

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Борисов, А. А. Авраменко, Моделирование движения космического аппарата с упругими элементами, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2009, выпуск 2, 17–28

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 195.19.40.223

16 марта 2024 г., 21:35:33



## МЕХАНИКА

УДК 534.1; 539.3

© М. В. Борисов, А. А. Авраменко

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Целью работы является получение математической модели движения составной упругой системы. Поиск собственных форм и частот предлагается проводить путем разложения колебаний по формам неподвижных элементов. Это позволяет преобразовать уравнения движения в частных производных в обыкновенные дифференциальные уравнения. Проведено моделирование движения космического аппарата, в состав которого входят упругие элементы большой протяженности (панели солнечных батарей).

*Ключевые слова:* составная упругая система, собственные частоты колебаний, собственные формы колебаний, дифференциальные уравнения движения, упругий космический аппарат, панели солнечных батарей, метод Релея–Ритца, принцип Гамильтона–Остроградского.

#### Введение

Тенденции увеличения размеров деформируемых конструкций, уменьшения их масс, жесткости и ряд других факторов требуют новых подходов моделирования сложных механических систем, развития методов их качественного анализа, численного интегрирования.

В известных работах основное внимание уделяется исследованию стационарных вращательных движений упругих систем или движения вокруг центра масс системы [1–9].

Имеется ряд основных методов для моделирования и исследования движения сложных систем с упругими элементами. К ним относятся: моделирование упругих элементов твердыми телами [1, 4, 6, 7]; метод конечных элементов [8, 9].

Наиболее распространенным методом компьютерного моделирования составных упругих конструкций в настоящее время является метод конечных элементов. Однако точность данного метода зависит от количества конечных элементов. Соответственно, учет большего числа конечных элементов требует больших затрат машинного времени. Кроме того, метод конечных элементов дает значения динамических характеристик в точках выбранных конечных элементов, а при изменении конструкции моделируемой системы требует перестройки всей конечно-элементной сетки.

В данной работе предлагается метод получения математической модели движения составной упругой системы и приведен пример его использования для исследования колебаний условного космического аппарата (КА) с панелями солнечных батарей (ПСБ).

#### § 1. Моделирование движения составной упругой системы

##### 1.1. Определение собственных форм и частот системы

Сложную упругую систему, как правило, можно представить в виде некоторой условной конструкции, состоящей из простых элементов (стержней, пластин, оболочек и т. д.), деформации которых малы и могут рассматриваться как упругие. При исследовании движения такой системы необходимо учитывать возникающие колебания, которые непосредственно связаны с упруго-массовыми характеристиками. В случае малых деформаций возникающие колебания могут быть найдены, если известны собственные частоты и формы колебаний. Если в качестве форм колебаний выбрать некоторую систему перемещений, удовлетворяющую граничным условиям и внутренним связям, то для оценки первой собственной частоты можно использовать неравенство Релея [12]:

$$\omega_1^2 \leq \frac{U^*}{T^*}, \quad (1.1)$$

где  $U^*$  — упругий потенциал, вычисленный для выбранной системы перемещений, а  $T^*$  — выражение кинетической энергии, в котором скорости заменены перемещениями. Это неравенство дает верхнюю оценку первой собственной частоты. Если функции, определяющие выбранную систему перемещений, будут содержать некоторое число неопределенных коэффициентов  $d_i (i = \overline{1, n})$ , то появляется возможность не только уточнить величину первой собственной частоты, но и получить значения нескольких следующих. Подобная процедура определения частот носит название метода Ритца [12]. Она заключается в выборе таких значений неопределенных коэффициентов, которые минимизируют оценку собственной частоты. Значения коэффициентов могут быть найдены из системы уравнений

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial d_i} = \frac{\partial U^*}{\partial d_i T^*} = 0, (i = \overline{1, n}).$$

Если допустить, что  $\omega^2 = \frac{U^*}{T^*}$ , то получим:

$$\frac{\partial U^*}{\partial d_i} - \omega^2 \frac{\partial T^*}{\partial d_i} = \frac{\partial}{\partial d_i} (U^* - \omega^2 T^*) = \frac{\partial S}{\partial d_i} = 0. \quad (1.2)$$

Если эти коэффициенты входят в определяющие функции линейно, то для их определения может быть составлена система линейных однородных уравнений. Из условия равенства нулю определителя этой системы и находится значение собственной частоты.

Для сложной упругой системы выбор соответствующих функций, определяющих систему перемещений, представляет довольно сложную задачу. Для ее решения предлагается использовать функции, заведомо удовлетворяющие краевым условиям: собственные формы колебаний отдельных элементов конструкции [10]. Эти функции обладают очень удобным для дальнейших вычислений свойством: ортогональностью. Рассмотрим подробнее процедуру определения частот и форм колебаний составной упругой системы.

Предположим, что в числе движений, существующих в рассматриваемой системе при надлежащем образом выбранных начальных условиях, имеются колебания с частотой  $\omega$ , в которых все координаты изменяются в одинаковой фазе [11]:

$$f(x, t) = F(x) \cdot \sin(\omega t + \epsilon), \quad (1.3)$$

$$f(x, y, t) = F(x, y) \cdot \sin(\omega t + \epsilon), \quad (1.4)$$

где

$x, y$  — координаты характерного размера элемента,

$F(x), F(x, y)$  — формы колебаний,

$\omega$  — собственная частота.

