# Автоматическая регуляризации байесовских нейронных сетей

#### A Preprint

#### Басов Дмитрий Константинович

#### Abstract

В байесовском выводе, в отличии от гипотезы максимального правдоподобия, не делается никаких предположений о размере обучающей выборки. Это делает байесовские модели устойчивыми к переобучению.

Однако применение байесовского вывода сопряжено со следующими проблемами: заданием подходящего априорного распределения и вычислением апостериорного распределения весов модели.

В данной работе предлагается следующее решение этих проблем:

- 1. Применяя вариационный вывод, апостериорное распределение весов модели аппроксимируется нормальным распределением с диагональной матрицей ковариации, и задача сводится к максимизации нижней вариационной границы. В этом случае каждый вес модели определяется двумя обучаемыми параметрами.
- 2. Априорное распределение весов модели задается в виде нормального распределения с нулевым матожиданием и диагональной матрицей ковариации, элементы которой вычисляется из данных. Этот приём лежит в основе Relevance Vector Machine байесовского варианта SVM.

Полученную модель можно рассматривать как ансамбль из бесконечного числа нейронных сетей, веса которых сэмплируются из нормального распределения. При этом каждый вес имеет свой индивидуальный коэффициент L2 регуляризации, который автоматически определяется из тренировочных данных при обучении.

#### 1 Обозначения и сокращения

```
\pmb{x}\odot \pmb{y} — поэлементное произведение (произведение Адамара) векторов
```

 $\mathcal{L}$  — Evidence Lower Bound (ELBO)

$$KL(q \mid\mid p) = \int q({m Z}) \ln rac{q({m Z})}{p({m Z})} \, d{m Z}$$
 — дивергенция Кульбака—Лейблера (КL—дивергенции)

x — вектор признаков

y — вектор целевой переменной

D — датасет — пары значений  $\{\boldsymbol{x_i},\,\boldsymbol{y_i}\}$ , где  $i=1,\ldots,L$ 

 $oldsymbol{W}$  — веса модели — случайная величина размерности М

 $p(\pmb{y}|\pmb{x},D)$  — предсказательное распределение

$$p(D|m{W}) = \prod_{i=1}^{L} p(m{y_i}|m{x_i}, m{W})$$
 — правдоподобие (likelihood)

 $p(\boldsymbol{W})$  — априорное распределение весов модели (prior)

 $p(\boldsymbol{W}|D)$  — апостериорное распределение весов модели (posterior)

 $q_{m{ heta}}(m{W})$  — аппроксимация апостериорного распределения весов модели

 $oldsymbol{ heta}$  — обучаемые параметры байесовской модели

### 2 Введение

В классическом машинном обучении делается следующее предположение: веса модели W являются пусть и неизвестной, но фиксированной величиной. В этом случае можно получить точечную оценку весов модели согласно гипотезе максимального правдоподобия:

$$\mathbf{W_{ML}} = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{W}} p(D|\mathbf{W}) \tag{2.1}$$

Тогда распределение  $p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x},D)$  аппроксимируется следующим образом:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, D) \approx p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{W_{ML}}) \tag{2.2}$$

Однако это справедливо при условии, что количество объектов в датасете D сильно больше количества весов модели  $(L\gg M)$ . Если это не так, веса модели  $\pmb{W}$  могут слишком сильно подстроиться под обучающую выборку D, что черевато переобучением.

Для борьбы с переобучением используется ряд приёмов (штрафы на норму весов, early stopping, dropout), однако для их настройки требуются вычислительные ресурсы и отложенные (не участвующие в обучении) выборки данных.

Альтернативным подходом к машинному обучению является нахождение апостериорного распределения весов модели  $p(\boldsymbol{W}|D)$  по теореме Байеса.

$$p(\boldsymbol{W}|D) = \frac{p(D|\boldsymbol{W}) p(\boldsymbol{W})}{\int p(D|\boldsymbol{W}) p(\boldsymbol{W}) d\boldsymbol{W}}$$
(2.3)

Тогда предсказательное распределение  $p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x},D)$  рассчитывается следующим образом:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, D) = \int p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{W}) p(\mathbf{W}|D) d\mathbf{W}$$
(2.4)

Байесовские модели можно рассматривать как ансамбль из бесконечного числа моделей, веса которых сэмплируются из распределения  $p(\boldsymbol{W}|D)$ . Такой подход устойчив к переобучению, так как о размере обучающей выборки не делается никаких предположений. Однако возникают следующие проблемы: выбор подходящего априорного распределения  $p(\boldsymbol{W})$  и вычисление апостериорного распределения  $p(\boldsymbol{W}|D)$ .

