Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3
по дисципліні «Вища математика»

Тема: КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ
Варіант 45

Виконав: студент гр. КС-231
Киба Д.В.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2023

Error, missing operator or `;`

Теоретичні відомості

Використані оператори Maple:

conic - задання геометричного об'єкту у вигляді рівняння
draw - відображення геометричних об'єктів
CompleteSquare - виділення повних квадратів
implicitplot - відображення кривої другого порядку
implicitplot3d - відображення поверхні другого порядку

Лінією другого порядку на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), координати (x; y) яких задовольняють алгебраїчному рівнянню другого порядку

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Наведене рівняння визначає на площині коло, еліпс, гіперболу або параболу, або у виродженому випадку – одну чи дві прямих, точку, або не визначає ніякого геометричного об’єкта.

Канонічне рівняння кола:

$$(x - x0)^2 + (y - y0)^2 = R^2$$

Канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Рівняння параболи

$$y^2 = 2\,px$$

Загальне рівняння поверхні другого порядку:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Основні канонічні рівняння поверхонь другого порядку:

1. Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2. Еліпсоїд обертання: $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

3. Гіперболоїди обертання:

а) однопорожнинний: $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

б) двопорожнинний: $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.

4. Круговий конус: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

5. Параболоїд обертання: $x^2 + y^2 = 2pz$.

6. Круговий циліндр: $x^2 + y^2 = a^2, \ \forall z$.

Завдання 1.

Привести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку, визначити тип кривої та побудувати її графік. Знайти параметри кривої другого порядку (ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директриси тощо). На графіку показати фокуси, директрису та проілюструвати властивість, яка використовується в означенні цієї кривої другого порядку.

Варіант 45-30=15

Варіант 15. $f(x,y) = 45x^2 + 32y^2 - 135x + 96y - 18 = 0$ f (x,y) = $5 \cdot y^2 - 30 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 32 \cdot y = 0$

Підключаємо пакеи geometry і за допомогою оператора conic визначемо геометричний об'єкт.

> $with(geometry):$

>

> $eng := 45 \cdot x^2 + 32 \cdot y^2 - 135 \cdot x + 96 \cdot y - 18 = 0$

$$eng := 45\, x^2 + 32\, y^2 - 135\, x + 96\, y - 18 = 0 \qquad (1)$$

Знову для визначення виду кривої другого порядку (коніки), яке задає наведене вище рівняння, скористаємось оператором
conic, за допомогою якого визначається геометрчний об'єкт **con** із заданим рівнянням відносно змінних **x** та **y**.

> $conic(con, eng, [x, y])$

$$con \qquad (2)$$

Детальний опис заданого геометричного об'єкта:

> $detail(con)$

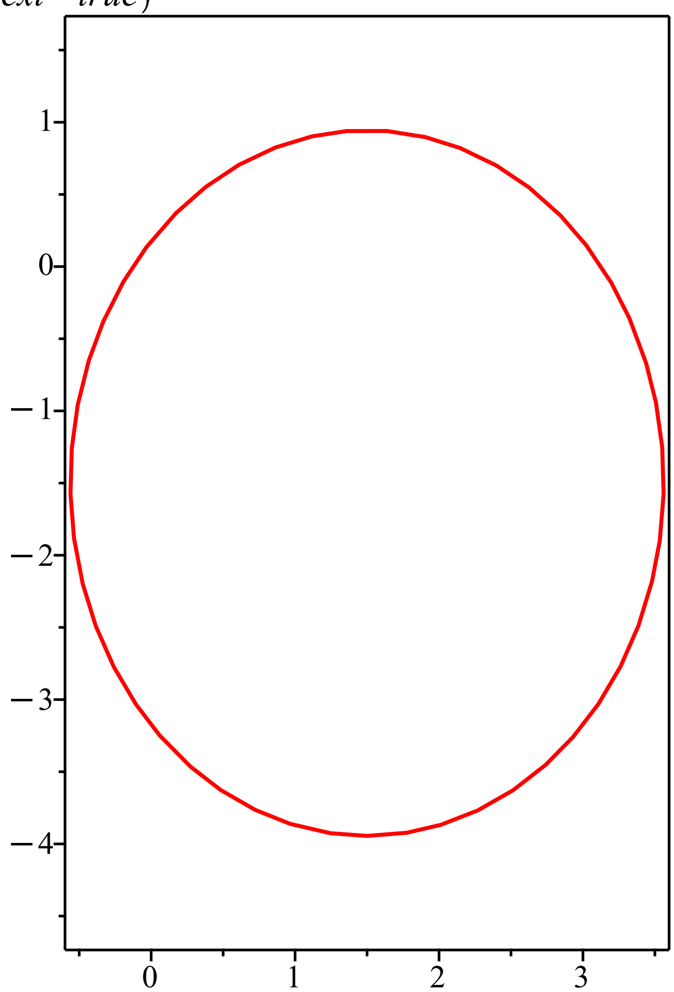
(3)

name of the object	*con*
form of the object	*ellipse2d*
center	$\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right]$
foci	$\left[\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{442}}{16}\right], \left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{442}}{16}\right]\right]$
length of the major axis	$\frac{3\sqrt{170}}{8}$
length of the minor axis	$\sqrt{17}$
equation of the ellipse	$45x^2 + 32y^2 - 135x + 96y - 18 = 0$

(3)

Отже, задане рівняння визначає еліпс. Побудуємо його

> $draw(con, printtext = true)$



> $Equation(con)$

$$45x^2 + 32y^2 - 135x + 96y - 18 = 0 \quad \textbf{(4)}$$

Знаходимо координати центру еліпса - точки O2

> $center(con); coordinates(center(con)); point(O2, coordinates(center(con)));$

$$center\_con$$

$$\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right]$$

$$O2 \tag{5}$$

Знаходимо координати фокусів еліпса

> $foci(con), map(coordinates, foci(con));$

$$[foci\_1\_con, foci\_2\_con], \left[\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{442}}{16}\right], \left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{442}}{16}\right]\right] \tag{6}$$

