Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем

Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 13
по дисципліні «Вища математика»

Тема:ПОНЯТТЯ ПРО ФУНКЦІЮ. ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Варіант 45

Виконав: студент гр. КС-231
Киба Д.В.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2023

Короткі теоретичні відомості:
Функцією f називається деяке правило, за допомогою якого кожному елементу множини X ставиться у відповідність один і тільки один
елемент множини Y
Областю визначення функції називається множина дійсних значень аргументу при яких функція приймає дійсні значення.
Областю допустимих значень функції функції називається множина всіх значень, які може приймати залежна змінна y.
Елементарними функціями називаються функції, отримані з основних елементарних функцій за допомогою
арифметичних операцій (+, -, ×, ÷) та операцій та операцій взяття функції від функції.

Способи задання функцій

1. Аналітичне задання функції – запис її за допомогою математичної формули, яка заснована на основних елементарних функціях та операціях над ними.
2. Графічний спосіб – спосіб, при якому функціональна залежність задається графіком функції.
3. Табличний спосіб задання – спосіб, коли функція задається таблицею значень, згідно якій вибраному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність елемент $y \in Y$.

Явна функція має такий вид: $y = f(x)$
Неявна функція має такий вид: $F(x, y) = 0$
Функція задається параметрично, якщо значення x і y задаються двома функціями, які залежать від допоміжної змінної, яка зветься параметром:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Для парних функцій виконується така умова: $f(-x) = f(x)$
Для непарних функцій виконується така умова: $f(-x) = -f(x)$
Якщо жодна з умов не виконується, то така функція є ні парною, ні непарною - функція загального виду.

Складеною функцією (або суперпозицією двох функцій) називається функція від значення іншої функції. Використовується позначення $y = f(\phi(x))$

Елементарні функції поділяють на такі класи:
- многочлени
- дробово-раціональні функції
- ірраціональні функції
- трансцендентні функції

Перетворення графіків функцій

Побудова графіку функції $y=f(x)+a$ заснована на зміщенні графіку функції по осі Oy на a одиниць
Побудова графіку функції $y=f(x+b)$ заснована на зміщенні графіку функції по осі Ox на b одиниць
Побудова графіку функції $y=kf(x)$ заснована на стисненні або розтягненні графіку функції по осі Oy
Побудова графіку функції $y=f(kx)$ заснована на стисненні або розтягненні графіку функції по осі Ox
Побудова графіку функції $y=k\cdot f\left(\omega x+b\right)$ заснована на послідовних перетвореннях перших чотирьох типів графіка функції $y=k\cdot f\left[\omega\cdot\left(x+\frac{b}{\omega}\right)\right]$

Для побудови графіків функцій $f(x)\cdot\phi(x)$ і $\frac{f(x)}{\phi(x)}=\phi^{-1}(x)\cdot f(x)$ по відомим графікам функцій-співмножників, можна обчислити відповідні значення добутку в окремих точках, а потім з'єднати їх плавною кривою.

Задача 1. Використовуючи графіки основних елементарних функцій та користуючись правилами перетворення графіків, побудувати графіки вказаних елементарних функцій.

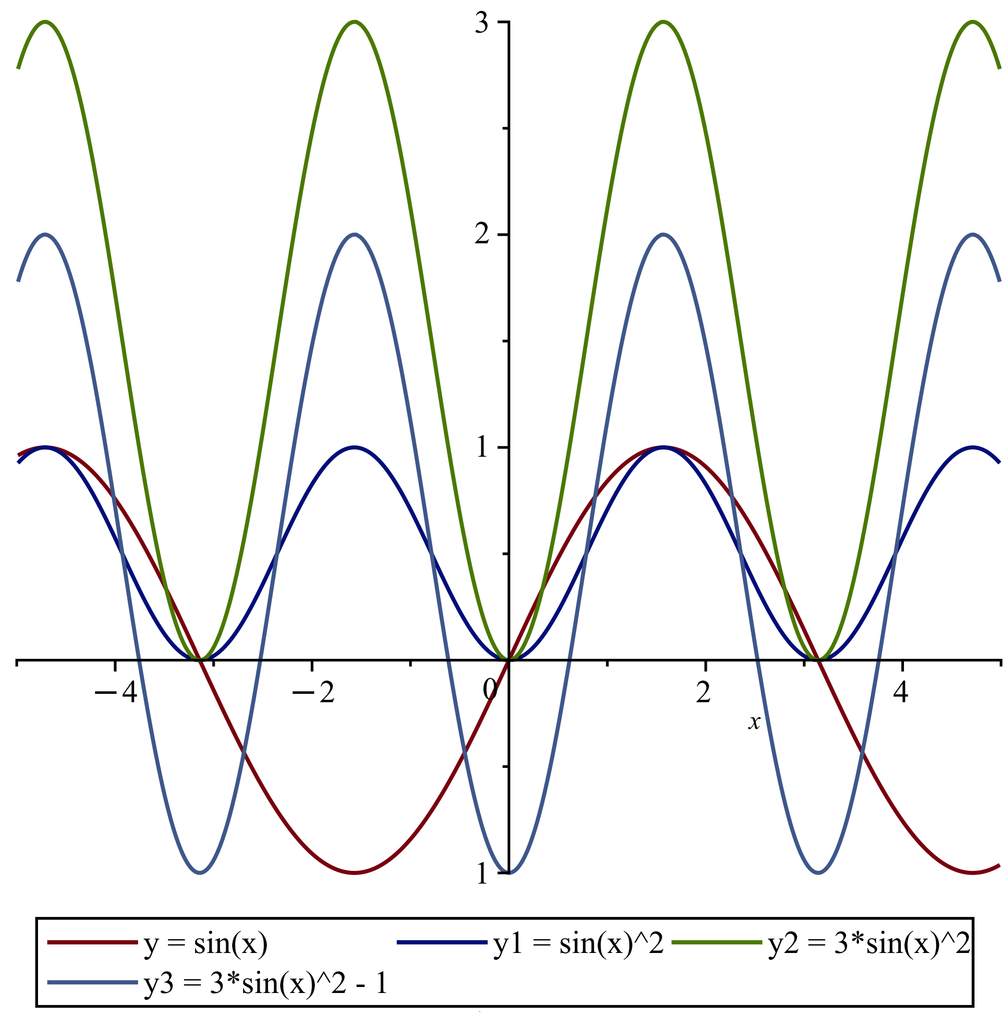
Варіант 45-25=20

20) $y = 3\,sin^2\,x - 1$

```
> y := sin(x);
  y1 := sin(x)^2;
  y2 := 3 * sin(x)^2;
  y3 := 3 * sin(x)^2 - 1;

  plot([y, y1, y2, y3], x = -5 .. 5,
     legend = ["y = sin(x)", "y1 = sin(x)^2", "y2 = 3*sin(x)^2", "y3 = 3*sin(x)^2 - 1"]);
```

$$y := \sin(x)$$
$$y1 := \sin(x)^2$$
$$y2 := 3\sin(x)^2$$
$$y3 := 3\sin(x)^2 - 1$$



Error, unable to delimit strings/identifiers

$plot\left([y, y1, y2, y3, y4], x = -5 .. 5, legend = \left["y := \sin(x); ", "1 := \sin(x)^2; ", " y2 := 3 \cdot \sin(x)^2; ", " y3 := 3 \cdot \sin(x\right.\right.$

>

>

> *restart*

Задача 2. Побудувати графіки заданих функцій шляхом перетворення графіків елементарних функцій.

