**Міністерство освіти і науки України**
**ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**
**ім. Богдана Хмельницького**

**Факультет** Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем
**Кафедра** Програмного забезпечення автоматизованих систем

# Лабораторна робота №5
## по дисципліні «Вища математика»

Тема:Апроксимація функції многочленом 2-го або 3-го порядку

**Варіант** 45-25=20

**Виконав:** студент гр. КС-231
Киба Д.В.

**Перевірив:** старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2023

## *Теоретичні відомості*

### Апроксимаця табличних функцій степеневими поліномами

Розглянемо загальні математичні моделі, які можна отримати при апроксимації табличних функцій степеневим поліномом.

Постановка задачі

В результаті інженерного або наукового експерименту отримана система точок $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)\}$. Необхідно знайти степеневий поліном виду:

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \quad (5.1)$$

такий, щоб сума квадратів відхилень полінома $Q(x)$ від заданої системи експериментальних точок була би мінімальною. Така задача зводиться до визначення коефіцієнтів поліному $\{a_0, a_1, a_2, \ldots a_m\}$. Метод, що дозволяє розв'язати її називається ***методом найменших квадратів (МНК)***. Критерій середньо квадратичного відхилення (СКО) в даному випадку має вигляд:

$$\sum_{i=0}^{n} (Q(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_m x^m - y_i\right)^2 \Rightarrow min \quad (5.2)$$

Розглянемо рисунок 5.1.

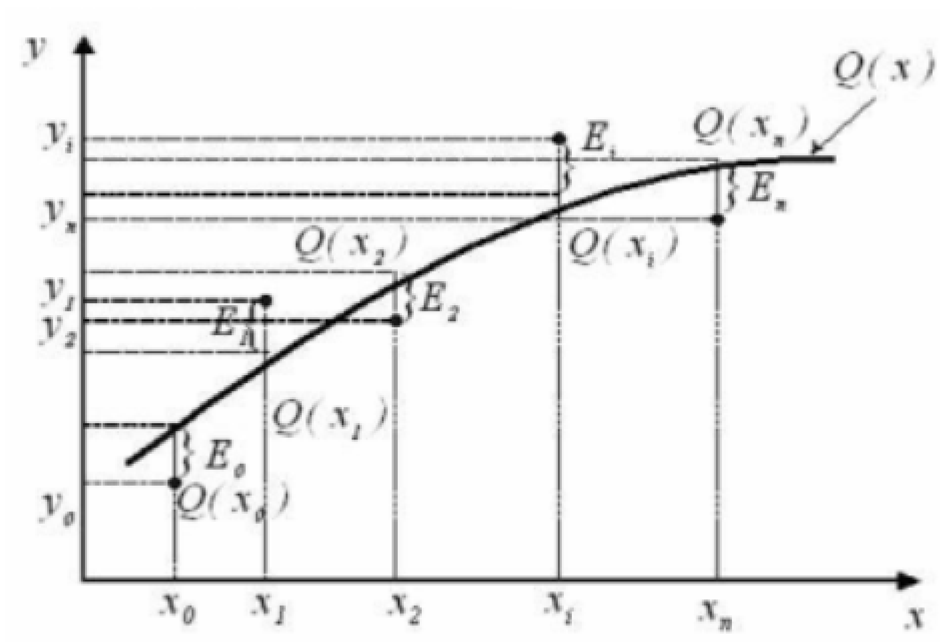



Рисунок 5.1 - Геометрична інтерпретація апроксимації табличної функції З нього видно, що

$E_0(x) = Q(x_0) - y_0$, $E_1(x) = Q(x_1) - y_1$, ..., $E_n(x) = Q(x_n) - y_n$,

тому вираз (5.2) можна представити в вигляді:

$$\sum_i (Q(x_i) - y_i)^2 = \sum_i E_i^2 \Rightarrow min$$

. В результаті отримуємо систему рівнянь виду:

$$\left.\begin{array}{l}
na_0 + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\
a_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 + \ldots + a_m\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+2} + \ldots + a_m\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m y_i
\end{array}\right\} \quad (5.3)$$

Система рівнянь (5.3) представляє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів поліному $\{a_0, a_1, a_2, \ldots a_m\}$, які необхідно знайти, щоб визначити аналітичну залежність, яка описує експериментальний масив даних. Дану систему можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix}
n & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m \\
\sum\limits_{i=0}^{n} x_i & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} \\
\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4 & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+2} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{2m}
\end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 y_i \\ \\ \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m y_i^m \end{bmatrix}$$

Розв'язувати таку систему можна будь-яким з відомих методів розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, наприклад методом Гаусса. Однак задача апроксимації на цьому етапі не завершується.

Якщо для заданого степеня $m$ поліному $Q(x)$ в результаті розрахунків на ЕОМ отриманий поліном не відповідає заданої похибки обчислень $\varepsilon$, то необхідно збільшити ступень поліному на 1 (тобто степінь полінома буде $m+1$), при цьому на одиницю збільшується кількість коефіцієнтів поліному (додається новий член степеневого поліному), які необхідно знову розраховувати. При цьому розмір системи (6.7) збільшується на 1, і для визначення нових коефіцієнтів $\{a_0, a_1, \ldots a_m\}$ необхідно знову розв'язувати систему (6.7) методом Гауса. Цей процес повторюється до тих пір, поки не виконається умова

$$\sum_{i=0}^{n} \left(Q(x_i) - y_i\right)^2 \le \varepsilon \quad , \qquad (6.8)$$

де $\varepsilon$ - задана похибка отриманих результатів.

## ЗАВДАННЯ НА ЛАБОРАТОРНУ РОБОТУ

Функція для кожного з 25 варіантів задана таблицею значень (дивись файл Варіанти_25.xls). Побудувати апроксимаційні поліноми 1-го та 2-го порядків методом найменших квадратів. Нанести на малюнок задані точки і графік поліному.

Знайти середнє квадратичне відхилення точок від апроксимуючої функції. Обчислення можна виконувати в Maple або в MS Excel.

