Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 7
по дисципліні «Вища математика»

Тема: ДОВІЛЬНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ДРУГИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ
Варіант 45

Виконав: студент гр. КС-231
Киба Д.В.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2023

Теоретичні відомості

Система m лінійних рівнянь з n невідомими називається однорідною якщо всі вільні члени b1=b2=...=bm=0 рівні нулю.
Однорідна система завжди сумісна.
Для того, щоб система однорідних рівнянь мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо щоб ранг основної матриці був меншим ніж кількість невідомих.
Для того, щоб однорідна система, у якої кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, мала ненульові розв'зяки, необхідно і достатньо, щоб визначник квадратної матриці коефіцієнтів дорівнював нулю.
Для знаходження фундаментального розв'язку потрібно:
1. r невідомих залишити зліва, а інші перенести вправо.
2. Кожному невідомому в правій частині послідовно задається значення 1, а всім іншим 0.
Загальний розв'язок одноріжної СЛАР може бути записаний у вигляді лінійної комбнації фундаментального розв'зяку системи.
Загальний розв’язок неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнює сумі загального розв’язку однорідної системи і довільного, фіксованого, розв’язку неоднорідної системи.
Знаходження частинного розв'язку:
1.Записуємо розклад стовпчика вільних членів по всім стовпчикам матриці коефіцієнтів A та формуємо частинний розв’язок неоднорідної системи з коефіцієнтів розкладання.
2. Записуємо загальний розв’язок системи як суму загального розв’язку однорідної системи та частинного розв’язку неоднорідної системи.
3. Будь-який частинний розв’язок неоднорідної системи знаходиться при виборі конкретних значень коефіцієнтів розкладання по фундаментальній системі розв’язків.

Другий спосіб розв’язання довільної СЛАР:
1. Спочатку формуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь і знаходимо фундаментальну систему розв’язків.
2. Формуємо загальний розв’язок однорідної системи як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв’язків.
3. Формуємо розширену матрицю неоднорідної системи та приводимо її до редуційованого (ступеневого) виду.
4. Записуємо розклад стовпчика вільних членів по всім стовпчикам матриці коефіцієнтів A та формуємо частинний розв’язок неоднорідної системи з коефіцієнтів розкладання.
5. Записуємо загальний розв’язок системи як суму загального розв’язку однорідної системи та частинного розв’язку неоднорідної системи.
6. Будь-який частинний розв’язок неоднорідної системи знаходиться при виборі

конкретних значень коефіцієнтів розкладання по фундаментальній системі розв'язків.

Задача 1. Система однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь задана матрицею коефіцієнтів.

$$A = \begin{pmatrix} N & -1 & -2N & 3 \\ N & 2 & -1 & 4-N \\ 3N & 0 & -4N-1 & 10-N \\ 4N & 5 & -3-2N & 15-3N \end{pmatrix}$$

Знайти всі базисні розв'язки однорідної системи.

Розв'язання

Послідовність роз'язання:

1. Матрицю коофіцієнтів приводимо до трикутного виду.
2. По трикутному вигляду матриці визначаємо, які рівняння можна викреслити, чому дорівнює ранг матриці, які змінні входять в базисний мінор.
3. Вільні змінні переносимо в праву частину, формуємо еквівалентну СЛАР та розвязуємо її.
4. Для знаходження лінійно незалежних векторів фундаментальної системи розвязків (базисних розвязків однорідної системи) потрібно послідовно надавати значення = 1 кожній із вільних змінних, а всім іншим - 0.
5. Знайдена сукупність невідомих x1, x2, ... ,xn, утворює базисний вектор.
6. Інша система базисних векторів (фундаментальна система) знаходиться при іншому виборі базисних і вільних змінних.

Формуємо матрицю коефіцієнтів:

$$A = \begin{pmatrix} N & -1 & -2N & 3 \\ N & 2 & -1 & 4-N \\ 3N & 0 & -4N-1 & 10-N \\ 4N & 5 & -3-2N & 15-3N \end{pmatrix}$$

> $N := 45$

$$N := 45 \qquad \textbf{(1)}$$

> $A := matrix(4, 4, [N, -1, -2 \cdot N, 3, N, 2, -1, 4 - N, 3 \cdot N, 0, -4 \cdot N - 1, 10 - N, 4 \cdot N, 5, -3 - 2 \cdot N, 15 - 3 \cdot N])$

(2)

$$A := \begin{bmatrix} 45 & -1 & -90 & 3 \\ 45 & 2 & -1 & -41 \\ 135 & 0 & -181 & -35 \\ 180 & 5 & -93 & -120 \end{bmatrix} \tag{2}$$

> $with(linalg):$

Приводимо матрицю до трикутного виду зпа допомогою оператора *gausselim*

> $gausselim(A)$

$$\begin{bmatrix} 45 & -1 & -90 & 3 \\ 0 & 3 & 89 & -44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Ранг матриці = 2. В якості вільних базисних змінних візьмемо x1 та x2

