Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем

Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1
по дисципліні «Вища математика»

Тема: Контроль точності розв'язання СЛАР та ітераційний метод уточнення коренів

Варіант 45

Виконав: студент гр. КС-231
Киба Д.В.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2023

Короткі теоретичні відомості

Матричний запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
Матричний метод розв’язання та метод Гаусса з вибором ведучогоелемента.
Поняття абсолютної та відносної похибки. Оцінка точності розв’язання системи за допомогою нев’язок. Ітераційна процедура уточнення коренів.
Пакет linalg системи Maple. Оператори inverse, gausselim, gaussjordan та linsolve.

СЛАР можна записати у матричному вигляді. Така матриця буде складатися з коефіцієнтів, що стоять перед невідомими, та з стовпчика вільних членів.
Для знаходження коренів за допомогою матричного методу потрібно знайти обернену матрицю до матриці коефіцієнтів. І тоді в залежності від виду матричного рівняння знайти розв'язки. Можуть бути такі випадки:

1) $A \cdot X = B$

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$

2) $X \cdot A = B$

$X \cdot A = B$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$

$X = B \cdot A^{-1}$

3) $A \cdot X \cdot C = B$

$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$

Метод Гауса з вибором головного елемента – це покращена версія методу Гауса для розв’язання систем лінійних рівнянь.   Основна ідея полягає в тому, що перед кожним кроком перетворень матриці до ступінчастого вигляду вибирається головний елемент(найбільший елемент). Це допомагає уникнути помилок ділення на нуль та оптимізує обчислення, забезпечуючи більш точні та надійні результати.

Абсолютна похибка знаходиться за формулою:

$$\Delta = \left| x - x^* \right|$$

Відносна похибка знаходиться за формулою

$$\delta = \frac{\left| x - x^* \right|}{x}$$

Нев'язка знаходиться за формулою:

$$\left| b - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

Чим менша нев'язка, тим точніший розв'язок системи.

Процедура уточнення розв’язків (коренів) СЛАР
Нехай задана система
$$Ax = b$$
Нехай знайдені наближені значення коренів
$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{bmatrix}$$
Тоді точні значення коренів можна представити у вигляді:
$$x = x^* + \varepsilon$$
ε - вектор поправок.
Підставимо значення x в початкову систему рівнянь, і отримаємо
$$A(x^* + \varepsilon) = b$$
$$Ax^* + A\varepsilon = b$$
$$A \cdot \varepsilon = b - A \cdot x^*$$
Позначимо $\delta^1 = b - A \cdot x^*$ – це перший вектор нев'язок.
Якщо розв’язати систему $A \cdot \varepsilon = \delta^1$, яка відрізняється від початкової системи тільки вектором вільних членів, то отримаємо
вектор перших поправок ε^1
Тоді в якості уточнених значень коренів системи можна взяти значення
$$x^1 = x^* + \varepsilon^1$$
Тепер для оцінки точності отриманого наближення можна знову представити точні значення як суму наближення x^1 і деяких
невідомих поправок ε^1
$$x = x^1 + \varepsilon$$
Знову підставимо це значення x в початкову систему рівнянь, і отримаємо
$$A \cdot \varepsilon = b - A \cdot x^1$$
В правій частині системи стоїть вектор нев’язок
$$\delta 2 = b - A \cdot x^1$$
Це вже другий вектор нев’язок.
Ці нев’язки можна розглядати як оцінку точності нового наближення коренів.
Якщо точність знову незадовільна, то знову вектор нев’язок приймають як нові значення вектора вільних членів і формують нову СЛАР
Цей ітераційний процес уточнення значень коренів СЛАР продовжується до тих пір, поки значення нев’язки системи не стане
менше, ніж наперед задана точність розв’язання.

Задача 1.Система рівнянь задана розширеною матрицею. Знайти число обумовленості матриці коефіцієнтів системи. Розв’язати систему рівнянь за допомогою матричного метода. При обчисленнях зберігати 10 десяткових значущих цифр. Оцінити точність знайденого розв'язку. Якщо точність гірша, ніж $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$, вважати знайдений розв’язок початковим наближенням і провести уточнення коренів за допомогою ітераційного процесу (знову використовувати матричний метод).
Для перевірки точності отриманого розв’язку знайти точний розв’язок системи матричним методом з виконанням обчислень в простих дробах (без округлень).
Визначити абсолютну й відносну похибки знайденого ранішенаближеного розв’язку системи.
Порівняти значення нев’язки з значенням абсолютної похибки.
Розширена матриця системи отримується після підстановкиномеру варіанта N в наступну матрицю:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 10000 \cdot N & -10 \cdot N & 83.12 \cdot N & \frac{7}{N} & 1675.37 \\ -1.372 & 2000 \cdot N & \frac{5}{N} & 1.6 & -17.235 \\ \frac{17.8}{N} & 16 & 100 \cdot N & -1.5 & -435.45 \\ -4.38 & 15 & -11 & -\frac{0.7}{N} & 0.049315 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon$$
$$A$$
$$x \tag{1}$$

> $N := 45$

$$N := 45 \tag{2}$$

> $A1 := matrix\left(4, 5, \left[1000.\cdot N, -10.\cdot N, 83.12\cdot N, \frac{7.}{N}, 1675.37, -1.372, 2000.\cdot N, \frac{5.}{N}, 1.6, -17.235, \frac{17.8}{N}, 16, 100\cdot N, -1.5, -435.45, -4.38, 15, -11, -\frac{0.7}{N}, 0.049315\right]\right)$