Формы колебаний в (1.3) и (1.4) отдельных элементов системы представим для стержня в виде

$$F(x) = \sum_n d_n X_n(x), \quad (1.5)$$

для пластины в виде

$$F(x, y) = \sum_{m,n} d_{m,n} X_m(x) Y_n(y). \quad (1.6)$$

Функции  $X_m(x), Y_n(y)$  — базисные функции, подбираемые в соответствии с краевыми условиями задачи. Для того, чтобы формы колебаний были как можно ближе к истинным, коэффициенты  $d_n, d_{m,n}$  выбираются таким образом, чтобы квадрат частоты  $\omega^2$  в (1.1) принимал наименьшее значение. Коэффициенты  $d_n, d_{m,n}$  являются корректирующими параметрами, которые приближают выбранные базисные функции к истинной форме колебаний.

В рамках предлагаемого метода моделирования движения составной упругой системы в качестве базисных функций предлагается использовать собственные формы колебаний однородного стержня при тех же условиях закрепления, что и для исследуемой системы [12]. В приближенном решении число собственных форм может быть взято конечным и часто весьма небольшим. Это сводит задачу к рассмотрению системы с конечным числом степеней свободы

и исключает из рассмотрения весьма трудно учитываемые колебания высоких частот. При моделировании движения рассматриваемой системы ограничимся двумя формами в разложениях (1.5) и (1.6).

Функции  $X$  представляют собой собственные формы колебаний стержня, жестко заделанного с одного конца:

$$X_n(x) = \left( \cosh \frac{k_n l \cdot x}{l} - \cos \frac{k_n l \cdot x}{l} \right) + C_n \cdot \left( \sinh \frac{k_n l \cdot x}{l} - \sin \frac{k_n l \cdot x}{l} \right), \quad (1.7)$$

где  $C_n = -\frac{\cosh(k_n l) + \cos(k_n l)}{\sinh(k_n l) + \sin(k_n l)}$ .

Величины  $k_n l$  определяются из соотношения  $\cos(k_n l) \cosh(k_n l) = -1$ .

Функции  $Y$  представляют собой собственные формы колебаний стержня со свободными концами:

$$Y_n(y) = \left( \cosh \frac{k_n l \cdot y}{l} + \cos \frac{k_n l \cdot y}{l} \right) + C_n \cdot \left( \sinh \frac{k_n l \cdot y}{l} + \sin \frac{k_n l \cdot y}{l} \right), \quad (1.8)$$

где  $C_n = -\frac{\cosh(k_n l) - \cos(k_n l)}{\sinh(k_n l) - \sin(k_n l)}$ .

Величины  $k_n l$  определяются из соотношения  $\cos(k_n l) \cosh(k_n l) = 1$ .

Формы колебаний пластины представлены как произведение форм колебаний жестко заделанного стержня (1.7) и свободного стержня (1.8). Это соответствует способу закрепления пластины в рассматриваемой системе.

Выражения (1.5) и (1.6) подставляются в (1.2). При этом необходимо учесть, что собственные формы колебаний (1.7) и (1.8) являются ортогональными.

Согласно методу Релея–Ритца, неизвестные коэффициенты в разложениях (1.5) и (1.6) выбираются таким образом, чтобы квадрат частоты  $\omega^2$  принимал наименьшее значение. В соответствии с этим, используя (1.2), можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial d_k} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial d_{l,p}} = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

где  $k = \overline{1, n}, l = \overline{1, m}, p = \overline{1, n}$ .

Вид системы (1.9) определяется конфигурацией моделируемой системы, типами элементов, входящих в ее состав.

Система (1.9) является однородной линейной относительно неизвестных коэффициентов  $d_k$  и  $d_{l,p}$ . Подобная система будет иметь решение, отличное от нуля, в том случае, если равен нулю определитель матрицы коэффициентов при  $d_k$  и  $d_{l,p}$ . Из этого условия получается частотное уравнение относительно собственных частот  $\omega_k^2$ . Каждому из значений  $\omega_k^2$  соответствует система значений коэффициентов  $d_k$  и  $d_{l,p}$ , определенная с точностью до произвольного множителя. Система полученных коэффициентов позволяет оценить вклад каждой учитываемой формы собственных колебаний в (1.5) и (1.6), а также восстановить искомые формы колебаний.

## 1.2. Вывод дифференциальных уравнений движения системы

Для получения системы дифференциальных уравнений движения представим упругие перемещения в виде разложений:

$$f(x, t) = \sum_n q_i(t) F_i(x), \quad (1.10)$$

$$f(x, y, t) = \sum_n q_i(t) F_i(x, y), \quad (1.11)$$

где  $q_i(t)$  — неизвестные обобщенные координаты;  $F(x), F(x, y)$  — формы колебаний, полученные из (1.5) и (1.6).

Из принципа Гамильтона–Остроградского:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta A - \delta \Pi - \delta U) dt = 0, \quad (1.12)$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы,  $A$  — работа неконсервативных (диссипативных) сил,  $\Pi$  — потенциальная энергия внешних сил,  $U$  — энергия упругой деформации элемента.

Найдем выражения для вариаций, входящих в правую часть (1.12).

$T = \sum_i T_i$  — сумма кинетических энергий отдельных элементов системы.

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.13)$$

Найдем интеграл по времени от (1.13):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (\delta q_i) d \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i^2} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Для работы неконсервативных сил:

$$\delta A = Q_i \delta q_i. \quad (1.15)$$

Для потенциальной энергии:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.16)$$

Здесь также, как и для кинетической энергии под  $\Pi$  понимается сумма потенциальных энергий отдельных элементов системы. То есть  $\Pi = \sum_i \Pi_i$ .