3. Змінні x3, x4 переносимо в праву частину і записуємо розширену матрицю нової еквівалентної системи.

$$A = \begin{pmatrix} N & -1 & -2N & 3 \\ N & 2 & -1 & 4-N \\ 3N & 0 & -4N-1 & 10-N \\ 4N & 5 & -3-2N & 15-3N \end{pmatrix}$$

> $A1 := matrix(2, 3, [N, -1, 2 \cdot N \cdot x3 - 3 \cdot x4, N, 2, x3 - (4-N) \cdot x4])$

$$A1 := \begin{bmatrix} 45 & -1 & 90\,x3 - 3\,x4 \\ 45 & 2 & x3 + 41\,x4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Розвязуємо систему методом Гаусса-Жордана

> $gaussjord(A1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{181\,x3}{135} + \frac{7\,x4}{27} \\ 0 & 1 & -\frac{89\,x3}{3} + \frac{44\,x4}{3} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Розвязки еквіалентної системи задаються формулами:

$$x1 = \frac{181\,x3}{135} + \frac{7\,x4}{27}$$

$x2 = -\frac{89\,x3}{3} + \frac{44\,x4}{3}$

Знаходимо перший базисний вектор

> $x3 := 1; x4 := 0$

$$x3 := 1$$
$$x4 := 0 \tag{6}$$

> $x1 := \frac{181\,x3}{135} + \frac{7\,x4}{27}; x2 := -\frac{89\,x3}{3} + \frac{44\,x4}{3}$

$$x1 := \frac{181}{135}$$
$$x2 := -\frac{89}{3} \tag{7}$$

Перший базисний вектор

> $E11 := matrix(4, 1, [x1, x2, x3, x4])$

$$E11 := \begin{bmatrix} \frac{181}{135} \\ -\frac{89}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Знаходимо другий базисний вектор

> $x3 := 0; x4 := 1$

$$x3 := 0$$
$$x4 := 1 \tag{9}$$

> $x1 := \frac{181\,x3}{135} + \frac{7\,x4}{27}; x2 := -\frac{89\,x3}{3} + \frac{44\,x4}{3}$

$$x1 := \frac{7}{27}$$
$$x2 := \frac{44}{3} \tag{10}$$

Другий базисний вектор

> $E12 := matrix(4, 1, [x1, x2, x3, x4])$

(11)

$$E12 := \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{44}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(11)}$$

Отже, перша фундаментальна система розв'язків складається з векторів

$$\begin{bmatrix} \frac{181}{135} \\ -\frac{89}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{44}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тепер виберемо базисні змінні x1 та x3.

$$A = \begin{pmatrix} N & -1 & -2N & 3 \\ N & 2 & -1 & 4-N \\ 3N & 0 & -4N-1 & 10-N \\ 4N & 5 & -3-2N & 15-3N \end{pmatrix}$$

> *restart*

> $N := 45$

$$N := 45 \quad \textbf{(12)}$$

> $with(linalg):$

Перевіряємо визначник

> $det(matrix(2, 2, [N, -2 \cdot N, N, -1]))$

$$4005 \quad \textbf{(13)}$$

> $A2 := matrix(2, 3, [N, -2 \cdot N, x2 - 3 \cdot x4, N, -1, -2 \cdot x2 - (4 - N) \cdot x4])$

$$A2 := \begin{bmatrix} 45 & -90 & x2 - 3\,x4 \\ 45 & -1 & -2\,x2 + 41\,x4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(14)}$$

> $gaussjord(A2)$

(15)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{181\,x2}{4005}+\frac{1231\,x4}{1335} \\ 0 & 1 & -\frac{3\,x2}{89}+\frac{44\,x4}{89} \end{bmatrix} \quad (15)$$

> $x1 := -\frac{181\,x2}{4005}+\frac{1231\,x4}{1335}; x3 := -\frac{3\,x2}{89}+\frac{44\,x4}{89}$

$$x1 := -\frac{181\,x2}{4005}+\frac{1231\,x4}{1335}$$

$$x3 := -\frac{3\,x2}{89}+\frac{44\,x4}{89} \quad (16)$$

> $x2 := 1; x4 := 0$

$$x2 := 1$$

$$x4 := 0 \quad (17)$$

> $x1 := -\frac{181\,x2}{4005}+\frac{1231\,x4}{1335}; x3 := -\frac{3\,x2}{89}+\frac{44\,x4}{89}$

$$x1 := -\frac{181}{4005}$$

$$x3 := -\frac{3}{89} \quad (18)$$

Перший базисний вектор

> $E21 := matrix\left(4, 1, \left[-\frac{181}{4005}, 1, -\frac{3}{89}, 0\right]\right)$

$$E21 := \begin{bmatrix} -\frac{181}{4005} \\ 1 \\ -\frac{3}{89} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Тепер другий базисний вектор

