$y(s) = y(x,t) -$ досліджувана фунція стану динамічної системи.

$u(s) = u(x,t) -$ функція зовнішньодинамічних збурень розподілених в S_0^T.

$S_0^T = S_0 \times [0,T], S_0 \subseteq \mathbb{R} -$ просторово $-$ часова область.

В нашому випадку: $S_0 = \coprod_{i \in I} [a_i, b_i]$,

де $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, I -$ деяка множина цілочисельних індексів.

Наприклад, $S_0 = [a,b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$

$\Gamma -$ контур S_0. В нас: $\Gamma = \coprod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \{\mathrm{a_i}, \mathrm{b_i}\}$, наприклад, $\Gamma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$

$s = (x,t) \in S_0^T -$ просторово $-$ часова змінна.

$\partial s = (\partial x, \partial t) -$ вектор частинних похідних за просторовою змінною x та часом t.

$L(\partial s) = L(\partial x, \partial t) -$ лінійний диференціальний оператор.

$L(\partial x, \partial t) y(x,t) = u(x,t) -$ рівняння, що задає логіку функціонування динамічної системи.

Початкові $(t = 0)$ спостереження розглядуваного динамічного процесу:

$$L_r^0(\partial t) y(x,t)\big|_{x = x_l^0 \in S_0}^{t=0} = Y_{rl}^0 \ (r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}).$$

Крайові (на Γ) спостереження розглядуваного динамічного процесу:

$$L_\rho^\Gamma(\partial x) y(x,t)\big|_{(x,t) = s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0,T]} = Y_{\rho l}^\Gamma \ (l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

$G(s - s') = G(x - x', t - t') -$ функція Гріна нашої системи, що задається співвідношенням:

$$L(\partial x, \partial t) G(x - x', t - t') = \delta(x - x', t - t'),$$

де $\delta(x - x', t - t') - \ \delta -$ функція Дірака.

За обмеженості S_0^T та наявності початкових, та крайових спостережень:

$$y(x,t) = y_\infty(x,t) + y_0(x,t) + y_\Gamma(x,t).$$

$$y_\infty(x,t) = \int\limits_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds' = \int\limits_0^T \int\limits_{S_0} G(x-x',t-t')u(x',t')dx'dt'$$

$$= \int\limits_0^T \left(\sum_{i\in I} \int\limits_{a_i}^{b_i} G(x-x',t-t')u(x',t')dx' \right) dt'.$$

При $S_0 = [a,b]$: $y_\infty(x,t) = \int\limits_0^T \int\limits_a^b G(x-x',t-t')u(x',t')dx'dt'$

Далі $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ − функції, які діють в областях $S^0 = S_0 \times (-\infty,0]$, $S^\Gamma = (\mathbb{R}\backslash S_0) \times (0,T]$, і що моделюють вплив початкових та крайових збурень відповідно.

$$y_0(x,t) = \int\limits_{S^0} G(s-s')u_0(s')ds' \boxed{\equiv}$$

$$S^0 = S_0 \times (-\infty,0] = \left(\coprod_{i\in I} [a_i,b_i] \right) \times (-\infty,0]$$
$$= |\text{Приймаємо спрощення, що } u_0(x,t) = 0, (x,t) \in S_0 \times (-\infty,-T_0], T_0 > 0|$$
$$= \left(\coprod_{i\in I} [a_i,b_i] \right) \times [-T_0,0].$$

$$\boxed{\equiv} \int\limits_{-T_0}^0 \int\limits_{S_0} G(x-x',t-t')u_0(x',t')dx'dt' = \int\limits_{-T_0}^0 \left(\sum_{i\in I} \int\limits_{a_i}^{b_i} G(x-x',t-t')u_0(x',t')dx' \right) dt'.$$

