



Факультет Систем Управления и Робототехники

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. РЯДЫ ФУРЬЕ

Аннотация – В процессе лабораторной работы я научился вычислять коэффициенты Фурье для различных типов периодических вещественных и комплексных функций. Также с помощью графиков и равенства Парсеваля научился определять сходимость ряда Фурье.

Ключевые слова: Ряды Фурье, Равенство Парсеваля, Python

Выполнил

Соловьев Дмитрий¹

¹409609, @dimassolovev

Проверил

Догадин Егор Витальевич
Пашенко Артем Витальевич

19 февраля 2025 г.

Содержание

1	Используемые формулы	2
2	Вещественные функции.	2
2.1	Квадратная волна	2
2.1.1	Аналитический подсчет коэффициентов a_0, a_1, a_2	3
2.1.2	Аналитический подсчет коэффициентов b_1, b_2	3
2.1.3	Аналитический подсчет коэффициентов c_0, c_1, c_2	3
2.1.4	Программа для счета коэффициентов ряда Фурье	4
2.1.5	Численные значения коэффициентов ряда Фурье	4
2.1.6	Графики частичных сумм	4
2.1.7	Равенство Парсеваля	5
2.1.8	Результаты при $N = 100$	5
2.2	Четная функция	6
2.2.1	Аналитический подсчет коэффициентов a_0, a_1, a_2	6
2.2.2	Аналитический подсчет коэффициентов b_1, b_2	6
2.2.3	Аналитический подсчет коэффициентов c_0, c_1, c_2	7
2.2.4	Графики частичных сумм	7
2.2.5	Численные значения ряда Фурье	8
2.2.6	Результаты при $N = 100$	8
2.3	Нечетная функция	8
2.3.1	Аналитический подсчет коэффициентов a_0, a_1, a_2	9
2.3.2	Аналитический подсчет коэффициентов b_1, b_2	9
2.3.3	Аналитический подсчет коэффициентов c_0, c_1, c_2	9
2.3.4	Графики частичных сумм	10
2.3.5	Численные значения ряда Фурье	10
2.3.6	Равенство Парсеваля при $N = 100$	10
2.4	Периодическая функция, график которой состоит не только из прямых линий, и которая не является ни чётной, ни нечётной	11
2.4.1	Аналитический подсчет коэффициентов a_0, a_1, a_2	11
2.4.2	Аналитический подсчет коэффициентов b_1, b_2	11
2.4.3	Аналитический подсчет коэффициентов c_0, c_1, c_2	12
2.4.4	Графики частичных сумм	12
2.4.5	Численные значения ряда Фурье	13
2.4.6	Равенство Парсеваля при $N = 2$	13
3	Комплексная функция	13
3.0.1	График функции $f(t)$ обозначим на комплексной плоскости	14
3.0.2	Аналитический подсчет коэффициентов $c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2$	14
3.0.3	Программа на Python для вычисления коэффициентов ряда Фурье	15
3.0.4	Графики частичных сумм ряда	15
3.0.5	Численные значения ряда Фурье	16
3.0.6	Равенство Парсеваля	16
3.0.7	Результаты при $N = 100$	17
4	Выводы	17

1 Используемые формулы

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (1)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cos \omega_n t dt \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \sin \omega_n t dt \quad (4)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (5)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (6)$$

2 Вещественные функции.

2.1 Квадратная волна

Придумаем числа a, b, t_0, t_1, t_2 такие, что $a, b > 0$ и $t_2 > t_1 > t_0 > 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc} a = 1 & b = 2 \\ t_0 = 1 & t_1 = 5 & t_2 = 10 \end{array} \right] \Rightarrow f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1, 5), \\ 2, & t \in [5, 10). \end{cases}$$

Построим график функции $f(t)$.

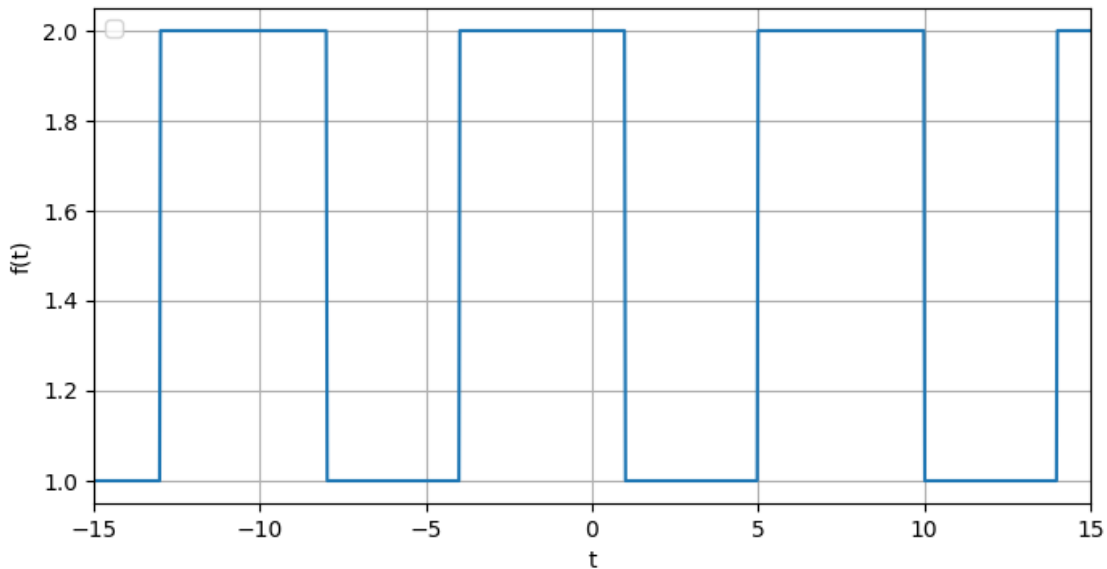


Рис. 1: График квадратной волны $f(t)$

Период функции $f(t)$ равен $T = t_2 - t_0 = 9 \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi n}{9}$. Теперь посчитаем коэффициенты Фурье для этой функции. Для этого посчитаем первые три a_n, b_n, c_n аналитически, а дальше посчитаем все численно. Для подсчета коэффициентов воспользуемся формулами (3), (4), (5).

