Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

Лабораторна робота №4
по дисципліні «Вища математика»

Тема: Побудова інтерполяційного многочлена Лагранжа та сплайн-многочлена для функції, що задана таблицею значень.

Варіант 45-25=20

Виконав: студент гр. КС-231
Киба Д.В.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2023

Теоретичні відомості

Нехай деяку функцію задано табл. 4.1.

Таблиця 4.1. **Деяка таблична функція**

x	x_1	x_2	…	x_n
$y(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Під задачею інтерполяції функції розуміють побудову такої функції $f(x)$, яка проходила б через усі задані точки (x_i, y_i), тобто для кожного i повинна виконуватися рівність

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2,..., n.$$

Точки (x_i, y_i) називають вузлами інтерполяції.

Інакше кажучи, завдання інтерполяції полягає в тому, щоб за значеннями функції, заданої в декількох точках відрізка, відновити її значення в інших точках цього відрізка [1, 2, 5].

Інтерполяційну функцію будують, як правило, у вигляді лінійної комбінації деяких елементарних функцій:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x).$$

При цьому вид інтерполяції визначають функцією $\varphi_j(x)$. Якщо $\varphi_j(x)$ є поліномом n-1 степеня, тобто $\varphi_j(x) = b_{j0} + b_{j1}x + b_{j2}x^2 + \ldots + b_{jn-1}x^{n-1}$, то інтерполяція називається *поліноміальною*. Якщо $\varphi_j(x) = \cos(b_j x + a_j)$, то така інтерполяція називається *тригонометричною*. Кусково-поліноміальну інтерполяцію називають сплайн-інтерполяцією.

Інтерполяційна формула Лагранжа

Шукатимемо поліноміальну інтерполяцію табличної функції у вигляді полінома n-1 степеня $P_{n-1}(x)$.

Такий поліном можна подати у вигляді

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x) y_i , \qquad (4.1)$$

де $Q_i(x)$ – поліноми n-1 порядку, а вагові коефіцієнти дорівнюють y_i. Із умови $f(x_j) = y_j$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n} y_i Q_i(x_j) = y_j, \ j = \overline{1,n} . \qquad (4.2)$$

Співвідношення (4.2) виконуються за умови, що

$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad j = \overline{1,n} . \qquad (4.3)$$

Враховуючи, що $Q_i(x)$ – поліном степеня n-1, із умови (4.3) маємо

$$Q_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \ . \tag{4.4}$$

Тоді, використовуючи (4.1) і (4.4), отримаємо шукану інтерполяційну формулу

$$f(x) \approx y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{4.5}$$

Формулу (4.5) називають інтерполяційною формулою Лагранжа.

Приклад. Для табличної функції, заданої в табл. 4.2, побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа.

Таблиця 4.2. **Задана таблична функція**

x	0	1	2
y	0	2	10

Згідно з формулою (4.5)

$$f(x) = 0\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 10\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = 3x^2 - x\,.$$

Похибка інтерполяції

Нехай $f(x)$ – диференційовна $n+1$ раз на відрізку $[a; b]$ функція, що задана таблицею значень

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_1	y_2	…	y_n

Якщо по заданим значенням функції побудований інтерполяційний многочлен $P_n(x)$, то похибка інтерполяції знаходиться як різниця значень

$$f(x) - P_n(x).$$

Якщо аналітична формула для таблично заданої функції невідома, то необхідно вміти оцінювати значення похибки інтерполяції.

Оцінка максимуму модуля похибки інтерполяції на відрізку [a, b] задається нерівністю

$$\max_{x\epsilon\,[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{x\epsilon\,[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|,$$

де $M_{n+1} = \max_{x\epsilon\,[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$ – максимум модуля (n+1) похідної на відрізку [a, b];

$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) -$ многочлен, який дорівнює нулю в вузлах інтерполяції.

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ є досить «гладкою», тобто її похідні, до (n+1) порядку включно, змінюються слабко, то величина абсолютної похибки інтерполяції $|f(x) - P_n(x)|$ майже повністю визначається значенням функції $\omega_{n+1}(x)$. Типовий графік многочлена $\omega_{n+1}(x)$ наведений на рис.1.

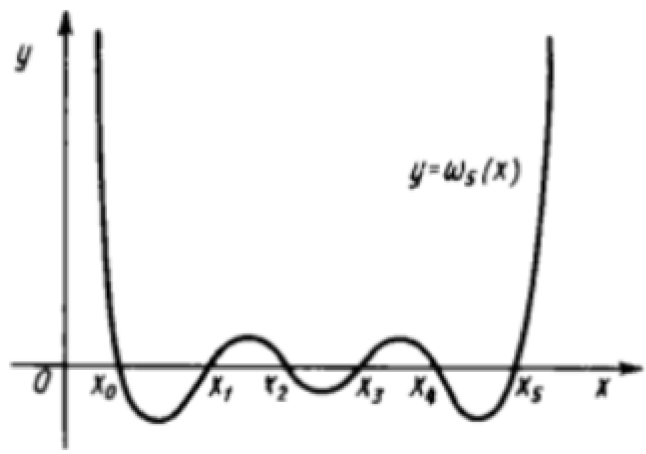


Рис. 1. Типовий графік многочлена $\omega_{n+1}(x)$

За межами відрізку $[x_0, x_n]$ значення модуля многочлена $|\omega_{n+1}(x)|$ різко зростає і стає дуже великою величиною. Внаслідок цього зростає і похибка інтерполяції.

На практиці часто використовують більш грубу, але простішу для обчислення оцінку похибки інтерполяції:

$$\max_{x\epsilon\,[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{4 \cdot (n+1)} \cdot h_{max}^{n+1}$$

де h_{max} – найбільший шаг між вузлами інтерполяції.

Інтерполяція сплайнами

За великої кількості вузлів інтерполяції збільшується порядок інтерполяційного полінома, що, з одного боку, робить їх незручними для використання, а з другого – призводить до значного збільшення похибки інтерполяції. Крім того, часто виникає необхідність обчислення не лише значень функції, але і значень похідних. При цьому точність значення похідної, обчисленої шляхом диференціювання інтерполяційного полінома, може виявитися незадовільною.

Виходом з такої ситуації є використання сплайн-інтерполяції. Сплайн – це функція, що на кожному частковому відрізку є поліномом певного степеня, а на всьому заданому відрізку – неперервна разом з кількома своїми похідними. При цьому поліном на кожному частковому відрізку має порядок $n \le 3$. Найчастіше використовують сплайни третього степеня.

Нехай функцію задано табл. 4.3 і треба побудувати сплайн-інтерполяцію цієї функції.

