

$y(s) = y(x, t)$ – досліджувана функція стану динамічної системи.

$u(s) = u(x, t)$ – функція зовнішньодинамічних збурень розподілених в S_0^T – відома.

$S_0^T = S_0 \times [0, T], S_0 \subseteq \mathbb{R}$ – просторово – часова область.

В нашому випадку: $S_0 = \prod_{k \in K} [a_k, b_k]$,

де $a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_k < b_k, K$ – деяка множина цілочисельних індексів.

Наприклад, $S_0 = [a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$

$S_\Gamma^T = S_\Gamma \times [0, T]$

В нашому випадку: $S_\Gamma = \prod_{e \in E} [c_e, d_e]$,

де $c_e, d_e \in \mathbb{R}, c_e < d_e, E$ – деяка множина цілочисельних індексів.

Наприклад, $S_\Gamma = [e, d], e < d, e, d \in \mathbb{R}$

$s = (x, t) \in S_0^T$ – просторово – часова змінна.

$\partial s = (\partial x, \partial t)$ – вектор частинних похідних за просторовою змінною x та часом t .

$L(\partial s) = L(\partial x, \partial t)$ – лінійний диференціальний оператор.

$L(\partial x, \partial t)y(x, t) = u(x, t)$ – рівняння, що задає логіку функціонування динамічної системи.

Початкові ($t = 0$) спостереження розглядуваного динамічного процесу, які є керуючими:

$$L_r^0(\partial t)y(x, t)|_{x=x_l^0 \in S_0}^{t=0} = Y_{rl}^0 \quad (r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}).$$

Крайові (на Γ) спостереження розглядуваного динамічного процесу:

$$L_\rho^\Gamma(\partial x)y(x, t)|_{(x,t)=s_l^\Gamma \in S_\Gamma^T} = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Бажані значення функції стану:

$$L_i(\partial x, \partial t)y(x, t)|_{(x,t)=s_{ij} \in S_0^T} = Y_{ij} \quad (j = \overline{1, J_1}, i = \overline{1, I}).$$

$G(s - s') = G(x - x', t - t')$ – функція Гріна нашої системи, що задається співвідношенням:

$$L(\partial x, \partial t)G(x - x', t - t') = \delta(x - x', t - t'),$$

де $\delta(x - x', t - t')$ – δ – функція Дірака.

За обмеженості S_0^T та наявності початкових, та крайових спостережень:

$$y(x, t) = y_\infty(x, t) + y_0(x, t) + y_\Gamma(x, t).$$

$$\begin{aligned} y_\infty(x, t) &= \int_{S_0^T} G(s - s') u(s') ds' = \int_0^T \int_{S_0} G(x - x', t - t') u(x', t') dx' dt' \\ &= \int_0^T \left(\sum_{k \in K} \int_{a_k}^{b_k} G(x - x', t - t') u(x', t') dx' \right) dt'. \text{ -- відоме відразу} \end{aligned}$$

$$\text{При } S_0 = [a, b]: y_\infty(x, t) = \int_0^T \int_a^b G(x - x', t - t') u(x', t') dx' dt'$$

Далі $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ -- функції, які діють в областях $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$, $S^\Gamma = (\mathbb{R} \setminus S_0) \times (0, T]$, і що моделюють вплив початкових та крайових збурень відповідно.

$$y_0(x, t) = \int_{S^0} G(s - s') u_0(s') ds' \equiv$$

$$\begin{aligned} S^0 &= S_0 \times (-\infty, 0] = \left(\prod_{k \in K} [a_k, b_k] \right) \times (-\infty, 0] \\ &= |\text{Приймаємо спрощення, що } u_0(x, t) = 0, (x, t) \in S_0 \times (-\infty, -T_0], T_0 > 0| \\ &= \left(\prod_{k \in K} [a_k, b_k] \right) \times [-T_0, 0]. \end{aligned}$$

$$\equiv \int_{-T_0}^0 \int_{S_0} G(x - x', t - t') u_0(x', t') dx' dt' = \int_{-T_0}^0 \left(\sum_{k \in K} \int_{a_k}^{b_k} G(x - x', t - t') u_0(x', t') dx' \right) dt'.$$