2.1.1 Аналитический подсчет коэффициентов a_0, a_1, a_2

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{9} \left(\int_1^5 dt + \int_5^{10} 2dt \right) = \frac{2}{9} \left(t \Big|_1^5 + 2t \Big|_5^{10} \right) = \frac{2}{9} (5 - 1 + 20 - 10) = \frac{28}{9} \approx 3.111111 \\
a_1 &= \frac{2}{9} \left(\int_1^5 \cos \frac{2\pi t}{9} dt + \int_5^{10} 2 \cos \frac{2\pi t}{9} dt \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{9}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{9} \Big|_1^5 + \frac{9}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{9} \Big|_5^{10} \right) = \frac{2}{9} \left(-\frac{9 \sin \frac{4\pi}{9}}{2\pi} + \frac{9 \sin \frac{4\pi}{9}}{\pi} \right) = \\
&= -\frac{\sin \frac{4\pi}{9}}{\pi} + \frac{2 \sin \frac{4\pi}{9}}{\pi} = \frac{\sin \frac{4\pi}{9}}{\pi} \approx 0.313474 \\
a_2 &= \frac{2}{9} \left(\int_1^5 \cos \frac{4\pi t}{9} dt + \int_5^{10} 2 \cos \frac{4\pi t}{9} dt \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{9}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{9} \Big|_1^5 + \frac{9}{2\pi} \sin \frac{4\pi t}{9} \Big|_5^{10} \right) = \frac{2}{9} \left(-\frac{9 \sin \frac{\pi}{9}}{4\pi} + \frac{9 \sin \frac{\pi}{9}}{2\pi} \right) = \\
&= -\frac{\sin \frac{\pi}{9}}{2\pi} + \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{\pi} = \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{2\pi} \approx 0.0544342
\end{aligned}$$

2.1.2 Аналитический подсчет коэффициентов b_1, b_2

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{9} \left(\int_1^5 \sin \frac{2\pi t}{9} dt + \int_5^{10} 2 \sin \frac{2\pi t}{9} dt \right) = \frac{2}{9} \left(-\frac{9}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{9} \Big|_1^5 - \frac{9}{\pi} \cos \frac{2\pi t}{9} \Big|_5^{10} \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{9\sqrt{3} \sin \frac{4\pi}{9}}{2\pi} - \frac{9\sqrt{3} \sin \frac{4\pi}{9}}{\pi} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{3} \sin \frac{4\pi}{9}}{\pi} - \frac{2\sqrt{3} \sin \frac{4\pi}{9}}{\pi} = -\frac{\sqrt{3} \sin \frac{4\pi}{9}}{\pi} \approx -0.542953 \\
b_2 &= \frac{2}{9} \left(\int_1^5 \sin \frac{4\pi t}{9} dt + \int_5^{10} 2 \sin \frac{4\pi t}{9} dt \right) = \frac{2}{9} \left(-\frac{9}{4\pi} \cos \frac{4\pi t}{9} \Big|_1^5 - \frac{9}{2\pi} \cos \frac{4\pi t}{9} \Big|_5^{10} \right) = \frac{2}{9} \left(-\frac{9\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{9}}{4\pi} + \frac{9\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{9}}{2\pi} \right) = \\
&= -\frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{9}}{2\pi} + \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{9}}{\pi} = \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{9}}{2\pi} \approx 0.094283
\end{aligned}$$

2.1.3 Аналитический подсчет коэффициентов c_0, c_1, c_2

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{9} \left(\int_1^5 dt + \int_5^{10} 2dt \right) = \frac{1}{9} \left(t \Big|_1^5 + 2t \Big|_5^{10} \right) = \frac{a_0}{2} = \frac{14}{9} \approx 1.55556 \\
c_1 &= \frac{1}{9} \left(\int_1^5 e^{-\frac{2\pi i t}{9}} dt + \int_5^{10} 2e^{-\frac{2\pi i t}{9}} dt \right) = -\frac{1}{2\pi i} \left(e^{-\frac{2\pi i t}{9}} \Big|_1^5 + 2e^{-\frac{2\pi i t}{9}} \Big|_5^{10} \right) = -\frac{1}{2\pi i} \left(e^{-\frac{10\pi i}{9}} - e^{-\frac{2\pi i}{9}} + 2e^{-\frac{20\pi i}{9}} - 2e^{-\frac{10\pi i}{9}} \right) = \\
&= \frac{i}{2\pi} \left(-e^{-\frac{10\pi i}{9}} - e^{-\frac{2\pi i}{9}} + 2e^{-\frac{20\pi i}{9}} \right) \\
c_2 &= \frac{1}{9} \left(\int_1^5 e^{-\frac{4\pi i t}{9}} dt + \int_5^{10} 2e^{-\frac{4\pi i t}{9}} dt \right) = -\frac{1}{4\pi i} \left(e^{-\frac{4\pi i t}{9}} \Big|_1^5 + 2e^{-\frac{4\pi i t}{9}} \Big|_5^{10} \right) = \frac{i}{4\pi} \left(e^{-\frac{20\pi i}{9}} - e^{-\frac{4\pi i}{9}} + 2e^{-\frac{40\pi i}{9}} - 2e^{-\frac{20\pi i}{9}} \right) = \\
&= \frac{i}{4\pi} \left(-e^{-\frac{4\pi i}{9}} + 2e^{-\frac{40\pi i}{9}} - e^{-\frac{20\pi i}{9}} \right)
\end{aligned}$$

2.1.4 Программа для счета коэффициентов ряда Фурье

```

1 fourier_coefficients: Callable[[Callable[[np.ndarray], np.ndarray], int], Tuple[float, float,
2   complex]] = lambda f, n : (
3   (2 / T) * simpson(f(t) * np.cos(2 * np.pi * n / T * t), t),
4   (2 / T) * simpson(f(t) * np.sin(2 * np.pi * n / T * t), t),
5   (1 / T) * simpson(f(t) * np.exp(-1j * 2 * np.pi * n / T * t), t)
6 )

```

Листинг 1: Функция для подсчета коэффициентов ряда Фурье

2.1.5 Численные значения коэффициентов ряда Фурье

n	ω_n	a_n	b_n	c_n
0	0.000000	3.111100	0.000000	1.555500+0.000000j
1	0.698100	0.313300	-0.543000	0.156700+0.271500j
2	1.396300	0.054500	0.094200	0.027200-0.047100j