Таблиця 4.3. **Деяка задана таблична функція**

$f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n
x	x_0	x_1	$\dots$	x_n

За допомогою сплайнів функцію можна подати у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_{01} + a_{11}(x - x_0) + \ldots + a_{m1}(x - x_0)^m, \ x \in [x_0;\, x_1]; \\ S_2(x) = a_{02} + a_{12}(x - x_1) + \ldots + a_{m2}(x - x_1)^m, \ x \in [x_1;\, x_2]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n(x) = a_{0n} + a_{1n}(x - x_{n-1}) + \ldots + a_{mn}(x - x_{n-1})^m, \ x \in [x_{n-1};\, x_n]. \end{cases}$$

Для побудови сплайн-інтерполяції визначають невідомі коефіцієнти $a_{01}, a_{02}, \ldots a_{mn}$. Якщо функція інтерполюється на n інтервалах за допомогою поліномів порядку m, то кількість таких невідомих буде $(m + 1)n$. Для їх визначення потрібно $(m + 1)n$ рівнянь. Щоб отримати необхідну кількість рівнянь, можна скористатися умовами рівності функції табличним значенням у вузлах інтерполяції. Ці умови дадуть $2n$ рівнянь, чого вистачить для інтерполяції сплайнами першого порядку (лінійними сплайнами, $m = 1$). Для інтерполяції сплайнами другого порядку (параболічними сплайнами, $m = 2$) ці рівняння необхідно доповнити умовою неперервності першої похідної. Це дасть ще $(n - 1)$ рівняння. Отриману систему треба доповнити ще одним рівнянням. Наприклад, можна задати поведінку функції на одному з кінців інтервалу (наприклад, рівність $S_1'(x_0) = f'(x_0)$, причому похідна функції обчислюється чисельним методом на основі табличних значень функції). У разі інтерполяції кубічними сплайнами систему рівнянь необхідно доповнити ще n рівняннями. Для цього можна поставити вимогу неперервності другої похідної функції, що дасть $(n - 1)$ рівняння.

Останнє рівняння отримують, задавши поведінку функції на другому (незадіяному) кінці відрізка. На практиці часто задають однакові умови на кінцях інтервалу. Як правило, це умова гладкості функції на кінцях ($S_1''(x_0) = S_2''(x_n) = 0$).

Для прикладу проведемо кубічну інтерполяцію функції, заданої в табл. 4.2.

На кожному i-му відрізку: $S_i(x) = a_i(x - x_{i-1})^3 + b_i(x - x_{i-1})^2 + c_i(x - x_{i-1}) + d_i$, $S_i'(x) = 3a_i(x - x_{i-1})^2 + 2b_i(x - x_{i-1}) + c_i$, $S_i''(x) = 6a_i(x - x_{i-1}) + 2b_1$. Побудуємо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів.

З умови рівності функції табличним значенням у вузлових точках маємо:

$$\begin{aligned}
&i=1;\\
&x=0:\ a_1(0-0)^3+b_1(0-0)^2+c_1(0-0)+d_1=0;\\
&x=1:\ a_1(1-0)^3+b_1(1-0)^2+c_1(1-0)+d_1=2;\\
&i=2;\\
&x=1:\ a_2(1-1)^3+b_2(1-1)^2+c_2(1-1)+d_2=2;\\
&x=2:\ a_2(2-1)^3+b_2(2-1)^2+c_2(2-1)+d_2=10.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

З умови неперервності першої та другої похідних функцій:

$$\begin{aligned}
&x=1:\\
&3a_1(1-0)^2+2b_1(1-0)+c_1=c_2;\\
&6a_1(1-0)+2b_1=6a_2(1-1)+2b_2.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

З умови гладкості функції:

$$\begin{aligned}
&x=0:\ 6a_1(0-0)+2b_1=0;\\
&x=2:\ 6a_2(2-1)+2b_2=0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Розв'язавши рівняння (4.12) – (4.14), отримаємо:

$$a_1=\frac{3}{2},\ b_1=0,\ c_1=\frac{1}{2},\ d_1=0;$$

$$a_2=-\frac{3}{2},\ b_2=\frac{9}{2},\ c_2=5,\ d_2=2.$$

Тоді функція має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x,\ x\in[0;\ 1];\\ -\frac{3}{2}(x-1)^3+\frac{9}{2}(x-1)^2+5(x-1)+2,\ x\in[1;\ 2].\end{cases}$$

ЗАВДАННЯ НА ЛАБОРАТОРНУ РОБОТУ.

Функція задана таблицею значень в 15 інтерполяційних вузлах (дивись файл ***Варіанти_lab_4.xls***). Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа за допомогою формули

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} y_m \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{m-1})\cdot(x-x_{m+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_m-x_0)\cdot(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})\cdot(x_m-x_{m+1})\ldots(x_m-x_n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

Після виконання всіх обчислень та спрощень знайти формулу для інтерполяційного многочлена 14 порядку, який проходить через всі 15 точок, що задані в таблиці варіантів. Побудувати графік знайденого многочлену і нанести на цей графік задані точки.

За допомогою сплайн-інтерполяції (оператор spline системи Maple) побудувати інтерполяційні многочлени другого та третього порядку, які проходять через задані точки.

Побудувати графік многочлена Лагранжа та квадратичного сплайн-многочлена, і графік многочлена Лагранжа та кубічного сплайн-многочлена.

Оцінити похибку інтерполяції та зробити висновок, який з многочленів краще інтерполює функцію, що задана таблицею значень.

Імпортуємо вектор X з таблички з варіантами

```
> X := ExcelTools:-Import("D:\\Downloads\\Варіанти_lab_4.xls", "Sheet1",
    "A3:A17");
```

$$X := \begin{bmatrix} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \\ 7. \\ 8. \\ 9. \\ 10. \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (1)$$

15 × 1 Matrix

> $X(1)$

$$1. \tag{2}$$

> $X(15)$

$$15. \tag{3}$$

Все імпортувалося успішно.
Імпортуємо вектор Y з таблички з варіантами

> $Y := ExcelTools\text{:-}Import(\text{"D:\\\\Downloads\\\\Варіанти\_lab\_4.xls", "Sheet1", "U3:U17"});$

$$\left[\begin{array}{c} 11.0710723726326 \\ 18.6143293380473 \\ 28.2825615178309 \\ 39.1630229191816 \\ 47.4500954342648 \\ 43.6032196960862 \\ 54.7174286926609 \\ 41.8379377799207 \\ 60.1730706284564 \\ 52.6049258072369 \\ \vdots \end{array}\right]$$

15 × 1 Matrix

$$Y := \left[\begin{array}{c} 11.0710723726326 \\ 18.6143293380473 \\ 28.2825615178309 \\ 39.1630229191816 \\ 47.4500954342648 \\ 43.6032196960862 \\ 54.7174286926609 \\ 41.8379377799207 \\ 60.1730706284564 \\ 52.6049258072369 \\ \vdots \end{array}\right] \tag{4}$$

15 × 1 Matrix

> $Y(1); Y(15)$

$$11.0710723726326$$
$$67.6489274311190 \tag{5}$$

Все імпортувалося успішно.
Присвоюємо відповідні значення x та y

> $x0 := X(1); x1 := X(2); x2 := X(3); x3 := X(4); x4 := X(5); x5 := X(6); x6 := X(7); x7 := X(8); x8 := X(9); x9 := X(10); x10 := X(11); x11 := X(12); x12 := X(13); x13 := X(14); x14 := X(15);$

$$x0 := 1.$$
$$x1 := 2.$$
$$x2 := 3.$$
$$x3 := 4.$$
$$x4 := 5.$$
$$x5 := 6.$$
$$x6 := 7.$$
$$x7 := 8.$$
$$x8 := 9.$$
$$x9 := 10.$$
$$x10 := 11.$$
$$x11 := 12.$$
$$x12 := 13.$$
$$x13 := 14.$$
$$x14 := 15. \quad (6)$$

> $y0 := Y(1); y1 := Y(2); y2 := Y(3); y3 := Y(4); y4 := Y(5); y5 := Y(6); y6 := Y(7); y7 := Y(8); y8 := Y(9); y9 := Y(10); y10 := Y(11); y11 := Y(12); y12 := Y(13); y13 := Y(14); y14 := Y(15);$

$$y0 := 11.0710723726326$$
$$y1 := 18.6143293380473$$
$$y2 := 28.2825615178309$$
$$y3 := 39.1630229191816$$
$$y4 := 47.4500954342648$$
$$y5 := 43.6032196960862$$
$$y6 := 54.7174286926609$$
$$y7 := 41.8379377799207$$
$$y8 := 60.1730706284564$$
$$y9 := 52.6049258072369$$
$$y10 := 66.1451360047548$$
$$y11 := 81.2261664199702$$
$$y12 := 68.3037749582364$$
$$y13 := 68.6291359003825$$
$$y14 := 67.6489274311190 \quad (7)$$