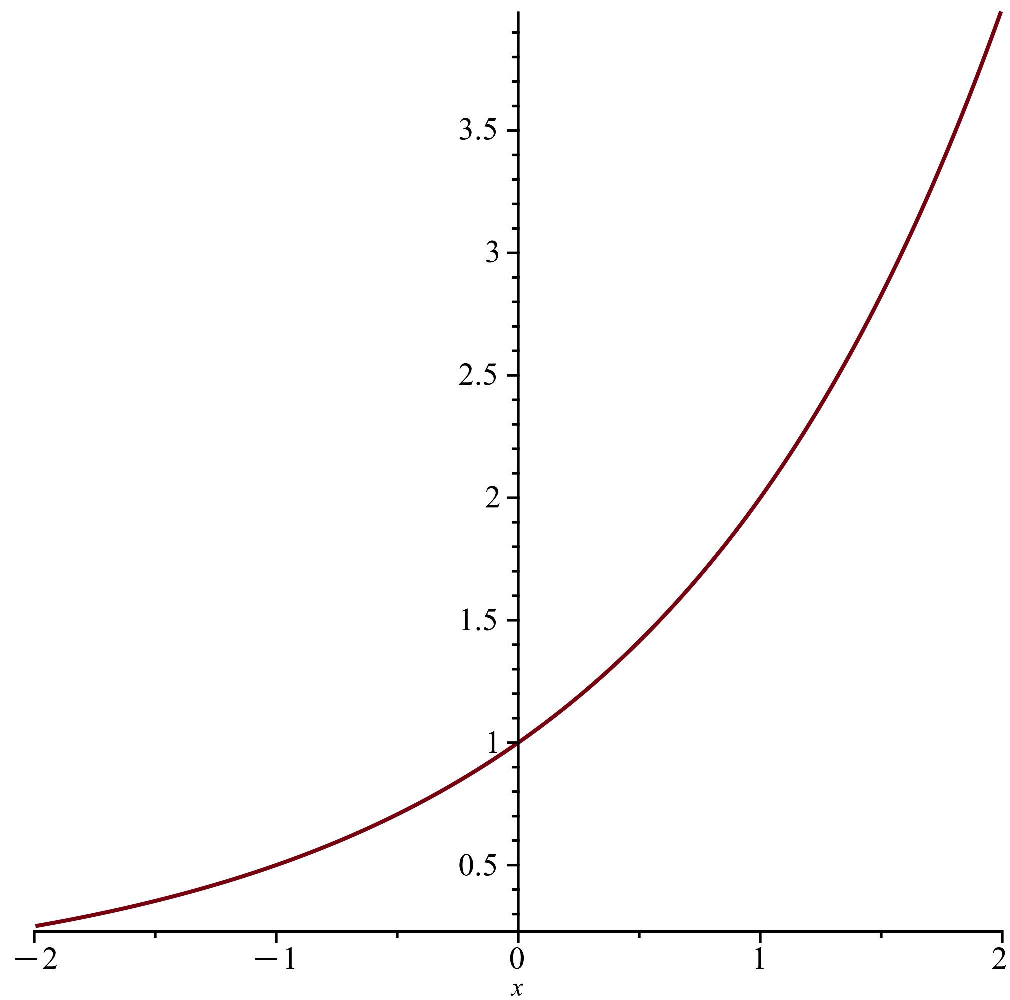
20. $y = 2^{-1/x}$; $y = e^{x+e^{-x}}$; $y = -2\sin x$.

.$y = 2^{-1/x}$;

