

---

# Exercícios referentes à sec. 2.4 - "Our Universe", Cosmology, D. Baumann

Dimas Jackson de Oliveira

## 1) Cálculo da idade do universo

i) Universo dominado por energia escura

Definindo os parâmetros ( $H_0$  em 1/segundo):

```
In[1]:= Ωr = 9 * 10^(-5); Ωm = 0.31; ΩΛ = 1 - Ωm - Ωr; H0 = 68 / (3 * 10^19);
```

A idade do universo em segundos é dada por

```
In[2]:= t0 = N[1 / H0 * ∫₀¹ 1 / (√(Ωr * a^(-2) + Ωm * a^(-1) + ΩΛ * a^2)) da]
```

```
Out[2]= 4.21277 × 10¹⁷
```

Convertendo para anos:

```
In[3]:= t0 = t0 / (60 * 60 * 24 * 365.25)
```

```
Out[3]= 1.33495 × 10¹⁰
```

ii) Universo dominado por matéria

Definindo os parâmetros ( $H_0$  em 1/segundo):

```
In[4]:= Ωr = 9 * 10^(-5); Ωm = 1 - Ωr; ΩΛ = 0; H0 = 68 / (3 * 10^19);
```

A idade do universo em segundos é dada por

```
In[5]:= t0 = N[1 / H0 * ∫₀¹ 1 / (√(Ωr * a^(-2) + Ωm * a^(-1) + ΩΛ * a^2)) da]
```

```
Out[5]= 2.94092 × 10¹⁷
```

Convertendo para anos:

```
In[6]:= t0 = t0 / (60 * 60 * 24 * 365.25)
```

```
Out[6]= 9.3192 × 10⁹
```

## 2) Cálculo da equivalência matéria-radiação

```
In[7]:= Clear["Global`*"]
```

Das equações de Friedmann obtêm-se o fator de escala para a equivalência matéria-radiação

```
In[8]:= s = Solve[Ωm * a^(-3) == Ωr * a^(-4), a]
```

```
Out[8]= {{a -> Ωr / Ωm}}
```

Definindo os parâmetros ( $H_0$  em 1/segundo):

```
In[9]:= Ωr = 9 * 10^(-5); Ωm = 0.31; ΩΛ = 1 - Ωm - Ωr; H0 = 68 / (3 * 10^19);
```

```
In[10]:= aeq = s[[1]][[1]][[2]]
```

```
Out[10]= 0.000290323
```

Tempo de equivalência:

```
In[11]:= teq = N[1 / H0 * Integrate[1 / (Sqrt[Omega r * a^(-2) + Omega m * a^(-1) + Omega * a^2]) da]
```

```
Out[11]= 1.53074 * 10^12
```

Convertendo para anos:

```
In[12]:= teq = teq / (60 * 60 * 24 * 365.25)
```

```
Out[12]= 48506.1
```

Redshift de equivalência:

```
In[13]:= zeq = Solve[aeq == 1 / (1 + z), z][[1]][[1]][[2]]
```

```
Out[13]= 3443.44
```

### 3) Cálculo da equivalência matéria-energia escura

```
In[14]:= Clear["Global`*"]
```

Das equações de Friedmann obtêm-se o fator de escala para a equivalência matéria-energia escura

```
In[15]:= s = Solve[Omega m * a^(-3) == Omega, a][[1]][[1]]
```

```
Out[15]= a -> (Omega m^(1/3) / Omega^(1/3))
```

Definindo os parâmetros (H0 em 1/segundo):

```
In[16]:= Omr = 9 * 10^(-5); Om = 0.31; Ol = 1 - Om - Omr; H0 = 68 / (3 * 10^19);
```

```
In[17]:= aml = s[[2]]
```

```
Out[17]= 0.765931
```

Tempo de equivalência:

```
In[18]:= tml = N[1 / H0 * Integrate[1 / (Sqrt[Omega r * a^(-2) + Omega m * a^(-1) + Omega * a^2]) da]
```

```
Out[18]= 3.11924 * 10^17
```

Convertendo para anos:

```
In[19]:= tml = tml / (60 * 60 * 24 * 365.25)
```

```
Out[19]= 9.88428 * 10^9
```

Redshift de equivalência:

```
In[20]:= zml = Solve[aml == 1 / (1 + z), z][[1]][[1]][[2]]
```

```
Out[20]= 0.3056
```