Шукаємо інтерполяційний многочлен Лагранжа за формулою

$$> P := y0 \cdot ((x-x1)\cdot(x-x2)\cdot(x-x3)\cdot(x-x4)\cdot(x-x5)\cdot(x-x6)\cdot(x-x7)\cdot(x-x8)\cdot(x-x9)\cdot(x-x10)\cdot(x-x11)\cdot(x-x12)\cdot(x-x13)\cdot(x-x14)) / ((x0-x1)\cdot(x0-x2)\cdot(x0-x3)\cdot(x0-x4)\cdot(x0-x5)\cdot(x0-x6)\cdot(x0-x7)\cdot(x0-x8)\cdot(x0-x9)\cdot(x0-x10)\cdot(x0-x11)\cdot(x0-x12)\cdot(x0-x13)\cdot(x0-x14)):$$

$$> P := P + y1 \cdot ((x-x0)\cdot(x-x2)\cdot(x-x3)\cdot(x-x4)\cdot(x-x5)\cdot(x-x6)\cdot(x-x7)\cdot(x-x8)\cdot(x-x9)\cdot(x-x10)\cdot(x-x11)\cdot(x-x12)\cdot(x-x13)\cdot(x-x14)) / ((x1-x0)\cdot(x1-x2)\cdot(x1-x3)\cdot(x1-x4)\cdot(x1-x5)\cdot(x1-x6)\cdot(x1-x7)\cdot(x1-x8)\cdot(x1-x9)\cdot(x1-x10)\cdot(x1-x11)\cdot(x1-x12)\cdot(x1-x13)\cdot(x1-x14)):$$

$$> P := P + y2 \cdot ((x-x0)\cdot(x-x2)\cdot(x-x3)\cdot(x-x4)\cdot(x-x5)\cdot(x-x6)\cdot(x-x7)\cdot(x-x8)\cdot(x-x9)\cdot(x-x10)\cdot(x-x11)\cdot(x-x12)\cdot(x-x13)\cdot(x-x14)) / ((x2-x0)\cdot(x2-x1)\cdot(x2-x3)\cdot(x2-x4)\cdot(x2-x5)\cdot(x2-x6)\cdot(x2-x7)\cdot(x2-x8)\cdot(x2-x9)\cdot(x2-x10)\cdot(x2-x11)\cdot(x2-x12)\cdot(x2-x13)\cdot(x2-x14)):$$

$$> P := P + y3 \cdot ((x-x0)\cdot(x-x1)\cdot(x-x2)\cdot(x-x4)\cdot(x-x5)\cdot(x-x6)\cdot(x-x7)\cdot(x-x8)\cdot(x-x9)\cdot(x-x10)\cdot(x-x11)\cdot(x-x12)\cdot(x-x13)\cdot(x-x14)) / ((x3-x0)\cdot(x3-x1)\cdot(x3-x2)\cdot(x3-x4)\cdot(x3-x5)\cdot(x3-x6)\cdot(x3-x7)\cdot(x3-x8)\cdot(x3-x9)\cdot(x3-x10)\cdot(x3-x11)\cdot(x3-x12)\cdot(x3-x13)\cdot(x3-x14)):$$

$$> P := P + y4 \cdot ((x-x0)\cdot(x-x1)\cdot(x-x2)\cdot(x-x3)\cdot(x-x5)\cdot(x-x6)\cdot(x-x7)\cdot(x-x8)\cdot(x-x9)\cdot(x-x10)\cdot(x-x11)\cdot(x-x12)\cdot(x-x13)\cdot(x-x14)) / ((x4-x0)\cdot(x4-x1)\cdot(x4-x2)\cdot(x4-x3)\cdot(x4-x5)\cdot(x4-x6)\cdot(x4-x7)\cdot(x4-x8)\cdot(x4-x9)\cdot(x4-x10)\cdot(x4-x11)\cdot(x4-x12)\cdot(x4-x13)\cdot(x4-x14)):$$

$$> P := P + y5 \cdot ((x-x0)\cdot(x-x1)\cdot(x-x2)\cdot(x-x3)\cdot(x-x4)\cdot(x-x6)\cdot(x-x7)\cdot(x-x8)\cdot(x-x9)\cdot(x-x10)\cdot(x-x11)\cdot(x-x12)\cdot(x-x13)\cdot(x-x14)) / ((x5-x0)\cdot(x5-x1)\cdot(x5-x2)\cdot(x5-x3)\cdot(x5-x4)\cdot(x5-x6)\cdot(x5-x7)\cdot(x5-x8)\cdot(x5-x9)\cdot(x5-x10)\cdot(x5-x11)\cdot(x5-x12)\cdot(x5-x13)\cdot(x5-x14)):$$

$$> P := P + y6 \cdot ((x-x0)\cdot(x-x1)\cdot(x-x2)\cdot(x-x3)\cdot(x-x4)\cdot(x-x5)\cdot(x-x7)\cdot(x-x8)\cdot(x-x9)\cdot(x-x10)\cdot(x-x11)\cdot(x-x12)\cdot(x-x13)\cdot(x-x14)) / ((x6-x0)\cdot(x6-x1)\cdot(x6-x2)\cdot(x6-x3)\cdot(x6-x4)\cdot(x6-x5)\cdot(x6-x7)\cdot(x6-x8)\cdot(x6-x9)\cdot(x6-x10)\cdot(x6-x11)\cdot(x6-x12)\cdot(x6-x13)\cdot(x6-x14)):$$

$$> P := P + y7 \cdot ((x-x0)\cdot(x-x1)\cdot(x-x2)\cdot(x-x3)\cdot(x-x4)\cdot(x-x5)\cdot(x-x6)\cdot(x-x8)\cdot(x-x9)\cdot(x-x10)\cdot(x-x11)\cdot(x-x12)\cdot(x-x13)\cdot(x-x14)) / ((x7-x0)\cdot(x7-x1)\cdot(x7-x2)\cdot(x7-x3)\cdot(x7-x4)\cdot(x7-x5)\cdot(x7-x6)\cdot(x7-x8)\cdot(x7-x9)\cdot(x7-x10)\cdot(x7-x11)\cdot(x7-x12)\cdot(x7-x13)\cdot(x7-x14)):$$

$$> P := P + y8\cdot((x - x0)\cdot(x - x1)\cdot(x - x2)\cdot(x - x3)\cdot(x - x4)\cdot(x - x5)\cdot(x - x6)\cdot(x - x7)\cdot(x - x9)\cdot(x - x10)\cdot(x - x11)\cdot(x - x12)\cdot(x - x13)\cdot(x - x14))/((x8 - x0)\cdot(x8 - x1)\cdot(x8 - x2)\cdot(x8 - x3)\cdot(x8 - x4)\cdot(x8 - x5)\cdot(x8 - x6)\cdot(x8 - x7)\cdot(x8 - x9)\cdot(x8 - x10)\cdot(x8 - x11)\cdot(x8 - x12)\cdot(x8 - x13)\cdot(x8 - x14)):$$