При $S_0 = [a,b]$:

$$y_0(x,t) = \int\limits_{-T_0}^0 \int\limits_a^b G(x-x',t-t')u_0(x',t')dx'dt'.$$

$$y_\Gamma(x,t) = \int\limits_{S^\Gamma} G(s-s')u_\Gamma(s')ds' \boxed{\equiv}$$

$$S^\Gamma = (\mathbb{R}\backslash S_0) \times (0,T] = \left((-\infty,a_{first}) \cup \bigcup_{i\in I\backslash last} (b_i,a_{i+1}) \cup (b_{last},+\infty) \right) \times (0,T]$$
$$= \Big|\text{Приймаємо спрощення, що } u_\Gamma(x,t) = 0, (x,t) \in \big((-\infty,A) \cup (B,+\infty)\big) \times (0,T], A < a_{first}, B > b_{last}\Big|$$
$$= \left(\big[A,a_{first}\big) \cup \bigcup_{i\in I\backslash last} (b_i,a_{i+1}) \cup (b_{last},B] \right) \times (0,T] = S_\Gamma \times (0,T].$$

$$
\begin{aligned}
\boxed{=}\int_0^T \int_{S_\Gamma} G(x-x',t-t')u_\Gamma(x',t')dx'dt' \\
&= \int_0^T \int_A^{a_{first}} G(x-x',t-t')u_\Gamma(x',t')dx'dt' \\
&+ \int_0^T \sum_{i\in I\setminus last} \int_{b_i}^{a_{i+1}} G(x-x',t-t')u_\Gamma(x',t')dx'dt' \\
&+ \int_0^T \int_{b_{last}}^{B} G(x-x',t-t')u_\Gamma(x',t')dx'dt' \\
&= \int_0^T \left(\int_A^a G(x-x',t-t')u_\Gamma(x',t')dx' + \sum_{i\in I\setminus last} \int_{b_i}^{a_{i+1}} G(x-x',t-t')u_\Gamma(x',t')dx' \right. \\
&\left. + \int_b^B G(x-x',t-t')u_\Gamma(x',t')dx' \right) dt'.
\end{aligned}
$$

При $S_0 = [a,b] \Rightarrow S_\Gamma = [A,a) \cup (b,B]$:

$$
y_\Gamma(x,t) = \int_0^T \left(\int_A^a G(x-x',t-t')u_\Gamma(x',t')dx' + \int_b^B G(x-x',t-t')u_\Gamma(x',t')dx' \right) dt'.
$$

Пошук u_0 та u_Γ подамо у вигляді наступного середньоквадратичного критерію:

$$
\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} \left(L_r^0(\partial t) y(x,t)\Big|_{x=x_l^0}^{t=0} - Y_{rl}^0 \right)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} \left(L_\rho^\Gamma(\partial x) y(x,t)\Big|_{(x,t)=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma \right)^2 \to \min_{u_0(x,t),u_\Gamma(x,t)} .
$$

Розв′язок можна отримати з обернення наступної системи:

$$
\begin{aligned}
\int_{-T_0}^{0} \left(\sum_{i\in I} \int_{a_i}^{b_i} L_r^0(\partial t) G(x-x',t-t')\Big|_{x=x_l^0}^{t=0} u_0(x',t')dx' \right) dt' \\
&+ \left(\int_0^T \left(\int_A^a L_r^0(\partial t) G(x-x',t-t')\Big|_{x=x_l^0}^{t=0} u_\Gamma(x',t')dx' \right.\right. \\
&+ \sum_{i\in I\setminus last} \int_{b_i}^{a_{i+1}} L_r^0(\partial t) G(x-x',t-t')\Big|_{x=x_l^0}^{t=0} u_\Gamma(x',t')dx' \\
&\left.\left. + \int_b^B L_r^0(\partial t) G(x-x',t-t')\Big|_{x=x_l^0}^{t=0} u_\Gamma(x',t')dx' \right) dt' \right) = \overline{Y_{rl}} \ (r = \overline{1,R_0}, l = \overline{1,L_0}),
\end{aligned}
$$

$$\int_{-T_0}^{0}\left(\sum_{i\in I}\int_{a_i}^{b_i} L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma}u_0(x',t')dx'\right)dt'$$

$$+\left(\int_0^T\left(\int_A^a L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma}u_\Gamma(x',t')dx'\right.\right.$$

$$+\sum_{i\in I\setminus last}\int_{b_i}^{a_{i+1}} L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma}u_\Gamma(x',t')dx'$$

$$\left.\left.+\int_b^B L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma}u_\Gamma(x',t')dx'\right)dt'\right)=\overline{Y_{\rho l}}\ (l=\overline{1,L_\Gamma},\rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$\text{де}\ \overline{Y_{rl}}=Y_{rl}^0-L_r^0(\partial t)y_\infty(x,t)|_{x=x_l^0}^{t=0},$$

$$\overline{Y_{\rho l}}=Y_{\rho l}^\Gamma-L_\rho^\Gamma(\partial x)y_\infty(x,t)|_{(x,t)=s_l^\Gamma}.$$

