ЗМІСТ

Розділ 1. Елементи теорії ігор **2**

1. Основні поняття 2
2. Задачі 3
   2.1. Задача №1 3
   2.2. Задача №2. 4
   2.3. Задача №3 6
3. Ігри в чистих стратегіях 9
4. Поиск оптимальной смешанной стратегии 16

Розділ 1

Елементи теорії ігор

1. Основні поняття

Розглянуто скінченні парні ігри з нульовою сумою. Гравець має p чистих стратегій $A_1....A_i, ...A_p$, а гравець - відповідно q чистими стратегіями $B_1....B_k, ...B_q$. Перший гравець може вибрати будь-яку стратегію A_i, у відповідь на яку другий гравець може вибрати будь-яку стратегію B_k. Поєднання цих стратегій A_i, B_k призведе до деякого числового результату («платежу»), який позначимо через a_ik і будемо називати його «виграшем» гравця . Гра з «нульовою сумою» означає, що при цьому «виграш» гравця В становитиме - a_ik (числа a_{ik} можуть бути й від'ємними, тому слово «виграш» узято в лапки). Матриця $\Pi = ||a_{ik}||$ порядку $p \times q$ називається платіжною матрицею, або **матрицею гри:**

Числа $\alpha_i = \min\limits_k a_{ik}$ і $\beta_i = \max\limits_k a_{ik}$ вказують мінімально гарантований вийграш для гравця A, який застосовує стратегію A_i, і мінімально гарантований програш гравцем у разі використання ним стратегії B_k.

Величина

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i(\min_k a_{ik}) \tag{1}$$

називається нижньою ціною гри, максимінним виграшем , або коротко максиміном, а відповідна йому стратегія (рядок) $\rightarrow$ максимінною. Аналогічно

$$\beta = \max_k \beta_k = \min_k(\max_i a_{ik}) \tag{2}$$

називається верхньою ціною гри, мінімаксним програшем B, або мінімаксом, а відповідна стратегія гравця B - мінімаксною. Завжди про $\alpha \leq \beta$.

Принцип, згідно з яким гравці вибирають ці стратегії, називається принципом максиміну (для A) або ммнімаксу (для B).

Якщо гравець A вибирає свою максимінну стратегію, то за будь-якої

A_i \ B_k		Стратегии игрока B					$\alpha_i=\min\limits_k a_{ik}$
		B_1	…	B_k	…	B_q	
Стратегии игрока A	A_1	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1q}	α_1
	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	A_i	a_{i1}	…	a_{ik}	…	a_{iq}	α_i
	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	A_p	a_{p1}	…	a_{pk}	…	a_{pq}	α_p
$\beta_k=\max\limits_i a_{ik}$		β_1	…	β_k	…	β_q	β \ α

стратегії, яку вибирає гравець B, йому забезпечується виграш не менше ніж α. Аналогічно для гравця B, у разі вибору ним стратегії, за якої досягається $\beta = \min\limits_k \beta_k$, забезпечується програш (або виграш гравцяA) не більше ніж β.

Якщо $\alpha = \beta$, то гра називається з ***сідловою точкою***, а загальне значення α і β, яке позначатимемо через v - ціною гри.

У цьому випадку оптимальним рішенням гри для обох гравців є вибір максимінної (для A) і мінімаксної (для B) стратегій. Будь-яке відхилення для кожного гравця від цих стратегій не може виявитися вигідним.

2. Задачі

2.1. Задача №1

Гра заключається в тому, що гравець A записує числа 1 (стратегія A_1) чи 2 (A_2) чи 3 (A_3). Гравець B в свою чергу може записати числа 1 (B_1), 2 (B_1), 3 (B_3) чи 4 (B_4).

Якщо обидва числа виявляться рівної кратності, то A виграє суму цих чисел. Скласти платіжну матрицю, визначити верхню та нижню ціну гри та мінімаксні стратегії

Розв'язання. Згідно з умовою, платіжна матриця гри має наступний вигляд:

B_k / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	-3	4	-5	-5
A_2	-3	4	-5	-6	-5
A_3	4	-5	6	-7	-7
β_k	4	4	6	6	~~-5~~ 4

Нижня ціна гри: $\alpha = \max_i \alpha_i = -5$;

верхня ціна гри: $\beta = \min_k \beta_k = 4$.

Відповідно, для гравця A максимінними стратегіями є A_1 та A_2, при яких йому забезпечений "виграш"не менш ніж -5 (тобто програш не більше ніж 5)

Для гравця B, відповідно, мінімаксними стратегіями є B_1 чи B_2, які забезпечують йому програш не більш ніж 4.

Гра не має сідлової точки ($\alpha < \beta$).

2.2. Задача №2.

Для наступних платіжних матриць, визначити нижню та верхню ціну гри, мінімаксні стратегії та наявність сідлових точок. У останньому випадку визначити оптимальне рішення гри.

$$1)\ \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,9 & 0,4 & 0,2 \\ 0,7 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad 4)\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5)\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad 6)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Якщо гра не має сідлової точки, то застосування чистих стратегій не дає оптимального вирішення гри. У цьому випадку застосовують змішані стратегії

Змішаною стратегією гравця A називається застосування ним своїх чистих стратегій $A1, ..., A_i, ..., A_p$ з частотностями $x_1, ..., x_i, ..., x_p$ (причому $\sum x_i = 1$). Її записують у вигляді

$$\begin{pmatrix} A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_p \\ x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p \end{pmatrix}, \text{ чи } \bar{X} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p).$$

Аналогічно вектором

$$\bar{Y}(y_1, ..., y_k, ..., y_q) \quad (\sum y_k = 1)$$

визначається змішана стратегія гравця B, де y_k є частота використання стратегії B_k. Чисті стратегії є окремим випадком змішаної стратегії, що задається одиничним ектором.

