А.Н. Барменков, глава III

Длина дуги плоской кривой

Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$. Рассмотрим плоскость Oxy с ДПСК.

Определение: Множество точек $M(x;y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению $x=\varphi(t);\ \ y=\psi(t);\ \ \alpha\le t\le\beta$ называют *простой плоской кривой* Γ, если различные значения параметра $t\in[\alpha;\beta]$ соответствуют различным точкам этого множества *(простая кривая — кривая без самопересечений).*

Каждую точку $M(x;y)$, координаты которой соответствуют значениям параметра $t\in(\alpha;\beta)$ считают точкой кривой, а точки, отвечающие граничным значениям α и β — граничными точками кривой ($M[\varphi(\alpha);\psi(\alpha)]$ — начальная точка кривой, $M[\varphi(\beta);\psi(\beta)]$ — конечная точка кривой)

Определение: простой замкнутой кривой называют простую кривую, у которой начальная и конечная точки совпадают.

Пусть τ — произвольное разбиение $[\alpha;\beta]$:

$$\tau=\{t_i\}_{i=0}^{n}\ \ (\alpha=t_0<t_1<...<t_n=\beta) \tag{1}$$

Введем M_i:

$$M_i=M[\varphi(t_i);\psi(t_i)] \tag{2}$$

Соединив точки отрезками, получим *ломаную, вписанную в кривую* Γ. Длина звена ломаной:

$$l_i=|M_{i-1}M_i|=\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2} \tag{3}$$

Тогда длина всей ломаной:

$$l(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2} \tag{4}$$

Определение: если множество $l(\tau)$ вписанных в кривую Γ ломанных, соответствующих всевозможным разбиениям τ отрезка $[\alpha,\beta]$ ограничено, то кривая Γ называется *спрямляемой*, а точная верхняя грань множества $l(\tau)$ называется длиной кривой Γ:

$$l=\sup(l(\tau)) \tag{5}$$

Замечание: из определения длины дуги l следует, что $l>0$.

Замечание: существуют и неспрямляемые кривые.

Некоторые свойства спрямляемых кривых

1° Если кривая Γ — спрямляема, и l — ее длина, то эта длина дуги не зависит от параметризации этой кривой.

2° Если спрямляемая кривая Γ разбита при помощи конечного числа точек $M_0,M_1,...M_n$ на конечное число кривых Γ_i, то каждая из этих кривых спрямляема, и сумма длин всех кривых Γ_i равна длине l кривой Γ.

3° Пусть кривая Γ задана параметрическими уравнениями (1). Обозначим $l(t)$ — длину участка Γ_t кривой Γ, точки которой определяются всеми значениями параметра из сегмента $[\alpha;t]$. Функция $l(t)$ возрастающая и непрерывная. Эту функцию называют *переменной дугой* на кривой Γ

4° Переменная дуга l может быть выбрана в качестве параметра, называемого *натуральным параметром.*

Утверждение: если функции $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ имеют на $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные, то кривая Γ, определяемая вышеописанными соотношениями *спрямляема.*

Доказательство: рассмотрим произвольное разбиение τ отрезка $[\alpha;\beta]$:

$$\tau=\{t_i\}_{i=0}^{n},\quad \alpha=t_0<t_1<...<t_n=\beta \tag{6}$$

Длина ломаной $M_0M_1...M_n$, вписанной в γ:

$$l(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2} \tag{7}$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях:

$$\forall [t_{i-1};t_i] \exists \xi_i, \xi_i* \in [t_{i-1};t_i]: \quad \varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\Delta t_i, \quad \psi(t_i)-\psi(t_{i-1}) = \psi'(\xi_i*)\Delta t_i \tag{8}$$

Поскольку $\varphi'(t), \psi'(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$, то они ограничены на $[\alpha;\beta]$, т.е. $\exists M : |\varphi'(t)| \le M, |\psi'(t)| \le M$,

$$l(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\xi_i*))^2}\Delta t_i \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(}M^2+M^2)\Delta t_i = M\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i = M\sqrt{2}(\beta-\alpha) \tag{9}$$

Утверждение доказано.