$$> P := P + y9\cdot((x - x0)\cdot(x - x1)\cdot(x - x2)\cdot(x - x3)\cdot(x - x4)\cdot(x - x5)\cdot(x - x6)\cdot(x - x7)\cdot(x - x8)\cdot(x - x10)\cdot(x - x11)\cdot(x - x12)\cdot(x - x13)\cdot(x - x14))/((x9 - x0)\cdot(x9 - x1)\cdot(x9 - x2)\cdot(x9 - x3)\cdot(x9 - x4)\cdot(x9 - x5)\cdot(x9 - x6)\cdot(x9 - x7)\cdot(x9 - x8)\cdot(x9 - x10)\cdot(x9 - x11)\cdot(x9 - x12)\cdot(x9 - x13)\cdot(x9 - x14)):$$

$$> P := P + y10\cdot((x - x0)\cdot(x - x1)\cdot(x - x2)\cdot(x - x3)\cdot(x - x4)\cdot(x - x5)\cdot(x - x6)\cdot(x - x7)\cdot(x - x8)\cdot(x - x9)\cdot(x - x11)\cdot(x - x12)\cdot(x - x13)\cdot(x - x14))/((x10 - x0)\cdot(x10 - x1)\cdot(x10 - x2)\cdot(x10 - x3)\cdot(x10 - x4)\cdot(x10 - x5)\cdot(x10 - x6)\cdot(x10 - x7)\cdot(x10 - x8)\cdot(x10 - x9)\cdot(x10 - x11)\cdot(x10 - x12)\cdot(x10 - x13)\cdot(x10 - x14)):$$

$$> P := P + y11\cdot((x - x0)\cdot(x - x1)\cdot(x - x2)\cdot(x - x3)\cdot(x - x4)\cdot(x - x5)\cdot(x - x6)\cdot(x - x7)\cdot(x - x8)\cdot(x - x9)\cdot(x - x10)\cdot(x - x12)\cdot(x - x13)\cdot(x - x14))/((x11 - x0)\cdot(x11 - x1)\cdot(x11 - x2)\cdot(11 - x3)\cdot(x11 - x4)\cdot(x11 - x5)\cdot(x11 - x6)\cdot(x11 - x7)\cdot(x11 - x8)\cdot(x11 - x9)\cdot(x11 - x10)\cdot(x11 - x12)\cdot(x11 - x13)\cdot(x11 - x14)):$$

$$> P := P + y12\cdot((x - x0)\cdot(x - x1)\cdot(x - x2)\cdot(x - x3)\cdot(x - x4)\cdot(x - x5)\cdot(x - x6)\cdot(x - x7)\cdot(x - x8)\cdot(x - x9)\cdot(x - x10)\cdot(x - x11)\cdot(x - x13)\cdot(x - x14))/((x12 - x0)\cdot(x12 - x1)\cdot(x12 - x2)\cdot(x12 - x3)\cdot(x12 - x4)\cdot(x12 - x5)\cdot(x12 - x6)\cdot(x12 - x7)\cdot(x12 - x8)\cdot(x12 - x9)\cdot(x12 - x10)\cdot(x12 - x11)\cdot(x12 - x13)\cdot(x12 - x14)):$$

$$> P := P + y13\cdot((x - x0)\cdot(x - x1)\cdot(x - x2)\cdot(x - x3)\cdot(x - x4)\cdot(x - x5)\cdot(x - x6)\cdot(x - x7)\cdot(x - x8)\cdot(x - x9)\cdot(x - x10)\cdot(x - x11)\cdot(x - x12)\cdot(x - x14))/((x13 - x0)\cdot(x13 - x1)\cdot(x13 - x2)\cdot(x13 - x3)\cdot(x13 - x4)\cdot(x13 - x5)\cdot(x13 - x6)\cdot(x13 - x7)\cdot(x13 - x8)\cdot(x13 - x9)\cdot(x13 - x10)\cdot(x13 - x11)\cdot(x13 - x12)\cdot(x13 - x14)):$$

$$> P := P + y14\cdot((x - x0)\cdot(x - x1)\cdot(x - x2)\cdot(x - x3)\cdot(x - x4)\cdot(x - x5)\cdot(x - x6)\cdot(x - x7)\cdot(x - x8)\cdot(x - x9)\cdot(x - x10)\cdot(x - x11)\cdot(x - x12)\cdot(x - x13))/((x14 - x0)\cdot(x14 - x1)\cdot(x14 - x2)\cdot(x14 - x3)\cdot(x14 - x4)\cdot(x14 - x5)\cdot(x14 - x6)\cdot(x14 - x7)\cdot(x14 - x8)\cdot(x14 - x9)\cdot(x14 - x10)\cdot(x14 - x11)\cdot(x14 - x12)\cdot(x14 - x13)):$$

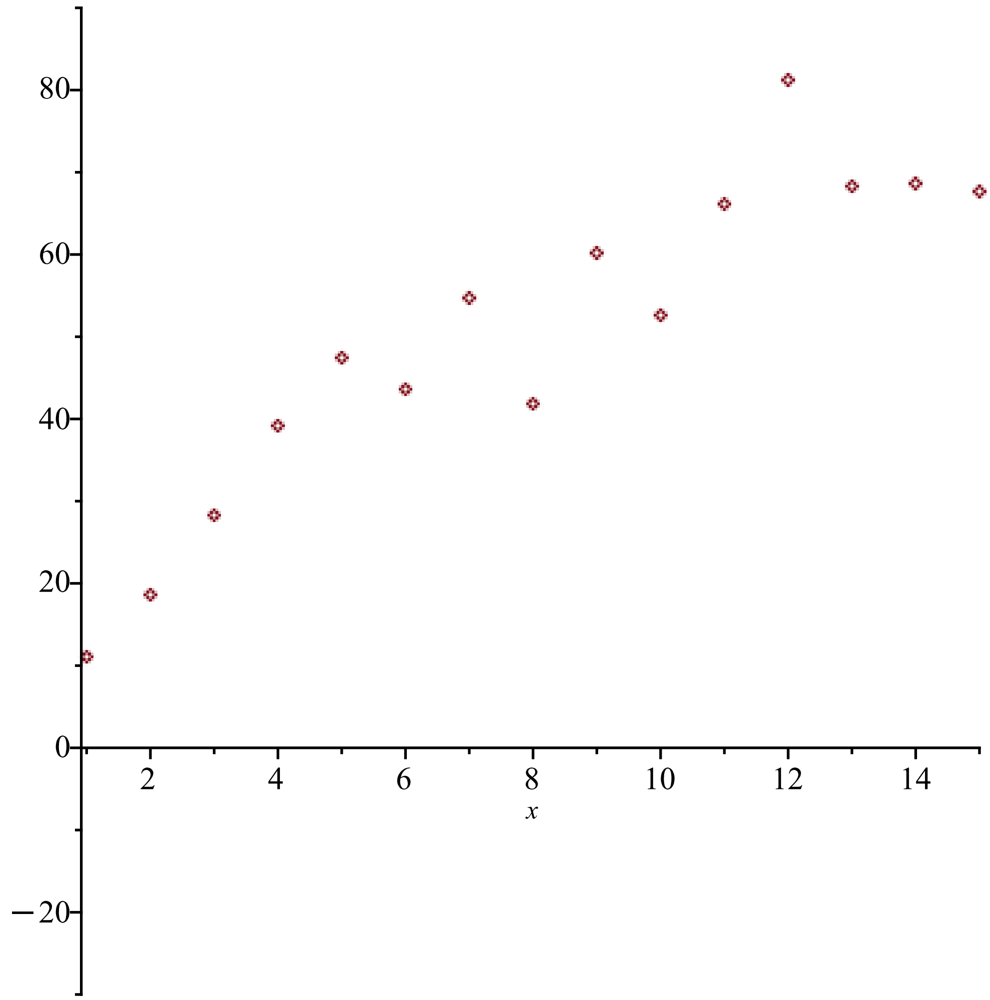
$$> simplify(P)$$

$$-532530.442396517\, x + 9.42089226290444 \times 10^{-7}\, x^{14} + 22008.1141547292\, x^{6} - 3890.52964570181\, x^{7} + 506.229043857842\, x^{8} - 48.4183205277431\, x^{9} + 3.36098839700862\, x^{10} - 0.164623549055778\, x^{11} + 0.00539084330882028\, x^{12} - 0.000105856126352566\, x^{13} + 267709.936189318\, x^{4} - 90812.2542860492\, x^{5} \qquad \textbf{(8)}$$