>

Задаємо геометричні об'єкти - точки фокусів F1 і F2, які мають вказані координати:

> $point\left(F1, \left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{\mathrm{sqrt}(442)}{16}\right]\right);$
$point\left(F2, \left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\mathrm{sqrt}(442)}{16}\right]\right);$

$$F1$$

$$F2 \tag{7}$$

Знаходимо велику піввісь еліпса a і малу піввісь еліпса b

> $a := evalf(0.5 \cdot MajorAxis(con)); b := evalf(0.5 \cdot MinorAxis(con))$

$$a := 2.444700902$$

$$b := 2.061552813 \tag{8}$$

Знаходимо координати вершин головного прямокутника. Центр цього пряокутника співпадає з центром еліпса, вліво і вправо від центру відкладені значення великої півосі a, а вгору та вниз відкладені значення малої півосі еліпса b:

> $point\left(A, \left[\frac{3}{2} - b, -\frac{3}{2} + a\right]\right);$
$point\left(B, \left[\frac{3}{2} + b, -\frac{3}{2} + a\right]\right);$
$point\left(C, \left[\frac{3}{2} + b, -\frac{3}{2} - a\right]\right);$
$point\left(\mathrm{D}, \left[\frac{3}{2} - b, -\frac{3}{2} - a\right]\right);$

$$A$$

$$B$$

$$C$$

```
Warning, a geometry object has been assigned to the protected name D.  Use of protected names for geometry objects is not recommended and may break Maple functionality.
```

$$\mathrm{D} \qquad \textbf{(9)}$$

Задаємо геометричний об'єкт - прямокутник ABCD - головний прямокутник еліпса

> $square(Sq, [A, B, C, \mathrm{D}]);$

$$Sq \qquad \textbf{(10)}$$

Проводимо пряму через фокуси - це горизонтальна вісь симетрії еліпса

> $line(la, [F1, F2]);$

$$la \qquad \textbf{(11)}$$

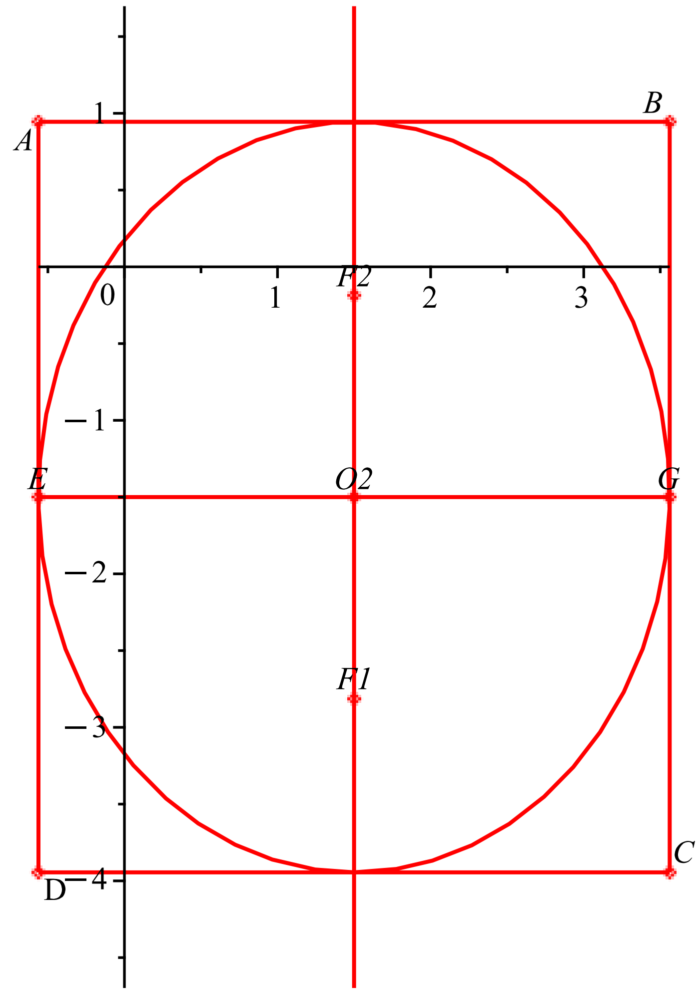
Проводимо прямі через точки, які відстоять від центру уверх і вниз на значення малої півосі - це точки дотику еліпсу і головного прямокутника

> $line\left(lb, \left[point\left(E, \left[\frac{3}{2} - b, -\frac{3}{2}\right]\right), point\left(G, \left[\frac{3}{2} + b, -\frac{3}{2}\right]\right)\right]\right)$

$$lb \qquad \textbf{(12)}$$

Будуємо малюнок

> $draw([con, O2, Sq, la, lb, A, B, C, \mathrm{D}, F1, F2, E, G], printtext = true, axes = normal)$



Відстань від центру до фокусів (або половина відстані між фокусами) може бути знайдена за формулою

> $c := \mathrm{sqrt}(a^2 - b^2)$

$$c := 1.313987252 \tag{13}$$

Тоді ексцентриситет еліпса

> $\mathrm{epsilon} := \frac{c}{a}$

$$\epsilon := 0.5374838496 \tag{14}$$

Задаємо вертикальні лінії, які стоять від центру еліпса на відстані $\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Ці прямі - директриси еліпса

