

ЗМІСТ

Розділ 1. Загальна планово-виробнича задача	2
1. Оптимізація плану виробництва	2
2. Задачі	8
2.1. Задача №1	8

Розділ 1

Загальна планово-виробнича задача

1. Оптимізація плану виробництва

У даній главі наведено задачі, що демонструють можливості використання моделі лінійного програмування для визначення плану виробництва. Ці можливості узагальнюються для випадку, коли закупівля готової продукції для подальшої реалізації може виявитися більш вигідною для виробника, ніж використання власних потужностей. Також розглядається задача виробничого планування, що враховує динаміку попиту, виробництва та зберігання продукції.

Визначення обсягу виробництва. Загальна постановка задачі планування виробництва полягає в необхідності визначити план виробництва одного або декількох видів продукції, який забезпечує найбільш раціональне використання наявних матеріальних, фінансових та інших видів ресурсів. Такий план буде оптимальним з точки зору якого-небудь обраного критерію — максимуму прибутку, мінімуму витрат на виробництво і т. д.

Задачі планування виробництва виникають на різних рівнях в системі економічного управління: на рівні окремих виробничих ділянок та бригад, підприємств, галузей, на рівні народного господарства в цілому.

$$\sum_j c_j x_j \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Позначення.

n - кількість видів продукції, що випускається,

m - кількість видів виробничих ресурсів (виробничі потужності, сировина, робоча сила),

a_{ij} - обсяг i -го ресурсу на випуск одиниці j -ї продукції,

c_j - прибуток від випуску одиниці j -ї продукції,

b_i - кількість наявного ресурсу i -го виду,

x_j - обсяг випуску j -ї продукції (змінна),

(1) - цільова функція (максимум прибутку),

(2) - група обмежень на обсяг наявних у наявності ресурсів,

(3) - обмеження на невід'ємність змінних.

Приклад 1. Підприємство має ресурси сировини, робочої сили та обладнання, необхідні для виробництва будь-якого з чотирьох видів продукції. Витрати ресурсів на виготовлення одиниці даного виду продукції, прибуток, отримуваний підприємством, а також запаси ресурсів вказані в наступній таблиці.

—табличка

Згідно з державним замовленням, прийнятим підприємством, має бути випущено не менше 1 одиниці продукції першого виду та 5 одиниць продукції другого виду.

Необхідно визначити, скільки продукції кожного виду потрібно випускати, щоб отримати максимальний прибуток, та який вид продукції (перший або другий) вигідніше приймати додаткове замовлення.

Модель лінійного програмування:

$$30x_1 + 25x_2 + 56x_3 + 48x_4 \rightarrow \max,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 60,$$

$$22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \leq 400,$$

$$10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \leq 128,$$

$$x_1 \geq 1,$$

$$x_2 \geq 5$$

Оптимальний розв'язок задачі.

$$x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 0.$$

Приклад 2. Зробити чи купити?

Фірма "N. Shagas & Co" виробляє три типи хімікатів. На наступний місяць ця фірма заключила контракт на поставку наступної кількості трьох типів хімікатів

тип хімікатів	продажі по контракту, кг
1	2000
2	3500
3	1800

Виробництво компанії обмежено наявністю часу на обробку хімікатів у двох хімічних реакторах. Кожен вид хімікатів повинен бути оброблений спочатку у реакторі 1, а потім у реакторі 2. У наступній таблиці подано фонд робочого часу у годинах, який є в наявності у кожному реакторі у наступному місяці, а також час на обробку 1 кг кожного хіміката в кожному реакторі (год/кг).

	Хімікати			Можливості реактора, год
	1	2	3	
Реактор 1	0,05	0,04	0,01	200
Реактор 2	0,02	0,06	0,03	150

Через обмежені можливості, пов'язані з часом обробки у реакторах, компанія не має достатньої потужності, щоб задовольнити попит завдяки виробленим продукції. Отже, компанія повинна купити деякі хімікати ззовні, розширивши за рахунок цих покупок свої можливості і перепродавши ці хімікати своїм споживачам. Нижче наведена таблиця витрат на виробництво хімікатів самої компанії та на їх закупівлю ззовні.

Хімікати	Затрати на виробництво тис грн/кг	Затрати на покупку тис грн/кг
1	2,50	2,80
2	1,75	2,50
3	2,90	3,25

Мета компанії полягає в тому, щоб виконати замовлення клієнта з мінімальними витратами. Це дозволить їй максимізувати прибуток. Іншими словами, компанія повинна прийняти рішення про те, скільки і які продукти слід виробляти самостійно, а скільки купувати ззовні.