$$+ 168649.168153938 - 543311.578071862\,x^3 + 711727.644600411\,x^2$$

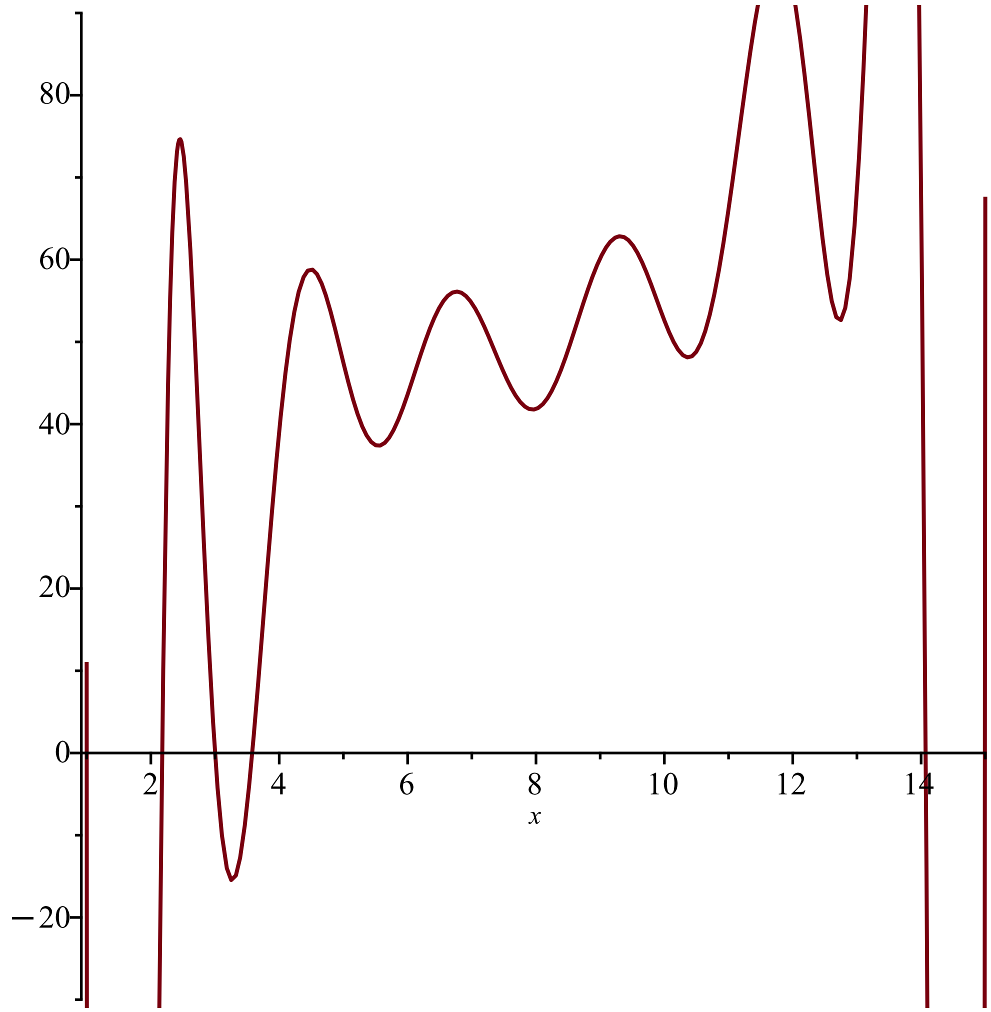
На графіку позначаємо точки інтерполяційного многочлена Лагранжа

> $Point := plot(\langle\langle x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14\rangle | \langle y0, y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7, y8, y9, y10, y11, y12, y13, y14\rangle\rangle, x = 1\,..15, -30\,..90, style = point)$



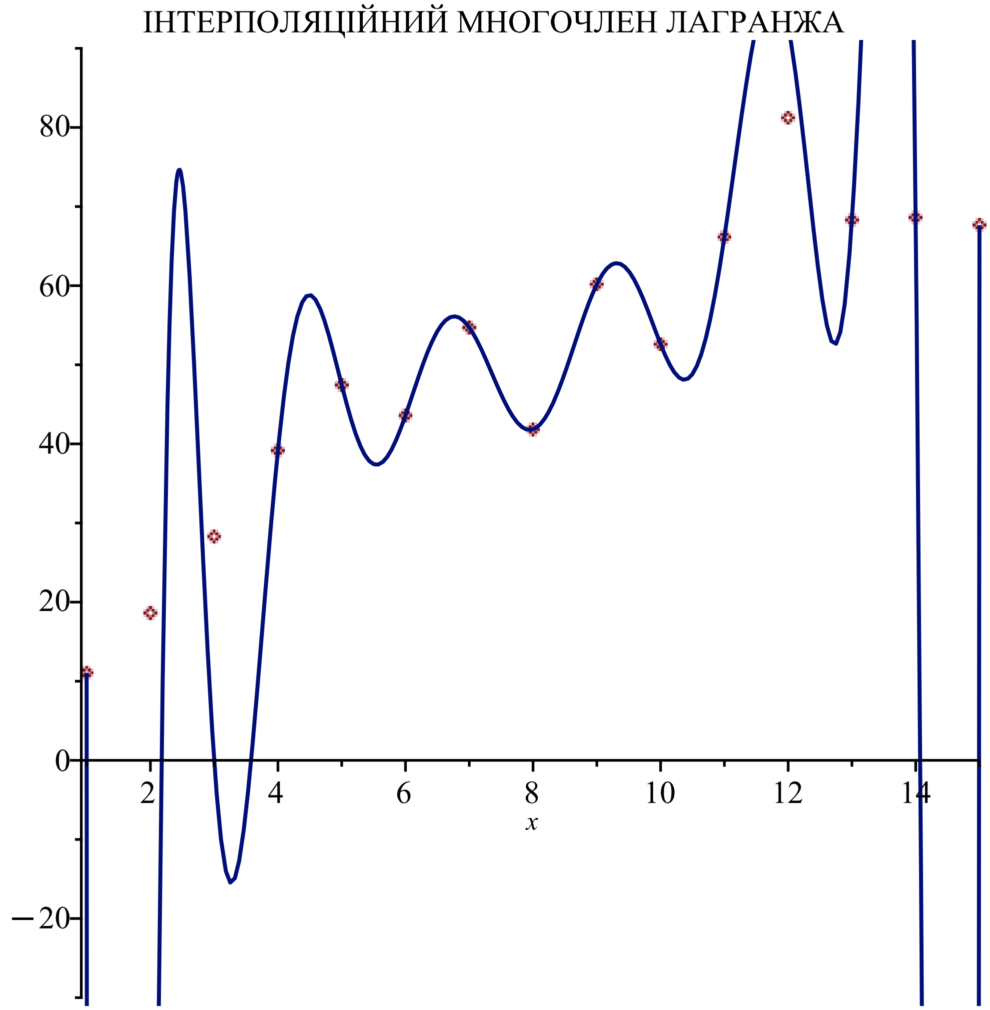
Будуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа

> $Lagrange := plot(P, x = 1\,..15, -30\,..90)$



Накладаємо графік точок та графік самого многочлена. Бачимо неідеальний збіг точок. Спробуємо побудувати сплайн многочлен

```
> plots[display]([Point, Lagrange], title
      ="ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА")
```



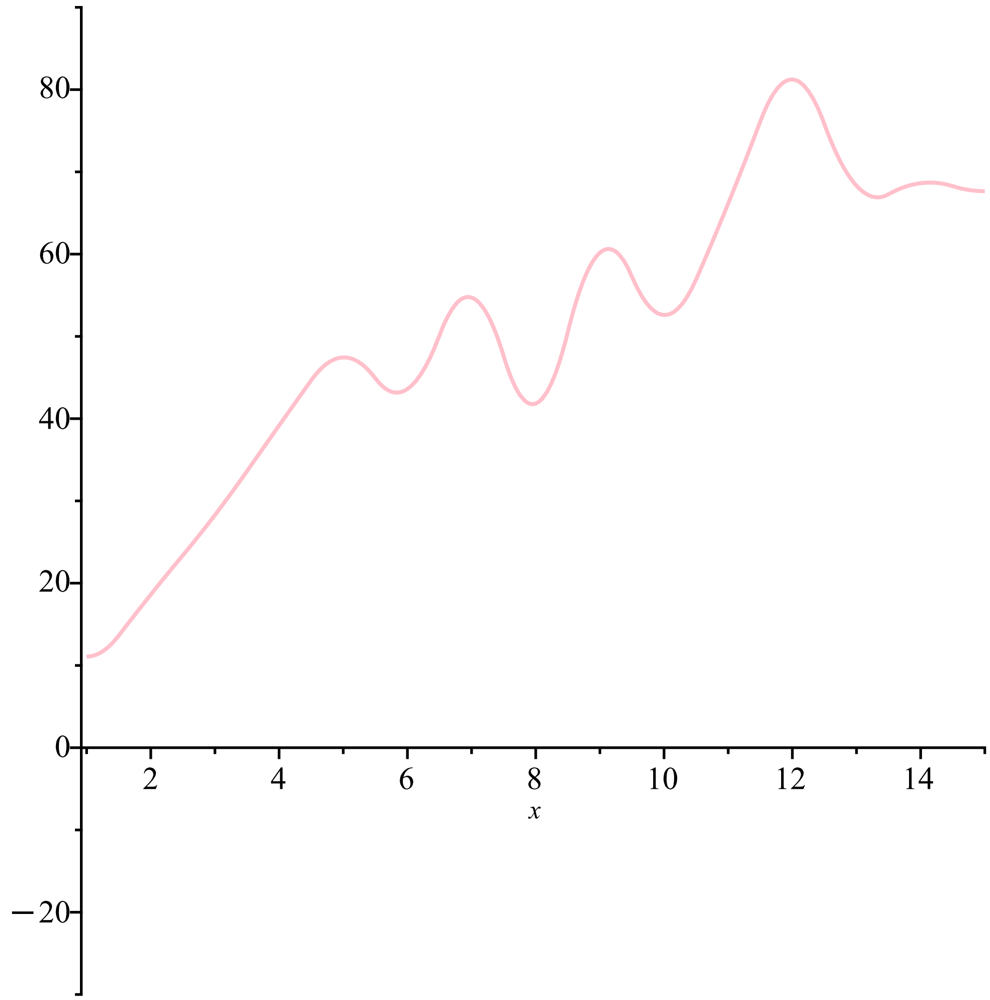
Обчислюємо квадратичний сплайн-многочлен

> $f2 := spline([x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14], [y0, y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7, y8, y9, y10, y11, y12, y13, y14], x, 2)$

$$f2 := \begin{cases} 11.0710723726326 + 10.2020547029400\,(x - 1.)^2 & x < 1.50000000000 \\ -0.923507573510456 + 9.76891845577887\,x - 0.433136247161085\,(x - 2.)^2 & x < 2.50000000000 \\ -2.41477602052905 + 10.2324458461200\,x + 0.896663637502193\,(x - 3.)^2 & x < 3.50000000000 \\ -4.96170024897325 + 11.0311807920387\,x - 0.0979286915834461\,(x - 4.)^2 & x < 4.50000000000 \\ 46.1970700973486 + 0.250605067383226\,x - 10.6826470330720\,(x - 5.)^2 & x < 5.50000000000 \\ 12.2473642284056 + 5.22597591128009\,x + 15.6580178769689\,(x - 6.)^2 & x < 6.50000000000 \\ 72.4773212030153 - 2.53712750147919\,x - 23.4211212897282\,(x - 7.)^2 & x < 7.50000000000 \\ 18.3526463164541 + 2.93566143293333\,x + 28.8939102241407\,(x - 8.)^2 & x < 8.50000000000 \\ -0.538469195092738 + 6.74572664706101\,x - 25.0838450100130\,(x - 9.)^2 & x < 9.50000000000 \\ 56.0256178675856 - 0.342069206034877\,x + 17.9960491569172\,(x - 10.)^2 & x < 10.500000000 \\ -144.999315033006 + 19.1949500943419\,x + 1.54097014345958\,(x - 11.)^2 & x < 11.500000000 \\ 85.3381933289641 - 0.342668909082819\,x - 21.0785891468843\,(x - 12.)^2 & x < 12.500000000 \\ 178.860725695174 - 8.50438082591827\,x + 12.9168772300488\,(x - 13.)^2 & x < 13.500000000 \\ 54.8974908930024 + 0.980831786241437\,x - 3.43166461788910\,(x - 14.)^2 & x < 14.500000000 \\ 67.6489274311190 + 2.45083283164767\,(x - 15.)^2 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