При $S_0 = [a, b]$:

$$y_0(x, t) = \int_{-T_0}^0 \int_a^b G(x - x', t - t') u_0(x', t') dx' dt'.$$

$$y_\Gamma(x, t) = \int_{S^\Gamma} G(s - s') u_\Gamma(s') ds' \equiv$$

$$\begin{aligned}
S^\Gamma &= (\mathbb{R} \setminus S_\Gamma) \times (0, T] = \left((-\infty, c_{first}) \cup \bigcup_{e \in E \setminus last} (d_e, c_{e+1}) \cup (d_{last}, +\infty) \right) \times (0, T] \\
&= \left| \text{Приймаємо спрощення, що } u_\Gamma(x, t) = 0, (x, t) \in ((-\infty, C) \cup (D, +\infty)) \times (0, T], C < c_{first}, D > d_{last} \right| \\
&= \left([C, a_{first}) \cup \bigcup_{e \in E \setminus last} (d_k, c_{k+1}) \cup (d_{last}, D] \right) \times (0, T] = S'_\Gamma \times (0, T].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \int_0^T \int_{S'_\Gamma} G(x - x', t - t') u_\Gamma(x', t') dx' dt' \\
&= \int_0^T \int_C^{c_{first}} G(x - x', t - t') u_\Gamma(x', t') dx' dt' \\
&+ \int_0^T \sum_{e \in E \setminus last} \int_{d_e}^{c_{e+1}} G(x - x', t - t') u_\Gamma(x', t') dx' dt' \\
&+ \int_0^T \int_{d_{last}}^D G(x - x', t - t') u_\Gamma(x', t') dx' dt' \\
&= \int_0^T \left(\int_C^{c_{first}} G(x - x', t - t') u_\Gamma(x', t') dx' + \sum_{e \in E \setminus last} \int_{d_e}^{c_{e+1}} G(x - x', t - t') u_\Gamma(x', t') dx' \right. \\
&\quad \left. + \int_{d_{last}}^D G(x - x', t - t') u_\Gamma(x', t') dx' \right) dt'.
\end{aligned}$$

При $S_\Gamma = [c, d] \Rightarrow S'_\Gamma = [C, c) \cup (d, D]$:

$$y_\Gamma(x, t) = \int_0^T \left(\int_C^c G(x - x', t - t') u_\Gamma(x', t') dx' + \int_d^D G(x - x', t - t') u_\Gamma(x', t') dx' \right) dt'.$$

Пошук u_0, u_Γ та Y_{rl}^0 подамо у вигляді наступного середньоквадратичного критерію:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} \left(L_\rho^\Gamma(\partial x) y(x, t) \big|_{(x,t)=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma \right)^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} \left(L_i(\partial x, \partial t) y(x, t) \big|_{x=x_{ij}}^{t=t_{ij}} - Y_{ij} \right)^2 \\
&\rightarrow \min_{Y_{rl}^0 (r=\overline{1, R_0}, l=\overline{1, L_0})}.
\end{aligned}$$

Розв'язок можна отримати з обернення наступної системи:

$$\begin{aligned}
& \int_{-T_0}^0 \left(\sum_{k \in K} \int_{a_k}^{b_k} L_{\rho}^{\Gamma}(\partial x) G(x - x', t - t')|_{(x,t)=s_l^{\Gamma}} u_0(x', t') dx' \right) dt' \\
& + \left(\int_0^T \left(\int_C^{c_{first}} L_{\rho}^{\Gamma}(\partial x) G(x - x', t - t')|_{(x,t)=s_l^{\Gamma}} u_{\Gamma}(x', t') dx' \right. \right. \\
& + \sum_{e \in E \setminus last} \int_{d_e}^{c_{e+1}} L_{\rho}^{\Gamma}(\partial x) G(x - x', t - t')|_{(x,t)=s_l^{\Gamma}} u_{\Gamma}(x', t') dx' \\
& \left. \left. + \int_{d_{last}}^D L_{\rho}^{\Gamma}(\partial x) G(x - x', t - t')|_{(x,t)=s_l^{\Gamma}} u_{\Gamma}(x', t') dx' \right) dt' \right) = \overline{Y_{\rho l}} \ (l = \overline{1, L_{\Gamma}}, \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-T_0}^0 \left(\sum_{k \in K} \int_{a_k}^{b_k} L_i(\partial x, \partial t) G(x - x', t - t')|_{x=x_{ij}}^{t=t_{ij}} u_0(x', t') dx' \right) dt' \\
& + \left(\int_0^T \left(\int_C^{c_{first}} L_i(\partial x, \partial t) G(x - x', t - t')|_{x=x_{ij}}^{t=t_{ij}} u_{\Gamma}(x', t') dx' \right. \right. \\
& + \sum_{e \in E \setminus last} \int_{d_e}^{c_{e+1}} L_i(\partial x, \partial t) G(x - x', t - t')|_{x=x_{ij}}^{t=t_{ij}} u_{\Gamma}(x', t') dx' \\
& \left. \left. + \int_{d_{last}}^D L_i(\partial x, \partial t) G(x - x', t - t')|_{x=x_{ij}}^{t=t_{ij}} u_{\Gamma}(x', t') dx' \right) dt' \right) = \overline{Y_{lj}} \ (j = \overline{1, J_l}, i = \overline{1, I}),
\end{aligned}$$

