Drzewa i słowniki

Zadanie 1
Podaj algorytm, który mając na wejściu niezrównoważone drzewo BST przekształca je w drzewa dające się pokolorować jako czerwono-czarne.

Zadanie 2
Opisz, jak zmodyfikować drzewa czerwono czarne tak, aby można było w czasie O(log(n)) wyznaczyć sumę wszystkich elementów w drzewie o wartościach z zakresu (x, y). W wyniku wykonanej modyfikacji pozostałe operacje na drzewie również powinny zachować swoją pierwotną złożoność.
Oczywiście należy również opisać jak będzie przebiegała operacja obliczania sumy.

Zadanie 3
Zaproponuj strukturę danych udostępniającą następujący interfejs:
init(length) - tworzy strukturę tablico-podobną o długości length.
set(index, val) - podstawia pod index wartość val.
snap() - tworzy snapa struktury i zwraca snap_id, identyfikujący aktualny snap - jest równy liczbie wykonanych do tej pory snapów.
get(index, snap_id) - zwraca wartość jaka znajdowała się pod index wtedy gdy wywołana funkcja snap zwróciła snap_id.
Wszystkie operacje powinny być jak najszybsze!

Zadanie 4
Zaproponuj strukturę danych udostępniającą następujący interfejs:
init(capacity) - inicjalizuje strukturę na pojemność capacity.
get(key) - zwraca wartość pod kluczem key, lub -1 jeśli klucza nie ma (struktura przechowuje liczby naturalne).
put(key, val) - wkłada pod klucz key wartość val.
Jeżeli w wyniku operacji put liczba kluczy mogłaby przekroczyć capacity, to należy usunąć klucz na którym najrzadziej wykonywano operację get. Jeżeli istnieje kilka takich kluczy, to należy usunąć ten, na którym ostatnia wykonana operacja get była najwcześniejsza.
Wszystkie operacje powinny być jak najszybsze!

Zadanie 5
Podaj algorytm zamieniający drzewo BST w łańcuch odsyłaczowy, w taki sposób, aby możliwe było potem odtworzenie tego drzewa z identyczną strukturą. Jest to tak zwany problem serializacji drzewa. Znajduje on zastosowanie między innymi w kompresji tekstu.

Zadanie 6
Mając działającą w O(1) funkcję randInt(k) zwracającą losowy int z zakresu [0, k), podaj jak należy zmodyfikować drzewo RB, żeby dało się w O(log(n)) pobrać losowy element tego drzewa? Czy zadanie się upraszcza, jeśli wolno nam korzystać z tablicy dynamicznej?