ЗМІСТ

Розділ 1

Розподіл ресурсів за часом. Оптимальне регулювання запасів

1. Задачі

1.1. Задача №1

Постановка задачі. Планується виробництво однорідного продукту для задоволення потреб, що змінюються з часом. Весь річний період розділено на n періодів. Потреби в продукті в i-му періоді складають b_i. Також відомі витрати на виробництво додаткової одиниці продукту (a грн.) та на зберігання тієї ж самої одиниці протягом одного періоду (c грн.). Скласти оптимальний графік виробництва за періодами, мінімізуючи загальні витрати.

Розв'язання. Позначимо через $x_i \geq 0$ виробництво за i-й період, а через u_i запаси, які формуються в кінці i-го періоду за рахунок перевищення накопиченого виробництва, починаючи з 1-го періоду до даного, над накопиченим витратами.

Нехай на початку планованого періоду виробництво складає x_0 одиниць.

Середній розмір запасів, які зберігаються протягом i-го періоду, складе $1/2(u_{i-1} + u_i)$. Тому витрати на зберігання протягом всього планованого періоду складуть

$$z_{xp} = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{n} (u_{i=1} + u_i).$$

Введемо дві нові не від'ємні змінні y_i і z_i зі співвідношень:

$$x_i - x_{i-1} = y_i - z_i \quad (i = 2, 3, ..., n).$$

При цьому в оптимальному графіку виробництва можна y_i трактувати як величину, на яку відбулося розширення виробництва у i-му періоді, а z_i - відповідно як згортання виробництва. Виходячи з цього, сумарні додаткові витрати на розширення виробництва запишуться у вигляді

$$z_p = a\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

Таким чином, приходимо остаточно до такої моделі задачі лінійного програмування: мінімізувати функцію

$$z = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n}(u_{i-1} + u_i + a\sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{1}$$

при умовах:

$$y_i \geq 0, \quad z_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{2}$$

$$x_i - x_{i-1} = y_i - y_{i-1} \quad (i = 2, 3, ..., n), \tag{3}$$

$$u_i = u_0 + \sum_{i=1}^{i} x_i - \sum_{i=1}^{i} b_i \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{4}$$

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{5}$$

Модель можна спростити, виключивши з неї змінні x_i. Для цього віднімемо з рівняння (16) аналогічне рівняння для $i - 1$. Отримаємо

$$(u_{i-1} + u_i) = \sum^{i} x_i - \sum^{i-1} x_i - \sum^{i} b_i + - \sum^{i-1} b_i = x_i - b_i.$$

Аналогічно, очевидно, $u_{i-1} - u_{i-2} = x_{i-1} - b_{i-1}$ звідки почленним відніманням із попередньої рівності отримуємо

$$x_i - x_{i-1} = u_i = 2u_{i-1} + u_{i-2} + b_i - b_{i-1}.$$

Підставляючи цей вираз у ліву частину рівностей (15), запишемо їх у вигляді

$$u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2} + b_i - b_{i-1} = y_i - z_i \quad (i = 1, ..., n). \tag{3$\prime$}$$

Подальше розв'язання задачі, описаної виразами (1),(2), (3$\prime$), (5), ведеться як зазвичай.

1.2. Задача №2

Постановка задачі. Планується квартальний випуск продукції для задоволення змінного попиту $b_1 = 50, b_2 = 3-, b_3 = 40, b_4 = 20$. Скласти оптимальний графік роботи підприємства, якщо витрати на додатковий випуск 1 одиниці продукції становлять 30 грн., а витрати на зберігання цієї ж одиниці в запасах протягом одного періоду - 3 грн. При цьому задано $u_0 = 5$.

Розв'язання. Згідно з розглянутою вище загальною моделлю, позначимо відповідно випуски продукції в I, II, III і IV кварталах через x_1, x_2, x_3 та x_4, запаси продукції через u_1, u_2, u_3, u_4, обсяг зростання виробництва в i-м кварталі через y_i і обсяг згортання через z_i.

Тоді вирази (1) - (14) набудуть такого конкретного вигляду: мінімізувати функцію

$$z = \frac{3}{2}(5 + 2u_2u_3 + u_4) + 30(y_2 + y_3 + y_4) \tag{1$\prime$}$$

при умовах

$$\begin{cases} u_2 - 2u_1 + 5 - 20 = y_2 - z_2 \\ u_3 - 2u_2 + u_1 + 10 = y_3 - z_3 \\ u_4 - 2u_3 + u_2 - 20 = y_4 - z_4 \end{cases}, \tag{3$\prime$}$$

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{5$\prime$}$$

Розв'язання цієї задачі за допомогою симплексних таблиць дає наступний результат

$$u_2 = 5, \quad u_4 = 15, \quad z_2 = 10, \quad u_1 = u_3 = y_2 = y_3 = y_4 = z_2 = z_4 = 0$$

та

$$z_{\min} = 45 \text{ грн.}$$

За допомогою рівностей (3) і (4) визначаємо значення x_i:

$$x_1 = b_1 + u_1 - u_0 = 45; \quad x_2 = x_1 - z_2 = 35; \quad x_3 = x_2 = 35; \quad x_4 = x_3 = 35.$$