Для энергии упругой деформации:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.17)$$

Аналогично, под  $U$  понимается сумма энергий отдельных элементов системы. То есть  $U = \sum_i U_i$ .

Поскольку вариации независимы, то для того чтобы выражение (1.12) обращалось в нуль, необходимо, чтобы выражения перед вариациями обращались в нуль.

В результате подстановки (1.14) — (1.17) в (1.12) получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i^2} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (1.18)$$

Система дифференциальных уравнений движения (1.18) представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, содержащих только обыкновенные производные по времени. Уравнений столько, сколько неизвестных коэффициентов в разложениях (1.10) и (1.11).

## § 2. Моделирование движения КА при раскрытии ПСБ

Причинами колебаний упругих конструкций могут быть: внешние воздействия; работа двигателей системы управления КА; изменение конфигурации системы, например в процессе раскрытия ПСБ.

В настоящей работе предлагается в качестве примера применения метода, описанного в параграфе 1, рассмотреть движение КА с упругими ПСБ.

Решение задачи исследования движения КА при раскрытии ПСБ будем проводить в два этапа. На первом этапе — *раскрытие ПСБ* — рассмотрим движения ПСБ как системы твердых пластин (створок), соединенных шарнирами. На втором этапе — *фиксация ПСБ* — рассмотрим движение КА при колебаниях ПСБ, возникающих под воздействием импульсных нагрузок, появляющихся в момент фиксации частей ПСБ.

## 2.1. Раскрытие ПСБ

Построение математической модели процесса раскрытия ПСБ является первым и важным шагом. Модель должна быть в разумной степени адекватна физическому процессу и не быть слишком громоздкой. При решении поставленной задачи использовались следующие допущения:

- 1) фиксация створок происходит мгновенно и одновременно;
- 2) корпус КА совершает свободное движение, характер которого определяется движением створок ПСБ в процессе раскрытия и колебанием развернутой ПСБ;
- 3) в процессе раскрытия ПСБ колебания отдельных створок не учитываются (поэтому створки ПСБ моделируются как абсолютно твердые тела);
- 4) диссипативные силы демпферов колебаний не учитываются.

Рассмотрим ПСБ, состоящую из трех створок (рис. 1).

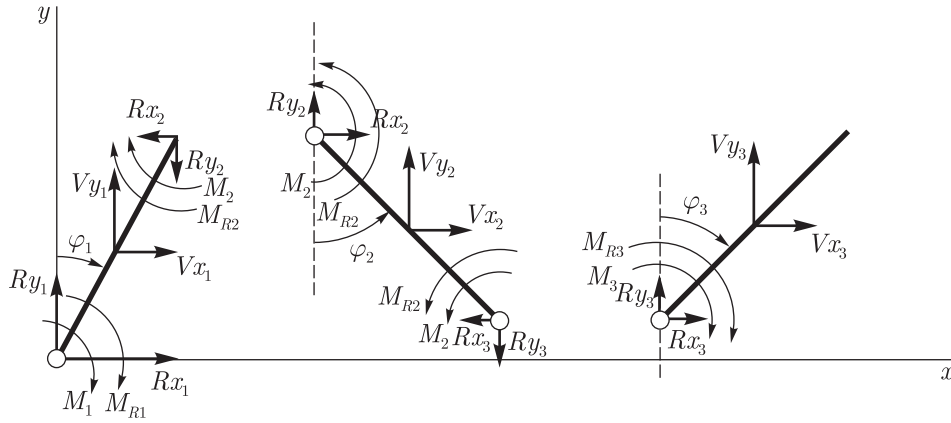


Рис. 1. Расчетная схема раскрытия ПСБ

На рис. 1 приняты следующие обозначения:  
 $Rx_1, Rx_2, Rx_3, Ry_1, Ry_2, Ry_3$  — реакции в шарнирах в процессе раскрытия;  
 $M_1, M_2, M_3$  — внешние моменты в створках.

Для составления дифференциальных уравнений, моделирующих раскрытие ПСБ, воспользуемся уравнениями Ньютона-Эйлера [13]

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 = Rx_1 - Rx_2 \\ m_1 \ddot{y}_1 = Ry_1 - Ry_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = Rx_2 - Rx_3 \\ m_2 \ddot{y}_2 = Ry_2 - Ry_3 \\ m_3 \ddot{x}_3 = Rx_3 \\ m_3 \ddot{y}_3 = Ry_3 \\ J_1 \ddot{\varphi}_1 = (Rx_1 + Rx_2) \frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1) - (Ry_1 + Ry_2) \frac{l_1}{2} \sin(\varphi_1) - (M_1 + M_2) \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 = -(Rx_2 + Rx_3) \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) - (Ry_2 + Ry_3) \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2) + (M_2 + M_3) \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 = Rx_3 \frac{l_3}{2} \cos(\varphi_3) - Ry_3 \frac{l_3}{2} \sin(\varphi_3) - M_3. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Систему (2.1) необходимо дополнить уравнениями связи, отражающими тот факт, что общие точки смежных панелей имеют одинаковые координаты, скорости, ускорения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 - \frac{l_1}{2} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) + \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1) = 0 \\ \ddot{y}_1 + \frac{l_1}{2} \ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) + \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1) = 0 \\ \ddot{x}_1 + \frac{l_1}{2} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) - \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1) = \ddot{x}_2 - \frac{l_2}{2} \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) + \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2) \\ \ddot{y}_1 - \frac{l_1}{2} \ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) - \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1) = \ddot{y}_2 + \frac{l_2}{2} \ddot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) + \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2) \\ \ddot{x}_2 + \frac{l_2}{2} \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) - \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2) = \ddot{x}_3 - \frac{l_3}{2} \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3) + \frac{l_3}{2} \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3) \\ \ddot{y}_2 - \frac{l_2}{2} \ddot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) - \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2) = \ddot{y}_3 + \frac{l_3}{2} \ddot{\varphi}_3 \sin(\varphi_3) + \frac{l_3}{2} \dot{\varphi}_3^2 \cos(\varphi_3). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

В итоге получаем систему 15 дифференциальных уравнений, линейных относительно неизвестных ускорений и реакций связей. Проинтегрировав эту систему, получим скорости створок ПСБ перед фиксацией.

