Curs 4

Cuprins

1 Logica Horn

2 Rezoluție SLD

Bibliografie:

- Logic Programming, The University of Edinburgh
  https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/lp/
- J.W.Lloyd, Foundations of Logic Programming, 1987

Rezoluția SLD pentru clauze propoziționale definite

Fie S o mulțime de clauze definite.

$$\text{SLD} \quad \boxed{\frac{\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg q \vee \cdots \vee \neg p_n}{\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_m \vee \cdots \vee \neg p_n}}$$

unde $q \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_m$ este o clauză definită din S.

O derivare din S prin rezoluție SLD pentru o întrebare q este o secvență

$$G_0 := \neg q, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_k, \ldots$$

în care G_{i+1} se obține din G_i prin regula SLD.

Dacă există un k cu $G_k = \square$ (clauza vidă), atunci derivarea se numește SLD-respingere.

Rezoluția SLD pentru clauze propoziționale definite

Fie S o mulțime de clauze definite.

$$\text{SLD} \quad \boxed{\frac{\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg q \vee \cdots \vee \neg p_n}{\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_m \vee \cdots \vee \neg p_n}}$$

unde $q \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_m$ este o clauză definită din S.

Exercițiu: Găsiți o SLD-respingere pentru următorul program Prolog:

```
1.  r :- p,q.      5.  t.
2.  s :- p,q.      6.  q.
3.  v :- t,u.      7.  u.
4.  w :- v,s.      8.  p.
```

și ținta

```
?- w.
```

Logica de ordinul I - sintaxa

Limbaj de ordinul I $\mathcal{L}$

- unic determinat de $\tau = (\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, ari)$

Termenii lui $\mathcal{L}$, notați $Trm_{\mathcal{L}}$, sunt definiți inductiv astfel:

- orice variabilă este un termen;
- orice simbol de constantă este un termen;
- dacă $f \in \mathbf{F}$, $ar(f) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- dacă $R \in \mathbf{R}$, $ar(R) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $R(t_1, \ldots, t_n)$ este formulă atomică.

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- orice formulă atomică este o formulă
- dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă
- dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ sunt formule
- dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ sunt formule

Algoritmul de unificare - schemă

	Lista soluție S	Lista de rezolvat R
Inițial	$\emptyset$	$t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n$
SCOATE	S	R', $t \doteq t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	R', $f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(t'_1, \ldots, t'_n)$
	S	R', $t_1 \doteq t'_1, \ldots t_n \doteq t'_n$
REZOLVĂ	S	R', $x \doteq t$ sau $t \doteq x$, x nu apare în t
	$x \doteq t$, $S[x/t]$	$R'[x/t]$
Final	S	$\emptyset$

$S[x/t]$: în toate ecuațiile din S, x este înlocuit cu t

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
$\emptyset$	$g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z),\ h(g(y)) \doteq w,\ y \doteq z$	REZOLVĂ
$w \doteq h(g(y))$, $x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z),\ y \doteq z$	REZOLVĂ
$y \doteq z, x \doteq g(z)$, $w \doteq h(g(z))$	$g(z) \doteq g(z)$	SCOATE
$y \doteq z, x \doteq g(z)$, $w \doteq h(g(z))$	$\emptyset$	

- $\sigma = \{y \mapsto z,\ x \mapsto g(z),\ w \mapsto h(g(z))\}$ este cgu.

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x,\ f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)\}$ au cgu?

S	R	
$\emptyset$	$g(y) \doteq x,\ f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z),\ h(y) \doteq b,\ y \doteq z$	- EȘEC -

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x,\ f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)\}$ au cgu?

S	R	
$\emptyset$	$g(y) \doteq x,\ f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z),\ h(y) \doteq b,\ y \doteq z$	- EȘEC -

- h și b sunt simboluri de operații diferite!
- Nu există unificator pentru acesti termeni.

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)\}$ au cgu?

S	R	
$\emptyset$	$g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(y, w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq y,\ h(g(y)) \doteq w,\ y \doteq z$	- EȘEC -

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)\}$ au cgu?

S	R	
$\emptyset$	$g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(y, w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq y,\ h(g(y)) \doteq w,\ y \doteq z$	- EȘEC -

- În ecuația $g(y) \doteq y$, variabila y apare în termenul $g(y)$.
- Nu există unificator pentru aceste ecuații.

Logica Horn

Literali

- În calculul propozițional un literal este o variabilă sau negația unei variabile.

$$literal := \ p \mid \neg p \qquad \text{unde } p \text{ este variabilă propozițională}$$

- În logica de ordinul I un literal este o formulă atomică sau negația unei formule atomice.

$$literal := \ P(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg P(t_1, \ldots, t_n)$$

unde $P \in \mathbf{R}, ari(P) = n$, și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni.

