$y(s) = y(x,t) -$ досліджувана фунція стану динамічної системи.

$u(s) = u(x,t) -$ функція зовнішньодинамічних збурень розподілених в $S_0^T -$ відома.

$S_0^T = S_0 \times [0,T], S_0 \subseteq \mathbb{R} -$ просторово $-$ часова область.

В нашому випадку: $S_0 = \coprod_{k \in K} [a_k, b_k],$

де $a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_k < b_k, K -$ деяка множина цілочисельних індексів.

Наприклад, $S_0 = [a,b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$

$S_\Gamma^T = S_\Gamma \times [0,T]$

В нашому випадку: $S_\Gamma = \coprod_{e \in E} [c_e, d_e],$

де $c_e, d_e \in \mathbb{R}, c_e < d_e, E -$ деяка множина цілочисельних індексів.

Наприклад, $S_\Gamma = [c,d], c < d, c, d \in \mathbb{R}$

$s = (x,t) \in S_0^T -$ просторово $-$ часова змінна.

$\partial s = (\partial x, \partial t) -$ вектор частинних похідних за просторовою змінною x та часом t.

$L(\partial s) = L(\partial x, \partial t) -$ лінійний диференціальний оператор.

$L(\partial x, \partial t) y(x,t) = u(x,t) -$ рівняння, що задає логіку функціонування динамічної системи.

Початкові $(t = 0)$ спостереження розглядуваного динамічного процесу, які є керуючими:

$$L_r^0(\partial t) y(x,t)\big|_{x = x_l^0 \in S_0}^{t=0} = Y_{rl}^0 \ (r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}).$$

Крайові (на Γ) спостереження розглядуваного динамічного процесу:

$$L_\rho^\Gamma(\partial x) y(x,t)\big|_{(x,t) = s_l^\Gamma \in S_\Gamma^T} = Y_{\rho l}^\Gamma \ (l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Бажані значення функції стану:

$$L_i(\partial x, \partial t) y(x,t)\big|_{(x,t) = s_{ij} \in S_0^T} = Y_{ij} \ (j = \overline{1, J_\text{I}}, i = \overline{1, I}).$$

$G(s - s') = G(x - x', t - t') -$ функція Гріна нашої системи, що задається співвідношенням:

$$L(\partial x, \partial t) G(x - x', t - t') = \delta(x - x', t - t'),$$

де $\delta(x - x', t - t') - \ \delta -$ функція Дірака.

За обмеженості S_0^T та наявності початкових, та крайових спостережень:

$$y(x,t) = y_\infty(x,t) + y_0(x,t) + y_\Gamma(x,t).$$

$$y_\infty(x,t) = \int\limits_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds' = \int\limits_0^T \int\limits_{S_0} G(x-x',t-t')u(x',t')dx'dt'$$

$$= \int\limits_0^T \left(\sum_{k\in K} \int\limits_{a_k}^{b_k} G(x-x',t-t')u(x',t')dx' \right) dt'\,. -\text{відоме відразу}$$

$$\text{При } S_0 = [a,b]\text{: } y_\infty(x,t) = \int\limits_0^T \int\limits_a^b G(x-x',t-t')u(x',t')dx'dt'$$

Далі $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ – функції, які діють в областях $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$, $S^\Gamma = (\mathbb{R} \backslash S_0) \times (0, T]$, і що моделюють вплив початкових та крайових збурень відповідно.

$$y_0(x,t) = \int\limits_{S^0} G(s-s')u_0(s')ds'$$

$$S^0 = S_0 \times (-\infty, 0] = \left(\coprod_{k\in K} [a_k, b_k] \right) \times (-\infty, 0]$$

$$= |\text{Приймаємо спрощення, що } u_0(x,t) = 0, (x,t) \in S_0 \times (-\infty, -T_0], T_0 > 0|$$

$$= \left(\coprod_{k\in K} [a_k, b_k] \right) \times [-T_0, 0].$$

$$\int\limits_{-T_0}^0 \int\limits_{S_0} G(x-x',t-t')u_0(x',t')dx'dt' = \int\limits_{-T_0}^0 \left(\sum_{k\in K} \int\limits_{a_k}^{b_k} G(x-x',t-t')u_0(x',t')dx' \right) dt'.$$