(3)

$$A1 := \begin{bmatrix} 45000. & -450. & 3740.40 & 0.1555555556 & 1675.37 \\ -1.372 & 90000. & 0.1111111111 & 1.6 & -17.235 \\ 0.3955555556 & 16 & 4500 & -1.5 & -435.45 \\ -4.38 & 15 & -11 & -0.01555555556 & 0.049315 \end{bmatrix} \tag{3}$$

> $with(linalg):$

Матриця коефіцієнтів:

> $AK := delcols(A1, 5..5)$

$$AK := \begin{bmatrix} 45000. & -450. & 3740.40 & 0.1555555556 \\ -1.372 & 90000. & 0.1111111111 & 1.6 \\ 0.3955555556 & 16 & 4500 & -1.5 \\ -4.38 & 15 & -11 & -0.01555555556 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Стовпчик вільних членів:

> $B1 := delcols(A1, 1..4)$

$$B1 := \begin{bmatrix} 1675.37 \\ -17.235 \\ -435.45 \\ 0.049315 \end{bmatrix} \tag{5}$$

1) Знаходимо число обумовленості. Для цього скористаємося оператором cond()

> $cond(AK)$

Число обумовленості дуже високе, отже розв'язки будуть з високими похибками.

$$4.662982057 \times 10^{6} \tag{6}$$

2) Шукаємо розв'язок матричним методом

Знаходимо обернену матрицю.

> $AOB := inverse(AK)$

$AOB :=$ **(7)**

$[[0.00002238000585, -1.554619620 \times 10^{-7}, -0.00001464276816, 0.001619790900],$
$[8.973355327 \times 10^{-8}, 0.00001095805993, 2.170813894 \times 10^{-6}, 0.0009186835878],$
$[-1.678354604 \times 10^{-6}, 2.830651452 \times 10^{-6}, 0.0001815046435, -0.01722786431],$
$[-0.005028204963, 0.008608799335, -0.1221334422, -51.67336648]]$

Перевірка

> $evalm(AK\&*AOB)$

Матриця приблизно дорівнює одиничній. Ці відхилення вплинуть на подальший розв'язок системи

(8)

$$\begin{bmatrix} 0.9999999998 & -6. \times 10^{-12} & -4.6 \times 10^{-10} & -1.3 \times 10^{-8} \\ 1. \times 10^{-12} & 1.000000000 & 1. \times 10^{-10} & -3. \times 10^{-8} \\ -2. \times 10^{-12} & 0. & 1.000000000 & -3. \times 10^{-8} \\ -1. \times 10^{-14} & 0. & 1. \times 10^{-12} & 1.000000000 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Знаходимо розв'язок.

$A \cdot X = B$

$X = A^{-1} \cdot B$

> $X := evalm(AOB\&*B1)$

$$X := \begin{bmatrix} 0.04395354317 \\ -0.0009385012888 \\ -0.08274644037 \\ 42.06225893 \end{bmatrix} \quad (9)$$

3) Знайдемо нев'язки

> $\xi 1 := B1[1, 1] - A1[1, 1] \cdot X[1, 1] - A1[1, 2] \cdot X[2, 1] - A1[1, 3] \cdot X[3, 1] - A1[1, 4] \cdot X[4, 1]$

$$\xi 1 := -1. \times 10^{-6} \quad (10)$$

> $\xi 2 := B1[2, 1] - A1[2, 1] \cdot X[1, 1] - A1[2, 2] \cdot X[2, 1] - A1[2, 3] \cdot X[3, 1] - A1[2, 4] \cdot X[4, 1]$

$$\xi 2 := 1.123 \times 10^{-8} \quad (11)$$

> $\xi 3 := B1[3, 1] - A1[3, 1] \cdot X[1, 1] - A1[3, 2] \cdot X[2, 1] - A1[3, 3] \cdot X[3, 1] - A1[3, 4] \cdot X[4, 1]$

$$\xi 3 := 5.243 \times 10^{-8} \quad (12)$$

> $\xi 4 := B1[4, 1] - A1[4, 1] \cdot X[1, 1] - A1[4, 2] \cdot X[2, 1] - A1[4, 3] \cdot X[3, 1] - A1[4, 4] \cdot X[4, 1]$

$$\xi 4 := 1. \times 10^{-10} \quad (13)$$

> $\xi := \max(\text{abs}(\xi 1), \text{abs}(\xi 2), \text{abs}(\xi 3), \text{abs}(\xi 4))$

Точність гірша, ніж $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$, отже потрібно провести уточнення коренів.

$$\xi := 1. \times 10^{-6} \quad (14)$$

4) Уточнюємо корені за допомогою ітераційного процесу

Перша ітерація

> $B2 := matrix(4, 1, [\xi 1, \xi 2, \xi 3, \xi 4])$

$$B2 := \begin{bmatrix} -1. \times 10^{-6} \\ 1.123 \times 10^{-8} \\ 5.243 \times 10^{-8} \\ 1. \times 10^{-10} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Вектор поправок

> $\varepsilon 1 := evalm(AOB\&*B2)$

$$\varepsilon 1 := \begin{bmatrix} -2.298749293 \times 10^{-11} \\ 2.390095910 \times 10^{-13} \\ 9.503644849 \times 10^{-12} \\ -6.445911243 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Додаємо поправки

