Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем

Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 5
по дисципліні «Вища математика»

Тема: МЕТОД ГАУССА. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЙОГО МОДИФІКАЦІЇ

Варіант

Виконав: студент гр. КС-231
Киба Д.В.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2023

Теоретичні відомості

Схема метода Гаусса з вибором головного елемента застосовується для зменшення похибок округлення при застосуванні десяткових дробів. Полягає у виборі на кожному кроці найбільшого елемента
в стовпчику (або в рядочку, або в усій матриці) та переставленні рядочків (або стовпчиків, або і рядочків і стовпчиків) так, щоб найбільший елемент
знаходився на місці провідного елемента.

Метод Гаусса-Жордана заключається в тому, щоб привести марицю не до трикутного виду з одиницями на діагоналі, а до канонічного виду

Схема з вибором головного елемента заключається в тому, що ми обираємо найбільши елемент у стовпчику або рядочку або всій матриці і робимо його провідним елементом.

Міра обумовленості матриці коефіцієнтів

Означення 1. Нормою матриці називається дійсне число, яке позначається $\|A\|$ і задовольняє наступним умовам:

$\|A\| \geq 0$

$\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

$\|A + B\| = \|A\| + \|B\|$

$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Означення 2. Мірою обумовленості матриці називається величина

$$M = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Якщо міра обумовленості близька до одиниці, то говорять, що матрицядобре обумовлена. Якщо міра обумовленості на 2 і більше порядків більше
одиниці, то говорять, що матриця погано обумовлена. При розв'язанні СЛАР з погано обумовленими матрицями похибки округлення можуть сильно
зростати.

```
> 
> N := 45
```

$$N := 45 \tag{1}$$

```
> with(linalg) :
```

Задача 1. Розв'язати вручну систему рівнянь, що задана розширеноюматрицею, за допомогою табличного варіанту метода Гаусса. Обчислення проводити з точністю 4 знаки після десяткової коми, результат округлити до 3-х знаків після коми. Для кожного рівняння системи визначити нев'язку та оцінити точність отриманого розв'язку.

Для табличного методу розв'язання потрібно привести матрицю до трикутного виду з одиницями на діагоналі. При цьому потрібно котнролювати суму рядків.

N кроку	Коефіцієнти			вільний член	Контр. Сума	Рядкова сума	
	x1	x2	x3				
1	1	-170	-1	11	-159	-159	
	67	-8	-895	10	-826	-826	
	102	185	10	-6	291	291	
2	1	-170	-1	11	-159	-159	
	0	11382	-828	-727	9827	9827	
	102	185	10	-6	291	291	
3	1	-170	-1	11	-159	-159	
	0	11382	-828	-727	9827	9827	
	0	17525	112	-1128	16509	16509	
4	1	-170	-1	11	-159	-159	
	0	1	-0,07275	-0,06387	0,8634	0,8634	
	0	0	1386,881	-8,6295	1378,2519	1378,252	
5	1	-170	-1	11	-159	-159	
	0	1	-0,07275	-0,06387	0,8634	0,8634	
	0	0	1	-0,00622	0,9938	0,9938	
							Нев'язки
		x3=	-0,00622	-0,006			-0,0036
		x2=	-0,06432	-0,064			-0,271
		x1=	0,0628	0,063			-0,4481

На другому кроці я множу перший рядок на -67 і додаю до другого.
На третьому кроці я множу 1 рядок на -102 і додаю до третього. Отримую нулі в першому стовпчику
На четвертому кроці я множу другий рядок на -17525 і додаю до третього. Отримую нуль в 2 стовпчику 3 рядка.
На п'ятому кроці я ділю останній рядок на 1386.881
Тепер зворотнім ходом отримую розв'язки:
x1 = 0.063
x2 = -0.064
x3 = -0.006
Тепер знайду нев'язки
$\delta 1$ = -0.0036
$\delta 2$ = -0.271
$\delta 3$ = -0.4481
Нев'язки менше нуля, отже розв'язок правильний, але похибка досить велика через округлення ($\pm$0.5).