Модель лінійного програмування:

q_1 - кількість продукту 1, що виробляється компанією,

z_1 - кількість продукту 1, що закуповується компанією,

q_2 - кількість продукту 2, що виробляється компанією,

z_2 - кількість продукту 2, що закуповується компанією,

q_3 - кількість продукту 3, що виробляється компанією,

z_3 - кількість продукту 3, що закуповується компанією.

Цільова функція:

$$2,50q_1 + 2,80z_1 + 1,75q_2 + 2,50z_2 + 2,90q_3 + 3,25z_3 \rightarrow \min.$$

Ресурсні обмеження

час на виробництво продукції в реакторі 1:

$$0,05q_1 + 0,04q_2 + 0,01q_3 \leq 200,$$

час на виробництво продукції в реакторі 2:

$$0,02q_1 + 0,06q_2 + 0,31q_3 \leq 150,$$

Обмеження на попит.

продукт 1

$$q_1 + z_1 = 2000,$$

продукт 2

$$q_2 + z_2 = 3500,$$

продукт 3

$$q_3 + z_3 = 1800.$$

Невід'ємність змінних.

$$q_1 \geq 0, z_1 \geq 0, q_2 \geq 0, z_2 \geq 0, q_3 \geq 0, z_3 \geq 0.$$

Приклад 3. Визначення обсягу виробництва та запасів.

Компанія "Відео виробник відеомagnetів, планує виробництво та запаси продукції на наступні 6 місяців. Прогноз попиту на наступні 6 місяців відображений у таблиці. "Відео" хотіла б мати такий план, який б не передбачав затримок поставок.

Через коливання витрат на сировину та енергію собівартість продукції (витрати на одиницю продукції) змінюється з місяця на місяць. Максимальний рівень виробництва компанії також коливається з місяця на місяць через нерівномірний ремонт обладнання та кількість робочих днів у місяці.

"Відео" не веде політику частого змінення числа працівників. Тому, щоб уникнути витрат часу марно, компанія встановлює мінімальний рівень виробництва, що складає 50% від максимального рівня. У таблиці також представлені максимальні та мінімальні рівні запасів на кожний місяць.

Місяць	Прогноз попиту	Собівартість одиниці продукції, тис грн	Рівень виробництва		Рівень запасів	
			макс	мін	макс	мін
1	1000	460	7000	3500	7000	2500
2	4000	470	5000	2500	7000	2500
3	6000	480	4000	2000	7000	2500
4	5000	500	8000	4000	7000	2500
5	3000	500	6000	3000	7000	2500
6	2000	500	3000	1500	7000	2500

У поточний час у компанії "Відео" є у запасі 3500 відеомагнітофонів. Страховий рівень запасів, який компанія старається регулярно підтримувати, становить 2500 штук, що означає, що в кінці кожного місяця така кількість відеомагнітофонів повинна знаходитись на складі як мінімально допустимий запас. Проте площі складів дозволяють зберігати 7000 магнітофонів. Це відображено в передостанньому і останньому стовпцях таблиці.

Бухгалтерія компанії розрахувала, що зберігання одного відеомагнітофона на складі коштує 8 тисяч рублів на місяць. Щоб розрахувати витрати на зберігання всіх магнітофонів, потрібно визначити їхню кількість як середньомісячну, тобто середнє між запасами на початок і кінець місяця, і помножити це значення на 8.

Завдання полягає в тому, щоб визначити рівні виробництва і запасів на кожний місяць, що мінімізує загальні витрати (витрати на виробництво плюс витрати на зберігання) при задоволенні попиту на продукцію без затримок поставок.

1. Які є мінімальні загальні витрати (в тисячах рублів)?
2. Скільки магнітофонів слід виробити у другому місяці?
3. Скільки магнітофонів слід виробити у п'ятому місяці?

Задачі планування виробництва і запасів належать до широкого класу динамічних (точніше - псевдодинамічних) задач планування на декілька взаємопов'язаних періодів. У даному випадку зв'язок між періодами здійснюється через запаси, оскільки запас на кінець періоду є одночасно і запасом на початок наступного. Це означає, зокрема, що при умові повного задоволення попиту повинно виконуватися умова матеріального балансу.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{початковий} & & \text{об'єм} & & \text{попит на} & & \text{кінцевий} \\
 \text{запас для} & + & \text{виробництва} & = & \text{продукцію} & + & \text{запас для} \\
 \text{періода } t & & \text{періода } t & & \text{в періоді } t & & \text{періода } t
 \end{array}$$

Модель лінійного програмування

q_t - рівень виробництва в місяці t ,

z_t - рівень запасів на кінець місяця t (або на початку місяця $t+1$).

