**4. Докази: Конвергенція до спіралі Вінера**

4.1 Функціональний закон великих чисел для норми

Почнемо з результату, доведення якого містить основну ідею доведення теореми 2.4.

**Теорема 4.1***.* Нехай - довільна послідовність натуральних чисел, така, що при . За припущеннями пункту 2.1,

(12)

*де позначає конвергенцію за ймовірністю.*

Перед доведенням теореми 4.1 необхідно виконати деяку підготовчу роботу. По-перше, зауважимо, що для кожного ,

(13)   
,

де

(14)  
та . Крім того, необхідно звернути увагу, що

(15)

Важливим є те, що є мартингалем для подальшого викладу. Точніше, має місце наступне.  
**Лема 4.2**. Для будь-якого випадкового блукання у d-вимірному просторі з незалежними однаково розподіленими прирости, випадкові величини , утворюють трикутну матрицю відмінностей мартингалів щодо природної фільтрації — -алгебра, породжена , для всіх .

**Доведення.** Щоб довести властивість відмінності мартингалу, зауважте, що є -вимірною і

для всіх де ми використали той факт, що є   
-вимірною та незалежна від та має нульове середнє значення.

**Доведення Теореми 4.1***.* Щоб довести (12), досить показати, що

(16)

та

(17)

*Доведення (16). Згідно з версією закону великих чисел, викладеною в Лемі А.1 у Додатку A,*

Для кожного . Оскільки функції монотонні на і остання функція є неперервною, ця збіжність за ймовірністю насправді є рівномірною за розширення теореми Пола Діні. Зокрема, для кожного об’єднане обмеження дає

Монотонність підтверджує, що

За умовою , ми обираємо таке, що Потім,

З цього слідує, що збігається за ймовірністю до 0 і тим самим доводить (16).

Доведення (17). Оскільки — мартингал, для кожного фіксованого d нерівність мартингалу Дуба вимагає, щоб

Отже, для доведення (17) достатньо перевірити, що

(18)

Іншим способом побачити цю достатність є застосування наслідку 2 на стор. 1888 в [7] з та , що призводить до оцінки

Для доведення (18) ми записуємо

де для другого рівності ми використали той факт, що через незалежність, некорельованість та , очікування дорівнює нулю, якщо і . Залишається зауважити, що

де на останньому кроці було використано (6). Доведення (18) завершено.

**4.2. Доведення Теореми 2.4**

Ми ідентифікуємо спіраль Вінера інтервалом [0,1], обладнаним метрикою . Визначимо сур’єктивне відображення за допомогою . Згідно з наслідком 7.3.28 на сторінці 258 в [4], відстань Громова-Хаусдорфа між та вдвічі обмежена зверху спотвореням відображення , тобто

Щоб довести теорему, достатньо перевірити, що

Виберемо деяке . Ми знаємо з теореми 4.1, що для кожного ,

Крім того, для кожного цілого числа , за стаціонарністю,

З об'єднаного обмеження випливає, що для кожного фіксованого ,

(19)

Якщо такі, що та , то, за нерівністю трикутника,

Розглянемо випадкову величину

Для завершення доведення достатньо показати, що для кожного   
,

(20)

Застосовуючи об'єднане обмеження і згадуючи, що є незалежними та однаково розподіленими, ми можемо записати

Згадуючи розклади (13) та (14), зауважимо, що

=

Для завершення доведення достатньо перевірити, що

(21)

та

(22)

Доведення (21). Ми спостерігаємо, що для кожного фіксованого збігається за ймовірністю до за версією закону великих чисел, зазначеною в Лемі А.1. Це означає, що для кожного , у (21) дорівнює 0.

Доведення (22). Знову застосовуючи нерівність мартингалу Дуба, маємо

Як ми вже показали в (18), для кожного ,

З цього випливає, що у (22) дорівнює 0 для кожного .

**Доведення Наслідку 2.5**. Зауважимо, що і

Права частина збігається до нуля з ймовірністю, оскільки для кожного фіксованого

і останнє збігається до нуля за (5).

**4.3 Доведення теореми 2.6**

Відображення є сюр'єктивним. Так само, як у доведенні Теореми 2.4, ми використовуємо Наслідок 7.3.28 на сторінці 258 у [4], щоб вивести, що

Для доведення теореми досить показати, що права частина збігається до 0 майже напевно, тобто

(23)

Функція є рівномірно неперервною на кожному інтервалі у вигляді , де . Отже, для невід’ємних обмежених функцій рівномірно означає, що рівномірно. Тому, щоб довести (23), досить перевірити, що

(24)

Введемо незалежні та однаково розподілені (i.i.d.) стохастичні процеси , таким чином

Звернемо увагу, що має неперервні шляхи в області (оснащений метрикою добутку [4, c.88]), і що

Отже,

Зауважте, що … є незалежними та однаково розподіленими випадковими елементами в Банаховому просторі неперервних функцій на компактному просторі . Як ми показали, . Згідно із сильним законом великих чисел в Банаховому просторі , див. Теорему 1.1 на сторінці 131 у [16], маємо

Це доводить (24) і завершує доведення Теореми 2.6.

**4.4 Доведення для Розділу 2.3**

У цьому розділі ми збираємо доведення, пов'язані з збіжністю в просторі , за винятком Леми 2.8, доведення якої наведено в Додатку D.