> $x2 := 0; x4 := 1$

$$x2 := 0$$

$$x4 := 1 \quad (20)$$

> $x1 := -\frac{181\,x2}{4005}+\frac{1231\,x4}{1335}; x3 := -\frac{3\,x2}{89}+\frac{44\,x4}{89}$

$$x1 := \frac{1231}{1335}$$

$$x3 := \frac{44}{89} \quad (21)$$

> $E22 := matrix\left(4, 1, \left[\frac{1231}{1335}, 0, \frac{44}{89}, 1\right]\right)$

$$E22 := \begin{bmatrix} \frac{1231}{1335} \\ 0 \\ \frac{44}{89} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Отже, друга фундаментальна система розв'язків складається з векторів

$$\begin{bmatrix} -\frac{181}{4005} \\ 1 \\ -\frac{3}{89} \\ 0 \end{bmatrix} \text{та} \begin{bmatrix} \frac{1231}{1335} \\ 0 \\ \frac{44}{89} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тепер знайдемо третій базисний розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} N & -1 & -2N & 3 \\ N & 2 & -1 & 4-N \\ 3N & 0 & -4N-1 & 10-N \\ 4N & 5 & -3-2N & 15-3N \end{pmatrix}$$

> $restart$

> $N := 45$

$$N := 45 \quad (23)$$

> $with(linalg):$

Базисні змінні x1 та x4

> $det(matrix(2, 2, [N, 3, N, 4-N]))$

$$-1980 \quad (24)$$

> $A3 := matrix(2, 3, [N, 3, 1 \cdot x2 + 2 \cdot N \cdot x3, N, 4-N, -2 \cdot x2 + 1 \cdot x3])$

(25)

$$A3 := \begin{bmatrix} 45 & 3 & x2 + 90\,x3 \\ 45 & -41 & -2\,x2 + x3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

> $gaussjord(A3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7\,x2}{396} + \frac{1231\,x3}{660} \\ 0 & 1 & \frac{3\,x2}{44} + \frac{89\,x3}{44} \end{bmatrix} \quad (26)$$

> $x2 := 1; x3 := 0$

$$x2 := 1$$
$$x3 := 0 \quad (27)$$

> $x1 := \frac{7\,x2}{396} + \frac{1231\,x3}{660}; x4 := \frac{3\,x2}{44} + \frac{89\,x3}{44}$

$$x1 := \frac{7}{396}$$
$$x4 := \frac{3}{44} \quad (28)$$

Перший базисний вектор

> $E31 := matrix\left(4, 1, \left[\frac{7}{396}, 1, 0, \frac{3}{44}\right]\right)$

$$E31 := \begin{bmatrix} \frac{7}{396} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{44} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$x2 := 0; x3 := 1$

>

$$x2 := 0$$
$$x3 := 1 \quad (30)$$

> $x1 := \frac{7\,x2}{396} + \frac{1231\,x3}{660}; x4 := \frac{3\,x2}{44} + \frac{89\,x3}{44}$

$$x1 := \frac{1231}{660}$$

(31)

$$x4 := \frac{89}{44} \qquad (31)$$

Другий базисний вектор

> $E32 := matrix\left(4, 1, \left[\frac{1231}{660}, 0, 1, \frac{89}{44}\right]\right)$

$$E32 := \begin{bmatrix} \frac{1231}{660} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{89}{44} \end{bmatrix} \qquad (32)$$

Отже, третя фундаментальна система розв'язків складається з векторів

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{396} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{44} \end{bmatrix} \text{та} \begin{bmatrix} \frac{1231}{660} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{89}{44} \end{bmatrix}$$

Тепер шукаємо четвертий базисний розв'язок

> $restart$

> $N := 45$

$$N := 45 \qquad (33)$$

> $with(linalg):$

Базисні змінні x2, x3

$$A = \begin{pmatrix} N & -1 & -2N & 3 \\ N & 2 & -1 & 4-N \\ 3N & 0 & -4N-1 & 10-N \\ 4N & 5 & -3-2N & 15-3N \end{pmatrix}$$

> $det(matrix(2, 2, [-1, -2\cdot N, 2, -1]))$

$$181 \qquad (34)$$

> $A4 := matrix(2, 3, [-1, -2\cdot N, -N\cdot x1 - 3\cdot x4, 2, -1, -N\cdot x1 - (4-N)\cdot x4])$

(35)

$$A4 := \begin{bmatrix} -1 & -90 & -45\,x1 - 3\,x4 \\ 2 & -1 & -45\,x1 + 41\,x4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

> $gaussjord(A4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4005\,x1}{181} + \frac{3693\,x4}{181} \\ 0 & 1 & \frac{135\,x1}{181} - \frac{35\,x4}{181} \end{bmatrix} \quad (36)$$