> $y1 := 2^x$

$$y1 := 2^x \tag{1}$$

> $plot(y1, x = -2 .. 2)$

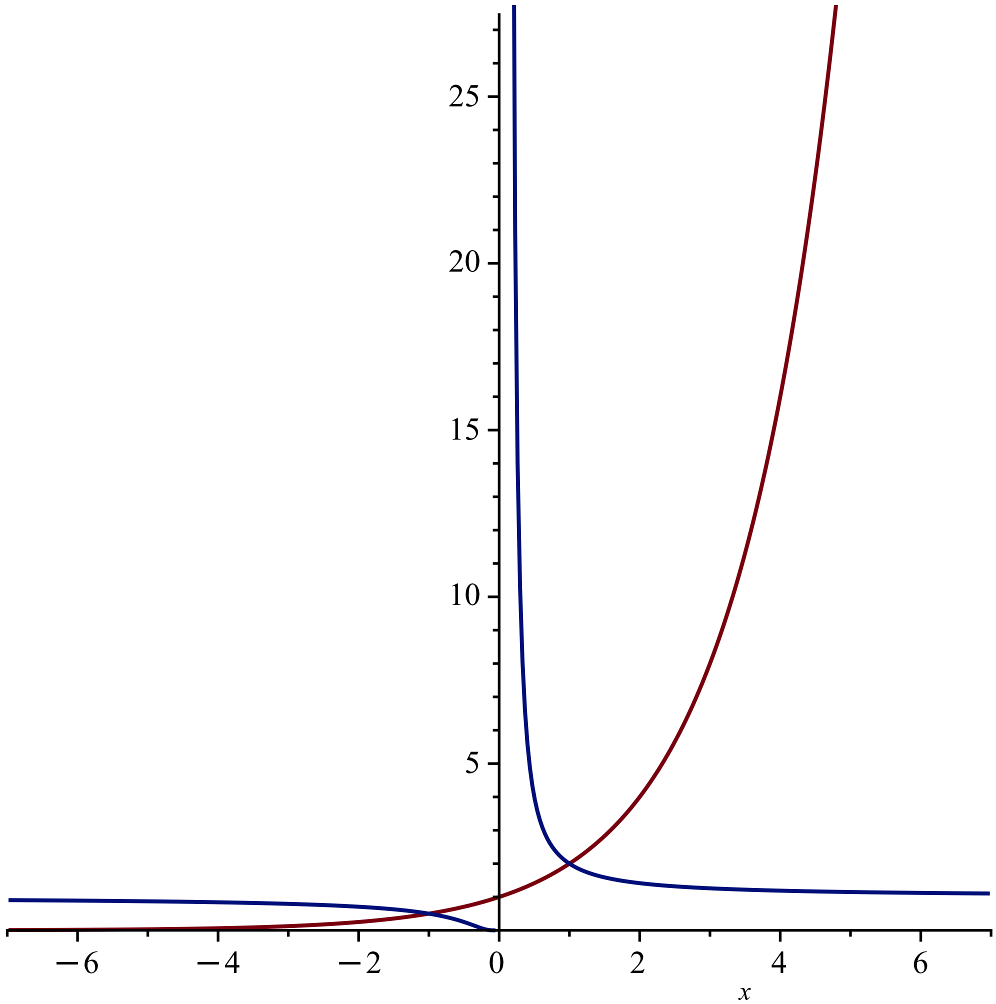


Дріб перетворює нашу функцію

> $y2 := 2^{\frac{1}{x}}$

$$y2 := 2^{\frac{1}{x}} \tag{2}$$

> $plot([y1, y2], x = -7 ..7)$

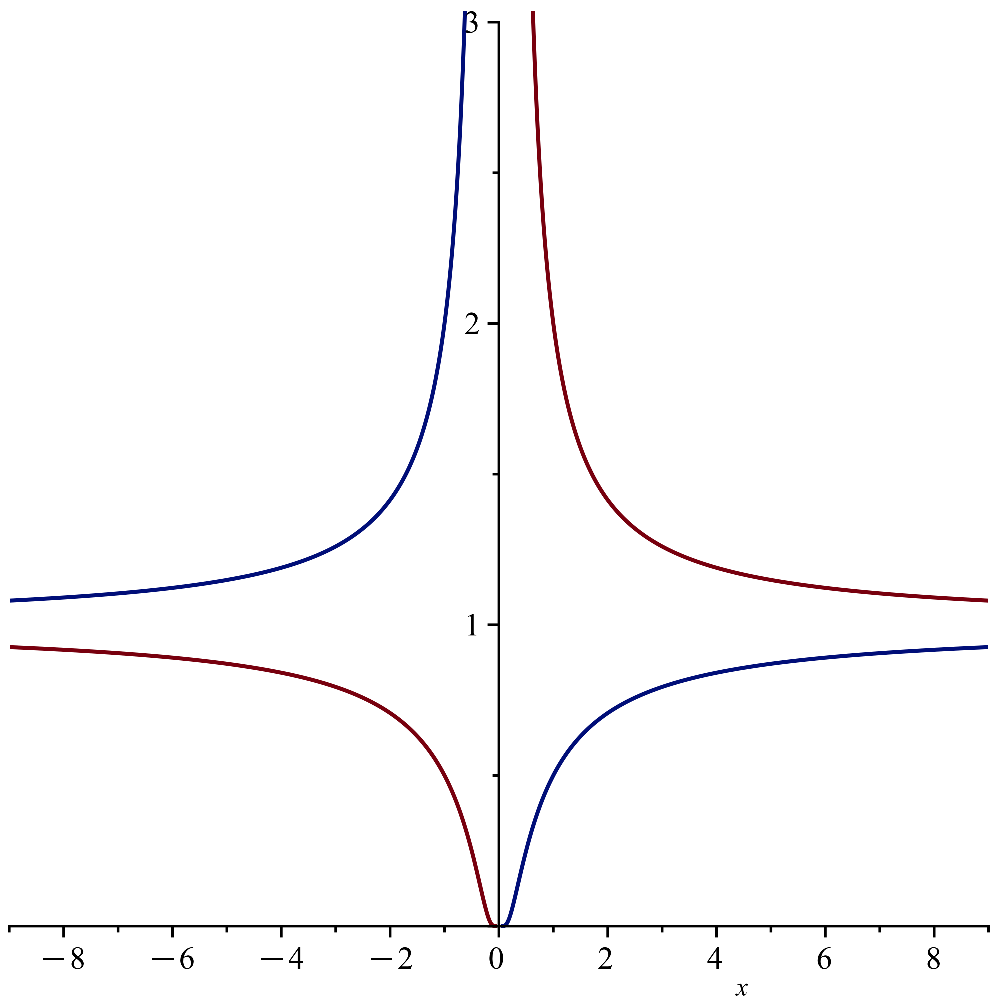


Знак мінус відзеркалює нашу функцію

> $y3 := 2^{-\frac{1}{x}}$

$$y3 := 2^{-\frac{1}{x}} \tag{3}$$

> $plot([y2, y3], x = -9..9, discont = true)$



Завдяки елементарним перетворенням, отримали функцію, що виділена синім кольором.

> *restart*

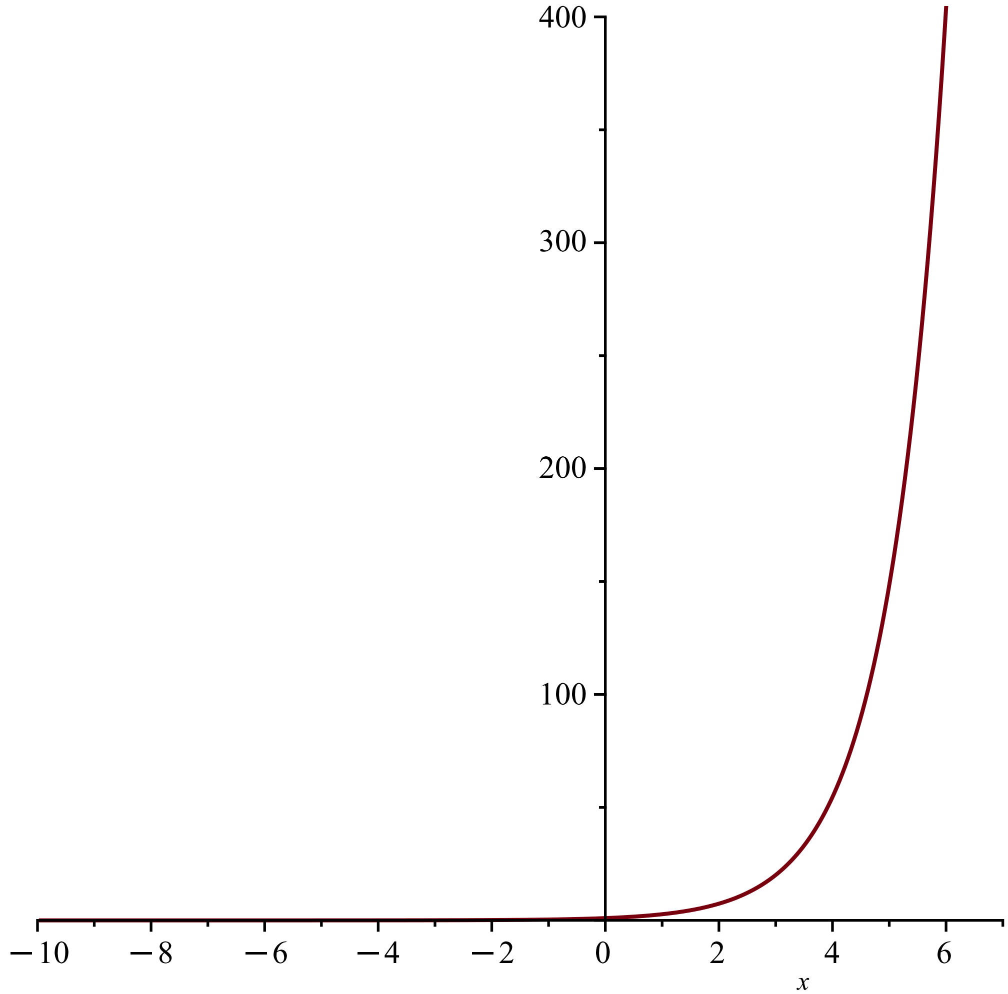
$y = e^{x+e^{-x}}$;

