- Suatu kejadian dapat merupakan gabungan atau irisan dari dua atau lebih kejadian lain.

- Kita ingin menghitung peluang suatu kejadian apabila diketahui peluang kejadian lain.

- Ada beberapa aturan yang dapat dipakai.
  1. Aturan penjumlahan
  2. Peluang bersyarat
  3. Aturan perkalian
  4. Aturan Bayes

- Masing-masing aturan dijelaskan pada slide-slide berikut ini.

Aturan Penjumlahan

Teorema 1: Bila A dan B adalah kejadian sembarang, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

Bukti: Dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi dari teori himpunan,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

maka

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= |A \cup B| / |S| \\ &= (|A| + |B| - |A \cap B|) / |S| \\ &= |A|/|S| + |B|/|S| - |A \cap B|) / |S| \\ &= P(A) + P(B) – P(A \cap B) \end{aligned}$$

- Pada dua kejadian yang saling meniadakan (terpisah), $P(A \cap B) = 0$, sehingga $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Untuk n kejadian yang saling terpisah, maka

  $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

Teorema 2: Untuk tiga kejadian sembarang A,B, dan C, maka $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B)$

$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

- **Contoh 1**. Sebuah dadu dilemparkan sekali. Berapa peluang munculnya angka 3 atau 4?

  Jawaban:

  A = kejadian munculnya angka 3 → $P(A) = 1/6$

  B = kejadian munculnya angka 4 → $P(B) = 1/6$

  $A \cup B$ = kejadian munculnya angka 3 atau 4

  Tidak mungkin satu kali lemparan menghasilkan 3 dan 4 secara bersamaan, jadi dua kejadian ini terpisah, maka

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$

- **Contoh 2**. Seorang mahasiswa mengambil 2 mata kuliah (FI dan KI). Peluang lulus kuliah FI adalah 3/5 dan peluang lulus kuliah KI adalah 2/3. Peluang lulus kedua mata kuliah tersebut adalah 5/6. Berapa peluang lulus paling sedikit satu mata kuliah?

  Jawaban:

  A = kejadian lulus mata kuliah FI → $P(A) = 3/5$

  B = kejadian lulus mata kuliah KI → $P(B) = 2/3$

  $A \cap B$ = kejadian lulus FI dan KI → $P(A \cap B) = 5/6$

  Ditanya $P(A \cup B) = ?$

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= 3/5 + 2/3 - 5/6 \\
&= 18/30 + 20/30 - 25/30 \\
&= 13/30
\end{aligned}
$$

- **Contoh 3**. Dari 100 orang mahasiswa yang diwisuda, ditanya apakah akan bekerja atau kuliah S2 setelah wisuda. Ternyata 50 orang berencana akan bekerja, 30 orang berencana akan S2, dan 36 orang berencana salah satu dari keduanya (bekerja atau S2). Seorang wisudawan dipilih secara acak. Berapa peluang wisudawan yang terpilih berencana bekerja sambil kuliah S2?

  Jawaban:

  A = kejadian memilih wisudawan yang akan bekerja → $P(A) = 50/100$

  B = kejadian memilih wisudawan yang akan S2 → $P(B) = 30/100$

  $A \cup B$ = kejadian memilih wisudawan yang akan bekerja atau S2

  → $P(A \cup B) = 36/100$

  Ditanya $P(A \cap B) = ?$

  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) – P(A \cup B)$

  $= 50/100 + 30/100 – 36/100 = 44/100 = 0.44$

- **Latihan**. Hasan ingin membeli mobil baru. Ada tiga pilihan merek mobil yang akan dia beli: Avanza, Xenia, dan Honda Jazz. Peluang membeli masing-masing mobil itu adalah 0.4, 0.3, dan 0.2. Berapa peluang Hasan membeli salah satu mobil itu?

- **Latihan**. Dua buah dadu dilemparkan bersamaan. Angka-angka yang muncul dari kedua dadu dicatat kemudian dijumlahkan. Berapa peluang mendapatkan jumlah 8 atau 10?

- Teorema 3: Bila A dan A' adalah dua kejadian yang komplementer, maka P(A') = 1 – P(A)

- **Contoh 4**. Sebuah koin yang fair dilempar sebanyak 6 kali. Berapa peluang paling sedikit satu kali muncul sisi angka (A)?

  Jawaban:

  S = ruang sampel, |S| = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^6 = 64

  E = kejadian paling sedikit satu kali muncul sisi angka

  E' = kejadian tidak muncul sisi angka satu buah pun.

  P(E') = 1/64

  Ditanya P(E) = ?

