ЗМІСТ

Розділ 1

Системи масового обслуговування

1. Моделі черг

Основи знань про черги, іноді звані теорією черги або теорією масового обслуговування, становлять важливу частину теорії управління виробництвом. Черги є звичайним явищем. Вони можуть носити форму очікування ремонту автомобілями в центрі автосервісу або очікування студентами консультації зі своїм професором. У табл. 1.1 перелічено деякі моделі черг.

Ситуація	Очікуючи в черзі	Процес обслуговування
Супермаркет	Покупці бакалійних товарів	Касир, що враховує покупки
Приймальня лікаря	Пацієнти	Лікування доктором і медсестрою
Комп'ютерна система	Програма, яка має бути виконана	Робота комп'ютерного процесора
Телефонна компанія	Абоненти	Замовлення на міжнародні переговори

Так само як дерева ухвалення рішень, лінійне програмування і рование і прогнозування, що становлять основу багатьох моделей. лей, розглянутих у цій книзі, моделі черг корисні як у сфері виробництва, так і у сфері обслуговування. Аналіз черг у термінах довжини черг, середнього часу очікування і інших чинників допомагає нам краще зрозуміти системи обслуговування. Очікування пацієнта в приймальні лікаря й очікування лагодження зламаного дриля в ремонтній майстерні мають багато спільного з точки зору управління виробництвом. Обидва ці процеси використовують людські ресурси та ресурси обладнання для отримання результатів виробничої діяльності (людей та обладнання) (людей і машин) у хороший стан.

Менеджер оцінює зміни, що виникають у витратах, пов'язаних із забезпеченням гарного обслуговування, і у витратах,пов'язаних з очікуванням у черзі клієнта або машини. він може запропонувати збільшити час очікування, якщо дотримується баланс між кількістю продажів і витратами на обслуговування покупців. Його завдання - організувати таке обслуговування, щоб покупець не пішов без покупки і, якщо купив, то не втратив би би бажання повернутися ще раз.

Одне з міркувань щодо вдосконалення засобів обслуговування ґрунтується на оцінці загальних очікуваних витрат, що розглядаються як сума очікуваних витрат. розглядаються як сума очікуваних витрат на обслуговування і витрат, пов'язаних з очікуванням у черзі.

Витрати на обслуговування зростають, якщо фірма прагне підвищити рівень обслуговування. Менеджер у деякому центрі обслуговування може змінювати його продуктивність, зберігаючи незмінними персонал і устаткування, за рахунок ліквідації нестандартних пунктів обслуговування або вкорочення надмірно довгих черг. Наприклад, у великих магазинах менеджер або завідувач відділу може, якщо це необхідно, виконувати роботу касирів високої кваліфікації. Для роботи в касах банків або аеропортів у години пік можуть залучатися додаткові співробітники.

Коли обслуговування поліпшується (тобто прискорюється), витрати, пов'язані з часом очікування в чергах, знижуються. Водночас продуктивність персоналу залежить від надійності роботи обладнання, тому витрати, пов'язані з очікуванням, можуть виникати як наслідок простоїв обладнання. Ці витрати можуть також вимірюватися втратами клієнтів унаслідок поганого обслуговування або довгих черг. У деяких системах обслуговування, наприклад у «Швидкій допомозі», витрати, пов'язані з тривалим обслуговуванням, можуть бути надзвичайно високими.

Характеристики систем масового обслуговуваня Розглянемо три елемента систем масово обслуговувавання:

1) поява заявок на вході у систему;

2) порядок проходження черги, чи власне система обслуговування;

3) засоби обслуговування.

Характеристики входу. Вхідне джереле, яке генерує надходження заявок у систему обслуговування, має три основні характеристики: число заявок на входів, режим надходження заявок у систему обслуговування і поведінка клієнтів

Число заявок на вході. Число заявок (розмір популяції) може вважатися або невизначеним (нескінченним), або обмеженим (кінцевим). Якщо число клієнтів, що поступили на вхід від початку процесу до будь-якого заданого моменту часу, є лише малою частиною потенційно можливо їх числа, популяції на вході розглядається як необмежена чи нескінченна.На практиці прикладами необмежених популяції можуть слугувати автомобілі, що проходять через пропускні пункти на швидкісних дорогах, покупці в супермаркcті. Багато моделей черг розглядають на вході такі необмежені популяції.