2.1.6 Графики частичных сумм

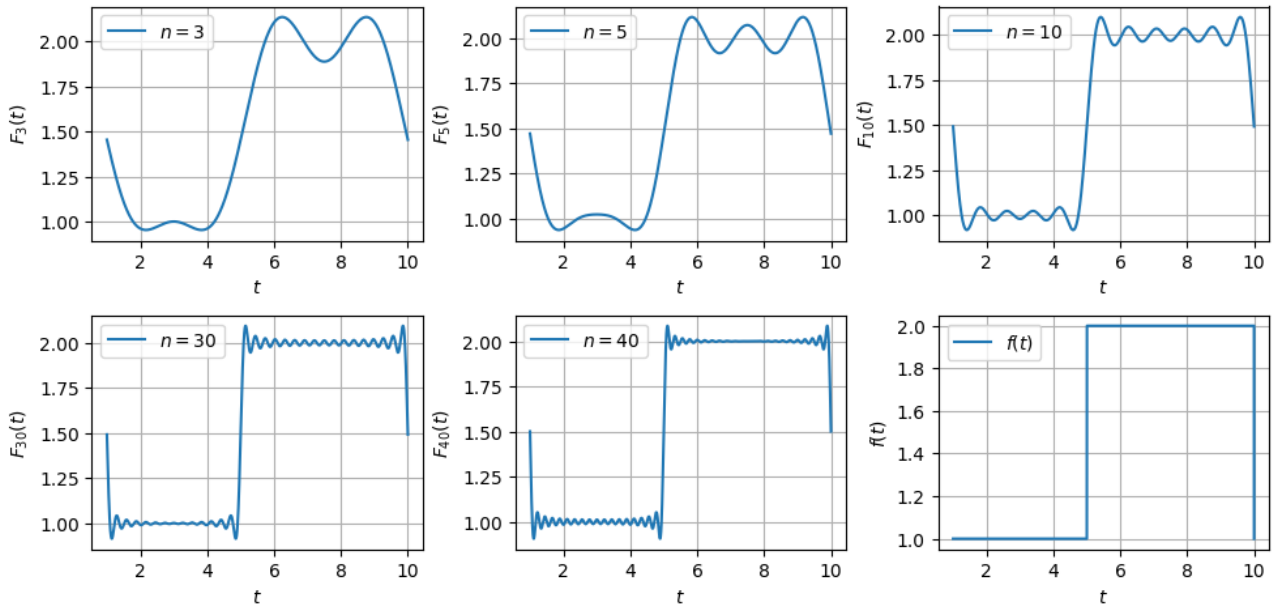


Рис. 2: Графики квадратной волны $F_N(t)$ для разных значений n

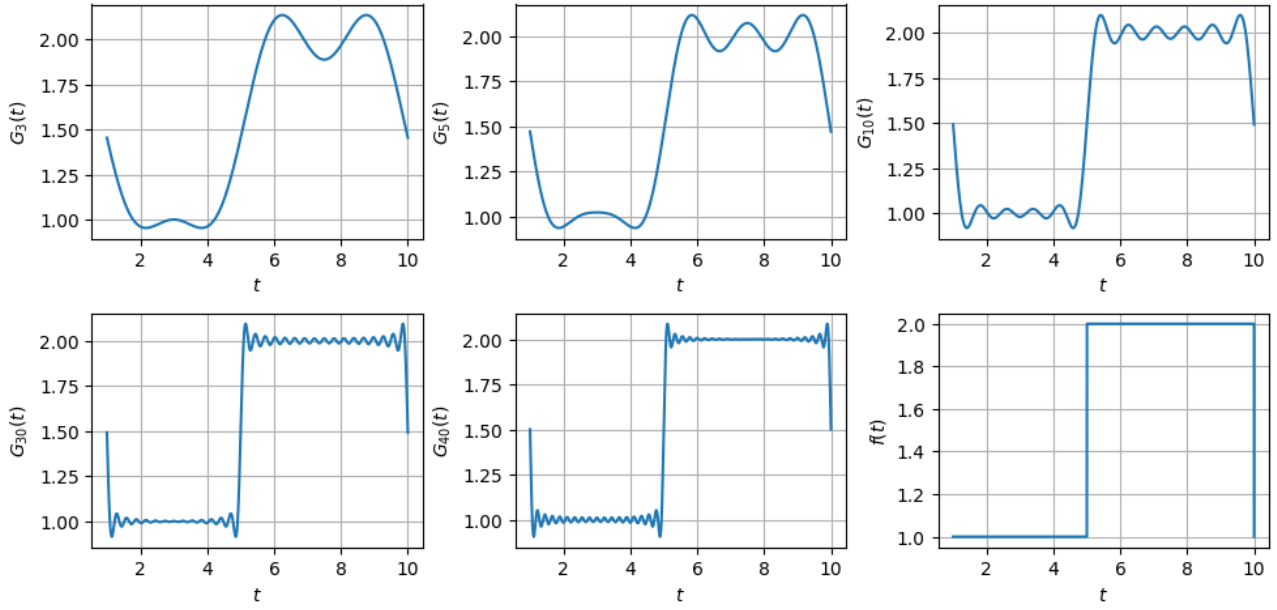


Рис. 3: Графики квадратной волны $G_N(t)$ для разных значений n

2.1.7 Равенство Парсеваля

```

1 def check_parseval(even: Callable[[np.ndarray], np.ndarray], t: np.ndarray, T: float):
2     # Реальное разложение
3     X = [np.sqrt(1 / T) * simpson(even(t), t)]
4     for n in range(1, 101):
5         w_n = 2 * np.pi * n / T
6         a_n = np.sqrt(2 / T) * simpson(even(t) * np.cos(w_n * t), t)
7         b_n = np.sqrt(2 / T) * simpson(even(t) * np.sin(w_n * t), t)
8         X.extend([a_n, b_n])
9
10    # Комплексное разложение
11    C = [np.sqrt(1 / T) * simpson(even(t) * np.exp(-1j * (2 * np.pi * n / T) * t), t)
12         for n in range(-100, 101)]
13
14    # Вычисление нормы и разностей
15    norm_f = simpson(even(t) ** 2, t)
16    diff_real = np.round(norm_f - np.sum(np.abs(X) ** 2), 4)
17    diff_complex = np.round(norm_f - np.sum(np.abs(C) ** 2), 4)
18
19    # Вывод формул в красивом виде
20    n = symbols("n")
21    display(Math(r"||f||^2 - \left(\hat{a}_0^2 + \sum_{n=1}^{\{100\}} (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2) \right) = " + latex(diff_real)))
22    display(Math(r"||f||^2 - \sum_{n=-100}^{\{100\}} |\hat{c}_n|^2 = " + latex(diff_complex)))
23

```

Листинг 2: Функция для проверки равенства Парсеваля

2.1.8 Результаты при $N = 100$

$$||f||^2 - \left(\hat{a}_0^2 + \sum_{n=1}^{100} (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2) \right) = 0.0086$$

$$||f||^2 - \sum_{n=-100}^{100} |\hat{c}_n|^2 = 0.0086$$

2.2 Четная функция

В качестве четной периодической функции возьмем параболу $f(t) = ((t + \pi) \bmod 2\pi - \pi)^2$ на промежутке $t \in [-\pi; \pi]$. Построим график параболы $f(t)$:

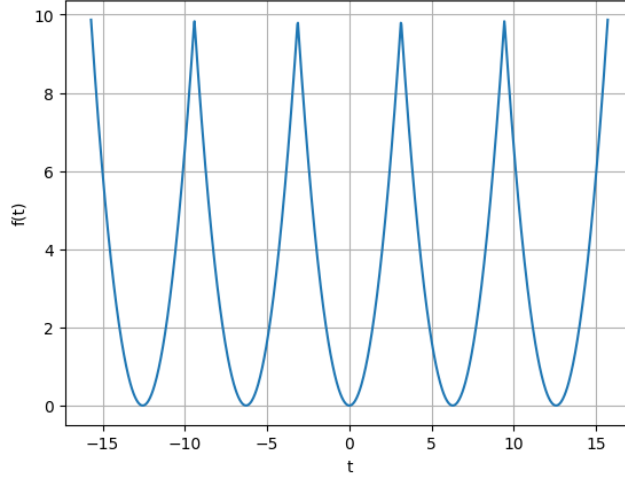


Рис. 4: График периодической параболы $f(t)$

Период функции равен $T = t_2 - t_0 = \pi - (-\pi) = 2\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{T} = n$. Теперь посчитаем первые три a_n , b_n , c_n аналитически, воспользуемся формулами (3), (4), (5).