> $x11 := X[1, 1] + \varepsilon 1[1, 1]; x12 := X[2, 1] + \varepsilon 1[2, 1]; x13 := X[3, 1] + \varepsilon 1[3, 1];$
> $x14 := X[4, 1] + \varepsilon 1[4, 1]$

$$x11 := 0.04395354315$$
$$x12 := -0.0009385012886$$
$$x13 := -0.08274644036$$
$$x14 := 42.06225892 \tag{17}$$

Знаходимо нев'язки на першій ітерації

> $\xi 11 := A1[1, 1]\cdot x11 + A1[1, 2]\cdot x12 + A1[1, 3]\cdot x13 + A1[1, 4]\cdot x14 - B1[1, 1]$

$$\xi 11 := 0. \tag{18}$$

> $\xi 12 := A1[2, 1]\cdot x11 + A1[2, 2]\cdot x12 + A1[2, 3]\cdot x13 + A1[2, 4]\cdot x14 - B1[2, 1]$

$$\xi 12 := -1.120 \times 10^{-8} \tag{19}$$

> $\xi 13 := A1[3, 1]\cdot x11 + A1[3, 2]\cdot x12 + A1[3, 3]\cdot x13 + A1[3, 4]\cdot x14 - B1[3, 1]$

$$\xi 13 := 4.756 \times 10^{-8} \tag{20}$$

> $\xi 14 := A1[4, 1]\cdot x11 + A1[4, 2]\cdot x12 + A1[4, 3]\cdot x13 + A1[4, 4]\cdot x14 - B1[4, 1]$

$$\xi 14 := 1. \times 10^{-10} \tag{21}$$

> $\xi 1 := \max(\operatorname{abs}(\xi 11), \operatorname{abs}(\xi 12), \operatorname{abs}(\xi 13), \operatorname{abs}(\xi 14))$

$$\xi 1 := 4.756 \times 10^{-8} \tag{22}$$

З першої ітерації було досягнуто необхідної точності.

5) Знаходимо точний розв'язок системи

> $AT := matrix\left(4, 5, \left[1000\cdot N, -10\cdot N, \frac{8312}{100}\cdot N, \frac{7}{N}, \frac{167537}{100}, -\frac{1372}{1000}, 2000\cdot N, \frac{5}{N}, \frac{16}{10}, -\frac{17235}{1000}, \frac{178}{10\cdot N}, 16, 100\cdot N, -\frac{15}{10}, -\frac{43545}{100}, -\frac{438}{100}, 15, -11, -\frac{7}{10\cdot N}, \frac{49315}{1000000}\right]\right)$

(23)

$$AT := \begin{bmatrix} 45000 & -450 & \frac{18702}{5} & \frac{7}{45} & \frac{167537}{100} \\ -\frac{343}{250} & 90000 & \frac{1}{9} & \frac{8}{5} & -\frac{3447}{200} \\ \frac{89}{225} & 16 & 4500 & -\frac{3}{2} & -\frac{8709}{20} \\ -\frac{219}{50} & 15 & -11 & -\frac{7}{450} & \frac{9863}{200000} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Матриця коефіцієнтів

> $ATK := delcols(AT, 5..5)$

$$ATK := \begin{bmatrix} 45000 & -450 & \frac{18702}{5} & \frac{7}{45} \\ -\frac{343}{250} & 90000 & \frac{1}{9} & \frac{8}{5} \\ \frac{89}{225} & 16 & 4500 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{219}{50} & 15 & -11 & -\frac{7}{450} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Стовпчик вільних членів

> $ATB := delcols(AT, 1..4)$

$$ATB := \begin{bmatrix} \frac{167537}{100} \\ -\frac{3447}{200} \\ -\frac{8709}{20} \\ \frac{9863}{200000} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Знаходимо обернену матрицю

> $ATKOB := inverse(ATK)$

$$ATKOB := \Big[\Big[\frac{59939625924375}{2678266768490241943}, -\frac{59481229500}{382609538355748849}, -\frac{40305487500}{2752586606875891}, \tag{26}$$
$$\frac{4338232138691250}{2678266768490241943}\Big],$$
$$\Big[\frac{720991181075}{8034800305470725829}, \frac{4192658249205}{382609538355748849}, \frac{5975353251}{2752586606875891},$$
$$\frac{7381439173768325}{8034800305470725829}\Big],$$

$$\left[-\frac{8990162722035}{5356533536980483886}, \frac{1083034245375}{382609538355748849}, \frac{499607250750}{2752586606875891}, -\frac{46140816458558925}{2678266768490241943}\right],$$

$$\left[-\frac{13466874257498250}{2678266768490241943}, \frac{3293808738696000}{382609538355748849}, -\frac{336182877272250}{2752586606875891}, -\frac{1383950602507319883000}{2678266768490241943}\right]\right]$$

Перевірка

> $evalm(ATKOB\&*ATK)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(27)}$$

Знаходимо точні розв'язки

> $XT := evalm(ATKOB\&*ATB)$

$$XT := \begin{bmatrix} \frac{1883509023764593683 9}{42852268295843871088 0} \\ -\frac{20108454510807653407}{2142613414792193554400 0} \\ -\frac{17729363315274170138 91}{2142613414792193554400 0} \\ \frac{22530790063270031677 3971}{5356533536980483886000} \end{bmatrix} \quad \textbf{(28)}$$