Пространственная кривая

Определение: простой пространственной кривой Γ называется геометрическое место точек $M(x;y;z)$ пространства O_{xyz}, координаты которых $(x;y;z)$ удовлетворяют соотношению $x=\varphi(t); y=\psi(t); z=\chi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, где $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ — непрерывные функции, и эта кривая без *самопересечения*. Если $M[\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)] = M[\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)]$, то кривая называется *замкнутой простой кривой.*

Рассмотрим произвольное разбиение $[\alpha,\beta]$

$$\tau = \{\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta\} \tag{10}$$

$$M_i = M[\varphi(t_i), \psi(t_i), \chi(t_i)] \tag{11}$$

— узловые точки Γ, соответствующие данному разбиению.

Тогда **Длина ломаной, соответствующей данному разбиению:**

$$l(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2 + [\chi(t_i)-\chi(t_{i-1})]^2} \tag{12}$$

Определение: простая кривая Γ называется *спрямляемой*, если длины $l(\tau)$ всех ломаных, вписанных в кривую Γ, соответствующих всевозможных разбиений $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{n}$, вписанных в Γ в сумме — ограниченное множество.

Длина кривой l:

$$l = \sup_{\tau} l(\tau) \tag{13}$$

Аналогично плоскому случаю, *достаточным условием спрямления* Γ является *непрерывная дифференцируемость* функций $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$.

Замечание 1: Имеет место неравенство:

$$\sqrt{(\int_a^b f_1(t)dt)^2 + (\int_a^b f_2(t)dt)^2 + (\int_a^b f_3(t)dt)^2} \le \int_a^b \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2}dt \tag{14}$$

Замечание 2: Неравенство треугольника:

Пусть задан треугольник с вершинами

$$O_{xyz}: \quad O(0,0,0), \quad A(a_1,a_2,a_3), \quad B(b_1,b_2,b_3) \tag{15}$$

Тогда:

$$|\sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2}| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(a_i-b_i)^2} \tag{16}$$

(Разность длин сторон всегда меньше либо равна третьей стороне)

Теорема: пусть функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы (т.е. имеют непрерывную производную на $[a,b]$), тогда кривая Γ ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t\in[a;b]$) *спрямляема* и ее длина выражается в виде:

$$l = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}dt \tag{17}$$

Доказательство:

Докажем, что $\forall\tau=\{t_i\}_{i=0}^n$ — (разбиения $[a;b]$) — соответствующая ему длина ломаной $l(\tau)$ ограничена числом A, где $A=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}dt$, т.е. докажем, что $l(\tau)\le A$.

$$l=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}dt=\sum_{i=1}^n\sqrt{(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)dt)^2+(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi'(t)dt)^2+(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\chi'(t)dt)^2} \tag{18}$$

По **замечанию 1:**

$$\sum_{i=1}^n\sqrt{(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)dt)^2+(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi'(t)dt)^2+(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\chi'(t)dt)^2}\le\sum_{i=1}^i\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}dt \tag{19}$$

$$=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}dt=A \tag{20}$$

Докажем, что на самом деле $A=\sup_\tau l(\tau)$. Поскольку $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — непрерывно дифференцируемы, то $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ непрерывны на $[a;b]$. По теореме Кантора они и равномерно непрерывны на $[a;b]$.

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall(t',t''\in[a;b],|t'-t''|<\delta)\Rightarrow \tag{21}$$

$$|\varphi'(t)-\varphi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(b-a)}|\;\;\psi'(t')-\psi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(b-a)}\;\;\chi'(t')-\chi'(t'')<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(b-a)}| \tag{22}$$

Возьмем любое разбиение $\tau=\{t_i\}_{i=0}^n:\;\lambda(\tau)<\delta$ (δ из предыдущего соотношения). Очевидно: $A-l(\tau)\ge 0$. Оценим $A-l(\tau)$ сверху.

$$A-l(\tau)=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}dt=A-\sum_{i=1}^n\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2+[\chi(t_i)-\chi(t_{i-1})]^2} \tag{23}$$

По аддитивности разбиваем интеграл на части:

$$=\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}(\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}-\sqrt{(\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}})^2+(\frac{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}})^2+(\frac{\chi(t_i)-\chi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}})^2})dt \tag{24}$$