2.2.1 Аналитический подсчет коэффициентов a_0 , a_1 , a_2

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{t^3}{3\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \approx 6.57974$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{t^2 \cos t}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \left(t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t \sin t dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - 2 \left(-t \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t dt \right) \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - 2 \left(-t \cos t \Big|_0^{\pi} + \sin t \Big|_0^{\pi} \right) \right) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos 2t dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{t^2 \cos 2t}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \left(\frac{t^2 \sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} t \sin 2t dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{t^2 \sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi} - \left(\frac{t \cos 2t}{2} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} dt \right) \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{t^2 \sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi} - \left(\frac{t \cos 2t}{2} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\pi} \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

2.2.2 Аналитический подсчет коэффициентов b_1 , b_2

В ряде Фурье синусные члены $b_n \sin(\omega_n t)$ обнуляются, потому что $f(t)$ — чётная функция, а синусы нечётны. Интеграл от нечётной функции на симметричном отрезке всегда равен нулю, поэтому остаются только косинусные члены, отвечающие за чётную часть ряда. Поэтому следующие интегралы мы считать не будем, так как они всегда обнуляются.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t dt = 0$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin 2t dt = 0$$

2.2.3 Аналитический подсчет коэффициентов c_0, c_1, c_2

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3} \approx 3.28987$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-it} dt = \frac{i}{2\pi} \left(-\frac{(it)^2}{e^{it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2it}{e^{it}} dit \right) = \frac{i}{2\pi} \left(-\frac{(it)^2}{e^{it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2 \left(-\frac{it}{e^{it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{it}} dit \right) \right) = \\ &= \frac{i}{2\pi} \left(-\frac{(it)^2}{e^{it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2 \left(-\frac{it}{e^{it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} - e^{-it} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \right) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-2it} dt = \frac{i}{16\pi} \left(-\frac{(2it)^2}{e^{2it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4it}{e^{2it}} d2it \right) = \frac{i}{16\pi} \left(-\frac{(2it)^2}{e^{2it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2 \left(-\frac{2it}{e^{2it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{2it}} d2it \right) \right) = \\ &= \frac{i}{16\pi} \left(-\frac{(2it)^2}{e^{2it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2 \left(-\frac{2it}{e^{2it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} - e^{2it} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \right) = 0.5 \end{aligned}$$