Після освоєння способу знаходження апроксимуючих многочленів та обчислення середнього квадратичного відхилення (СКВ) спробувати знайти найбільш підходящий степінь, який буде давати похибку (СКВ) не вище 10%.

```
Error, missing operator or `;`
```

Імпортуємо вектор X з таблички з варіантами

```
> X := ExcelTools:-Import("D:\\Downloads\\Варіанти_25.xls", "Sheet1", "A3:A27");
```

$$X := \begin{bmatrix} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \\ 7. \\ 8. \\ 9. \\ 10. \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{1}$$

25 × 1 Matrix

```
> X(1)
```

$$1. \tag{2}$$

```
> X(25)
```

$$25. \tag{3}$$

Все імпортувалося успішно.

Імпортуємо вектор $Y$ з таблички з варіантами

```
> Y := ExcelTools:-Import("D:\\Downloads\\Варіанти_25.xls", "Sheet1", "U3:U27");
```

$$\begin{bmatrix} 11.0710723726326 \\ 18.6143293380473 \\ 28.2825615178309 \\ 39.1630229191816 \\ 47.4500954342648 \\ 43.6032196960862 \\ 54.7174286926609 \\ 41.8379377799207 \\ 60.1730706284564 \\ 52.6049258072369 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

25 × 1 Matrix

$$Y := \begin{bmatrix} 11.0710723726326 \\ 18.6143293380473 \\ 28.2825615178309 \\ 39.1630229191816 \\ 47.4500954342648 \\ 43.6032196960862 \\ 54.7174286926609 \\ 41.8379377799207 \\ 60.1730706284564 \\ 52.6049258072369 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{4}$$

25 × 1 Matrix

> $Y(1); Y(25)$

$$11.0710723726326$$
$$70.2984394984220 \tag{5}$$

Все імпортувалося успішно.

Тепер спробуємо побудувати графік точок.

> $plot(\{X(i), Y(i), i=1..25\}, x=0..105, 0..120, style=point, symbol=box)$

Error, index out of bounds

Не вийшло. Спробуємо інший спосіб. Підключаємо бібліотеку *Statistics*.

