Procesarea Semnalelor

Laboratorul 3.

Transformata Fourier - Partea I

1 Noțiuni introductive

Un semnal este adesea alcătuit din mai multe componente de frecvență. Unele pot fi caracteristice pentru fenomenul care stă la baza semnalului, altele se pot datora prezenței zgomotului. Transformata Fourier oferă o măsură a energiei unei anume frecvențe într-un semnal. Din acest motiv este utilă în identificarea componentelor de frecvență.

Identificarea presupune întâi calculul transformatei Fourier pentru o plajă de frecvențe, apoi inspectarea modulul tranformatei pentru fiecare dintre acestea: dacă modulul transformatei e semnificativ mai mare decât 0 înseamnă că respectiva frecvență este prezentă în semnal.

Reamintim, transformata Fourier a unui semnal discret $x[n]$ se definește $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi j n \omega / N}. \tag{1}$$

Scopul acestui laborator este să vizualizați mărimea calculată de transformata Fourier. Vom lucra cu un semnal sinusoidal ce are o singură frecvență caracteristică, scopul fiind identificarea acesteia. Vom analiza pe rând componentele expresiei (1).

1.1 Cercul unitate în planul complex

Componenta exponențială, $e^{-2\pi j n}$, corespunde unui cerc de rază unitară în planul complex, ce este parcurs într-o unitate de timp ($n = 0, \ldots, 1$). Adăugând semnalul $x[n]$, deci obținând $x[n]e^{-2\pi j n}$, înfășurarea pe cercul unitate de mai sus este „deformată“ de amplitudinea semnalului. Figura 1 reprezentă un semnal sinusoidal de frecvență $f = 5$Hz, eșantionat la $f_s = 10$Hz (*stânga*), împreună cu reprezentarea $y[n] = x[n]e^{-2\pi j n}$ pe cercul unitate (*dreapta*). Cu roșu este marcată corespondența dintre amplitudinea semnalului la un anumit moment de timp (aici eșantionul este al 620-lea din 1000) și distanța de la originea cercului unitate la punctul $[n, x[n]]$.

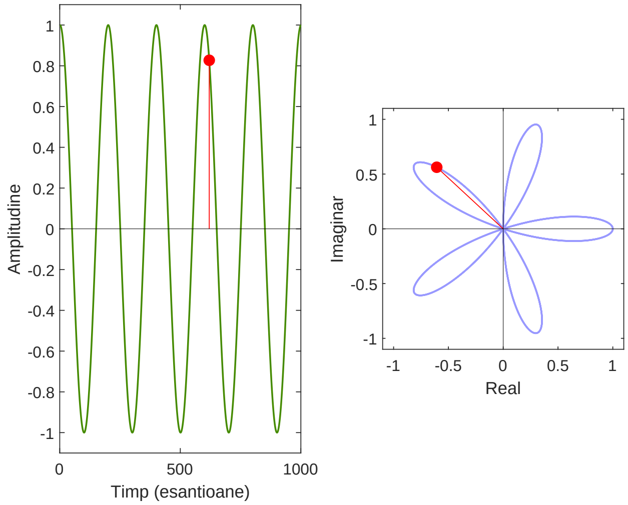

Figura 1: Reprezentarea unui semnal în planul complex

1.2 Frecvența de înfășurare

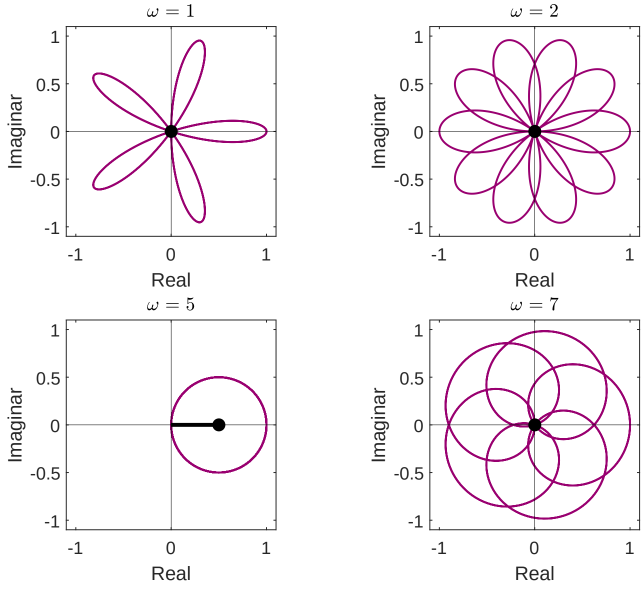

Figura 2: Reprezentarea transformatei Fourier în planul complex

Transformata Fourier depinde de frecvența ω. Aceasta (în $e^{-2\pi j\omega n}$) determină viteza cu care cercul unitate este parcurs și se numește și frecvență de înfășurare. O frecvență $\omega = 10\text{Hz}$ corespunde unui număr de 10 înfășurări ale cercului unitate într-o secundă. Relația dintre această frecvență și frecvența semnalului determina forma înfășurării. Figura 2 reprezintă funcția $z[\omega] = x[n]e^{-2\pi j\omega n}$ pentru valorile $\omega \in \{1\text{Hz}, 2\text{Hz}, 5\text{Hz}, 7\text{Hz}\}$.