> $x2 := -\frac{4005\,x1}{181} + \frac{3693\,x4}{181}; x3 := \frac{135\,x1}{181} - \frac{35\,x4}{181}$

$$x2 := -\frac{4005\,x1}{181} + \frac{3693\,x4}{181}$$

$$x3 := \frac{135\,x1}{181} - \frac{35\,x4}{181} \quad (37)$$

> $x1 := 1; x4 := 0$

$$x1 := 1$$

$$x4 := 0 \quad (38)$$

> $x2; x3$

$$-\frac{4005}{181}$$

$$\frac{135}{181} \quad (39)$$

Перший базисний вектор

> $E41 := matrix\left(4, 1, \left[1, -\frac{4005}{181}, \frac{135}{181}, 0\right]\right)$

$$E41 := \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4005}{181} \\ \frac{135}{181} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

> $x1 := 0; x4 := 1$

$$x1 := 0$$

$$x4 := 1 \quad (41)$$

> $x2; x3$

$$\frac{3693}{181}$$
$$-\frac{35}{181} \quad (42)$$

Другий базисний вектор

> $E42 := matrix\left(4, 1, \left[0, \frac{3693}{181}, -\frac{35}{181}, 1\right]\right)$

$$E42 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3693}{181} \\ -\frac{35}{181} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Отже, четверта фундаментальна система розв'язків складається з векторів

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4005}{181} \\ \frac{135}{181} \\ 0 \end{bmatrix} \text{та} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3693}{181} \\ -\frac{35}{181} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тепер п'ятий базисний розв'язок

> $restart$

> $N := 45$

$$N := 45 \quad (44)$$

> $with(linalg):$

$$A = \begin{pmatrix} N & -1 & -2N & 3 \\ N & 2 & -1 & 4-N \\ 3N & 0 & -4N-1 & 10-N \\ 4N & 5 & -3-2N & 15-3N \end{pmatrix}$$

Базисні змінні x2 та x4

> $det(matrix(2, 2, [-1, 3, 2, 4-N]))$

$$35 \quad (45)$$

> $A5 := matrix(2, 3, [-1, 3, N \cdot x1 + 2 \cdot N \cdot x3, 2, 4-N, N \cdot x1 + x3])$

$$A5 := \begin{bmatrix} -1 & 3 & 45\,x1 + 90\,x3 \\ 2 & -41 & 45\,x1 + x3 \end{bmatrix} \tag{46}$$

> $gaussjord(A5)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{396\,x1}{7} - \frac{3693\,x3}{35} \\ 0 & 1 & -\frac{27\,x1}{7} - \frac{181\,x3}{35} \end{bmatrix} \tag{47}$$

> $x2 := -\frac{396\,x1}{7} - \frac{3693\,x3}{35}; x4 := -\frac{27\,x1}{7} - \frac{181\,x3}{35}$

$$x2 := -\frac{396\,x1}{7} - \frac{3693\,x3}{35}$$

$$x4 := -\frac{27\,x1}{7} - \frac{181\,x3}{35} \tag{48}$$

> $x1 := 1; x3 := 0$

$$x1 := 1$$

$$x3 := 0 \tag{49}$$

> $x2; x4$

$$-\frac{396}{7}$$

$$-\frac{27}{7} \tag{50}$$

Перший базисний вектор

> $E51 := matrix\left(4, 1, \left[1, -\frac{396}{7}, 0, -\frac{27}{7}\right]\right)$

$$E51 := \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{396}{7} \\ 0 \\ -\frac{27}{7} \end{bmatrix} \tag{51}$$

> $x1 := 0; x3 := 1$

$$x1 := 0$$

$$x3 := 1 \tag{52}$$

> $x2; x4$

$$-\frac{3693}{35}$$

$$-\frac{181}{35} \quad \textbf{(53)}$$

$E52 := matrix\left(4, 1, \left[0, -\frac{3693}{35}, 1, -\frac{181}{35}\right]\right)$

>

$$E52 := \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3693}{35} \\ 1 \\ -\frac{181}{35} \end{bmatrix} \quad \textbf{(54)}$$

Отже, п'ята фундаментальна система розв'язків складається з векторів $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{396}{7} \\ 0 \\ -\frac{27}{7} \end{bmatrix}$ та $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3693}{35} \\ 1 \\ -\frac{181}{35} \end{bmatrix}$

Тепер шукаємо шостий базисний розв'язок

> $restart$

> $with(linalg):$

> $N := 45$

$$N := 45 \quad \textbf{(55)}$$

$$A = \begin{pmatrix} N & -1 & -2N & 3 \\ N & 2 & -1 & 4-N \\ 3N & 0 & -4N-1 & 10-N \\ 4N & 5 & -3-2N & 15-3N \end{pmatrix}$$