## 2.2. Фиксация створок ПСБ

Процесс фиксации смежных створок характеризуется потерей их относительной скорости движения, возникновением ударных реакций во всех шарнирных соединениях и скачкообразным изменением угловых и линейных скоростей всех створок. Расчетная схема фиксации створок ПСБ показана на рис. 2.

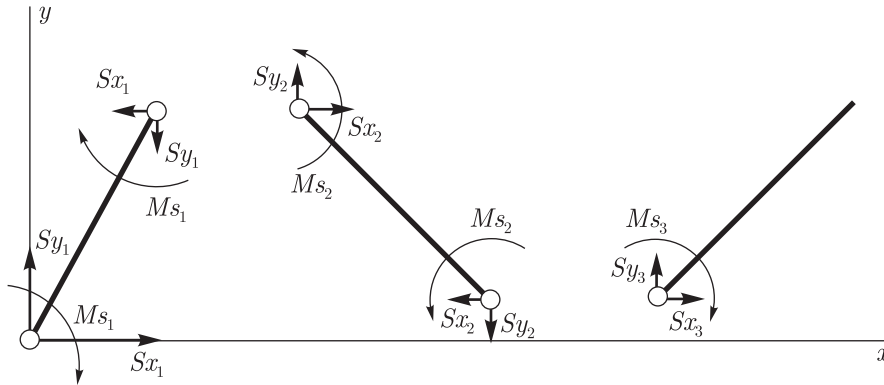


Рис. 2. Расчетная схема фиксации створок ПСБ

Процесс наложения мгновенных связей можно описать в соответствии с теорией удара следующими соотношениями, характеризующими изменение количества движения и момента количества движения системы [13]

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1(\dot{x}_{1k} - \dot{x}_{10}) = Sx_1 - Sx_2 \\ m_1(\dot{y}_{1k} - \dot{y}_{10}) = Sy_1 - Sy_2 \\ m_2(\dot{x}_{2k} - \dot{x}_{20}) = Sx_2 - Sx_3 \\ m_2(\dot{y}_{2k} - \dot{y}_{20}) = Sy_2 - Sy_3 \\ m_3(\dot{x}_{3k} - \dot{x}_{30}) = Sx_3 \\ m_3(\dot{y}_{3k} - \dot{y}_{30}) = Sy_3 \\ J_1(\dot{\varphi}_{1k} - \dot{\varphi}_{10}) = (Sx_1 + Sx_2) \frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1) - (Sy_1 + Sy_2) \frac{l_1}{2} \sin(\varphi_1) - Ms_1 - Ms_2 \\ J_2(\dot{\varphi}_{2k} - \dot{\varphi}_{20}) = -(Sx_2 + Sx_3) \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) - (Sy_2 + Sy_3) \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2) - Ms_2 - Ms_3 \\ J_3(\dot{\varphi}_{3k} - \dot{\varphi}_{30}) = Sx_3 \frac{l_3}{2} \cos(\varphi_3) - Sy_3 \frac{l_3}{2} \sin(\varphi_3) - Ms_3. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Здесь

$\dot{x}_{i0}, \dot{y}_{i0}, \dot{\varphi}_{i0}, \dot{x}_{ik}, \dot{y}_{ik}, \dot{\varphi}_{ik}$  — скорости створок до и после фиксации;

$Sx_i, Sy_i$  — импульсные реакции в  $i$ -ом шарнире при фиксации;

$M_{Si}$  — ударные импульсные моменты, возникающие в зафиксированном либо фиксирующемся  $i$ -ом шарнире при фиксации одной из створок.

Воспользуемся уравнениями связи и получим соотношения для скоростей общих точек:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1k} - \frac{l_1}{2}\dot{\varphi}_{1k} \cos(\varphi_1) = 0 \\ \dot{y}_{1k} + \frac{l_1}{2}\dot{\varphi}_{1k} \sin(\varphi_1) = 0 \\ \dot{x}_{1k} + \frac{l_1}{2}\dot{\varphi}_{1k} \cos(\varphi_1) = \dot{x}_{2k} - \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_{2k} \cos(\varphi_2) \\ \dot{y}_{1k} - \frac{l_1}{2}\dot{\varphi}_{1k} \sin(\varphi_1) = \dot{y}_{2k} + \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_{2k} \sin(\varphi_2) \\ \dot{x}_{2k} + \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_{2k} \cos(\varphi_2) = \dot{x}_{3k} - \frac{l_3}{2}\dot{\varphi}_{3k} \cos(\varphi_3) \\ \dot{y}_{2k} - \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_{2k} \sin(\varphi_2) = \dot{y}_{3k} + \frac{l_3}{2}\dot{\varphi}_{3k} \sin(\varphi_3). \end{cases} \quad (2.4)$$