Неудачный выбор  $p(\boldsymbol{W})$  может сильно ухудшить качество модели, а расчёт апостериорного распределения  $p(\boldsymbol{W}|D)$  требует вычисления интеграла по всему пространству весов модели, что для нейронных сетей практически невозможно.

В данной статье предлагается следующий подход к решению этих проблем.

- 1. Применяя вариационный вывод, распределение p(W|D) аппроксимируется распределением  $q_{\boldsymbol{\theta}}(W)$ , и задача сводится к максимизации нижней вариационной границы  $\mathcal{L}$  по параметрам  $\boldsymbol{\theta}$ .
- 2. Распределение  $q_{\pmb{\theta}}(\pmb{W})$  задаётся в виде нормального распределения с диагональной матрицей ковариации.
- 3. Так как распределение  $q_{\pmb{\theta}}(\pmb{W})$  является нормальным, применяя трюк с репараметризацией, становится возможным использовать градиентные методы для максимизации  $\mathcal{L}$ .
- 4. Априорное распределение весов модели  $p(\mathbf{W})$  задаётся в виде нормального распределения с нулевым матожиданием и диагональной матрицей ковариации, элементы которой определяются при обучении из датасета D. Такой подход обладает большой универсальностью, однако изза этого теряется теоретическая устойчивость к переобучению. Идея определения некоторых параметров априорного распределения  $p(\mathbf{W})$  из датасета D известна как эмпирический Байес.
- 5. Вводятся новые параметры  $\gamma$  и  $\rho$ , через которые выражаются матожидание и дисперсия распределения  $q_{\theta}(W)$ . Это нужно, чтобы избежать неопределенности деления  $\frac{0}{0}$ , которая может возникнуть из—за определения дисперсии распределения p(W) из данных.

#### 3 Постановка задачи

Задача машинного обучения с учителем в вероятностной постановке формулируется следующим образом: получить распределение вероятностей  $p(\pmb{y}|\pmb{x},D)$  целевой переменной  $\pmb{y}$  для неразмеченных  $\pmb{x}$ , используя информацию из датасета D. В случае параметрических моделей, которыми являются нейронные сети, информация из датасета D кодируется посредством весов модели  $\pmb{W}$ . Сделаем следующие преобразования:

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x},D) = \int p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}|\boldsymbol{x},D) d\boldsymbol{W} = \int p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{W},\boldsymbol{x},D) p(\boldsymbol{W}|\boldsymbol{x},D) d\boldsymbol{W} = \int p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{W},\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{W}|D) d\boldsymbol{W}$$
(3.1)

Пояснения:

- $p(\pmb{y}|\pmb{x},D)=\int p(\pmb{y},\pmb{W}|\pmb{x},D)\,d\pmb{W}$ , так как для любых случайных величин  $\pmb{a}$  и  $\pmb{b}$  справедливо  $p(\pmb{a})=\int p(\pmb{a},\pmb{b})\,d\pmb{b}$
- $p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{W}|\boldsymbol{x}, D) = p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{W}, \boldsymbol{x}, D) p(\boldsymbol{W}|\boldsymbol{x}, D)$ , так как для любых случайных величин  $\boldsymbol{a}$  и  $\boldsymbol{b}$  справедливо  $p(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = p(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) p(\boldsymbol{b})$
- p(y|W,x,D) = p(y|W,x), так как вся информация из датасета D отражена в весах W
- $p(\boldsymbol{W}|\boldsymbol{x},D)=p(\boldsymbol{W}|D)$ , так как веса модели  $\boldsymbol{W}$  не зависят от неразмеченных  $\boldsymbol{x}$ , которых не было в датасете D.