При $S_0 = [a,b]$:

$$y_0(x,t) = \int\limits_{-T_0}^0 \int\limits_a^b G(x-x',t-t')u_0(x',t')dx'dt'.$$

$$y_\Gamma(x,t) = \int\limits_{S^\Gamma} G(s-s')u_\Gamma(s')ds'$$

$$
\begin{aligned}
S^{\Gamma} = (\mathbb{R}\backslash S_{\Gamma}) \times (0,T] &= \left((-\infty, c_{first}) \cup \bigcup_{e\in E\backslash last} (d_e, c_{e+1}) \cup (d_{last}, +\infty) \right) \times (0,T] \\
&= \Big| \text{Приймаємо спрощення, що } u_{\Gamma}(x,t) = 0, (x,t) \\
&\in \big((-\infty, C) \cup (D, +\infty) \big) \times (0,T], C < c_{first}, D > d_{last} \Big| \\
&= \left([C, c_{first}) \cup \bigcup_{e\in E\backslash last} (d_k, c_{k+1}) \cup (d_{last}, D] \right) \times (0,T] = S'_{\Gamma} \times (0,T].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{S'_{\Gamma}} G(x-x', t-t') u_{\Gamma}(x', t') dx' dt' \\
&= \int_0^T \int_C^{c_{first}} G(x-x', t-t') u_{\Gamma}(x', t') dx' dt' \\
&+ \int_0^T \sum_{e\in E\backslash last} \int_{d_e}^{c_{e+1}} G(x-x', t-t') u_{\Gamma}(x', t') dx' dt' \\
&+ \int_0^T \int_{d_{last}}^{D} G(x-x', t-t') u_{\Gamma}(x', t') dx' dt' \\
&= \int_0^T \left(\int_C^{c_{first}} G(x-x', t-t') u_{\Gamma}(x', t') dx' + \sum_{e\in E\backslash last} \int_{d_e}^{c_{e+1}} G(x-x', t-t') u_{\Gamma}(x', t') dx' \right. \\
&\left. + \int_{d_{last}}^{D} G(x-x', t-t') u_{\Gamma}(x', t') dx' \right) dt'.
\end{aligned}
$$

При $S_{\Gamma} = [c, d] \Rightarrow S'_{\Gamma} = [C, c) \cup (d, D]$:

$$
y_{\Gamma}(x,t) = \int_0^T \left(\int_C^c G(x-x', t-t') u_{\Gamma}(x', t') dx' + \int_d^D G(x-x', t-t') u_{\Gamma}(x', t') dx' \right) dt'.
$$

Пошук u_0, u_{Γ} та Y_{rl}^0 подамо у вигляді наступного середньоквадратичного критерію:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 = \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \sum_{l=1}^{L_{\Gamma}} \left(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial x) y(x,t)\big|_{(x,t)=s_l^{\Gamma}} - Y_{\rho l}^{\Gamma} \right)^2 + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \left(L_i(\partial x, \partial t) y(x,t)\big|_{x=x_{ij}}^{t=t_{ij}} - Y_{ij} \right)^2 \\
\to \min_{Y_{rl}^0 \, (r=\overline{1,R_0}, l=\overline{1,L_0})} .
\end{aligned}
$$

Розв′язок можна отримати з обернення наступної системи:

$$\int_{-T_0}^{0}\left(\sum_{k\in K}\int_{a_k}^{b_k} L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma}u_0(x',t')dx'\right)dt'$$
$$+\left(\int_0^T\left(\int_C^{c_{first}} L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma}u_\Gamma(x',t')dx'\right.\right.$$
$$+\sum_{e\in E\setminus last}\int_{d_e}^{c_{e+1}} L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma}u_\Gamma(x',t')dx'$$
$$\left.\left.+\int_{d_{last}}^{D} L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma}u_\Gamma(x',t')dx'\right)dt'\right)=\overline{Y_{\rho l}}\ (l=\overline{1,L_\Gamma},\rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$\int_{-T_0}^{0}\left(\sum_{k\in K}\int_{a_k}^{b_k} \mathrm{L_i}(\partial x,\partial t)G(x-x',t-t')|_{x=\mathrm{x_{ij}}}^{t=\mathrm{t_{ij}}}u_0(x',t')dx'\right)dt'$$
$$+\left(\int_0^T\left(\int_C^{c_{first}} \mathrm{L_i}(\partial x,\partial t)G(x-x',t-t')|_{x=\mathrm{x_{ij}}}^{t=\mathrm{t_{ij}}}u_\Gamma(x',t')dx'\right.\right.$$
$$+\sum_{e\in E\setminus last}\int_{d_e}^{c_{e+1}} \mathrm{L_i}(\partial x,\partial t)G(x-x',t-t')|_{x=\mathrm{x_{ij}}}^{t=\mathrm{t_{ij}}}u_\Gamma(x',t')dx'$$
$$\left.\left.+\int_{d_{last}}^{D} \mathrm{L_i}(\partial x,\partial t)G(x-x',t-t')|_{x=\mathrm{x_{ij}}}^{t=\mathrm{t_{ij}}}u_\Gamma(x',t')dx'\right)dt'\right)=\overline{Y_{\iota J}}\ (j=\overline{1,J_\iota},i=\overline{1,I}),$$