2.2.4 Графики частичных сумм

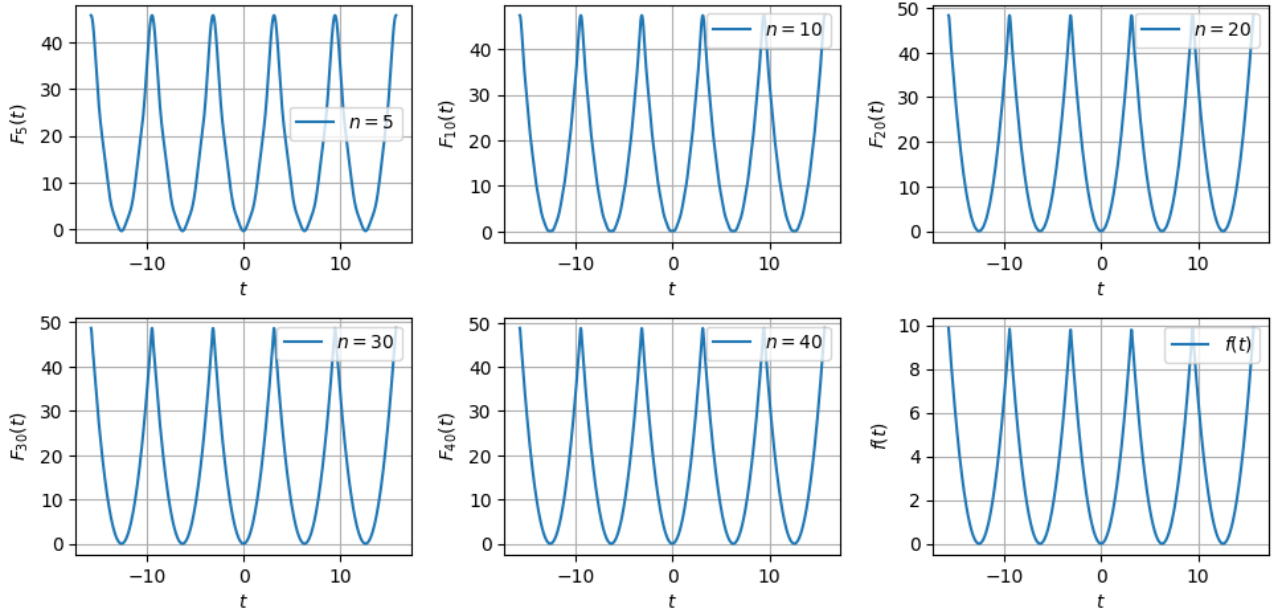


Рис. 5: Графики функции $F_N(t)$ для разных значений n

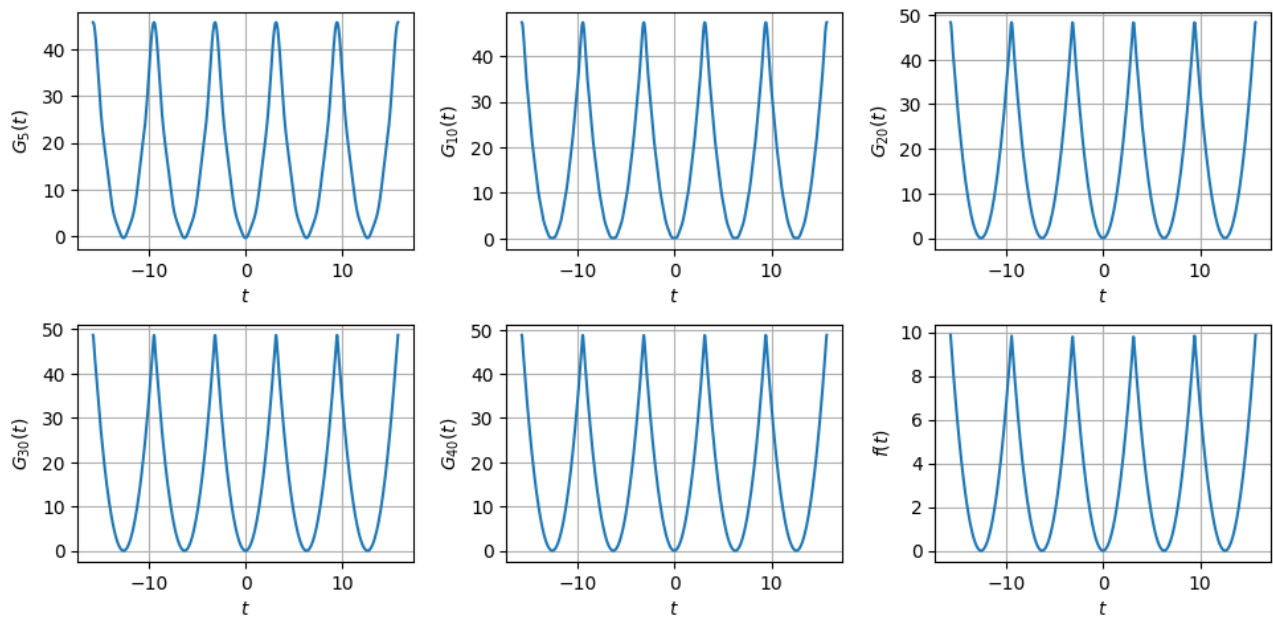


Рис. 6: Графики функции $G_N(t)$ для разных значений n

2.2.5 Численные значения ряда Фурье

n	ω_n	a_n	b_n	c_n
0	0.000000	6.579700	0.000000	3.289900+0.000000j
1	1.000000	-4.000000	0.000000	-2.000000-0.000000j
2	2.000000	1.000000	-0.000000	0.500000+0.000000j

2.2.6 Результаты при $N = 100$

$$\|f\|^2 - \left(\hat{a}_0^2 + \sum_{n=1}^{100} (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2) \right) = 0.9964$$

$$\|f\|^2 - \sum_{n=-100}^{100} |\hat{c}_n|^2 = 0.9964$$

2.3 Нечетная функция

В качестве нечетной периодической функции возьмем кубическую функцию $f(t) = ((t+\pi) \bmod 2\pi - \pi)^3$ на промежутке $t \in [-\pi; \pi]$. Построим график функции $f(t)$:

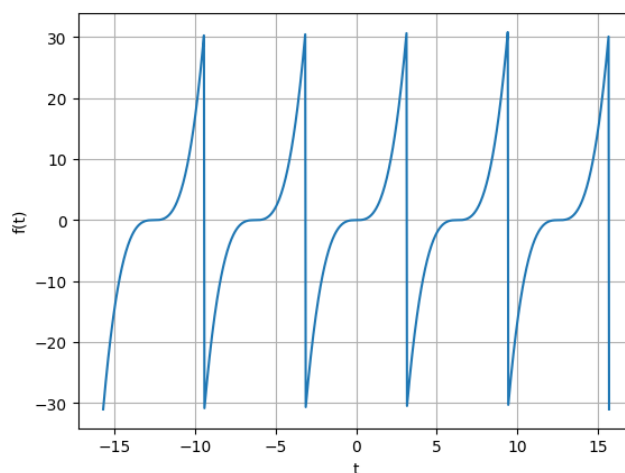


Рис. 7: График кубической функции $f(t)$

Период функции равен $T = t_2 - t_0 = \pi - (-\pi) = 2\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{T} = n$. Теперь посчитаем первые три a_n , b_n , c_n аналитически, воспользуемся формулами (3), (4), (5).

2.3.1 Аналитический подсчет коэффициентов a_0 , a_1 , a_2

Аналогичная история, как и в прошлом пункте. Интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке обнуляется.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \cos t dt = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \cos 2t dt = 0$$

2.3.2 Аналитический подсчет коэффициентов b_1 , b_2

Здесь возьмем интеграл один раз по частям, вместо трех, так как он приводится к интегралу, который разбирался в прошлом пункте.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin t dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{t^3 \sin t}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \left(-t^3 \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 3t^2 \cos t dt \right) = 2\pi^2 - 12 \approx 7.7392088$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin 2t dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{t^3 \sin 2t}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{t^3 \cos 2t}{2} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{3t^2 \cos 2t}{2} dt \right) = -\frac{2\pi^2 - 3}{2} \approx -8.3696044$$

2.3.3 Аналитический подсчет коэффициентов c_0 , c_1 , c_2

Здесь тоже возьмем интеграл один раз по частям, вместо трех, так как он приводится к интегралу, который разбирался в прошлом пункте.

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 e^{-it} dt = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{(it)^3}{e^{it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3(it)^2}{e^{it}} dt \right) = 6i - i\pi^2 \approx -3.8696044i$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 e^{-2it} dt = \frac{1}{32\pi} \left(-\frac{(2it)^3}{e^{2it}} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3(2it)^2}{e^{2it}} d2it \right) = \frac{2i\pi^2 - 3i}{4} \approx 4.1848022i$$