> $Digits := 7$

(2)

$$Digits := 7 \qquad (2)$$

Задача 2. Розв'язати систему рівнянь, що задана розширеною матрицею,бза допомогою методу Гаусса з вибором головного елемента в стовпчику. При обчисленнях зберігати 7 значущих цифр. Для кожного рівняння визначити нев'язку та оцінити точність отриманого розв'язку. Для перевірки знайти точний розв'язок системи. Визначити абсолютну й відносну похибки розв'язку системи методом Гаусса з вибором головного елемента в стовпчику.
Порівняти значення нев'язок та абсолютних похибок.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0.0001\cdot N & -10\cdot N & 80\cdot N & -1.7 & 161725.37 \\ -99999\cdot N & 2000\cdot N & -5 & 1.6 & -17.23125 \\ 187452\cdot N & -16 & 100\cdot N & -1.5 & -437125.45 \\ -498712\cdot N & -5 & -1.49991 & -\dfrac{0.7}{N} & 5.493125 \end{pmatrix}$$

> $AR := matrix\left(4, 5, \left[0.0001\cdot N, -10.\cdot N, 80.\cdot N, -1.7, 161725.37, -99999.\cdot N, 2000.\cdot N, -5., 1.6, -17.23125, 187452.\cdot N, -16, 100.\cdot N, -1.5, -437125.45, -498712\cdot N, -5., -1.49991, -\frac{0.7}{N}, 5.493125\right]\right)$

$$AR := \begin{bmatrix} 0.0045 & -450. & 3600. & -1.7 & 161725.37 \\ -4.499955\times 10^{6} & 90000. & -5. & 1.6 & -17.23125 \\ 8.435340\times 10^{6} & -16 & 4500. & -1.5 & -437125.45 \\ -22442040 & -5. & -1.49991 & -0.01555556 & 5.493125 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Вибираємо найбільший елемент в першому стовпчику і змінюємо місцями.

> $A1 := swaprow(AR, 3, 1)$

$$A1 := \begin{bmatrix} 8.435340\times 10^{6} & -16 & 4500. & -1.5 & -437125.45 \\ -4.499955\times 10^{6} & 90000. & -5. & 1.6 & -17.23125 \\ 0.0045 & -450. & 3600. & -1.7 & 161725.37 \\ -22442040 & -5. & -1.49991 & -0.01555556 & 5.493125 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Ділимо перший рядочок на ведучий елемент

> $A2 := mulrow\left(A1, 1, \frac{1}{8.435340\ 10^{6}}\right)$

$A2 :=$ (5)

$[[1.000000, -1.896782\times 10^{-6}, 0.0005334700, -1.778234\times 10^{-7}, -0.05182074$
$],$
$[-4.499955\times 10^{6}, 90000., -5., 1.6, -17.23125],$

$[0.0045, -450., 3600., -1.7, 161725.37],$

$[-22442040, -5., -1.49991, -0.01555556, 5.493125]]$

Намагаємося отримати нулі в першому стовпчику

$> A3 := addrow(A2, 1, 2, 4.499955\ 10^6)$

$$A3 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 89991.46 & 2395.591 & 0.7998027 & -233208.2 \\ 0.0045 & -450. & 3600. & -1.7 & 161725.37 \\ -22442040 & -5. & -1.49991 & -0.01555556 & 5.493125 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$> A4 := addrow(A3, 1, 3, -0.0045)$

$$A4 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 89991.46 & 2395.591 & 0.7998027 & -233208.2 \\ 0. & -450. & 3600. & -1.7 & 161725.4 \\ -22442040 & -5. & -1.49991 & -0.01555556 & 5.493125 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$> A5 := addrow(A4, 1, 4, 22442040)$

$$A5 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 89991.46 & 2395.591 & 0.7998027 & -233208.2 \\ 0. & -450. & 3600. & -1.7 & 161725.4 \\ 0. & -47.56766 & 11970.66 & -4.006276 & -1.162958 \times 10^{6} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Змінимо місцями 3 і 4 рядки адже в нас лише близьке до нуля значення. Цим же ми зробимо елемент в 3 стовпчику на діагоналі найбільшим

$> A6 := swaprow(A5, 3, 4)$

$$A6 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 89991.46 & 2395.591 & 0.7998027 & -233208.2 \\ 0. & -47.56766 & 11970.66 & -4.006276 & -1.162958 \times 10^{6} \\ 0. & -450. & 3600. & -1.7 & 161725.4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

У другому стовпичку у нас уже найбільший елемент на діагоналі, тому ділимо 2 рядок на ведучий елемент

$> A7 := mulrow\left(A6, 2, \frac{1}{89991.46}\right)$

$A7 :=$ **(10)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 1.000000 & 0.02662021 & 8.887544 \times 10^{-6} & -2.591449 \\ 0. & -47.56766 & 11970.66 & -4.006276 & -1.162958 \times 10^{6} \\ 0. & -450. & 3600. & -1.7 & 161725.4 \end{bmatrix}$$

