

Вершинная 3-раскрашиваемость графа

Дмитрий Камальдинов

1 Введение

Целью данного проекта является имплементация алгоритмов проверки 3-раскрашиваемости графов.

Определение 1. *Правильной раскраской* графа $G = G(V, E)$ в k цветов называется такое разбиение $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_k$ множества его вершин на k подмножеств, что $\forall e \in V_i \times V_j : e \notin E \quad (i \neq j)$.

Определение 2. Граф называется k -раскрашиваемым, если для него существует правильная раскраска в k цветов.

Определение 3. Пусть имеются множество V из n объектов и множество C из k цветов. Множество цветов, в которые может быть раскрашен объект $v \in V$ обозначим через $c(v)$. Также имеется множество ограничений $W \subset 2^{(V \times C)}$. Задача удовлетворения ограничений (CSP, constraint satisfaction problem) заключается в отыскании такой раскраски $\alpha : V \rightarrow C$, что

- $\forall v \in V \alpha(v) \in c(v)$
- $\forall w \in W \exists (v, c) \in w : \alpha(v) \neq c$.

Определение 4. (n, m) -CSP — такая задача CSP, что

- $|C| = n$
- $\forall w \in W : |w| = m$

Лемма 1. Задача k -раскрашиваемости сводится к $(k, 2)$ -CSP.

Доказательство. Обозначим данный граф через G . Следующая задача CSP эквивалентна задаче k -раскрашиваемости G :

- $V = G(V)$
- $C = \{1, \dots, k\}$
- $c(v) = C$
- $W = \{\{(v, c), (u, c)\} | \{v, u\} \in E(G), c \in C\}$

□

2 Описание алгоритма решения (3,2)-CSP

Определим *порядок* задачи CSP как мощность множества объектов. Объекты будут также называться *вершинами*.

Лемма 2. Если в задаче $(3, 2)$ -CSP порядка n существует объект, который может быть покрашен в не более, чем 2 цвета, то эта задача эквивалентна некоторой порядка $n - 1$.

Доказательство. Обозначим этот объект через v . Рассмотрим 3 случая.

1. $|c(v)| = 0$. Тогда правильной раскраски не существует, то есть задача уже решена.
2. $|c(v)| = 1$. Обозначим единственный доступный цвет v через c . Тогда если задача имеет решение, то v обязана быть покрашенной в c . Значит, для каждого ограничения $\{(v, c), (u, \hat{c})\}$, у вершины u можно запретить цвет \hat{c} , после чего удалить вершину v . Полученная задача эквивалентна исходной с учетом уже выбранного цвета для v , а её порядок на 1 меньше.
3. $|c(v)| = 2$. Обозначим через c_1, c_2 доступные цвета для v . $C_i := \{(u, c) | \{(v, c_i), (u, c)\} \in W\}$. Добавим ограничения $\{(u, c), (w, \hat{c})\} \quad \forall (u, c) \in C_1, (w, \hat{c}) \in C_2$ и удалим вершину v . Тогда полученная задача эквивалентна исходной. Действительно, пусть α — решение (раскраска) исходной задачи. Не умаляя общности, предположим, $\alpha(v) = c_1 \implies \forall (u, c) \in C_1 : \alpha(u) \neq c$, следовательно, все новые ограничения также будут удовлетворены. Тогда $\alpha|_{V \setminus \{v\}}$ — решение новой. Напротив, пусть β — решение новой задачи. Покрасим $V \setminus \{v\}$ с помощью β . Предположим противное: невозможно покрасить v в один из цветов c_1, c_2 так, чтобы получилась правильная раскраска вершин исходной задачи. Тогда существуют такие (u, c) и (w, \hat{c}) , что $\{(u, c), (v, c_1)\} \in W$, $\{(w, \hat{c}), (v, c_2)\} \in W$, и $\beta(u) = c$, $\beta(w) = \hat{c}$. Но тогда $(u, c) \in C_1$ и $(w, \hat{c}) \in C_2$, и одно из добавленных ограничений не удовлетворено.

□

Лемма 3. Дана задача $(3,2)$ -CSP порядка n , имеющая решение. Предположим, существуют два таких объекта v и u , что $|c(v)| = |c(u)| = 3$ и $\exists c_v, c_u : \{(v, c_v), (u, c_u)\} \in W$. Тогда эта задача эквивалентна некоторой порядка $n - 2$.