Базисні змінні x3 та x4

> $det(matrix(2, 2, [-2\cdot N, 3, -1, 4-N]))$

$$3693 \qquad (56)$$

> $A6 := matrix(2, 3, [-2\cdot N, 3, -N\cdot x1 + x2, -1, 4-N, -N\cdot x1 - 2\cdot x2])$

$$A6 := \begin{bmatrix} -90 & 3 & -45\,x1 + x2 \\ -1 & -41 & -45\,x1 - 2\,x2 \end{bmatrix} \qquad (57)$$

> $gaussjord(A6)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{660\,x1}{1231} - \frac{35\,x2}{3693} \\ 0 & 1 & \frac{1335\,x1}{1231} + \frac{181\,x2}{3693} \end{bmatrix} \qquad (58)$$

> $x3 := \frac{660\,x1}{1231} - \frac{35\,x2}{3693}; x4 := \frac{1335\,x1}{1231} + \frac{181\,x2}{3693}$

$$x3 := \frac{660\,x1}{1231} - \frac{35\,x2}{3693}$$

$$x4 := \frac{1335\,x1}{1231} + \frac{181\,x2}{3693} \qquad (59)$$

> $x1 := 1; x2 := 0$

$$x1 := 1$$

$$x2 := 0 \qquad (60)$$

> $x3; x4$

$$\frac{660}{1231}$$

$$\frac{1335}{1231} \qquad (61)$$

Перший базисний вектор

> $E61 := matrix\left(4, 1, \left[1, 0, \frac{660}{1231}, \frac{1335}{1231}\right]\right)$

$$E61 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{660}{1231} \\ \frac{1335}{1231} \end{bmatrix} \quad \textbf{(62)}$$

> $x1 := 0; x2 := 1$

$$x1 := 0$$
$$x2 := 1 \quad \textbf{(63)}$$

> $x3; x4$

$$-\frac{35}{3693}$$
$$\frac{181}{3693} \quad \textbf{(64)}$$

Другий базисний вектор

> $E62 := matrix\left(4, 1, \left[0, 1, -\frac{35}{3693}, \frac{181}{3693}\right]\right)$

$$E62 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{35}{3693} \\ \frac{181}{3693} \end{bmatrix} \quad \textbf{(65)}$$

Отже, шоста фундаментальна система розв'язків складається з векторів $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{660}{1231} \\ \frac{1335}{1231} \end{bmatrix}$

та $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{35}{3693} \\ \frac{181}{3693} \end{bmatrix}$

Задача 2. Система однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь задана матрицею коефіцієнтів.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & N & 2 & -3N & 2 \\ 2+N & -1 & 3-N & 1 & 4-N \\ 9+3N & N-3 & 11-3N & 3-3N & 14-3N \end{pmatrix}$$

Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи. Виконати перевірку.

> $restart;$
> $with(linalg):;$
> $N := 45$

$$N := 45 \quad (66)$$

> $A := matrix(3, 5, [3, N, 2, -3 \cdot N, 2, 2+N, -1, 3-N, 1, 4-N, 9+3 \cdot N, N-3, 11-3 \cdot N, 3-3 \cdot N, 14-3 \cdot N])$

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 45 & 2 & -135 & 2 \\ 47 & -1 & -42 & 1 & -41 \\ 144 & 42 & -124 & -132 & -121 \end{bmatrix} \quad (67)$$

За допомогою оператоа rank визначимо ранг матриці

> $rank(A)$

$$2 \quad (68)$$

rank(A) = 2, отже потрібно відкинути одне рівняння.
2 базисних змінні - x1, x2
3 вільних змінні - x3, x4, x5 - позначимо як параметри

> $det(matrix(2, 2, [3, N, 2+N, -1]))$

$$-2118 \quad (69)$$

> $A1 := matrix\left(2, 3, \left[3, N, -2 \cdot \alpha + 3 \cdot N \cdot \beta - 2 \cdot \gamma 1, 2+N, -1, -(3-N) \cdot \alpha - \beta + -(4-N) \cdot \gamma 1\right]\right)$

$$A1 := \begin{bmatrix} 3 & 45 & -2\,\alpha + 135\,\beta - 2\,\gamma 1 \\ 47 & -1 & 42\,\alpha - \beta + 41\,\gamma 1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Розв'яжемо систему за допомогою gaussjord

> $gaussjord(A1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{944\,\alpha}{1059}+\frac{15\,\beta}{353}+\frac{1843\,\gamma 1}{2118} \\ 0 & 1 & -\frac{110\,\alpha}{1059}+\frac{1058\,\beta}{353}-\frac{217\,\gamma 1}{2118} \end{bmatrix} \quad (71)$$

