Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 5
по дисципліні «Вища математика»

Тема: МЕТОД ГАУССА. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЙОГО МОДИФІКАЦІЇ
Варіант

Виконав: студент гр. КС-231
Киба Д.В.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2023

Теоретичні відомості

Довільна система – це система у якої кількість невідомих не дорівнює кількості рівнянь. Матриця такої системи прямокутна.
Згідно теореми Кронекера-Капелі довільна система має розв’язки (сумісна), якщо ранг основної матриці = рангу розширеної матриці.
Мінор порядку r називається базисним. якщо він не дорівнює нулю, а все мінори порядку r + 1 і вище дорівнюють нулю
Базисні змінні – це змінні, що входять в базисний мінор.
Вільні змінні – це змінні, що не входять в базисний мінор
Для розв’язання СЛАР візьмемо r рівнянь, які утворює базисний мінор. Вільні змінні переносяться в праву частину. Розв’язуємо отриману систему рівнянь і знаходимо формули загального розв’язку. Вибираючи довільні значення вільних змінних по цим формулам знаходять значення базисних змінних, отже можна отримати усі розв’язки СЛАР. Кожен окремий розв’язок є частинним розв’язком.
Основні оператори Maple які використовуються в цій роботі:
gausselim() – приведення матриці до трикутного виду.
rank() – пошук ранга матриці.
mulrow – множення рядочка матриці на число.
swaprow – заміна місцями рядочків матриці.
addrow – додавання одного рядочку помноженого на число до іншого.
det() – пошук визначника матриці

Задача 1. Дослідити систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що задана розширеною матрицею,
на сумісність і визначеність.
Знайти один з базисних мінорів та вказати базисні та вільні змінні.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 13 & 19 & -28 & -19 & 57 \end{pmatrix}$$

Система 5 рівнянь 4 невідомих

> $with(linalg)$:

> $N := 45$

$$N := 45 \tag{1}$$

Задамо розширену і основну матриці.

> $AR := matrix(5, 5, [1, 2, -3, -2, 5, -2, 0, 1, 4, 0, -3, -2, 4, 6, -5, 3, -1, 2, 1, 7, 13, 19, -28, -19, 57])$

$$AR := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 13 & 19 & -28 & -19 & 57 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

> $A := delcols(AR, 5 ..5)$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 13 & 19 & -28 & -19 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Система складається з 5 рівнянь та 4 невідомих.
Знайдемо ранг розширеної матриці та основної матриці за допомогою приведення до трикутного вигляду командою gausselim

> $gausselim(AR)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & 7 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

> $gausselim(A)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5)}$$

Кількість ненульових рядочків в обох матрицях дорівнює 3, отже ранг розширеної матриці та основної матриці рівний і дорівнює 3. Перевіримо за допомогою оператора rank.

> $rank(AR)$

$$3 \quad \textbf{(6)}$$

> $rank(A)$

$$3 \tag{7}$$

За теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна, але ранг менше ніж кількість невідомих, отже ця система має безліч розв'язків, тобто вона невизначена. Знайдемо базисний мінор.

> $AB := matrix(3, 3, [1, 2, -3, -2, 0, 1, 3, -1, 2])$

$$AB := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

> $det(AB)$

$$9 \tag{9}$$

Визначник цього мінора дорівнює 9. У нього входять 1, 2 і 4 рівняння і 1, 2 і 3 стовпчики. Базисні змінні: x1, x2, x3. Вільна змінна: x4. Тоді розширена матриця нової системи запишеться у вигляді:

> $AA := matrix(3, 4, [1, 2, -3, 5 + 2 \cdot x4, -2, 0, 1, -4 \cdot x4, 3, -1, 2, 7 - x4])$

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 + 2\,x4 \\ -2 & 0 & 1 & -4\,x4 \\ 3 & -1 & 2 & 7 - x4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Задача 2. Визначити сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою теореми Кронекера-Капеллі. У разі сумісності системи знайти точний загальний розв'язок методом Гаусса-Жордана.
Записати загальний розв'язок у матричному вигляді.
Знайти два довільних частинних розв'язки системи.
Для перевірки знайти нев'язки для знайдених частинних розв'язків.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 5 \cdot N & -5 & 15 & 6 \cdot N \\ 20 & -40 & 30 & -20 & 60 & 43 \cdot N \\ 30000 & -60000 & 45000 & -30001 & 90001 & 65000 \cdot N \end{pmatrix}$$

Задамо розширену і основну матриці.