>

> **with(Statistics)**

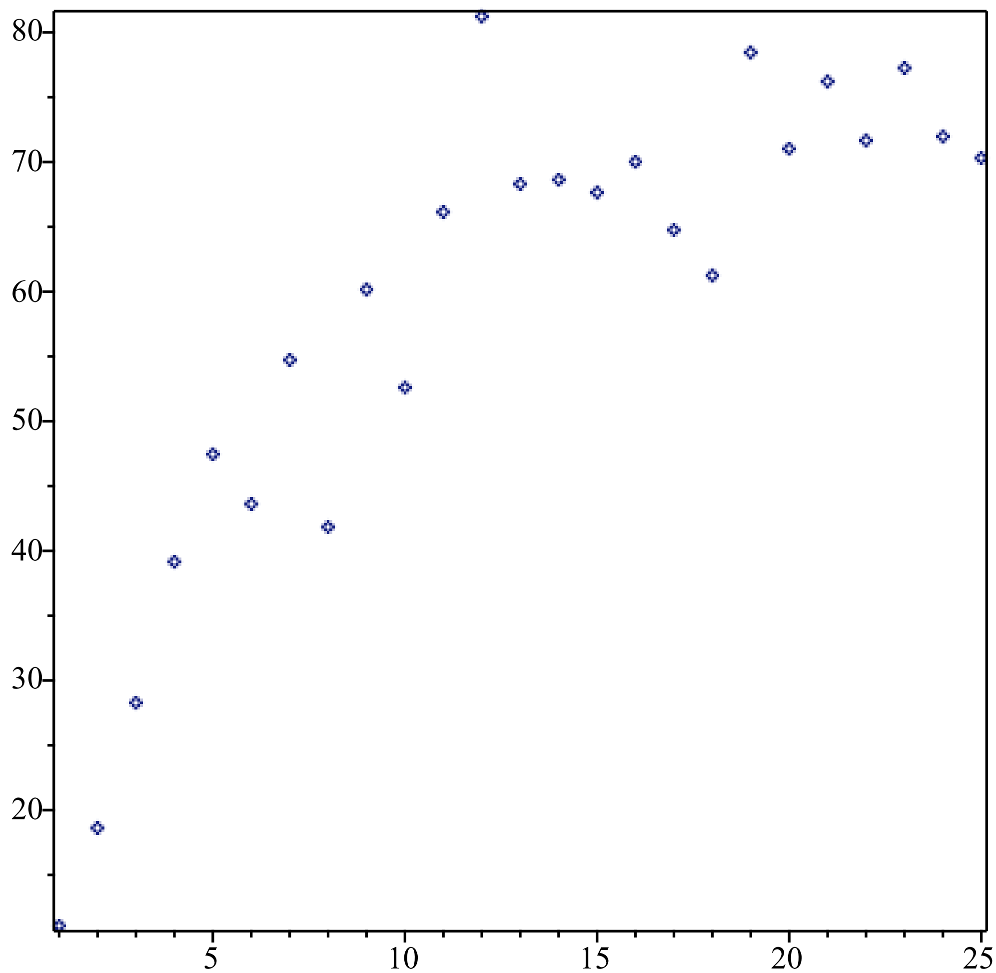
Error, unable to parse

$\boxed{Statistics.}$

[*AbsoluteDeviation*, *AgglomeratedPlot*, *AreaChart*, *AutoCorrelation*, *AutoCorrelationPlot*, *BarChart*, *Biplot*, *Bootstrap*, *BoxPlot*, *BubblePlot*, *CDF*, *CGF*, *CentralMoment*, *CharacteristicFunction*, *ChiSquareGoodnessOfFitTest*, *ChiSquareIndependenceTest*, *ChiSquareSuitableModelTest*, *ColumnGraph*, *Correlation*, *CorrelationMatrix*, *Correlogram*, *Count*, *CountMissing*, *Covariance*, *CovarianceMatrix*, *CrossCorrelation*, *Cumulant*, *CumulantGeneratingFunction*, *CumulativeDistributionFunction*, *CumulativeProduct*, *CumulativeSum*, *CumulativeSumChart*, *DataSummary*, *Decile*, *DensityPlot*, *Detrend*, *Difference*, *DiscreteValueMap*, *Distribution*, *ErrorPlot*, *EvaluateToFloat*, *Excise*, *ExpectedValue*, *ExponentialFit*, *ExponentialSmoothing*, *FailureRate*, *FisherInformation*, *Fit*, *FivePointSummary*, *FrequencyPlot*, *FrequencyTable*, *GeometricMean*, *GridPlot*, *HarmonicMean*, *HazardRate*, *HeatMap*, *Histogram*, *HodgesLehmann*, *Information*, *InteractiveDataAnalysis*, *InterquartileRange*, *InverseSurvivalFunction*, *Join*, *KernelDensity*, *KernelDensityPlot*, *KernelDensitySample*, *Kurtosis*, *LeastTrimmedSquares*, *Likelihood*, *LikelihoodRatioStatistic*, *LineChart*, *LinearFilter*, *LinearFit*, *LogLikelihood*, *LogarithmicFit*, *Lowess*, *MGF*, *MLE*, *MakeProcedure*, *MaximumLikelihoodEstimate*, *Mean*, *MeanDeviation*, *Median*, *MedianDeviation*, *MillsRatio*, *Mode*, *Moment*, *MomentGeneratingFunction*, *MovingAverage*, *MovingMedian*, *MovingStatistic*, *NonlinearFit*, *NormalPlot*, *OneSampleChiSquareTest*, *OneSampleTTest*, *OneSampleZTest*, *OneWayANOVA*, *OrderByRank*, *OrderStatistic*, *PCA*, *PDF*, *ParetoChart*, *Percentile*, *PieChart*, *PointPlot*, *PolynomialFit*, *PowerFit*, *PredictiveLeastSquares*, *PrincipalComponentAnalysis*, *Probability*, *ProbabilityDensityFunction*, *ProbabilityFunction*, *ProbabilityPlot*, *ProfileLikelihood*, *ProfileLogLikelihood*, *QuadraticMean*, *Quantile*, *QuantilePlot*, *Quartile*, *RandomVariable*, *Range*, *Rank*, *Remove*, *RemoveInRange*, *RemoveNonNumeric*, *RepeatedMedianEstimator*, *RousseeuwCrouxQn*, *RousseeuwCrouxSn*, *Sample*, *Scale*, *ScatterPlot*, *ScatterPlot3D*, *Score*, *ScreePlot*, *Select*, *SelectInRange*, *SelectNonNumeric*, *ShapiroWilkWTest*, *Shuffle*, *Skewness*, *Sort*, *Specialize*, *SplitByColumn*, *StandardDeviation*, *StandardError*, *StandardizedMoment*, *SunflowerPlot*, *Support*, *SurfacePlot*, *SurvivalFunction*, *SymmetryPlot*, *Tally*, *TallyInto*, *TreeMap*, *Trim*, *TrimmedMean*, *TwoSampleFTest*, *TwoSamplePairedTTest*, *TwoSampleTTest*, *TwoSampleZTest*, *Variance*, *Variation*, *VennDiagram*, *ViolinPlot*, *WeibullPlot*, *WeightedMovingAverage*, *Winsorize*, *WinsorizedMean*] **(6)**

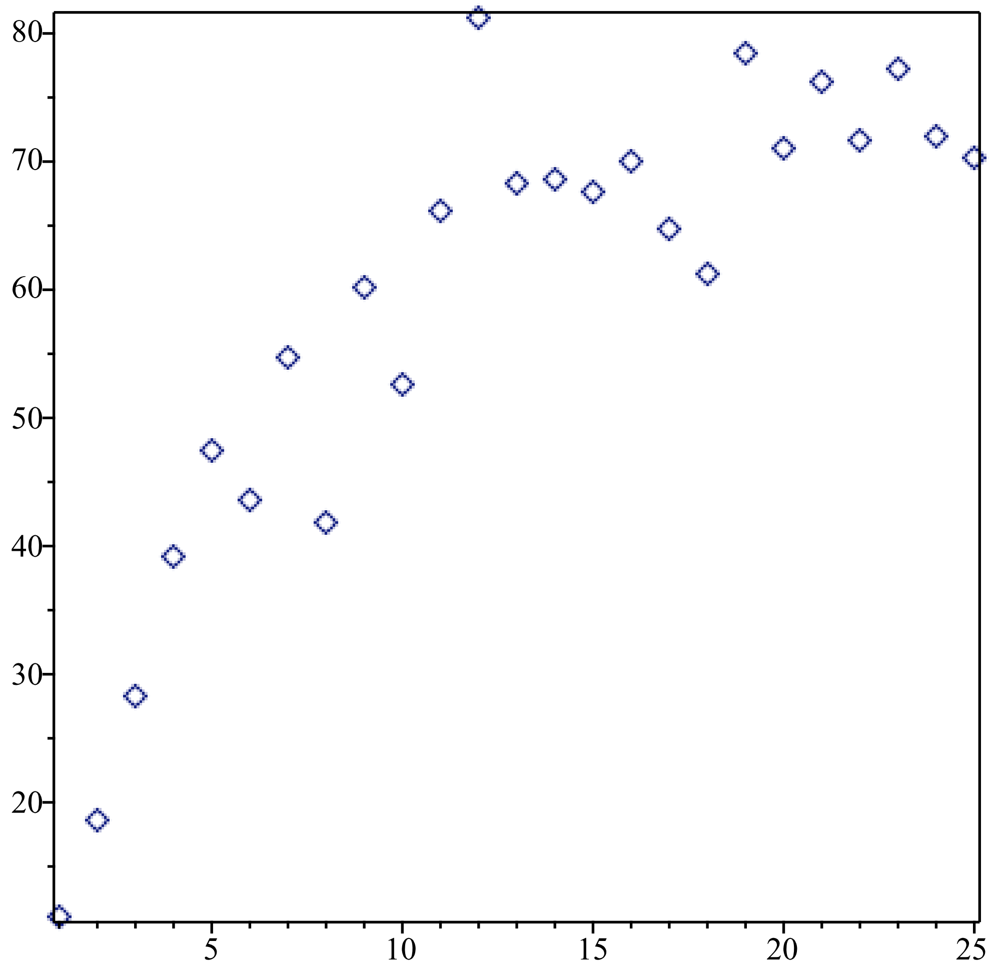
За допомогою оператра ScatterPlot відразу будуємо графік точок.