> $x1 := \frac{944\,\alpha}{1059}+\frac{15\,\beta}{353}+\frac{1843\,\gamma 1}{2118}; x2 := -\frac{110\,\alpha}{1059}+\frac{1058\,\beta}{353}-\frac{217\,\gamma 1}{2118}; x3 := \alpha;$
$x4 := \beta; x5 := \gamma 1$

$$x1 := \frac{944\,\alpha}{1059}+\frac{15\,\beta}{353}+\frac{1843\,\gamma 1}{2118}$$

$$x2 := -\frac{110\,\alpha}{1059}+\frac{1058\,\beta}{353}-\frac{217\,\gamma 1}{2118}$$

$$x3 := \alpha$$

$$x4 := \beta$$

$$x5 := \gamma 1 \quad (72)$$

Перший базисний розв'язок. Першому параметру дамо значення 1, іншим - 0

> $\alpha := 1; \beta := 0; \gamma 1 := 0; x1; x2; x3; x4; x5$

$$\alpha := 1$$

$$\beta := 0$$

$$\gamma 1 := 0$$

$$\frac{944}{1059}$$

$$-\frac{110}{1059}$$

$$1$$

$$0$$

$$0 \quad (73)$$

> $BR1 := matrix\left(5, 1, \left[\frac{944}{1059}, -\frac{110}{1059}, 1, 0, 0\right]\right)$

$$BR1 := \begin{bmatrix} \frac{944}{1059} \\ -\frac{110}{1059} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

> $\alpha := 0; \beta := 1; \mathit{\gamma 1} := 0; x1; x2; x3; x4; x5$

$$\alpha := 0$$
$$\beta := 1$$
$$\mathit{\gamma 1} := 0$$
$$\frac{15}{353}$$
$$\frac{1058}{353}$$
$$0$$
$$1$$
$$0 \tag{75}$$

> $BR2 := matrix\left(5, 1, \left[\frac{15}{353}, \frac{1058}{353}, 0, 1, 0\right]\right)$

$$BR2 := \begin{bmatrix} \frac{15}{353} \\ \frac{1058}{353} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{76}$$

> $\alpha := 0; \beta := 0; \mathit{\gamma 1} := 1; x1; x2; x3; x4; x5$

$$\alpha := 0$$
$$\beta := 0$$
$$\mathit{\gamma 1} := 1$$
$$\frac{1843}{2118}$$
$$-\frac{217}{2118}$$
$$0$$
$$0$$
$$1 \tag{77}$$

> $BR3 := matrix\left(5, 1, \left[\frac{1843}{2118}, -\frac{217}{2118}, 0, 0, 1\right]\right)$

(78)

$$BR3 := \begin{bmatrix} \frac{1843}{2118} \\ -\frac{217}{2118} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Фундаментальна система розв'язків складається з трьох базисних розвязків - BR1, BR2 і BR3

Загальний розв'язок однорідної системи:

> $XZO := C1 \cdot evalm(BR1) + C2 \cdot evalm(BR2) + C3 \cdot evalm(BR3)$

$$XZO := C1 \begin{bmatrix} \frac{944}{1059} \\ -\frac{110}{1059} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C2 \begin{bmatrix} \frac{15}{353} \\ \frac{1058}{353} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C3 \begin{bmatrix} \frac{1843}{2118} \\ -\frac{217}{2118} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Перевірка. Нехай C1 = C2 = C3 = 1

> $-\frac{110}{1059} + \frac{1058}{353} + -\frac{217}{2118}$

$$\frac{5911}{2118} \quad (80)$$

> $x1 := \frac{944}{1059} + \frac{15}{353} + \frac{1843}{2118}; x2 := -\frac{110}{1059} + \frac{1058}{353} - \frac{217}{2118}; x3 := 1; x4 := 1; x5 := 1$

$$x1 := \frac{3821}{2118}$$

$$x2 := \frac{5911}{2118}$$

$$x3 := 1$$

$$x4 := 1$$

$$x5 := 1 \quad (81)$$

> $3 \cdot x1 + 45 \cdot x2 + 2 \cdot x3 - 135 \cdot x4 + 2 \cdot x5$

$$0 \quad (82)$$

> $47 \cdot x1 + 42 \cdot x2 - 124 \cdot x3 - 132 \cdot x4 - 121 \cdot x5$

$$0 \quad (83)$$

> $3 \cdot x1 + 85 \cdot x2 + 2 \cdot x3 - 255 \cdot x4 + 2 \cdot x5$

$$0 \quad (84)$$

> $restart$

Отже, загальний фундаментальний розв'язок знайдений правильно

Задача 3. Система неоднорідних лінійних алгебраїчних рівнянь задана розширеною матрицею коефіцієнтів.
Знайти фундаментальну систему розв’язків однорідної системи та загальний розв’язок неоднорідної системи. Знайти два частинних розв’язка неоднорідної системи. Виконати перевірку.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 3\cdot N & 4\cdot N & N & 2\cdot N & 3\cdot N & 3\cdot N \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6\cdot N & 5 & 9-3\cdot N \end{pmatrix}$$

