BAB 7
PENYEDERHANAAN

1. Pendahuluan

Bab ini membahaspenggunaan hukum-hukum logika pada operasi logika yang dinamakan **penyederhaan** (*simplifying*). Berbagai macam ekuivalensi dari berbagai ekpresi logika memberi kemudahan bagi penyederhanaan karena bentuk ekspresi logika yang rumit dapat disederhanakan.

2. Operasi penyederhanaan

Operasi penyederhanaan akan menggunakan tabel berikut yang berisi berbagai ekuivalensi logis dan hukum-hukum logika proposisional:

1. Hukum Komutatif	$A \wedge B \equiv B \vee A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
2. Hukum Asosiatif	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
3. Hukum Distributif	$A\wedge (B\vee C) \equiv (A\wedge B) \vee (A\wedge C)$	$A\vee (B\wedge C) \equiv (A\vee B) \wedge (A\vee C)$
4. Hukum Identitas	$A \wedge 1 \equiv A$	$A \vee 0 \equiv A$
5. Hukum Ikatan	$A \vee 1 \equiv 1$	$A \wedge 0 \equiv 0$
6. Hukum Negasi	$A \vee \neg A \equiv 1$	$A \wedge \neg A \equiv 0$
7. Hukum Negasi ganda	$\neg(\neg A) \equiv A$	
8. Hukum Idempoten	$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
9. Hukum De Morgan	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
10. Hukum Absorbsi	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
11. Negasi T dan F	$\neg 1 \equiv 0$	$\neg 0 \equiv 1$
12.	$(A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B) \equiv A$	
13.	$A\rightarrow B \equiv \neg A\vee B$	$A\rightarrow B \equiv \neg(A\wedge\neg B)$
14.	$A\leftrightarrow B \equiv (A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$	$A\leftrightarrow B \equiv (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
15.	$(A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B) \equiv A$	$(A\vee B)\wedge(A\vee\neg B) \equiv A$
16.	$(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge B) \equiv A$	$(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge B) \equiv A$

Dalam tautologi, nilai kebenaran dapat diganti sebagai berikut:

True (T) ≡ 1

False (F) ≡ 0

Sekarang dapat dicoba pada tabel kebenaran berikut:

A	1	0	$A \wedge 1$	$A \wedge 0$
T	T	F	T	F
F	T	F	F	F

Dengan melihat nilai pada tabel kebenaran dapat disimpulkan bahwa:

$A \wedge 1 \equiv A$

$A \wedge 0 \equiv 0$

Dengan tabel kebenaran juga dapat dibuktikan bahwa:

$A \vee 1 \equiv 1$

$A \vee 0 \equiv A$

A	1	0	$A \vee 1$	$A \vee 0$
T	T	F	T	T
F	T	F	T	F

Untuk membuat penyederhanaan, pertama kali yang harus dihilangkan adalah perangkai implikasi (→) dan perangkai ekuivalen (↔), dan dijadikan kombinasi dari perangkai konjungsi (∧), dijungsi (∨), dan negasi (¬).

Lihat kesamaan logisnya seperti berikut:

$A \rightarrow B \equiv \neg A \wedge B$

$A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$\equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Jika hasil penyederhaan bernilai1, maka tergolong tautologi. Jika 0 maka tergolong kontradiksi, sedangkan jika hasilnya tidak 1 ataupun 0, maka tergolong *contingent*. Hasil penyederhanaan sudah tidak memungkinkan proses manipulasi dilanjutkan.

Contoh:

1. $(A\vee 0) \wedge (A\vee\neg A) \equiv A \wedge (A\vee\neg A)$ hk. Identitas
   $\equiv A \wedge 1$ hk. Negasi
   $\equiv A$ hk. Identitas

2. $(A\wedge\neg B) \vee (A\wedge B\wedge C) \equiv (A\wedge\neg B) \vee (A\wedge(B\wedge C))$ tambah kurung
   $\equiv (A \wedge (\neg B\vee(B\wedge C))$ hk. Distributif
   $\equiv (A \wedge (\neg B\vee B)\wedge(\neg B\vee C))$ hk. Distributif
   $\equiv (A \wedge (1\wedge(\neg B\vee C))$ hk. Negasi
   $\equiv (A \wedge (\neg B\vee C))$ hk. Identitas

3. $(A\vee B)\wedge\neg A\wedge\neg B \equiv \neg A\wedge(A\vee B)\wedge\neg B$ hk. Komutatif
   $\equiv (\neg A\wedge(A\vee B))\wedge\neg B$ tambah kurung
   $\equiv \neg A\wedge(B\wedge\neg B)$ hk. Asosiatif
   $\equiv \neg A\wedge 0$ hk. Negasi
   $\equiv 0$ hk. Ikatan

Latihan soal:

Sederhanakan bentuk –bentuk logika berikut ini menjadi bentuk paling sederhana dan buktikan:

1. $\neg A \rightarrow \neg(A\rightarrow \neg B) \equiv A$
2. $A\vee(A\wedge B) \equiv A$
3. $A\wedge(A\vee B) \equiv A$
4. $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A) \equiv (A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$
5. $((A\wedge(B\rightarrow C))\wedge(A\rightarrow(B\rightarrow\neg C)))\rightarrow A \equiv 1$
6. $((A\vee B)\wedge\neg A)\rightarrow\neg B \equiv A\vee\neg B$
7. $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow\neg A) \equiv \neg A\vee\neg B$

3. Menghilangkan perangkai → dan ↔

Perangkai dasar yang sebenarnya hanya $\neg$, $\wedge$, dan $\vee$. Jadi, semua perangkai dapat dijelaskan hanya dengan tiga perangkai dasar atau alamiah tersebut. Dengan demikan perangkai implikasi dan ekuivalen dapat diganti dengan perangkai dasar.

Perangkai implikasi dan ekuvalen dapat digunakan hukum logika pada tabel diatas:

1. $A \rightarrow B \equiv \neg A \wedge B$
2. $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
3. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Contoh:

1. Hilangkan tanda → dari ekuivalensi logis pada no 3 di atas:

$A \leftrightarrow B$	$\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	
	$\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \wedge B$
	$\equiv (\neg A \vee B) \wedge A \vee \neg B)$	hk. Komutatif

2. Hilangkan tanda → dan ↔ dari ekspresi logika berikut:

$(A \rightarrow B) \wedge C) \vee ((C \leftrightarrow D) \wedge (B \vee D))$

$\equiv ((\neg A \vee B) \wedge C) \vee ((C \leftrightarrow D) \wedge (B \vee D))$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \wedge B$
$\equiv ((\neg A \vee B) \wedge C) \vee (((C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow C)) \wedge (B \vee D))$	$A \leftrightarrow B$
$\equiv ((\neg A \vee B) \wedge C) \vee (((\neg C \vee D) \wedge (\neg D \vee C)) \wedge (B \vee D))$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \wedge B$
$\equiv ((\neg A \vee B) \wedge C) \vee ((\neg C \vee D) \wedge (\neg D \vee C) \wedge (B \vee D))$	hapus kurung

Latihan soal:

Hilangkan tanda → dan ↔ dari ekspresi logika berikut ini dan sederhanakan jika mungkin:

1. $\neg A \rightarrow \neg B$
2. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$

4. Perangkai dasar

Perangkai dasar atau perangkai alamiah hanya ada tiga yakni perangkai $\wedge$, $\vee$, dan $\neg$. Ketiga perangkai ini mampu menggantikan semuai perangkai lainnya dengan mengombinasikan ketiga perangkai tersebut. Ketiga perangkai dasar inilah yang membentuk gerbang-gerbang (gates) yang menjadi dasar sistem digital, yakni “gerbang dari” (*and gate*), “gerbang atau” (*or gate*) dan “gerbang tidak” (*not gate*).

Perangkai cukup sebenarnya hanya ingin menunjukkan bahwa ekspresi atau bentuk logika yang merangkai apa saja dapat diubah bentuknya menjadi ekspresi logika dengan memakai perangkai dasar yakni $\wedge$, $\vee$, dan $\neg$. Bahkan perangkai $\wedge$ dapat diubah menjadi $\vee$ dan $\neg$, sedangkan perangkai $\vee$ dat diubah menjadi $\wedge$ dan $\neg$.

Contoh:

$\neg(A \wedge \neg A) \equiv \neg A \vee \neg\neg A)$ hk. De morgan

$\equiv \neg A \vee A$ hk. Negasi ganda

Sampai disini sudah terbukti, tetapi masih dapat disederhanakan.

$\equiv 1$ tautologi

Latihan soal:

Buktikan apakah $\neg(A \vee \neg A)$ merupakan perangkai cukup?

Perangkai *Nand*, sebenarnya dapat ditulis $\neg(A \wedge B)$ dengan membuat tabel kebenaran berikut:

A	A	A | A
T	T	F
F	F	T

¬A
F
T

Perhatikan tabel kebenaran di atas, ternyata hasilnya $A \mid A \equiv \neg A$

Perhatikan tabel kenaran berikut:

A	B	A | B	(A | B) | (A | B)
T	T	F	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	T	F

A∧B
T
F
F
F

Jadi, $(A \mid B) \mid (A \mid B) \equiv A \wedge B$

Dengan demikian perangkai *Nand* tergolong perangkai cukup karena ia dapat dijelaskan dengan perangkai dasar.

Latihan soal:

Apakah perangkai *Nor* atau dapat ditulis $\neg(A \vee B)$ tergolong perangkai cukup?

Latihan soal:

Buktikan dua ekspresi logika berikut ekuivalen dengan penyederhanaan:

1. $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \equiv B \wedge (A \vee C)$
2. $\neg(\neg(A \wedge B) \vee A) \equiv 1$
3. $\neg(\neg A \vee \neg(C \vee D)) \equiv (A \wedge C) \vee (A \wedge D)$
4. $A \wedge (\neg A \vee B) \equiv A \wedge B$
5. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv A \vee B$