Запишемо систему у вигляді

$$\int_{(\cdot)} A(x,t)\bar{u}(x,t)dxdt=\bar{Y},\text{де}$$

$$\bar{u}(x,t)=\underbrace{\begin{pmatrix}u_0(x,t)\ \big((x,t)\in S^0\big)\\ u_\Gamma(x,t)\ \big((x,t)\in S^\Gamma\big)\end{pmatrix}}_{1}\Big\}2,$$

$$A(x,t)=\underbrace{\begin{pmatrix}A_{11}(x,t)\ \big((x,t)\in S^0\big) & A_{12}(x,t)\ \big((x,t)\in S^\Gamma\big)\\ A_{21}(x,t)\ \big((x,t)\in S^0\big) & A_{22}(x,t)\ \big((x,t)\in S^\Gamma\big)\end{pmatrix}}_{2}\Big\}L_0R_0+L_\Gamma R_\Gamma,$$

$$\bar{Y}=\begin{pmatrix}\overline{Y_0}\\ \overline{Y_\Gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}col((\overline{Y_{rl}},l=\overline{1,L_0}),r=\overline{1,R_0})\\ col((\overline{Y_{\rho l}},l=\overline{1,L_\Gamma}),\rho=\overline{1,R_\Gamma})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots\}L_0R_0\\ \vdots\}L_\Gamma R_\Gamma\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\\ \vdots\end{pmatrix}}_{1}\Big\}L_0R_0+L_\Gamma R_\Gamma,$$

$$A_{1i}=col\left(\left(L_r^0(\partial t)G(x-x',t-t')|_{x=x_l^0}^{t=0},l=\overline{1,L_0}\right),r=\overline{1,R_0}\right)=\underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{1}\Big\}L_0R_0,$$

$$A_{2i}=col\left(\left(L_\rho^\Gamma(\partial x)G(x-x',t-t')|_{(x,t)=s_l^\Gamma},l=\overline{1,L_\Gamma}\right),\rho=\overline{1,R_\Gamma}\right)=\underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{1}\Big\}L_\Gamma R_\Gamma,$$

$$(x',y')\in S^0,\text{при}\ i=1,$$

$$(x',y')\in S^\Gamma,\text{при}\ i=2.$$

Розв′язком буде:

$$\bar{u}(x,t)=A^T(x,t)P^+(\bar{Y}-A_v)+v(x,t),\text{де}$$

$$P = \int_{(\cdot)} A(x,t)A^T(x,t)dxdt = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{L_0R_0+L_\Gamma R_\Gamma} \Big\} L_0R_0 + L_\Gamma R_\Gamma,$$

$$A_v = \int_{(\cdot)} A(x,t)v(x,t)dxdt = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_{1} \Big\} L_0R_0 + L_\Gamma R_\Gamma,$$

$$v(x,t) = col\Big(v_0(x,t)\ \big((x,t) \in S^0\big), v_\Gamma(x,t)\ \big((x,t) \in S^\Gamma\big)\Big) = \underbrace{\begin{pmatrix} v_0(x,t)\ \big((x,t) \in S^0\big) \\ v_\Gamma(x,t)\ \big((x,t) \in S^\Gamma\big) \end{pmatrix}}_{1} \Big\} 2$$

−довільна інтегровна в області своїх аргументів вектор − функція.