$> A8 := addrow(A7, 2, 3, 47.56766)$

$A8 :=$ **(11)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 1.000000 & 0.02662021 & 8.887544 \times 10^{-6} & -2.591449 \\ 0. & 0. & 11971.93 & -4.005853 & -1.163081 \times 10^{6} \\ 0. & -450. & 3600. & -1.7 & 161725.4 \end{bmatrix}$$

> $A9 := addrow(A8, 2, 4, 450)$

$$A9 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 1.000000 & 0.02662021 & 8.887544 \times 10^{-6} & -2.591449 \\ 0. & 0. & 11971.93 & -4.005853 & -1.163081 \times 10^{6} \\ 0. & 0. & 3611.979 & -1.696001 & 160559.2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

> $A10 := mulrow\left(A9, 3, \frac{1}{11971.93}\right)$

$$A10 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 1.000000 & 0.02662021 & 8.887544 \times 10^{-6} & -2.591449 \\ 0. & 0. & 1.000000 & -0.0003346038 & -97.15067 \\ 0. & 0. & 3611.979 & -1.696001 & 160559.2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

> $A11 := addrow(A10, 3, 4, -3611.979)$

$$A11 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 1.000000 & 0.02662021 & 8.887544 \times 10^{-6} & -2.591449 \\ 0. & 0. & 1.000000 & -0.0003346038 & -97.15067 \\ 0. & 0. & 0. & -0.487419 & 511465.4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

> $A12 := mulrow\left(A11, 4, -\frac{1}{0.487419}\right)$

$$A12 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -1.896782 \times 10^{-6} & 0.0005334700 & -1.778234 \times 10^{-7} & -0.05182074 \\ 0. & 1.000000 & 0.02662021 & 8.887544 \times 10^{-6} & -2.591449 \\ 0. & 0. & 1.000000 & -0.0003346038 & -97.15067 \\ -0. & -0. & -0. & 1.000000 & -1.049334 \times 10^{6} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Зворотній хід

> $x4 := -1.049334 \times 10^{6}$

> $x3 := -97.15067 - (-0.0003346038) \cdot x4$

$$x3 := -448.2618 \quad (16)$$

> $x2 := -2.591449 - 0.02662021 \cdot x3 - 8.887544 \times 10^{-6} \cdot x4$

$$x2 := 18.66737 \quad (17)$$

> $x1 := -0.05182074 - (-1.896782 \times 10^{-6}) \cdot x2 - 0.0005334700 \cdot x3 - (-1.778234 \times 10^{-7}) \cdot x4$

$$x1 := 0.0007528 \tag{18}$$

Знаходимо нев'язки

> $\delta 1 := AR[1, 5] - AR[1, 1] \cdot x1 - AR[1, 2] \cdot x2 - AR[1, 3] \cdot x3 - AR[1, 4] \cdot x4$

$$\delta 1 := -0.6840034 \tag{19}$$

> $\delta 2 := AR[2, 5] - AR[2, 1] \cdot x1 - AR[2, 2] \cdot x2 - AR[2, 3] \cdot x3 - AR[2, 4] \cdot x4$

$$\delta 2 := 0.566 \tag{20}$$

> $\delta 3 := AR[3, 5] - AR[3, 1] \cdot x1 - AR[3, 2] \cdot x2 - AR[3, 3] \cdot x3 - AR[3, 4] \cdot x4$

$$\delta 3 := 0.554 \tag{21}$$

> $\delta 4 := AR[4, 5] - AR[4, 1] \cdot x1 - AR[4, 2] \cdot x2 - AR[4, 3] \cdot x3 - AR[4, 4] \cdot x4$

$$\delta 4 := -2.13 \tag{22}$$

Нев'язки вийшли більше 0. Швидше всього матриця A15 не було трикутною.
Знайдемо точний розв'язок