> $line\left(r1, x = \frac{a}{\mathrm{epsilon}} + \frac{3}{2}, [x, y]\right)$

$$r1 \tag{15}$$

> $line\left(r2, x = \frac{-a}{\mathrm{epsilon}} + \frac{3}{2}, [x, y]\right)$

$$r2 \tag{16}$$

> $detail(r1); detail(r2);$

name of the object $r1$

form of the object $line2d$

equation of the line $x - 6.048417415 = 0$

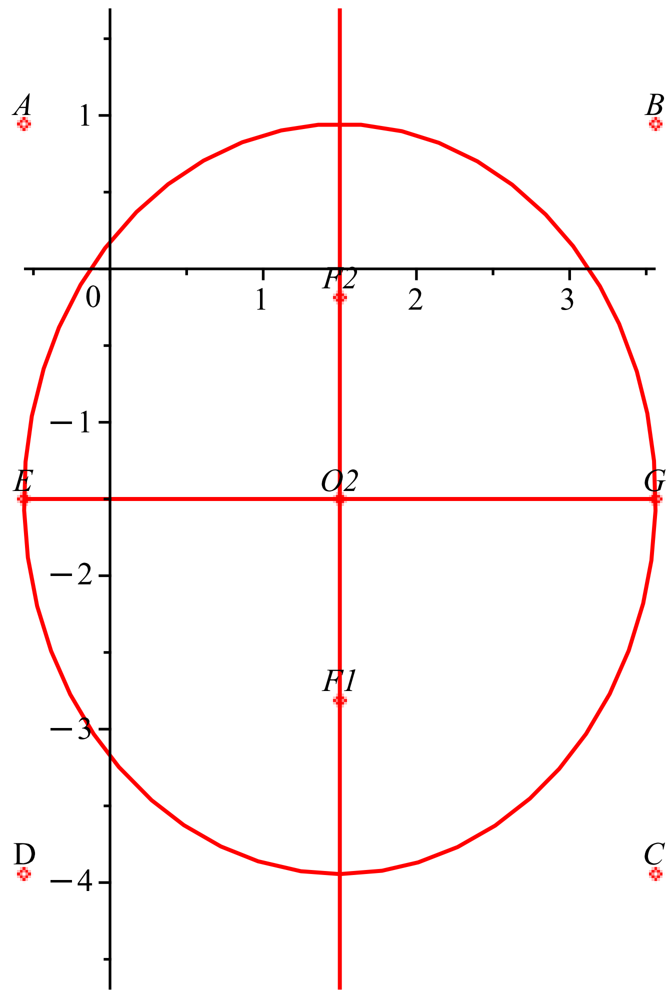
name of the object $r2$

form of the object $line2d$ **(17)**

equation of the line $x + 3.048417415 = 0$

Будуємо директриси і еліпс

> $draw([r1, r2, con, O2, la, lb, A, B, C, \mathrm{D}, F1, F2, E, G], printtext = true, axes = normal)$



Прямі r1 і r2, задані рівняннями, не відображаються.

Задамо точки і проведемо через них відрізки

> $point\left(s1, \left[\frac{b}{\mathrm{epsilon}} + \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} + a\right]\right);$

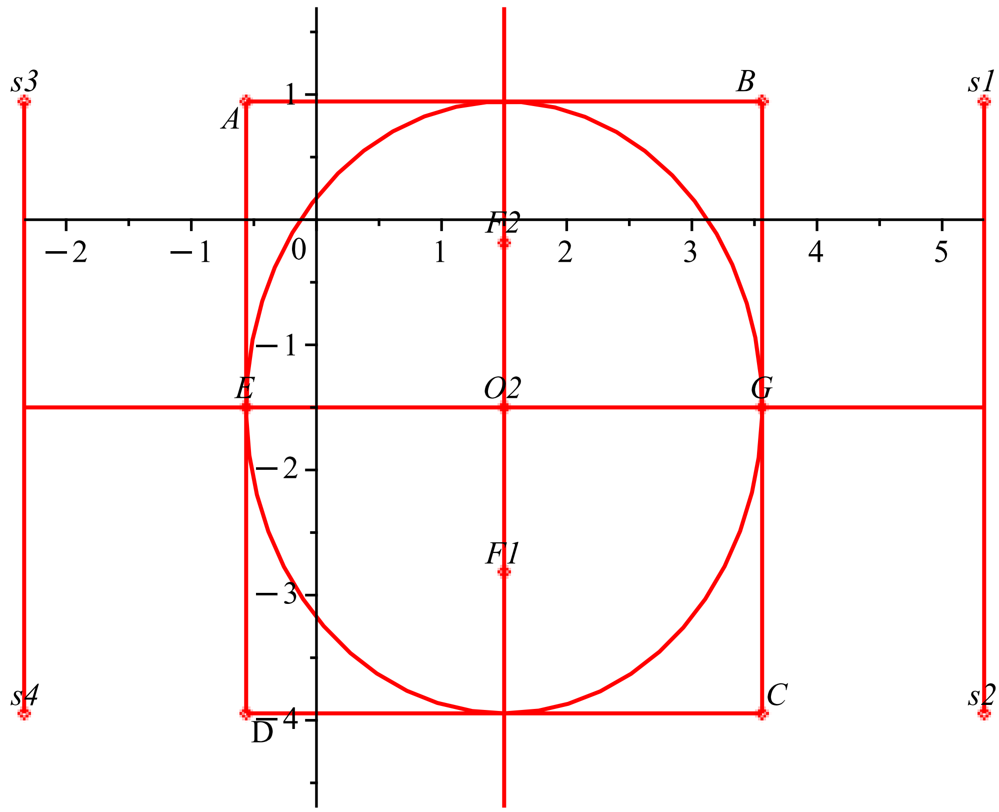
$$point\left(s2, \left[\frac{b}{\text{epsilon}} + \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} - a\right]\right);$$
$$point\left(s3, \left[\frac{-b}{\text{epsilon}} + \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} + a\right]\right);$$
$$point\left(s4, \left[\frac{-b}{\text{epsilon}} + \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} - a\right]\right);$$

$$s1$$
$$s2$$
$$s3$$
$$s4 \tag{18}$$

> $segment(seg1, [s1, s2]);$
> $segment(seg2, [s3, s4]);$

$$seg1$$
$$seg2 \tag{19}$$

> $draw([s1, s2, s3, s4, seg1, seg2, con, O2, la, lb, Sq, A, B, C, \mathrm{D}, F1, F2, E, G], axes = normal, printtext = true)$



Для ілюстрації означення еліпса потрібно побудувати малюнок

<u>*Означення.*</u> *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини таких, що сума відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називаються *фокусами*, є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

Виберемо довільну точку М на кривій. Нехай її координата по осі Ох дорівнює 10. Знайдемо другу координату. Підставимо в рівння еліпса значення х=3