Звідси,

$$u_0(x,t) = A_0(x,t)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_0(x,t),$$

$$u_\Gamma(x,t) = A_\Gamma(x,t)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_\Gamma(x,t), \text{де}$$

$$A_0(x,t) = (A_{11}^T(x,t) \quad A_{21}^T(x,t)) = \underbrace{(\cdots \quad \cdots)}_{L_0R_0+L_\Gamma R_\Gamma} \}\, 1\ \big((x,t) \in S^0\big),$$

$$A_\Gamma(x,t) = (A_{12}^T(x,t) \quad A_{22}^T(x,t)) = \underbrace{(\cdots \quad \cdots)}_{L_0R_0+L_\Gamma R_\Gamma} \}\, 1\ \big((x,t) \in S^\Gamma\big),$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix},$$

$$A_v = \begin{pmatrix} A_{v_0} \\ A_{v_\Gamma} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_{1} \Big\} L_0R_0 + L_\Gamma R_\Gamma,$$

$$\begin{aligned} P_{ij} = \int_{S^0} A_{i1}(x,t)A_{j1}^T(x,t)dxdt + \int_{S^\Gamma} A_{i2}(x,t)A_{j2}^T(x,t)dxdt \\ = \int_{-T_0}^{0} \left(\sum_{i \in I} \int_{a_i}^{b_i} A_{i1}(x,t)A_{j1}^T(x,t)dx \right) dt \\ + \int_0^T \left(\int_A^a A_{i2}(x,t)A_{j2}^T(x,t)dx + \sum_{i \in I \setminus last} \int_{b_i}^{a_{i+1}} A_{i2}(x,t)A_{j2}^T(x,t)dx \right. \\ \left. + \int_b^B A_{i2}(x,t)A_{j2}^T(x,t)dx \right) dt \ \ (i,j = \overline{1,2}). \end{aligned}$$

Тоді: $P_{11} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{L_0R_0} \Big\} L_0R_0, \qquad P_{12} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{L_\Gamma R_\Gamma} \Big\} L_0R_0,$

$$P_{21} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}\right\}}_{L_0 R_0} L_\Gamma R_\Gamma, \qquad P_{22} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}\right\}}_{L_\Gamma R_\Gamma} L_\Gamma R_\Gamma.$$

$$\begin{aligned} A_{v_0} &= \int\limits_{S^0} A_{11}(x,t) v_0(x,t) dxdt + \int\limits_{S^\Gamma} A_{12}(x,t) v_\Gamma(x,t) dxdt \\ &= \int\limits_{-T_0}^{0} \left(\sum_{i \in I} \int\limits_{a_i}^{b_i} A_{11}(x,t) v_0(x,t) dx \right) dt \\ &+ \int\limits_{0}^{T} \left(\int\limits_{A}^{a} A_{12}(x,t) v_\Gamma(x,t) dx + \sum_{i \in I \setminus last} \int\limits_{b_i}^{a_{i+1}} A_{12}(x,t) v_\Gamma(x,t) dx \right. \\ &+ \left. \int\limits_{b}^{B} A_{12}(x,t) v_\Gamma(x,t) dx \right) dt = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}\right\}}_{1} L_0 R_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{v_\Gamma} &= \int\limits_{S^0} A_{21}(x,t) v_0(x,t) dxdt + \int\limits_{S^\Gamma} A_{22}(x,t) v_\Gamma(x,t) dxdt \\ &= \int\limits_{-T_0}^{0} \left(\sum_{i \in I} \int\limits_{a_i}^{b_i} A_{21}(x,t) v_0(x,t) dx \right) dt \\ &+ \int\limits_{0}^{T} \left(\int\limits_{A}^{a} A_{22}(x,t) v_\Gamma(x,t) dx + \sum_{i \in I \setminus last} \int\limits_{b_i}^{a_{i+1}} A_{22}(x,t) v_\Gamma(x,t) dx \right. \\ &+ \left. \int\limits_{b}^{B} A_{22}(x,t) v_\Gamma(x,t) dx \right) dt = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}\right\}}_{1} L_\Gamma R_\Gamma. \end{aligned}$$

Точність з якою функція $y(x,t)$стану нашої системи задовольняє початково − крайові умови:

$$\varepsilon^2 = \min_{u_0(x,t), u_\Gamma(x,t)} \Phi = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P P^+ \bar{Y}.$$

Якщо немає крайових або початкових умов, тобто для нас вони є несуттєвими, наприклад,

крайові умови для необмеженої просторової області, то значення L_Γ та R_Γ, L_0 та R_0 рівні 0 відповідно.

Тобто, всі формули, насправді, спростяться, але залишаться коректними.