Функцією виграшу, або платіжною функцією $f(\bar{X}, \bar{Y})$ гри з матрицею $\Pi = ||a_{ik}||$ при застосуванні гравцем A змішаної стратегії X, а гравцем B - змішаної стратегії $\bar{Y}$, називається середня величина виграшу гравця A (програшу гравця B), підраховується за формулою

$$f(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_i \sum_k x_i y_k a_{jk} = \bar{X}\Pi\bar{Y}. \tag{1}$$

Стратегії $\bar{X}^*$ та $\bar{Y}^*$ називається оптимальними, якщо виконуються нерівності

$$f(\bar{X}, \bar{Y}^*) \leq f(\bar{X}^*, \bar{Y}^*) \leq f(\bar{X}^*, \bar{Y}), \tag{2}$$

тобто якщо їх застосування забезпечує гравцеві А середній виграш, не менший, ніж у разі застосування ним будь-якої іншої стратегії $\bar{X}$, і гравцеві В середній програш, не більший, ніж у разі застосування ним будь-якої іншої стратегії $\bar{Y}$.

Сукупність оптимальних стратегій $(\bar{X}^*, \bar{Y}^*)$ називається оптимальним рішенням, або просто рішенням гри, а значення платіжної функції при цьому - ціною гри v:

$$v = f(\bar{X}^*, \bar{Y}^*) \tag{3}$$

Фундаментальна теорема Неймана стверджує, що *кожна кінцева матрична гра з нульовою сумою має розв'язок у змішаних стратегіях.*

2.3. Задача №3

Дослідити ігри, задані такими матрицями:

$$1)\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad 3)\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2^5 & \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. 1) 1-й рядок домінує над 2-м і 3-м, оскільки усі його елементи відповідно не менші за елементи 2-го і 3-го рядків.
Тому стратегії A_2 і A_3 свідомо менш вигідні, ніж A_1, і можуть бути виключені. У результаті отримуємо матрицю $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.
У цій матриці 1, 4 і 5-й стовпці домінують над 2-м. Оскільки стовпці характеризують стратегії гравця В, який прагне зменшити виграш гравця А, то ці стратегії свідомо невигідні.
Після їх виключення отримуємо матрицю $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, в якій немає домінуючих стратегій. Визначивши нижню і верхню ціни гри, отримаємо $\alpha_1 = \min\{6, 4\} = 4, \alpha_2 = \min\{2, 6\} = 2$, звідки $\alpha_1 = \max\{6, 4\} = 6, \alpha_2 =$

$\max\{2, 6\} = 6$. Аналогічно, $\beta_1 = \max\{6, 2\} = 6, \beta_2 = \max\{4, 6\} = 6$, звідки $\beta = \min\{6, 6\} = 6$.

Так як $\alpha \neq \beta$, то гра не має сідлової точки і її рішенням буде змішана стратегія.

2) Стратегія A_2 домінує над A_1 і A_3. Відповідно, виключивши останні, отримаємо матрицю $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. можна виключити B_1 і B_3, що домінують над B_2. Остаточно, отримаємо $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Перейдемо до дослідження сідлової точки, розташовуючи числа α_i і β_k праворуч і знизу матриці:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \boxed{-1} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \boxed{1} & \quad 2 \end{array} & \end{array}.$$

Отримаємо $\alpha = -1$ і $\beta = -1$, отже, сідлової точки немає.

3) Стратегія A_4 свідомо невигідна порівняно з A_1 і може бути бути виключена. У матриці, що залишилася

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

можна виключити домінантні стратегії B_1, і B_3. Після їх виключення отримуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

в якій знову виявилися свідомо невигідними стратегії A_1 і A_3. Їхнє виключення дає матрицю (68). Тепер для гравця А залишилася одна стратегія $_2$ (у первісній нумерації) і для гравця В, очевидно, вигідною є стратегія B_2, що забезпечує йому програш 6, замість 8 при B_3.

Остаточно отримали рішення гри у вигляді чистих стратегій A_2 і

B_2 та ціну гри $v = 6$. Отримане рішення у вигляді чистих стратегій говорить про те, що вихідна матриця мала сідлову точку $a_{22} = 6$, що можна було б установити прямим дослідженням:

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}8&4&3&7&3\\7&\boxed{6}&8&9&\boxed{6}\\8&2&4&6&2\\6&3&2&5&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}3\\\boxed{6}\\2\\2\end{matrix}\\ \begin{matrix}8&\boxed{6}&8&9&\boxed{6}\end{matrix} & \end{array}.$$

Відповідно, $\alpha = \max a_i = 6, \beta = \min \beta_k = 6$ та $\alpha = \beta = 6 = v$.

3. Ігри в чистих стратегіях

У практичних додатках часто мають місце ситуації, коли нашим цілям протистоять цілі протилежної сторони. Подібні ситуації називаються конфліктними. Приклади подібних ситуацій можна зустріти в економіці, військових завданнях, при розв'язання політичних проблем тощо. Ухвалення рішень кожної зі сторін пов'язане з подоланням конфлікту і ускладнене внаслідок невизначеності поведінки протилежної сторони (противника). Природно, що противник прагне вжити найменш вигідні для нас дії, для того щоб забезпечити собі найбільший успіх. Ми не можемо точно передбачити дії противника, так само як і він не може точно передбачити наші дії. І тим не менше, як нам, так і йому доводиться ухвалювати цілком певні рішення.

Необхідність обґрунтовувати оптимальні рішення, ухвалювані в тих чи інших конфліктних ситуаціях, призвела до виникнення спеціального напряму в сучасній математиці - теорії ігор. Під терміном «гра» тут розуміють спрощену математична модель розглянутої конфліктної ситуації. На відміну від реального конфлікту гра ведеться за певними правилами, які чітко встановлюють права та обов'язки учасників, обсяг інформації кожної сторони про іншу, а також результат гри (виграш і програш кожного учасника).

Завдання теорії ігор - вироблення гравцями стратегії, яка забезпечує одній стороні максимальний виграш, а іншій - мінімальний програш. Теорія ігор використовується в конфліктних ситуаціях, які повторюються багаторазово.

Задовго до появи теорії ігор широко використовувалися подібні спрощені моделі конфліктів - ігри в буквальному сенсі слова: шахи, шашки, доміно, карткові ігри тощо. Звідси походить як назва самої теорії, так і різні терміни, що використовуються в ній. Так, конфліктуючі сторони називають «гравцями», одну реалізацію гри - «партією», вибір гравцем тієї чи іншої дії з можливих (у межах правил) «ходом» тощо. Розрізняють два види ходів - особисті та випадкові. Особистий хід передбачає свідомий вибір гравцем тієї чи іншої іншої дії, дозволеної правилами гри. Випадковий хід не залежить від волі гравця - він може бути визначений за допомогою датчика випадкових чисел.