> $engl := subs(x=3, eng)$

$$engl := 32\,y^2 + 96\,y - 18 = 0 \qquad \textbf{(20)}$$

Розв'язуємо отримане квадратне рівняння

> $solve(engl, y)$

$$-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{4},\ -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{4} \qquad \textbf{(21)}$$

Вибираємо меншу координату і задаємо точку М

> $point\left(M, \left[3, -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{4}\right]\right)$

(22)

M **(22)**

З'єднуємо відрізками фокуси і точку M

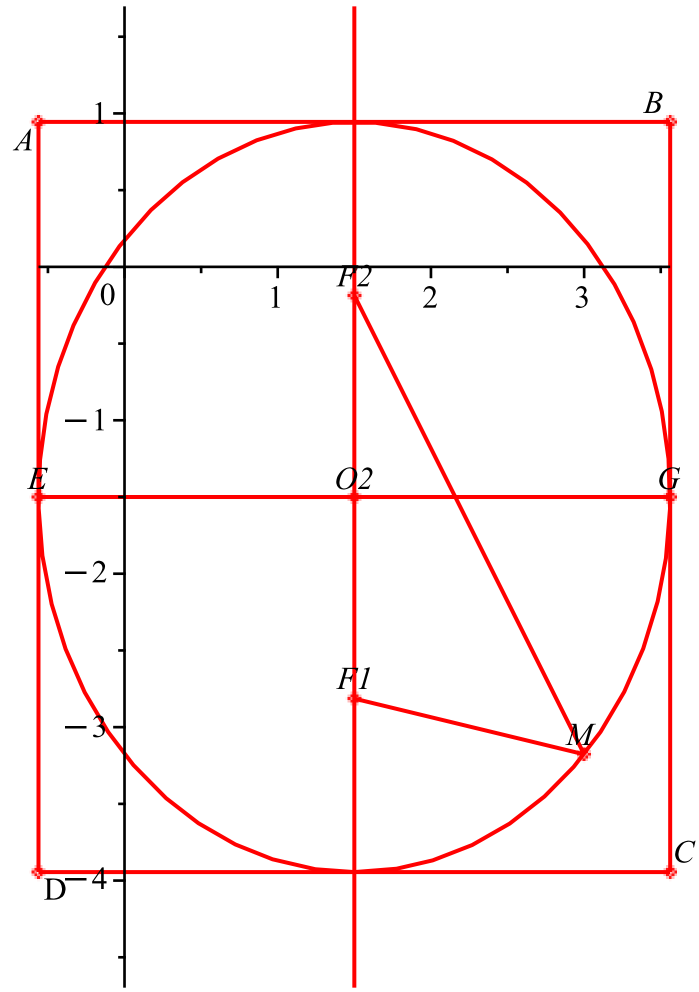
> $segment(seg3, [F1, M]);$
> $segment(seg4, [F2, M]);$

$seg3$

$seg4$ **(23)**

Показуємо об'єкти на рисунку

> $draw([M, seg3, seg4, con, O2, la, lb, Sq, A, B, C, \mathrm{D}, F1, F2, E, G], axes = normal, printtext = true)$



За означенням еліспа сума відстаней F1M +F2M є сталою величиною і дорівнює 2a.
Перевіримо

> $2\,a$

4.889401804 **(24)**

> $evalf(distance(F1, M) + distance(F2, M))$

4.889401803 **(25)**

Властивість справедлива для довільної точки.

Приведемо тепер рівняння до канонічного виду.
Для цього підставимо рівняння переносу початку системи координат в початкове рівння кривої

> $q1 := subs([x = x1 - x0, y = y1 - y0], eng)$

$$q1 := 45\,(x1 - x0)^2 + 32\,(y1 - y0)^2 - 135\,x1 + 135\,x0 + 96\,y1 - 96\,y0 - 18 = 0 \quad \textbf{(26)}$$

Розкриваємо дужки

> $q2 := expand(q1)$

$$q2 := 45\,x0^2 - 90\,x1\,x0 + 45\,x1^2 + 32\,y0^2 - 64\,y1\,y0 + 32\,y1^2 + 135\,x0 - 135\,x1 - 96\,y0 + 96\,y1 - 18 = 0 \quad \textbf{(27)}$$

Приводимо подібні члени при змінних x1 та y1

> $q3 := collect(q2, [x1, y1])$

$$q3 := 45\,x1^2 + (-90\,x0 - 135)\,x1 + 32\,y1^2 + (-64\,y0 + 96)\,y1 + 45\,x0^2 + 32\,y0^2 + 135\,x0 - 96\,y0 - 18 = 0 \quad \textbf{(28)}$$

Прирівнюючи нулю коефіцієнти при x1 та y1, отримуємо координати початку нової системи координат

> $x0 := -\frac{135}{90}$; $y0 := \frac{96}{64}$;

$$x0 := -\frac{3}{2}$$
$$y0 := \frac{3}{2} \quad \textbf{(29)}$$

Підставляємо ці дані в рівняння, отримуємо рівняння еліпса в новій системі координат

> $q3$

$$45\,x1^2 - \frac{765}{4} + 32\,y1^2 = 0 \quad \textbf{(30)}$$

Для приведення цього рівняння до канонічного виду, перенесемо вправо вільні члени

> $q4 := 45\,x1^2 + 32\,y1^2 = \frac{765}{4}$

$$q4 := 45\,x1^2 + 32\,y1^2 = \frac{765}{4} \quad \textbf{(31)}$$

> $\dfrac{q4}{\frac{765}{4}}$

$$\frac{4\,x1^2}{17} + \frac{128\,y1^2}{765} = 1 \quad \textbf{(32)}$$

Залишилось знайти значення півосей a і b

Порівнюючи з канонічним рівнянням $\frac{(x-x0)^2}{a^2}+\frac{(y-y0)^2}{b^2}=1$

і використовуючи замість a і b позначення a1 і b1, маємо

> $a1 := \mathrm{sqrt}\left(\frac{17}{4}\right); b1 := \mathrm{sqrt}\left(\frac{765}{128}\right)$

$$a1 := \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$b1 := \frac{3\sqrt{170}}{16} \tag{33}$$

Це канонічне рівняння еліпса

> $q5 := \frac{(x-x0)^2}{a1^2}+\frac{(y-y0)^2}{b1^2}=1$

$$q5 := \frac{4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{17}+\frac{128\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{765}=1 \tag{34}$$

Перевірка: Розкриваємо дужки і отримуємо початкове рівняння

> $q6 := expand(q5)\cdot\frac{765}{4}$

$$q6 := 45x^2+135x+\frac{693}{4}+32y^2-96y=\frac{765}{4} \tag{35}$$

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

>

> *restart*

Завдання 2.

