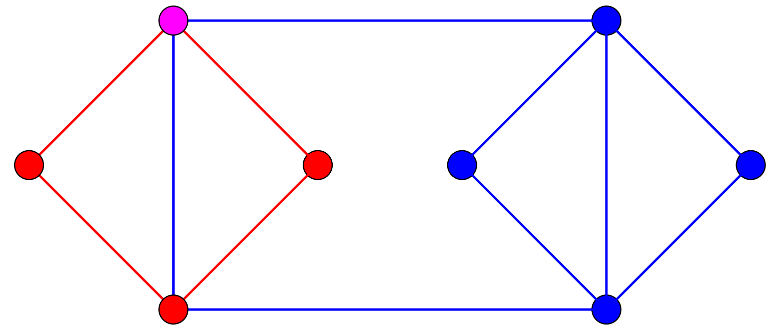
Ansonsten bildet man den Restgraphen $G' = (V, E \setminus E_K)$.



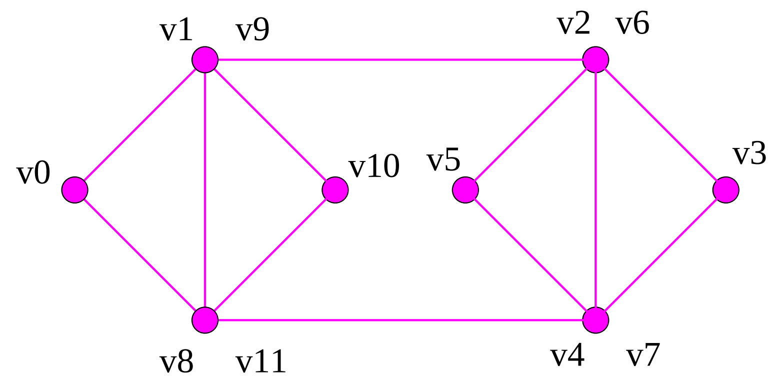
Für die Komponenten des Restgraphen gilt die Induktionsannahme.



Nun fügt man die Kreise an Knoten zusammen, die in K und einer Komponente des Restgraphen enthalten sind.



Man läuft entlang K bis zu solch einem Knoten, dann entlang des Kreises des Restgraphen und anschließend wieder entlang K.



□

Berechnung eines Eulerkreises

Algorithmus 4.1. [Hierholzer 1873] Es sei $G = (V, E)$ ein bis auf isolierte Knoten zusammenhängender Graph, der nur Knoten mit geradem Grad aufweist.

1. Wähle einen beliebigen Knoten $v_0 \in V$.

   Wähle solange dies möglich ist Knoten $v_1, v_2, \ldots$, so daß $(v_0, \ldots, v_i)$ jeweils ein Weg in G ist.

   Unter den gegebenen Voraussetzungen entsteht so automatisch ein Kreis K. Setze $w' := v_0$.

2. Prüfe, ob K ein eulerscher Kreis ist. Wenn ja, dann STOP, ansonsten gehe zu 3.

3. Setze $K' := K$.

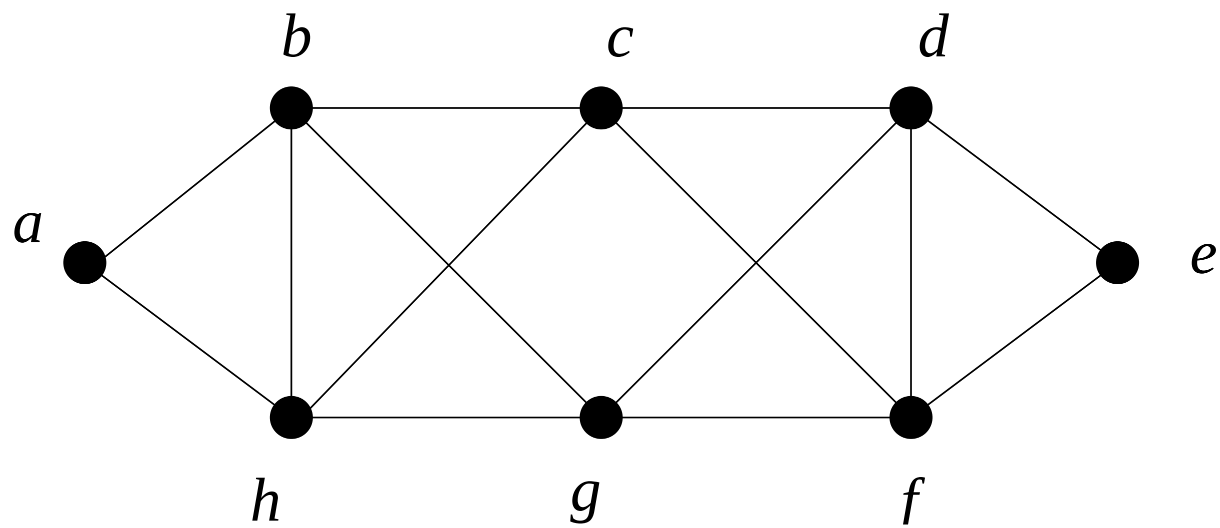
   Laufe ab w' entlang K' und wähle einen in K' enthaltenen Knoten w, der mit einer nicht in K' enthaltenen Kante inzident ist.