  P(E) = 1 – P(E') = 1 – 1/64 = 63/64

- **Contoh 5**. Sebuah kotak berisi 6 bola merah, 4 bola putih, dan 5 bola biru. Sebuah bola diambil dari kotak tersebut. Berapa peluang bahwa bola yang terambil adalah:

  (a) merah

  (b) biru

  (c) bukan merah

  (d) merah atau putih

  Jawaban:

  M = kejadian yang terpilih bola merah

  P = kejadian yang terpilih bola putih

  B = kejadian yang terpilih bola biru

  (a) $P(M) = 6/(6 + 4 + 5) = 6/15 = 2/5$

  (b) $P(B) = 5/15 = 1/3$

  (c) $P(M') = 1 – P(M) = 1 – 2/5 = 3/5$

  (d) M dan P terpisah, maka $P(M \cup P)= P(M) + P(P)= 2/5 + 4/15= 2/3$

- **Latihan**. Sebuah kartu diambil dari tumpukan kartu remi yang terdiri dari 52 kartu. Ada 13 jenis kartu dan setiap jenis terdiri dari gambar sekop, hati, keriting dan wajik. Berapa peluang kartu yang terambil adalah:

  (a) kartu As

  (b) kartu Jack bergambar hati

  (c) kartu As keriting atau kartu King wajik

  (d) sebuah kartu hati

  (e) kartu lain kecuali hati

  (f) kartu As atau kartu bergambar sekop

  (g) bukan kartu As atau kartu yang bergambar sekop

  (jawaban ada pada slide berikut)

Jawaban:

(a) A = kejadian kartu yang terpilih adalah kartu As

$P(A) = 4/52 = 1/13$

(b) B = kejadian kartu yang terpilih adalah kartu Jack bergambar hati

$P(B) = 1/52$

(c) C = kejadian kartu yang terpilih adalah kartu As keriting atau kartu King wajik

$P(C) = 1/52 + 1/52 = 2/52 = 1/26$

(d) D = kejadian kartu yang terpilih adalah sebuah kartu hati

$P(D) = 1/52 + 1/52 + \ldots + 1/52$ (13 kali) $= 13/52 = 1/4$

(e) E = kejadian kartu yang terpilih bukan kartu hati

$P(E) = 1 - 1/4 = 3/4$

(f) F = kejadian kartu yang terpilih adalah kartu As atau kartu bergambar sekop $\rightarrow$ bukan kejadian yang saling meniadakan

$P(F) = P(As) + P(sekop) – P(As \cap sekop)$

$= 4/52 + 13/52 – 1/52 = 16/52 = 4/13$

(g) G = kejadian kartu yang terpilih bukan kartu As atau kartu yang bergambar sekop

$P(G) = 1 – P(As\ atau\ sekop)$

$= 1 – \{P(As) + P(sekop) – P(As\ dan\ sekop)\}$

$= 1 – (4/52 + 13/52 – 1/52)$

$= 9/13$

- **Latihan.** Dari 8 bit (atau 1 *byte*) yang dibangkitkan secara acak, berapa peluang bahwa *byte* tersebut tidak dimulai dengan ‘11’?

- **Latihan**. Peluang seorang mahasiswa mendapat upah Rp5, Rp7, Rp8, Rp9 dan Rp10 atau lebih selama empat hari bekerja paruh-waktu adalah 0.12, 0.24, 0.4, 0.1, dan 0.07. Berapa peluang upah paling sedikit 8 pada hari berikutnya?

Peluang Bersyarat

- Peluang terjadinya suatu kejadian bila diketahui kejadian lain disebut **peluang bersyarat.**
- Misalkan sebuah dadu dilempar satu kali. Kita ingin menghitung berapa peluang angka yang muncul kurang dari 4.
- Misalkan B adalah kejadian angka yang muncul kurang dari 4, maka mudah dihitung bahwa $P(B) = 3/6 = ½$.
- Misalkan A adalah kejadian angka yang dihasilkan adalah ganjil. Mudah dihitung $P(A) = 3/6 = ½$
- Berapa peluang kejadian B jika diberikan informasi bahwa lemparan tersebut menghasilkan angka ganjil? → Peluang bersyarat.

- Notasi: $P(B|A)$
- Dibaca: peluang B terjadi bila diketahui A terjadi

$$P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A) \quad \text{bila } P(A) > 0$$

- Pada contoh tadi,

  $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3$

  maka

  $P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A) = 1/3 \, / \, ½ = 2/3$

- Jadi, informasi tambahan bahwa pelemparan dadu menghasilkan angka ganjil membuat peluang naik dari ½ menjadi 1/3.

- Dengan kata lain, keterangan tambahan mengubah peluang suatu kejadian. Pada contoh di atas, $P(B \mid A) \neq P(B)$ yang menunjukkan bahwa B bergantung pada A.

- **Contoh 6**. Kereta api Argo Lawu selalu berangkat tepat waktu dengan peluang 0.83, dan peluang sampai tepat waktu adalah 0.82, dan peluang berangkat dan sampai tepat waktu adalah 0.78. Berapa peluang (a) KA Argo Lawu sampai tepat waktu bila diketahui berangkat tepat waktu, dan (b) KA Argo Lawu berangkat tepat waktu jika diketahui sampai tepat waktu.