Привести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку за допомогою повороту та паралельного переносу системи координат. Визначити тип та параметри кривої та побудувати її графік. Записати формулу переходу до нової системи координат в матричному вигляді (з використанням матриці переходу Т).

Варіант 45-20-20=5.

f (x,y) = $9x^2 + 25y^2 + 4\cdot x\cdot y - 90\cdot x + 60y = 255$

> $f := 9x^2 + 25y^2 + 4\cdot x\cdot y - 90\cdot x + 60y - 255 = 0$

$$f := 9x^2 + 4xy + 25y^2 - 90x + 60y - 255 = 0 \quad (36)$$

> $with(geometry):$

> $conic(fc, 9\,x1^2 + 25\,y1^2 + 4\cdot x1\cdot y1 - 90\cdot x1 + 60\,y1 - 255 = 0, [x1, y1])$

$$fc \quad (37)$$

Система переходу до нових координат:

> $x := x1\cdot\cos(\alpha) - y1\cdot\sin(\alpha); y := x1\cdot\sin(\alpha) + y1\cdot\cos(\alpha)$

$$x := x1\cos(\alpha) - y1\sin(\alpha)$$

$$y := x1\sin(\alpha) + y1\cos(\alpha) \quad (38)$$

> $simplify(f)$

$$-255 + 8\left(-2\,x1^2 + x1\,y1 + 2\,y1^2\right)\cos(\alpha)^2 + 2\left(2\left(x1^2 + 8\,x1\,y1 - y1^2\right)\sin(\alpha) - 45\,x1 + 30\,y1\right)\cos(\alpha) + 30\left(2\,x1 + 3\,y1\right)\sin(\alpha) + 25\,x1^2 - 4\,x1\,y1 + 9\,y1^2 = 0 \quad (39)$$

Коефіцієнти при $x1\ y1$

$8\cdot\cos(\alpha)^2 + 32\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - 4$

Розв'язуємо рівняння, та знаходимо мінімальне невід'ємне значення отриманих коренів.

> $solve(8\cdot\cos(\alpha)^2 + 32\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - 4 = 0, \alpha)$

$$-\frac{\arctan\left(\frac{1}{4}\right)}{2},\ -\frac{\arctan\left(\frac{1}{4}\right)}{2} + \pi,\ -\frac{\arctan\left(\frac{1}{4}\right)}{2} + \frac{\pi}{2},\ -\frac{\arctan\left(\frac{1}{4}\right)}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (40)$$

мінімальне невід'ємне значення:

> $evalf\left(-\frac{\arctan\left(\frac{1}{4}\right)}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$$1.448306995 \quad (41)$$

> $\alpha := -\frac{\arctan\left(\frac{1}{4}\right)}{2} + \frac{\pi}{2}$

$$\alpha := -\frac{\arctan\left(\frac{1}{4}\right)}{2} + \frac{\pi}{2} \tag{42}$$

Кут, на який буде повернута наша система координат:

> $evalf\left(\frac{\alpha \cdot 180}{\text{Pi}}\right)$

$$82.98187825 \tag{43}$$

Підставляємо і отримуємо:

> $f2 := simplify(evalf(f))$

$$f2 := 25.24621125\, x1^2 + (-1. \times 10^{-9}\, y1 + 48.55395967)\, x1 + 8.753788749\, y1^2 + 96.65667592\, y1 - 255. = 0. \tag{44}$$

Значення $-1.\,10^{-9}$ біля y1 приблизно дорівнює нулю, отже не будемо його враховувати.

> $f3 := 25.24621125\, x1^2 + 48.55395967 \cdot x1 + 8.753788749\, y1^2 + 96.65667592\, y1 - 255. = 0$

$$f3 := 25.24621125\, x1^2 + 48.55395967\, x1 + 8.753788749\, y1^2 + 96.65667592\, y1 - 255. = 0 \tag{45}$$

Виділяємо повні квадрати:

> $with(Student):$

> $with(Precalculus):$

> $CompleteSquare(f3, x1, y1)$

$$8.753788749\, (y1 + 5.520848095)^2 + 25.24621125\, (x1 + 0.9616088370)^2 - 545.1583711 = 0 \tag{46}$$

> $f4 := \frac{1}{545.1583711}\left(8.753788749\, (y1 + 5.520848095)^2 + 25.24621125\, (x1 + 0.9616088370)^2 = 545.1583711\right)$

$$f4 := 0.01605733162\, (y1 + 5.520848095)^2 + 0.04630986625\, (x1 + 0.9616088370)^2 = 1.000000000 \tag{47}$$

> $\frac{1}{0.0160573316}$

$$62.27684804 \tag{48}$$

> $\frac{1}{0.04630986625}$

$$21.59367066 \tag{49}$$

Отримуємо канонічний вид еліпса:

> $f5 := \dfrac{(x1+0.9616088370)^2}{21.59367066} + \dfrac{(y1+5.520848095)^2}{62.27684804} = 1$

$$f5 := 0.04630986624\,(x1+0.9616088370)^2 + 0.01605733160\,(y1 + 5.520848095)^2 = 1 \quad \textbf{(50)}$$

Тепер паралельне перенесення системи координат
Перенесемо систему так, щоб еліпс був в центрі системи координат.

