

# Отчет по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний, Вариант 69

Любимов Дмитрий Андреевич Нфибд 01-20

# Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание	5
3	Выполнение лабораторной работы	6
	Теоретические сведения . . . . .	6
	Задача . . . . .	7
4	Выводы	17
	Список литературы	18

## Список иллюстраций

3.1	График решения для случая 1 . . . . .	9
3.2	Фазовый портрет для случая 1 . . . . .	9
3.3	График решения для случая 1 . . . . .	10
3.4	Фазовый портрет для случая 1 . . . . .	11
3.5	График решения для случая 2 . . . . .	12
3.6	Фазовый портрет для случая 2 . . . . .	12
3.7	График решения для случая 2 . . . . .	13
3.8	Фазовый портрет для случая 2 . . . . .	13
3.9	График решения для случая 3 . . . . .	14
3.10	Фазовый портрет для случая 3 . . . . .	15
3.11	График решения для случая 3 . . . . .	16
3.12	Фазовый портрет для случая 3 . . . . .	16

# 1 Цель работы

Целью моей работы является изучения уравнения гармонического осциллятора.

## 2 Задание

1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания
2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, постро
3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внеш

### 3 Выполнение лабораторной работы

#### Теоретические сведения

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где  $x$  - переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.),  $\gamma$  - параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре),  $\omega_0$  - собственная частота колебаний. Это уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ( $\gamma = 0$ ) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(\dot{t}_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Независимые переменные  $x, y$  определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью. Значение фазовых координат  $x, y$  в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

## Задача

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы  $\ddot{x} + 4.4x = 0$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы  $\ddot{x} + 4.4\dot{x} + 0.4x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы  $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0.4 \sin 4t$

На интервале  $t \in [0; 64]$ , шаг 0.05,  $x_0 = 0.4, y_0 = 0.4$

1. В системе отсутствуют потери энергии (колебания без затухания) Получаем уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Переходим к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Решение в OpenModelica

```
model pr4
```

```
Real x(start=0.4);
```

```
Real y(start=0.4);
```

```
parameter Real w=4.4;
```

```
equation
```

```
der(x) = y;
```

```
der(y) = -w*x;
```

```
end pr4;
```