Применяем **замечание 2**:

$$\sum_{i=1}^n\int\sqrt{(\varphi'(t)-\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}})^2+(\psi'(t)-\frac{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}})^2+(\chi'(t)-\frac{\chi(t_i)-\chi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}})^2}dt \tag{25}$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях:

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} \tag{26}$$

$$\psi'(\gamma_i)=\frac{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} \tag{27}$$

$$\chi'(\omega_i)=\frac{\chi(t_i)-\chi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} \tag{28}$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(}(\varphi'(t)-\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(t)-\psi'(\gamma_i))^2+(\chi'(t)-\chi'(\omega_i))^2)dt \tag{29}$$

Поскольку $\lambda(\tau)<\delta$, применима оценка (по предыдущ. соотн.).

$$\le\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(b-a)})^2+(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(b-a)})^2+(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(b-a)})^2}dt=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}dt=\varepsilon \tag{30}$$

т.е.

$$\forall\varepsilon>0\exists\tau=\tau(\varepsilon):A-l(\tau)\le\varepsilon \tag{31}$$

Это означает, что $A=\sup_\tau l(\tau)$, т.е. длина кривой Γ вычисляется по формуле:

$$l=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}dt \tag{32}$$

Теорема доказана.

Площадь плоской фигуры

Напомним, что *многоугольником* называется часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной линией. Понятие площади многоугольника рассмотрено в курсе элементарной математики.

Определения:

1) Плоской фигурой Q назовем часть плоскости, ограниченную простой замкнутой кривой l. Кривую l называют границей фигуры Q (иногда пишут: $L = \partial Q$).

2) Многоугольник *вписан* в фигуру Q, если каждая точка этого многоугольника принадлежит фигуре Q или ее границе.

3) Если все точки плоской фигуры и ее границы принадлежат некоторому многоугольнику, то говорят, что указанный многоугольник *описан* вокруг фигуры Q.

Ясно, что площадь любого вписанного в фигуру Q многоугольника *не больше* площади любого описанного вокруг фигуры Q многоугольника.

Пусть $\{s_i\}$ — числовое множество площадей вписанных в плоскую фигуру Q многоугольников, а $\{S_d\}$ — числовое множество площадей, описанных вокруг фигуры Q многоугольников. Очевидно, что множество $\{s_i\}$ ограничено сверху (площадью любого описанного вокруг фигуры Q многоугольника), а множество $\{S_d\}$ ограничено снизу, площадью вписанного многоугольника, или числом 0. Поскольку эти множества ограничены, у них существуют точные грани. Обозначим $p = \sup\{s_i\}$ — точная верхняя грань площадей s_i вписанных в Q многоугольников, f $P = inf\{S_d\}$ — точная нижняя грань площадей S_d многоугольников, описанных вокруг Q. Число p — *нижняя площадь* фигуры Q, а P — верхняя площадь фигуры Q.

По определению очевидно, что $p \leq P$ для любой фигуры Q.

Определение: плоская фигура Q называется *квадрируемой*, если верхняя площадь P совпадает с нижней площадью p, при этом общее число $\underline{P} = P = p$ называется площадью фигуры Q (Такое определение ввел Жордан [1838-1922], французский математик).

Площадь, как и всякая мера Жордана ($\underline{P} = \mu$) обладает рядом свойств:

1° $\mu(Q) \geq 0 \forall Q$

2° $\mu(\square) = 1$, площадь квадрата с единичной стороной равна 1.

3° $\mu(Q)$ — аддитивная функция, т.е. $Q = Q_1 \bigcup Q_2,\ Q_1 \bigcap Q_2 = \varnothing$

4° $\mu(Q)$ — инвариантно относительно движения Q.

5° $\mu(Q)$ — монотонная функция

Эти свойства характерны не только для площадей, но и для объемов. Построение меры Жордана позволяет вычислять значение площади с помощью интегралов Римана.