> $f6 := \dfrac{(x1)^2}{21.59367066} + \dfrac{(y1)^2}{62.27684796} = 1$

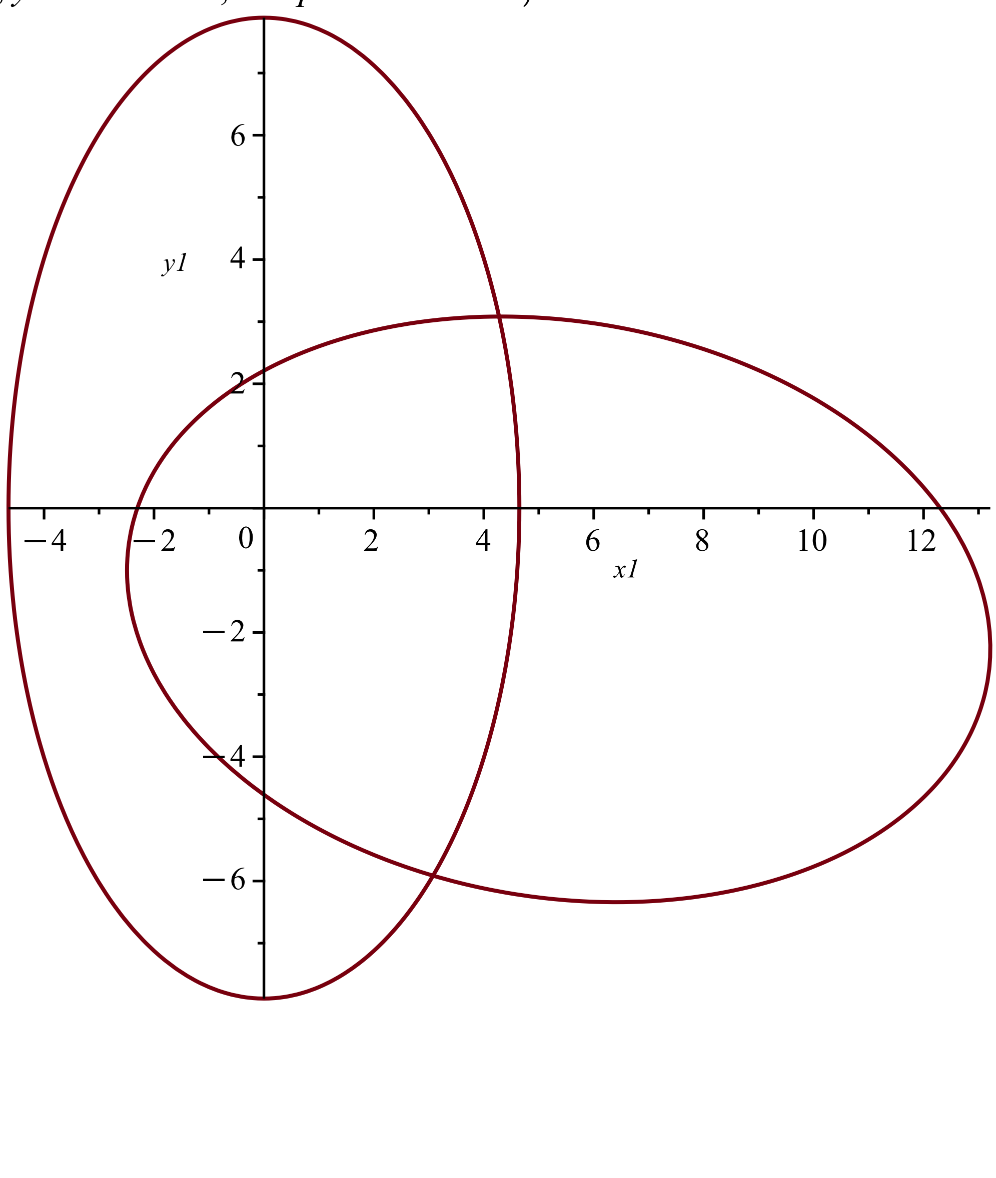
$$f6 := 0.04630986624\,x1^2 + 0.01605733162\,y1^2 = 1 \quad \textbf{(51)}$$

> $conic\left(fc2, \dfrac{(x1)^2}{21.59367066} + \dfrac{(y1)^2}{62.27684796} = 1, [x1, y1]\right)$

$$fc2 \quad \textbf{(52)}$$

> $with(plots):$

> $implicitplot([9\,x1^2 + 4\cdot x1\cdot y1 + 25\cdot y1^2 - 90\cdot x1 + 60\cdot y1 - 255 = 0, f6], x1 = -40 ..40, y1 = -40 ..40, numpoints = 10000)$



Видно, що ми повернули систему на кут 82.98187825 градусів, і перенесли її так, щоб еліпс був в центрі системи.
Дізнаємося параметри еліпса в старій системі координат:

> $detail(fc)$

$$82.98187825$$

name of the object	fc
form of the object	$ellipse2d$
center	$\left[-\frac{15\left(578-136\sqrt{17}\right)\left(5+2\sqrt{17}\right)}{1156\left(17+2\sqrt{17}\right)}-\frac{15\sqrt{578-136\sqrt{17}}\ (\ldots}{1156\ (\ldots}\right.$
foci	$\left[\left[-\frac{15\left(578-136\sqrt{17}\right)\left(5+2\sqrt{17}\right)}{1156\left(17+2\sqrt{17}\right)}-\frac{\left(\frac{15\sqrt{578-136\sqrt{17}}}{34\left(-17+\ldots\right.}\right.}{\ldots}\right.\right.$
length of the major axis	$2\sqrt{\frac{\frac{225\left(4913-578\sqrt{17}\right)\left(221+32\sqrt{17}\right)}{34\left(-17+2\sqrt{17}\right)^2}-\frac{225\left(4913+5\ldots\right.}{34\ldots}}{4913-578\sqrt{17}}}$
length of the minor axis	$2\sqrt{\frac{\frac{225\left(4913-578\sqrt{17}\right)\left(221+32\sqrt{17}\right)}{34\left(-17+2\sqrt{17}\right)^2}-\frac{225\left(4913+5\ldots\right.}{34\ldots}}{4913+578\sqrt{17}}}$
equation of the ellipse	$9\,x1^2+4\,x1\,y1+25\,y1^2-90\,x1+60\,y1-255=0$

Дізнаємось параметри другого еліпса.