Clauze

- O clauză este o disjuncție de literali.
- Dacă $L_1, \ldots, L_n$ sunt literali atunci clauza $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ o vom scrie ca mulțimea $\{L_1, \ldots, L_n\}$

  clauză = mulțime de literali

- Clauza $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ este satisfiabilă dacă $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ este satisfiabilă.
- O clauză C este trivială dacă conține un literal și complementul lui.
- Când $n = 0$ obținem clauza vidă, care se notează $\square$
- Prin definiție, clauza $\square$ nu este satisfiabilă.

Rezoluția este o metodă de verificare a satisfiabilității unei mulțimi de clauze.

Clauze în logica de ordinul I

$$\{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_n, P_1, \ldots, P_k\}$$

unde $n, k \geq 0$ și $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_k$ sunt formule atomice.

- formula corespunzătoare este

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m (\neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_n \vee P_1 \vee \ldots \vee P_k)$$

  unde $x_1, \ldots, x_m$ sunt toate variabilele care apar în clauză

- echivalent, putem scrie

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m (Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P_1 \vee \ldots \vee P_k)$$

- cuantificarea universală a clauzelor este implicită

$$Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P_1 \vee \ldots \vee P_k$$

Clauze definite. Programe logice. Clauze Horn

- clauză:

$$\{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_n, P_1, \ldots, P_k\} \quad \text{sau} \quad Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to P_1 \vee \ldots \vee P_k$$

  unde $n, k \geq 0$ și $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_k$ sunt formule atomice.

- clauză program definită: $k = 1$
  - cazul $n > 0$: $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to P$
  - cazul $n = 0$: $\top \to P$ (clauză unitate, fapt)

  Program logic definit = mulțime finită de clauze definite

- scop definit (țintă, întrebare): k=0
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to \bot$

- clauza vidă $\square$: $n = k = 0$

Clauze definite. Programe logice. Clauze Horn

- clauză:

$$\{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_n, P_1, \ldots, P_k\} \quad \text{sau} \quad Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to P_1 \vee \ldots \vee P_k$$

  unde $n, k \geq 0$ și $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_k$ sunt formule atomice.

- clauză program definită: $k = 1$
  - cazul $n > 0$: $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to P$
  - cazul $n = 0$: $\top \to P$ (clauză unitate, fapt)

  Program logic definit = mulțime finită de clauze definite

- scop definit (țintă, întrebare): k=0
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to \bot$

- clauza vidă $\square$: $n = k = 0$

Clauza Horn = clauză program definită sau clauză scop ($k \leq 1$)

Clauze Horn țintă

- scop definit (țintă, întrebare): $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow \bot$
  - fie $x_1, \ldots, x_m$ toate variabilele care apar în $Q_1, \ldots, Q_n$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m (\neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_n) \boxminus \neg \exists x_1 \ldots \exists x_m (Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n)$$

  - clauza țintă o vom scrie $Q_1, \ldots, Q_n$

Negația unei "întrebări" în PROLOG este clauză Horn țintă.

Programare logica

- Logica clauzelor definite/Logica Horn: un fragment al logicii de ordinul I în care singurele formule admise sunt clauze Horn
  - formule atomice: $P(t_1, \ldots, t_n)$
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \to P$
    unde toate Q_i, P sunt formule atomice, $\top$ sau $\bot$

- Problema programării logice: reprezentăm cunoștințele ca o mulțime de clauze definite KB și suntem interesați să aflăm răspunsul la o întrebare de forma $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$, unde toate Q_i sunt formule atomice

$$KB \models Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$$

  - Variabilele din KB sunt cuantificate universal.
  - Variabilele din $Q_1, \ldots, Q_n$ sunt cuantificate existențial.

Limbajul PROLOG are la bază logica clauzelor Horn.

Programare logica

Exemplu

Fie următoarele clauze definite:

$$
\begin{array}{l}
father(jon, ken). \\
father(ken, liz). \\
father(X, Y) \to ancestor(X, Y) \\
daugther(X, Y) \to ancestor(Y, X) \\
ancestor(X, Y) \land ancestor(Y, Z) \to ancestor(X, Z)
\end{array}
$$

Putem întreba:

- $ancestor(jon, liz)$
- dacă există Q astfel încât $ancestor(Q, ken)$ (adică $\exists Q\, ancestor(Q, ken)$)

Rezoluție SLD

Rezoluția SLD

Fie KB o mulțime de clauze definite.