> $points := ScatterPlot(X, Y)$




Збільшимо розмір точок для наглядності.

> $plots[display](points, symbolsize = 18)$




Щоб побудувати апроксимаційний многочлен, використовуємо оператор Fit з пакету Statistics.

> $?Fit$

Будуємо многочлен другого порядку

> $Fit(a + b\cdot t + c\cdot t^2, X, Y, t)$

$$10.5901906662646 + 6.57381549608618\, t - 0.169936900748432\, t^2 \quad \mathbf{(7)}$$

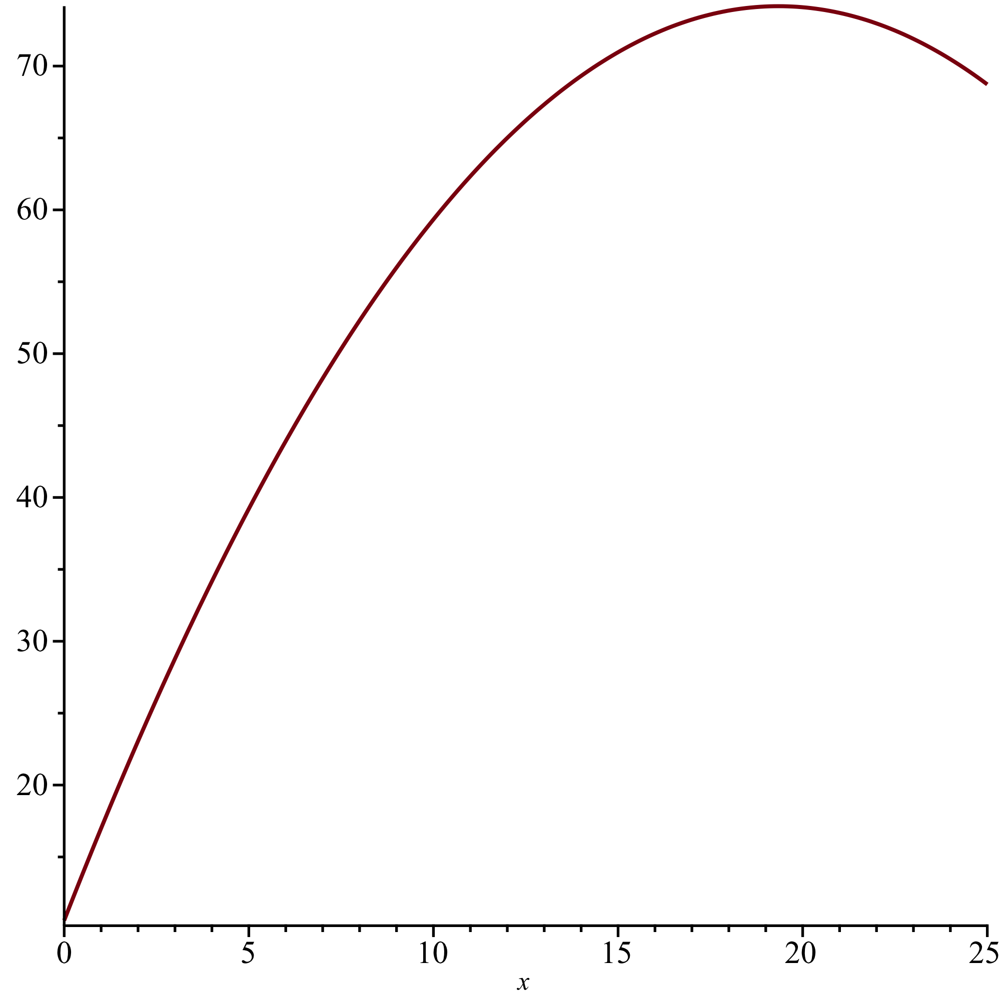