Уравнения связи, показывающие, что угловые скорости зафиксированных между собой створок равны (отсутствует вращение  $i$ -й створки относительно  $i+1$ -й), имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 \delta_1 = 0 \\ (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \delta_2 = 0 \\ (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) \delta_3 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Решая систему уравнений (2.1)–(2.2) при следующих условиях:

$$m_1 = 125 \text{ кг}, m_2 = 125 \text{ кг}, m_3 = 125 \text{ кг}, l_1 = 5 \text{ м}, l_2 = 5 \text{ м}, l_3 = 5 \text{ м}, J_1 = 260.42 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ J_2 = 260.42 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, J_3 = 260.42 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$x_{10} = 0 \text{ м}, \dot{x}_{10} = 0.1 \text{ м/с}, x_{20} = 0 \text{ м}, \dot{x}_{20} = 0.1 \text{ м/с}, x_{30} = 0 \text{ м}, \dot{x}_{30} = 0.1 \text{ м/с}, y_{10} = \frac{l_1}{2} \text{ м},$$

$$\dot{y}_{10} = 0.1 \text{ м/с}, y_{20} = \frac{l_2}{2} \text{ м}, \dot{y}_{20} = 0.1 \text{ м/с}, y_{30} = \frac{l_3}{2} \text{ м}, \dot{y}_{30} = 0.1 \text{ м/с}, \varphi_{10} = 0 \text{ рад},$$

$$\dot{\varphi}_{10} = 0.1 \text{ рад/с}, \varphi_{20} = 0 \text{ рад}, \dot{\varphi}_{20} = 0.1 \text{ рад/с}, \varphi_{30} = 0 \text{ рад}, \dot{\varphi}_{30} = 0.1 \text{ рад/с}$$

получаются следующие значения скоростей в момент фиксации створок ПСБ:

$$\dot{x}_{10} = 0 \text{ м/с}, \dot{x}_{20} = 0 \text{ м/с}, \dot{x}_{30} = 0 \text{ м/с}, \dot{y}_{10} = -0.2426 \text{ м/с}, \dot{y}_{20} = -0.2426 \text{ м/с}, \\ \dot{y}_{30} = -0.2426 \text{ м/с}, \dot{\varphi}_{10} = 0.097 \text{ рад/с}, \dot{\varphi}_{20} = 0.097 \text{ рад/с}, \dot{\varphi}_{30} = 0.097 \text{ рад/с}.$$

Решая систему уравнений (2.3)–(2.5) с учетом полученных значений скоростей, находим импульсные реакции и ударные импульсные моменты, возникающие в процессе фиксации створок ПСБ:

$$Sx_1 = 0 \text{ Нс}, Sy_1 = -131.06 \text{ Нс}, Sx_2 = 0 \text{ Нс}, Sy_2 = 65.53 \text{ Нс}, Sx_3 = 0 \text{ Нс}, Sy_3 = 80.69 \text{ Нс}. \\ M_{S1} = -655.30 \text{ Нм}, M_{S1} = 327.65 \text{ Нм}, M_{S1} = 403.45 \text{ Нм}.$$

Поскольку КА, имеющий в своей конструкции ПСБ, можно отнести к сложной упругой системе, то для исследования его движения после раскрытия ПСБ используем подход, предложенный в п. 1.

Рассмотрим конструкцию КА после раскрытия ПСБ, представленную на рис. 3.

Данный КА является моделью элемента Международной космической станции (МКС). В качестве упругих элементов выступают стержень — модель отсека элемента МКС, пластина — модель ПСБ. Твердый полый цилиндр моделирует нерассматриваемую часть МКС. Характеристики исследуемой системы представлены в табл. 1.

При моделировании движения рассматриваемой системы будем считать, что пластина является однородной с постоянной толщиной. Изгибные деформации пластины предполагаются



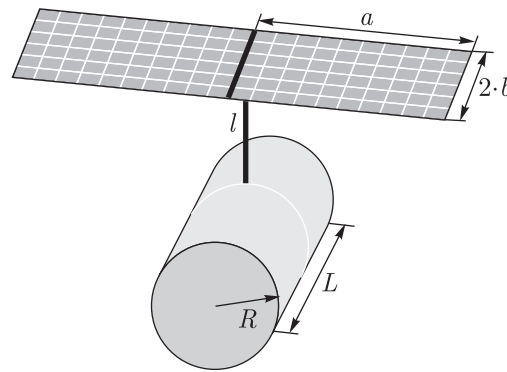


Рис. 3. Модель составной упругой системы

Таблица 1. Параметры составной упругой системы

Цилиндр		Вертикальный стержень		Пластина	
					
$D, м$	26	$D, м$	2	$h, м$	0,02
$\delta, м$	0,02	$\delta, м$	0,02	$a, м$	15
$L, м$	15	$l, м$	13	$b, м$	3,75

подчиняющимися закону Гука. Упругая ось стержня в недеформируемом состоянии прямолинейна и совпадает с линией центров тяжести поперечных сечений стержня. Отклонения отдельных точек оси стержня происходят перпендикулярно к прямолинейному, недеформированному ее направлению.

Рассматривается поведение системы на коротком промежутке времени  $\Delta t$ . Поэтому возмущающее воздействие аэродинамического сопротивления, сил гравитации и светового давления не учитывается. Перемещения всей системы и ее отдельных элементов принимаются малыми.