> $xt1 := XT[1, 1]; xt2 := XT[2, 1]; xt3 := XT[3, 1]; xt4 := XT[4, 1];$

$$xt1 := \frac{18835090237645936839}{428522682958438710880}$$

$$xt2 := -\frac{20108454510807653407}{2142613414792193554400 0}$$

$$xt3 := -\frac{177293633152741701389 1}{2142613414792193554400 0}$$

$$xt4 := \frac{2253079006327003167739 71}{5356533536980483886000} \quad \textbf{(29)}$$

Знайдемо абсолютні похибки

> $\Delta 1 := \text{abs}(xt1 - x11); \Delta 2 := \text{abs}(xt2 - x12); \Delta 3 := \text{abs}(xt3 - x13); \Delta 4 := \text{abs}(xt4 - x14)$

$$\Delta 1 := 0.$$

$$\Delta 2 := 2. \times 10^{-13}$$

$$\Delta 3 := 1. \times 10^{-11}$$

$$\Delta 4 := 2. \times 10^{-8} \quad \textbf{(30)}$$

Значення дуже низькі, тому Maple відображає його як 0. Збільшимо Digits до 14

> $Digits := 14$

$$Digits := 14 \quad \textbf{(31)}$$

> $\Delta 1 := \mathrm{abs}(xt1 - x11); \Delta 2 := \mathrm{abs}(xt2 - x12); \Delta 3 := \mathrm{abs}(xt3 - x13); \Delta 4 := \mathrm{abs}(xt4 - x14)$

Абсолютні похибки навіть нижчі ніж нев'язки

$$\Delta 1 := 3.450 \times 10^{-12}$$

$$\Delta 2 := 1.5245 \times 10^{-13}$$

$$\Delta 3 := 5.182 \times 10^{-12}$$

$$\Delta 4 := 1.6160 \times 10^{-8} \quad \textbf{(32)}$$

Тепер знайдемо відносні похибки

> $\delta 1 := \frac{\Delta 1}{xt1} \cdot 100; \delta 2 := \frac{\Delta 2}{xt2} \cdot 100; \delta 3 := \frac{\Delta 3}{xt3} \cdot 100; \delta 4 := \frac{\Delta 4}{xt4} \cdot 100;$

$$\delta 1 := 7.8491965663733 \times 10^{-9}$$

$$\delta 2 := -1.6243984086868 \times 10^{-8}$$

$$\delta 3 := -6.2625050420664 \times 10^{-9}$$

$$\delta 4 := 3.8419239500491 \times 10^{-8} \quad \textbf{(33)}$$

Відносні точності приблизно одинакові для всіх коренів.

Висновок: за допомогою однієї ітерації уточнення розв'язків було досягнуто нев'язки $\xi 1 := 4.756 \times 10^{-8}$. Але абсолютна похибка показала, що точність навіть трохи вища, ніж показує нев'язка.

Задача 2
Розв'язати систему рівнянь, що задана розширеною матрицею, методом Гаусса по схемі єдиного ділення. Перетворення виконувати по кроках, з використанням розширеної матриці. При обчисленнях зберігати 10 значущих цифр.
Для перевірки знайти точний розв'язок системи.
Визначити абсолютну й відносну похибки наближеного розв'язку системи.
Розширена матриця системи отримується після підстановки номеру варіанта N:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 100 \cdot N & -5203 \cdot N & 80 \cdot N & -1.7 & 161725.37 \\ -99999 \cdot N & 2000 \cdot N & -5000.16 & 1.6543 & -17.23125 \\ 187452 \cdot N & -16 & 100 \cdot N & -1.5 & -437125.45 \\ -498712 \cdot N & -5 & -1.49991 & -\dfrac{0.7}{N} & 5.493125 \end{pmatrix}$$

> *restart*

> *with*(*linalg*) :

> $N := 45$

$$N := 45 \tag{34}$$

> $Digits := 10$

$$Digits := 10 \tag{35}$$

> $A := matrix\left(4, 5, \left[100 \cdot N, -5203 \cdot N, 80 \cdot N, -1.7, 161725.37, -99999 \cdot N, 2000 \cdot N, -5000.16, 1.6543, -17.23125, 187452 \cdot N, -16, 100 \cdot N, 1.5, -437125.45, -498712 \cdot N, -5, -1.49991, -\frac{0.7}{N}, 5.493125\right]\right)$

$$A := \begin{bmatrix} 4500 & -234135 & 3600 & -1.7 & 161725.37 \\ -4499955 & 90000 & -5000.16 & 1.6543 & -17.23125 \\ 8435340 & -16 & 4500 & 1.5 & -437125.45 \\ -22442040 & -5 & -1.49991 & -0.01555555556 & 5.493125 \end{bmatrix} \tag{36}$$

1) Прямий хід. Приводимо матрицю до трикутного вигляду з одиницями на діагоналі

> $A1 := mulrow\left(A, 1, \frac{1}{A[1, 1]}\right)$

$$\tag{37}$$

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5203}{100} & \frac{4}{5} & -0.0003777777778 & 35.93897111 \\ -4499955 & 90000 & -5000.16 & 1.6543 & -17.23125 \\ 8435340 & -16 & 4500 & 1.5 & -437125.45 \\ -22442040 & -5 & -1.49991 & -0.01555555556 & 5.493125 \end{bmatrix} \tag{37}$$

