- Variansi dari variabel random mengendalikan penyebaran distribusinya disekitar mean. Variansi kecil menunjukan besar deviasi disekitar mean adalah mustahil.

Variansi yang tepat mengenai ungkapan diatas, disebut pertaksamaan **MARKOV** dan pertaksamaan **CHEBYSHEV.** Pertaksamaan ini, sangat baik sekali manfaatnya;karena tidak memerlukan bantuan distribusi peluang. Yang diperlukan hanya μ dan σ^2

Teorema Chebyshev (1)

- Teorema Chebyshev:
  Probabilitas dari sembarang peubah acak m X dalam selang k simpangan baku dari rataan sekurang-kurangnya $1 - 1/k^2$, atau

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

- Bukti dari Teorema Chebyshev:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

- Bukti dari Teorema Chebyshev (Lanjutan):

  Sekarang karena $|x-\mu| \geq k\sigma$, maka berlaku $(x-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2$, sehingga kedua suku terakhir dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} k^2\sigma^2 f(x)\,dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\infty} k^2\sigma^2 f(x)\,dx \text{ atau } \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)\,dx \leq \frac{1}{k^2}$$

Sehingga diperoleh:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} f(x)\,dx \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

JIKA X ADALAH VARIABEL RANDOM DENGAN MEAN μ DAN VARIANSI σ^2, MAKA UNTUK SUATU NILAI $k > 0$; $k \in R$, BERLAKU :

$$P\left\{|X-\mu| \geq k\right\} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Contoh Penggunaan Teorema Chebyshev:

Peubah acak X mempunyai rataan μ=8 dan variansi σ^2 = 9, serta distribusi peluang tidak diketahui. Tentukan P(-4 < x < 20).

Jawab:

P(-4 < x < 20) = $P[8-(4)(3) < x < 8+(4)(3)] \geq \frac{15}{16}$

Pertaksamaan markov

Jika X adalah variabel random yang hanya mengambil nilai-nilai yang non-negatif, maka untuk $a > 0$, $a \in R$ berlaku :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Siswa kelas rpl 1a sedang mengikuti ujian. Ujian berlangsung selama 120 menit tetapi jika kita memilih siswa secara acak, perkiraan waktu untuk menyelesaikan ujian hanya 60 menit. Misalkan T adalah waktu yang dibutuhkan siswa. Berapakah batas bawah terbaik yang dapat Anda tunjukkan untuk P(T <90).

Berikut adalah ikatan yang menggunakan **Pertidaksamaan Markov:** $P(T \geq k) \leq E(T)/k$, asalkan $P(T > 0) = 1$. Syaratnya terpenuhi karena tidak ada waktu ujian negatif.$P(T \geq k) \leq E(T)/k$, provided $P(T > 0) = 1$. The condition is satisfied because there are no negative exam times.

Jadi

$P(T < 90) = 1 - P(T \geq 90) \geq 1 - 60/90 = 1/3.P(T < 90) = 1 - P(T \geq 90) \geq 1 - 60/90 = 1/3.$