Изменения длин упруго-деформируемых элементов не учитывается. Вследствие того, что перемещения элементарной массы упруго-деформируемого элемента вдоль его продольной оси значительно меньше, чем перемещения в направлениях, перпендикулярных этой оси, такими перемещениями для получения оценочных характеристик можно пренебречь.

Для исследуемой системы (табл. 1) определены первые две собственные частоты и соответствующие им коэффициенты в разложении собственных форм (1.5) и (1.6) (см. табл. 2 и 3).

В табл. 2 и 3 коэффициенты  $\mu$  — описывают поступательные перемещения цилиндра,  $\lambda$  — описывают вращательные перемещения цилиндра;  $d, f$  — описывают изгибные колебания вертикального стержня в двух плоскостях;  $c$  — крутильные колебания вертикального стержня,  $g$  — изгибные колебания пластины. Данные коэффициенты были нормированы относительно подобных коэффициентов, описывающих движение корпуса КА.

Найденные коэффициенты позволяют определить действительные формы колебаний вертикального стержневого элемента, моделирующего отсек элемента МКС, и разложенной ПСБ по базисным функциям с помощью (1.5) и (1.6).

В качестве проверки моделирование рассматриваемого КА было также осуществлено с помощью метода конечных элементов. В результате были получены следующие собственные частоты:

$$\omega_1 = 0.70 \text{ Гц}, \quad \omega_2 = 1.28 \text{ Гц}.$$

В работе [14] приводятся результаты исследования свободных колебаний конструкции МКС. Исследования были проведены с использованием данных измерений низкочастотного акселерометра MAMS (Microgravity Acceleration Measurement System — Система Измерения Микрогра-

**Таблица 2.** Распределение коэффициентов в разложении форм колебания для первой собственной частоты  $\omega_1 = 0.69$  Гц

Перемещение цилиндра		Упругое перемещение вертикального стержня		Упругое перемещение пластин	
$\mu_1$	1	$d_1$	0,0093	$g_{11}$	-0,024
$\mu_2$	-1,3988	$d_2$	-0,0008	$g_{12}$	0,00014
$\mu_3$	-0,0654	$f_1$	0,7084	$g_{21}$	0,00016
$\lambda_1$	-0,0011	$f_2$	-0,053	$g_{22}$	-0,000013
$\lambda_2$	0,0055	$c$	-0,0193		
$\lambda_3$	-0,0113				

**Таблица 3.** Распределение коэффициентов в разложении форм колебания для второй собственной частоты  $\omega_2 = 1.27$  Гц

Перемещение цилиндра		Упругое перемещение вертикального стержня		Упругое перемещение пластин	
$\mu_1$	1	$d_1$	-19,0683	$g_{11}$	51,2146
$\mu_2$	-0,6081	$d_2$	1,6419	$g_{12}$	2,3539
$\mu_3$	1,2106	$f_1$	0,7293	$g_{21}$	0,7028
$\lambda_1$	0,1887	$f_2$	-0,03194	$g_{22}$	0,0715
$\lambda_2$	-0,0674	$c$	-0,0067		
$\lambda_3$	0,1877				

витационных Ускорений). Анализ полученных в работе [14] результатов показал, что основные возмущения конструкции МКС наблюдаются в диапазоне частот 0,701–1,35 Гц.

Порядок найденных собственных частот колебаний рассматриваемой модели КА совпадает с порядком действительных собственных частот колебаний конструкции МКС. Значение первой собственной частоты, определенной предлагаемым в настоящей работе методом, незначительно меньше нижней границы диапазона реальных собственных частот. Это связано с количеством принимаемых во внимание базисных функций, а также приближенным моделированием реального КА механической системой (рис. 3). Тем не менее, предлагаемый метод может быть применен на этапе проектирования сложных упругих конструкций различной компоновки.

Потенциальная энергия  $\Pi$  системы, входящая в (1.18), будет иметь вид

$$\Pi = S \cdot f(x, y, t) + M_S \cdot \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x}, \quad (2.6)$$

где

$S$  — вектор импульса, появляющегося при фиксации створок ПСБ,

$M_S$  — вектор импульсного момента, возникающего при фиксации створок ПСБ,

$f(x, y, t)$  — вектор упругих перемещений ПСБ.

С учетом (1.10), (2.6) принимает вид

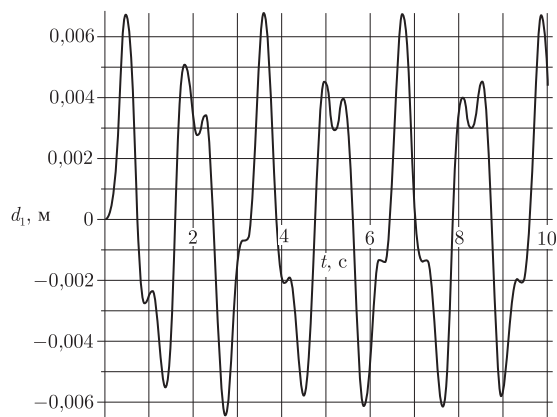
$$\begin{aligned} \Pi = & Sy_1 \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X_m\left(\frac{l_1}{2}\right) Y_n(y) + Sy_2 \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X_m\left(\frac{l_2}{2}\right) Y_n(y) + \\ & + Sy_3 \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X_m\left(\frac{l_3}{2}\right) Y_n(y) + \\ & + M_{S1} \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X'_m\left(\frac{l_1}{2}\right) Y_n(y) + M_{S2} \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X'_m\left(\frac{l_2}{2}\right) Y_n(y) + \\ & + M_{S3} \cdot g_1(t) \cdot \sum_{m,n} g_{m,n} X'_m\left(\frac{l_3}{2}\right) Y_n(y), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

