

Дисциплина
«РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ»

Лекция 2

**ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОНЯТИЯ АЛГОРИТМА
МАШИНА ПОСТА И АЛГОРИТМИЧЕСКИ НЕРАЗРЕШИМЫЕ
ПРОБЛЕМЫ**

Лектор: Михаил Васильевич Ульянов,
muljanov@mail.ru, 8 916 589 94 04

Интуитивное понятие алгоритма

Во всех сферах своей деятельности человек сталкивается с различными способами или методами решения разнообразных задач. Они определяют порядок выполнения некоторых действий для получения желаемого результата. Можно нестрого определить алгоритм как однозначно трактуемую процедуру решения задачи, т. е. как задание порядка выполнения действий для получения желаемого результата. Дополнительное требование о выполнении за конечное время для всех допустимых входных данных приводят к следующему **неформальному** (интуитивному) определению алгоритма:

Алгоритм — это заданное на некотором языке предписание *конечной* длины, задающее *конечную* последовательность выполнимых и точно определенных элементарных операций для решения задачи, общее для класса возможных исходных данных.

Словесные и строгие определения алгоритма

Несмотря на усилия ученых, сегодня отсутствует одно исчерпывающе *строгое* словесное определение понятия «алгоритм». Из разнообразных вариантов таких словесных определений наиболее удачные, по мнению автора, принадлежат российским ученым А.Н. Колмогорову и А.А. Маркову:

Определение 1 (А.Н. Колмогоров)

Алгоритм — это всякая система вычислений, выполняемых по строго определенным правилам, которая после какого-либо числа шагов заведомо приводит к решению поставленной задачи.

Определение 2 (А.А. Марков)

Алгоритм — это точное предписание, определяющее вычислительный процесс, идущий от варьируемых исходных данных к искомому результату.

Однако в начале XX века был сформулирован ряд проблем, возможность положительного решения которых некоторым алгоритмом представлялась маловероятной. Решение таких проблем потребовало привлечения новых мощных логических средств. Ведь одно дело доказать существование разрешающего алгоритма — это можно сделать, используя интуитивное понятие алгоритма. Другая, значительно более сложная задача — *доказать отсутствие алгоритма, решающего данную проблему*. Для решения этой задачи необходим математически строгий подход к определению понятия алгоритма.

Задача математически строгого определения понятия алгоритма была решена в 30-х годах XX века в работах Чёрча, Клини, Поста, Тьюринга в трех формах: на основе понятия рекурсивной функции (Чёрч, Клини), на основе описания алгоритмического процесса (Пост, Тьюринг) и на базе аппарата формальных грамматик (нормальные алгорифмы Маркова, 1950-е годы).

Подход Поста и Тьюринга заключался в том, что алгоритм определяется как дискретный процесс, осуществимый и реализуемый на некоторой абстрактной машине («машине Тьюринга» или «машине Поста»). Были сформулированы «тезис Тьюринга» и «гипотеза Поста», утверждающие, что любой алгоритм может быть реализован на соответствующей машине. Все подходы привели к определению одного и того же класса алгоритмически вычислимых функций. Указанные результаты составляют основу так называемой дескриптивной теории алгоритмов, основным содержанием которой является классификация задач по признаку алгоритмической разрешимости, то есть получение высказываний типа «Задача Z алгоритмически разрешима» или «Задача Z алгоритмически неразрешима».

Формализация понятия алгоритма. Машина Поста

Одной из фундаментальных статей, лежащей в основе современной теории алгоритмов, является статья Эмиля Леона Поста «Финитные комбинаторные процессы, формулировка 1», опубликованная в 1936 году (Post E. L. Finite combinatory process — formulation 1 // J. Symbolic Logic (1936) 1, pp. 103–105).

1. Пост рассматривает **общую проблему**, состоящую из множества **конкретных проблем**, при этом решением общей проблемы является такое решение, которое доставляет ответ *для каждой* конкретной проблемы. Например, решение уравнения $3x + 9 = 0$ — это одна из конкретных проблем, а решение уравнения $ax + b = 0$ — это общая проблема, тем самым алгоритм должен быть универсальным, т. е. должен быть соотнесен с общей проблемой.

Мы решаем общую проблему тогда, когда доставляем решение для каждой конкретной проблемы!