Будуємо графік квадратичного сплайн-многочлена

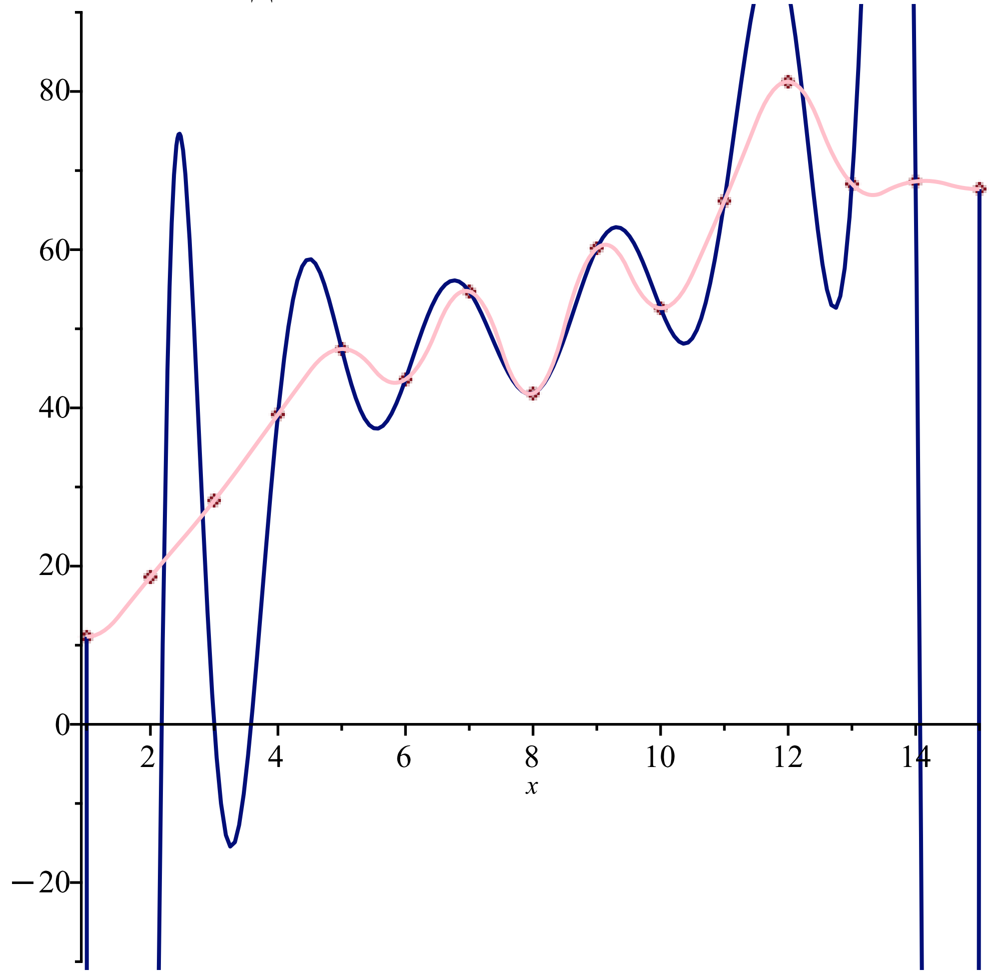
> $Spline2 := plot(f2, x = 1..15, -30..90, color = pink)$



Накладаємо графік точок та графік квадратичного сплайн-многочлена. Бачимо ідеальний збіг точок. Спробуємо побудувати кубічний сплайн-многочлен

> $plots[display]([Point, Lagrange, Spline2], title = $ "КВАДРАТИЧНИЙ СПЛАЙН-МНОГОЧЛЕН")

КВАДРАТИЧНИЙ СПЛАЙН-МНОГОЧЛЕН



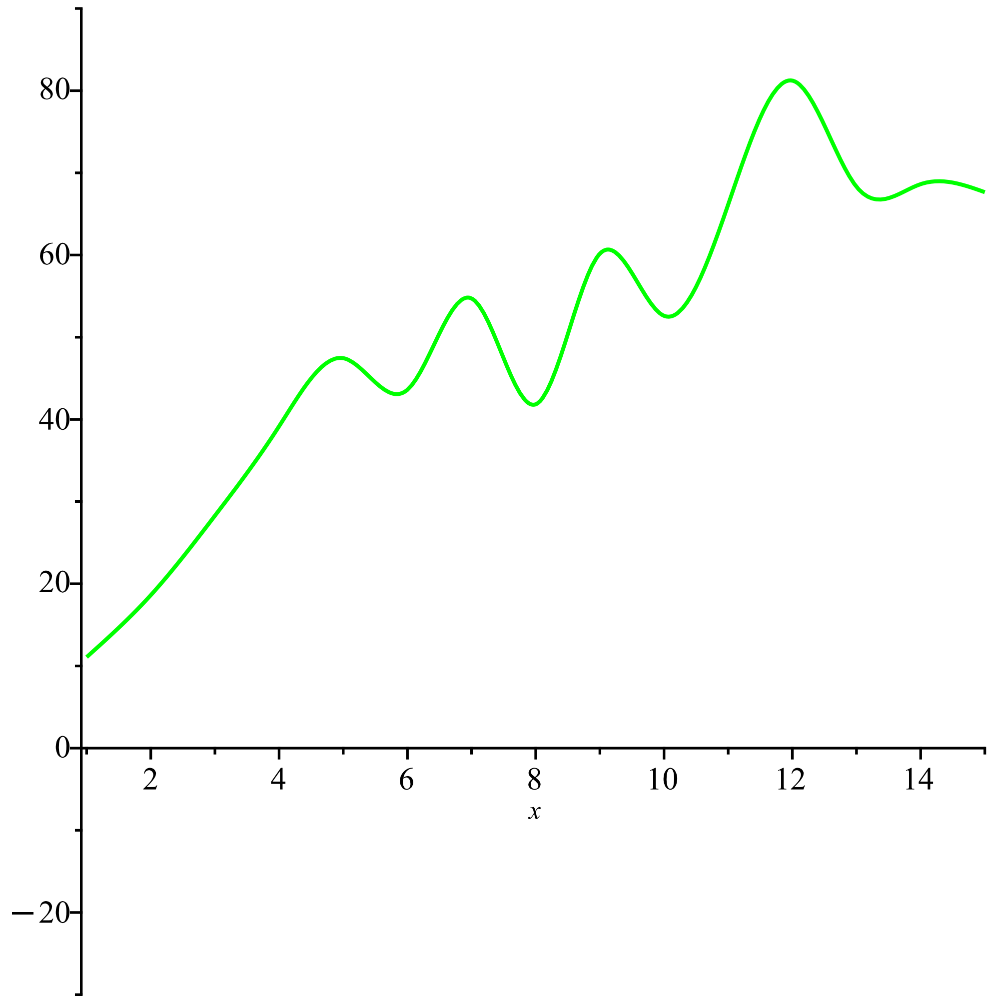
Обчислюємо кубічний сплайн-многочлен

> $f3 := spline([x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14], [y0, y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7, y8, y9, y10, y11, y12, y13, y14], x, 3)$

$$
f3 := \begin{cases}
4.05628256837557 + 7.01478980425702\, x + 0.528467161157676\, (x - 1.)^3 \\
1.41394676258719 + 8.60019128773004\, x + 1.58540148347303\, (x - 2.)^2 - 0.517360591419469\, (x \\
-2.37417592342219 + 10.2189124804177\, x + 0.0333197092146209\, (x - 3.)^2 + 0.628229211718446 \\
-9.51793521682745 + 12.1702395340023\, x + 1.91800734436996\, (x - 4.)^2 - 5.80117436328910\, (\\
54.4364397698904 - 1.39726886712512\, x - 15.4855157454974\, (x - 5.)^2 + 13.0359088744439\, (x \\
3.16666210481507 + 6.73942626521185\, x + 23.6222108778343\, (x - 6.)^2 - 19.2474281464715\, (x \\
81.0264836223979 - 3.75843641853386\, x - 34.1200735615800\, (x - 7.)^2 + 24.9990190673737\, (x \\
17.8501484965025 + 2.99847366042728\, x + 40.8769836405412\, (x - 8.)^2 - 25.5403244524328\, (x \\
-13.0101376294435 + 8.13146758421110\, x - 35.7439897167574\, (x - 9.)^2 + 20.0443773113268\, (\\
84.8387249604697 - 3.22337991532329\, x + 24.3891422172230\, (x - 10.)^2 - 7.62555210438180\, (x \\
-183.315594260995 + 22.6782482059773\, x + 1.51248590407758\, (x - 11.)^2 - 9.10970369483936\, (\\
100.736859264598 - 1.62589107038567\, x - 25.8166251804405\, (x - 12.)^2 + 14.5201247890924\, (x \\
194.387746790101 - 9.69876706398957\, x + 17.7437491868366\, (x - 13.)^2 - 7.71962118070097\, (x \\
31.8109871542523 + 2.62986776758073\, x - 5.41511435526630\, (x - 14.)^2 + 1.80503811842210\, (x
\end{cases}
$$