> $A2 := addrow(A1, 1, 2, -A1[2, 1])$

$$A2 := \left[\left[1, -\frac{5203}{100}, \frac{4}{5}, -0.0003777777778, 35.93897111\right], \left[0, -\frac{4680853173}{20}, 3.59496384 \times 10^6, -1698.328700, 1.617237355 \times 10^8\right], \left[8435340, -16, 4500, 1.5, -437125.45\right], \left[-22442040, -5, -1.49991, -0.01555555556, 5.493125\right]\right] \tag{38}$$

> $A3 := addrow(A2, 1, 3, -A2[3, 1])$

$$A3 := \left[\left[1, -\frac{5203}{100}, \frac{4}{5}, -0.0003777777778, 35.93897111\right], \left[0, -\frac{4680853173}{20}, 3.59496384 \times 10^6, -1698.328700, 1.617237355 \times 10^8\right], \left[0, \frac{2194453621}{5}, -6743772, 3188.184000, -3.035945660 \times 10^8\right], \left[-22442040, -5, -1.49991, -0.01555555556, 5.493125\right]\right] \tag{39}$$

> $A4 := addrow(A3, 1, 4, -A3[4, 1])$

$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5203}{100} & \frac{4}{5} & -0.0003777777778 & 35.93897111 \\ 0 & -\frac{4680853173}{20} & 3.59496384 \times 10^6 & -1698.328700 & 1.617237355 \times 10^8 \\ 0 & \frac{2194453621}{5} & -6743772 & 3188.184000 & -3.035945660 \times 10^8 \\ 0 & -\frac{5838296731}{5} & 1.795363050 \times 10^7 & -8478.119556 & 8.065438327 \times 10^8 \end{bmatrix} \tag{40}$$

> $A5 := mulrow\left(A4, 2, \frac{1}{A4[2, 2]}\right)$

$$A5 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5203}{100} & \frac{4}{5} & -0.0003777777778 & 35.93897111 \\ 0 & 1 & -0.01536029312 & 7.256492085 \times 10^{-6} & -0.6910011040 \\ 0 & \frac{2194453621}{5} & -6743772 & 3188.184000 & -3.035945660 \times 10^{8} \\ 0 & -\frac{5838296731}{5} & 1.795363050 \times 10^{7} & -8478.119556 & 8.065438327 \times 10^{8} \end{bmatrix} \quad \textbf{(41)}$$

> $A6 := addrow(A5, 2, 3, -A5[3, 2])$

$$A6 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5203}{100} & \frac{4}{5} & -0.0003777777778 & 35.93897111 \\ 0 & 1 & -0.01536029312 & 7.256492085 \times 10^{-6} & -0.6910011040 \\ 0 & 0 & -2281.829 & 3.376934 & -320591.0 \\ 0 & -\frac{5838296731}{5} & 1.795363050 \times 10^{7} & -8478.119556 & 8.065438327 \times 10^{8} \end{bmatrix} \quad \textbf{(42)}$$

> $A7 := addrow(A6, 2, 4, -A6[4, 2])$

$$A7 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5203}{100} & \frac{4}{5} & -0.0003777777778 & 35.93897111 \\ 0 & 1 & -0.01536029312 & 7.256492085 \times 10^{-6} & -0.6910011040 \\ 0 & 0 & -2281.829 & 3.376934 & -320591.0 \\ 0 & 0 & 18040.68 & -5.008752 & -310064.6 \end{bmatrix} \quad \textbf{(43)}$$

> $A8 := mulrow\left(A7, 3, \frac{1}{A7[3, 3]}\right)$

$$A8 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5203}{100} & \frac{4}{5} & -0.0003777777778 & 35.93897111 \\ 0 & 1 & -0.01536029312 & 7.256492085 \times 10^{-6} & -0.6910011040 \\ -0. & -0. & 1.000000000 & -0.001479924219 & 140.4973817 \\ 0 & 0 & 18040.68 & -5.008752 & -310064.6 \end{bmatrix} \quad \textbf{(44)}$$

> $A9 := addrow(A8, 3, 4, -A8[4, 3])$

$$A9 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5203}{100} & \frac{4}{5} & -0.0003777777778 & 35.93897111 \\ 0 & 1 & -0.01536029312 & 7.256492085 \times 10^{-6} & -0.6910011040 \\ -0. & -0. & 1.000000000 & -0.001479924219 & 140.4973817 \\ 0. & 0. & 0. & 21.69008726 & -2.844732904 \times 10^{6} \end{bmatrix} \quad \textbf{(45)}$$

> $A10 := mulrow\left(A9, 4, \frac{1}{A9[4, 4]}\right)$

$$A10 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5203}{100} & \frac{4}{5} & -0.0003777777778 & 35.93897111 \\ 0 & 1 & -0.01536029312 & 7.256492085 \times 10^{-6} & -0.6910011040 \\ -0. & -0. & 1.000000000 & -0.001479924219 & 140.4973817 \\ 0. & 0. & 0. & 0.9999999999 & -131153.5943 \end{bmatrix} \quad (46)$$