> $N := 45$

$$N := 45 \quad (85)$$

> $with(linalg):$

> $AR := matrix(4, 6, [3\cdot N, 4\cdot N, N, 2\cdot N, 3\cdot N, 3\cdot N, 5, 7, 1, 3, 4, 5, 4, 5, 2, 1, 5, 5, 7, 10, 1, 6\cdot N, 5, 9 - 3\cdot N])$

$$AR := \begin{bmatrix} 135 & 180 & 45 & 90 & 135 & 135 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 270 & 5 & -126 \end{bmatrix} \quad (86)$$

> $rank(AR)$

$$3 \quad (87)$$

rank(AR) = 3, значить відкидаємо 4-те рівняння
x2, x3, x4- базисні змінні
x1, x5 - вільні, позначимо як параметри α, β

> $det(matrix(3, 3, [180, 45, 900, 7, 1, 3, 5, 2, 1]))$

$$7560 \quad (88)$$

> $A1 := matrix(3, 4, [180, 45, 90, -255\cdot\alpha - 255\cdot\beta, 7, 1, 3, -5\cdot\alpha - 4\cdot\beta, 5, 2, 1, -4\cdot\alpha - 5\cdot\beta])$

$$(89)$$

$$A1 := \begin{bmatrix} 180 & 45 & 90 & -255\,\alpha - 255\,\beta \\ 7 & 1 & 3 & -5\,\alpha - 4\,\beta \\ 5 & 2 & 1 & -4\,\alpha - 5\,\beta \end{bmatrix} \tag{89}$$

> $gaussjord(A1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{14\,\alpha}{9} + \frac{17\,\beta}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{35\,\alpha}{9} - \frac{47\,\beta}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -4\,\alpha - 4\,\beta \end{bmatrix} \tag{90}$$

> $x2 := \frac{14\,\alpha}{9} + \frac{17\,\beta}{9}; x3 := -\frac{35\,\alpha}{9} - \frac{47\,\beta}{9}; x4 := -4\,\alpha - 4\,\beta; x1 := \alpha; x5 := \beta$

$$x2 := \frac{14\,\alpha}{9} + \frac{17\,\beta}{9}$$
$$x3 := -\frac{35\,\alpha}{9} - \frac{47\,\beta}{9}$$
$$x4 := -4\,\alpha - 4\,\beta$$
$$x1 := \alpha$$
$$x5 := \beta \tag{91}$$

Будемо по черзі надавати значення 1 параметрам

> $\alpha := 1; \beta := 0$

$$\alpha := 1$$
$$\beta := 0 \tag{92}$$

> $x1; x2; x3; x4; x5$

$$1$$
$$\frac{14}{9}$$
$$-\frac{35}{9}$$
$$-4$$
$$0 \tag{93}$$

> $BR1 := matrix\left(5, 1, \left[1, -\frac{14}{9}, -\frac{35}{9}, -4, 0\right]\right)$

(94)

$$BR1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{14}{9} \\ -\frac{35}{9} \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{94}$$

> $\alpha := 0; \beta := 1$

$$\alpha := 0$$
$$\beta := 1 \tag{95}$$

> $x1; x2; x3; x4; x5$

$$0$$
$$\frac{17}{9}$$
$$-\frac{47}{9}$$
$$-4$$
$$1 \tag{96}$$

> $BR2 := matrix\left(5, 1, \left[0, \frac{17}{9}, -\frac{47}{9}, -4, 1\right]\right)$

$$BR2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{17}{9} \\ -\frac{47}{9} \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{97}$$

Для знаходження частинного розв'язку неоднорідної системи приведемо початкову розширену матрицю до редуційованого виду і запишемо розкладання стовпчика вільних членів по стовпчикам канонічної матриці

> $gaussjord(AR)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{98}$$

Із редуційованої матриці записуємо розкладання стовпчика вільних членів по стовпчиках матриці А

> $XCHR := matrix\left(5, 1, \left[2, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right]\right)$

$$XCHR := \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (99)$$

Перевірка

> $y1 := 2; y2 := -\frac{1}{2}; y3 := 0; y4 := -\frac{1}{2}; y5 := 0$

$$y1 := 2$$
$$y2 := -\frac{1}{2}$$
$$y3 := 0$$
$$y4 := -\frac{1}{2}$$
$$y5 := 0 \quad (100)$$