Получим выражение для p(W|D), используя формулу Байеса:

$$p(\boldsymbol{W}|D) = \frac{p(\boldsymbol{W}, D)}{p(D)} = \frac{p(\boldsymbol{W}, D)}{\int p(\boldsymbol{W}, D) d\boldsymbol{W}} = \frac{p(D|\boldsymbol{W}) p(\boldsymbol{W})}{\int p(D|\boldsymbol{W}) p(\boldsymbol{W}) d\boldsymbol{W}}$$
(3.2)

Предсказательное распределение можно аппроксимировать следующим образом:

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, D) \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{W}}_{t})$$
 (3.3)

где  $\hat{\pmb{W}}_{\pmb{t}}$  — сэмпл весов модели из распределения  $p(\pmb{W}|D)$ .

Однако для этого нужно иметь возможность сэмплировать из распределения  $p(\boldsymbol{W}|D)$ .

Один из подходов к решению этой проблемы — сэмплирование из  $p(\boldsymbol{W}|D)$  используя методы Монте-Карло для марковских цепей (МСМС). Однако для больших датасетов и большого числа весов это практически невозможно.

Другим подходом является вариационный вывод — аппроксимация распределения  $p(\boldsymbol{W}|D)$  распределением  $q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})$ , из которого сэмплировать намного проще.

### 4 Вариационный вывод

Идея вариационного вывода — сведение задачи байесовского вывода к задаче максимизации нижней вариационной границы (ELBO)  $\mathcal{L}$ , которая для распределения  $q_{\theta}(W)$  записывается следующим образом:

$$\mathcal{L} = \int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \ln \frac{p(\boldsymbol{W}, D)}{q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})} d\boldsymbol{W}$$
(4.1)

Покажем мотивацию максимизации  $\mathcal{L}$ . Запишем выражение для  $KL(q_{\theta}(\mathbf{W}) \parallel p(\mathbf{W}|D))$  и преобразуем его, используя тождество  $p(\mathbf{W},D) = p(\mathbf{W}|D) p(D)$ :

$$KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \parallel p(\boldsymbol{W}|D)) = \int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \ln \frac{q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})}{p(\boldsymbol{W}|D)} d\boldsymbol{W} =$$

$$\int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \ln \frac{p(D) q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})}{p(\boldsymbol{W},D)} d\boldsymbol{W} =$$

$$\ln p(D) \int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) d\boldsymbol{W} - \int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \ln \frac{p(\boldsymbol{W},D)}{q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})} d\boldsymbol{W} =$$

$$\ln p(D) - \mathcal{L}$$

$$(4.2)$$

Так как  $\ln p(D)$  не зависит от  $\boldsymbol{\theta}$ , максимизация  $\mathcal{L}$  по параметрам  $\boldsymbol{\theta}$  ведёт к минимизации  $KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \mid\mid p(\boldsymbol{W}|D))$ . Тем самым, при максимизации  $\mathcal{L}$  распределение  $q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})$  будет приближаться к распределению  $p(\boldsymbol{W}|D)$ .

Преобразуем выражение для  $\mathcal{L}$ , используя тождество  $p(\mathbf{W}, D) = p(D|\mathbf{W}) \cdot p(\mathbf{W})$ .

$$\mathcal{L} = \int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \ln \frac{p(\boldsymbol{W}, D)}{q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})} d\boldsymbol{W} = \int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \ln \frac{p(D|\boldsymbol{W}) p(\boldsymbol{W})}{q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})} d\boldsymbol{W} =$$

$$\int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \ln p(D|\boldsymbol{W}) d\boldsymbol{W} - \int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \ln \frac{q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})}{p(\boldsymbol{W})} d\boldsymbol{W} =$$

$$\int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \ln p(D|\boldsymbol{W}) d\boldsymbol{W} - KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) || p(\boldsymbol{W}))$$

$$(4.3)$$

Поставив  $p(D|\pmb{W}) = \prod_{i=1}^L p(\pmb{y_i}|\pmb{x_i},\pmb{W})$  в (4.3), получим:

$$\mathcal{L} = \int q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \sum_{i=1}^{L} \ln p(\boldsymbol{y_i} | \boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{W}) d\boldsymbol{W} - KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \mid\mid p(\boldsymbol{W}))$$
(4.4)