> $AT := matrix\left(4, 5, \left[\frac{1 \cdot N}{10000}, -10 \cdot N, 80 \cdot N, -\frac{17}{10}, \frac{16172537}{100}, -99999 \cdot N, 2000 \cdot N, -5, \frac{16}{10}, -\frac{1723125}{100000}, 187452 \cdot N, -16, 100 \cdot N, -\frac{15}{10}, -\frac{43712545}{100}, -498712 \cdot N, -5, -\frac{149991}{100000}, -\frac{7}{N \cdot 10}, \frac{5493125}{1000000}\right]\right)$

$$AT := \begin{bmatrix} \frac{9}{2000} & -450 & 3600 & -\frac{17}{10} & \frac{16172537}{100} \\ -4499955 & 90000 & -5 & \frac{8}{5} & -\frac{2757}{160} \\ 8435340 & -16 & 4500 & -\frac{3}{2} & -\frac{8742509}{20} \\ -22442040 & -5 & -\frac{149991}{100000} & -\frac{7}{450} & \frac{8789}{1600} \end{bmatrix} \tag{23}$$

> $evalm(AT - AR)$

$$\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0 & 0. & 0. & 0. \\ 0 & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \tag{24}$$

> $gaussjord(AT)$

$$\tag{25}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{600312221499439945187 15}{797337441054403889417166 24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2646084007392229300939038 7067}{14174887840967180256305177 60} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{397129427936685236262109 7625}{8859304900604487660190736} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{92963852243480196082086299 80317}{8859304900604487660190736} \end{array}\right] \quad (25)$$

Точні розв'язки позначимо буквою t

> $t1 := \frac{60031222149943994518715}{79733744105440388941716624}$;
$t2 := \frac{2646084007392229300939038 7067}{14174887840967180256305177 60}$;
$t3 := -\frac{3971294279366852362621097625}{8859304900604487660190736}$;
$t4 := -\frac{9296385224348019608208629980317}{8859304900604487660190736}$

$$t1 := \frac{60031222149943994518715}{79733744105440388941716624}$$
$$t2 := \frac{26460840073922293009390387067}{1417488784096718025630517760}$$
$$t3 := -\frac{3971294279366852362621097625}{8859304900604487660190736}$$
$$t4 := -\frac{9296385224348019608208629980317}{8859304900604487660190736} \quad (26)$$

Знаходимо абсолютні похибки

> $\Delta 1 := |t1 - x1|; \Delta 2 := |t2 - x2|; \Delta 3 := |t3 - x3|; \Delta 4 := |t4 - x4|$

$$\Delta 1 := 9.61 \times 10^{-8}$$
$$\Delta 2 := 0.00004$$
$$\Delta 3 := 0.0007$$
$$\Delta 4 := 2. \quad (27)$$

Остання похибка свідчить про те, що x4 знайдено неправильно. Тобто матриця A15 не була трикутною

Знайдемо нев'язки для точного розв'язку

> $\delta 1 := AT[1, 5] - AT[1, 1] \cdot t1 - AT[1, 2] \cdot t2 - AT[1, 3] \cdot t3 - AT[1, 4] \cdot t4$

$$\delta 1 := 0 \quad (28)$$

> $\delta 2 := AT[2, 5] - AT[2, 1] \cdot t1 - AT[2, 2] \cdot t2 - AT[2, 3] \cdot t3 - AT[2, 4] \cdot t4$

$$\delta 2 := 0 \quad (29)$$

> $\delta 3 := AT[3, 5] - AT[3, 1] \cdot t1 - AT[3, 2] \cdot t2 - AT[3, 3] \cdot t3 - AT[3, 4] \cdot t4$

$$\delta 3 := 0 \quad (30)$$

> $\delta t4 := AT[4,5] - AT[4,1]\cdot t1 - AT[4,2]\cdot t2 - AT[4,3]\cdot t3 - AT[4,4]\cdot t4$

$$\delta t4 := 0 \quad (31)$$

Нев'язки для точного розв'яхку нульові.

> $Digits := 7$

$$Digits := 7 \quad (32)$$

Задача 3. Розв’язати систему рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою методу Гаусса-Жордана. При обчисленнях зберігати 7 значущих
цифр. Для кожного рівняння знайти нев’язку та оцінити точність отриманого розв’язку. Для перевірки знайти точний розв’язок системи методом Гаусса-
Жордана. Визначити абсолютну й відносну похибки розв’язку системи.
Порівняти значення нев’язки та абсолютної похибки.
Знайти першу, другу і третю норми матриці коефіцієнтів та число обумовленості матриці А.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1234037\cdot N & -15\cdot N & 8\cdot N & -1.7521 & 16.37 \\ -9\cdot N & 0.00123\cdot N & -7 & -1.9067 & -17.23 \\ 12\cdot N & -13 & 100999\cdot N & -1.7201 & -43.45 \\ 72\cdot N & -4 & -1.79451 & -\frac{0.743}{N} & 65.49 \end{pmatrix}$$