Режим надходження в систему. Клієнти приходять у систему обслуговування відповідно до певного графіка (наприклад, один пацієнт кожні п'ятнадцять хвилин, один студент на іспиті кожні півгодини) або з'являються випадковим чином. Надходження клієнтів вважаються випадковими, якщо вони незалежні один від одного і точно не передбачувані. Часто в задачах масового обслуговування кількість надходжень за одиницю часу може бути оцінена за допомогою розподілу ймовірностей, відомого як пуасонівський. За заданого темпу надходження (наприклад, два клієнти на годину або чотири вантажівки на хвилину) дискретний розподіл Пуассона описується такою формулою

$$p(x) = \frac{e^{-z} z^x}{x!} \text{ для } x = 0, 1, ...4,$$

де $p(x)$ - імовірність x заявок; x - кількість заявок за одиницю часу, 2 - середній темп надходження заявок; $e = 2,7183$ (основа натурального логарифма).

Відповідні ймовірності неважко визначити за допомогою таблиці пуасонівського розподілу. Якщо середній темп надходження заявок два клієнти на годину, то ймовірність того, що протягом години не буде жодної заявки, дорівнює 0,13, імовірність появи одного клієнта - близько 0,27, імовірність надходження двох заявок - близько 4,27, три клієнти протягом години можуть з'явитися з імовірністю 4,18, чотири - з імовірністю близько 0,09 тощо. Імовірність того, що буде 9 або більше заявок, близька до нуля. Імовірності появи клієнтів, зрозуміло, не завжди підкоряються пуасонівському розподілу (вони можуть мати якийсь інший розподіл), і для того, щоб переконатися, що пуасонівський розподіл може слугувати гарною апроксимацією, слід проводити попередні дослідження.

Поведінка клієнтів. Більшість моделей черг ґрунтується на припущенні, що кожен клієнт, який з'являється, обслуговується, тобто клієнт (людина або машина), що встав у чергу, чекає до тих пір, доки його не буде обслужено, і не переходить з однієї черги в іншу. Життя значно складніше. На практиці клієнти можуть покинути чергу тому, що вона виявилася занадто довгою. Може виникнути й інша ситуація - клієнти чекають своєї черги, але з якихось причин виходять необслугованими. Ці випадки також є предметом теорії масового обслуговування, проте тут не розглядаються.

Характеристики черги. Черга є другим компонентом систем масового обслуговування. Довжина черги може бути або обмеженою, або не обмеженою. Черга обмежена,якщо вона з якихось причин (наприклад, через фізичні обмеження) не може збільшуватися до нескінченності. Це може бути, наприклад, черга може бути, наприклад, черга в невелику перукарню, яка має обмежену кількість місць для перукарів, яка має обмежену кількість місць для очікування.

Розглянуті в цьому розділі моделі масового обслуговування виходять із припущення необмеженості довжини черги. Довжина черги не обмежена, якщо вона може включати в себе скільки завгодно клієнтів. Наприклад, черга автомобілів на бензозаправці.

Друга характеристика черг - дисципліна черги. Ця характеристика пов'язана з правилом, відповідно до якого обслуговуються клієнти. Більшість систем використовує правило: першим прийшов - першим пішов. У деяких випадках, наприклад, у приймальному покої лікарні, на додаток до цього правила можуть встановлюватися різні пріоритети. Пацієнт з інфарктом у критичному стані матиме пріоритет в обслуговуванні. У порівнянні з пацієнтом, який зламав палець, він матиме пріоритет в обслуговуванні. Порядок запуску комп'ютерних програм - інший приклад встановлення пріоритетів в обслуговуванні.