Доказательство. Изменим исходную задачу четырьмя способами: в каждом сохраним все ограничения, но оставим для v и u только по 2 возможных цвета:

1. $c(v) = \{c_v, c_v + 1\}; \quad c(u) = \{c_u + 1, c_u + 2\}$
2. $c(v) = \{c_v, c_v + 2\}; \quad c(u) = \{c_u + 1, c_u + 2\}$
3. $c(v) = \{c_v + 1, c_v + 2\}; \quad c(u) = \{c_u, c_u + 1\}$
4. $c(v) = \{c_v + 1, c_v + 2\}; \quad c(u) = \{c_u, c_u + 2\}$ (везде сложение по модулю 3)

Пусть одна из этих задач имеет решение β . Тогда β также есть решение исходной задачи, так как в каждом случае невозможно покрасить v и u одновременно в c_v и c_u . Напротив, пусть α — решение исходной задачи, и $\alpha(v) = \hat{c}_v, \alpha(u) = \hat{c}_u$, где $(\hat{c}_v, \hat{c}_u) \neq (c_v, c_u)$. Несложным перебором можно убедиться, что в **двух(!)** из изменённых задач $c(v) \ni \hat{c}_v$ и $c(u) \ni \hat{c}_u$. Тогда α есть решение этих задач.

Для завершения доказательства осталось избавиться от этих двух вершин с двумя доступными цветами, используя лемму 2. □

Лемма 4. Дана задача $(3,2)$ -CSP I порядка n . Существуют два таких объекта v и u , что $|c(v)| = |c(u)| = 3$ и $\exists c_v, c_u : \{(v, c_v), (u, c_u)\} \in W$. Тогда её можно свести за полиномиальное время к такой I' , что если I' разрешима, то и I имеет решение, а если I разрешима, то I' имеет решение с вероятностью $1/2$.

Доказательство. Очевидно следует из леммы 3. □

Используя лемму 4, несложно убедиться в корректности следующего алгоритма (n — количество вершин):

```

1: function SATISFIABLE( $I$ )
2:   for  $i = 1..2^{n/2}$  do
3:     if  $\exists v \in V : |c(v)| = 3$  and  $v$  has any constraints then
4:       reduce  $I \rightarrow I'$  randomly using lemma 4
5:       return satisfiable( $I'$ )
6:     else if  $\exists v \in V : |c(v)| = 0$  then
7:       return false
8:     else
9:       choose any  $v$  (now  $0 < |c(v)| \leq 2$  and reduce  $I \rightarrow I'$  using lemma 2
10:      return satisfiable( $I'$ )
11:    end if
12:  end for
13:  return false
14: end function

```

Действительно, если $n/2$ раз случайно выбирать вариант меньшей задачи, то, согласно лемме 4, вероятность получить правильную раскраску есть $2^{-n/2}$, то есть если вызвать алгоритм $2^{n/2}$ раз, то верный ответ будет получен с вероятностью 1. Итого время работы этого алгоритма $O(n^{O(1)}2^{n/2}) = O(1.4142135623730951^n)$

- более подробным разбором случаев можно улучшить константу до 1.3645 ([2])
- в случае задачи 3-раскрашиваемости константа (3,2)-CSP улучшается до 1.3289 с помощью некоторого препроцессинга на графе (см. "bushy forest" в [1] и [2])

3 Эксперименты

- Алгоритм тратит на подтверждение 3-раскрашиваемости графа на 2000 вершинах до 16 секунд, в среднем 6 (плотность 0.6).
- До 14 секунд на нераскрашиваемых на 35 вершинах (плотность 0.5)
- Алгоритм работает дольше на графах с меньшей плотностью

Список литературы

- [1] Richard Beigel, David Eppstein, *3-Coloring in time $O(1.3446^n)$: a no-MIS algorithm*, 36th Symposium on Foundations of Computer Science, 444–453, October 1995
<https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=492575>
- [2] David Eppstein, *Improved algorithms for 3-Coloring, 3-Edge-Coloring, and Constraint Satisfaction*, 12th ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, Washington, 2001, pp. 32–337.
<https://www.ics.uci.edu/~eppstein/pubs/Epp-SODA-01.pdf>