Задамо експоненційну функцію

> $y := e^x$

$$y := e^x \tag{4}$$

> $plot(y, x = -10..10)$

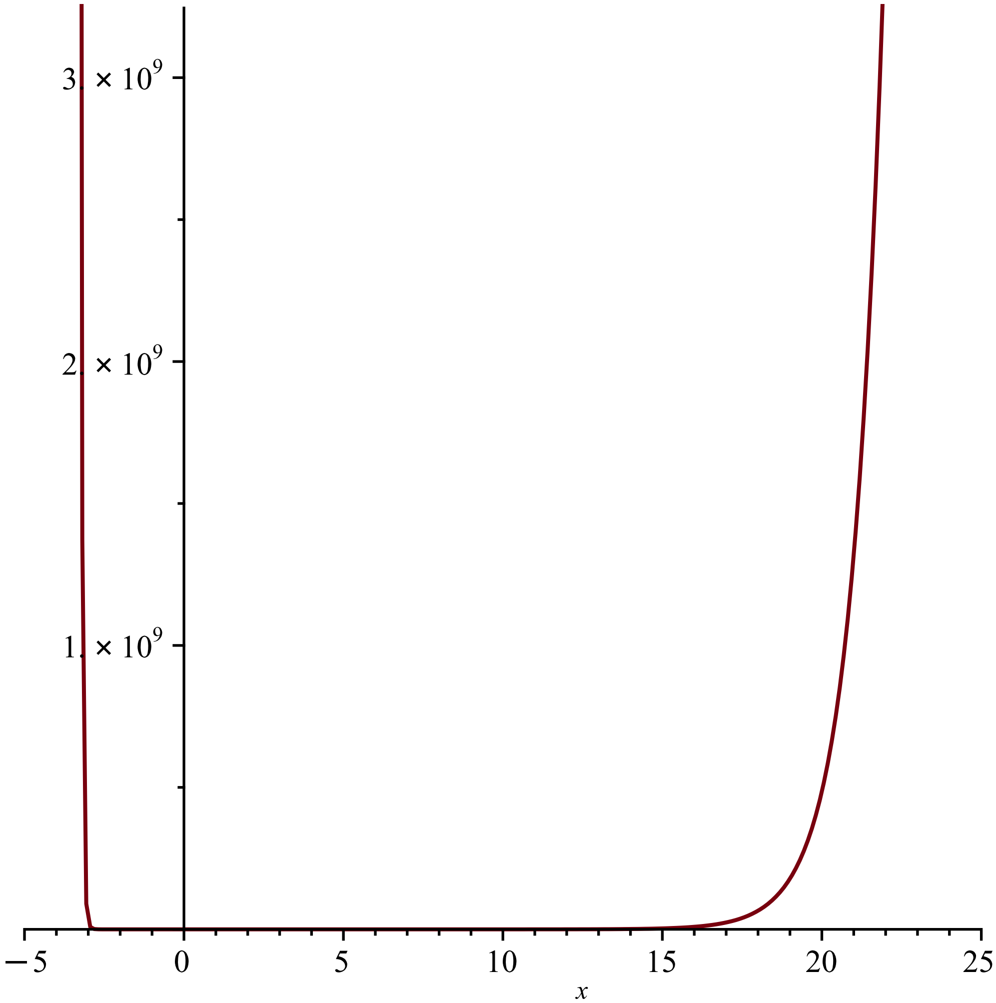


> $y2 := e^{x+e^{-x}}$

$$y2 := e^{x+e^{-x}} \qquad (5)$$

Якщо до цього функція наближалась до нескінченності при приближенні до точки x0, тобто була границя в цій точці, то зараз функція немає границі в точці x0