2) Зворотній хід

> $x4 := A10[4, 5]$

$$x4 := -131153.5943 \quad (47)$$

> $x3 := A10[3, 5] - A10[3, 4] \cdot x4$

$$x3 := -53.5999989 \quad (48)$$

> $x2 := A10[2, 5] - A10[2, 3] \cdot x3 - A10[2, 4] \cdot x4$

$$x2 := -0.5625977793 \quad (49)$$

> $x1 := A10[1, 5] - A10[1, 2] \cdot x2 - A10[1, 3] \cdot x3 - A10[1, 4] \cdot x4$

$$x1 := 0.00009436 \quad (50)$$

> $\xi 11 := A[1, 5] - A[1, 1] \cdot x1 - A[1, 2] \cdot x2 - A[1, 3] \cdot x3 - A[1, 4] \cdot x4$

$$\xi 11 := -0.00002000 \quad (51)$$

> $\xi 12 := A[2, 5] - A[2, 1] \cdot x1 - A[2, 2] \cdot x2 - A[2, 3] \cdot x3 - A[2, 4] \cdot x4$

$$\xi 12 := 0.0051938 \quad (52)$$

> $\xi 13 := A[3, 5] - A[3, 1] \cdot x1 - A[3, 2] \cdot x2 - A[3, 3] \cdot x3 - A[3, 4] \cdot x4$

$$\xi 13 := -0.0238469 \quad (53)$$

> $\xi 14 := A[4, 5] - A[4, 1] \cdot x1 - A[4, 2] \cdot x2 - A[4, 3] \cdot x3 - A[4, 4] \cdot x4$

$$\xi 14 := -0.251167 \quad (54)$$

> $\max(|\xi 11|, |\xi 12|, |\xi 13|, |\xi 14|)$

$$0.251167 \quad (55)$$

Тепер точний розв'язок. Для цього матрицю потрібно записати у вигляді дробів.

$$AT := matrix\left(4, 5, \left[100 \cdot N, -5203 \cdot N, 80 \cdot N, -\frac{17}{10}, \frac{16172537}{100}, -99999 \cdot N, 2000 \cdot N, -\frac{500016}{100}, \frac{16543}{10000}, -\frac{1723125}{100000}, 187452 \cdot N, -16, 100 \cdot N, \frac{15}{10}, -\frac{43712545}{100}, -498712 \cdot N, -5, -\frac{149991}{100000}, -\frac{7}{10 \cdot N}, \frac{5493125}{1000000}\right]\right)$$

>

(56)

$$AT := \begin{bmatrix} 4500 & -234135 & 3600 & -\frac{17}{10} & \frac{16172537}{100} \\ -4499955 & 90000 & -\frac{125004}{25} & \frac{16543}{10000} & -\frac{2757}{160} \\ 8435340 & -16 & 4500 & \frac{3}{2} & -\frac{8742509}{20} \\ -22442040 & -5 & -\frac{149991}{100000} & -\frac{7}{450} & \frac{8789}{1600} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Розв'яжемо методом Гаусса-Жордана через оператор gaussjord

> $XT := delcols(gaussjord(AT), 1..4)$

$$XT := \begin{bmatrix} \frac{3689373131498441617869997}{39094267255347538835669475 00} \\ -\frac{2443817231828773226448 7133}{4343807472816393203963275 0} \\ -\frac{1862625312438302887568 0725}{347504597825311456317062} \\ -\frac{4557648325112644064878589 7285}{347504597825311456317062} \end{bmatrix} \quad (57)$$

> $xt1 := XT[1, 1]; xt2 := XT[2, 1]; xt3 := XT[3, 1]; xt4 := XT[4, 1]$

$$xt1 := \frac{368937313149844161786997}{3909426725534753883566947500}$$

$$xt2 := -\frac{244381723182877322644871 33}{434380747281639320396327 50}$$

$$xt3 := -\frac{186262531243830288756807 25}{347504597825311456317062}$$

$$xt4 := -\frac{455764832511264406487858 97285}{347504597825311456317062} \quad (58)$$

> $\Delta 1 := |xt1 - x1|; \Delta 2 := |xt2 - x2|; \Delta 3 := |xt3 - x3|; \Delta 4 := |xt4 - x4|;$

$$\Delta 1 := 1.120556 \times 10^{-8}$$

$$\Delta 2 := 1.828 \times 10^{-7}$$

$$\Delta 3 := 0.00002033$$

$$\Delta 4 := 0.0179 \quad (59)$$

Абсолютна похибка ± 0.02. А нев'язка $\pm$ 0.25. Абсолютна менше ніж нев'язка.
Відносна похибка:

> $\delta 1 := \frac{\Delta 1}{xt1} \cdot 100; \delta 2 := \frac{\Delta 2}{xt2} \cdot 100; \delta 3 := \frac{\Delta 3}{xt3} \cdot 100; \delta 4 := \frac{\Delta 4}{xt4} \cdot 100;$

$$\delta 1 := 0.01187391846$$

$$\delta 2 := -0.00003249211912$$

$$\delta 3 := -0.00003792909087$$

$$\delta 4 := -0.00001364811819 \tag{60}$$

Перша відносна точність нижча ніж інші.

Задача 3

Для системи рівнянь, заданої в попередній задачі, знайти число обумовленості матриці А.

Розв'язати систему рівнянь, методом Гаусса з вибором провідного елемента. Обчислення виконувати по крокам, з використанням розширеної матриці. При обчисленнях зберігати 10 значущих цифр.

На основі точного розв'язку, знайденого в попередній задачі, визначити абсолютну й відносну похибки наближеного розв'язку системи.