Так как в случае нейронной сети аналитически посчитать интеграл по всему пространству весов  $\boldsymbol{W}$  не представляется возможным, воспользуемся следующей аппроксимацией для  $p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x},D)$  и  $\mathcal{L}$ :

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, D) \approx \int p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{W}, \boldsymbol{x}) q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) d\boldsymbol{W} \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{W}}_{t})$$
 (4.5)

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} \sum_{i=1}^{L} \ln p(\boldsymbol{y_i} | \boldsymbol{x_i}, \hat{\boldsymbol{W}_{ij}}) - KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \mid\mid p(\boldsymbol{W}))$$
(4.6)

где  $\hat{\pmb{W}}_{\pmb{t}}$  и  $\hat{\pmb{W}}_{\pmb{ij}}$  — сэмплы весов модели из распределения  $q_{\pmb{ heta}}(\pmb{W}).$ 

## 5 Задание функциональных форм распределений

Для дальнейшнего вывода положим, что распределения  $p(\boldsymbol{W})$  и  $q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W})$  являются нормальными с диагональными матрицами ковариации:

$$q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) = N(\boldsymbol{W}|\boldsymbol{\mu}, diag(\boldsymbol{\sigma})^{2}) = \prod_{k=1}^{M} N(W_{k}|\mu_{k}, \sigma_{k})$$
(5.1)

$$p(\boldsymbol{W}) = N(\boldsymbol{W}|\boldsymbol{0}, diag(\boldsymbol{\delta})^{2}) = \prod_{k=1}^{M} N(W_{k}|0, \delta_{k})$$
(5.2)

Так как распределение  $q_{\theta}(W)$  нормальное, мы можем использовать трюк с репараметризацией при сэмплировании весов, что позволяет использовать градиентные методы для оптимизации:

$$\hat{W}_{ij} = \varepsilon_{ij} \odot \sigma + \mu \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_{ii}} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$$
 (5.4)

Так как распределения  $p(\mathbf{W})$  и  $q_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{W})$  нормальные,  $KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{W}) \mid\mid p(\mathbf{W}))$  считается аналитически:

$$KL(q_{\theta}(\mathbf{W}) \mid\mid p(\mathbf{W})) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{\sigma_k^2}{\delta_k^2} + \frac{\mu_k^2}{\delta_k^2} - \ln \frac{\sigma_k^2}{\delta_k^2} - 1\right)$$
(5.5)

Подставив (5.5) в (4.6), получим:

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} \sum_{k=1}^{L} \ln p(\mathbf{y_i} | \mathbf{x_i}, \hat{\mathbf{W}_{ij}}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} (\frac{\sigma_k^2}{\delta_k^2} + \frac{\mu_k^2}{\delta_k^2} - \ln \frac{\sigma_k^2}{\delta_k^2} - 1)$$
 (5.6)

Таким образом  $\mu$  и  $\sigma$  это обучаемые параметры модели, а параметр  $\delta$  — гиперпараметр (так как является параметром априорного распределения p(W)). В байесовском выводе все параметры априорного распределения должны задаваться до начала обучения. Однако мы можем определить параметр  $\delta$  из данных. Такой прием называется эмпирический Байес.

## 6 Эмпирический Байес

Найдём такое значение  $\delta$ , при котором  $\mathcal{L}$  максимальна. Так как в выражении (4.6) левое слагаемое не зависит от параметров распределения  $p(\boldsymbol{W})$ , то максимум  $\mathcal{L}$  достигается при минимуме  $KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \mid\mid p(\boldsymbol{W}))$  по параметру  $\delta$ .