  Jawaban:

  A = kejadian KA Argo Lawu berangkat tepat waktu

  $\rightarrow P(A) = 0.83$

  B = kejadian KA Argo Lawu sampai tepat waktu

  $\rightarrow P(B) = 0.82$

  $P(A \cap B) = 0.78$

  (a) $P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A) = 0.78 / 0.83 = 0.94$

  (b) $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B) = 0.78 / 0.82 = 0.95$

- Dua kejadian A dan B dikatakan **bebas** jika dan hanya jika

$$P(B \mid A) = P(B)$$

dan

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Jika tidak demikian dikatakan **tidak bebas**.

- Pada kasus $P(B \mid A) = P(B)$, maka terjadinya A sama sekali tidak mempengaruhi terjadinya B.

- Begitu pula pada kasus $P(A \mid B) = P(A)$, maka terjadinya B sama sekali tidak mempengaruhi terjadinya A.

- **Contoh 7**. Dua buah kartu remi diambil berturut-turut dari tumpukan kartu dengan pengembalian (kartu pertama setelah diambil dikembalikan lagi ke tumpukan). Misalkan A adalah kejadian kartu pertama yang terambil adalah kartu As dan B adalah kejadian kartu kedua yang terambil adalah kartu wajik.

  maka

  $$P(B) = 13/52 = 1/4$$

  sama dengan

  $$P(B \mid A) = 13/52 = 1/4$$

  Dikatakan kejadian A dan B bebas.

Aturan Perkalian

- Karena $P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A)$,maka dengan mengalikan secara silang diperoleh

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A)$$

- Dikatakan bahwa kejadian A dan B terjadi secara serentak.
- Karena kejadian $A \cap B$ dan $B \cap A$ ekivalen, maka juga berlaku

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)$$

- Jadi, tidak penting mengetahui kejadian mana yang terjadi, A atau B

- **Contoh 8**. Dari sebuah kotak yang berisi 20 bola, lima diantaranya berwarna merah. Dua buah bola diambil satu per satu secara acak tanpa mengembalikan bola pertama ke dalam kotak. Berapa peluang kedua bola yang terambil berwarna merah?

  Jawaban:

  A = kejadian bola pertama yang diambil adalah merah

  B = kejadian bola kedua yang diambil adalah merah

  (B terjadi setelah A terjadi)

  $P(A) = 5/20 = 1/4$

  $P(B \mid A) = 4/19$

  Ditanya $P(A \cap B) = ?$

  $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = 1/4 \times 4/19 = 1/19$

- Bila kejadian A dan B bebas, maka $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ini dinyatakan dengan **teorema perkalian khusus** sbb:

  Teorema. Dua kejadian A dan B dikatakan bebas jika dan hanya jika $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

- **Contoh 9**. Dari Contoh 8 di atas, jika bola pertama dikembalikan ke dalam kotak dan isi kotak diacak kembali sebelum mengambil bola kedua, berapa peluang kedua bola yang terambil berwarna merah?

  Jawaban:

  A = kejadian bola pertama yang diambil adalah merah

  B = kejadian bola kedua yang diambil adalah merah

  $P(A) = 1/4$ dan $P(B) = 1/4$, maka $P(A \cap B) = P(A)P(B)=1/16$

- **Latihan**. Dua kartu diambil dari setumpuk kartu remi yang telah dikocok dengan baik. Tentukan peluang bahwa kedua kartu yang diambil adalah kartu As, jika

  (a) kartu pertama dikembalikan

  (b) kartu pertama tidak dikembalikan

  (jawaban sesudah *slide* ini)

Jawaban:

Misalkan

A = kejadian kartu pertama adalah kartu As

B = kejadian kartu kedua adalah kartu As

(a) A dan B bebas; $P(A) = 4/52$ dan $P(B) = 4/52$

Ditanya $P(A \cap B) = ?$

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 4/52 \times 4/52 = 1/169$

(b) B bergantung pada; $P(A) = 4/52$ dan $P(B \mid A) = 3/51$

Ditanya $P(A \cap B) = ?$

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B \mid A) = 4/52 \times 3/51 = 1/221$

Ada cara lain kah?

Ada! Gunakan kombinatorial.