$$\text{де}\ \overline{Y_{\rho l}}\ =Y_{\rho l}^\Gamma-L_\rho^\Gamma(\partial x)y_\infty(x,t)|_{(x,t)=s_l^\Gamma}$$

$$\overline{Y_{\iota J}}=Y_{ij}-L_i(\partial x,\partial t)y_\infty(x,t)|_{x=x_{ij}}^{t=t_{ij}}$$

Запишемо систему у вигляді

$$\int_{(\cdot)} A(x,t)\bar{u}(x,t)dxdt=\bar{Y},\text{де}$$

$$\bar{u}(x,t)=\underbrace{\begin{pmatrix}u_0(x,t)\ \big((x,t)\in S^0\big)\\ u_\Gamma(x,t)\ \ \big((x,t)\in S^\Gamma\big)\end{pmatrix}}_{1}\Big\}2,$$

$$A(x,t)=\underbrace{\begin{pmatrix}A_{21}(x,t)\ \big((x,t)\in S^0\big) & A_{22}(x,t)\ \big((x,t)\in S^\Gamma\big)\\ A_{31}(x,t)\ \big((x,t)\in S^0\big) & A_{32}(x,t)\ \big((x,t)\in S^\Gamma\big)\end{pmatrix}}_{2}\Bigg\}L_\Gamma R_\Gamma+(\sum_{i=1}^{I}J_i)I,$$

$$\bar{Y}=\begin{pmatrix}\overline{Y_\Gamma}\\ \overline{Y_*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}col\big((\overline{Y_{\rho l}},l=\overline{1,L_\Gamma}),\rho=\overline{1,R_\Gamma}\big)\\ col\big((\overline{Y_{\iota J}},j=\overline{1,J_\iota}),i=\overline{1,I}\big)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots\}L_\Gamma R_\Gamma\\ \vdots\}(\sum_{i=1}^{I}J_i)I\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\\ \vdots\end{pmatrix}}_{1}\Big\}L_\Gamma R_\Gamma+(\sum_{i=1}^{I}J_i)I,$$

$$A_{2q} = col\left(\left(L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma}, l=\overline{1,L_\Gamma}\right), \rho=\overline{1,R_\Gamma}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{1}\Big\} L_\Gamma R_\Gamma,$$

$$A_{3q} = col\left(\left(\mathrm{L_i}(\partial x,\partial t)G(x-x',t-t')|_{x=\mathrm{x_{ij}}}^{t=\mathrm{t_{ij}}}, j=\overline{1,J_\iota}\right), i=\overline{1,I}\right) = \underbrace{(\vdots)}_{1}\}(\sum_{i=1}^{I} J_i)I,$$

$$(x',y') \in S^0, \text{при } q=1,$$

$$(x',y') \in S^\Gamma, \text{при } q=2.$$

$$\underline{(x',y') \in S_0^T, \text{при } q=3 - \text{в нас нема}}$$

Розв'язком буде:

$$\bar{u}(x,t) = A^T(x,t)P^+(\bar{Y}-A_v)+v(x,t), \text{де}$$

$$P = \int\limits_{(\cdot)} A(x,t)A^T(x,t)dxdt = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{L_\Gamma R_\Gamma + (\sum_{i=1}^{I} J_i)I}\Bigg\} L_\Gamma R_\Gamma + (\sum_{i=1}^{I} J_i)I,$$

$$A_v = \int\limits_{(\cdot)} A(x,t)v(x,t)dxdt = \underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{1}\Big\} L_\Gamma R_\Gamma + (\sum_{i=1}^{I} J_i)I,$$

$$v(x,t) = col\left(v_0(x,t)\ \left((x,t)\in S^0\right), v_\Gamma(x,t)\ \left((x,t)\in S^\Gamma\right)\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} v_0(x,t)\ \left((x,t)\in S^0\right) \\ v_\Gamma(x,t)\ \left((x,t)\in S^\Gamma\right)\end{pmatrix}}_{1}\Bigg\} 2$$

−довільна інтегровна в області своїх аргументів вектор − функція.