1.3 Energia unei componente de frecvență a unui semnal

Coeficienții transformatei Fourier semnalează prezența unei anumite componente de frecvență într-un semnal. Dacă respectiva frecvență este conținută în semnal, modulul transformatei Fourier va fi semnificativ diferit de 0, altfel valoarea sa va fi apropiată de 0.

Fie semnalul

$$x[n] = \cos(2\pi f_1 n t_s) + 2\cos(2\pi f_2 n t_s) + 0.5\cos(2\pi f_3 n t_s),$$

unde $f_1 = 5\text{Hz}$, $f_2 = 20\text{Hz}$, $f_3 = 75\text{Hz}$.

Figura 3 arată semnalul $x(n)$ (*stânga*) valorile coeficienților transformatei Fourier aplicate semnalului pentru plaja de frecvențe $\omega \in [1\text{Hz}, \ldots, 100\text{Hz}]$ (*dreapta*). Se observă cum modulul transformatei este diferit de 0 doar pentru $\omega = f_1$, pentru $\omega = f_2$ și pentru $\omega = f_3$.

2 Ghid Python

Pentru acest laborator veți avea nevoie de modulul `math`.

În Python se folosește convenția din fizică; unitatea imaginară este notată cu j, nu cu i. Un exemplu de sintaxă este `math.e**(1j*5)`.

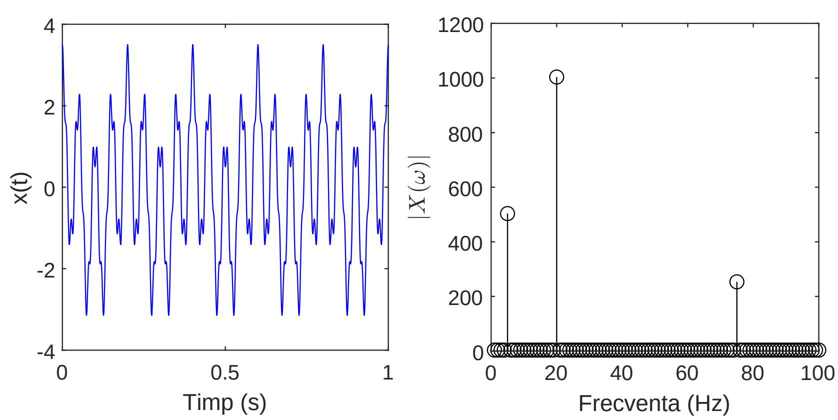

Figura 3: Transformata Fourier pentru un semnal cu 3 componente de frecvență

Pentru a obține partea reală, respectiv imaginară a unui număr complex `x` utlizați `x.real` și `x.imag`.

3 Exerciții

În cadrul exercițiilor de astăzi veți calcula „de mână“ transformata Fourier pentru un semnal sinusoidal (**fără** a folosi funcțiile `numpy.fft` sau `scipy.fft`, ci implementând relația (1) prima dată cu cicluri repetitive explicite și apoi cu matricea Fourier și produs matrice-vector).

1. Pentru $N = 8$ creați matricea Fourier. Desenați pe subplot-uri diferite pentru fiecare linie partea reală și partea imaginară. Verificați că matricea Fourier $\mathbf{F}$ este unitară (complexă și ortogonală, adică $\mathbf{F}^H\mathbf{F}$ este un multiplu al matricei identitate). Folosiți funcțiile *numpy.allclose* sau *numpy.linalg.norm* pentru a verifica unitaritatea.

2. Realizați graficele din Figura 1 și Figura 2 din acest îndrumar pentru un semnal sinusoidal cu o frecvență aleasă de voi, alta decât cea utilizată aici.

   Reamintim că graficul din dreapta din Figura 1 reprezintă înfășurarea semnalului pe cercul unitate, anume reprezentarea în planul complex a $y[n] = x[n]e^{-2\pi jn}$ pentru $n = 0, \dots, 1$.

   De asemeana, Figura 2 arată influența diferitelor frecvențe de înfășurare asupra formei pe care o are această reprezentare.
   Se va afișa grafic $z[\omega] = x[n]e^{-2\pi j\omega n}$, pentru patru valori diferite ale ω, dintre care una egală cu frecvența semnalului.

   Realizați graficele din Figurile 1 și 2 din acest îndrumar astfel încât culoarea graficului să fie o funcție de distanța de la origine. Pe lângă versiunea statică (desen fix final) realizați o versiunea a graficelor care desenează figurile animat în timp real (cu o viteză fixată de voi) și notați punctul actual care este desenat cu un indicator separat. În felul acesta puteți observa direct cum sunt desenate graficele (ordinea punctelor, sensul pe cerc, etc.).

3. Afișați modulul transformatei Fourier (folosind relația (1)) pentru un semnal compus de voi, având cel puțin trei componente de frecvență (obțineți un grafic asemănător Figurii 3).

   Ajustați frecvențele de înfășurare ω utilizate în transformata Fourier în funcție de frecvența caracteristică a sinusoidei.

Pentru toate exercițiile salvați toate graficele afișate în format pdf.