(a) Ada 4 cara memilih kartu As pertama, dan karena kartu pertama dikembalikan, maka ada 4 cara untuk mengambil kartu As kedua. Seluruhnya ada 4 x 4 cara. Ruang sampel untuk masalah ini berukuran 52 x 52, sebab ada 52 cara mengambil sembarang kartu pertama dan 52 cara mengambil sembarang kartu kedua (karena kartu pertama dikembalikan). Maka peluang memperoleh dua kartu As adalah

$$(4)(4)/(52)(52) = 1/169$$

(b) Mirip dengan (a), tetapi karena kartu pertama tidak dikembalikan, maka ada 4 x 3 cara mengambil dua kartu as. Ruang sampel berukuran 52 x 51. Jadi, eluang memperoleh dua kartu As adalah

$$(4)(3)/(52)(51) = 1/221$$

- Aturan perkalian dapat dirampatkan untuk n kejadian sbb:

Teorema. Bila dalam suatu eksperimen kejadian A_1, A_2, ..., A_n dapat terjadi, maka

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1})$$

dan bila A_1, A_2, ..., A_n bebas, maka

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

- **Contoh 10**. Sebuah bola diambil secara berurutan dari dalam sebuah kotak. Kotak berisi 6 bola merah, 4 bola putih, dan 5 bola biru. Tentukan peluang bahwa bola-bola yang diambil ternyata berurutan merah, putih, dan biru jika:

  (a) setiap bola yang diambil dimasukkan kembali ke dalam kotak

  (b) setiap bola yang diambil tidak dimasukkan kembali ke dalam kotak

  Jawaban:

  M = kejadian mengambil bola merah pada pengambilan pertama

  P = kejadian mengambil bola putih pada pengambilan kedua

  B = kejadian mengambil bola biru pada pengambilan pertama

  (a) M, P, dan B adalah bebas

  $$P(M \cap P \cap B) = P(M)\, P(P)\, P(B) = 6/15 \times 4/15 \times 5/15 = 8/225$$

  (b) P bergantung pada M, B bergantung pada M dan P

  $$P(M \cap P \cap B) = P(M)\, P(P|M)\, P(B \mid M \cap P)$$

  $$= 6/15 \times 4/14 \times 5/13 = 4/91$$

Aturan (Teorema) Bayes

- **Teorema**. Misalkan B_1, B_2, ..., B_n adalah kejadian-kejaian yang terpisah (saling meniadakan) yang gabungannya adalah ruang sampel S, dengan kata lain salah satu dari kejadian tersebut harus terjadi. Jika A adalah kejadian sembarang dalam S dengan P(A) $\neq$ 0, maka

$$P(B_r \mid A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A \mid B_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A \mid B_i)}$$

- Aturan Bayes memungkinkan kita menentukan peluang berbagai kejadian B_1, B_2, ..., B_n yang dapat menyebabkan A terjadi

- **Contoh 11**. Tiga orang dosen dicalonkan menjadi Rektor sebuah perguruan tinggi, yaitu Ahmad, Budi, dan Catur. Peluang Ahmad terpilih adalah 0.3, Budi 0.5, dan Catur 0.2. Bila Ahmad terpilih maka peluang SPP naik adalah 0.8, dan bila Budi yang terpilih peluang SPP naik adalah 0.1, dan bila Catur yang terpilih maka peluang SPP naik adalah 0.4. Bila setelah pemilihan diketahui bahwa SPP telah naik (siapa yang terpilih tidak diketahui informasinya), berapakah peluang bahwa Catur yang terpilih?

  Jawaban:

  Misalkan

  A : kejadian orang yang terpilih menaikkan SPP

  B_1 : kejadian Ahmad yang terpilih

  B_2 : kejadian Budi yang terpilih

  B_3 : kejadian Catur yang terpilih

  Berdasarkan aturan Bayes, maka

  $$P(B_3|A) = P(B_3 \cap A) / \{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)\}$$

$P(B_1 \cap A) = P(B_1)P(A|B_1) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$
$P(B_2 \cap A) = P(B_2)P(A|B_2) = 0.5 \times 0.1 = 0.05$
$P(B_3 \cap A) = P(B_3)P(A|B_3) = 0.2 \times 0.4 = 0.08$

$P(B_3|A) = P(B_3 \cap A) / \{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)\}$
$= 0.08 / (0.24 + 0.05 + 0.08) = 8/37$

Karena 8/37 = 0.216 < 0.5 maka kemungkinan besar bukan Catur yang yang terpilih sebagai rektor.

- **Latihan**. Dalam industri perakitan, tiga mesin yaitu M1, M2, dan M3 menghasilkan 30%, 45%, dan 25% produk. Diketahui dari pengalaman sebelumnya bahwa 2%, 3%, dan 2% dari produk yang dihasilkan setiap mesin mengalami kerusakan (cacat). Diambil satu produk secara acak, tentukan peluang bahwa produk yang cacat itu berasal dari mesin M3.

  (jawaban ada di balik ini)

Jawaban:

$$P(B_3|A) = P(B_3)P(A|B_3) / \{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)\}$$

$$= (0.25)(0.02) / \{(0.3)(0.02) + (0.45)(0.03) + (0.25)(0.02)\}$$

$$= 10/49$$