Звідси,

$$u_0(x,t) = A_1(x,t)P^+(\bar{Y}-A_v)+v_0(x,t),$$

$$u_\Gamma(x,t) = A_2(x,t)P^+(\bar{Y}-A_v)+v_\Gamma(x,t), \text{де}$$

$$A_1(x,t) = (A_{21}^T(x,t) \quad A_{31}^T(x,t)) = \underbrace{(\cdots \quad \cdots)}_{L_\Gamma R_\Gamma + (\sum_{i=1}^{I} J_i)I}\}\ 1\ \left((x,t)\in S^0\right),$$

$$A_2(x,t) = (A_{22}^T(x,t) \quad A_{32}^T(x,t)) = \underbrace{(\cdots \quad \cdots)}_{L_\Gamma R_\Gamma + (\sum_{i=1}^{I} J_i)I}\}\ 1\ \left((x,t)\in S^\Gamma\right),$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{21} & P_{22} \\ P_{31} & P_{32}\end{pmatrix},$$

$$A_v = \begin{pmatrix} A_{v_0} \\ A_{v_\Gamma}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{1}\Big\} L_\Gamma R_\Gamma + (\sum_{i=1}^{I} J_i)I,$$

$$P_{nm} = \int\limits_{S^0} A_{n1}(x,t)A_{m+11}^T(x,t)dxdt + \int\limits_{S^\Gamma} A_{n2}(x,t)A_{m+12}^T(x,t)dxdt$$
$$= \int\limits_{-T_0}^{0}\left(\sum_{k\in K}\int\limits_{a_k}^{b_k} A_{n1}(x,t)A_{m+11}^T(x,t)dx\right)dt$$
$$+ \int\limits_0^T\left(\int\limits_C^{c_{first}} A_{n2}(x,t)A_{m+12}^T(x,t)dx + \sum_{e\in E\setminus last}\int\limits_{d_e}^{c_{e+1}} A_{n2}(x,t)A_{m+12}^T(x,t)dx\right.$$
$$\left. + \int\limits_{d_{last}}^{D} A_{n2}(x,t)A_{m+12}^T(x,t)dx\right)dt \;\; (n=\overline{2,3}, m=\overline{1,2}).$$

Тоді: $P_{21} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}\right\}}_{L_\Gamma R_\Gamma} L_\Gamma R_\Gamma,\qquad P_{22} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}\right\}}_{(\sum_{i=1}^I J_i)I} L_\Gamma R_\Gamma,$

$$P_{31} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}\right\}}_{L_\Gamma R_\Gamma} (\sum_{i=1}^I J_i)I,\qquad P_{32} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}\right\}}_{(\sum_{i=1}^I J_i)I} (\sum_{i=1}^I J_i)I.$$

$$A_{v_0} = \int\limits_{S^0} A_{21}(x,t)v_0(x,t)dxdt + \int\limits_{S^\Gamma} A_{22}(x,t)v_\Gamma(x,t)dxdt$$
$$= \int\limits_{-T_0}^{0}\left(\sum_{k\in K}\int\limits_{a_k}^{b_k} A_{21}(x,t)v_0(x,t)dx\right)dt$$
$$+ \int\limits_0^T\left(\int\limits_C^{c_{first}} A_{22}(x,t)v_\Gamma(x,t)dx + \sum_{e\in E\setminus last}\int\limits_{d_e}^{c_{e+1}} A_{22}(x,t)v_\Gamma(x,t)dx\right.$$
$$\left. + \int\limits_{d_{last}}^{D} A_{22}(x,t)v_\Gamma(x,t)dx\right)dt = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix}\right\}}_{1} L_\Gamma R_\Gamma,$$

$$A_{v_\Gamma} = \int\limits_{S^0} A_{31}(x,t)v_0(x,t)dxdt + \int\limits_{S^\Gamma} A_{32}(x,t)v_\Gamma(x,t)dxdt$$
$$= \int\limits_{-T_0}^{0}\left(\sum_{k\in K}\int\limits_{a_k}^{b_k} A_{31}(x,t)v_0(x,t)dx\right)dt$$
$$+ \int\limits_0^T\left(\int\limits_C^{c_{first}} A_{32}(x,t)v_\Gamma(x,t)dx + \sum_{e\in E\setminus last}\int\limits_{d_e}^{c_{e+1}} A_{32}(x,t)v_\Gamma(x,t)dx\right.$$
$$\left. + \int\limits_{d_{last}}^{D} A_{32}(x,t)v_\Gamma(x,t)dx\right)dt = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix}\right\}}_{1} (\sum_{i=1}^I J_i)I.$$

Точність з якою функція $y(x,t)$стану нашої системи задовольняє початково − крайові умови:

$$\varepsilon^2 = \min_{u_0(x,t),u_\Gamma(x,t)} \Phi_1 = \bar{Y}^T\bar{Y} - \bar{Y}^T P P^+ \bar{Y}.$$