$$\text{де } \overline{Y_{\rho l}} = Y_{\rho l}^{\Gamma} - L_{\rho}^{\Gamma}(\partial x) y_{\infty}(x, t)|_{(x,t)=s_l^{\Gamma}}$$

$$\overline{Y_{lj}} = Y_{lj} - L_{ij}(\partial x, \partial t) y_{\infty}(x, t)|_{x=x_{ij}}^{t=t_{ij}}$$

Запишемо систему у вигляді

$$\int_{(\cdot)} A(x, t) \bar{u}(x, t) dx dt = \bar{Y}, \text{ де}$$

$$\bar{u}(x, t) = \underbrace{\left(\begin{array}{l} u_0(x, t) \ ((x, t) \in S^0) \\ u_{\Gamma}(x, t) \ ((x, t) \in S^{\Gamma}) \end{array} \right)}_1 \Bigg\} 2,$$

$$A(x, t) = \underbrace{\left(\begin{array}{ll} A_{21}(x, t) \ ((x, t) \in S^0) & A_{22}(x, t) \ ((x, t) \in S^{\Gamma}) \\ A_{31}(x, t) \ ((x, t) \in S^0) & A_{32}(x, t) \ ((x, t) \in S^{\Gamma}) \end{array} \right)}_2 \Bigg\} L_{\Gamma} R_{\Gamma} + \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I,$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \overline{Y_{\Gamma}} \\ \overline{Y_{*}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} col((\overline{Y_{\rho l}}, l = \overline{1, L_{\Gamma}}), \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}) \\ col((\overline{Y_{lj}}, j = \overline{1, J_l}), i = \overline{1, I}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots L_{\Gamma} R_{\Gamma} \\ \vdots \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_1 \Bigg\} L_{\Gamma} R_{\Gamma} + \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I,$$

$$A_{2q} = col \left(\left(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial x)G(x - x', t - t')|_{(x,t)=s_l^{\Gamma}}, l = \overline{1, L_{\Gamma}} \right), \rho = \overline{1, R_{\Gamma}} \right) = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} \right)}_1 \} L_{\Gamma} R_{\Gamma},$$

$$A_{3q} = col \left(\left(L_i(\partial x, \partial t)G(x - x', t - t')|_{x=x_{ij}}^{t=t_{ij}}, j = \overline{1, J_l}, i = \overline{1, I} \right) \right) = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} \right)}_1 \} \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I,$$

$$(x', y') \in S^0, \text{ при } q = 1,$$

$$(x', y') \in S^{\Gamma}, \text{ при } q = 2.$$

$$\underline{(x', y') \in S_0^T, \text{ при } q = 3 - \text{ в нас нема}}$$

Розв'язком буде:

$$\bar{u}(x, t) = A^T(x, t)P^+(\bar{Y} - A_v) + v(x, t), \text{ де}$$

$$P = \int_{(\cdot)} A(x, t)A^T(x, t)dxdt = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{smallmatrix} \right)}_{L_{\Gamma}R_{\Gamma} + (\sum_{i=1}^I J_i)I} \} L_{\Gamma}R_{\Gamma} + \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I,$$

$$A_v = \int_{(\cdot)} A(x, t)v(x, t)dxdt = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} \right)}_1 \} L_{\Gamma}R_{\Gamma} + \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I,$$

$$v(x, t) = col \left(v_0(x, t) \left((x, t) \in S^0 \right), v_{\Gamma}(x, t) \left((x, t) \in S^{\Gamma} \right) \right) = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} v_0(x, t) \left((x, t) \in S^0 \right) \\ v_{\Gamma}(x, t) \left((x, t) \in S^{\Gamma} \right) \end{smallmatrix} \right)}_1 \} 2$$

— довільна інтегровна в області своїх аргументів вектор — функція.