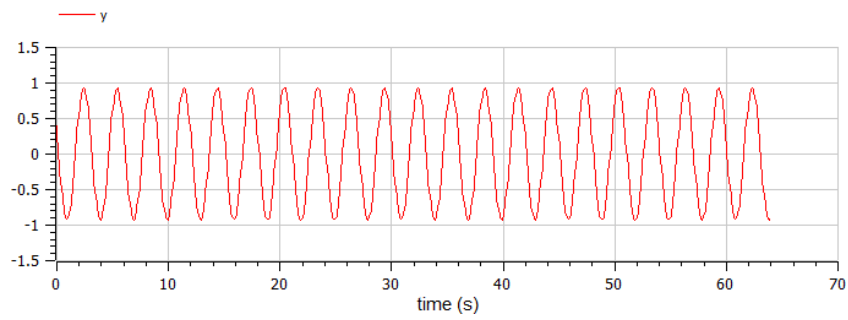


Рис. 3.1: График решения для случая 1

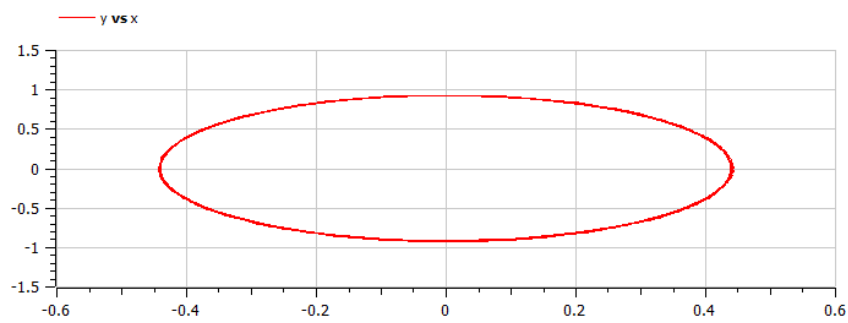


Рис. 3.2: Фазовый портрет для случая 1

Решение в Julia

$x0 = 0.4$

$y0 = 0.4$

$u0 = [x0; y0]$

$t0 = 0$

$tmax = 64$

$t = \text{collect}(\text{LinRange}(t0, tmax, 1000))$

$tspan = (t0, tmax)$

$w = 4.4$

```

function syst(dy, y, p, t)
    dy[1] = y[2]
    dy[2] = -w*y[1]
end

prob = ODEProblem(syst, u0, tspan)
sol = solve(prob, saveat=t)

```

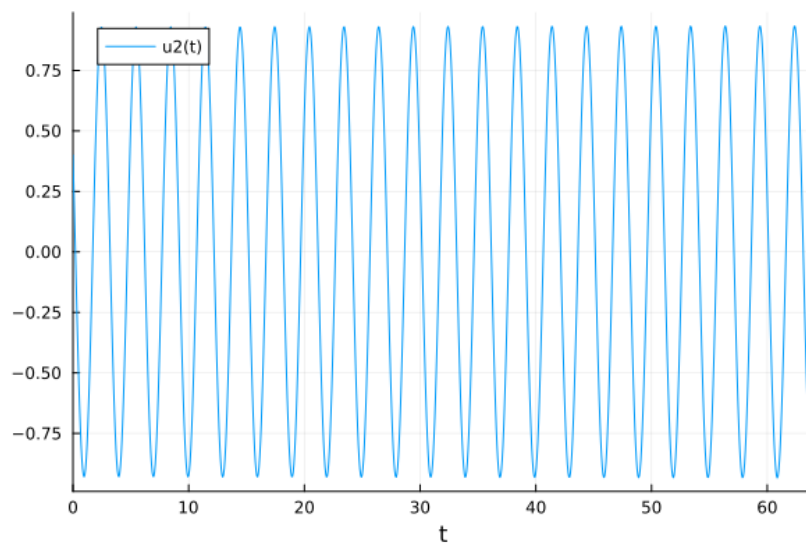


Рис. 3.3: График решения для случая 1

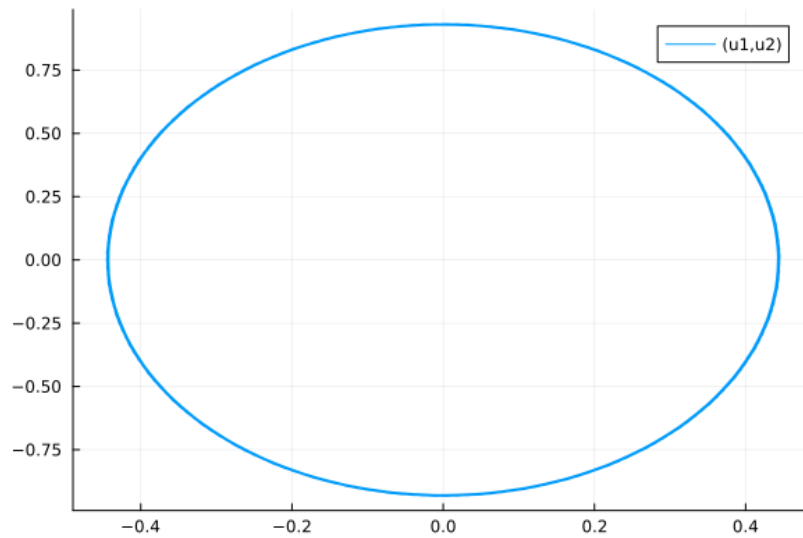


Рис. 3.4: Фазовый портрет для случая 1

2. В системе присутствуют потери энергии (колебания с затуханием) Получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Переходим к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \end{cases}$$