2.3.4 Графики частичных сумм

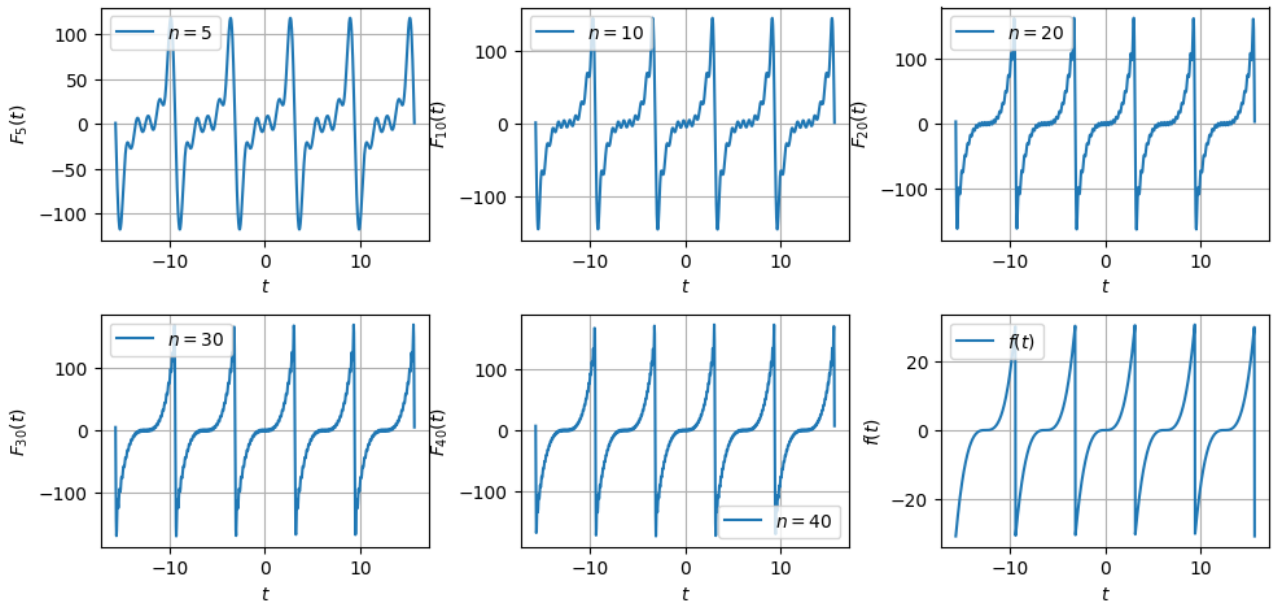


Рис. 8: Графики функции $F_N(t)$ для разных значений n

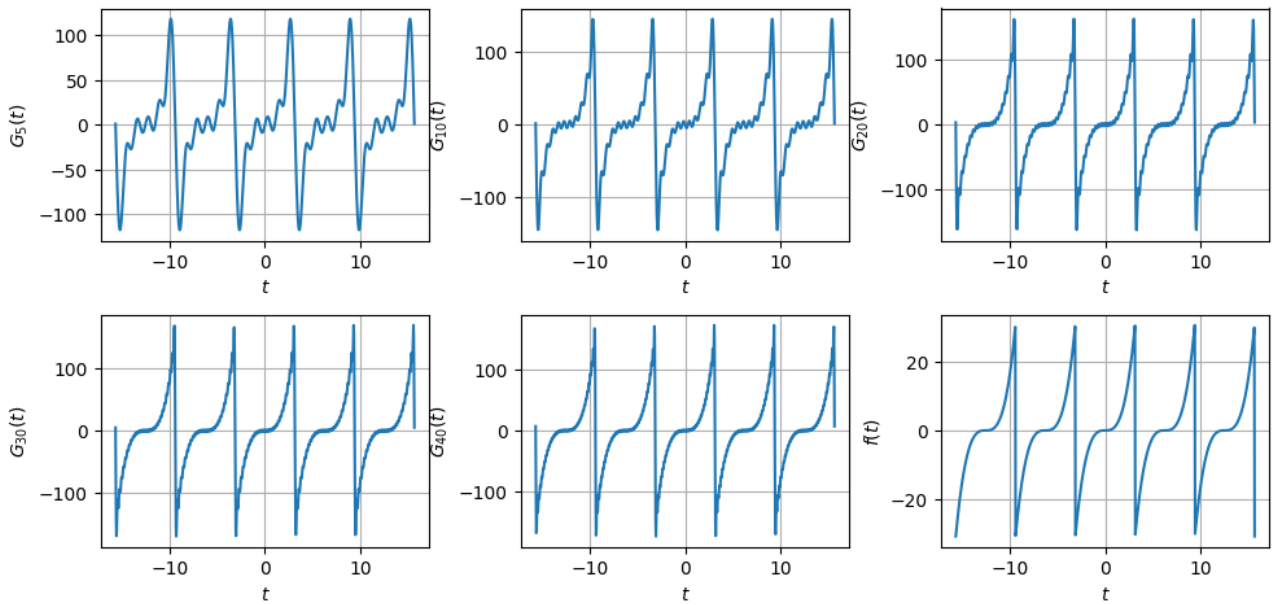


Рис. 9: Графики функции $G_N(t)$ для разных значений n

2.3.5 Численные значения ряда Фурье

n	ω_n	a_n	b_n	c_n
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000+0.000000j
1	1.000000	0.000000	7.739200	0.000000-3.869600j
2	2.000000	-0.000000	-8.369600	-0.000000+4.184800j

2.3.6 Равенство Парсеваля при $N = 100$

$$\|f\|^2 - \left(\hat{a}_0^2 + \sum_{n=1}^{100} (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2) \right) = 19.4887$$

$$\|f\|^2 - \sum_{n=-100}^{100} |\hat{c}_n|^2 = 19.4887$$

2.4 Периодическая функция, график которой состоит не только из прямых линий, и которая не является ни чётной, ни нечётной

В качестве такой функции возьмем $f(t) = \sin 3t + \cos 2t$ на промежутке $t \in [0; 2\pi]$. Построим график функции $f(t)$:

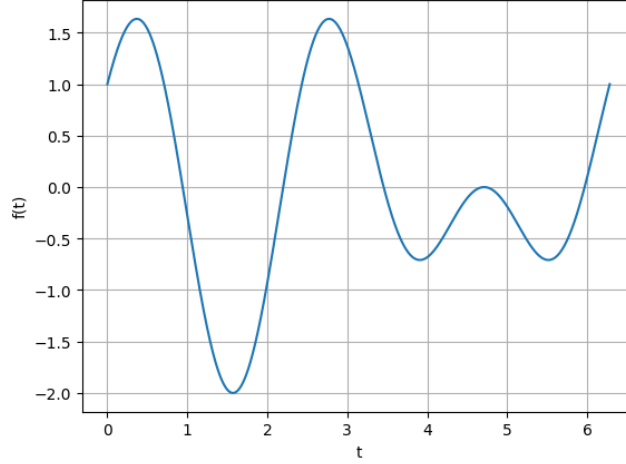


Рис. 10: График периодической функции $f(t)$

Период функции равен $T = t_2 - t_0 = 2\pi - 0 = 2\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{T} = n$. Теперь посчитаем первые три a_n , b_n , c_n аналитически, воспользуемся формулами (3), (4), (5).

2.4.1 Аналитический подсчет коэффициентов a_0 , a_1 , a_2

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3t + \cos 2t) dt = \left(\frac{\sin 2t}{2\pi} - \frac{\cos 3t}{3\pi} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3\pi} - \frac{1}{3\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3t + \cos 2t) \cos t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t \sin 3t + \cos t \cos 2t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 4t + \sin 2t}{2} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t (1 - 2 \sin^2 t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{\cos 4t}{8} - \frac{\cos 2t}{4} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \left(\sin t - \frac{2 \sin^3 t}{3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3t + \cos 2t) \cos 2t dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2t \sin 3t dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2t dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 5t + \sin t}{2} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 4t + 1}{2} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{\cos 5t}{10} - \frac{\cos t}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{1}{2}t + \frac{\sin 4t}{8} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 1 \end{aligned}$$

2.4.2 Аналитический подсчет коэффициентов b_1 , b_2

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3t + \cos 2t) \sin t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t \sin 3t + \sin t \cos 2t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2t - \cos 4t}{2} dt + \int_{-\pi}^{\pi} (2 \cos^2 t - 1) \sin t dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin 4t}{8} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \left(\cos t - \frac{2 \cos^3 t}{3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3t + \cos 2t) \sin 2t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 2t \sin 3t + \cos 2t \sin 2t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t - \cos 5t}{2} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 4t}{2} dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin t}{2} - \frac{\sin 5t}{10} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