2. *Основные понятия* алгоритмического формализма Поста — это **пространство символов**, в котором задаётся конкретная проблема и получается ответ, и **набор инструкций**, т. е. операций в пространстве символов, задающих как сами операции, так и порядок их выполнения.

Постовское пространство символов представляет собой бесконечную ленту ящиков (ячеек), каждый из которых может быть или помечен или не помечен (память последовательного доступа).

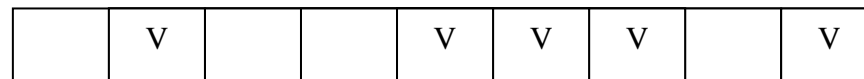


Рис. 1. Лента ячеек в машине Поста

3. Конкретная проблема задается «внешней силой» (термин Поста) путём пометки **конечного** числа ящиков, при этом, очевидно, что любая конфигурация, задающая конкретную проблему, начинается и заканчивается помеченным ящиком. Эта «уловка» Поста — уход от системы кодирования!

После применения к конкретной проблеме некоторого набора инструкций решение представляется также в виде набора помеченных и непомеченных ящиков, и правильность решения распознаётся той же *внешней силой*. Отметим, что сам термин «алгоритм» не используется Э. Постом, его заменяет в статье понятие набора инструкций (программы для машины Поста).

4. Пост предложил **набор инструкций**, которые выполняет «работник», отметим, что в 1936 году не было еще ни одной работающей электронной вычислительной машины. Сегодня мы бы сказали, что этот набор инструкций является минимальным набором битовых операций элементарного процессора:

1. Пометить ящик, **если он пуст**;
2. Стереть метку, **если она есть**;
3. Переместиться влево на 1 ящик;
4. Переместиться вправо на 1 ящик;

5. Определить помечен ящик или нет, и по результату перейти на одну из двух указанных инструкций (переход на номер строки – Бейзик!);

6. Остановиться (Стоп).

Программа представляет собой нумерованную последовательность инструкций (строк), причем переходы производятся на указанные в ней номера строк, содержащие другие инструкции. Программа, или «набор инструкций» в терминах Э. Поста, является *одной и той же для всех конкретных проблем*, и поэтому соотнесена с общей проблемой — таким образом, Пост формулирует требование универсальности алгоритма. Т.е. решение общей проблемы доставляется универсальным (в смысле конкретных проблем) «набором инструкций» (программой машины Поста).

Формализм Поста

Э. Л. Пост вводит следующие понятия:

— набор инструкций **применим** к общей проблеме, если для каждой конкретной проблемы не возникает коллизий в инструкциях 1 и 2, т. е. никогда программа не стирает метку в пустом ящике и не устанавливает метку в помеченном ящике;

— набор инструкций **заканчивается**, если после выполнения конечного количества инструкций выполняется инструкция 6 (Стоп);

— набор инструкций задаёт **финитный 1-процесс**, если набор *применим и заканчивается* для каждой конкретной проблемы;

— финитный 1-процесс для общей проблемы есть **1-решение**, если для каждой конкретной проблемы внешняя сила распознаёт *правильный* ответ.

Далее под термином «*Алгоритм*» мы будем понимать **1-решение** по Посту.

Гипотеза Поста

Э. Пост завершает свою статью следующей фразой: «Автор ожидает, что его формулировка окажется логически эквивалентной рекурсивности в смысле Гёделя — Чёрча. Цель формулировки, однако, в том, чтобы предложить систему не только определенной логической силы, но и психологической достоверности. В этом последнем смысле подлежат рассмотрению всё более и более широкие формулировки. С другой стороны, нашей целью будет показать, что все они **логически сводимы к формулировке 1**. В настоящий момент мы выдвигаем это умозаключение в качестве рабочей гипотезы. ... Успех вышеизложенной программы заключался бы для нас в превращении этой гипотезы не столько в определение или аксиому, сколько в закон природы».

Таким образом, гипотеза Поста состоит в том, что любые более широкие формулировки в смысле структуры пространства символов, алфавита символов

ленты, набора инструкций, представления и интерпретации конкретных проблем логически сводимы к формулировке 1 (см. рис 2).