> $detail(fc2)$

name of the object	$fc2$	
form of the object	$ellipse2d$	
center	$[0, 0]$	
foci	$[[0., -6.378336562], [0., 6.378336562]]$	**(54)**
length of the major axis	15.78313631	
length of the minor axis	9.293798074	
equation of the ellipse	$0.04630986624\,x1^2+0.01605733162\,y1^2-1.=0$	

Сформуємо загальний вид переходу до нової системи координат, і дізнаємось, наприклад, координати центру еліпса, які в новій системі координат повинні буди рівними нулю, як і написано в $detail(fc2)$.

> $with(linalg):$

Загальний вид переходу до нової системи координат:

> $T := evalf(matrix(2, 2, [\cos(\alpha), -\sin(\alpha), \sin(\alpha), \cos(\alpha)]))$

$$T := \begin{bmatrix} 0.1221832637 & -0.9925075567 \\ 0.9925075567 & 0.1221832637 \end{bmatrix} \quad (55)$$

> $matrix(2, 1, [x\_new, y\_new]) = evalm(T^{-1}) \cdot matrix(2, 1, [x1, y1]) - matrix(2, 1, [-0.9616088370, -5.520848095])$

$$\begin{bmatrix} x\_new \\ y\_new \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1221832637 & 0.9925075567 \\ -0.9925075567 & 0.1221832637 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.9616088370 \\ -5.520848095 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Дізнаємось координати центра еліпса в новій системі.

> $a := evalf\left(-\frac{15\,(578-136\sqrt{17})\,(5+2\sqrt{17})}{1156\,(17+2\sqrt{17})} - \frac{15\sqrt{578-136\sqrt{17}}\,(3\sqrt{17}+14)\sqrt{578+136\sqrt{17}}}{1156\,(-17+2\sqrt{17})}\right)$

$$a := 5.361990952 \quad (57)$$

> $b := evalf\left(-\frac{15\sqrt{578-136\sqrt{17}}\,(5+2\sqrt{17})\sqrt{578+136\sqrt{17}}}{1156\,(17+2\sqrt{17})} + \frac{15\,(578-136\sqrt{17})\,(3\sqrt{17}+14)}{1156\,(-17+2\sqrt{17})}\right)$

$$b := -1.628959276 \quad (58)$$

> $evalm(T^{-1} \&* matrix(2, 1, [5.361990952, -1.628959276]) - matrix(2, 1, [-0.9616088370, -5.520848095]))$

$$\begin{bmatrix} 4. \times 10^{-10} \\ -5. \times 10^{-9} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Отримали координати центру еліпса в новій системі координат, які приблизно дорівнюють нулю.

Знайдемо один із фокусів в новій системі. Скористаємося тим, що ми отримали в detail(fc1), що дав на параметри еліпса в старій системі координат

> $$evalf\Bigg(-\frac{15\left(578-136\sqrt{17}\right)\left(5+2\sqrt{17}\right)}{1156\left(17+2\sqrt{17}\right)} - \frac{1}{34}\Bigg(\Bigg(\frac{15\sqrt{578-136\sqrt{17}}\left(3\sqrt{17}+14\right)}{34\left(-17+2\sqrt{17}\right)} - \Bigg(\frac{1}{4913-578\sqrt{17}}\Bigg(\frac{1}{34\left(-17+2\sqrt{17}\right)^2}\Big(225\left(4913-578\sqrt{17}\right)\left(221+32\sqrt{17}\right)\Big) - \frac{225\left(4913+578\sqrt{17}\right)\left(-221+32\sqrt{17}\right)}{34\left(17+2\sqrt{17}\right)^2}+73695\Bigg) - \frac{1}{4913+578\sqrt{17}}\Bigg(\frac{225\left(4913-578\sqrt{17}\right)\left(221+32\sqrt{17}\right)}{34\left(-17+2\sqrt{17}\right)^2} - \frac{225\left(4913+578\sqrt{17}\right)\left(-221+32\sqrt{17}\right)}{34\left(17+2\sqrt{17}\right)^2}+73695\Bigg)\Bigg)^{1/2}\Bigg)\sqrt{578+136\sqrt{17}}\Bigg)\Bigg)$$

$$11.69253819 \tag{60}$$

> $$evalf\Bigg(-\frac{15\sqrt{578-136\sqrt{17}}\left(5+2\sqrt{17}\right)\sqrt{578+136\sqrt{17}}}{1156\left(17+2\sqrt{17}\right)}$$

$$+\frac{1}{34}\Bigg(\Bigg(\frac{15\sqrt{578-136\sqrt{17}}\,\left(3\sqrt{17}+14\right)}{34\left(-17+2\sqrt{17}\right)}$$

$$-\left(\frac{1}{4913-578\sqrt{17}}\left(\frac{1}{34\left(-17+2\sqrt{17}\right)^{2}}\left(225\left(4913\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-578\sqrt{17}\right)\left(221+32\sqrt{17}\right)\right)$$

$$\left.-\frac{225\left(4913+578\sqrt{17}\right)\left(-221+32\sqrt{17}\right)}{34\left(17+2\sqrt{17}\right)^{2}}+73695\right)$$

$$-\frac{1}{4913+578\sqrt{17}}\left(\frac{225\left(4913-578\sqrt{17}\right)\left(221+32\sqrt{17}\right)}{34\left(-17+2\sqrt{17}\right)^{2}}\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{225\left(4913+578\sqrt{17}\right)\left(-221+32\sqrt{17}\right)}{34\left(17+2\sqrt{17}\right)^{2}}+73695\right)\right)^{1/2}\right)$$

$$\left.\left.\sqrt{578-136\sqrt{17}}\right)\right)$$

$$-2.408285254 \qquad \textbf{(61)}$$

> $evalm(T^{-1}\&*\,matrix(2, 1, [11.69253819, -2.408285254]) - matrix(2, 1, [-0.9616088370, -5.520848095]))$

$$\begin{bmatrix} 1.0\times 10^{-9} \\ -6.378336565 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(62)}$$

Значення співпало з тим, що написано у detail

> *restart*

Завдання 3.