2.4.3 Аналитический подсчет коэффициентов c_0 , c_1 , c_2

Интегралы в этом пункте надо разбить по свойству линейности, а дальше надо взять дважды по частям, причем без разницы что брать за U , а что за dV :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3t + \cos 2t) dt = \frac{a_0}{2} = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3t + \cos 2t) e^{-it} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 3t}{e^{it}} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2t}{e^{it}} dt \right) = -\frac{6e^{6it} + 12ie^{5it} - 4ie^{it} + 3}{48\pi e^{4it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3t + \cos 2t) e^{-2it} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 3t}{e^{2it}} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2t}{e^{2it}} dt \right) = 0.5$$

2.4.4 Графики частичных сумм

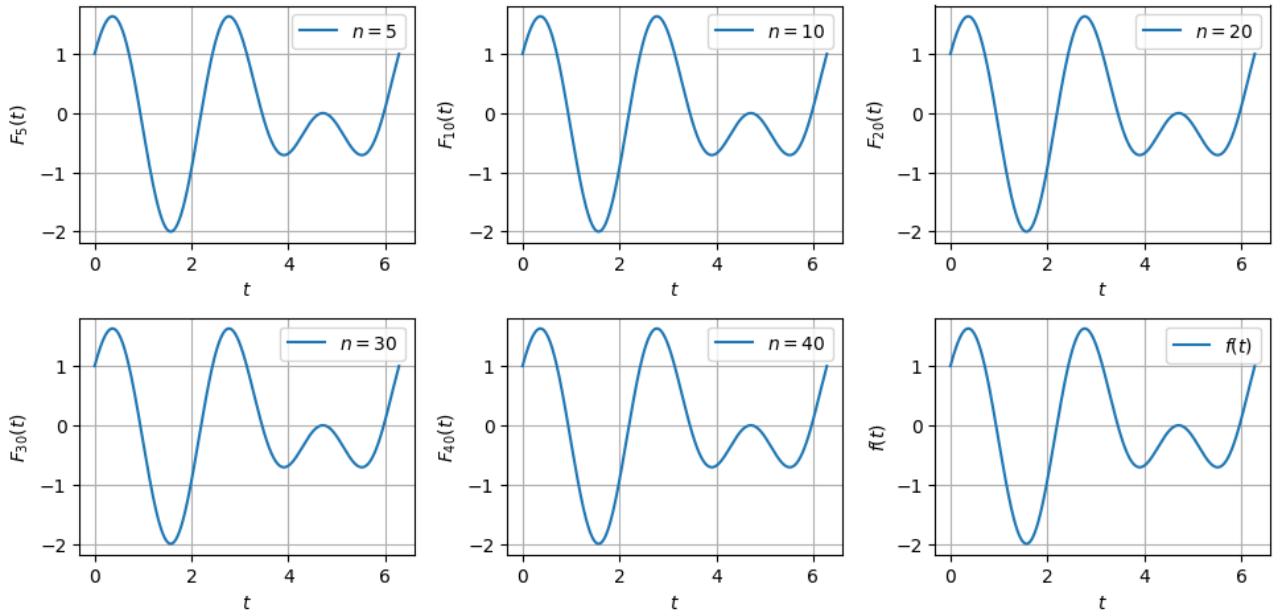


Рис. 11: Графики функции $F_N(t)$ для разных значений n

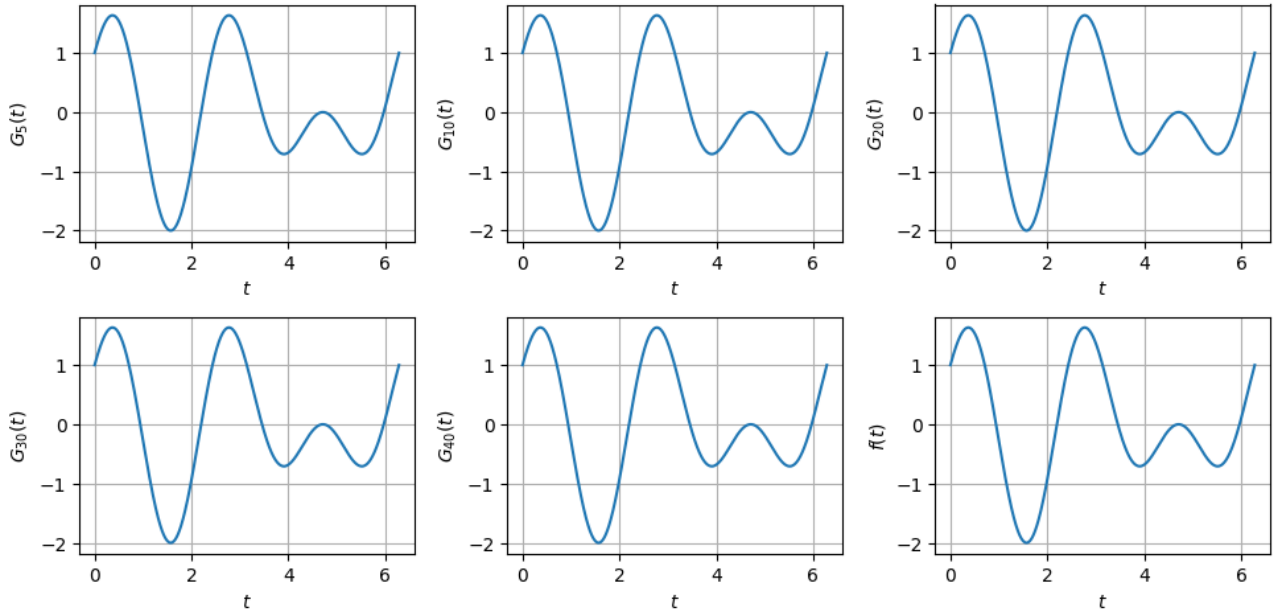


Рис. 12: Графики функции $G_N(t)$ для разных значений n

2.4.5 Численные значения ряда Фурье

n	ω_n	a_n	b_n	c_n
0	0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000+0.000000j
1	1.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000+0.000000j
2	2.000000	1.000000	-0.000000	0.500000+0.000000j

2.4.6 Равенство Парсеваля при $N = 2$

$$\|f\|^2 - \left(\hat{a}_0^2 + \sum_{n=1}^2 (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2) \right) = 3.1416$$

$$\|f\|^2 - \sum_{n=-2}^2 |\hat{c}_n|^2 = 3.1416$$

3 Комплексная функция

Для следующей функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ выберем значения $R = 10, T = 16 \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi n}{8}$

$$R, T > 0$$

$$\operatorname{Re}(f(t)) = \begin{cases} R, & t \in \left[-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}\right) \\ 2R - \frac{8Rt}{T}, & t \in \left[\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}\right) \\ -R, & t \in \left[\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}\right) \\ -6R + \frac{8Rt}{T}, & t \in \left[\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}\right) \end{cases}, \operatorname{Im}(f(t)) = \begin{cases} \frac{8Rt}{T}, & t \in \left[-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}\right) \\ R, & t \in \left[\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}\right) \\ 4R - \frac{8Rt}{T}, & t \in \left[\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}\right) \\ -R, & t \in \left[\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}\right) \end{cases}$$

