Ex 4 – EXPLICAȚII

(1) $x = [x_0, x_1, \dots x_{N-1}]$

$y = [x_{(0-d) \bmod N}, x_{(1-d) \bmod N}, \dots x_{(N-1-d) \bmod N}] = shift(x,d)$

$\downarrow$

deplasare circulară a lui x cu d poziții (spre dreapta)

Pb: $\boxed{\text{Am } x, \text{ am } y. \text{ Vreau să aflu cine a fost } d.}$

Idee: Dacă aș putea calcula corelație dintre y și toate deplasările posibile ale lui x,

corelația maximă ar fi între y și shift(x,d) = y (sunt maxim corelat cu mine însumi)

și l-aș afla pe d.

THM DE DEPLASARE CIRCULARĂ:

corelație circulară $\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} shift(x,0) \\ shift(x,1) \\ shift(x,d) \\ \vdots \\ shift(x,N-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \| \\ shift(x,d) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} corr(x,y) \\ \vdots \\ corr(shift(x,d),y) \\ \vdots \\ corr(shift(x,N-1),y) \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longrightarrow \text{MAXIM.} \\ \\ \longrightarrow corr \end{matrix}$$

vector coloană.

$\forall$ Corelație circulară dintre x și y $\Leftrightarrow$ $iFFT(\overline{FFT(x)} \cdot FFT(y))$

$$d = \arg\max_n \left(iFFT(\overline{FFT(x)} \cdot FFT(y)) \right)$$

Demonstrație: $\longrightarrow$

- DFT pt x: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi j \cdot \frac{k \cdot n}{N}}$

$k \downarrow$ indicele de frecvență, $k = \overline{0, N-1}$

- $y[n] = x[(n-d) \bmod N]$

- DFT pt y: $Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-2\pi j \frac{k \cdot n}{N}}$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[(n-d) \bmod N] \, e^{-2\pi j \frac{k \cdot n}{N}}$$

Fie $m = (n-d) \bmod N$ $\qquad m = (5-3) \bmod 20$

$\Rightarrow n = (m+d) \bmod N$ $\qquad 5 = (2+3) \bmod 20$

$\boxed{\text{Obs: } n = \overline{0, N-1} \rightarrow m = \overline{0, N-1}, \text{ dar le parcurge în altă ordine circulară}}$

$$\Rightarrow Y[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-2\pi j \frac{k(m+d)}{N}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot e^{-2\pi j \frac{km}{N}} \cdot e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}}$$

$$= e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}} \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-2\pi j \frac{km}{N}}}_{= DFT(x)[k]}$$

$$= e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}} \cdot DFT(x)[k] =$$

$$= e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}} \cdot X[k]$$

Deci $\overline{X[k]} \cdot Y[k] = \overline{X[k]} \cdot e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}} \cdot X[k] =$

$$= |X[k]|^2 e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}}$$

$$\Rightarrow \quad corr[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \overline{X[k]} \cdot Y[k] \right\} =$$

indice elem din vectorul coloană al corelațiilor dintre shiftările lui X și Y

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{ |X[k]|^2 \cdot e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}} \right\}$$

$$\stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(|X[k]|^2 \cdot e^{-2\pi j \frac{kd}{N}} \right) \cdot e^{2\pi j \frac{k \cdot n}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{2\pi j k \frac{(n-d)}{N}}$$

Thm Wiener-Khinchin

$$// \boxed{R_{xx}[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{ |X[k]|^2 \right\}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \cdot e^{2\pi j k \frac{n}{N}}$$

autocorelația circulară a lui x → ~~măsoară corel. dintre shift(x, n) și x~~

$$\Rightarrow \quad = R_{xx}[(n-d) \bmod N]$$

autocorelație circulară a lui x cu el însuși la decalajul n−d

//MAXIM doar dacă $n-d=0$ ⇔ x neshiftat corelat cu x

$\Rightarrow$ $corr[n]$ e maximul posibil din vectorul corr când $n=d$

$$\Rightarrow \operatorname*{argmax}_n \mathcal{F}^{-1}\left\{ \overline{X[k]} \cdot Y[k] \right\} \text{ îmi dă } d$$

② De ce pot recupera d și cu $\arg\max\left(\text{IFFT}\left(\text{FFT}(Y)/\text{FFT}(X)\right)\right)$?

→ Am dem că dacă $y[n] = x[(n-d) \bmod \cancel{N}]$

$$\Rightarrow Y[k] = X[k]\, e^{-2\pi j \frac{kd}{N}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{FFT}(Y)}{\text{FFT}(X)} = \frac{Y[k]}{X[k]} = \frac{X[\cancel{k}]\, e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}}}{\cancel{X[k]}} = e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}}$$

// Raportul Y/X anulează total semnalul x și ne lasă doar fazorul deplasării d

Fie $\delta[n] = [1\ \underbrace{0\ 0\ \dots\ 0}_{19}]$ = impuls Dirac idealizat pe poz. $n=0$
$N = 20$

$$\Rightarrow \delta[(n-d) \bmod N] = [0\ \dots\ \underset{d}{1}\ \dots\ 0]$$

Imgen:
$$\boxed{X[k] = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi j \frac{k \cdot n}{N}}}$$

$$\Rightarrow \Delta[k] = \mathcal{F}\{\delta[(n-d) \bmod N]\} = 0 \cdot e^{-2\pi j \frac{k \cdot 0}{N}} + \dots + 1 \cdot e^{-2\pi j \frac{k \cdot d}{N}} + \dots + 0$$

$$= e^{-2\pi j \frac{kd}{N}}$$ = DFT-ul unui impuls Dirac idealizat pe poz $n=d$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\Delta[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi j \frac{kd}{N}} \cdot e^{2\pi j \frac{k \cdot n}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi j k \left(\frac{n-d}{N}\right)} = \begin{cases} 1, & n = d \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

~~Deci IFFT dă 1 doar când~~

// IFFT(FFT(Dirac deplasat cu d poziții)) = Dirac deplasat cu d poziții

$$\Rightarrow \arg\max(\text{IFFT}(\text{FFT}(\delta))) = d$$