Пусть  $\boldsymbol{\alpha} = diag(\boldsymbol{\delta})^{-2}$ . Тогда выражение (5.5) будет иметь следующий вид:

$$KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \mid\mid p(\boldsymbol{W})) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \left( \alpha_k \cdot \sigma_k^2 + \alpha_k \cdot \mu_k^2 - (\ln \sigma_k^2 + \ln \alpha_k) - 1 \right)$$

$$(6.1)$$

Найдём производную  $KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \mid\mid p(\boldsymbol{W}))$  по параметру  $\boldsymbol{\alpha}$ :

$$\frac{\partial (KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \mid\mid p(\boldsymbol{W})))}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{2} \left( \sigma_k^2 + \mu_k^2 - \frac{1}{\alpha_k} \right) = \frac{1}{2} \left( \sigma_k^2 + \mu_k^2 - \delta_k^2 \right)$$
(6.2)

Приравняв (6.2) к нулю, получим выражение для оптимального значения  $\delta$ :

$$\delta_k^2 = \sigma_k^2 + \mu_k^2 \tag{6.3}$$

Подставив (6.3) в (5.5) и (5.6), получим:

$$KL(q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{W}) \mid\mid p(\boldsymbol{W})) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \ln \left( 1 + \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2} \right)$$
(6.4)

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} \sum_{i=1}^{L} \ln p(\boldsymbol{y_i} | \boldsymbol{x_i}, \hat{\boldsymbol{W}_{ij}}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \ln \left( 1 + \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2} \right)$$
(6.5)

Таким образом задача свелась к максимизации  $\mathcal{L}$  по параметрам  $\mu$  и  $\sigma$ . Однако градиентная оптимизация по параметрам  $\mu$  и  $\sigma$  может привести к численной нестабильности.

#### 7 Замена переменных

При максимизации  $\mathcal{L}$  могут возникнуть ситуации, когда какой–либо вес модели перестает быть случайной величиной и вырождается в ноль  $(\sigma_k \to 0$  и  $\mu_k \to 0)$ . Это приведет к неопределенности деления 0 на 0 при вычислении KL-дивергенции.

Так же при градиентной оптимизации компоненты вектора  $\sigma$  могут попасть в отрицательную область, что нежелательно, так как среднеквадратическое отклонение не может быть отрицательным по определению.

Чтобы избежать этих проблем, определим параметры  $\sigma$  и  $\mu$  через новые параметры  $\rho$  и  $\gamma$  следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \ln(1 + e^{\boldsymbol{\rho}}) = Softplus(\boldsymbol{\rho}) \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\gamma} \odot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\gamma} \odot Softplus(\boldsymbol{\rho}) \tag{7.2}$$

Подставив (7.1) и (7.2) в (5.5) и (5.6), получим:

$$KL(q_{\theta}(\mathbf{W}) \mid\mid p(\mathbf{W})) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \ln(1 + \gamma_k^2)$$
 (7.3)

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{S} \sum_{j=1}^{S} \sum_{i=1}^{L} \ln p(\mathbf{y_i} | \mathbf{x_i}, \hat{\mathbf{W}_{ij}}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \ln(1 + \gamma_k^2)$$

$$(7.4)$$

Таким образом, задача свелась к максимизации (7.4) по параметрам  $\rho$  и  $\gamma$ . Значение  $\hat{W}_{ij}$  вычисляется по (5.3), которое в свою очередь через (5.4), (7.1) и (7.2).

## 8 Алгоритм обучения

Возьмем выражение для  $\mathcal{L}$  из (7.4) со знаком минус и разделив на размер обучеющей выборки L, получим следующую функцию потерь:

$$loss(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma}) = -\frac{1}{S \cdot L} \sum_{j=1}^{S} \sum_{i=1}^{L} \ln p(\boldsymbol{y_i} | \boldsymbol{x_i}, \hat{\boldsymbol{W}_{ij}}) + \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \ln(1 + \gamma_k^2)}{L}$$
(8.1)

Введём следующие упрощения расчёта функции потерь на каждом градиентном шаге:

- на каждый объект делать только один сэмпл весов (то есть задать S=1);
- средний отрицательный логарифм правдоподобия считать не по всей обучающех выборке, а на случайном подмножестве (батче).

Тогда выражение (8.1) для функции потерь будет выглядить следующие образом:

$$loss(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma}) \approx -\frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} \ln p(\boldsymbol{y_b} | \boldsymbol{x_b}, \hat{\boldsymbol{W}_b}) + \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \ln(1 + \gamma_k^2)}{L}$$
(8.2)

Запишем алгоритм стохастического градиентного спуска для минимизации (8.2).