   Konstruiere wie unter 1. ausgehend von w einen Kreis K'', der keine Kanten von K' enthält.

   Füge K'' in den Kreis K' an der Stelle w ein. Setze $w' := w$ und $K := K'$.

   Gehe zu 2.

Beispiel 4.2. Wir demonstrieren den Algorithmus von Hierholzer an dem folgenden Graphen:



Tafel ✎.

Eigenschaften des Algorithmus von Hierholzer

Satz 4.2. *Algorithmus 4.1 ist korrekt, d.h. bei erfüllten Voraussetzungen wird ein eulerscher Kreis konstruiert.*

Beweis. Tafel ✎. □

Bemerkung 4.1. Wir können Algorithmus 4.1 auch zur Berechnung eines Eulerweges benutzen.

Satz 4.3. *Die Zeitkomplexität von Algorithmus 4.1 beträgt* $O(|V| + |E|)$.

Beweis. Siehe Übungen. □

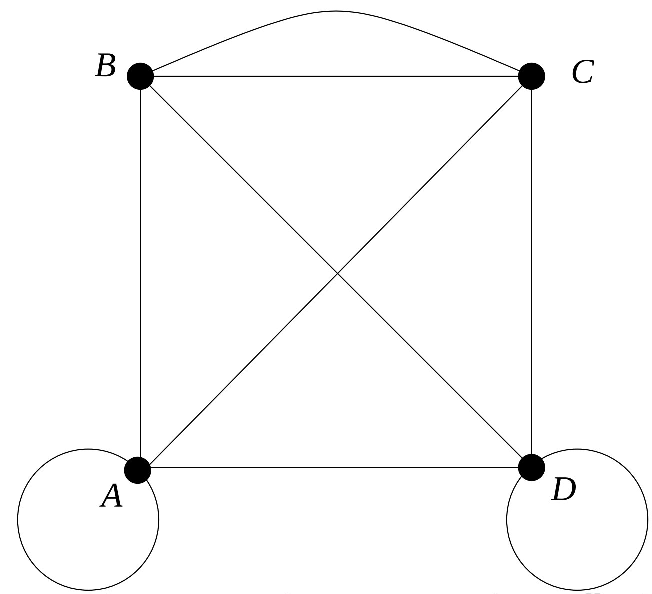
Anwendung von Eulerwegen

- Dominospiel: Gegeben sind eine Menge S von Spielsteinen, die auf jeder Seite mit einem Symbol markiert sind.
- Einen Spielstein $[A : B]$ kann man sowohl in dieser Form als auch als $[B : A]$ verwenden.
- Man darf zwei Spielsteine aneinander legen, wenn die sich berührenden Hälften das gleiche Symbol aufweisen.
- Kann man die Steine einer Menge S zu einer ununterbrochenen Kette zusammenlegen?

Beispiel 4.3. Gegeben ist die folgende Menge an Spielsteinen:

[A : B] [A : D] [B : C] [C : D] [A : A]
[D : D] [B : C] [A : C] [B : D]

Zugehöriger Graph:



- Jede Kante entspricht einem Spielstein.
- Eulerweg entspricht einer ununterbrochenen Dominokette.

Anwendung in der Praxis: Berechnung von Prozessketten mit möglichst wenigen Unterbrechungen.