Характеристика засобів обслуговування. Третій компонент систем обслуговування - засоби обслуговування. Найбільший інтерес представляють їх наступні властивості: 1) конфігурація системи обслуговування; 2) часовий режим обслуговування.

Основні конфігурації систем масового обслуговування. Системи обслуговування часто класифікуються за кількістю каналів обслуговування (наприклад, за кількістю перукарів у перукарні) та за кількістю фаз обслуговування (етапів обслуговування одного клієнта). Прикладом одноканальної системи обслуговування можуть служити банк, де відкрито лише одне віконце для обслуговування клієнтів, або ресторан, який обслуговує клієнтів у автомобілях. Якщо ж у банку відкрито кілька віконець для обслуговування, і клієнт очікує у загальній черзі, то ми маємо справу з багатоканальною системою обслуговування. Більшість банків, так само як і поштові відділення та авіакаси, зараз є багатоканальними системами обслуговування.

Однофазовими є такі системи обслуговування, в яких клієнт обслуговується в одній точці (на одному робочому місці) і потім залишає систему. Ресторан для обслуговування автомобілістів, де офіціант отримує гроші і приносить замовлення в автомобіль, є прикладом однофазової системи. Те саме можна сказати про агентство, яке видає ліцензії на водіння, де агент проводить тестування і видає ліцензію. Однак, якщо в ресторані потрібно зробити замовлення в одному місці, оплатити його в іншому і отримати їжу в третьому, то ми маємо справу з багатофазовою системою обслуговування. Якщо агентство з видачі ліцензій на водіння досить велике, то можна почекати в черзі, щоб заповнити заяву, потім у іншому місці пройти професійний тест, і вже потім (третє місце обслуговування) оплатити послуги і отримати ліцензію.

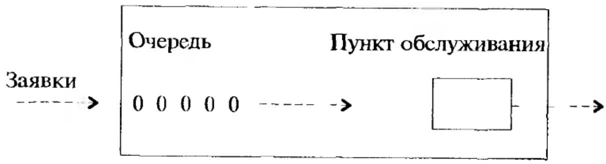

Рис. 1.1. Одноканальна однофазна система

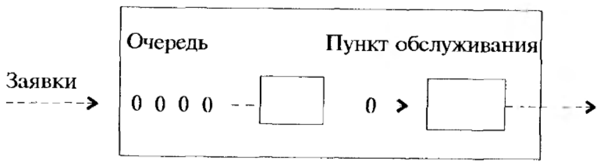

Рис. 1.2. Одноканальна двофазна система

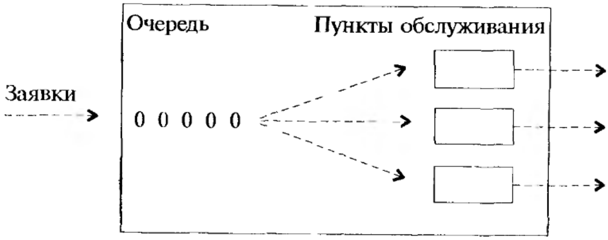

Рис. 1.3. Трьохканальна однофазна система

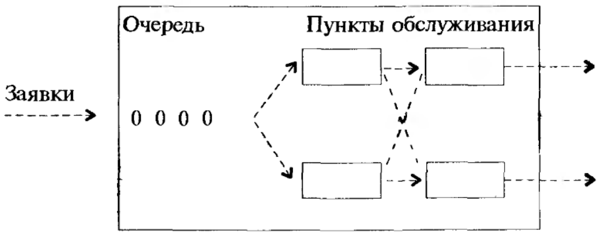

Рис. 1.4. Двоканальна двофазна система

Розподіл часу обслуговування. Режим обслуговування, так само як і режим надходження запитів, може бути або постійним, або випадковим. Якщо час обслуговування постійний, то незалежно від клієнта потрібний однаковий час для обслуговування, наприклад, автомобіля. Така ситуація може спостерігатися на автоматичній мийці автомобілів. Однак частіше зустрічаються ситуації, коли час обслуговування має випадковий розподіл. У багатьох випадках можна припустити, що час обслуговування підпорядковується експоненціальному розподілу. Це припущення зручно так само, як і припущення про пуассонівський розподіл числа надходжаючих запитів.