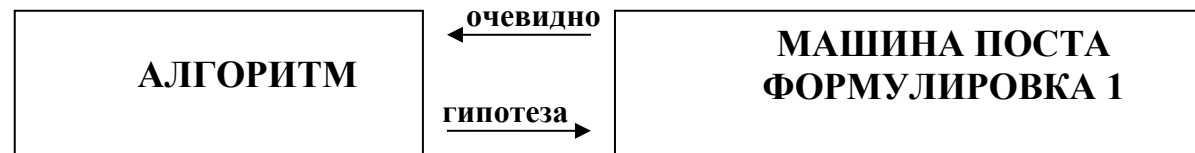


Рис. 2 Графическая интерпретация гипотезы Поста.

Следовательно, если гипотеза верна, то любые другие формальные определения, задающие некоторый класс алгоритмов, эквивалентны классу алгоритмов, заданных формулировкой 1, «обоснование этой гипотезы происходит сегодня не путем строго математического доказательства, а на пути эксперимента — действительно, всякий раз, когда нам указывают алгоритм, его можно перевести в форму программы машины Поста, приводящей к тому же результату» (Успенский).

Алгоритмическая неразрешимость и информационная неопределенность

За время своего существования человечество придумало множество алгоритмов для решения разнообразных практических и научных проблем. Зададимся вопросом — а существуют ли какие-нибудь проблемы, для которых *невозможно* придумать алгоритмы их решения? Утверждение о существовании алгоритмически неразрешимых проблем является весьма сильным — мы констатируем, что мы не только сейчас не знаем соответствующего алгоритма, но мы не можем *принципиально никогда его найти*.

Рассмотрим три задачи поиска в терминах машины Поста:

— на ленте помечен один ящик и «работник» находится левее — необходимо найти помеченный ящик; алгоритм задает число перемещений равное расстоянию между позициями — линейная сложность.

— на ленте помечен один ящик, и нам неизвестно в какой стороне от позиции работника — необходимо найти помеченный ящик; Усиление информационной неопределенности приводит к увеличению сложности — число шагов уже пропорционально квадрату расстояния между позициями!

— пусть на ленте машины Поста задана некоторая конкретная проблема — *конечная* последовательность помеченных ящиков (кортежей) произвольной длины с произвольными конечными расстояниями между кортежами и работник находится у самого левого помеченного ящика.

Задача состоит в поиске самого правого помеченного ящика. Попытка построения алгоритма, решающего эту задачу, приводит к необходимости ответа на вопрос — когда после обнаружения конца одного кортежа мы сдвинулись вправо по пустым ящикам на m позиций и не обнаружили начало следующего кортежа — больше на ленте кортежей нет или они есть еще где-то правее

текущей позиции? Мы сталкиваемся с алгоритмической неразрешимостью — потерей финитности процесса из-за информационной неопределенности!

Информационная неопределенность — отсутствие информации о количестве кортежей на ленте, или о максимальном расстоянии между кортежами — при наличии такой информации, т. е. при разрешении информационной неопределенности задача становится алгоритмически разрешимой.

В настоящее время в основе доказательства алгоритмической неразрешимости лежит **теорема**: *не существует алгоритма, позволяющего по описанию произвольного алгоритма и его исходных данных определить, останавливается ли этот алгоритм на этих данных или работает бесконечно.* Таким образом, алгоритмическая неразрешимость связана с бесконечностью числа действий, иными словами, с невозможностью предсказать, что для любых исходных данных решение будет получено за конечное количество шагов.

Литература

- [1.1] Post E. L. Finite combinatory process — formulation 1 // J. Symbolic Logic (1936) 1, pp. 103–105.
- [1.2] Turing A. M. On Computable Numbers, whiz an Application to the Entscheidungsproblem // Proc. London Math. Soc. (1937) 42, Ser 2, pp. 230–235.
- [1.3] Фалевич Б. Я. Теория алгоритмов: Учебное пособие. — М.: Машиностроение, 2004. —160 с.
- [1.4] Колмогоров А. Н., Успенский В. А. К определению алгоритма // Успехи математических наук. 1958., Т. 13. № 4. С. 3–28.
- [1.5] Марков А. А. Теория алгоритмов. // Труды математического института АН СССР им. В. А. Стеклова. — М.,1954. Т. 42.
- [1.6] Успенский В. А. Машина Поста. — М.: Наука, 1979. — 96 с.