Ігри, що складаються тільки з випадкових ходів, називають азартними. Характерний приклад - гра в лото. Ігри, у яких є особисті ходи, називаються стратегічними. Існують стратегічні ігри, що складаються тільки з особистих ходів (наприклад, шахи). Існують також стратегічні ігри, що складаються як з особистих, так і з випадкових ходів (наприклад, карткові ігри). Зауважимо, що в іграх з особистими і випадковими ходами невизначеність виступає ніби у двох видах: невизначеності результату випадкових ходів і невизначеності поведінки противника у його особистих ходах.

Теорія ігор не цікавиться азартними іграми. Вона займається тільки стратегічними іграми. Завдання теорії ігор - визначити таку стратегію гравця, за якої його шанси на виграш виявилися б найбільшими. В основі пошуку оптимальних стратегій лежить таке основне положення: вважається, що противник також розумний і активний, як і сам гравець, і вживає всіх заходів для того, щоб досягти успіху.

Зрозуміло, на практиці це не завжди виконується. Часто наші дії в реальному конфлікті виявляються оптимальними не тоді, коли ми виходимо з найбільш розумної поведінки противника, а тоді, коли нам вдається вгадати, у чому противник виявляється «дурним», і скористатися цією «дурістю». При цьому ми ризикуємо. Відомо, як ризиковано розраховувати на дурість противника. Теорія ігор не враховує елементів ризику. Вона виявляє лише найбільш обережні, «перестрахувальні» варіанти поведінки в цій ситуації. Ризики враховуються в іншому розділі математики - у теорії статистичних рішень. Можна сказати, що теорія ігор дає нам мудрі поради. Враховуючи ці поради, ми потім приймаємо на практиці ті чи інші рішення, часто йдучи свідомо на певний ризик.

Теорія ігор цінна насамперед самою постановкою завдань, яка вчить не забувати про те, що противник теж мислить, і враховувати його можливі хитрощі та виверти. Нехай рекомендації, що випливають з ігрового підходу, не завжди визначені і не завжди здійсненні - все ж корисно, вибираючи рішення, орієнтуватися, серед інших, і на ігрову модель. Не треба тільки висновки, що випливають із цієї моделі, вважати остаточними і незаперечними.

У теорії ігор найбільш досліджені кінцеві парні ігри з нульовою сумою. Гра називається парною, якщо в ній беруть участь два гравці. Учасників ігор може бути більше двох, вони можуть бути об'єднані в групи. Тоді гра називається коаліційною. Гра називається скінченною, якщо в кожного гравця є скінченне число стратегій, тобто кінцеве число варіантів поведінки, і нескінченною, якщо хоча б в одного з гравців є нескінченне число стратегій. Роблячи особистий хід, гравець дотримується однієї зі стратегій. Гра з нульовою сумою є грою, в якій виграш одного гравця дорівнює програшу іншого.

Оптимальна стратегія гравця - така стратегія, яка при багаторазового повторення гри забезпечує одному гравцеві максимально можливий середній виграш, а іншому - мінімальний середній програш. Припустимо, що розглядається деяка скінченна парна гра з нульовою сумою, де у гравця A є m стратегій, а у гравця B - n стратегій (гра $m \times n$). Позначимо стратегії гравця A через $A_1, A_2, ..., A_m$, а стратегій гравця B через $B_1, B_2, ..., B_n$. Нехай гравець, роблячи особистий хід, вибирає деяку стратегію $A_i (1 \leq i \leq m)$, а гравець B - $B_j (1 \leq i \leq n)$

Позначимо через a_{ij} реалізований у цьому випадку виграш гравця A. Для визначеності ми будемо ототожнювати себе з гравцем A і розглядати кожен хід із позиції виграшу цього гравця. Під виграшем a_{ij} може розумітися як дійсний виграш, так і програш (наприклад, програш може виступати як негативний виграш). Набір виграшів atj для різних значень i і j розташовують у вигляді матриці, рядки якої відповідають стратегіям гравця A, а стовпці - стратегіям гравця B (табл. 1.1). Це є платіжна матриця гри.

Табл. 1.1. Платіжна матриця гри

Стратегія	B_1	B_2	...	B_n	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_1
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m
$\beta_i = \max\limits_j a_{ij}$	β_1	β_2	...	β_n	

Принцип мінімаксу. Таким чином, задати гру - це задати m стратегій гравця A, n стратегій гравця B і для пар A_iB_j - задати виграш a_{ij}. Усі елементи a_{ij} можна збільшити на одне й те саме число, щоб усі вони стали невід'ємними. Отримана при цьому матриця буде еквівалентна вихідній. Вибір оптимальної стратегії для гравця A - це вибір стратегії A_i, яка забезпечує йому максимально можливий виграш незалежно від стратегії гравця B. Гравець A припускає, що мінімальний виграш, який він отримає за стратегії A_j, - це мінімальне число в i-му рядку. Гравець B відповідає стратегією, яка мінімізує його програш. З точки зору гравця A йому необхідно вибрати таку стратегіюA_i, яка максимізує *мінімально можливий виграш* $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ - *максимінна стратегія (максимін).* Величину α називають ще нижньою ціною гри. Менше ніж а гравець A виграти не може. Для гравця B оптимальна стратегія та, за якої максимальний можливий виграш гравця доводиться найменшим і в будь-якому випадку не перевищує $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$. Величина β називається *мінімаксом*, або *верхньою ціною гри.* Усі параметри гри заносяться у платіжну матрицю гри (див. табл. 1.1). Максимінна стратегія гравця А, так само як і мінімаксна стратегія гравця В, є найбільш обережною перестрахувальною стратегією, але вона гарантує гравцеві В, що максимальний можливий виграш гравця А виявиться найменшим і в будь-якому випадку не перевершить мінімаксу, або, інакше, верхньої ціни гри. Так само за будь-якої поведінки гравця В гравцеві А гарантовано мінімально можливий виграш (найбільший порівняно з з іншими стратегіями) не менший за нижню ціну гри (максимі- на). Принцип обережності, що диктує гравцям вибір таких стратегій, називається *принципом мінімаксу.*

Приклад. Розглянемо таку гру. Гравці A і B одночасно і незалежно один від одного записують кожен одне з трьох чисел: або 1, або 2, або 3. Якщо сума записаних чисел виявляється парною, то гравець B платить гравцеві A цю суму; якщо ж сума чисел виявляється непарною, то цю суму виплачує гравець A гравцеві B. У гравця A три стратегії: A_1 - записати 1, A_2 - записати 2, A_3 - записати 3 Стратегії гравця B аналогічні. Розглянута гра є гра 3 x 3, її платіжна матриця має 3 рядки і 3 стовпці. Ця матриця подано в табл. 1.2.