Параметри для оцінки черг. Моделі черг допомагають менеджеру приймати рішення, зв'язуючи витрати на обслуговування з витратами, пов'язаними з очікуванням. Найчастіше при оцінці вартості систем масового обслуговування використовуються такі параметри:

1) середній час, який клієнт проводить у черзі;

2) середня довжина черги;

3) середній час, який клієнт проводить у системі обслуговування (час очікування плюс час обслуговування);

4) середня кількість клієнтів у системі обслуговування;

5) ймовірність того, що система обслуговування залишиться не зайнятою;

6) параметр зайнятості системи;

7) ймовірність певної кількості клієнтів у системі.

1.1. Моделі систем масового обслуговування

Управлінням виробництвом можна користуватися різними моделями систем масового обслуговування. Опишемо чотири найпоширеніші в практиці моделі. Їх характеристики наведено в таблиці 1.2, а відповідні приклади подані у наступних розділах. Складніші моделі описуються в підручниках з теорії масового обслуговування. Моделі, які не піддаються аналітичному дослідженню, можуть бути побудовані на основі імітаційного підходу. Зверніть увагу на те, що всі чотири моделі, описані в таблиці 1.2, мають такі загальні характеристики:

1) пуассонівське розподіл надходження заявок;

2) правило обслуговування — FIFO (перший прийшов — перший обслужений);

3) єдина фаза обслуговування.

Табл. 1.1. Моделі систем масового обслуговування

Модель	Назва (з технічним найменуванням)	Приклад	Число каналів	Число фаз	Темп надходження заявок	Темп обслуговування	Число клієнтів	Порядок проходження черги
A	Проста система (M/M/I)	Довідне бюро в магазині	Один	Одна	Пуассоновський	Експоненційний	Необмежене	FIFO
B	Багатоканальна (M/M/S)	Каси МАУ	Декілька	Одна	Пуассоновський	Експоненційний	Необмежене	FIFO
C	Рівномірне обслуговування (M/D/I)	Автоматична автомийка	Один	Одна	Пуассоновський	Постійний	Необмежене	FIFO
D	Обмежена популяція	Літаки невеликої авіакомпанії	Один	Одна	Пуассоновський	Експоненційний	Обмежене	FIFO

Модель А: модель одноканальної системи масового обслуговування з пуассонівським вхідним потоком заявок і експоненціальним часом обслуговування.

Найбільш поширені задачі масового обслуговування із єдиним каналом. У цьому випадку клієнти формують єдину чергу, яка обслуговується одним робочим місцем. Припустимо, що для систем цього типу виконуються наступні умови.

1. Заявки обслуговуються за принципом "перший прийшов — перший обслужений"(FIFO), причому кожен клієнт очікує у своїй черзі до кінця незалежно від довжини черги.

2. Появлення заявок є незалежними подіями, проте середнє число заявок, які надходять за одиницю часу, залишається постійним.

3. Процес надходження заявок описується пуассонівським розподілом, причому заявки надходять з необмеженого набору.

4. Час обслуговування різний для різних клієнтів і незалежний один від одного, проте середній темп обслуговування відомий.

5. Час обслуговування описується експоненціальним розподілом ймовірностей. 6. Темп обслуговування перевищує темп надходження заявок.

Формули для опису моделі А: проста система M/M/I.

Число заявок за одиницю часу: z.

Число клієнтів, обслуговуваних за одиницю часу: b.

Середнє число клієнтів у системі $L_s = \dfrac{z}{b-z}$.

Середній час обслуговування одного клієнта в системі: $W_s = \dfrac{I}{b-z}$ (час очікування + час обслуговування)

Середнє число клієнтів у черзі: $L_q = \dfrac{z^2}{b(b-z)}$.

Середній час очікування клієнта в черзі: $W_q = \dfrac{z}{b(b-z)}$.

Параметр утилізації (завантаженість системи): $I = \dfrac{z}{b}$.