> $plot(y2, x = -10..40)$



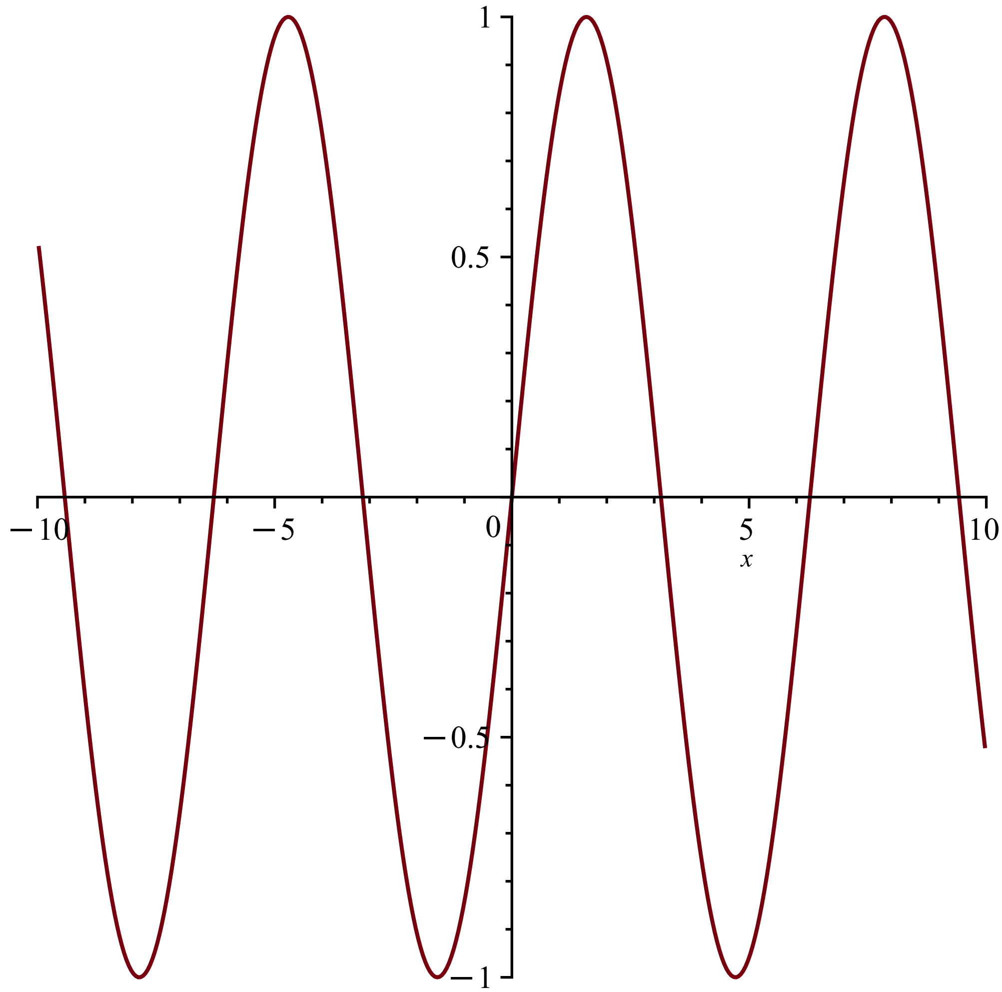
$y = -2\,sin\,x.$

Задаємо тригонометричну функцію

> $y := \sin(x)$

$$y := \sin(x) \quad (6)$$

> $plot(y, x = -10\,..10)$

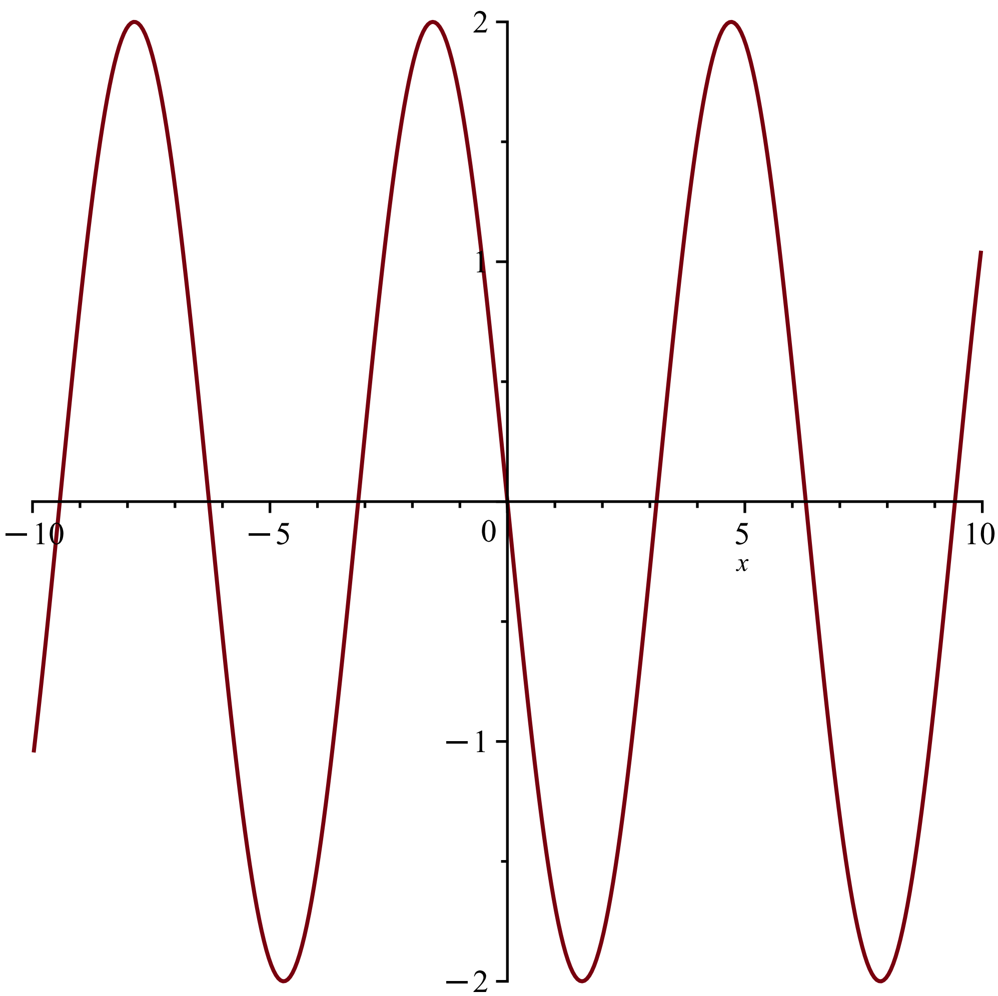


> $y2 := -2 \cdot y$

$$y2 := -2 \sin(x) \quad (7)$$

> $plot(y2, x = -10\,..10)$

Після того, як помножили на -2, графік нашої функції збільшив амплітуду в двічі та відзеркалився відносно Оу.



Задача 3. Розв’язати графічно (приблизно) задане рівняння або систему рівнянь.
Варіант 45-25=20