Табл. 1.2. Редукована платіжна матриця

Стратегія	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Зауважимо, що виграш гравця A, що дорівнює, наприклад - 3, означає насправді його програш, оскільки в цьому випадку гравець A виплачує 3 копійки гравцеві B.

У матриці (див. табл. 1.2) одні елементи є позитивними, а інші - від'ємними. Щоб усі елементи платіжної матриці були додатними, збільшимо кожен елемент матриці, що розглядається, на одне й те саме число, наприклад на 6. Отримаємо матрицю, подану в табл 1.3. З точки зору аналізу оптимальних стратегій ця матриця еквівалентна вихідній, але верхня і нижня ціни гри збільшаться на 6. Будемо аналізувати гру лізувати гру, застосовуючи принцип мінімаксу і використовуючи платіжну матрицю, подану в табл. 1.3.

Табл. 1.3. Початкова платіжна матриця

Стратегія	B1	B2	B3	α_i
A1	8	3	10	3
A2	3	10	1	1
A3	10	1	12	1
β_j	10	10	12	

Припустимо, що гравець А вибирає стратегію A_1. Тоді в залежності від того, яку стратегію обере противник, наш виграш дорівнюватиме або 8, або 3, або 10. Отже, обираючи стратегію A_1, ми в гіршому випадку отримуємо виграш 3. Якщо ж ми обираємо стратегію A_2 або стратегію A_3, то матимемо в найгіршому випадку виграш 1. Запишемо мінімально можливі виграші для різних стратегій A_i у крайньому правому стовпчику платіжної матриці (див. табл. 1.3). Зрозуміло, що слід вибирати ту стратегію, де мінімально можливий виграш виявляється найбільшим (у порівняно з іншими стратегіями). У цьому випадку це стратегія A_1. Виграш 3 є максимальним у трійці мінімальних виграшів (у трійці 3, 1, 1). Таким чином, отримано максимінний виграш (максимін) - нижня ціна гри.

Отже, якщо обираємо максимінну стратегію (у даному випадку це стратегія A_1), то за будь-якої поведінки противника нам гарантовано виграш не менший за нижню ціну гри (у цьому випадку він дорівнює 3).

Аналогічним чином міркує противник. Якщо він обере стратегію B_1, то в найгіршому для себе випадку дозволить нам отримати виграш 10. Те саме можна сказати і про стратегію B_2. При виборі стратегії B_3 найгірший (для противника) випадок відповідає нашому виграшу, що дорівнює 12. Числа 10,10,12 - максимальні значення наших виграшів, що відповідають стратегіям противника B_1, B_2, B_3 відповідно. Випишемо ці значення в нижній рядок платіжної матриці (див. табл. 1.3). Зрозуміло, що противник повинен вибрати ту стратегію, де максимальний можливий виграш у гравця A виявляється найменшим. Це або стратегія B_1, або B_2. Обидві стратегії є мінімаксними, обидві вони дають противнику гарантію, що виграш гравця A у будь-якому разі не перевищить мінімаксу, або, інакше, верхньої ціни гри, що дорівнює в даному випадку 10. У противника дві мінімаксні стратегії - B_1 і B_2. Яку він найімовірніше вибере?

Вважаючи, що ми проявили обережність і вибрали максимінну стратегію A_1, він, можливо, не стане вибирати стратегію B_1, оскільки при цьому ми отримали б виграш 8. Отже, найімовірніше він вибере стратегію B_2, тоді наш виграш буде дорівнюватиме 3. Але якщо ми правильно зрозуміли задуми противника, то чи не слід нам ризикнути і вибрати стратегію A_2? Адже при виборі противником стратегії B_2 наша стратегія A_2 дозволить нам отримати виграш 10. Однак наш відступ від принципупа мінімаксу може дорого нам обійтися. Якщо противник виявиться досить хитромудрим і зробить такі ж міркування, то він може відповісти на нашу стратегію A_2 не стратегією B_2, а стратегією B_3 І тоді замість виграшу 10, ми отримаємо виграш усього лише 1.

Гра із сідловою точкою. Теорія ігор не завжди рекомендує застосовувати мінімаксні (максимінні) стратегії. Це залежить від того, чи має платіжна матриця гри сідлову точку. Розглянемо деяку гру, в якій максимінний і мінімаксний виграші рівні, тобто нижня і верхня ціни гри збігаються: $\alpha = \beta$ Виграш є одночасно і максимінним із мінімальних виграшів для гравця A, і мінімальним із максимальних виграшів для гравця B. Точка на поверхні, що є одночасно точкою мінімуму по одній осі координат і точкою максимуму за іншою віссю, називають сідловою. Відповідний елемент a_{ij} (або β) платіжної матриці гри називають сідловою точкою (сідловим елементом) матриці. Про гру кажуть, що вона має сідлову точку. У такій ситуації кожен із гравців повинен дотримуватися максимінної (мінімаксної) стратегії. Будь-яке відхилення від цієї стратегії буде невигідним для гравця, який допустив відхилення. Якщо ж гра не має сідлової точки (див. табл. 1.3), то жодна зі стратегій

A_i або B_j. не є оптимальною. Чисті стратегії не дають стійкості.

Табл. 1.4. Платіжна матриця із сідловою точкою

Стратегія	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	2	3	7	2
A_2	5	4	6	4
A_3	6	2	1	1
β_j	6	4	7	

Приклад. Розглянемо деяку гру 3х3, платіжна матриця якої наведена в табл. 1.4. Тут максимінний і мінімаксний виграші дорівнюють 4 (верхня та нижня ціни гри збігаються). Виграш 4 є одночасно і максимальним із мінімальних виграшів для стратегій $_1, _2, _3$ і мінімальним із максимальних виграшів для стратегій B_1, B_2, B_3. Елемент$a_2 2 = 4$ - сідлова точка матриці. Якщо подивитися на цю матрицю, то видно, що будь-яке відхилення від неї не вигідне для гравців. Мінімаксна (максимінна) стратегія є оптимальною в даному випадку.

