ЗМІСТ

Розділ 1. Моделі дискретної оптимізації в плануванні **2**

1. Цілочисленні задачі лінійного програмування 2

Розділ 1

Моделі дискретної оптимізації в плануванні

1. Цілочисленні задачі лінійного програмування

Дискретні (цілочисельні) задачі математичного програмування можуть виникати різними шляхами. Існують задачі лінійного програмування, які формально не належать до цілочисельних (вимога цілочисельності змінних у них явним чином не накладається), але які при цілочисельних початкових даних завжди мають цілочисельний план. Цим властивістю володіє транспортна задача і різноманітні варіанти (задача про призначення).

Первинним і найбільш природнім стимулом до вивчення цілочисельних і дискретних задач у власному значенні слова стало розглядання задач лінійного програмування, у яких змінні представляли фізично недільні величини (скажімо, кількості одиниць продукції різних видів). Для характеристики цього класу моделей використовується термін - задачі з недільностями.

Іншим важливим толчком до побудови теорії дискретного програмування став новий підхід до деяких екстремальних комбінаторних задач, для вирішення яких доводиться вводити булеві змінні, які мають логічний характер (x = 1 або x = 0).

Цілочисельним (точніше, частково цілочисельним) задачам лінійного програмування вдається звести також ряд задач, в яких явна вимога цілочисельності відсутня, але є деякі особливості, які виводять їх за межі лінійного програмування. Ці особливості можуть стосуватися:

а) до цільової функції або

б) до області допустимих рішень.

Отже, можна виділити наступні основні класи задач дискретного програмування.

1. Транспортна задача та її варіації.

2. Задачі з недільностями.

3. Екстремальні комбінаторні задачі.

4. Задачі з неоднорідною розривною цільовою функцією.

5. Задачі на некласичних областях.

Цілочисельна задача лінійного програмування. Цілочисельна задача лінійного програмування полягає в максимізації функції при умовах:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{gathered} \tag{2}$$

$$x_1 \geq 0, ...x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \tag{3}$$

$$x_j \in Z, \quad j \in J, \tag{4}$$

де J - деяка підмножина індексів $N = 1, 2..., .$ Якщо $J = N$ (тобто, вимогу цілочисельності накладено на всі змінні), то задачу називають повністю цілочисельною; якщо ж $J < N$, вона називається частково цілочисельною.

Модель (1)-(4) природно інтерпретувати, наприклад, у таких термінах. Нехай через $i = 1, 2, ..., m$ позначені виробничі фактори, через $j = 1, 2, ..., n$ — види кінцевої продукції. Позначимо далі:

a_{ij} — кількість факторів i, необхідна для виробництва одиниці продукту j,

b_i — наявні ресурси фактора i,

c_j — прибуток, одержуваний від одиниці продукту j.

Нехай продукти j для $j \in J$ є неподільними. тобто фізичний сенс мають лише їхні цілі невід'ємні кількості («штуки»). Припустимо, що метою є складання виробничої програми, що забезпечує максимум сумарного прибутку і яка не виводить за межі даних ресурсів. Позначаючи через x_j, шукані обсяги випуску продукції, ми зводимо цю задачу до моделі (1)-(4).

Моделювання логічного взаємозв'язку в задачі з булевими змінними.

Взаємовиключення. Запис $P_j \vee P_k$ означає, що в план може бути включений або проект P_j або: проект P_k. Разом вони включені бути не можуть. Цей запис виражає відношення взаємовиключення між проектами, спрямованими на вирішення одного завдання. Позначимо $x_j = 1$, якщо проект P_j реалізується, і$x_j = 0$ в протилежному випадку. У цих позначеннях взаємовиключення $P_k \vee P_m$ виражається нерівністю $x_k + x_m \leq 1$.

Взаємообумовленість. Запис $P_k \to P_i$, — проект P_k вирає за собою проект P_j, означає, що проект P_k може бути включений до плану лише у тому випадку, якщо в план вже включений проект P_j. Цей запис виражає відношення між взаємозумовленими один одними проектами, наприклад, коли проект P_k є розмноженням проекту P_i на іншому об'єкті або колиP_i базується на результатах реалізації проекту P_j.

У прийнятих позначеннях взаємозв'язок $P_k \to P_i$ виражається нерівністю $X_k \leq x_j$.

Приклад. Є 10 завдань, кожне з яких характеризується трема техніко-економічними показниками: a_j — обсяг роботи, b_j — розмір потрібних інвестицій, c_j — очікуваний щорічний економічний ефект.

Робота	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
a_j	3	3	3	4	4	2	4	3	6	5
b_j	4	3	2	4	6	4	3	5	3	4
c_j	3	7	5	6	8	4	7	4	7	6

Загальний обсяг робіт не повинен перевищувати 20. Загальний обсяг капіталовкладень не повинен перевищувати 20. Потрібно визначити, які з 10 робіт слід виконати, щоб максимізувати очікуваний щорічний економічний ефект, враховуючи такі умови взаємозв'язку і взаємовиключення.

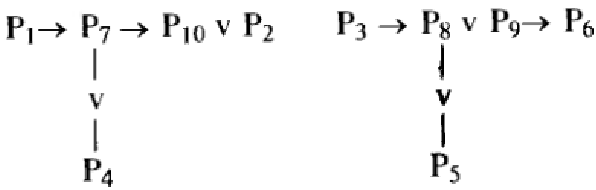

Рис. 1.1.

Розв'язання.

Окрім двох обмежень по загальному обсягу робіт і капіталовкладень, дана задача характеризується наступною системою рівнянь.

$x_1 \leq x_7, x_3 \leq x_8, x_7 \leq x_10, x_9 \leq x_6,$

$x_10 + x_2 \leq 1, x_5 + x_8 \leq 1, x_7 + x_4 \leq 1,$

$x_8 + x_9 \leq 1, x^{ont} = (0101110010)$