> $AR := matrix\left(4, 5, \left[1234037\cdot N, -15\cdot N, 8\cdot N, -1.7521, 16.37, -9\cdot N, 0.00123\cdot N, -7, -1.9067, -17.23, 12\cdot N, -13, 100999\cdot N, -1.7201, -43.45, 72\cdot N, -4, -1.79451, -\frac{0.743}{N}, 65.49\right]\right)$

$$AR := \begin{bmatrix} 55531665 & -675 & 360 & -1.7521 & 16.37 \\ -405 & 0.05535 & -7 & -1.9067 & -17.23 \\ 540 & -13 & 4544955 & -1.7201 & -43.45 \\ 3240 & -4 & -1.79451 & -0.01651111 & 65.49 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Отримаємо нулі в першому стовпчику

> $A1 := mulrow\left(AR, 1, \frac{1}{55531665.}\right)$

$A1 :=$ (34)

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790\times 10^{-6} & -3.155138\times 10^{-8} & 2.947869\times 10^{-7} \\ -405 & 0.05535 & -7 & -1.9067 & -17.23 \\ 540 & -13 & 4544955 & -1.7201 & -43.45 \\ 3240 & -4 & -1.79451 & -0.01651111 & 65.49 \end{bmatrix}$$

> $A2 := addrow(A1, 1, 2, 405)$

$A2 :=$ (35)

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790\times10^{-6} & -3.155138\times10^{-8} & 2.947869\times10^{-7} \\ 0. & 0.05042713 & -6.997374 & -1.906713 & -17.22988 \\ 540 & -13 & 4544955 & -1.7201 & -43.45 \\ 3240 & -4 & -1.79451 & -0.01651111 & 65.49 \end{bmatrix}$$

> $A3 := addrow(A2, 1, 3, -540)$

$A3 :=$ **(36)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790\times10^{-6} & -3.155138\times10^{-8} & 2.947869\times10^{-7} \\ 0. & 0.05042713 & -6.997374 & -1.906713 & -17.22988 \\ 0. & -12.99344 & 4.544955\times10^{6} & -1.720083 & -43.45016 \\ 3240 & -4 & -1.79451 & -0.01651111 & 65.49 \end{bmatrix}$$

> $A4 := addrow(A3, 1, 4, -3240)$

$A4 :=$ **(37)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790\times10^{-6} & -3.155138\times10^{-8} & 2.947869\times10^{-7} \\ 0. & 0.05042713 & -6.997374 & -1.906713 & -17.22988 \\ 0. & -12.99344 & 4.544955\times10^{6} & -1.720083 & -43.45016 \\ 0. & -3.960617 & -1.815514 & -0.01640888 & 65.48904 \end{bmatrix}$$

Тепер у другому

> $A5 := mulrow\left(A4, 2, \frac{1}{0.05042713}\right)$

$A5 :=$ **(38)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790\times10^{-6} & -3.155138\times10^{-8} & 2.947869\times10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & -138.7621 & -37.81126 & -341.6789 \\ 0. & -12.99344 & 4.544955\times10^{6} & -1.720083 & -43.45016 \\ 0. & -3.960617 & -1.815514 & -0.01640888 & 65.48904 \end{bmatrix}$$

> $A6 := addrow(A5, 2, 3, 12.99344)$

$A6 :=$ **(39)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790\times10^{-6} & -3.155138\times10^{-8} & 2.947869\times10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & -138.7621 & -37.81126 & -341.6789 \\ 0. & 0. & 4.543152\times10^{6} & -493.0184 & -4483.034 \\ 0. & -3.960617 & -1.815514 & -0.01640888 & 65.48904 \end{bmatrix}$$

> $A7 := addrow(A6, 2, 4, 3.960617)$

$A7 :=$ **(40)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790 \times 10^{-6} & -3.155138 \times 10^{-8} & 2.947869 \times 10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & -138.7621 & -37.81126 & -341.6789 \\ 0. & 0. & 4.543152 \times 10^{6} & -493.0184 & -4483.034 \\ 0. & 0. & -551.3990 & -149.7723 & -1287.770 \end{bmatrix}$$