Звідси,

$$u_0(x, t) = A_1(x, t)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_0(x, t),$$

$$u_{\Gamma}(x, t) = A_2(x, t)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_{\Gamma}(x, t), \text{ де}$$

$$A_1(x, t) = (A_{21}^T(x, t) \quad A_{31}^T(x, t)) = \underbrace{\left(\cdots \quad \cdots \right)}_{L_{\Gamma}R_{\Gamma} + (\sum_{i=1}^I J_i)I} \} 1 \left((x, t) \in S^0 \right),$$

$$A_2(x, t) = (A_{22}^T(x, t) \quad A_{32}^T(x, t)) = \underbrace{\left(\cdots \quad \cdots \right)}_{L_{\Gamma}R_{\Gamma} + (\sum_{i=1}^I J_i)I} \} 1 \left((x, t) \in S^{\Gamma} \right),$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{21} & P_{22} \\ P_{31} & P_{32} \end{pmatrix},$$

$$A_v = \begin{pmatrix} A_{v_0} \\ A_{v_{\Gamma}} \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} \right)}_1 \} L_{\Gamma}R_{\Gamma} + \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I,$$

$$\begin{aligned}
P_{nm} &= \int_{S^0} A_{n1}(x, t) A_{m+11}^T(x, t) dx dt + \int_{S^\Gamma} A_{n2}(x, t) A_{m+12}^T(x, t) dx dt \\
&= \int_{-T_0}^0 \left(\sum_{k \in K} \int_{a_k}^{b_k} A_{n1}(x, t) A_{m+11}^T(x, t) dx \right) dt \\
&\quad + \int_0^T \left(\int_C^{c_{first}} A_{n2}(x, t) A_{m+12}^T(x, t) dx + \sum_{e \in E \setminus last} \int_{d_e}^{c_{e+1}} A_{n2}(x, t) A_{m+12}^T(x, t) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{d_{last}}^D A_{n2}(x, t) A_{m+12}^T(x, t) dx \right) dt \quad (n = \overline{2, 3}, m = \overline{1, 2}).
\end{aligned}$$

$$\text{Тоді: } P_{21} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{L_\Gamma R_\Gamma}, \quad P_{22} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{(\sum_{i=1}^I J_i)I} L_\Gamma R_\Gamma,$$

$$P_{31} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{L_\Gamma R_\Gamma} \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I, \quad P_{32} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{(\sum_{i=1}^I J_i)I} \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I.$$

$$\begin{aligned}
A_{v_0} &= \int_{S^0} A_{21}(x, t) v_0(x, t) dx dt + \int_{S^\Gamma} A_{22}(x, t) v_\Gamma(x, t) dx dt \\
&= \int_{-T_0}^0 \left(\sum_{k \in K} \int_{a_k}^{b_k} A_{21}(x, t) v_0(x, t) dx \right) dt \\
&\quad + \int_0^T \left(\int_C^{c_{first}} A_{22}(x, t) v_\Gamma(x, t) dx + \sum_{e \in E \setminus last} \int_{d_e}^{c_{e+1}} A_{22}(x, t) v_\Gamma(x, t) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{d_{last}}^D A_{22}(x, t) v_\Gamma(x, t) dx \right) dt = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix}}_1 L_\Gamma R_\Gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{v_\Gamma} &= \int_{S^0} A_{31}(x, t) v_0(x, t) dx dt + \int_{S^\Gamma} A_{32}(x, t) v_\Gamma(x, t) dx dt \\
&= \int_{-T_0}^0 \left(\sum_{k \in K} \int_{a_k}^{b_k} A_{31}(x, t) v_0(x, t) dx \right) dt \\
&\quad + \int_0^T \left(\int_C^{c_{first}} A_{32}(x, t) v_\Gamma(x, t) dx + \sum_{e \in E \setminus last} \int_{d_e}^{c_{e+1}} A_{32}(x, t) v_\Gamma(x, t) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{d_{last}}^D A_{32}(x, t) v_\Gamma(x, t) dx \right) dt = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix}}_1 \left(\sum_{i=1}^I J_i \right) I.
\end{aligned}$$

Точність з якою функція $y(x, t)$ стану нашої системи задовольняє початково – крайові умови:

$$\varepsilon^2 = \min_{u_0(x,t), u_\Gamma(x,t)} \Phi_1 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P P^+ \bar{Y}.$$