

Общая Физика

Конспект 2026

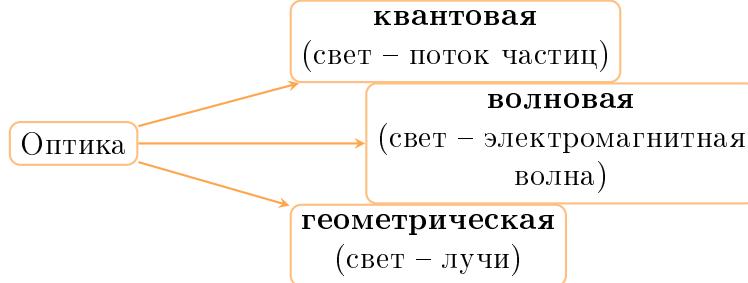
4 семестр

Содержание

| | |
|--|----------|
| 1 ОПТИКА | 2 |
| 2 Волновое уравнение электромагнитной волны в прозрачной изотропной среде | 2 |
| 3 Частное решение волнового уравнения. Монохроматические поля | 3 |
| 4 Плоские монохроматические волны | 4 |

1 ОПТИКА

- **Предмет оптики** — физ. природа и свойства света, оптические явления, взаимодействие света с веществом.
- **Свет** — электромагнитная волна (оптическое излучение).



2 Волновое уравнение электромагнитной волны в прозрачной изотропной среде

NB / Важно

Прозрачная, значит — не поглощается и не рассеивается в среде.

- Система уравнений Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad \text{— материальные уравнения} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \text{эл. поле, создаваемое зарядами потенциально} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \text{магнит. поле замкнуто (носит вихревой характер)} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \rightarrow \text{вихревое поле} \end{array} \right. \quad \text{константы: } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu} \quad (1)$$

Доказательство:

Пусть $\vec{j} = 0, \rho = 0$, тогда:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \\ &= -\mu_0 \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

С другой стороны (векторное тождество):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = (\vec{\nabla}, (\vec{\nabla}, \vec{E})) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, и учтено, что $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. ■

Волновое ур-ние эл/м волны в прозрачной среде:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

В вакууме $\varepsilon = 1, \mu = 1$, значит:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \square \vec{E} = 0 \quad (\text{уравнение Даламбера}) \quad (3)$$

где оператор Даламбера $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Аналогично для магнитного поля: $\Delta \vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$.

Теорема 2.1 — Волновое уравнение в среде

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

В прозрачной среде (т.к. свет распред. медленнее \rightarrow берем v).

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad n = \frac{c}{v}$$

- **Вектор Пойнтинга:** $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$.

- **Объемная плотность энергии** (проникающ. в единицу времени через единичную площадку):

$$w = \frac{dW}{dV} = w_{\exists} + w_{\mu} = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} + \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2}$$

- **Закон Джоуля-Ленца** (сохранение энергии):

$$\frac{dw}{dt} = -(\vec{j}, \vec{E}) - \nabla \cdot \vec{S}$$

Если $\vec{j} = 0$, то $\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S}$.

- **Интенсивность:** $I = \langle |\vec{S}| \rangle_T$.

3 Частное решение волнового уравнения. Монохроматические поля

- Ищем решение в виде разделения переменных: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot T(t)$.

Доказательство:

Подставим в волновое уравнение:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r})T(t) - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot T(t)) = 0$$

$$T(t)\Delta\vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{v^2}\vec{E}(\vec{r}) \cdot \ddot{T}(t) = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{\vec{E}(\vec{r})T(t)} \right.$$

$$\frac{\Delta\vec{E}(\vec{r})}{\vec{E}(\vec{r})} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0 \implies \begin{cases} \frac{\Delta\vec{E}}{\vec{E}} = \text{const} = -k^2 \\ \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\ddot{T}}{T} = -k^2 \end{cases}$$

■

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}) + k^2\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{— уравнение Гельмгольца} \quad (4)$$

Второе уравнение:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad \text{где } \omega = kv$$

Это **уравнение гармонических колебаний**.

Определение 3.1: Монохроматическое поле

$$\tilde{T} = C \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Используя формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $\cos z = \operatorname{Re} e^{iz}$:

$$T = \operatorname{Re} \tilde{T} \cdot \exp(i\omega t)$$

→ гармонические колебания → монохроматическое поле.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \exp(i\omega t) & \text{— частное решение волнового} \\ \Delta\vec{E}(\vec{r}) + k^2\vec{E}(\vec{r}) = 0 & \text{ур-ния (монохромат. волны)} \end{cases} \quad (5)$$

В каждой точке пр-ва колебания на одной частоте (монохроматические волны).

4 Плоские монохроматические волны

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}) + k^2\vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} = (x, y, z)^T$$

Пусть $\vec{E}(\vec{r}) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) XYZ + k^2 XYZ = 0$$

$$YZ \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 XYZ = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{XYZ} \right.$$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{\substack{\parallel \\ -k_x^2}} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{\substack{\parallel \\ -k_y^2}} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\substack{\parallel \\ -k_z^2}} + k^2 = 0$$

Отсюда $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, волновой вектор $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$.

Система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -k_x^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \\ \frac{Z''}{Z} = -k_z^2 \end{cases} \implies \begin{cases} X'' + k_x^2 X = 0 \\ Y'' + k_y^2 Y = 0 \\ Z'' + k_z^2 Z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} X = C_1 \cdot \exp(-ik_x x) \\ Y = C_2 \cdot \exp(-ik_y y) \\ Z = C_3 \cdot \exp(-ik_z z) \end{cases} \quad (6)$$

Пространственная часть поля:

$$\vec{E}(\vec{r}) = XYZ = \vec{A} \cdot \exp(-ik_x x) \cdot \exp(-ik_y y) \cdot \exp(-ik_z z) = \vec{A} \cdot \exp(-i(k_x x + k_y y + k_z z)) = \vec{A} \cdot \exp(-i(\vec{k}, \vec{r}))$$

Полное поле:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \vec{E}_0 \cdot \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)) = \operatorname{Re} \underbrace{\vec{E}_0 \cdot \exp(i\varphi_0)}_{\vec{E}'_0} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) = \\ &= \operatorname{Re} E_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) \end{aligned}$$