Критерий квадрируемости фигуры

Теорема: для того, чтобы плоская фигура Q была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такой описанный вокруг фигуры Q многоугольник и такой вписанный в фигуру Q многоугольник, что разность их площадей $S_d - s_i < \varepsilon$:

$$(Q\text{— квадр.}) \Leftrightarrow S_d - s_i < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \tag{33}$$

Доказательство:

1) Необходимость. Пусть Q — квадрируемая фигура, т.е. $\underline{P} = P = p$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует вписанный в фигуру Q многоугольник площади S_i такой, что для $p = \underline{P}$ можно написать: $\underline{P} - s_i < \frac{\varepsilon}{2}$ (из определения супремума), и для этого же ε можно указать такой описанный многоугольник площадь S_d которого отличается от $P = \underline{P}$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, (т.е. $S_d - \underline{P} < \frac{\varepsilon}{2}$, по определению инфинума). Таким образом $S_d - s_i < \varepsilon$. **Необходимость доказана.**

2) Достаточность. Пусть выбрано произвольное $\varepsilon > 0$ и $S_d,\ s_i$ — площади описанного и вписанного в фигуру Q многоугольников такие, что $S_d - s_i < \varepsilon$. Так как $s_i \leq p \leq \underline{P} \leq P \leq S_d$, $0 \leq S_d - s_i < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $P - p \leq S_d - s_i < \varepsilon$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow p = P$ и Q квадрируема. **Достаточность доказана. Теорема доказана.**

Определение: говорят, что граница фигуры Q имеет площадь равную 0, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой описанный вокруг фигуры Q многоугольник и такой вписанный в фигуру Q многоугольник, что разность их площадей меньше ε.

Это определение позволяет переформулирвать критерий квадрируемости.

Теорема: для того, чтобы плоская фигура Q была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь равную 0. На самом деле имеет место *достаточный признак квадрируемости плоской фигуры.*, а именно:

Утверждение: если граница l плоской фигуры Q является спрямляемой кривой, то фигура Q квадрируема *(без доказательства).*

Площадь криволинейной трапеции.

Определение: *криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная графиком заданной на отрезке $[a;b]$ неотрицательной и непрерывной функции $f(x)$, ординатами, проведенными в точках a и b, а также отрезком $[a;b]$ оси Ox.

Предложение: криволинейная трапеция — квадрируемая фигура, площадь $\underline{P}$ которой вычисляется по формуле:

$$\underline{P} = \int_a^b f(x)dx \tag{34}$$

Доказательство: так как $f(x)$ по условию непрерывна на отрезке $[a;b]$, то $f(x)$ и интегрируема на этом отрезке. Тогда по критерию интегрируемости в допредельной форме:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\tau = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ — разбиение } a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b: \ S - s < \varepsilon, \tag{35}$$

Где $S = S(\tau)$ — врехняя сумма Дарбу, а $s(\tau)$ — нижняя сумма Дарбу. Поэтому как раз $S_d = S$ — площадь описанного многоугольника, а $S_i = s$ — площадь вписанного многоугольника, т.е. $S_d - s_i < \varepsilon$, криволинейная трапеция квадрируема (по критерию квадрируемости).

При $\lambda(\tau) \to 0$ (характеристика разбиения стремится к 0) получаем:

$$s \to S \to \int_a^b f(x)dx; \ \ \underline{P} = \int_a^b f(x)dx \tag{36}$$

В этом и состоит геометрический смысл определенного интеграла. **Предложение доказано.**

Замечание 1: пусть криволинейная трапеция имеет более общий вид: $\{f_1(x) \le y \le f_2(x), \ a \le x \le b\}$ и $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывны на $[a;b]$, тогда очевидно, что ее площадь:

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \tag{37}$$

Пояснение 1: Если граница трапеции пересекает ось абсцисс, нужно поднять ее вверх:

$$\overline{f_2}(x) = f_2(x) \ \ \overline{f_1}(x) = f_1(x) + d \tag{38}$$

$$S = \int_a^b (\overline{f_2}(x) + d)dx - \int_a^b (f_1(x) + d)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \tag{39}$$

Пояснение 2: Если $f(x) < 0$ на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -S \tag{40}$$

Площадь криволинейного сектора

Определение: Пусть кривая L задана в полярной системе координат, т.е. $L: \ r = r(\theta), \ \alpha \le \theta \le \beta$ и $r(\theta) \ge 0$, $r(\theta)$ — непрерывная функция. Плоскую фигуру, ограниченную кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β называют *криволинейным сектором.*