4. Поиск оптимальной смешанной стратегии

Теорія ігор використовується для дослідження багаторазово повторюваних конфліктних ситуацій. І якщо гравці будуть від гри до грі дотримуватися однієї й тієї самої стратегії, рекомендованої принципом мінімаксу, то один із них може опинитися в найгіршій ситуації при раптовій зміні стратегії іншим гравцем. Проявляється загальне правило для ігор без сідлової точки: гравець, який грає за певною (детермінованою) стратегією, опиняється в гіршому становищі порівняно з гравцем, який змінює стратегію випадковим чином. Нехай гравці А і В багаторазово грають у гру, платіжна матриця якої наведена в табл. 4.7. Якщо гравець А обере певну стратегію, наприклад максимінну стратегію A_1, і буде дотримуватися її від гри до гри, то гравець В, зрозумівши це, буде обирати щоразу стратегію B_2. У результаті виграш гравця А дорівнюватиме 3. Однак якщо гравець А раптово змінить стратегію A_1 на стратегію A_2, то гравець А отримає виграш 10. Розгадавши стратегію гравця А, гравець В змінить стратегію B_2 на стратегію B_3, зменшивши виграш гравця А до 1.

Розглянемо загальний підхід до цієї проблеми. Нехай $A_1, A_2, ..., A_m$- можливі стратегії гравця А. Для отримання найбільшого ефекту гравець А повинен використовувати всі або деякі з цих стратегій випадковим чином із різними ймовірностями: стратегія A_i використовується з імовірністю p_i Кажуть, що гравець А застосовує *змішану стратегію* $S_A(p_1, p_2, ..., p_m)$. На відміну від змішаних стратегій S_A стратегії A_i, як уже зазначалося, називають чистими. За належного вибору ймовірностей p_i, змішана стратегія може виявитися *оптимальною* (аналог сідлової точки). При цьому виграш гравця А буде не меншим за деяке значення v, званого ціною гри. Це значення більше нижньої ціни гри, але менше верхньої в принципі мінімаксу.

Аналогічним чином має поводитися і гравець В. Його оптимальна стратегія $S_B(q_1, q_2, ..., q_m)$,де q_j - спеціально підібрані ймовірності, з якими гравець В використовує стратегії $B_j, j = 1, 2, ..., n$. Щоб отримати оптимальну змішану стратегію, потрібно знайти відповідні ймовірності $p_i, i = 1, 2, ..., m i q_j, j = 1, 2, ..., n$ а також визначити ціну гри v. Припустимо, що гравець В вибирає чисту стратегію $_j$. Тоді середній виграш гравця А дорівнюватиме $\sum_i a_{ij} p_i$ Цей виграш має бути не меншим ціни гри v, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq v; j = 1, 2, ..., n. \quad (1)$$

При цьому

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \quad (2)$$

Введемо позначення $x_i = p_i/v; i = 1, 2, ..., m$, і перепишемо (1), (2) у вигляді

$$\sum_{i}^{m} a_{ij}x_i \geq 1; i = 1, 2, ..., m; \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{,} x_i = 1/v. \qquad (4)$$

Ціна гри v має бути якомога більшою, отже, $1/v$ має бути якомога меншою. Таким чином, пошук оптимальної змішаної стратегії звівся до розв'язання задачі лінійного програмування (ЗЛП): знайти невід'ємні величини $x_i, i = 1, 2, ..., m$, такі, щоб вони задовольняли нерівностям (3) і при цьому зводили в мінімум суму (цільову функцію) $\sum_{i=1}^{m} x_i$. Звідси сформулюємо наступну теорему.

Теорема 1. *Щоб стратегія p^*, q^* була оптимальною необхідно і достатньо виконати умови:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* \geq v; \qquad \sum_{j=1}^{n} \leq v$$

при

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Чиста стратегія, яка входить у змішану зі значенням імовірності більше нуля, називається активною.

Теорема 2. *Якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри незалежно від стратегії іншого гравця, якщо тільки він не виходить за межі активних стратегій.*

Розв'язання матричних ігор розмірністю m x n. У процедурі розв'язання матричних ігор насамперед треба перевірити, чи є сідлова точка в платіжній матриці гри:

1) якщо сідлова точка є, то оптимальне рішення досягається в чистих стратегіях: рішення гри - $(^*_i, ^*_j, v)$;

2) якщо сідлової точки немає, то оптимальне рішення досягається у змішаних стратегіях. Попередньо слід спробувати спростити завдання:

а) прибрати дублюючі та домінуючі стратегії. Якщо в платіжній матриці для двох рядків елементи a_{kj} не менші за елементи $a_{sj}(a_{kj}) \geq a_{sj}$, і хоча б один елемент k-го рядка строго більший за відповідного елемента s-го рядка, то для гравця A стратегія A_K краща за стратегію A_S. Стратегія A_K називається домінуючою, стратегія A_S - домінуюча, її можна видалити (у змішаній стратегії отримаємо ймовірність для цієї стратегії, що дорівнює нулю). Домінуюча стратегія свідомо невигідна. Аналогічно для стовпців: якщо відповідні елементи l-го і r-го стовпців $a_{il} \leq a_{ir}$ і хоча б один елемент 1-го стовпчика строго менший за відповідного елемента k-го стовпця, то стовпець B_l є домінуючим, r-й стовпець виключається. Стовпці та рядки, у яких відповідні елементи рівні, називаються дублюючими, і в платіжній матриці гри слід залишити тільки один рядок або один стовпець із дублюючих;

б) подивитися, чи не можна зменшити число стратегій шляхом заміни груп чистих стратегій змішаними;

в) спростити платіжну матрицю, додавши до всіх елементів матриці деяке число. При цьому ціна гри збільшиться на це число, а оптимальна стратегія не зміниться.

Якщо платіжна матриця гри має розмірність $2 \times n$ або $m \times 2$, то використовуються методи розв'язання гри 2×2.