#### 4) Gráfico da densidade em função do redshift

```
In[21]:= Clear["Global`*"]
```

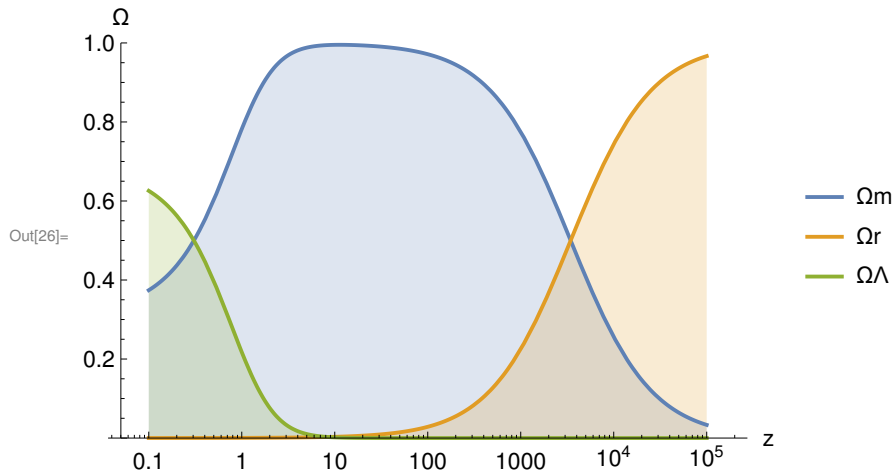
Definindo o parâmetro de densidade  $\Omega$  para cada caso:

```
In[22]:=  $\Omega_0 r = 9 \cdot 10^{-5}$ ;  $\Omega_0 m = 0.31$ ;  $\Omega_0 \Lambda = 1 - \Omega_0 m - \Omega_0 r$ ;  $H_0 = 68 / (3 \cdot 10^{19})$ ;
```

```
In[23]:=  $\Omega_m[z_] := \Omega_0 m \cdot (1 / (1 + z))^{-3}$ ;
 $\Omega_r[z_] := \Omega_0 r \cdot (1 / (1 + z))^{-4}$ ;
 $\Omega_\Lambda[z_] := \Omega_0 \Lambda$ ;
```

Gráfico do parâmetro de densidade em função do redshift mostrando o ponto em que a energia escura passa a dominar sobre a matéria (z em escala logarítmica):

```
In[26]:= LogLinearPlot[{ $\Omega_m[z] / (\Omega_m[z] + \Omega_r[z] + \Omega_\Lambda[z])$ },
   $\Omega_r[z] / (\Omega_m[z] + \Omega_r[z] + \Omega_\Lambda[z])$ ,  $\Omega_\Lambda[z] / (\Omega_m[z] + \Omega_r[z] + \Omega_\Lambda[z])$ },
  {z,  $10^{-1}$ , 100000}, PlotLegends -> {" $\Omega_m$ ", " $\Omega_r$ ", " $\Omega_\Lambda$ "}, AxesLabel -> {"z", " $\Omega$ "},
  LabelStyle -> {Black, 12}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {0, 1}, Filling -> Axis]
```



#### 5) Gráfico da distância de luminosidade em função do redshift

Definindo a distância de luminosidade:

```
In[27]:= dH =  $3 \cdot 10^8 / H_0$ ;
Do[f[z] = NIntegrate[ $1 / \sqrt{\Omega_0 r (1 + u)^4 + \Omega_0 m (1 + u)^3 + \Omega_0 \Lambda}$ ], {u, 0, z}],
  {z, 0, 2, 0.01}]
dL = Table[{z,  $5 \log_{10}[dH (1 + z) * f[z] / (3 \cdot 10^{22})]$  + 25}, {z, 0, 2, 0.01}];
Do[f[z] = NIntegrate[ $1 / \sqrt{\Omega_0 r (1 + u)^4 + \Omega_0 m (1 + u)^3}$ ], {u, 0, z}], {z, 0, 2, 0.01}]
dL2 = Table[{z,  $5 \log_{10}[dH (1 + z) * f[z] / (3 \cdot 10^{22})]$  + 25}, {z, 0, 2, 0.01}];
```

Gráfico comparando a distância de luminosidade para o universo com a constante cosmológica ou sem a constante cosmológica:

```
In[32]:= ListLinePlot[{dL, dL2}, AxesLabel → {"z", ""},  
  LabelStyle → {Black, 12}, PlotLegends → {"dL com  $\Lambda$ ", "dL sem  $\Lambda$ "}]
```