> $AR := matrix(3, 6, [5, -10, 5 \cdot N, -5, 15, 6 \cdot N, 20, -40, 30, -20, 60, 43 \cdot N, 30000, -60000, 45000, -30001, 90001, 65000 \cdot N])$

$$AR := \begin{bmatrix} 5 & -10 & 425 & -5 & 15 & 510 \\ 20 & -40 & 30 & -20 & 60 & 3655 \\ 30000 & -60000 & 45000 & -30001 & 90001 & 5525000 \end{bmatrix} \tag{11}$$

> $A := delcols(AR, 6\,..6)$

$$\tag{12}$$

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -10 & 425 & -5 & 15 \\ 20 & -40 & 30 & -20 & 60 \\ 30000 & -60000 & 45000 & -30001 & 90001 \end{bmatrix} \tag{12}$$

1. Для визначення сумісності та знаходження базисного мінору приводимо розширену матрицю до трикутного вигляду за допомогою оператора gausselim.

> $gausselim(AR)$

$$\begin{bmatrix} 5 & -10 & 425 & -5 & 15 & 510 \\ 0 & 0 & -1670 & 0 & 0 & 1615 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 42500 \end{bmatrix} \tag{13}$$

> $gausselim(A)$

$$\begin{bmatrix} 5 & -10 & 425 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -1670 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Не нульових рядочків 3, тому ранг матриці = 3. Ранг основної та розширеної матриці рівний, тобто система сумісна. Так як ранг менший за кількість невідомих, то система невизначена(має безліч розв'язків)

Знайдемо базисний мінор, який має вигляд

> $AB := matrix(3, 3, [5, 225, 15, 20, 30, 60, 30000, 45000, 90001])$

$$AB := \begin{bmatrix} 5 & 225 & 15 \\ 20 & 30 & 60 \\ 30000 & 45000 & 90001 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Визначник цього мінору дорівнює 4350

> $det(AB)$

$$-4350 \tag{16}$$

x1, x3, x5 - базисні змінні
x2, x4 - вільні змінні

2. Формуємо еквівалентну СЛАР і розв’язуємо її методом Гаусса-Жордана.
Для того, щоб знайти еквівалентну систему, залишаємо зліва базисні змінні, а вільні змінні переносимо в праву частину.

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 425 \cdot x_3 + 15 \cdot x_5 = 510 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 \\ 20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_3 + 60 \cdot x_5 = 3655 + 40 \cdot x_2 + 20 \cdot x_4 \\ 30000 \cdot x_1 + 45000 \cdot x_3 + 90001 \cdot x_5 = 5525000 + 60000 \cdot x_2 + 30001 \cdot x_4 \end{cases}$$

В матричному записі це буде мати такий вид:

> $A2 := matrix(3, 4, [5, 425, 15, 510 + 10 \cdot x2 + 5 \cdot x4, 20, 30, 60, 3655 + 40 \cdot x2 + 20 \cdot x4, 30000, 45000, 90001, 5525000 + 60000 \cdot x2 + 30001 \cdot x4])$

$$A2 := \begin{bmatrix} 5 & 425 & 15 & 510 + 10\, x2 + 5\, x4 \\ 20 & 30 & 60 & 3655 + 40\, x2 + 20\, x4 \\ 30000 & 45000 & 90001 & 5525000 + 60000\, x2 + 30001\, x4 \end{bmatrix} \tag{17}$$

3. Розв’язуємо систему методом Гаусса-Жордана і записуємо формули загального розв’язку

Скористаємося оператором *gaussjord*.