20. $x^3 - 3x - 2=0$

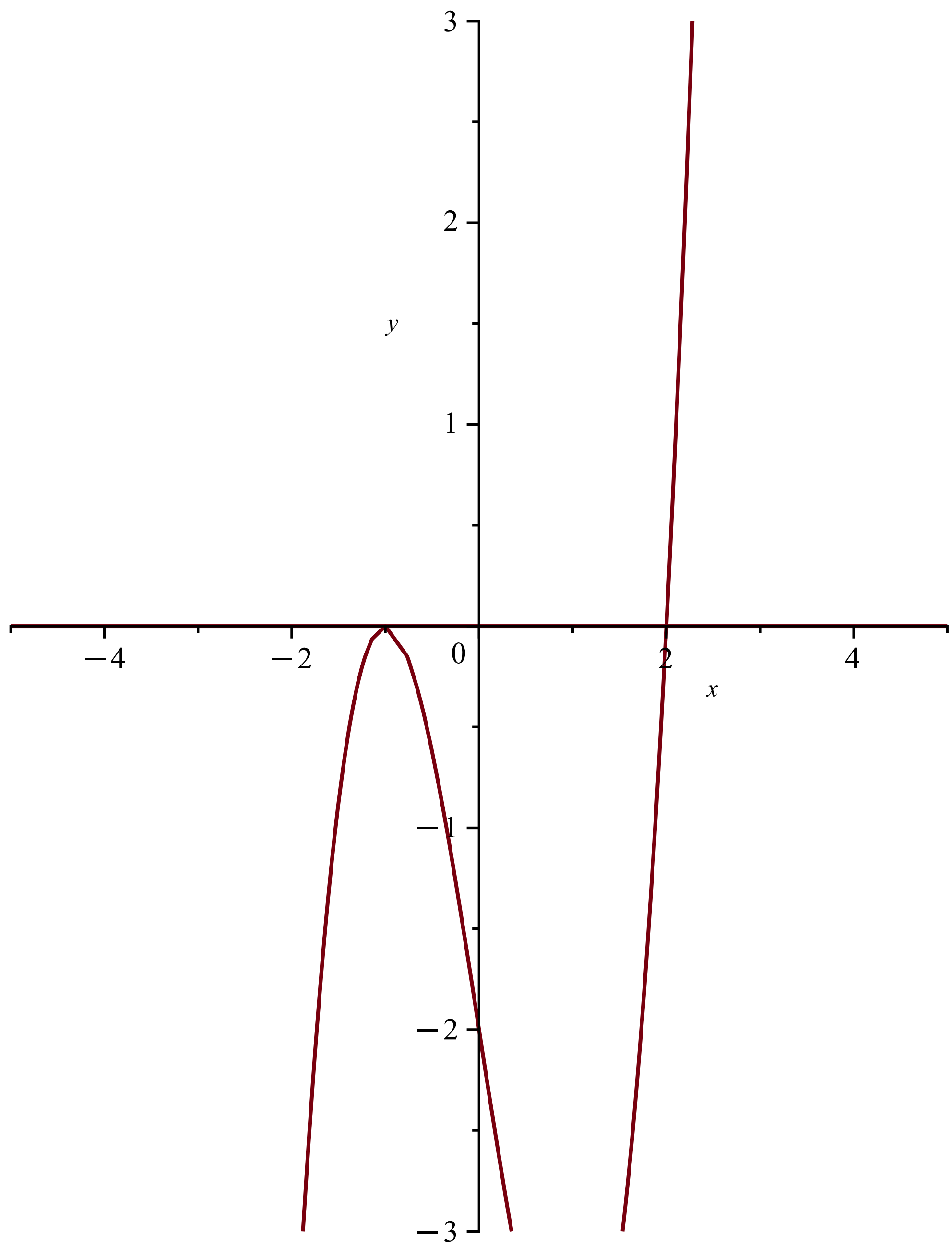
> ?*implicitplot*

> *restart*

> *with*(*plots*) :

>

> $implicitplot\left(\left[y=x^3-3\cdot x-2,\, y=0\right], x=-5..5, y=-3..3, numpoints=100\right)$



>

>

$$2., -1., -1. \qquad \textbf{(8)}$$

>

Приблизно ці функції перетинаються у точках x = -1 та x = 2, при цьому перетинаються 2, тобто ми маємо 2 корені. Перший приблизно дорівнює -1, другий приблизно дорівнює 2 якщо робити висновки з графіку.

Точні значення

> $evalf\left(solve\left(x^3 - 3.\cdot x - 2. = 0, x\right)\right)$

$$2., -1., -1. \qquad \textbf{(9)}$$

Оператор визначив 3 точки, хоча у рівнянні 2 корені. Ці корені точні

Отже, розв'язками цієї системи будуть такі значення:

$x1 := -1\ ,\ x2 := 2$

> *restart*

Задача 4. Побудувати на одному малюнку графіки двох заданих функцій в заданій області визначення, на цьому ж малюнку по окремим точкам побудувати графіки суми та добутку заданих функцій.
Варіант 45-25=20

20. $f_1(x) = x^2 + x$ $\qquad f_2(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ $\qquad x \in [-1{,}5\,;\,2{,}5]$