Будуємо многочлен першого порядку

> $Fit(a + b\cdot t, X, Y, t)$

$$30.4728080538312 + 2.15545607662694\, t \quad \mathbf{(8)}$$

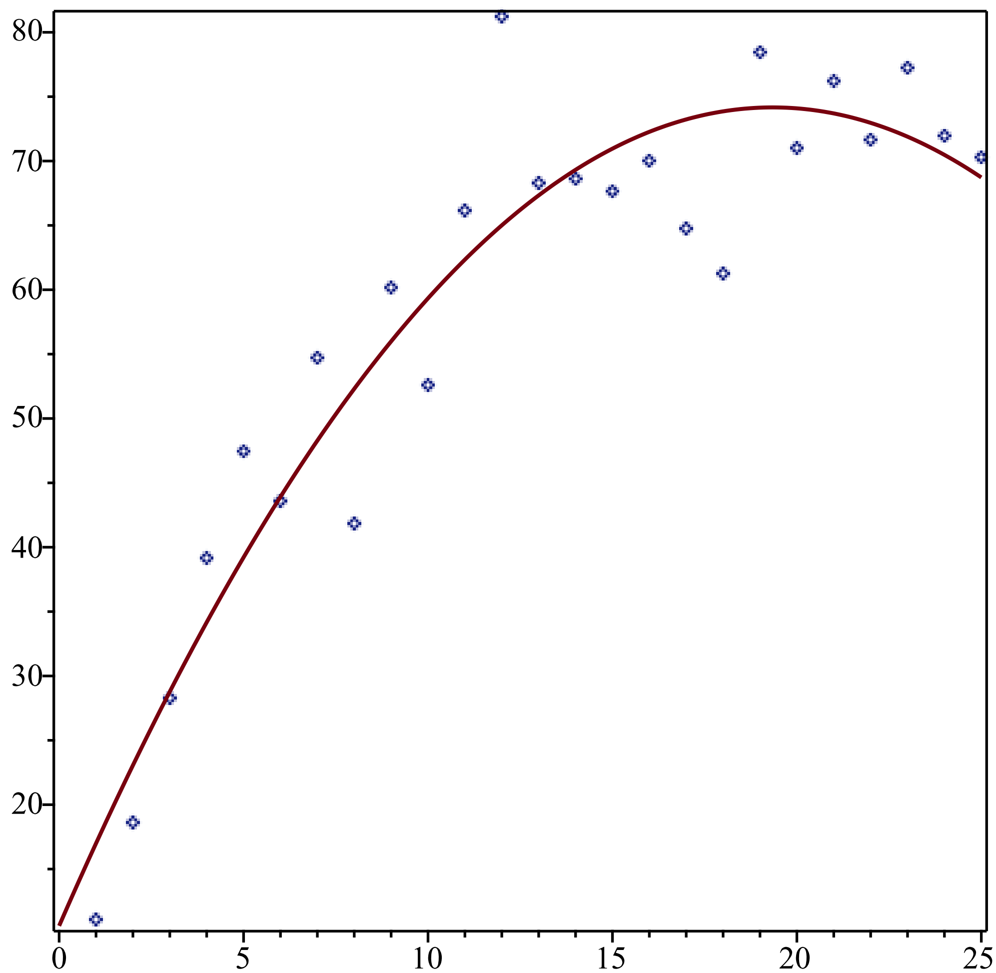
Будуємо графік многочлена другого порядку

> $A2 := plot(10.5901906662646 + 6.57381549608618\, x - 0.169936900748432\, x^2, x = 0\,..25)$



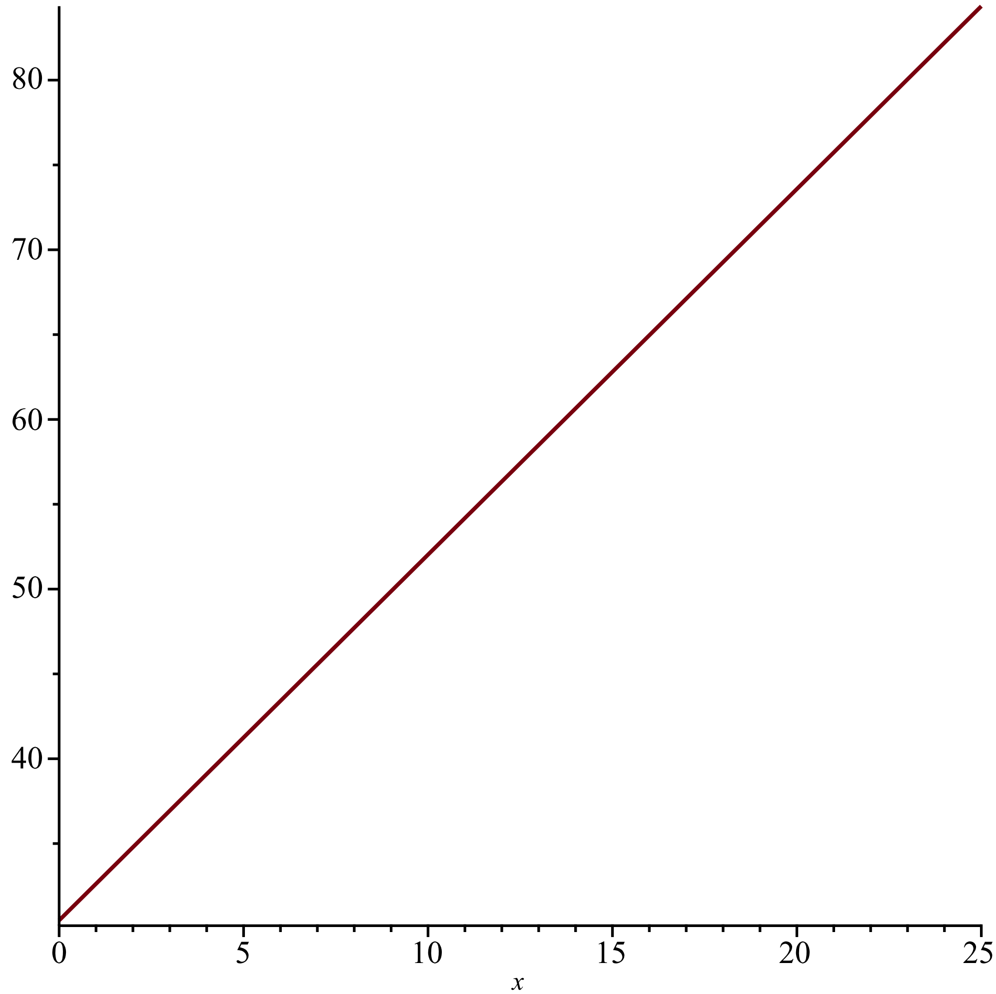

Накладаємо графік наших точок на многочлен другого порядку. Бачимо дуже мало збігів