> $Digits := 10$

$$Digits := 10 \tag{61}$$

>

> $AK := delcols(A, 5..5)$

$$AK := \begin{bmatrix} 4500 & -234135 & 3600 & -1.7 \\ -4499955 & 90000 & -5000.16 & 1.6543 \\ 8435340 & -16 & 4500 & 1.5 \\ -22442040 & -5 & -1.49991 & -0.01555555556 \end{bmatrix} \tag{62}$$

Обумовленість матриці:

> $cond(AK)$

Слід очікувати високих похибок

$$2.330505165 \times 10^{7} \tag{63}$$

1) Прямий хід

Знаходимо найбільший елемент в матриці, який буде ведучим.

> $\max([|A[1,1]|, |A[1,2]|, |A[1,3]|, |A[1,4]|], [|A[2,1]|,|A[2,2]|,|A[2,3]|,|A[2,4]|], [|A[3,1]|,|A[3,2]|,|A[3,3]|,|A[3,4]|], [|A[4,1]|,|A[4,2]|,|A[4,3]|,|A[4,4]|])$

$$22442040 \tag{64}$$

Ведучий елемент $A[4, 1]$

> $A1 := mulrow(swaprow(A, 1, 4), 1, 1/A[4, 1])$

$$-22442040$$

$$A1 := \tag{65}$$

$$\left[\left[1, \frac{1}{4488408}, 6.683483320 \times 10^{-8}, 6.931435627 \times 10^{-10}, -2.447694149 \times 10^{-7}\right], \left[-4499955, 90000, -5000.16, 1.6543, -17.23125\right], \left[8435340, -16, 4500, 1.5, -437125.45\right], \left[4500, -234135, 3600, -1.7, 161725.37\right]\right]$$

> $A2 := addrow(A1, 1, 2, -A1[2, 1])$

$A2 :=$ **(66)**

$$\left[\left[1, \frac{1}{4488408}, 6.683483320 \times 10^{-8}, 6.931435627 \times 10^{-10}, -2.447694149 \times 10^{-7}\right], \left[0, \frac{44884579995}{498712}, -4999.859246, 1.657419115, -18.33270135\right], \left[8435340, -16, 4500, 1.5, -437125.45\right], \left[4500, -234135, 3600, -1.7, 161725.37\right]\right]$$

> $A3 := addrow(A2, 1, 3, -A2[3, 1])$

$A3 :=$ **(67)**

$$\left[\left[1, \frac{1}{4488408}, 6.683483320 \times 10^{-8}, 6.931435627 \times 10^{-10}, -2.447694149 \times 10^{-7}\right], \left[0, \frac{44884579995}{498712}, -4999.859246, 1.657419115, -18.33270135\right], \left[0, -\frac{2229163}{124678}, 4499.436225, 1.494153098, -437123.3853\right], \left[4500, -234135, 3600, -1.7, 161725.37\right]\right]$$

> $A4 := addrow(A3, 1, 4, -A3[4, 1])$

$A4 :=$ **(68)**

$$\left[\left[1, \frac{1}{4488408}, 6.683483320 \times 10^{-8}, 6.931435627 \times 10^{-10}, -2.447694149 \times 10^{-7}\right], \left[0, \frac{44884579995}{498712}, -4999.859246, 1.657419115, -18.33270135\right], \left[0, -\frac{2229163}{124678}, 4499.436225, 1.494153098, -437123.3853\right], \left[0, -\frac{29191483655}{124678}, 3599.999699, -1.700003119, 161725.3711\right]\right]$$

> $\max([|A4[1, 1]|, |A4[1, 2]|, |A4[1, 3]|, |A4[1, 4]|], [|A4[2, 1]|, |A4[2, 2]|, |A4[2, 3]|, |A4[2, 4]|], [|A4[3, 1]|, |A4[3, 2]|, |A4[3, 3]|, |A4[3, 4]|], [|A4[4, 1]|, |A4[4, 2]|, |A4[4, 3]|, |A4[4, 4]|])$

(69)

$$\frac{29191483655}{124678} \quad (69)$$

Ведучий елемент $A4[4, 2]$

> $A5 := mulrow\left(swaprow(A4, 2, 4), 2, \frac{1}{A4[4, 2]}\right)$

$$A5 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4488408} & 6.683483320 \times 10^{-8} & 6.931435627 \times 10^{-10} & -2.447694149 \times 10^{-7} \\ 0 & 1 & -0.01537574341 & 7.260781650 \times 10^{-6} & -0.6907355603 \\ 0 & -\frac{2229163}{124678} & 4499.436225 & 1.494153098 & -437123.3853 \\ 0 & \frac{44884579995}{498712} & -4999.859246 & 1.657419115 & -18.33270135 \end{bmatrix} \quad (70)$$

> $A6 := addrow(A5, 2, 3, -A5[3, 2])$

$$A6 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4488408} & 6.683483320 \times 10^{-8} & 6.931435627 \times 10^{-10} & -2.447694149 \times 10^{-7} \\ 0 & 1 & -0.01537574341 & 7.260781650 \times 10^{-6} & -0.6907355603 \\ 0 & 0 & 4499.161317 & 1.494282916 & -437135.7352 \\ 0 & \frac{44884579995}{498712} & -4999.859246 & 1.657419115 & -18.33270135 \end{bmatrix} \quad (71)$$