Решение в OpenModelica

```
model pr4
Real x(start=0.4);
Real y(start=0.4);

parameter Real w=0.4;
parameter Real g=4.4;
```

```

equation
der(x) = y;
der(y) = -g*y-w*x;

end pr4;

```

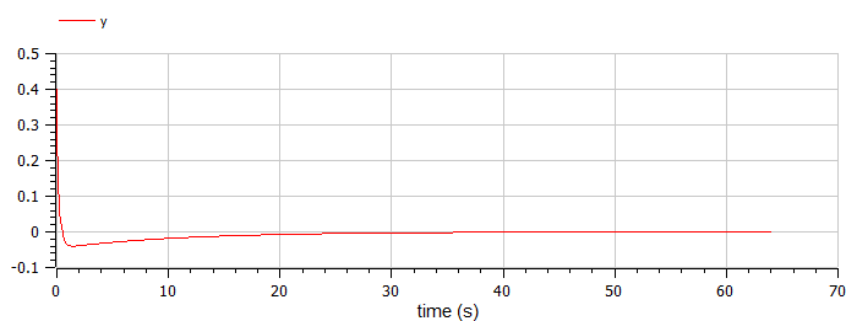


Рис. 3.5: График решения для случая 2

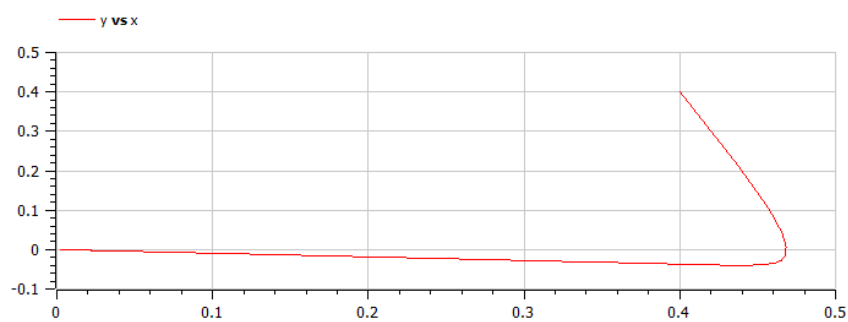


Рис. 3.6: Фазовый портрет для случая 2

Решение в Julia

$w = 0.4$

$g = 4.4$

```
function syst(dy, y, p, t)
```

```
    dy[1] = y[2]
```

```

    dy[2] = -g*y[2]-w*y[1]
end

prob = ODEProblem(syst, u0, tspan)
sol = solve(prob, saveat=t)