> $plots[display]([points, A2])$



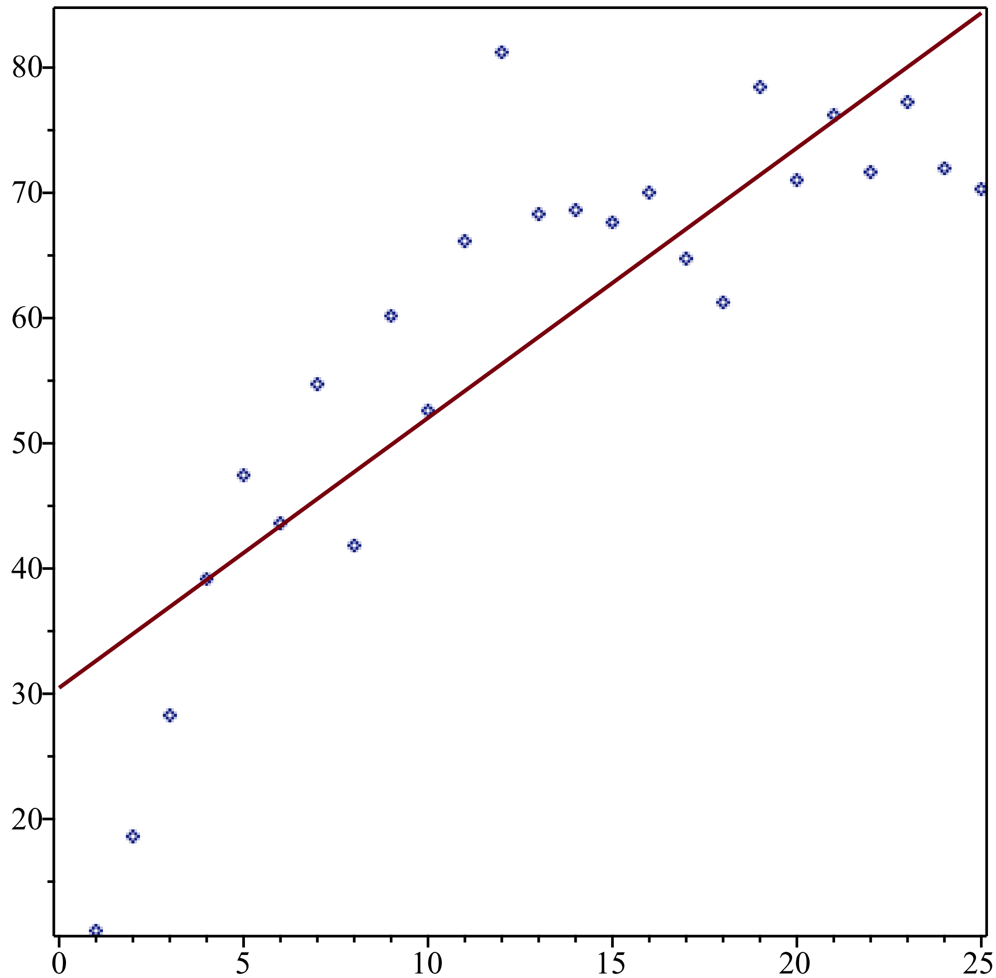

Будуємо графік многочлена першого порядку

> $A1 := plot(30.4728080538312 + 2.15545607662694\,x, x = 0\,..25)$




Накладаємо графік наших точок на многочлен першого порядку. Бачимо дуже мало збігів

> $plots[display]([points, A1])$



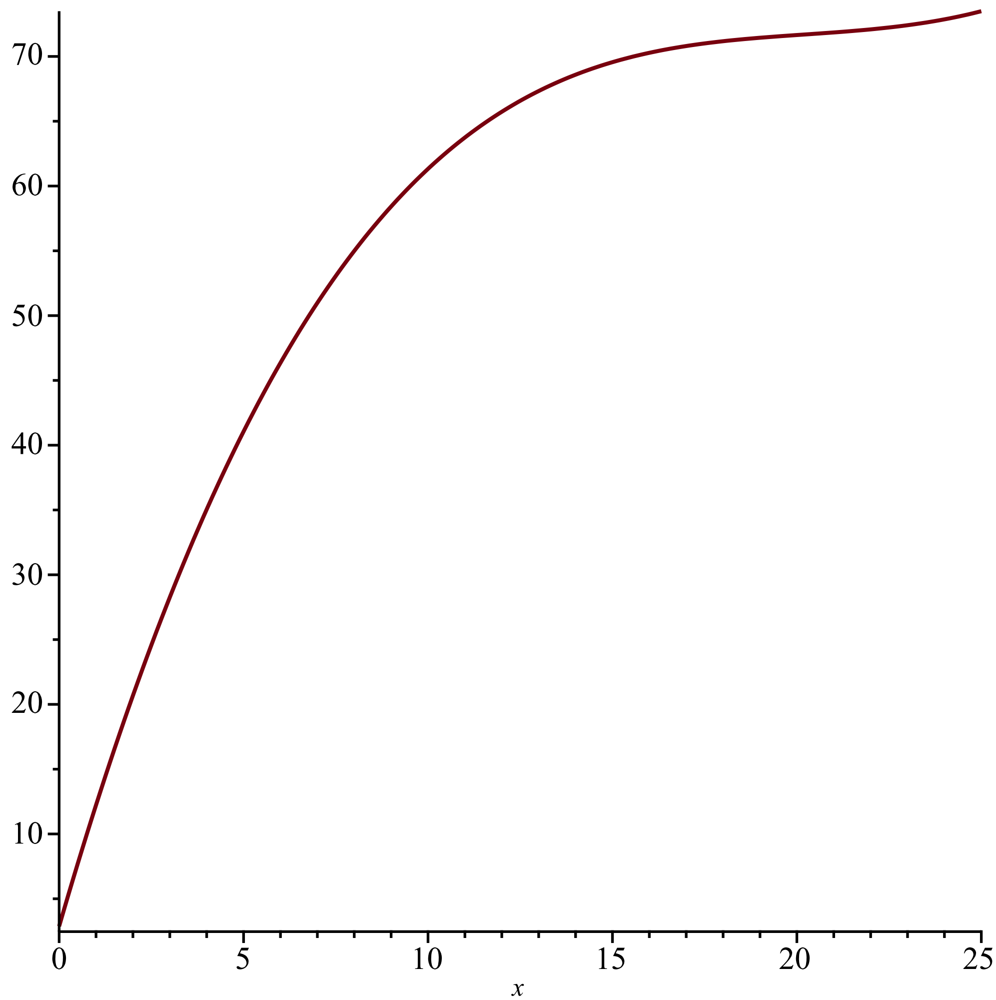

Будуємо многочлен третього порядку

> $p3 := Fit\left(a + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3, X, Y, t\right)$

$$p3 := 2.87469596686990 + 9.82079210136667\, t - 0.476107325327588\, t^2 + 0.00785052370715784\, t^3 \qquad \textbf{(9)}$$