> $gaussjord(A2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{42523477}{334} - 2\, x4 + 2\, x2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{323}{334} \\ 0 & 0 & 1 & 42500 + x4 \end{bmatrix} \tag{18}$$

x2 та x4 можна позначити як параметри α та β

Формули загального розв'язку будуть мати наступний вид:

> $matrix(5, 1, [x1, x2, x3, x4, x5]) = matrix\left(5, 1, \left[-\frac{42523477}{334}, 0, -\frac{323}{334}, 0, 42500\right]\right) + matrix(5, 1, [2 \cdot \alpha - 2 \cdot \beta, \alpha, 0, \beta, \beta])$

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{42523477}{334} \\ 0 \\ -\frac{323}{334} \\ 0 \\ 42500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix} \tag{19}$$

Знаходимо перший частинний розв'язок. Нехай $\alpha = 2, \beta = 10$

> $\alpha := 2; \beta := 10; t1 := -\frac{42523477}{334} + 2\,\alpha - 2\,\beta; t2 := \alpha; t3 := -\frac{323}{334}; t4 := \beta; t5 := 42500 + \beta$

$$\alpha := 2$$

$$\beta := 10$$

$$t1 := -\frac{42528821}{334}$$

$$t2 := 2$$

$$t3 := -\frac{323}{334}$$

$$t4 := 10$$

$$t5 := 42510 \quad \textbf{(20)}$$

Нев'язки

$> \delta1 := AR[1, 6] - (AR[1, 1] \cdot t1 + AR[1, 2] \cdot t2 + AR[1, 3] \cdot t3 + AR[1, 4] \cdot t4 + AR[1, 5] \cdot t5)$

$$\delta1 := 0 \quad \textbf{(21)}$$

$> \delta2 := AR[2, 6] - (AR[2, 1] \cdot t1 + AR[2, 2] \cdot t2 + AR[2, 3] \cdot t3 + AR[2, 4] \cdot t4 + AR[2, 5] \cdot t5)$

$$\delta2 := 0 \quad \textbf{(22)}$$

$> \delta3 := AR[3, 6] - (AR[3, 1] \cdot t1 + AR[3, 2] \cdot t2 + AR[3, 3] \cdot t3 + AR[3, 4] \cdot t4 + AR[3, 5] \cdot t5)$

$$\delta3 := 0 \quad \textbf{(23)}$$

Висновок: нев'язки нульові, значить один точний частинний розв'язок системи знайдено.
Система має безліч частинних розвязків, які знаходяться при різних заченнях параметрів α і β.

Задача 3. Дослідити сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою теореми Кронекера-Капелі.
У випадку сумісності системи знайти загальний розв’язок методом Гаусса. Обчислення проводити з п’ятьма десятковими знаками після коми. Записати загальний розв’язок у матричному вигляді. Знайти один довільний частинний розв’язок системи. Визначити нев’язку та оцінити точність знайденого частинного розв’язку.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} N & 1 & -\frac{7}{N} & -2 & -1 \\ -1 & 2N & -5 & -\frac{7}{N} & -5 \\ -5N-1 & -5+2N & \frac{35}{N}-5 & 10-\frac{7}{N} & 0 \\ 2N-1 & 2N+2 & -\frac{14}{N}-5 & -4-\frac{7}{N} & -7 \end{pmatrix}$$

Задаємо розширену матрицю AR та основну матрицю A.

$$> AR := matrix\left(4, 5, \left[N, 1, -\frac{7}{N}, -2, -1, -1, 2\cdot N, -5, -\frac{7}{N}, -5, -5\cdot N-1, -5+2\cdot N, \frac{35}{N}-5, 10-\frac{7}{N}, 0, 2\cdot N-1, 2\cdot N+2, -\frac{14}{N}-5, -4-\frac{7}{N}, -7\right]\right)$$

$$AR := \begin{bmatrix} 85 & 1 & -\frac{7}{85} & -2 & -1 \\ -1 & 170 & -5 & -\frac{7}{85} & -5 \\ -426 & 165 & -\frac{78}{17} & \frac{843}{85} & 0 \\ 169 & 172 & -\frac{439}{85} & -\frac{347}{85} & -7 \end{bmatrix} \quad \textbf{(24)}$$

$$> A := delcols(AR, 5 ..5)$$

$$A := \begin{bmatrix} 85 & 1 & -\frac{7}{85} & -2 \\ -1 & 170 & -5 & -\frac{7}{85} \\ -426 & 165 & -\frac{78}{17} & \frac{843}{85} \\ 169 & 172 & -\frac{439}{85} & -\frac{347}{85} \end{bmatrix} \quad \textbf{(25)}$$