```

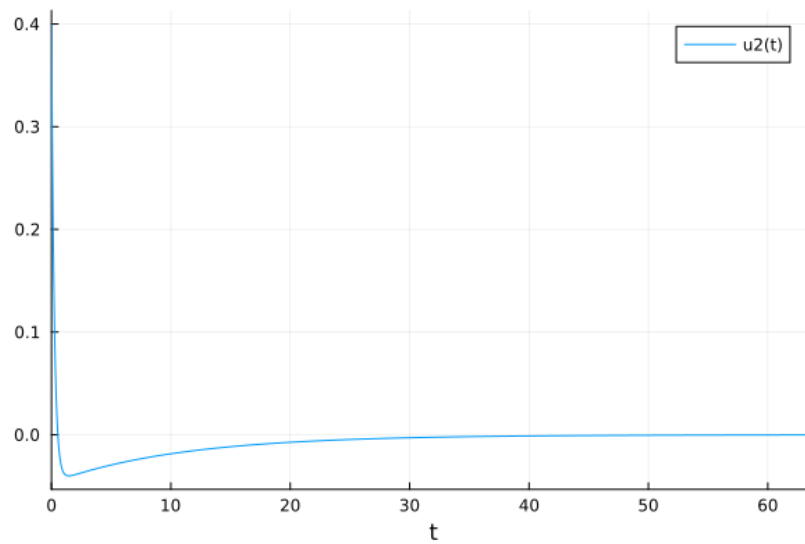


Рис. 3.7: График решения для случая 2

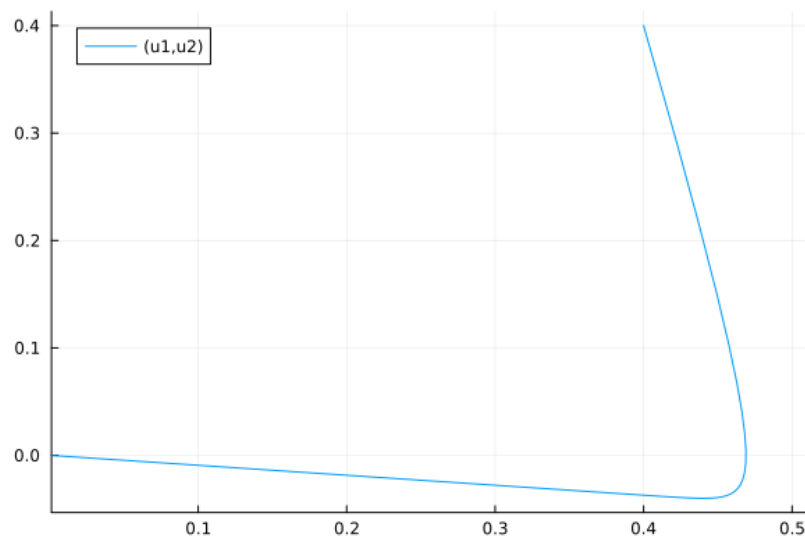


Рис. 3.8: Фазовый портрет для случая 2

3. На систему действует внешняя сила. Получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

Переходим к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(t) - 2\gamma y - \omega_0^2 x \end{cases}$$

Решение в OpenModelica

```
model pr4
```

```
Real x(start=0.4);
```

```
Real y(start=0.4);
```

```
parameter Real w=4;
```

```
parameter Real g=4;
```

```
equation
```

```
der(x) = y;
```

```
der(y) = -g*y-w*x + 0.4*sin(4*time);
```

```
end pr4;
```

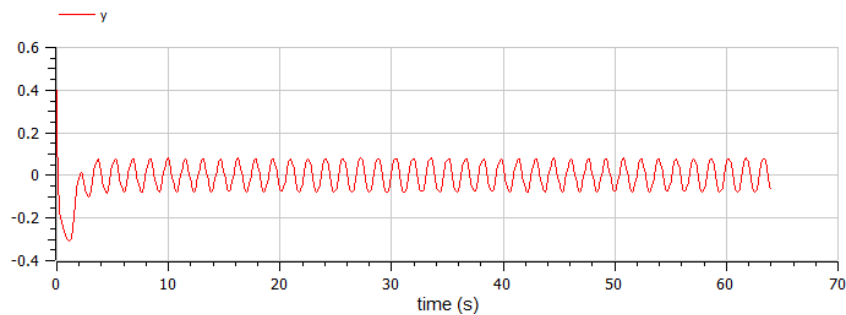


Рис. 3.9: График решения для случая 3

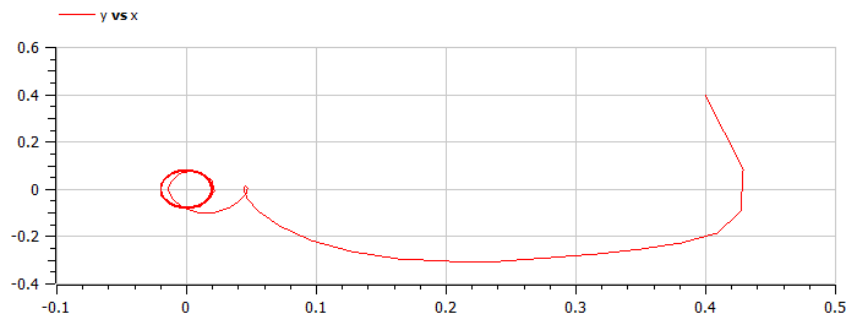


Рис. 3.10: Фазовый портрет для случая 3

Решение в Julia

$w = 4$

$g = 4$

function P(t)

    return  $0.4 \cdot \sin(4 \cdot t)$

end

function syst(dy, y, p, t)

    dy[1] = y[2]

    dy[2] =  $-g \cdot y[2] - w \cdot y[1] + P(t)$

end

prob = ODEProblem(syst, u0, tspan)

sol = solve(prob, saveat=t)