$$\text{SLD} \quad \boxed{\frac{\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_i \vee \cdots \vee \neg Q_n}{\theta(\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m \vee \cdots \vee \neg Q_n)}}$$

unde

- $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ este o clauză definită din KB (în care toate variabilele au fost redenumite) și
- variabilele din $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ și Q_i se redenumesc
- θ este c.g.u pentru Q_i și Q

Rezoluția SLD

Exemplu

```
father(eddard,sansa).
father(eddard,jonSnow).

stark(eddard).
stark(catelyn).

stark(X) :- father(Y,X),
stark(Y).
```

```
?- stark(jonSnow)
```

SLD $\boxed{\dfrac{\neg Q_1 \lor \cdots \lor \neg Q_i \lor \cdots \lor \neg Q_n}{\theta(\neg Q_1 \lor \cdots \lor \neg P_1 \lor \cdots \lor \neg P_m \lor \cdots \lor \neg Q_n)}}$

- $Q \lor \neg P_1 \lor \cdots \lor \neg P_m$ este o clauză definită din KB
- variabilele din $Q \lor \neg P_1 \lor \cdots \lor \neg P_m$ și Q_i se redenumesc
- θ este c.g.u pentru Q_i și Q.

Rezoluția SLD

Exemplu

$father(eddard, sansa)$
$father(eddard, jonSnow)$

$stark(eddard)$
$stark(catelyn)$

$stark(X) \vee \neg father(Y, X) \vee \neg stark(Y)$

$$\frac{\neg stark(jonSnow)}{}$$

$\theta(X) = jonSnow$

$$\text{SLD} \quad \boxed{\frac{\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_i \vee \cdots \vee \neg Q_n}{\theta(\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m \vee \cdots \vee \neg Q_n)}}$$

- $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ este o clauză definită din KB
- variabilele din $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ și Q_i se redenumesc
- θ este c.g.u pentru Q_i și Q.

Rezoluția SLD

Exemplu

$father(eddard, sansa)$
$father(eddard, jonSnow)$

$stark(eddard)$
$stark(catelyn)$

$stark(X) \vee \neg father(Y, X) \vee \neg stark(Y)$

$$\frac{\neg stark(jonSnow)}{\neg father(Y, jonSnow) \vee \neg stark(Y)}$$

$$\theta(X) = jonSnow$$

SLD $\boxed{\dfrac{\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_i \vee \cdots \vee \neg Q_n}{\theta(\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m \vee \cdots \vee \neg Q_n)}}$

- $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ este o clauză definită din KB
- variabilele din $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ și Q_i se redenumesc
- θ este c.g.u pentru Q_i și Q.

Rezoluția SLD

Exemplu

$father(eddard, sansa)$
$father(eddard, jonSnow)$
$stark(eddard)$
$stark(catelyn)$
$stark(X) \vee \neg father(Y, X) \vee \neg stark(Y)$

$$\frac{\neg stark(jonSnow)}{\neg father(Y, jonSnow) \vee \neg stark(Y)}$$

Rezoluția SLD

Exemplu

$father(eddard, sansa)$
$father(eddard, jonSnow)$
$stark(eddard)$
$stark(catelyn)$
$stark(X) \vee \neg father(Y, X) \vee \neg stark(Y)$

$$\frac{\neg stark(jonSnow)}{\neg father(Y, jonSnow) \vee \neg stark(Y)}$$

$$\frac{\neg father(Y, jonSnow) \vee \neg stark(Y)}{\neg stark(eddard)}$$

Rezoluția SLD

Exemplu

$father(eddard, sansa)$
$father(eddard, jonSnow)$
$stark(eddard)$
$stark(catelyn)$
$stark(X) \vee \neg father(Y, X) \vee \neg stark(Y)$

$$\frac{\neg stark(jonSnow)}{\neg father(Y, jonSnow) \vee \neg stark(Y)}$$

$$\frac{\neg father(Y, jonSnow) \vee \neg stark(Y)}{\neg stark(eddard)}$$

$$\frac{\neg stark(eddard)}{\square}$$

Rezoluția SLD

Fie KB o mulțime de clauze definite și $Q_1 \land \ldots \land Q_m$ o întrebare, unde Q_i sunt formule atomice.

- O derivare din KB prin rezoluție SLD este o secvență

$$G_0 := \neg Q_1 \lor \ldots \lor \neg Q_m, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_k, \ldots$$

  în care G_{i+1} se obține din G_i prin regula SLD.
- Dacă există un k cu $G_k = \square$ (clauza vidă), atunci derivarea se numește SLD-respingere.

Rezoluția SLD

Teoremă (Completitudinea SLD-rezoluției)

Sunt echivalente:

- *există o SLD-respingere a lui $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m$ din KB,*
- $KB \vdash_b Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m$,
- $KB \models Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_m$.