За допомогою оператора rank визначаємо ранг розширеної та основної матриць.

> $rank(AR); rank(A)$

$$2$$
$$2 \qquad (26)$$

Ранг розширеної та основної матриці рівний, отже система сумісна. Ранг матриці менший за кількість невідомих, отже система невизначена
Знайдемо базисний мінор.

> $AB := matrix(2, 2, [45, 1, -1, 90])$

$$AB := \begin{bmatrix} 45 & 1 \\ -1 & 90 \end{bmatrix} \qquad (27)$$

> $det(AB)$

$$4051 \qquad (28)$$

Визначник цього мінора дорівнює 4051. x1, x2 – базисні змінні; x3, x4 – вільні змінні. Перенесемо вільні змінні в праву частину.

$$\begin{cases} 85 \cdot x_1 + x_2 = -1 + \dfrac{7}{85} \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \\ -1 \cdot x_1 + 170 \cdot x_2 = -5 + 5 \cdot x_3 + \dfrac{7}{85} \cdot x_4 \end{cases}$$

> $Digits := 7$

$$Digits := 7 \qquad (29)$$

У матричному виді:

> $AA := matrix\left(2, 3, \left[85., 1., -1. + \frac{7.}{85} \cdot x3 + 2. \cdot x4, -1., 170., -5. + 5. \cdot x3 + \frac{7.}{85} \cdot x4\right]\right)$

$$AA := \begin{bmatrix} 85. & 1. & -1. + 0.08235294\, x3 + 2.\, x4 \\ -1. & 170. & -5. + 5.\, x3 + 0.08235294\, x4 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

Приведемо до трикутного вигляду за допомогою gausselim.

> $gausselim(AA)$

Error, (in linalg:-gausselim) matrix entries must all evaluate to complex floats

Maple не хоче знаходити трикутну матрицю через оператор gausselim. Тому приведемо до трикутного виду вручну

> $AA1 := swaprow(AA, 1, 2)$

$$AA1 := \begin{bmatrix} -1. & 170. & -5. + 5.\, x3 + 0.08235294\, x4 \\ 85. & 1. & -1. + 0.08235294\, x3 + 2.\, x4 \end{bmatrix} \qquad (31)$$

> $AA2 := mulrow(AA1, 1, -1)$

$$AA2 := \begin{bmatrix} 1. & -170. & 5. - 5.\,x3 - 0.08235294\,x4 \\ 85. & 1. & -1. + 0.08235294\,x3 + 2.\,x4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

> $AA3 := addrow(AA2, 1, 2, -85)$

$$AA3 := \begin{bmatrix} 1. & -170. & 5. - 5.\,x3 - 0.08235294\,x4 \\ 0. & 14451. & -426. + 425.0824\,x3 + 9.000000\,x4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

> $AA4 := mulrow\left(AA3, 2, \dfrac{1}{14451.}\right)$

$$AA4 := \begin{bmatrix} 1. & -170. & 5. - 5.\,x3 - 0.08235294\,x4 \\ 0. & 1.000000 & -0.02947893 + 0.02941543\,x3 + 0.0006227942\,x4 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Формули загального розв'язку