Тепер у третьому

> $A8 := mulrow\left(A7, 3, \frac{1}{4.543152 \times 10^{6}}\right)$

$A8 :=$ **(41)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790 \times 10^{-6} & -3.155138 \times 10^{-8} & 2.947869 \times 10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & -138.7621 & -37.81126 & -341.6789 \\ 0. & 0. & 1.000000 & -0.0001085190 & -0.0009867673 \\ 0. & 0. & -551.3990 & -149.7723 & -1287.770 \end{bmatrix}$$

> $A9 := addrow(A8, 3, 4, 551.3990)$

$A9 :=$ **(42)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790 \times 10^{-6} & -3.155138 \times 10^{-8} & 2.947869 \times 10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & -138.7621 & -37.81126 & -341.6789 \\ 0. & 0. & 1.000000 & -0.0001085190 & -0.0009867673 \\ 0. & 0. & 0. & -149.8321 & -1288.314 \end{bmatrix}$$

> $A10 := mulrow\left(A9, 4, \frac{1}{-149.8321}\right)$

$A10 :=$ **(43)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790 \times 10^{-6} & -3.155138 \times 10^{-8} & 2.947869 \times 10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & -138.7621 & -37.81126 & -341.6789 \\ 0. & 0. & 1.000000 & -0.0001085190 & -0.0009867673 \\ -0. & -0. & -0. & 1.000000 & 8.598384 \end{bmatrix}$$

>

Тепер отримаємо нулі вище діагоналі, за тим же принципом як і під діагоналлю

> $A11 := addrow(A10, 4, 3, 0.0001085190)$

$A11 :=$ **(44)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790 \times 10^{-6} & -3.155138 \times 10^{-8} & 2.947869 \times 10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & -138.7621 & -37.81126 & -341.6789 \\ 0. & 0. & 1.000000 & 0. & -0.0000536793 \\ -0. & -0. & -0. & 1.000000 & 8.598384 \end{bmatrix}$$

> $A12 := addrow(A11, 4, 2, 37.81126)$

$A12 :=$ **(45)**

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790 \times 10^{-6} & -3.155138 \times 10^{-8} & 2.947869 \times 10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & -138.7621 & 0. & -16.5632 \\ 0. & 0. & 1.000000 & 0. & -0.0000536793 \\ -0. & -0. & -0. & 1.000000 & 8.598384 \end{bmatrix}$$

> $A13 := addrow(A12, 4, 1, 3.155138 \times 10^{-8})$

$$A13 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790 \times 10^{-6} & 0. & 5.660778 \times 10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & -138.7621 & 0. & -16.5632 \\ 0. & 0. & 1.000000 & 0. & -0.0000536793 \\ -0. & -0. & -0. & 1.000000 & 8.598384 \end{bmatrix} \quad \textbf{(46)}$$

> $A14 := addrow(A13, 3, 2, 138.7621)$

$$A14 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 6.482790 \times 10^{-6} & 0. & 5.660778 \times 10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & 0. & 0. & -16.57065 \\ 0. & 0. & 1.000000 & 0. & -0.0000536793 \\ -0. & -0. & -0. & 1.000000 & 8.598384 \end{bmatrix} \quad \textbf{(47)}$$

> $A15 := addrow(A14, 3, 1, -6.482790 \times 10^{-6})$

$$A15 := \begin{bmatrix} 1.000000 & -0.00001215523 & 0. & 0. & 5.664258 \times 10^{-7} \\ 0. & 1.000000 & 0. & 0. & -16.57065 \\ 0. & 0. & 1.000000 & 0. & -0.0000536793 \\ -0. & -0. & -0. & 1.000000 & 8.598384 \end{bmatrix} \quad \textbf{(48)}$$

> $A16 := addrow(A15, 2, 1, 0.00001215523)$

$$A16 := \begin{bmatrix} 1.000000 & 0. & 0. & 0. & -0.0002008537 \\ 0. & 1.000000 & 0. & 0. & -16.57065 \\ 0. & 0. & 1.000000 & 0. & -0.0000536793 \\ -0. & -0. & -0. & 1.000000 & 8.598384 \end{bmatrix} \quad \textbf{(49)}$$

> $x := matrix(4, 1, [-0.0002008537, -16.57065, -0.0000536793, 8.598384])$

$$x := \begin{bmatrix} -0.0002008537 \\ -16.57065 \\ -0.0000536793 \\ 8.598384 \end{bmatrix} \quad \textbf{(50)}$$