За умовою теореми про мінімакс будь-яка матрична гра тх п має оптимальне розв'язання, що належить області змішаних стратегій. Оптимальні стратегії (p^*, q^*) утворюють сідлову точку платіжної матриці і також є мінімаксними. Вирішити матричну гру - це означає отримати (p^*, q^*, v).

Алгоритм розв'язання визначається необхідною і достатньою умовами оптимальності.

1. Знайдемо оптимальну стратегію для гравця B: імовірності гіпо-

тез дорівнюють $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$; обмеження $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \leq v; i = 1, 2, ...m.$ Застосовуючи таку стратегію, гравець В за будь-якої чистої стратегії гравця А не програє більше v; за оптимальної стратегії гравця А програш гравця В дорівнює v. Сформулюємо задачу як задачу лінійного програмування: введемо змінні

$y_j = q_j/v$l $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1/j$, тобто отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \to \max;$$
$$\sum_{j=1} *na_{ij}q_j \leq 1; i = 1, 2, ..., m;$$
$$y_j \geq 0; j = 1, 2, ..., n.$$

Застосовуючи симплекс-метод, знайдемо значення y^*; $\quad v = 1/\sum_{j=1}^{n} y_j$.

2. визначимо оптимальну стратегію гравця А Ця стратегія повинна забезпечити йому виграш не менше v за будь-якої стратегії гравця В і рівний упри оптимальній стратегії гравця В. З необхідної та достатньої умови випливає:

$$\sum_{i=1} *ma_{ij}p_i \geq v; j = 1, 2, ..., n;$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$$
$$p_i \geq 0; i = 1, 2, ..., m.$$

Тут p_i - ймовірність стратегії A_i Введемо нові змінні $x_i = p_i/v$, перейдемо до задачі лінійного програмування:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \to \min;$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i; j = 1, 2, ..., n;$$
$$x_i \geq 0; i = 1, 2, ..., m.$$

Розв'язуємо цю задачу також симплекс-методом. Таким чином, матричні ігри розмірністю $m \times n$ зводяться до розв'язання задач ліннійного програмування. У матричних іграх існування розв'язку ЗЛП забезпечено. Конкретні умови матричної гри зумовлюють вибір методу розв'язання ЗЛП.

Приклад. Розглянемо гру з платіжною матрицею А:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Для гравця В маємо

$y_1 + y_2 + y_3 \to \max;$

$4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1;$

$2y_1 + 5y_2 \leq 1;$

$5y_2 + 5y_3 \leq 1;$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$

Результати розв'язання цієї задачі для гравця В будуть такими:

$y^* = (9/88; 14/88; 12/88);$

$y_{\max} = \sum_{j=1}^{3} y_j = 35/88; v = 1/y_{\max} = 88/35.$

$q^* = (9/35; 14/35; 12/35).$

Для гравця А:

$x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$

$4x_1 + 2x_2 \geq 1;$

$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 1;$

$2x_1 + 5x)3 \geq 1;$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0;$

Розв'язання: $p^* = (19/35; 6/35; 10/35).$

У розглянутому прикладі всі три стратегії гравців виявилися активними. Гра, у якій усі стратегії активні, *називається повністю усередненою.*

Загальний метод розв'язання ігор $m \times n$ - зведення до ЗЛП - не завжди виявляється найпростішим. У низці випадків, особливо за малої розмірності задач, вдається розв'язати гру простішими методами, якщо заздалегідь визначити, які стратегії є активними. Наприклад, для випадку повністю усередненої гри з квадратною матрицею ($m = n$) нерівності (1.3) перетворіються у рівності, тобто отримаємо системи m лінійних рівнянь з m невідомими x_i або y_i відповідно, $i = 1, 2, ..., m$. Розв'язуючи їх, знайдемо позитивні значення x_i, або y_i, ціну гри v і ймовірності p_i, в оптимальної змішаної стратегії $S_A^* : p_i = vx_i; i = 1, 2, ..., m$. Так, у цьому прикладі, замінивши нерівності на рівності, можна

безпосередньо отримати $2q_1^* + 5q_2^* = v$. У змішаних стратегіях матричних ігор розмірністю $m \times n$ можуть бути присутніми стратегії з імовірністю, що дорівнює нулю. Число активних стратегій у такому разі не перевищує $\min(w, n)$. Оптимальна стратегія знаходиться за допомогою розв'язання відповідної системи рівнянь. Нехай вектор p містить r імовірностей, відмінних від нуля, а вектор q — s таких імовірностей. Тоді

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = \sum_{j=1}^{s} q_j; \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq v;$$

$$v = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^* = \sum_{j=1}^{s} q_j^* \sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq \sum_{j=1}^{s} q_j^* v.$$

Звідси випливає, що, якщо гравець не виходить за межі активних стратегій, то для отримання оптимальної стратегії достатньо розв'язати наведену систему рівнянь.

Найпростіше змішана оптимальна стратегія знаходиться для гри з платіжною матрицею 2x2. Розглянемо матрицю (див. табл. 1.5.), у якій немає сідлової точки. Якщо сідлова точка є, то рішення очевидне. Визначимо оптимальну змішану стратататегію для цього випадку, тобто знайдемо $S_A^* = (p_1^*, p_2^*); S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$ і ціну гри v.

Табл. 1.5. Платіжна матриця

	B_1	B_2
A_1	2	3
A_2	5	4

Нехай гравець В використовує стратегію B_1, тоді ціна гри $v = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$; для стратегії $B_2 - v = a_{12}p_1 + a_{22}p_2; p_1 + p_2 = 1$. Для стратегій $A_1 i A_2$ відповідно маємо: $v = a_{11}q_1 + a_{12}q_2; \quad v = a_21q_1 + a_22q_2;$. Розв'язавши ці системи рівнянь, отримаємо

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Розв'язанню ігор розмірності $2 \times 2; 2 \times n; m \times 2$ можна дати геометричну інтерпретацію. Розглянемо розв'язання гри з платіжною матрицею розмірності $2 \times n$, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \end{pmatrix}$$

Ціна гри з позиції гравця А

$$v(p) = \min_j(a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2); p_1 = 1 - p_2; v(p_2) = \min_j[(a_{2j} - a_{1j})p_2 + a_{1j}],$$

Завдання гравця А полягає в тому, щоб максимізувати $v(p) = \min[(a_{21} - -a_{11})p_2 + a_1; (a_{22} - a_{12}p_2 + a_{12})]$. При $p_2 = 0, v(p_2) = v(p_2) = \min_j a_{1j};$, при $p_2 = 1, v(p_2) = \min_j a_{2j}; j = 1, 2, ..., n$.