Привести до канонічного виду рівняння поверхні другого порядку, визначити тип поверхні другого порядку. Для підтвердження правильності визначення типу поверхні побудувати її графік в тривимірному просторі.

Загальне рівняння поверхні другого порядку задається згідно варіанта:

Варіант 45-15-15=15.

Варіант 15. $F(x,y,z) = 8x^2 - 8y^2 + 8z^2 - 16x + 16y + 32z - 96 = 0$

> $F := 8x^2 - 8y^2 + 8z^2 - 16x + 16y + 32z - 96 = 0$

$$F := 8x^2 - 8y^2 + 8z^2 - 16x + 16y + 32z - 96 = 0 \qquad (63)$$

Виділимо повні квадрати

> $with(Student):$

> $with(Precalculus):$

> $CompleteSquare(F, x, y, z)$

$$8(z+2)^2 - 8(y-1)^2 + 8(x-1)^2 - 128 = 0 \qquad (64)$$

> $F1 := \frac{8(z+2)^2 - 8(y-1)^2 + 8(x-1)^2 = 128}{128}$

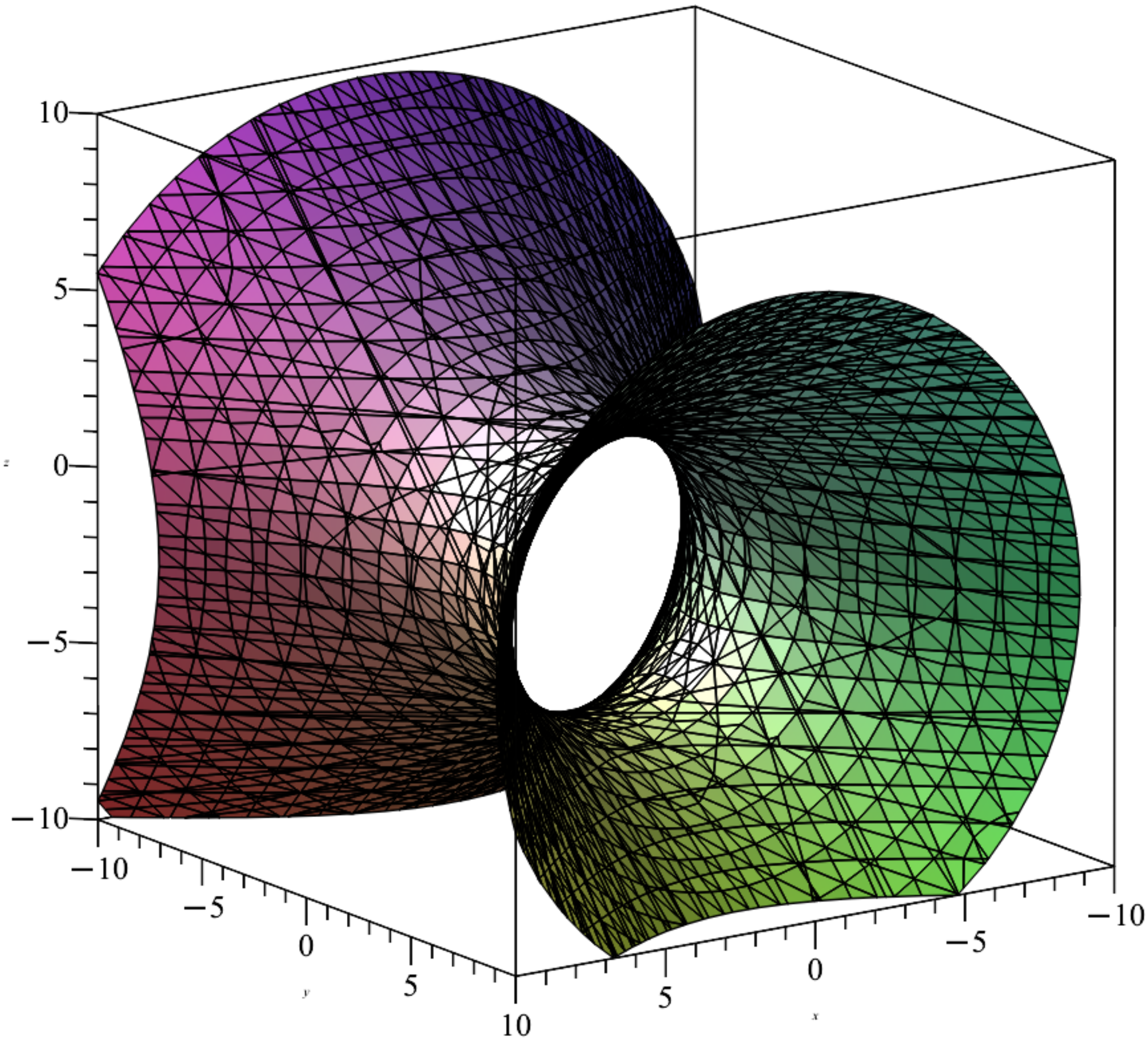
$$F1 := \frac{(z+2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{16} + \frac{(x-1)^2}{16} = 1 \qquad (65)$$

> $with(plots)$

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *densityplot*, *display*, *dualaxisplot*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *interactiveparams*, *intersectplot*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *multiple*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setcolors*, *setoptions*, *setoptions3d*, *shadebetween*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*] **(66)**

Це рівняння відповідає, найімовірніше, однопоржнинному гіперболоїду
Перевіримо, побудувавши його графік

> $implicitplot3d(F, x = -10..10, y = -10..10, z = -10..10, numpoints = 10000)$



Дійсно, це однопоржнинний гіперболоїд