Знайдемо нев'язки

> $\delta 1 := AR[1, 5] - AR[1, 1] \cdot x[1, 1] - AR[1, 2] \cdot x[2, 1] - AR[1, 3] \cdot x[3, 1] - AR[1, 4] \cdot x[4, 1]$

$$\delta 1 := 0. \quad \textbf{(51)}$$

> $\delta 2 := AR[2, 5] - AR[2, 1] \cdot x[1, 1] - AR[2, 2] \cdot x[2, 1] - AR[2, 3] \cdot x[3, 1] - AR[2, 4] \cdot x[4, 1]$

$$\delta 2 := 3.95 \times 10^{-6} \quad \textbf{(52)}$$

> $\delta 3 := AR[3, 5] - AR[3, 1] \cdot x[1, 1] - AR[3, 2] \cdot x[2, 1] - AR[3, 3] \cdot x[3, 1] - AR[3, 4] \cdot x[4, 1]$

$$\delta 3 := 0.0001610 \tag{53}$$

> $\delta 4 := AR[4,5] - AR[4,1]\cdot x[1,1] - AR[4,2]\cdot x[2,1] - AR[4,3]\cdot x[3,1] - AR[4,4]\cdot x[4,1]$

$$\delta 4 := 0.0000360 \tag{54}$$

Похибка ± 0.01

>

Знайдемо точний розв'язок

> $AT := matrix\left(4, 5, \left[1234037\cdot N, -15\cdot N, 8\cdot N, -\frac{17521}{10000}, \frac{1637}{100}, -9\cdot N, \frac{123}{100000}\cdot N, -7, -\frac{19067}{10000}, -\frac{1723}{100}, 12\cdot N, -13, 100999\cdot N, -\frac{17201}{10000}, -\frac{4345}{100}, 72\cdot N, -4, -\frac{179451}{100000}, -\frac{743}{N\cdot 1000}, \frac{6549}{100}\right]\right)$

$$AT := \begin{bmatrix} 55531665 & -675 & 360 & -\frac{17521}{10000} & \frac{1637}{100} \\ -405 & \frac{1107}{20000} & -7 & -\frac{19067}{10000} & -\frac{1723}{100} \\ 540 & -13 & 4544955 & -\frac{17201}{10000} & -\frac{869}{20} \\ 3240 & -4 & -\frac{179451}{100000} & -\frac{743}{45000} & \frac{6549}{100} \end{bmatrix} \tag{55}$$

> $evalm(AT - AR)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0. & 0. \\ 0 & 0. & 0 & 0. & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 0. & 0. \\ 0 & 0 & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \tag{56}$$

> $gaussjord(AT)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{344579558909479266349615861 7}{1715574814281581297884111778625 0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2526951672787887356018478104 0}{1524955390472516709230321581} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{818585492687782870322 00}{1524955390472516709230321581} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1311214940892938649623816034 0}{1524955390472516709230321581} \end{bmatrix} \tag{57}$$

Запишемо точний розв'язок у вектор xt

> $xt := matrix\left(4, 1, \left[-\frac{3445795589094792663496158617}{17155748142815812978841117786250}, -\frac{25269516727878873560184781040}{1524955390472516709230321581}, -\frac{81858549268778287032200}{1524955390472516709230321581},\right.\right.$

$$\left.\left.\frac{1311214940892938649623816034 0}{15249553904725167092303215 81}\right]\right)$$

$$xt := \begin{bmatrix} -\frac{3445795589094792663496158617}{17155748142815812978841117786250} \\ -\frac{252695167278788735601847810 40}{15249553904725167092303215 81} \\ -\frac{81858549268778287032200}{15249553904725167092303215 81} \\ \frac{1311214940892938649623816034 0}{15249553904725167092303215 81} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Абсолютна похибка

> $\Delta 1 := |xt[1,1] - x[1,1]|$

$$\Delta 1 := 0. \quad (59)$$

> $\Delta 2 := |xt[2,1] - x[2,1]|$

$$\Delta 2 := 0.00001 \quad (60)$$

> $\Delta 3 := |xt[3,1] - x[3,1]|$

$$\Delta 3 := 1. \times 10^{-11} \quad (61)$$

> $\Delta 4 := |xt[4,1] - x[4,1]|$

$$\Delta 4 := 2. \times 10^{-6} \quad (62)$$

Абсолютна похибка дуже низька.