> $A7 := addrow(A6, 2, 4, -A6[4, 2])$

$$A7 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4488408} & 6.683483320 \times 10^{-8} & 6.931435627 \times 10^{-10} & -2.447694149 \times 10^{-7} \\ 0 & 1 & -0.01537574341 & 7.260781650 \times 10^{-6} & -0.6907355603 \\ 0 & 0 & 4499.161317 & 1.494282916 & -437135.7352 \\ 0 & 0 & -3616.026924 & 1.003941487 & 62148.56024 \end{bmatrix} \quad (72)$$

> $\max([|A7[1, 1]|, |A7[1, 2]|, |A4[1, 3]|, |A7[1, 4]|], [|A7[2, 1]|, |A7[2, 2]|, |A7[2, 3]|, |A7[2, 4]|], [|A7[3, 1]|, |A7[3, 2]|, |A7[3, 3]|, |A7[3, 4]|], [|A7[4, 1]|, |A7[4, 2]|, |A7[4, 3]|, |A7[4, 4]|])$

$$4499.161317 \quad (73)$$

Ведучий елемент $A7[3, 3]$

> $A8 := mulrow\left(A7, 3, \frac{1}{A7[3, 3]}\right)$

(74)

$$A8 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4488408} & 6.683483320 \times 10^{-8} & 6.931435627 \times 10^{-10} & -2.447694149 \times 10^{-7} \\ 0 & 1 & -0.01537574341 & 7.260781650 \times 10^{-6} & -0.6907355603 \\ 0. & 0. & 1.000000000 & 0.0003321247697 & -97.15938248 \\ 0 & 0 & -3616.026924 & 1.003941487 & 62148.56024 \end{bmatrix} \quad \textbf{(74)}$$

> $A9 := addrow(A8, 3, 4, -A8[4, 3])$

$$A9 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4488408} & 6.683483320 \times 10^{-8} & 6.931435627 \times 10^{-10} & -2.447694149 \times 10^{-7} \\ 0 & 1 & -0.01537574341 & 7.260781650 \times 10^{-6} & -0.6907355603 \\ 0. & 0. & 1.000000000 & 0.0003321247697 & -97.15938248 \\ 0. & 0. & 0. & 2.204913596 & -289182.3828 \end{bmatrix} \quad \textbf{(75)}$$

> $A10 := mulrow(A9, 4, 1/A9[4, 4])$

$$A10 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4488408} & 6.683483320 \times 10^{-8} & 6.931435627 \times 10^{-10} & -2.447694149 \times 10^{-7} \\ 0 & 1 & -0.01537574341 & 7.260781650 \times 10^{-6} & -0.6907355603 \\ 0. & 0. & 1.000000000 & 0.0003321247697 & -97.15938248 \\ 0. & 0. & 0. & 1.000000000 & -131153.6122 \end{bmatrix} \quad \textbf{(76)}$$

>

2) Зворотній хід

> $x14 := A10[4, 5]$

$$x14 := -131153.6122 \quad \textbf{(77)}$$

> $x13 := A10[3, 5] - A10[3, 4] \cdot x4$

$$x13 := -53.60002518 \quad \textbf{(78)}$$

> $x12 := A10[2, 5] - A10[2, 4] \cdot x4 - A10[2, 3] \cdot x3$

$$x12 := -0.5625977794 \quad \textbf{(79)}$$

> $x11 := A10[1, 5] - A10[1, 4] \cdot x4 - A10[1, 3] \cdot x3 - A10[1, 2] \cdot x2$

$$x11 := 0.00009437119181 \quad \textbf{(80)}$$

> $\xi 21 := A10[1, 5] - A10[1, 1] \cdot x11 - A10[1, 2] \cdot x12 - A10[1, 3] \cdot x13 - A10[1, 4] \cdot x14$

$$\xi 21 := 1.416 \times 10^{-11} \quad \textbf{(81)}$$

> $\xi 22 := A10[2, 5] - A10[2, 1] \cdot x11 - A10[2, 2] \cdot x12 - A10[2, 3] \cdot x13 - A10[2, 4] \cdot x14$

$$\xi 22 := -2.740 \times 10^{-7} \quad \textbf{(82)}$$

> $\xi 23 := A10[3, 5] - A10[3, 1] \cdot x11 - A10[3, 2] \cdot x12 - A10[3, 3] \cdot x13 - A10[3, 4] \cdot x14$

$$\xi 23 := 5.95 \times 10^{-6} \quad \textbf{(83)}$$

> $\xi 24 := A10[4, 5] - A10[4, 1] \cdot x11 - A10[4, 2] \cdot x12 - A10[4, 3] \cdot x13 - A10[4, 4] \cdot x14$

$$\xi 24 := 0. \quad (84)$$

> $\max(|\xi 21|, |\xi 22|, |\xi 23|, |\xi 24|)$

$$5.95 \times 10^{-6} \quad (85)$$

Якщо робити висновок на підставі значень нев'язок, розв'язок вийшов набагато точнішим. Тепер знайдемо абсолютну похибку.

> $\Delta 11 := |xt1 - x11|; \Delta 12 := |xt2 - x12|; \Delta 13 := |xt3 - x13|; \Delta 14 := |xt4 - x14|;$

$$\Delta 11 := 1.375 \times 10^{-11}$$

$$\Delta 12 := 1.827 \times 10^{-7}$$

$$\Delta 13 := 5.95 \times 10^{-6}$$

$$\Delta 14 := 0. \quad (86)$$

Абсолютна похибка вказує, що точність ± 0

Висновок: метод Гаусса з вибором провідного елемента показує набагато кращу точність, ніж метод з прямим діленням.

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>