Діаграма для ціни гри 2×2 з позиції гравця А зображена на рис. 1.1

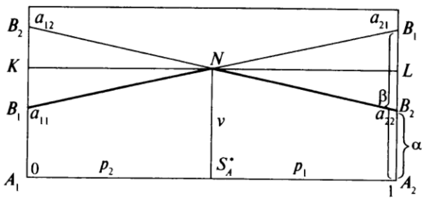

Рис. 1.1. Діаграма для ціни гри 2×2 з позиції гравця А

По осі абсцис відкладемо відрізок довжиною, що дорівнює одиниці. Лівий край із координатою 0 відображатиме стратегію Av правий - стратегію $_2$. На вертикальних лініях, що виходять із нуля та одиниці, будемо відкладати виграші гравців А і В відповідно за стратегій B_1 і

B_2, тобто на лівій лінії відкладемо значення a_{11} і a_{12}, на правій - a_{21} і a_{22}. Точки на вертикальних лініях, що відповідають одній стратегії $B_j, j = 1, 2$, з'єднаємо прямими лініями - *лініями виграшу.* У більшості випадків ці прямі перетинаються в точці N. Абсциса точки Оділить одиничний відрізок пропорційно ймовірностям p_1 і p_1, а ордината точки N - це ціна гри v. На діаграмі позначені α і β - нижня і верхня ціни гри. Оскільки стратегія S_A^* вимагає, щоб мінімальний виграш гравця А обертався в максимум, то будуємо нижню межу виграшу, позначену жирною лінією. Лінії виграшу можуть не перетинатися. Це означає, що у гравця В є свідомо невигідна стратегія. Однак якщо у гравця А є свідомо вигідна одна зі стратегій, то формальний аналіз перетину ліній виграшу може призвести до помилки. Щоб уникнути помилки, треба попередньо виключити завідомо невигідні стратегії гравця А.

Для гравця В ціна гри $v(q) = \max\limits_i(a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2); \quad q_1 = 1 - q_2;$ $v(q_2) = \max\limits_i[(a_{i2} - (a_{i1})q_2 + (a_{i1}]$. Гравцю В необхідно мінімізувати $v(p) = \max[(a_{12} - (a_{11})q_2 + a_{11}; (a_{22} - a_{21})q_2 + a_{21}]$.

Оптимальну стратегію гравця Я можна визначити за рис. 1.1: $q_1 = KB_2/(KB_1 + KB_2); q_2 = LB_2/(LB_1 + LB_2)$. Але простіше це зробити безпосередньо, побудувавши для гравця В аналогічну діаграму і зазначивши на ній мінімум верхньої межі виграшу (рис. 1.2).

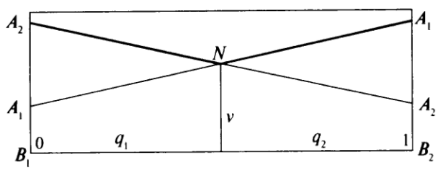

Рис. 1.2. Діаграма для ціни гри 2×2 з позиції гравця В

Оскільки у будь-якої кінцевої гри $m \times n$ існує рішення, в якому число активних стратегій кожної сторони не перевершує найменшого з чисел m і n, то у гри $2 \times n$ завжди є рішення, де з кожного боку беруть участь не більше двох активних стратегій. Тому для розв'язання гри $2 \times n$ будується геометрична інтерпретація гри і шукається пара стратегій, що перетинаються в точці N (рис. 1.3). Якщо в точці N перетинаються більше двох стратегій, то з них береться будь-яка пара і шукається максимум на *нижній межі* виграшу.

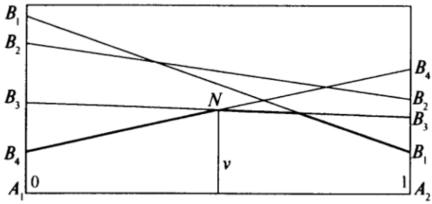

Рис. 1.3. Діаграма для ціни гри $2 \times n$ з позиції гравця A

Для гри $m \times 2$ будується така сама діаграма, в якій шукається мінімум на верхній межі виграшу.

Приклад. Знайдемо оптимальну змішану стратегію для конкретної гри. Припустимо, що сторона A нападає на сторону B. У сторони A є два літаки, що несуть вражаючі засоби. У сторони B є чотири зенітки, що захищають об'єкт. Щоб об'єкт виявився зруйнованим, достатньо, щоб до нього прорвався хоча б один літак. Для підходу до об'єкта літаки можуть вибрати будь-який із чотирьох повітряних коридорів. Сторона A може послати обидва літаки в одному і тому ж коридорі або направити їх різними коридорами. Сторона B може розмістити свої чотири зенітки в межах розглянутих коридорів різними способами. Кожна зенітка може зробити тільки один постріл. Цей постріл з достовірністю вражає літак, якщо той опинився в цьому коридорі.

У сторони A є дві чисті стратегії: A_1 - літаки посилаються в різних повітряних коридорах (байдуже, яких саме), A_2 - обидва літаки посилаються в якомусь одному з коридорів. Можливі стратегії сторони B такі: B_1 - поставити по зенітці на кожен коридор; B_2 - поставити по дві зенітки у будь-яких двох коридорах (інші два коридори залишаються неохоронюваними); B_3 - поставити дві зенітки в одному з коридорів і по одній зенітці ще у два коридори; B_4 - поставити три зенітки в одному з коридорів і одну зенітку ще в один коридор; B_5 - поставити всі чотири зенітки в одному з коридорів. Стратегії B_4 і B_5 свідомо невигідні хоча б тому, що три, а тим більше чотири зенітки в межах одного коридору не потрібні, оскільки у сторони А всього два літаки. Тому обмежимося стратегіями B_1, B_2, B_3.