Задаем шаг градиентного спуска  $\eta$  и инициализируем параметры распределения  $\rho$  и  $\gamma$ . Затем повторяем, пока не достигнем критерия остановки:

- 1.  $\sigma \leftarrow Softplus(\rho)$  расчёт среднеквадратических отклонений весов
- 2.  $\mu \leftarrow \gamma \odot \sigma$  расчёт математических ожиданий весов
- 3.  $\varepsilon \leftarrow N(0,1)$  сэмплирование случайных весов
- 4.  $\hat{W} \leftarrow \boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\mu}$  репараметризация
- 5.  $nll \leftarrow -\frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} \ln p(\pmb{y_b} | \pmb{x_b}, \hat{\pmb{W}})$  расчёт среднего отрицательного логарифма правдоподобия
- 6.  $kl \leftarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \ln(1+\gamma_k^2)$  расчёт KL-дивергенции
- 7.  $l \leftarrow nll + \frac{kl}{L}$  расчёт функции потерь
- 8.  $m{
  ho} \leftarrow m{
  ho} \eta rac{\partial l}{\partial m{
  ho}}$  обновление  $m{
  ho}$
- 9.  $\gamma \leftarrow \gamma \eta \frac{\partial l}{\partial \gamma}$  обновление  $\gamma$

### 9 Эксперименты

Для проверки своей гипотезы я выбрал Alzheimer's Disease Dataset. Данные были разбиты на тренировочную и тестовую часть в пропорции 80 на 20. В качестве архитектуры была выбрана полносвязная нейронная сеть с одним скрытым слоем и функцией активации ReLU. То есть:

$$z = ReLU(matmul(x, W_1))$$
  
$$y = Sigmoid(matmul(z, W_2))$$

Размерность скрытого состояния z варьировалась от 1 до 60. Для каждой размерности обучались 2 модели — классическая (без регуляризации) и байесовская. Для каждой модели производилась оценка ROC–AUC на тренировочной и тестовой выборках.

На рисунке 1 представлены результаты экспериментов.

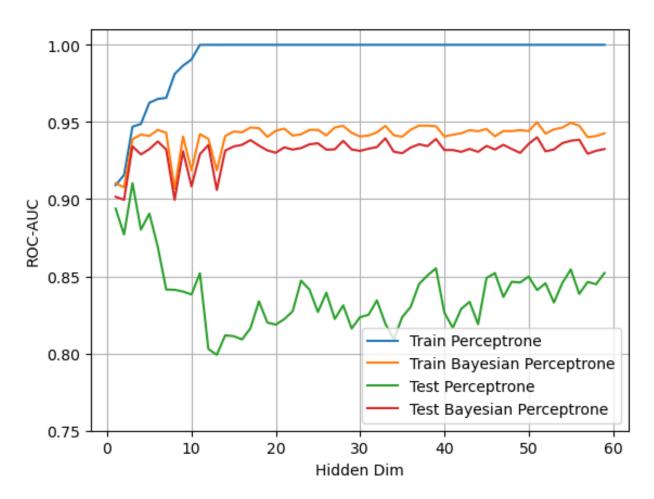


Рис. 1: Зависимость ROC-AUC от размерности скрытого состояния на тренировочных и тестовых данных

### 10 Выводы

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

- с ростом сложности модели байесовская нейронная сеть не переобучилась;
- значение ROC-AUC на тестовой выборке имеет очень высокую корреляцию со значением ROC-AUC на тренировочной выборке (0.97 по Пирсону). Следовательно, для подбора гиперпараметров можно ориентироваться на метрики, полученные по тренировочной выборке. Это даёт нам возможность отказаться от деления на тренировочную и валидационную выборки для подбора гиперпараметров.

Так же стоит отметить, что данный подход переносится на другие архитектуры нейронных сетей (рекуррентные, свёрточные, трансформеры).

Имплементация данного подхода была выполнена с использованием PyTorch. Весь исходный код для проведения экспериментов размещён по адресу https://github.com/dimabasow/bayesian-neural-networks.