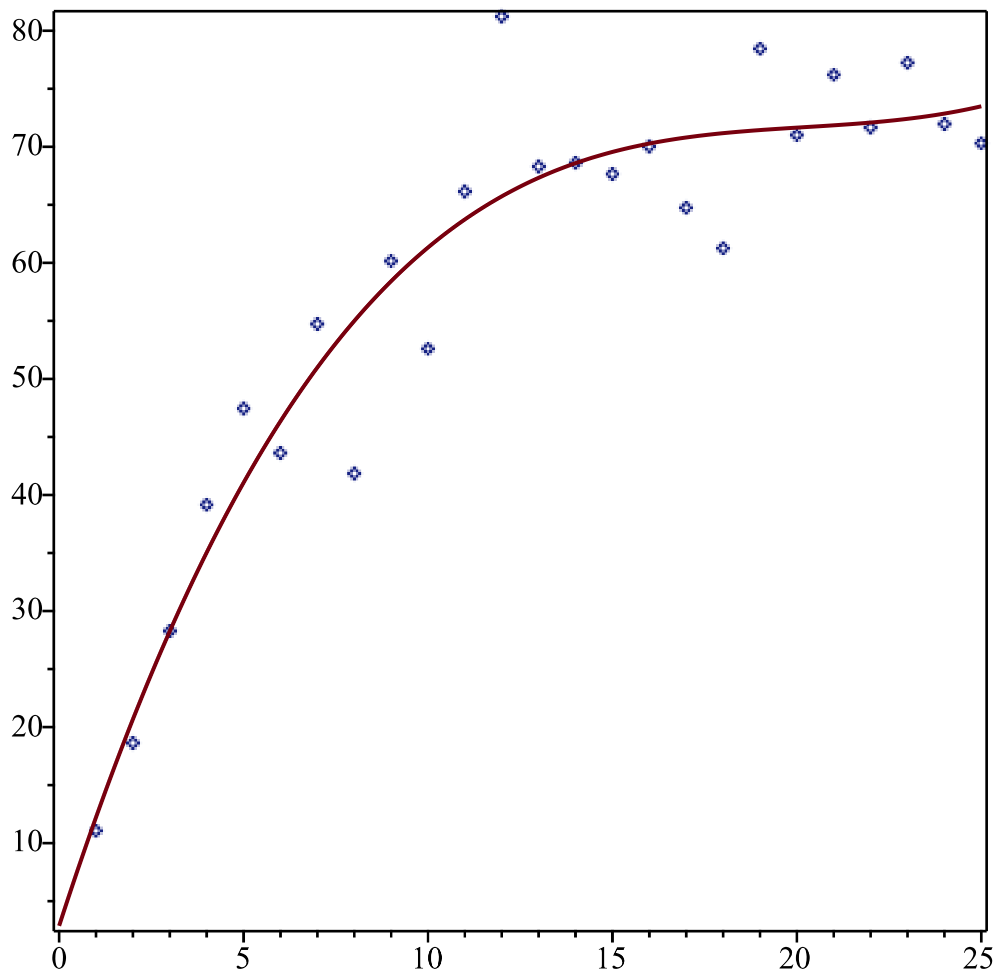
Будуємо графік многочлена третього порядку

> $A3 := plot\left(2.87469596686990 + 9.82079210136667\, x - 0.476107325327588\, x^2 + 0.00785052370715784\, x^3, x = 0\, ..25\right)$




Накладаємо графік наших точок на многочлен третього порядку. Бачимо більше збігів.