Тепер відносна похибка

> $\delta v1 := \frac{\Delta 1}{xt[1,1]} \cdot 100\ \%$

$$\delta v1 := -0. \quad (63)$$

> $\delta v2 := \frac{\Delta 2}{xt[2,1]} \cdot 100\ \%$

$$\delta v2 := 0. \quad (64)$$

> $\delta v3 := \frac{\Delta 3}{xt[3,1]} \cdot 100\ \%$

$$\delta v3 := -0. \quad (65)$$

> $\delta v4 := \frac{\Delta 4}{xt[4,1]} \cdot 100\ \%$

$$\delta v4 := -0. \quad (66)$$

Відносна похибка дуже низька

Тепер порівняю нев'язку та абсолютну похибку

> $\delta 1 - \Delta 1$

$$0. \quad (67)$$

> $\delta 2 - \Delta 2$

$$(68)$$

$$-6.05 \times 10^{-6} \quad (68)$$

> $\delta 3 - \Delta 3$

$$0.0001610000 \quad (69)$$

> $\delta 4 - \Delta 4$

$$0.0000340 \quad (70)$$

Значення абсолютної похибки та нев'язки дуже схожі.
Тепер створимо матрицю коефіцієнтів та знайдемо число обумовленості.

> $AK := matrix\left(4, 4, \left[1234037 \cdot N, -15 \cdot N, 8 \cdot N, -1.7521, -9 \cdot N, 0.00123 \cdot N, -7, -1.9067, 12 \cdot N, -13, 100999 \cdot N, -1.7201, 72 \cdot N, -4, -1.79451, -\frac{0.743}{N}\right]\right)$

$$AK := \begin{bmatrix} 55531665 & -675 & 360 & -1.7521 \\ -405 & 0.05535 & -7 & -1.9067 \\ 540 & -13 & 4544955 & -1.7201 \\ 3240 & -4 & -1.79451 & -0.01651111 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Максимальна сума буде в першому рядочку

> $normmat1 := AK[1, 1] + AK[1, 2] + AK[1, 3] + AK[1, 4]$

$$normmat1 := 5.553135 \times 10^{7} \quad (72)$$

Макимальна сума буде в першому стовпчику

> $normmat2 := AK[1, 1] + AK[2, 1] + AK[3, 1] + AK[4, 1]$

$$normmat2 := 55535040 \quad (73)$$

> $normmat3 := \mathrm{sqrt}\left(AK[1, 1]^2 + AK[1, 2]^2 + AK[1, 3]^2 + AK[1, 4]^2 + AK[2, 1]^2 + AK[2, 2]^2 + AK[2, 3]^2 + AK[2, 4]^2 + AK[3, 1]^2 + AK[3, 2]^2 + AK[3, 3]^2 + AK[3, 4]^2 + AK[4, 1]^2 + AK[4, 2]^2 + AK[4, 3]^2 + AK[4, 4]^2\right)$

$$normmat3 := 5.571735 \times 10^{7} \quad (74)$$

> $AKOB := inverse(AK)$

$$AKOB := \quad (75)$$

$$\begin{bmatrix} 1.818688 \times 10^{-8} & 9.865260 \times 10^{-9} & -2.637072 \times 10^{-12} & -3.068892 \times 10^{-6} \\ 0.00001474554 & 0.002172704 & -9.750104 \times 10^{-8} & -0.2524581 \\ 3.871595 \times 10^{-11} & -1.922547 \times 10^{-7} & 2.200237 \times 10^{-7} & -7.242708 \times 10^{-7} \\ -3.435145 \times 10^{-6} & -0.5244050 & -8.100355 \times 10^{-7} & -0.006674141 \end{bmatrix}$$

Знайдемо норму через оператор

> $col1 := 1.818688 \times 10^{-8} + 0.00001474554 + 3.871595 \times 10^{-11} - 3.435145 \times 10^{-6}$

$$col1 := 0.00001132862 \quad (76)$$

> $col2 := 9.865260 \times 10^{-9} + 0.002172704 - 1.922547 \times 10^{-7} - 0.5244050$

$$col2 := -0.5222325 \quad (77)$$

> $col3 := -2.637072 \times 10^{-12} - 9.750104 \times 10^{-8} + 2.200237 \times 10^{-7} - 8.100355 \times 10^{-7}$

$$col3 := -6.875155 \times 10^{-7} \quad (78)$$

> $col4 := -3.068892 \times 10^{-6} - 0.2524581 - 7.242708 \times 10^{-7} - 0.006674141$

$$col4 := -0.2591360 \tag{79}$$

> $normmat2 \cdot col1$

$$629.1354 \tag{80}$$

Матриця дуже погано обумовлена