Вірогідність відсутності заявок у системі: $p_0 = I - \dfrac{z}{b}$.

Вірогідність більш ніж k заявок у системі: $p_{n>k} = (z/b)^{k+1}$ (n - число заявок у системі).

Якщо ці умови виконуються, то система масового обслуговування описується рівняннями, наведеними вище. Приклади 1 і 2 показують, як може бути використана модель А (технічна назва M/M/I).

Приклад 1. Василенко, механік магазину, може замінити масло в середньому в трьох автомобілях протягом 1 години (тобто в середньому на одному автомобілі за 20 хвилин). Час обслуговування підпорядковується експоненційному закону. Клієнти, які потребують цієї послуги, приїжджають в середньому по два в годину, відповідно до розподілу Пуассона. Клієнти обслуговуються у порідку прибуття і їх кількість не доведено.

На основі цих даних, ми можемо отримати основні характеристики цієї системи обслуговування:

$z = 2$ машини поступають в час;

$b = 3$ машини обслуговуються в час

$L_s = \dfrac{z}{b-z} = \dfrac{2}{3-2} = 2$ машини в середньому в системі;

$W_s = \dfrac{1}{b-z} = \dfrac{1}{3-2} = 1$ - середній час очікування в системі;

$L_q = \dfrac{z^2}{b(b-z)} = \dfrac{2^2}{3(3-2)} = \dfrac{4}{3} = 1,33$ машини в середньому очікує в черзі;

$W_q = \dfrac{z}{b(b-z)} = \dfrac{2}{3(3-2)} = \dfrac{2}{3} = 40$ хв - середній час очікування в черзі;

$r = \dfrac{z}{b} = \dfrac{2}{3} = 66,6\%$ відсотків часу механік зайнятий;

$p_0 = 1 - \dfrac{z}{b} = 1 - \dfrac{2}{3} = 0,33$ - вірогідність того, що в системі немає ні одного клієнта.

Вірогідності більше, ніж k машин у системі.

Після отримання основних характеристик системи обслуговування часто буває корисно провести її економічний аналіз. Зокрема, порівняти зростаючі витрати на поліпшення обслуговування та зниження витрат,

k	$p_{n>k} = (2/3)^{k+t}$	
0	0,067	- зверніть увагу, що це значення дорівнює $1 - p_0 = 1 - 0,33$
1	0,444	
2	0,269	
3	0,198	- означає, що існує 19.8 шансів того, що в систем знаходиться більше трьом машин
4	0,132	
5	0,088	
6	0,058	
7	0,039	

пов'язаних з очікуванням. Розглянемо ці витрати у контексті прикладу 1.

Приклад 2. Власник автосервісу встановив, що витрати, пов'язані з очікуванням, виражаються у зменшенні попиту через незадоволення клієнтів і становлять 10 тис. грн. за годину очікування в черзі. Оскільки в середньому кожна машина очікує в черзі 2/3 години W_q і на обслуговування днями проходить приблизно шістнадцять машин (дві машини на годину протягом восьмигодинного робочого дня), загальна кількість годин, які проводять у черзі всі клієнти, дорівнює

$$2/3 \cdot 16 = \frac{32}{3} = 10\ 2/3 \text{ год.}$$

Відповідно, затрати, пов'язані з очікуванням, дорівнюють

$$10(10 \cdot 2/3) \text{ тис. грн. в день.}$$

Друга важлива складова затрат власника автосервіса - заплата механіка Василенка. Він отримує 7 тис. грн. в час, або 56 тис. грн. в день. Відповідно, загальні витрати складають:

$$107 + 56 = 163 \text{ тис. грн. в день.}$$

Модель B. Багатоканальна ситсема обслуговування M/M/S. У багатоканальній системі обслуговування клієнтів відкриті два або більше канали. Передбачається, що клієнти очікують в загальній черзі і звертаються до першого вільного каналу обслуговування.

Прикладом такої багатоканальної однофазової системи можна побачити у багатьох банках. Зі загальної черги клієнти звертаються до першого вільного вікна для обслуговування.