> $plots[display]([points, A3])$



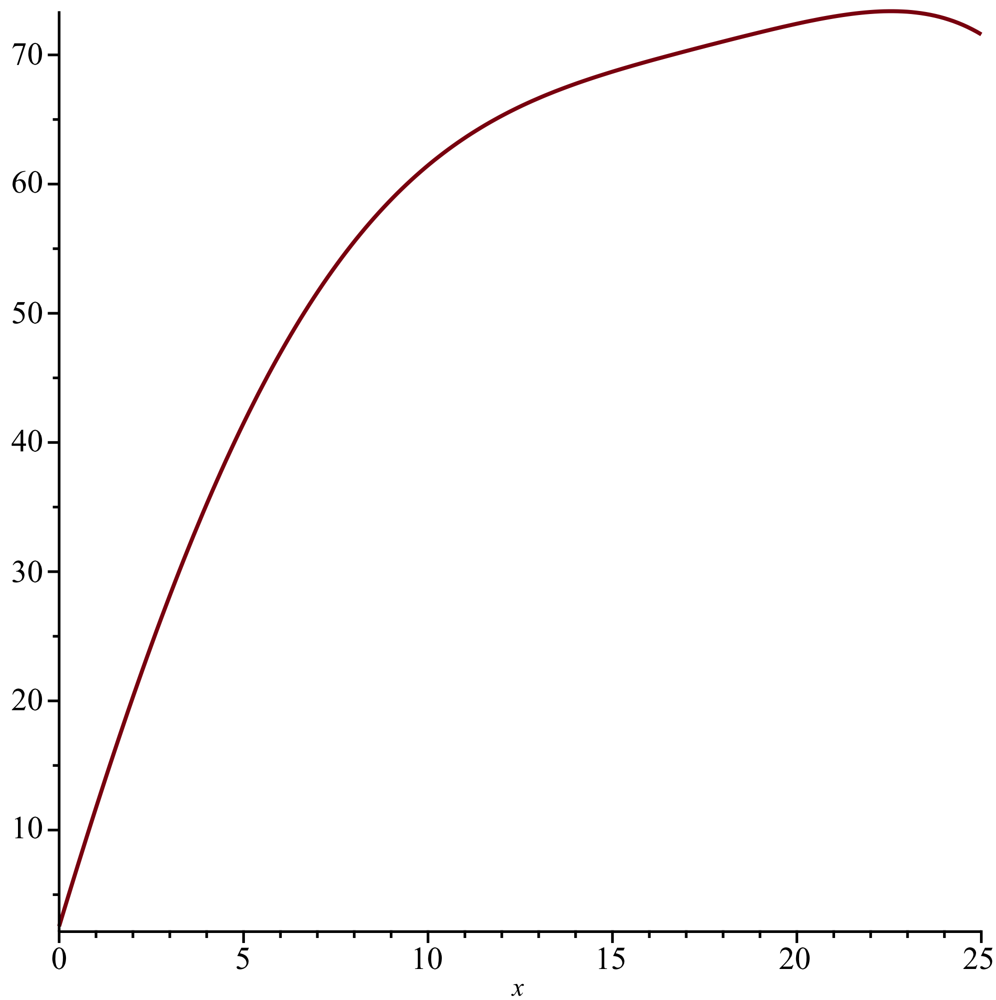

Будуємо многочлен п'ятого порядку

> $p5 := Fit(a + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3 + e \cdot t^4 + f \cdot t^5, X, Y, t)$

$$p5 := 2.55150921526711 + 9.43983161676050\, t - 0.234963521707032\, t^2 - 0.0278476523233629\, t^3 + 0.00193251828394986\, t^4 - 0.0000348036390697610\, t^5 \quad \textbf{(10)}$$

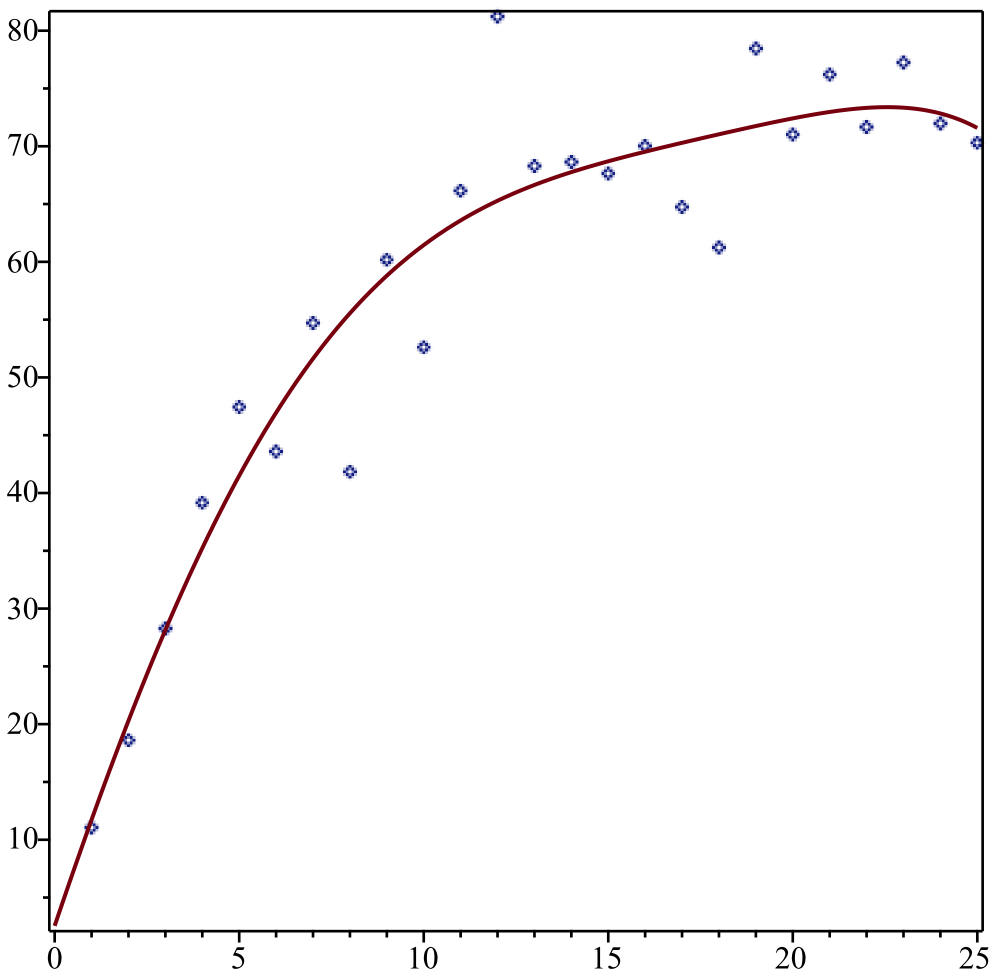
Будуємо графік многочлена п'ятого порядку

> $A5 := plot(2.55150921526711 + 9.43983161676050\, x - 0.234963521707032\, x^2 - 0.0278476523233629\, x^3 + 0.00193251828394986\, x^4 - 0.0000348036390697610\, x^5, x = 0 ..25)$




Накладаємо графік наших точок на многочлен п'ятого порядку. Бачимо більше збігів.

> $plots[display](points, A5)$




Шукаємо суму квадратів відхилення.

> $s := 0$

$$s := 0 \tag{11}$$

До суми додаємо квадрат різниці між значенням функції в точці та значенням многочлена в точці

> **for** $i$ **from** 1 **to** 25
> **do**
> $s := s + (X(i) - subs(t=i, p5))^2$ :
> **end do**:

> $s$

$$55175.9407119677 \tag{12}$$

> $s1 := 55175.9407119677$

$$s1 := 55175.9407119677 \tag{13}$$

Шукаємо середнє квадратичне відхилення

> $SKV := \frac{\operatorname{sqrt}(s1)}{25}$

$$SKV := 9.395823812 \tag{14}$$

>