**Доведення Пропозиції 2.10** Очевидно, що і . Перевіримо, що означає . Дійсно, означає, що звичайна відстань Громова-Хаусдорфа між і (обидва з оснащеними метрикою, породженою з ) дорівнює 0. Це означає, що ізометричне до ; див. [4, Теорема 7.3.30] , тобто існує бієкція, яка зберігає відстань , що доводить .

Доведемо нерівність для трикутника. Візьмемо і позначимо для . Нашою метою є довести, що . Фіксуємо . За визначенням , існують представники та такі, що . Аналогічно, існують представники та такі, що . Проблеми в тому, що, на жаль, може не бути тим самим, що й .

Без втрати загальності ми припускаємо, що та . Дійсно, в іншому випадку, позначимо як замкнуту лінійну оболонку базисних векторів та буде лінійною ізомерією, визначеною як . Тоді S і . Таким чином, ми можемо замінити .. і .. на .. і .., які належать замкнутому лінійному підпростору, що задовольняє . Аналогічний аргумент можна застосувати до і .

За лемою 2.8, ізометрію (яка існує, оскільки ), можна розширити до ізометрії між і . Як зазначалося вище, можна вважати що . Тепер ми стверджуємо, що насправді до самоізометрії всього . Більш точно, після зрушення можна вважати що і є замкнутими лінійними підпросторами. Нехай - будь-яка ізометрія між ортогональними доповненнями та (яка існує, оскільки обидва доповнення є роздільними, нескінченновимірними просторами Гільберта). Тоді ми можемо розширити ізометрію до , встановивши для будь яких і .

Тепер ми зауважимо, що та . Нагадаємо, що . Нетотожність трикутника для метрики дає

Оскільки є довільним, а , це доводить, що

**Доведення Теореми 2.12.** Зауваження 2.11 стверджує, що збіжність у означає збіжність у сенсі Громова-Хаусдорфа. Доведемо обернене твердження. Нехай у сенсі Громова-Хаусдорфа. Звідси випливає, що діаметри рівномірно обмежені деяким , що означає та для всіх та всіх . Наша ціль – показати, що в , коли . Зафіксуємо деяке . Нехай — -сітка в , що означає що для кожного існує таке, що . Візьмемо деяке . Існує таке, що для всіх маємо . Зафіксуємо деяке . За визначенням метрики Громова-Хаусдорфа, існує метричний простір та ізометричні вкладення і такі, що . Звідси випливає, що для кожного існує точка така, що . Використовуючи нерівність трикутника, легко перевірити, що точки утворюють -сітку в . Знову використовуючи нерівність трикутника, отримуємо

і також

та зверху обмежені величиною , отримаємо

Застосовуючи відповідні зсуви, ми можемо припустити, що . Використовуючи закон паралелограма

Ми приходимо до висновку, що для всіх

Нехай (відповідно, ) є матрицею Грама векторів (відповідно, ). Нехай – це множина позитивно-півнерівних матриць розмірності , таких, що . Ми надаємо простір матриць нормою , а множину метрикою, спричиненою цією нормою. Тоді, як ми показали вище, . Оскільки відображення є неперервним на , ми бачимо, що

для деякої функції , такої, що

Матриця Грама векторів у , є і співпадає з матрицею Грама векторів у . Звідси випливає, що існує ортогональне перетворення , таке, що для всіх . Застосувавши те ж саме ортогональне перетворення до векторів , ми визначимо

(25)

Тоді, для всіх

За визначенням, матриця Грама така ж , як у . Зауважимо, що обидві системи векторів охоплюють лінійні підпростори нескінченної корозмірності в . Таким чином, ізометрія, яка відправляє 0 в 0 та в , для всіх , може бути розширена до глобальної самоізометрії в за Лемою 2.8 та останнім зауваженням в Прикладі 2.9; див. також доведення Твердження 2.10. Ми стверджуємо, що відсань Гаусдорфа між та задовольняє

Дійсно, для кожної точки , відстань від якоїсь , що знаходиться на відстані від . Навпаки, для кожного яка знаходиться на відстані від якоїсь , що знаходиться на відстані від .

Задамо фіксоване (та відповідне ) і оберемо , щоб забезпечити виконання нерівності: . З цього випливає, що для всіх маємо ≤ 3ε. Оскільки є довільним, це означає, що

**Доведення Теореми 2.15.** Доведення випливає з Теореми 2.14 у зв'язку з Теоремою про неперервне відображення, використання якої виправдовується наступною лемою.

**Лема 4.3.** Відображення опуклої оболонки , яке задається як , є коректно визначеним та 1-ліпшицевим, тобто

Для всіх . Зокрема, відображення є неперервним.

**Доказ.** Спочатку перевіримо, що відображення є коректно визначеним, тобто:

(26)

І, отже,. За лемою 2.8 існує афінна, ізометрична відображення , таке, . Оскільки є афінним, маємо . З властивості ізометрії випливає, що , що доводить твердження.

Щоб довести властивість 1-Ліпшица, припустимо, що та такі, що . Фіксуємо . З цього випливає, що — куля (у просторі ) радіусом з центром в початку координат, а + позначає додавання Мінковського. Прямо перевіряється, що для довільних множин . Таким чином,

де останній крок випливає з того, що для кожного   
. Аналогічно, показують, що . За визначенням відстані Хаусдорфа, . Таким чином,

Перехід до інфімумів дає

де для останнього переходу ми використали те, що інфімум у визначенні береться по більшій множині, згідно з (26).