Предложение: криволинейный сектор — квадрируемая фигура, площадь $\underline{P}$ которой вычисляется по формуле:

$$\underline{P} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta \tag{41}$$

Доказательство: пусть $\tau = \{\theta_k\}_{k=0}^n$ — произвольное разбиение $[\alpha; \beta]$, $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_n = \beta$.

$$\forall [\theta_{k-1}; \theta_k] \; r_k = \min_{[\theta_{k-1};\theta_k]}; r(\theta) \; R_k = \max_{[\theta_{k-1};\theta_k]} r(\theta) \tag{42}$$

Тогда:

$$\overline{S}_d = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} R_k^2 \Delta\theta_k \tag{43}$$

— Площадь веерообразной фигуры, описанной вокруг криволинейного сектора, и:

$$\overline{s}_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} r_k^2 \Delta\theta_k \tag{44}$$

— Площадь веерообразной фигуры, вписанной в криволинейный сектор. Эти суммы как раз и есть $S = S(\tau)$ — верхняя сумма Дарбу, и $s = s(\tau)$ — нижняя сумма Дарбу для функции $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$, т.е. $\overline{S}_d = S$, $\overline{s}_i = s$.

Так как $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, то и интегрируема на этом отрезке. Тогда по критерию интегрируемости в допредельной форме:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tau = \{\theta_k\}_{k=0}^n \text{ — разбиение отрезка, : } S(\tau) - s(\tau) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{45}$$

Значит:

$$\overline{S}_d - \overline{s}_i = S(\tau) - s(\tau) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{46}$$

Поскольку существует площадь кругового сектора (из школьного курса математики), то по определению площади для этого $\varepsilon > 0$ существует многоугольник Q_i, вписанный в нижнюю веерообразную фигуру. Его площадь s_i :

$$\overline{s}_i - s_i < \frac{\varepsilon}{4} \tag{47}$$

Аналогично $\exists Q_d$ — многоугольник, описанный вокруг верхней веерообразной фигуры площади S_d :

$$S_d - \overline{S}_d < \frac{\varepsilon}{4} \tag{48}$$

$$S_d - s_i = S_d - \overline{S}_d + \overline{S}_d - \overline{s}_i + \overline{s}_i - s_i < \varepsilon \tag{49}$$

По критерию квадрируемости следует, что криволинейный сектор — квадрируемая фигура.

$$\overline{s}_i \to \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta \quad \overline{S}_d \to \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta \tag{50}$$

Поскольку s_i и S_d отличаются как угодно мало от $\overline{s}_i$ и $\overline{S}_d$ соответственно, то:

$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta \tag{51}$$

Предложение доказано.

Пример:

Вычислить площадь фигуры F, ограниченной графиками функций $y = x^\alpha$ и при $\alpha > 1$ $x = y^\alpha$. Решение:

$$S = 1 - 2\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \tag{52}$$

Объем тела

Определение: *телом* назовем часть пространства, ограниченную замкнутой непересекающейся поверхностью.

Определение: *многогранник* — это часть пространства, ограниченная частями плоскостей.

Пусть есть тело E. Рассмотрим всевозможные многогранники, вписанные в тело E и всевозможные многогранники, описанные вокруг этого тела. Вычисление объема многогранника сводится к вычислению объемов тетраэдров, поэтому понятие объема многогранники считаем известным из школьного курса математики.

Пусть $\{v_i\}$ — числовое множество объемов, вписанных в тело E многогранников, а $\{V_d\}$ — числовое множество объемов описанных вокруг тела E многогранников.

Множество $\{v_i\}$ ограничено сверху любым объемом описанного многогранника, а множество $\{V_d\}$ ограничено снизу любым объемом вписанного многогранника, или даже нулем; значит $\exists \underline{v} = \sup\{v_i\}$ и $\exists \overline{V} = \inf\{V_d\}$. Числа $\underline{v}$ и $\overline{V}$ называются соответственно *нижним* и *верхним* объемами тела E.

Очевидно, $\underline{v} \le \overline{V}$.