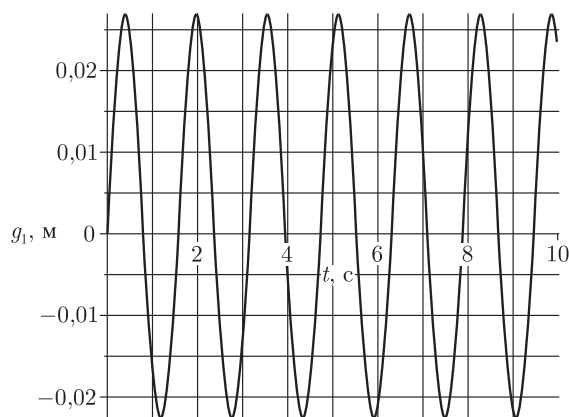
$g_1(t)$  — функция от времени в разложении (1.10), описывающая колебания пластины,  $g_{m,n}$  — коэффициенты в разложении собственных форм колебания пластины (табл. 2 для первой собственной частоты, табл. 3 для второй собственной частоты).

Используя (1.18), характеристики КА (табл. 1), а также коэффициенты в разложении собственных форм (табл. 2, табл. 3), получаем систему дифференциальных уравнений движения КА, которую можно легко проинтегрировать любым численным методом.

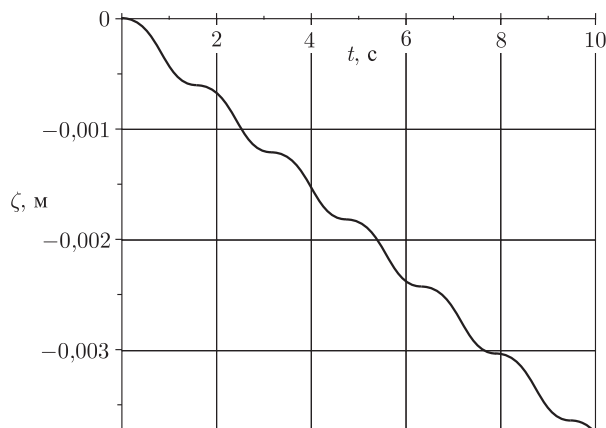
Графический результат численного интегрирования полученной системы дифференциальных уравнений движения КА при заданной начальной скорости  $\dot{g}_1(0) = -0,2426$  м/с (скорость створок ПСБ после фиксации) представлен ниже.