Припустимо, що сторона А обрала стратегію A_1, а сторона В - стратегію B_1. Ясно, що тоді жоден літак не прорветься до об'єкта - виграш сторони А буде нульовим ($a_{11} = 0$). Нехай обрано стратегії A_1 і B_2. Припустимо при цьому, що зенітки знаходяться в коридорах I і II. Літаки летять у різних коридорах, причому рівноймовірні такі шість варіантів: вони летять у коридорах I і II, I і III, I і IV, у II і III, в II і IV, у II і IV, у III і VI. Тільки в одному із зазначених шести випадків жоден із літаків не прорветься до об'єкта (коли вони летять у коридорах I і II). Які б два коридори не вибирала сторона В для розміщення для пар зеніток, завжди у літаків будуть шість рівноймовірних варіантів і тільки один із них програшний. Таким чином, під час виборі стратегій A_1 і B_2 ймовірний виграш сторони А становитиме $5/6 (a_{12} = 5/6)$.

Міркуючи подібним чином, неважко знайти інші елементи платіжної матриці даної гри. Матриця, представлена в табл. ххх,- це матриця 2x3.

Табл. 1.6. Платіжна матриця

	B1	B2	B3	α_i
A1	0	5/6	1/2	0
A2	1	4	3/4	1/2
β_j	1	5/6	3/4	

Зауважимо, що елементи матриці - *імовірнісні* виграші; тут уже чисті стратегії містять у собі випадковість. Нижня ціна гри дорівнює 1/2, верхня - 3/4. Максимінна стратегія є A_2, мінімінна - B_3 Сідлової точки немає, оптимальне рішення гри лежить в області змішаних стратегій. Щоб знайти оптимальну змішану стратегію, скористаємося видом платіжної матриці та співвідношеннями (3) і (4). В цьому випадку ці співвідношення набувають вигляду:

$$x_2 \geq 1; \frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 1; \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \geq 1; \tag{5}$$

$$x_1 + x_2 = 1/v. \tag{6}$$

Рішення, що відповідає *оптимальній змішаній стратегії*, має вигляд $x_1 = 3/5, x_2 = 1$. Звідси знаходимо: $p_1 = 3/8, p_2 = 5/8$.Отже, оптимальна змішана стратегія сторони А передбачає використання стратегії A_1 з імовірністю 3/8 і стратегії A_2 - з імовірністю 5/8.

Як скористатися цією рекомендацією на практиці? Якщо гра відбувається один раз, то стороні А слід, мабуть, обрати стратегію A_2, адже $p_2 > p1$. Якщо ця гра відбувається *багаторазово* (наприклад, стосовно багатьох об'єктів, що підлягають бомбардуванню) -N раз (N » 1), то в 3N/8 випадках сторона А повинна обрати стратегію A_1, а в 5N/8 випадках стратегію A_2.

При виборі стороною А оптимальної змішаної стратегії її середній виграш виявляється в межах між верхньою ціною гри, що дорівнює 3/4, і ціною гри $v = 5/8$. У разі нерозумної поведінки сторони В виграш сторони А може виявитися рівним верхній ціні гри (і навіть може стати більшим). Якщо ж сторона В у свою чергу дотримуватиметься оптимальної змішаної стратегії, то виграш сторони А дорівнюватиме ціні гри v. Оптимальна змішана стратегія сторони В зводиться до того, що ця сторона взагалі не застосовує стратегію B_3, стратегію B_1, використовує з імовірністю 1/4, а стратегію B_2 - з імовірністю 3/4. Недоцільність застосування стратегії B_3 видно з того, що пряма $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 1$ не належить області допустимих значень D системи (5). Для визначення ймовірностей, з якими мають використовуватися стратегії B_1 і $_2$, скористаємося вже знайденим значенням ціни гри ($v = 5/8$): $q_1 \cdot +(1 - q_1)\frac{5}{6} = \frac{5}{8}$. Звідси видно, що $q_1 = 1/4, q_2 = 1 - q_1 = 3/4$.

У практичних додатках часто немає необхідності знаходити точний розв'язок гри і мати справу із завданнями лінійного програмування великої розмірності, достатньо буває знайти наближене рішення, що забезпечує середній виграш, близький до ціни гри. Наприклад, якщо нижня і верхня ціни гри (α і β) близькі, то достатньо взяти чисті мінімаксні стратегії; якщо α і β не близькі, то можна скористатися *методом ітерацій.* Тут один із гравців, наприклад А, вибирає стратегію A_i, гравець і відповідає стратегією B_j, яка найменш вигідна для гравця А, тобто обертає виграш стратегії A_i в мінімум. Гравець А відповідає стратегією A_k, яка дає йому максимальний виграш за стратегії B_j, і т.д. Цей процес сходиться, але збіжність повільна. Але водночас складність методу практично не зростає зі збільшенням розмірності платіжної матриці.

Ми розглянули антагоністичні ігри двох осіб, тобто ігри, в яких інтереси сторін прямо протилежні. яких інтереси сторін прямо протилежні. Однак реальні завдання ухвалення рішення в умовах конфлікту характеризуються великим числом учасників і, як наслідок цього, неантагоністичністю конфліктної ситуації. Навіть для двох гравців їхні інтереси можуть перетинатися, що може призводити до ситуацій, взаємовигідних для обох гравців. Це призводить до вибору узгодженого рішення, що забезпечує збільшення виграшу обох гравців. Тому в неантогоністичних іграх розрізняють *безкоаліційну поведінку*, коли угоди між гравцями заборонені правилами, і кооперативну поведінку гравців, коли дозволяється кооперація типу вибору спільних стратегій і здійснення побічних платежів.

Узагальненням випадків, коли кількість ходів у грі стає нескінченним (континуум) і гравці мають можливість приймати рішення безперервно, є *диференціальні ігри.* Тут траєкторії руху гравців являють собою рішення систем звичайних диференціальних рівнянь, праві частини яких залежать від параметрів, що перебувають під контролем гравців. Розглядаються дві системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\dot{x} = f(x, u); \tag{7}$$

$$\dot{y} = g(y, v) \tag{8}$$

з початковими умовами x_0, y_0.

Гравець A (або B) починає рух із фазового стану x_0 (або y_0) і переміщується у фазовому просторі R^n згідно з (7) [або (8)], вибираючи в кожен момент часу значення параметра $u \in U$ (або $v \in V$) відповідно до своїх цілей і інформацією, доступною в кожному поточному стані.