Определение: тело E называется *кубируемым*, если верхний объем $\overline{V}$ этого тела совпадает с нижним объемом $\underline{v}$ и при этом $V = \overline{V} = \underline{v}$ называется *объемом тела* E.

Критерий кубируемости фигуры

Теорема: для того, чтобы тело E было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такой описанный около тела E многогранник и такой вписанный в это тело многогранник, разность объемов $V_d - v_i$ которых была бы меньше ε:

$$E\text{— кубируема} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\text{многогр-ки} : V_d - v_i < \varepsilon \tag{53}$$

Доказательство: аналогично плоскому случаю.

Цилиндр

Определение: *цилиндр* — это тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и образующими, параллельными некоторой оси и плоскостями, перпендикулярными некоторой оси; эти плоскости в пересечении с цилиндрическими поверхностями образуют плоские фигуры, называемые основаниями цилиндра, а расстояние h между основаниями цилиндра называют *высотой цилиндра*.

Показанная выше техника позволяет просто доказать следующие утверждения:

Утверждение 1: если основанием цилиндра E является квадрируемая фигура Q, то цилиндр является кубируемым телом и его объем равен $V = Ph$, где P — площадь основания, а h — высота цилиндра.

Определение: ступенчатым телом называется объединение конечного числа цилиндров, расположенных так, что верхнее основание каждого предыдущего из этих цилиндров находится в одной плоскости с нижним основанием последующего цилиндра.

Утверждение 2: если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое описанное вокруг E ступенчатое тело и такое вписанное в E ступенчатое тело, разность $V_d - v - i$ объемов которых меньше ε, то тело кубируемо.

Утверждение 3: пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда тело E, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, ординатами в точках a и b, кубируема, и его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{54}$$

Доказательство: пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Пусть:

$$m_i = \inf_{[x_{i-1};x_i]} f(x); \quad M_i = \sup_{[x_{i-1};x_i]} f(x) \tag{55}$$

Построим на каждом частичном отрезке прямоугольники. Получили вписанную в криволинейную трапецию и описанную около нее ступенчатую фигуру, при вращении которой вокруг оси Ox получаем вписанное в E и описанное вокруг него тела, объемы которых равны:

$$v_i = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i; \quad V_d = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i \tag{56}$$

Очевидно, что $v_i = s(\tau)$ — нижняя, а $V_d = S(\tau)$ — верхняя суммы Дарбу для функции $\pi f^2(x)$ на $[a; b]$ и в силу непрерывности $f(x)$ эта функция и интегрируема на отрезке $[a; b]$. Тогда по критерию интегрируемости:

$$\exists\tau = \{x_i\}_{i=0}^n \text{ — разбиение } [a; b] : \ V_d - v_i = S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon \tag{57}$$

А это по утверждению 2 влечет кубируемость тела E и очевидно следующее:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{58}$$

Утверждение доказано.

Пример:

$y = \sin x$, $[0;\pi]$, вычислить объем тела вращения графика вокруг оси Ox. Решение:

$$V = \pi \int_0^p \sin^x dx = \pi \int_0^p i \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2} \tag{59}$$

Площадь поверхности вращения

Рассмотрим поверхность π, образованную вращением вокруг Ox графика функции $y = f(x)$, $x \in [a;b]$. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ — разбиение $[a;b]$. Рассмотрим также $A : (x_i, y_i)$, где y_i — значение функции $f(x_i)$ $y_i = f(x_i)$.

Соединим точки A_i отрезками. Получим ломаную, соответствующую разбиению τ. Вращая график $f(x)$ и ломаную вокруг Ox, получим поверхность π — поверхность вращения графика функции $f(x)$ и поверхность Π — поверхность, полученная вращением ломаной A_0, A_1, A_n вокруг Ox. Обозначим через $P(\tau)$ поверхность $\Pi(\tau)$. Пусть l — длина звена $[A_{i-1}; A]$ ломаной. Тогда по формулам элементарной математики (усеченного конуса):

$$P(\tau) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} l_i = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) l_i \tag{60}$$

Определение: число P является пределом площадей $P(\tau)$, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n :\ x(\tau) < \delta \Rightarrow |P(\tau) - P| < \varepsilon \tag{61}$$