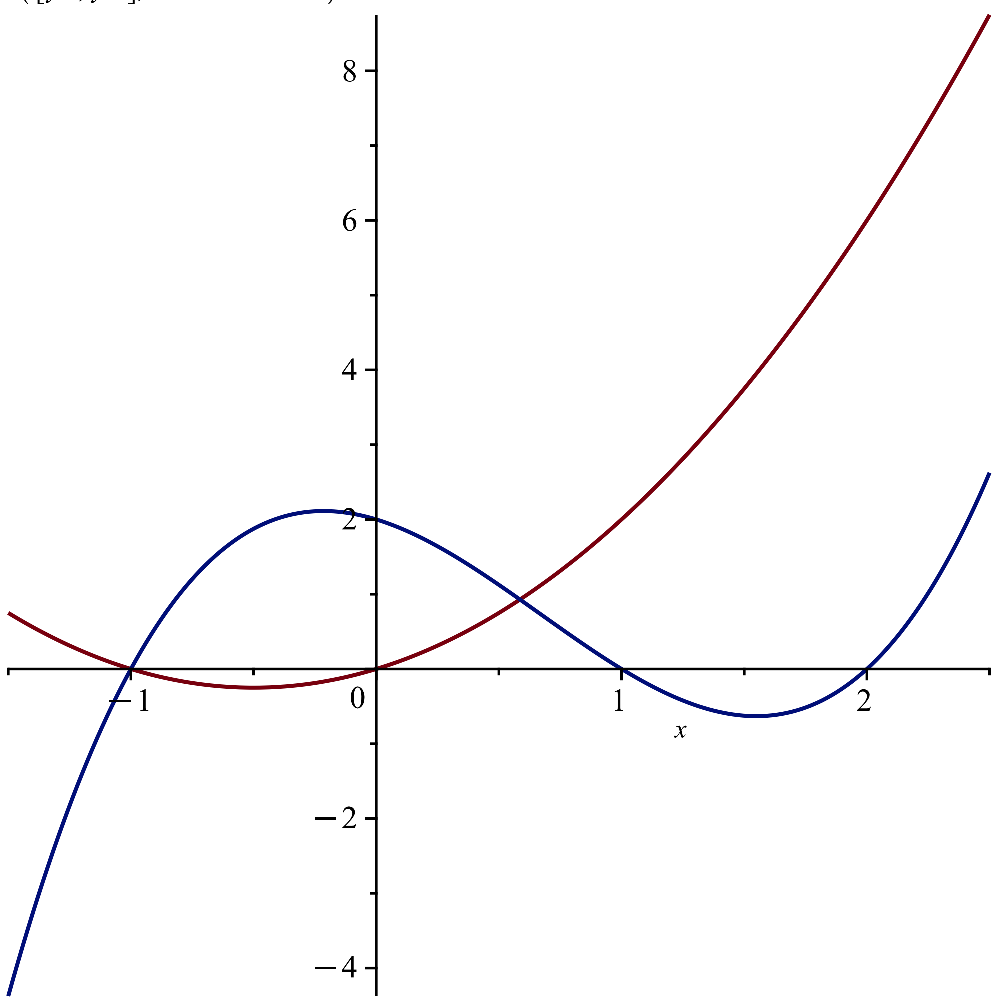
> $y1 := x^2 + x$

$$y1 := x^2 + x \tag{10}$$

> $y2 := x^3 - 2\,x^2 - x + 2$

$$y2 := x^3 - 2\,x^2 - x + 2 \tag{11}$$

> $p1 := plot([y1, y2], x = -1.5\,..2.5)$



>

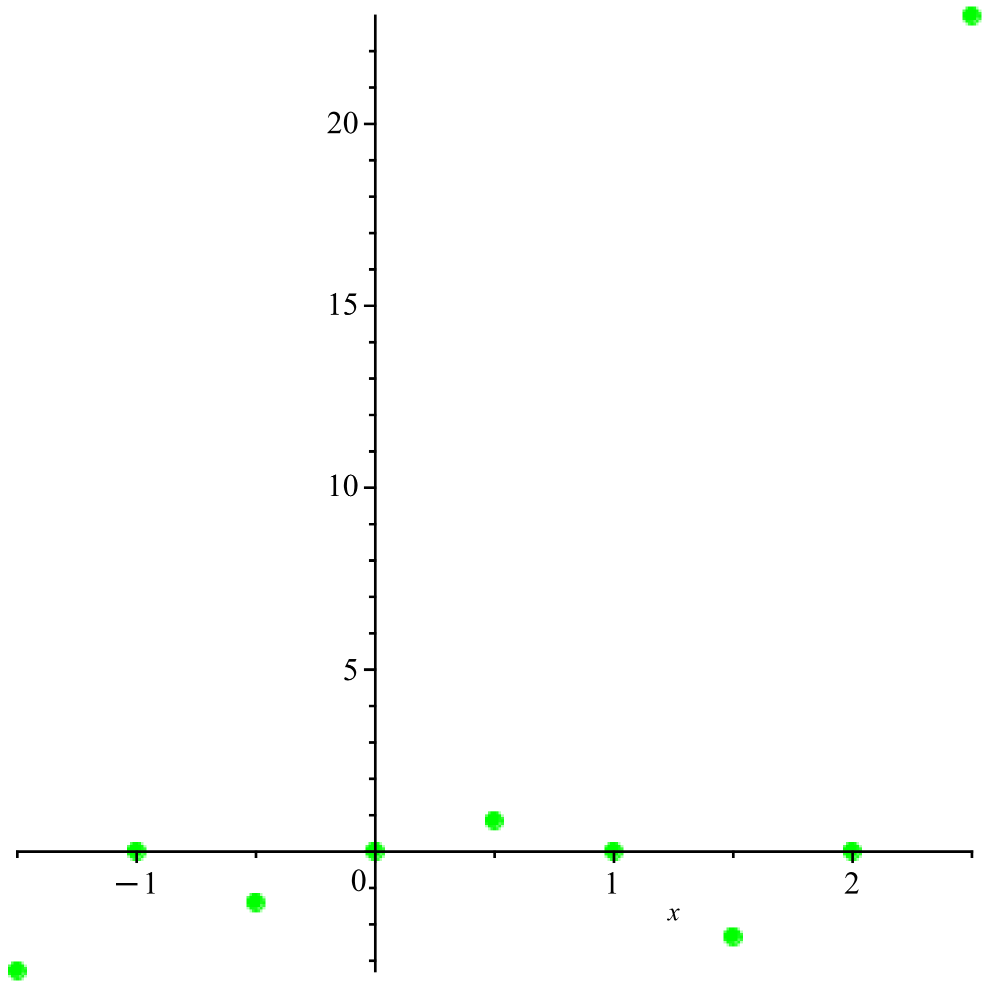
20. $f_1(x) = x^2 + x$ $\qquad f_2(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ $\qquad x \in [-1{,}5\,;\,2{,}5]$

>

За правилом знаходження графіка добутку двох функцій потрібно визначити точки через які буде проходити новий графік і з'єднати їх плавною кривою

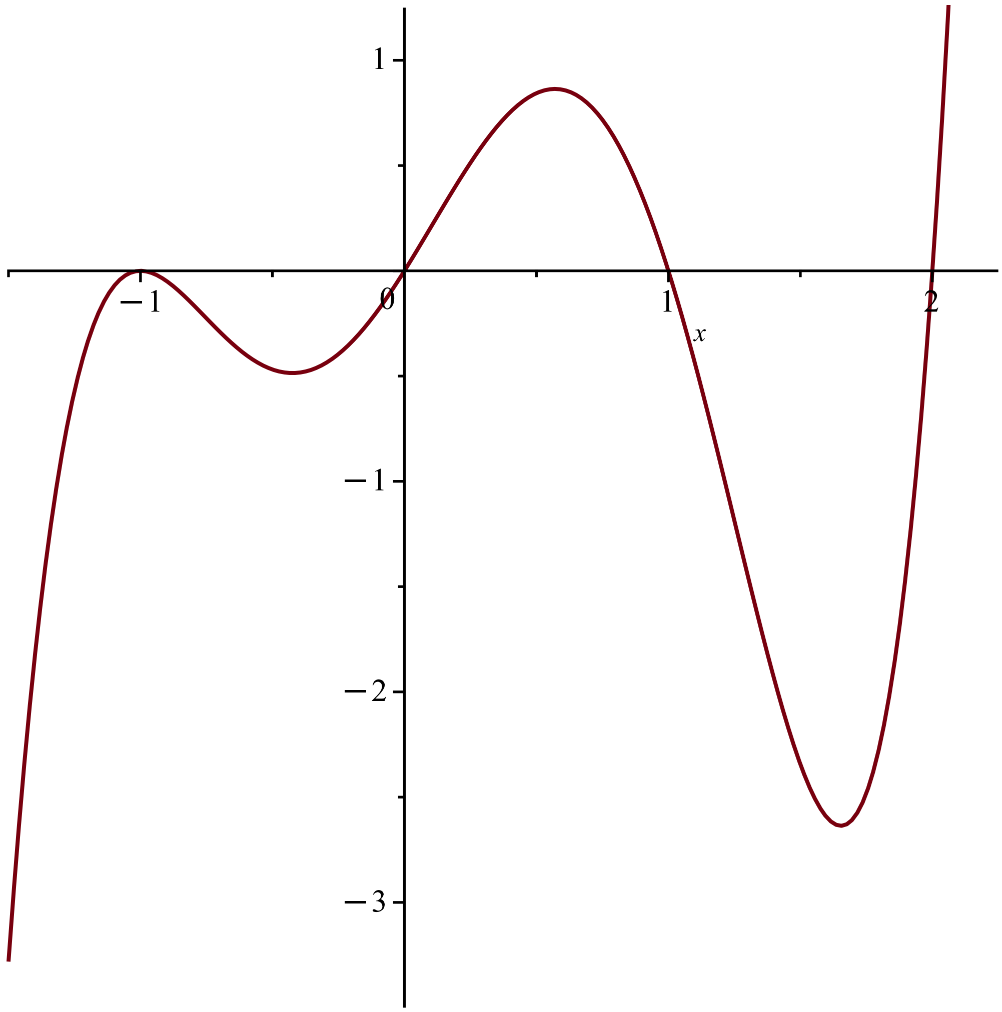
Задаємо точки і зображуємо їх на графіку.

```
> p2 := plot([[−1.5, (((−1.5)^2 + (−1.5)) * ((−1.5)^3 − 2 * (−1.5)^2 − (−1.5)
        + 2))],
      [−1, ((−1^2 + (−1)) * ((−1)^3 − 2 * (−1)^2 − (−1) + 2))],
      [−0.5, ((−0.5^2 + (−0.5)) * ((−0.5)^3 − 2 * (−0.5)^2 − (−0.5) + 2))],
      [0, ((0^2 + (0)) * ((0)^3 − 2 * (0)^2 − (0) + 2))],
      [0.5, ((0.5^2 + (0.5)) * ((0.5)^3 − 2 * (0.5)^2 − (0.5) + 2))],
      [1, ((1^2 + (1)) * ((1)^3 − 2 * (1)^2 − (1) + 2))],
      [1.5, ((1.5^2 + (1.5)) * ((1.5)^3 − 2 * (1.5)^2 − (1.5) + 2))],
      [2, ((2^2 + (2)) * ((2)^3 − 2 * (2)^2 − (2) + 2))],
      [2.5, ((2.5^2 + (2.5)) * ((2.5)^3 − 2 * (2.5)^2 − (2.5) + 2))]],
      x = −1.5 ..2.5, style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = green);
```