**Рис. 4.** Колебания вертикального стержневого участка системы



**Рис. 5.** Колебания пластины ПСБ

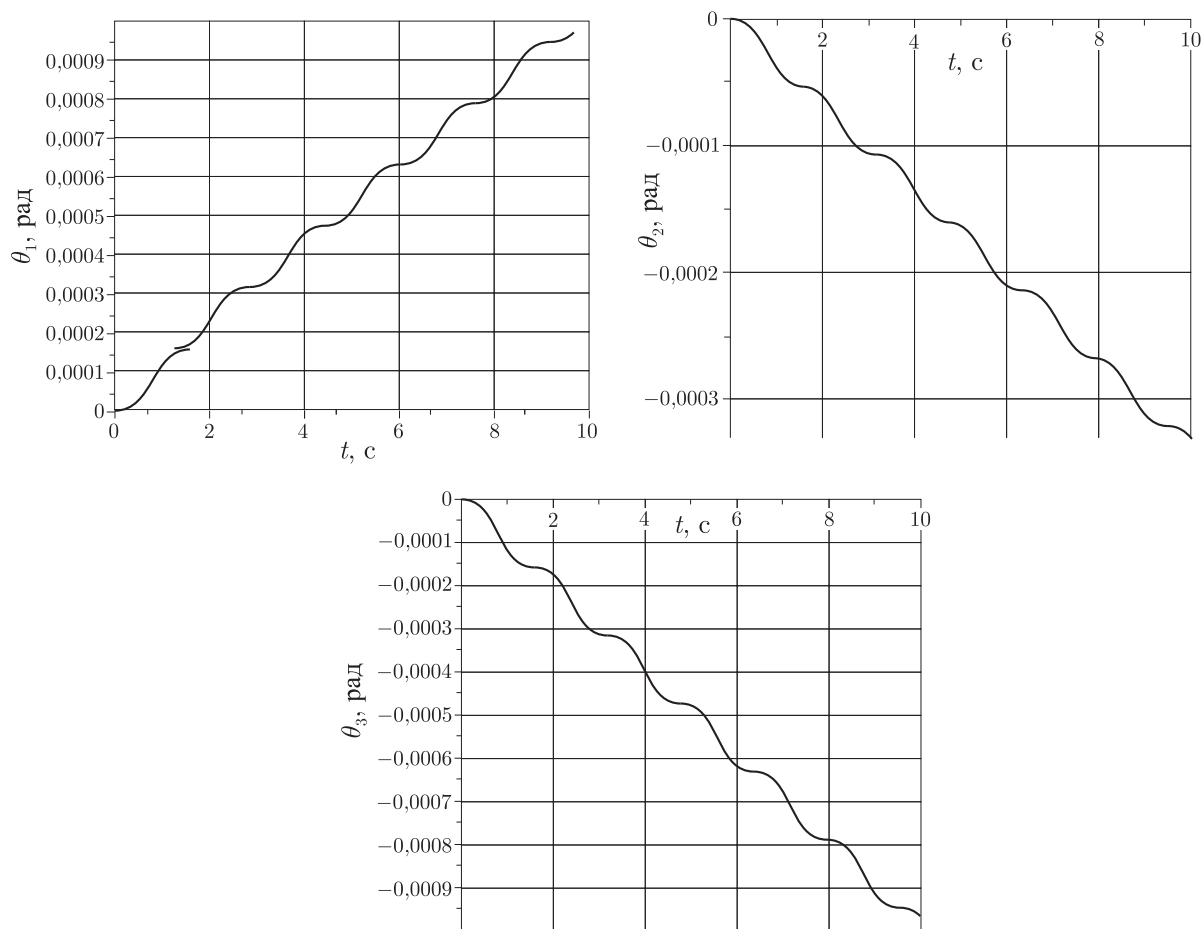


**Рис. 6.** Смещение системы вдоль оси цилиндра

Поскольку при моделировании КА не учитывались диссипативные силы, колебания упругих элементов системы (вертикальный стержень и пластины) являются свободными и незатухающими.

Несмотря на то, что перемещения системы довольно малы, данные возмущения могут оказывать значительное влияние на всю конструкцию в целом, ее прочность. В случае КА данные возмущения оказывают влияние на системы и аппаратуру, встроенную в КА.

Анализируя результаты (рис. 6, рис. 7), полученные для поступательного и вращательного движения цилиндрического основания системы (корпус КА), можно выработать решения по уменьшению (исключению) данного движения.



**Рис. 7.** Поворот системы относительно главных осей инерции цилиндра

### § 3. Выводы

Таким образом, при моделировании движения составной упругой конструкции с малыми деформациями возможно разложение движения системы на ортогональные формы отдельных ее элементов, соответствующие собственным частотам малых колебаний.

Моделирование упругих элементов телами с распределенными параметрами позволяет получить более точную математическую модель, описывающую движение механической системы. Предлагаемый метод определения собственных форм и частот колебаний конструкции позволяет свести систему дифференциальных уравнений движения системы в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это не только упрощает процедуру численного интегрирования уравнений движения, но и позволяет проводить качественный анализ возможных движений путем использования аналитически заданных форм колебаний.

Разработанный метод моделирования движения может быть использован для исследования колебаний в составной упругой системе, а также для выработки рекомендаций по их снижению.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорошилов В. С. Механические модели движения космического аппарата с солнечной батареей // Известия АН СССР. МТТ — 1978. — № 5. — С. 18–24.
2. Докучаев Л. В., Климов О. П. Об устойчивости вращения твердого тела с гибкими элементами // Известия АН СССР. МТТ — 1982. — № 5. — С. 10–15.
3. Набиуллин М. К. Стационарное движение и устойчивость упругих спутников. — Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1990. — 216 с.
4. Минович Л., Квинн Р. Д. Уравнение движения маневрирующего космического аппарата нежесткой конструкции // Аэрокосмическая техника. — 1988. — № 6. — С. 82–96.

5. Ганиев Р. Ф., Ковальчук П. С. Динамика систем твердых и упругих тел. Резонансные явления при нелинейных колебаниях. — М.: Машиностроение, 1980. — 208 с.
6. Lehner M., Eberhard P. Integration of a Multibody Simulation Module Into a CAE-System // European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2004.
7. Ambrosio J. Efficient Kinematic Joint Descriptions for Flexible Multibody Systems Experiencing Linear and Non-linear Deformations // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003. — № 56(12). — P. 1771–1793.
8. Bauchau O.A., Choi J.-Y., Bottasso C.L. On the Modeling of Shells in Multibody Dynamics // Multibody System Dynamics, 2002. — № 8. — P. 399–408.
9. Betsch P., Steinmann P.-Y. A DAE Approach to Flexible Multibody Dynamics // Multibody System Dynamics, 2002. — № 8. — P. 367–391.
10. Борисов М. В. Применение метода Релея-Ритца для нахождения собственных частот и форм колебаний сложной упругой системы // Студенческая наука аэрокосмическому комплексу: сб. тр. студентов и аспирантов факультета летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева. — Самара, 2004. — Вып. № 7. — С. 10–16.
11. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. — 824 с.
12. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
13. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. — М.: Наука, 1966.
14. Беляев М. Ю., Завалишин Д. А., Сазонов В. В. Определение характерных частот упругих колебаний конструкции международной космической станции: препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. — М., 2008. — № 86. — 32 с.

Поступила в редакцию 06.04.09

***M. V. Borisov, A. A. Avramenko***

#### **Modelling of motion of the spacecraft with elastic elements**

The purpose of the article is reception of mathematical model of motion of the complex elastic system. The normal modes and frequencies are searched by decomposition of vibrations on the modes of stationary elements of the system. It allows one to transform partial differential equations of motion in ordinary differential equations. The motion of a space craft which consists of elastic large size elements (solar panels) is modeled.

**Keywords:** complex elastic system, normal modes and frequency, differential equation of motion, elastic spacecraft, solar panels, Reyleigh–Ritz method, principle of Hamilton–Ostrogradskii.

Mathematical Subject Classifications: 74H45

Борисов Максим Владимирович,  
аспирант кафедры теоретической механики,  
Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева,  
443081, Россия, г. Самара, ул. Стара Загора, 88–34  
Тел. 8-917-105-71-26, E-mail: borisov.makson@rambler.ru

Авраменко Александр Алексеевич,  
к.т.н., доцент кафедры теоретической механики,  
Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34  
E-mail: avramenko\_a\_a@mail.ru