>

Зворотній хід

> $x2 := -0.02947893 + 0.02941543\,x3 + 0.0006227942\,x4$

$$x2 := -0.02947893 + 0.02941543\,x3 + 0.0006227942\,x4 \quad (35)$$

> $x1 := 170 \cdot x2 + 5. - 5.\,x3 - 0.08235294\,x4$

$$x1 := -0.011418 + 0.000623\,x3 + 0.02352206\,x4 \quad (36)$$

> $x4 := 0; x3 := 0; x2; x1;$

$$x4 := 0$$
$$x3 := 0$$
$$-0.02947893$$
$$-0.011418 \quad (37)$$

Нев'язки

> $\delta 1 := \mathrm{abs}(AR[1, 1] \cdot x1 + AR[1, 2] \cdot x2 + AR[1, 3] \cdot x3 + AR[1, 4] \cdot x4 - AR[1, 5])$

$$\delta 1 := 8.9\ 10^{-6} \quad (38)$$

> $\delta 2 := \mathrm{abs}(AR[2, 1] \cdot x1 + AR[2, 2] \cdot x2 + AR[2, 3] \cdot x3 + AR[2, 4] \cdot x4 - AR[2, 5])$

$$\delta 2 := 0. \quad (39)$$

> $\delta 3 := \mathrm{abs}(AR[3, 1] \cdot x1 + AR[3, 2] \cdot x2 + AR[3, 3] \cdot x3 + AR[3, 4] \cdot x4 - AR[3, 5])$

$$\delta 3 := 0.000045 \quad (40)$$

> $\delta 4 := \mathrm{abs}(AR[4, 1] \cdot x1 + AR[4, 2] \cdot x2 + AR[4, 3] \cdot x3 + AR[4, 4] \cdot x4 - AR[4, 5])$

$$\delta 4 := 0.000018 \quad (41)$$

> $\delta := \max(\delta 1, \delta 2, \delta 3, \delta 4)$

$$\delta := 0.000045 \quad (42)$$

> $with(linalg):$

Знайдено частинний розвязок з точністю 5 одиницm п'ятого розряду (округлюємо в більшу сторону):
x1 = -0.011418 ± 0.00005; x2 = -0.02947893 ± 0.00005; x3 = 0; x4 = 0

Формули загального розв'язку. Нам потрібно привести розширену матрицю до трикутного вигляду

> $AAZ := matrix\left(2, 3, \left[85, 1, -1 + \frac{7}{85} \cdot x3 + 2 \cdot x4, -1, 170, -5 + 5 \cdot x3 + \frac{7}{85} \cdot x4\right]\right)$

$$AAZ := \begin{bmatrix} 85 & 1 & -1 \\ -1 & 170 & -5 \end{bmatrix} \quad (43)$$

> $mulrow\left(gausselim(AR), 2, \frac{1}{14451}\right)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 170 & -5 & -\frac{7}{85} & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{12044}{409445} & -\frac{3}{4817} & -\frac{142}{4817} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

> $mulrow\left(mulrow\left(gausselim(AR), 2, \frac{1}{14451}\right), 1, -1\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -170 & 5 & \frac{7}{85} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{12044}{409445} & -\frac{3}{4817} & -\frac{142}{4817} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Тепер виражаємо основні змінні через вільні

> $X1 := 5 - 5 \cdot X3 - \frac{7 \cdot X4}{85} + 170 \cdot X2$

$$X1 := 5 - 5\,X3 - \frac{7\,X4}{85} + 170\,X2 \quad (46)$$

> $X2 := -\frac{142}{4817} + \frac{12044}{409445} \cdot X3 + \frac{3}{4817} \cdot X4$

$$X2 := -\frac{142}{4817} + \frac{12044\,X3}{409445} + \frac{3\,X4}{4817} \quad (47)$$

> $X1 := 5 - 5 \cdot X3 - \frac{7 \cdot X4}{85} + 170 \cdot X2$

$$X1 := -\frac{55}{4817} + \frac{3\,X3}{4817} + \frac{9631\,X4}{409445} \tag{48}$$

Отже, формулами загального розв'язку буде:

$$X1 := -\frac{55}{4817} + \frac{3\,X3}{4817} + \frac{9631\,X4}{409445}$$

$$X2 := -\frac{142}{4817} + \frac{12044\,X3}{409445} + \frac{3\,X4}{4817}$$