Відобразимо точний графік добутку цих функцій

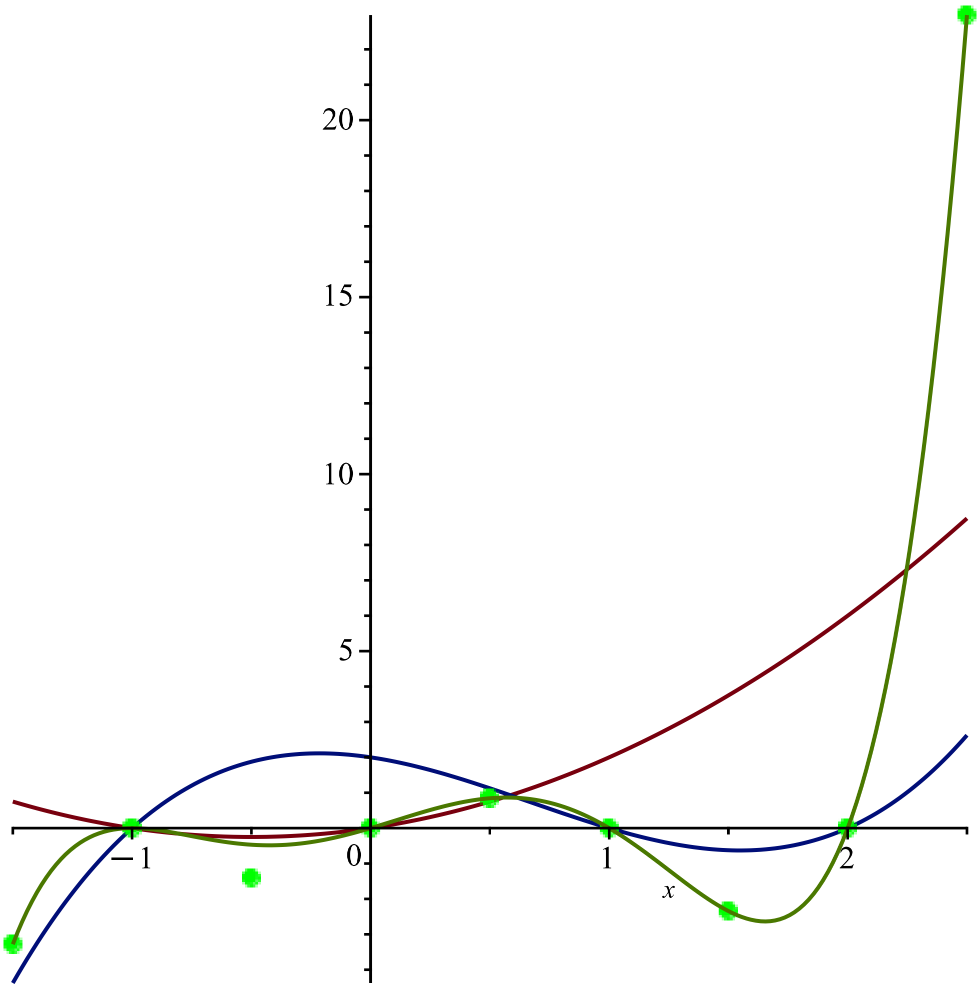
```
> p3 := plot([y1·y2], x =−1.5 ..2.5)
```



> $with(plots):$

Тепер перевіримо як точки накладаються на точний графік.

> $display(p1, p2, p3)$



Тепер точки відображають графік добутку двох функцій.

> *restart*

Задача 5. Побудувати графіки функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Побудувати по точках графіки складених функцій $f_1(x) = u(v(x))$ і $f_2(x) = v(u(x))$. Вказати області визначення складених функцій.

Варіант 45-25=20

20. $u(x) = \ln(x)$ $\quad v(x) = x^2 + 2x + 2$

10. $u(x) = 2x - 3$ $\quad v(x) = \cos(x)$

Задаємо необхідні функції та складені функції для подальших перевірок

> $u := \ln(x)$

$$u := \ln(x) \tag{12}$$

> $v := x^2 + 2\,x + 2$

$$v := x^2 + 2\,x + 2 \tag{13}$$

> $f1 := \ln(v)$

(14)

$$f1 := \ln\left(x^2 + 2\,x + 2\right) \quad \textbf{(14)}$$

> $f2 := u^2 + 2\,u + 2$

$$f2 := \ln(x)^2 + 2\ln(x) + 2 \quad \textbf{(15)}$$

Графік двох заданих функцій

> $plot([u, v], x = -5\,..\,5, color = [blue, red]);$

Будуємо графік складеної функції $f1$ по точках

> $p1 := plot([[-5, \ln(-5)], [-4, \ln(-4)], [-3, \ln(-3)], [-2, \ln(-2)], [-1, \ln(-1)], [1, \ln(1)], [2, \ln(2)], [3, \ln(3)], [4, \ln(4)], [5, \ln(5)]]x = -5\,..5, style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = green)$

```
Error, (in plot) unexpected option: [[-5, ln(5)+I*Pi], [-4, 2*ln(2)+
I*Pi], [-3, ln(3)+I*Pi], [-2, ln(2)+I*Pi], [-1, I*Pi], [1, 0], [2, ln
(2)], [3, ln(3)], [4, 2*ln(2)], [5, ln(5)]]*x = -5 .. 5
```

> $with(plots):$