> $AR[1, 1] \cdot y1 + AR[1, 2] \cdot y2 + AR[1, 3] \cdot y3 + AR[1, 4] \cdot y4 + AR[1, 5] \cdot y5 - AR[1, 6]$

$$0 \quad (101)$$

> $AR[2, 1] \cdot y1 + AR[2, 2] \cdot y2 + AR[2, 3] \cdot y3 + AR[2, 4] \cdot y4 + AR[2, 5] \cdot y5 - AR[2, 6]$

$$0 \quad (102)$$

> $AR[2, 1] \cdot y1 + AR[2, 2] \cdot y2 + AR[2, 3] \cdot y3 + AR[2, 4] \cdot y4 + AR[2, 5] \cdot y5 - AR[2, 6]$

$$0 \quad (103)$$

> $AR[2, 1] \cdot y1 + AR[2, 2] \cdot y2 + AR[2, 3] \cdot y3 + AR[2, 4] \cdot y4 + AR[2, 5] \cdot y5 - AR[2, 6]$

$$0 \quad (104)$$

Отже, частинний розв'язок знайдений правильно

Загальний розвязок неоднорідної системи

> $XZR := C1 \cdot evalm(BR1) + C2 \cdot evalm(BR2) + evalm(XCHR)$

$$XZR := C1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{14}{9} \\ -\frac{35}{9} \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + C2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{17}{9} \\ -\frac{47}{9} \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{105}$$

Нехай C1 = C2 = C3 = 1. Тоді частинний розв'язок буде такий:

> $C1 := 1; C2 := 1$

$$C1 := 1$$
$$C2 := 1 \tag{106}$$

> $evalm(XZR)$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{82}{9} \\ -\frac{17}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{107}$$

> $z1 := 3; z2 := -\frac{1}{6}; z3 := -\frac{82}{9}; z4 := -\frac{17}{2}; z5 := 1$

$$z1 := 3$$
$$z2 := -\frac{1}{6}$$
$$z3 := -\frac{82}{9}$$
$$z4 := -\frac{17}{2}$$
$$z5 := 1 \tag{108}$$

Нев'язки:

> $AR[1, 1] \cdot z1 + AR[1, 2] \cdot z2 + AR[1, 3] \cdot z3 + AR[1, 4] \cdot z4 + AR[1, 5] \cdot z5 - AR[1, 6]$

> $AR[2, 1] \cdot z1 + AR[2, 2] \cdot z2 + AR[2, 3] \cdot z3 + AR[2, 4] \cdot z4 + AR[2, 5] \cdot z5 - AR[2, 6]$

$$0 \tag{109}$$

> $AR[3, 1] \cdot z1 + AR[3, 2] \cdot z2 + AR[3, 3] \cdot z3 + AR[3, 4] \cdot z4 + AR[3, 5] \cdot z5 - AR[3, 6]$

$$0 \quad \textbf{(110)}$$

> $AR[4,1]\cdot z1 + AR[4,2]\cdot z2 + AR[4,3]\cdot z3 + AR[4,4]\cdot z4 + AR[4,5]\cdot z5 - AR[4,6]$

$$0 \quad \textbf{(111)}$$

Усі нев'язки = 0. Отже, перший частинний розв'язок знайдений правильно. Тепер другий частинний розв'язок. Змінимо параметр C1.

> $C1 := 2; C2 := 1$

$$C1 := 2$$
$$C2 := 1 \quad \textbf{(112)}$$

> $XZR := C1\cdot evalm(BR1) + C2\cdot evalm(BR2) + evalm(XCHR)$

$$XZR := 2\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{14}{9} \\ -\frac{35}{9} \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{17}{9} \\ -\frac{47}{9} \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(113)}$$

> $evalm(XZR)$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{31}{18} \\ -13 \\ -\frac{25}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(114)}$$

> $z1 := 4; z2 := -\frac{31}{18}; z3 := -13; z4 := -\frac{25}{2}; z5 := 1$

$$z1 := 4$$
$$z2 := -\frac{31}{18}$$
$$z3 := -13$$
$$z4 := -\frac{25}{2}$$
$$z5 := 1 \quad \textbf{(115)}$$

Нев'язки

> $AR[1,1]\cdot z1 + AR[1,2]\cdot z2 + AR[1,3]\cdot z3 + AR[1,4]\cdot z4 + AR[1,5]\cdot z5 - AR[1,6]$

> $AR[2, 1] \cdot z1 + AR[2, 2] \cdot z2 + AR[2, 3] \cdot z3 + AR[2, 4] \cdot z4 + AR[2, 5] \cdot z5 - AR[2, 6]$

> $AR[3, 1] \cdot z1 + AR[3, 2] \cdot z2 + AR[3, 3] \cdot z3 + AR[3, 4] \cdot z4 + AR[3, 5] \cdot z5 - AR[3, 6]$

$$0 \tag{116}$$

> $AR[4, 1] \cdot z1 + AR[4, 2] \cdot z2 + AR[4, 3] \cdot z3 + AR[4, 4] \cdot z4 + AR[4, 5] \cdot z5 - AR[4, 6]$

$$0 \tag{117}$$

Другий частинний розв'язок знайдений правильно