Общая Физика

Конспект 2026

4 семестр

Содержание

1 ОПТИКА

- **Предмет оптики** — физ. природа и свойства света, оптические явления, взаимодействие света с веществом.
- **Свет** — электромагнитная волна (оптическое излучение).

Оптика $\to$ **квантовая** (свет – поток частиц)

Оптика $\to$ **волновая** (свет – электромагнитная волна)

Оптика $\to$ **геометрическая** (свет – лучи)

2 Волновое уравнение электромагнитной волны в прозрачной изотропной среде

> **NB / Важно**
>
> **Прозрачная**, значит — не поглощается и не рассеивается в среде.

- **Система уравнений Максвелла:**

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho & \text{(эл. поле создается зарядами)} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{(магнитное поле замкнуто)} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(вихревое поле)} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{Материальные уравнения:} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \\ \text{Константы:} \\ c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \end{array} \tag{1}$$

Доказательство:

Пусть $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$, тогда:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) =$$

$$= -\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

С другой стороны (векторное тождество):

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = (\vec{\nabla}, (\vec{\nabla}, \vec{E})) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, и учтено, что $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. ■

Волновое ур-ние эл/м волны в прозрачной среде:

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

В вакууме $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, значит:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box\vec{E} = 0 \quad (\text{уравнение Даламбера}) \tag{3}$$

где оператор Даламбера $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Аналогично для магнитного поля: $\Delta\vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$.

Теорема 2.1 — Волновое уравнение в среде

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

В прозрачной среде (т.к. свет распр. медленнее $\to$ берем v).

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad n = \frac{c}{v}$$

- **Вектор Пойнтинга:** $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$.
- **Объемная плотность энергии** (проникающ. в единицу времени через единичную площадку):

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = w_{\ni} + w_{\mu} = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} + \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2}$$

- **Закон Джоуля-Ленца** (сохранение энергии):

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -(\vec{j}, \vec{E}) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{S}$$

  Если $\vec{j} = 0$, то $\frac{\partial w}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{S}$.

- **Интенсивность:** $I = \langle|\vec{S}|\rangle_T$.

3 Частное решение волнового уравнения. Монохроматические поля

- Ищем решение в виде разделения переменных: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})\cdot T(t)$.

Доказательство:

Подставим в волновое уравнение:

$$\Delta\vec{E}(\vec{r})T(t) - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{E}(\vec{r})\cdot T(t)) = 0$$

$$T(t)\Delta\vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{v^2}\vec{E}(\vec{r})\cdot\ddot{T}(t) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\vec{E}(\vec{r})T(t)}$$

$$\frac{\Delta\vec{E}(\vec{r})}{\vec{E}(\vec{r})} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0 \implies \begin{cases} \frac{\Delta\vec{E}}{\vec{E}} = \text{const} = -k^2 \\ \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\ddot{T}}{T} = -k^2 \end{cases}$$

■

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}) + k^2\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{— уравнение Гельмгольца} \tag{4}$$

Второе уравнение:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad \text{где } \omega = kv$$

Это **уравнение гармонических колебаний**.

Определение 3.1: Монохроматическое поле

$$\tilde{T} = C\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Используя формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, $\cos z = \operatorname{Re} e^{iz}$:

$$T = \operatorname{Re}\tilde{C}\cdot\exp(i\omega t)$$

$\hookrightarrow$ гармонические колебания $\to$ монохроматическое поле.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\cdot\exp(i\omega t) & \text{— частное решение волнового} \\ \Delta\vec{E}(\vec{r}) + k^2\vec{E}(\vec{r}) = 0 & \text{ур-ния (монохромат. волны)} \end{cases} \tag{5}$$

В каждой точке пр-ва колебания на одной частоте (монохроматические волны).

4 Плоские монохроматические волны

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}) + k^2\vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} = (x,y,z)^T$$

Пусть $\vec{E}(\vec{r}) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)XYZ + k^2 XYZ = 0$$

$$YZ\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 XYZ = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{XYZ}$$

$$\underbrace{\frac{X''_{xx}}{X}}_{\equiv -k_x^2} + \underbrace{\frac{Y''_{yy}}{Y}}_{\equiv -k_y^2} + \underbrace{\frac{Z''_{zz}}{Z}}_{\equiv -k_z^2} + k^2 = 0$$

Отсюда $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, волновой вектор $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$.

Система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -k_x^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \\ \frac{Z''}{Z} = -k_z^2 \end{cases} \implies \begin{cases} X'' + k_x^2 X = 0 \\ Y'' + k_y^2 Y = 0 \\ Z'' + k_z^2 Z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} X = C_1 \cdot \exp(-ik_x x) \\ Y = C_2 \cdot \exp(-ik_y y) \\ Z = C_3 \cdot \exp(-ik_z z) \end{cases} \tag{6}$$

Пространственная часть поля:

$$\vec{E}(\vec{r}) = XYZ = \vec{A} \cdot \exp(-ik_x x) \cdot \exp(-ik_y y) \cdot \exp(-ik_z z) = \vec{A} \cdot \exp(-i(k_x x + k_y y + k_z z)) = \vec{A} \cdot \exp\Big(-i(\vec{k}, \vec{r})\Big)$$

Полное поле:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \vec{E}_0 \cdot \exp\Big(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)\Big) = \operatorname{Re} \underbrace{\vec{E}_0 \cdot \exp(i\varphi_0)}_{\vec{E}_0'} \exp\Big(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\Big) =$$

$$= \operatorname{Re} E_0 \exp\Big(i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\Big) = E_0 \cos\Big(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\Big)$$