У багатоканальній системі потік заявок підкоряється закону Пуассона, а час обслуговування — експоненційному. Прийшовши першим, обслуговується першим, і всі канали обслуговування працюють з однаковою швидкістю. Формули, які описують модель M/M/S (технічна назва), досить складні для використання. Для розрахунку параметрів багатоканальної системи обслуговування зручно використовувати відповідне програмне забезпечення.

Модель C. Модель з постійним часом обслуговування M/D/I. Деякі системи мають постійний, а не експоненціально розподілений час обслуговування. У таких системах клієнти обслуговуються протягом фіксованого періоду часу, як, наприклад, на автоматичній мийці автомобілів. Для моделі C з постійною швидкістю обслуговування значення величин L_q,W_q,L_s і W_sменше, ніж відповідні значення в моделі A, яка має змінну швидкість обслуговування. Формули, що описують модель C, наведені в таблиці. У літературі з теорії черг модель C має технічну назву M/D/I.

Формули для опису моделі C з постійним часом обслуговування M/D/I.

Середня довжина черги: $L_q = \dfrac{z^2}{2b(b-z)}$.

Середній час очікування в черзі: $W_q = \dfrac{z}{2b(b-z)}$.

Середнє число клієнтів у системі: $L_s = L_q + \dfrac{z}{b}$.

Середній час очікування у системі: $W_s = W_q + \dfrac{1}{b}$.

Приклад 3. Компанія "Утиль"збирає та утилізує алюмінієві відходи та скляні пляшки у Броварах. Водії автомобілів, які доставляють сировину для вторинної переробки, очікують у черзі на розвантаження в середньому 15 хвилин. Час простою водія та автомобіля оцінюється в 60 тис. грн за годину. Новий автоматичний компактор може обслуговувати контейнеровози з постійним темпом 12 машин на годину (5 хвилин на одну машину). Час прибуття контейнеровозів підпорядковується закону Пуассона з параметром $z = 8$ на годину. Якщо буде використовуватись новий компактор, то амортизаційні витрати складуть 3 тис. грн на один контейнеровоз. Фірма запросила студента, який провів наступний аналіз для оцінки доцільності використання компактора.

Затрати в теперішній час (1/4 год. очікування)×(60 тис. грн./ч) = = 15 тис. грн./поїздка.

Нова система: $z = 8$ автомобілів/год прибувають;
$b = 12$ автомобілів/год обслуговуються.

Середній час очікування в черзі:

$$W_1 = \frac{z}{2b(b-z)} = \frac{8}{2(12)(12-8)} = \frac{1}{12} \text{ год.}$$

Затрати з новим компактором:
(1/12 год. очікування)×(60 тис. грн./ч) = 5 тис. грн./поїздка.

Дохід при новому обладнанні:
15 (існуюча система) - 5 (нова система) = 10 тис. грн./поїздка.

Амортизаційні витрати: 3 тис. грн. /поїздка.

Чистий дохід: 7 тис. грн. /поїздка.

Модель Д: модель з обмеженою популяцією

Якщо кількість потенційних клієнтів системи обслуговування обмежена, ми маємо справу зі спеціальною моделлю. Така ситуація може виникнути, наприклад, якщо мова йде про обслуговування обладнання фабрики з п'ятьма верстатами; обслуговування 10 літаків авіакомпанії; обслуговування хворих у стаціонарі, який має двадцять ліжок.

Особливість цієї моделі порівняно з трьома розглянутими раніше полягає в тому, що існує взаємозалежність між довжиною черги та темпом надходження заявок. Щоб це продемонструвати, розглянемо крайній випадок. Якщо на фабриці є п'ять верстатів, і всі вони зламалися й чекають на ремонт, то темп появи нових машин (понад п'ять) для обслуговування дорівнює нулю. Загалом, чим довша черга на обслуговування, тим нижче темп надходження нових заявок. Для розрахунку параметрів багатоканальної системи обслуговування пропонується використовувати програмне забезпечення AB:POM.