Rezoluția SLD - arbori de căutare

Arbori SLD

- Presupunem că avem o mulțime de clauze definite KB și o țintă $G_0 = \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m$
- Construim un arbore de căutare (arbore SLD) astfel:
  - Fiecare nod al arborelui este o țintă (posibil vidă)
  - Rădăcina este G_0
  - Dacă arborele are un nod G_i, iar G_{i+1} se obține din G_i folosind regula SLD folosind o clauză $C_i \in KB$, atunci nodul G_i are copilul G_{i+1}. Muchia dintre G_i și G_{i+1} este etichetată cu C_i.
- Dacă un arbore SLD cu rădăcina G_0 are o frunză $\square$ (clauza vidă), atunci există o SLD-respingere a lui G_0 din KB.

Rezoluția SLD

Exemplu

- Fie KB următoarea mulțime de clauze definite:
  1. $grandfather(X, Z) :- father(X, Y), parent(Y, Z)$
  2. $parent(X, Y) :- father(X, Y)$
  3. $parent(X, Y) :- mother(X, Y)$
  4. $father(ken, diana)$
  5. $mother(diana, brian)$

- Găsiți o respingere din KB pentru

$$:- grandfather(ken, Y)$$

Rezoluția SLD

Exemplu

- Fie KB următoarea mulțime de clauze definite:
  1. $grandfather(X, Z) \vee \neg father(X, Y) \vee \neg parent(Y, Z)$
  2. $parent(X, Y) \vee \neg father(X, Y)$
  3. $parent(X, Y) \vee \neg mother(X, Y)$
  4. $father(ken, diana)$
  5. $mother(diana, brian)$

- Găsiți o respingere din KB pentru

$$\neg grandfather(ken, Y)$$

Rezoluția SLD

Exemplu

1. $grandfather(X, Z) \lor \neg father(X, Y) \lor \neg parent(Y, Z)$
2. $parent(X, Y) \lor \neg father(X, Y)$
3. $parent(X, Y) \lor \neg mother(X, Y)$
4. $father(ken, diana)$
5. $mother(diana, brian)$

$$\neg grandfather(ken, Y)$$

$$\downarrow 1$$

$$\neg father(ken, V) \lor \neg parent(V, Y)$$

$$\downarrow 4$$

$$\neg parent(diana, Y)$$

$$\swarrow 2 \qquad\qquad \searrow 3$$

$$\neg father(diana, Y) \qquad\qquad \neg mother(diana, Y)$$

$$\downarrow 5$$

$$\square$$

Rezoluția SLD

Exemplu

2. $parent(X, Y) \lor \neg father(X, Y)$

$$\neg parent(diana, Y) \xrightarrow{2} \neg father(diana, Y)$$

Aplicarea SLD:

Rezoluția SLD

Exemplu

2. $parent(X, Y) \vee \neg father(X, Y)$

$$\neg parent(diana, Y) \xrightarrow{2} \neg father(diana, Y)$$

Aplicarea SLD:

- redenumesc variabilele: $parent(X, Y_2) \vee \neg father(X, Y_2)$
- determin unificatorul: $\theta = X/diana, Y_2/Y$
- aplic regula: $\dfrac{\neg parent(diana, Y)}{\neg father(diana, Y)}$

Rezoluția SLD - arbori de căutare

Exercițiu

Desenați arborele SLD pentru programul Prolog de mai jos și ținta
`?- p(X,X).`

```
1. p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2. p(X,X) :- s(X).
3. q(X,b).
4. q(b,a).
5. q(X,a) :- r(a,X).
6. r(b,a).
7. s(X) :- t(X,a).
8. s(X) :- t(X,b).
9. s(X) :- t(X,X).
10. t(a,b).
11. t(b,a).
```

Rezoluția SLD - arbori de căutare

```
1.  p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2.  p(X,X) :- s(X).
3.  q(X,b).
4.  q(b,a).
5.  q(X,a) :- r(a,X).
6.  r(b,a).
7.  s(X) :- t(X,a).
8.  s(X) :- t(X,b).
9.  s(X) :- t(X,X).
10. t(a,b).
11. t(b,a).
```

$p(X, Y) \vee \neg q(X, Z) \vee \neg r(Z, Y)$
$p(X, X) \vee \neg s(X)$
$q(X, b)$

$q(b, a)$
$q(X, a) \vee \neg r(a, X)$
$r(b, a)$

$s(X) \vee \neg t(X, a)$
$s(X) \vee \neg t(X, b)$
$s(X) \vee \neg t(X, X)$

$t(a, b)$
$t(b, a)$