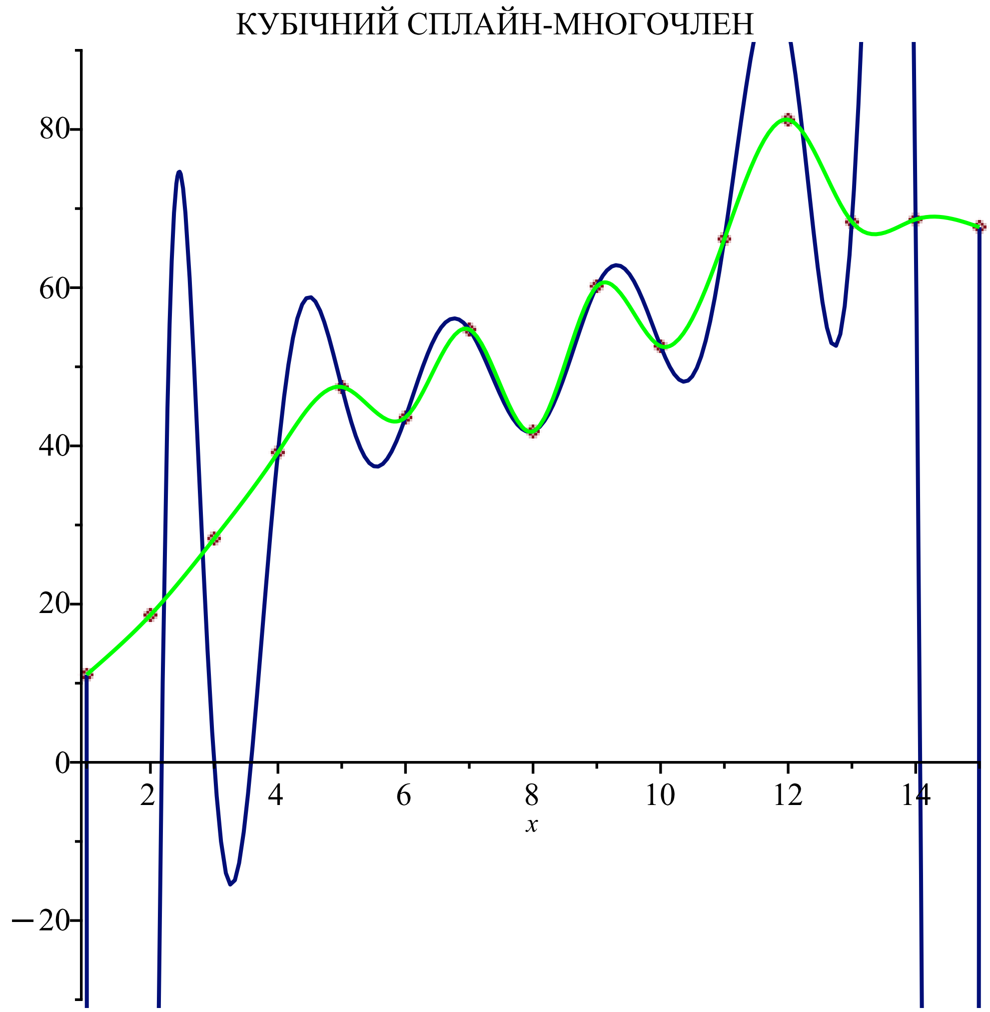
Будуємо графік кубічного сплайн-многочлена

> $Spline3 := plot(f3, x = 1..15, -30..90, color = green)$



Накладаємо графік точок та графік кубічного сплайн-многочлена. Бачимо ідеальний збіг точок. Спробуємо порівняти квадратичний та кубічний сплайн-многочлени

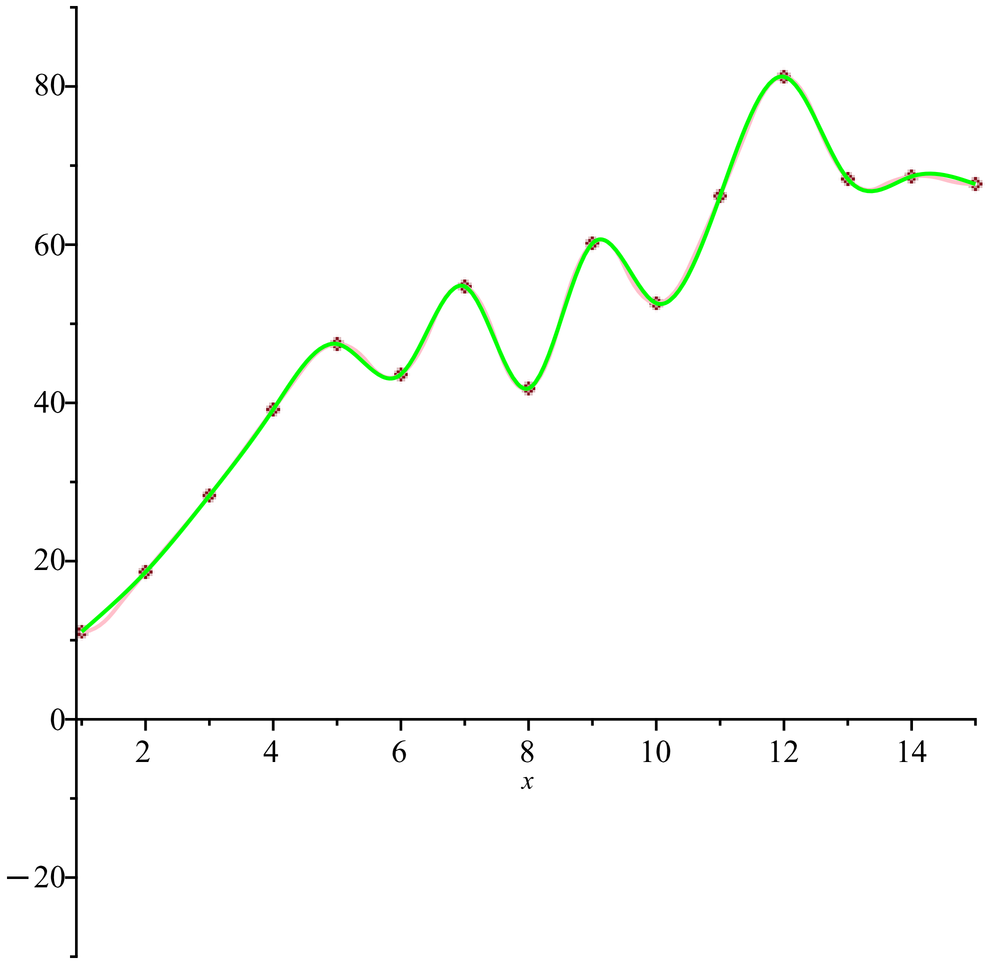
> $plots[display]([Point, Lagrange, Spline3], title$ = "КУБІЧНИЙ СПЛАЙН-МНОГОЧЛЕН")



Накладаємо графік квадратичного сплайн-многочлена та кубічного сплайн многочлена. Бачимо майже ідеальний збіг, проте, очікувано, кубічний сплайн многочлен показує більшу точність.

> $plots[display]([Point, Spline2, Spline3], title = $"СПЛАЙН-МНОГОЧЛЕН")

СПЛАЙН-МНОГОЧЛЕН



>