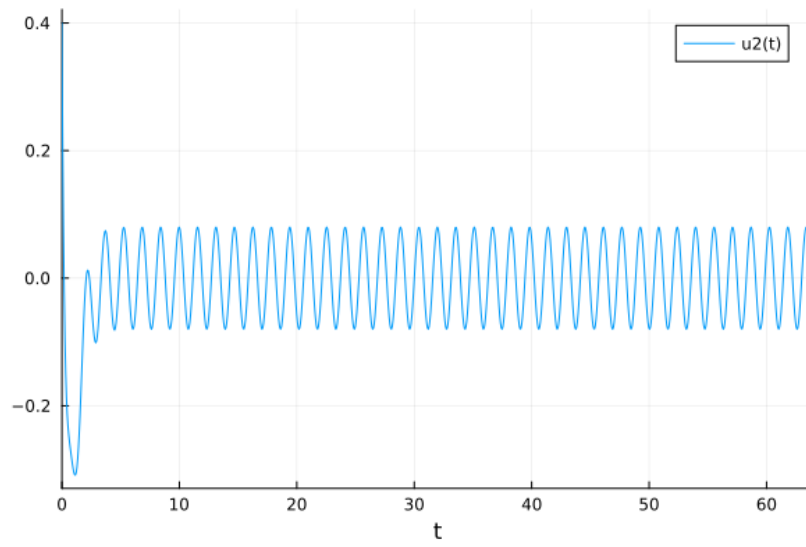


Рис. 3.11: График решения для случая 3

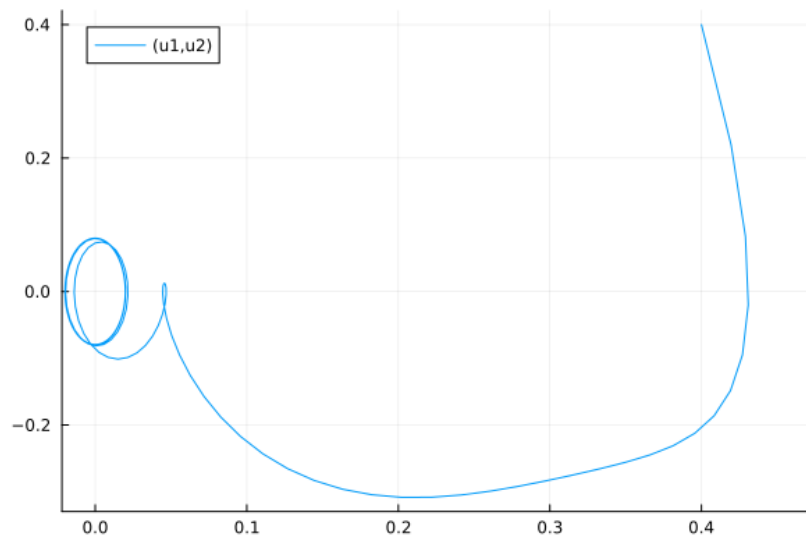


Рис. 3.12: Фазовый портрет для случая 3



## 4 Выводы

Мной были построены решения уравнения гармонического осциллятора и фазовые портреты гармонических колебаний без затухания, с затуханием и также при действии внешней силы. Цель лабораторной работы выполнена.

## Список литературы

1. Гармонический осциллятор
2. Модели колебательных систем на примере дифференциальных уравнений