Цільова функція.

$$460q_1 + 470q_2 + 480q_3 + 500q_4 + 500q_5 + 500q_6 + 8z_1 + 8z_2 + 8z_3 + 8z_4 + 8z_5 + 8z_6 \rightarrow \min$$

при обмеженнях по випуску продукції:

$$q_1 \geq 3500, q_2 \geq 2500, q_3 \geq 2000, q_4 \geq 4000, q_5 \geq 3000, q_6 \geq 1500.$$

$$q_1 \leq 7000, q_2 \leq 5000, q_3 \leq 4000, q_4 \leq 8000, q_5 \leq 6000, q_6 \leq 3000.$$

по запасах.

$$z_1 \geq 2500, z_2 \geq 2500, z_3 \geq 2500, z_4 \geq 2500, z_5 \geq 2500, z_6 \geq 2500.$$

$$z_1 \leq 7000, z_2 \leq 7000, z_3 \leq 7000, z_4 \leq 7000, z_5 \leq 7000, z_6 \leq 7000.$$

по балансу.

$$q_1 - z_1 = -2500,$$

$$z_1 + q_2 - z_2 = 4000,$$

$$z_2 + q_3 - z_3 = 6000,$$

$$z_3 + q_4 - z_4 = 5000,$$

$$z_4 + q_5 - z_5 = 3000,$$

$$z_5 + q_6 - z_6 = 2000.$$

2. Задачі

Багато з раніше наведених завдань, а також низка інших планово-виробничих завдань виробничих завдань укладаються в таке загальне завдання лінійного програмування.

2.1. Задача №1

Деякий виробничий процес може вестися в різних технологічних режимах (способах організації виробництва, способах обробки, розкрою тощо). В розглянутому процесі беруть участь q виробничих факторів

(виробів, ресурсів тощо). Нехай a_{ik} означає обсяг виробництва k -го фактора ($k = 1, 2, \dots, q$), за умови застосуванні i -го технологічного режиму $i = 1, 2, \dots, p$ з одиничною інтенсивністю. При цьому якщо $a_{ik} > 0$, то i -й фактор виробляється (наприклад, вироби, продукти тощо), а якщо $a_{ik} < 0$, то відповідний фактор витрачається (наприклад, ресурси, сировина тощо). Позначимо через $b_k > 0$ потребу в k -му факторі, якщо він виробляється, і через $b_k < 0$ - ресурси k -го фактора, якщо він витрачається. Таким чином, за допомогою введення чисел a_{ik} і b_k зі знаками «+» або «-» встановлюється нібито формальна рівноправність між ресурсами і потребами.

Позначимо, нарешті, через c_i оцінку результату застосування i -го технологічного -режиму одиничною інтенсивністю. Визначити виробничий план, заданий величинами інтенсивностей усіх технологічних способів, сумарна оцінка якого буде найкращою.

Розв'язання. Позначимо через x_i інтенсивність, з якою застосовується i -й технологічний режим. Тоді змінні x_i повинні задовольняти таким двом видам обмежень:

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (1)$$

$$\sum_i a_{ik} x_i \geq b_k \quad (k = 1, 2, \dots, q). \quad (2)$$

У разі коли k -й фактор є вироблений продукт, вираз (1) являє собою обмеження за потребами. Якщо же k -й є видом ресурсів, що витрачається, то відповідно до прийнятої умови $a_{ik} \leq 0$ та $b_k < 0$, і тому нерівність (2) перепишеться у виді $\sum |a_{ik}| x_i \leq |b_k|$, що відповідає за характером звичайним обмеженням по ресурсам.

Сумарна оцінка всього виробничого процесу може бути отримана за допомогою формули

$$z = \sum_i c_i x_i. \quad (3)$$

запис якої передбачає, що оцінки кожного технологічного способу пропорційні інтенсивності його застосування, а при використанні кіль-

кох способів підсумовуються. Завдання полягає в тому, щоб максимізувати (або мінімізувати) функцію (3), за умов (1) та (2). Зазначена модель задачі, вочевидь, у загальному випадку має досліджуватися загальними обчислювальними методами. Неважко бачити, що деякі з раніше розглянутих завдань є окремими випадками даної, якщо відповідно витлумачити такі поняття, як «фактори виробництва» і «технологічні способи» в конкретних термінах даної задачі. Водночас зазначена задача може безпосередньо фігурувати як задача знаходження оптимального поєднання інтенсивностей різних технологічних режимів (способів виробництва).