То есть получим следующую функцию, учитывая наши подобранные значения:

$$\operatorname{Re}(f(t)) = \begin{cases} 10, & t \in [-2, 2) \\ 20 - 5t, & t \in [2, 6) \\ -10, & t \in [6, 10) \\ -60 + 5t, & t \in [10, 14) \end{cases}, \operatorname{Im}(f(t)) = \begin{cases} 5t, & t \in [-2, 2) \\ 10, & t \in [2, 6) \\ 40 - 5t, & t \in [6, 10) \\ -10, & t \in [10, 14) \end{cases}$$

3.0.1 График функции $f(t)$ обозначим на комплексной плоскости

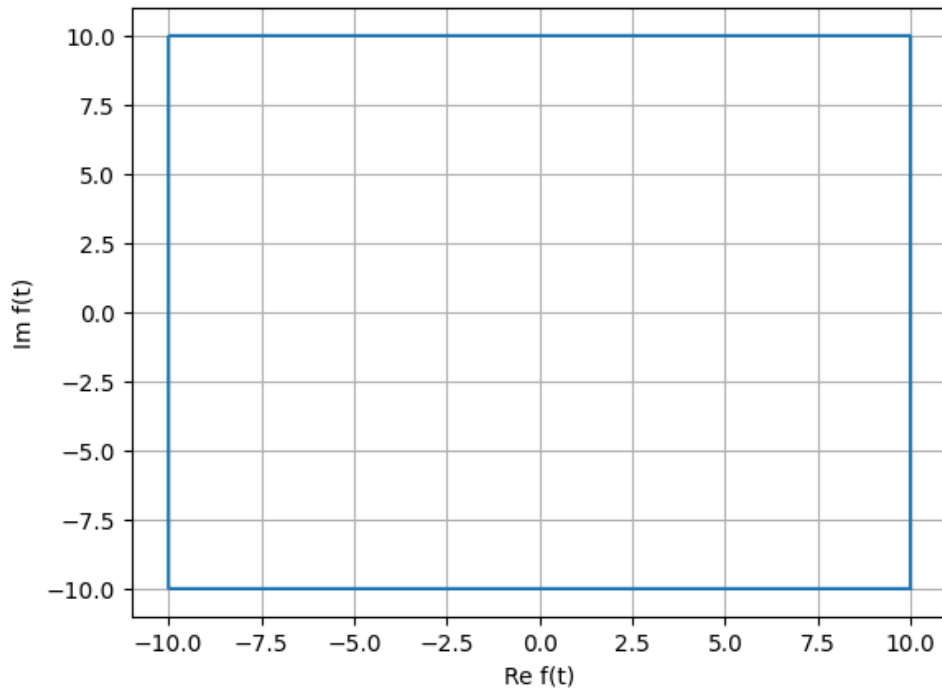


Рис. 13

3.0.2 Аналитический подсчет коэффициентов $c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2$

Найдем коэффициенты Фурье для комплексной функции. В общем виде их можно вычислить следующим образом:

$$c_n = \frac{1}{16} \int_{-2}^{14} f(t) e^{-\frac{i\pi n}{8}t} dt =$$

$$= \frac{1}{16} \left(\int_{-2}^2 (10 + 5it) e^{-\frac{i\pi n}{8}t} dt + \int_2^6 (20 - 5t + 10i) e^{-\frac{i\pi n}{8}t} dt + \int_6^{10} (-10 + 40i - 5it) e^{-\frac{i\pi n}{8}t} dt + \int_{10}^{14} (-60 + 5t - 10i) e^{-\frac{i\pi n}{8}t} dt \right)$$

Вычислим коэффициенты ряда Фурье:

$$c_0 = \frac{1}{16} \left(\int_{-2}^2 (10 + 5it) dt + \int_2^6 (20 - 5t + 10i) dt + \int_6^{10} (-10 + 40i - 5it) dt + \int_{10}^{14} (-60 + 5t - 10i) dt \right) = \frac{5}{2} + \frac{5i}{2} - \frac{5}{2} - \frac{5i}{2} = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{16} \left(\int_{-2}^2 (10 + 5it) e^{-\frac{i\pi}{8}t} dt + \int_2^6 (20 - 5t + 10i) e^{-\frac{i\pi}{8}t} dt + \int_6^{10} (-10 + 40i - 5it) e^{-\frac{i\pi}{8}t} dt + \int_{10}^{14} (-60 + 5t - 10i) e^{-\frac{i\pi}{8}t} dt \right) =$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{20\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{20\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{20\sqrt{2}}{\pi^2} = \frac{80\sqrt{2}}{\pi^2}$$

$$c_{-1} = \frac{1}{16} \left(\int_{-2}^2 (10 + 5it) e^{\frac{i\pi}{8}t} dt + \int_2^6 (20 - 5t + 10i) e^{\frac{i\pi}{8}t} dt + \int_6^{10} (-10 + 40i - 5it) e^{\frac{i\pi}{8}t} dt + \int_{10}^{14} (-60 + 5t - 10i) e^{\frac{i\pi}{8}t} dt \right) =$$

$$= \frac{10\sqrt{2}\pi - 20\sqrt{2}}{\pi^2} - \frac{10\sqrt{2}\pi - 20\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{10\sqrt{2}\pi - 20\sqrt{2}}{\pi^2} - \frac{10\sqrt{2}\pi - 20\sqrt{2}}{\pi^2} = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{16} \left(\int_{-2}^2 (10 + 5it) e^{-\frac{i\pi}{4}t} dt + \int_2^6 (20 - 5t + 10i) e^{-\frac{i\pi}{4}t} dt + \int_6^{10} (-10 + 40i - 5it) e^{-\frac{i\pi}{4}t} dt + \int_{10}^{14} (-60 + 5t - 10i) e^{-\frac{i\pi}{4}t} dt \right) =$$

$$= \frac{5\pi + 10}{\pi^2} - \frac{5\pi + 10}{\pi^2}i - \frac{5\pi + 10}{\pi^2} + \frac{5\pi + 10}{\pi^2} = 0$$

$$c_{-2} = \frac{1}{16} \left(\int_{-2}^2 (10 + 5it) e^{\frac{i\pi}{4}t} dt + \int_2^6 (20 - 5t + 10i) e^{\frac{i\pi}{4}t} dt + \int_6^{10} (-10 + 40i - 5it) e^{\frac{i\pi}{4}t} dt + \int_{10}^{14} (-60 + 5t - 10i) e^{\frac{i\pi}{4}t} dt \right) =$$

$$= \frac{5\pi - 10}{\pi^2} - \frac{5\pi - 10}{\pi^2}i - \frac{5\pi - 10}{\pi^2} + \frac{5\pi - 10}{\pi^2}i = 0$$

3.0.3 Программа на Python для вычисления коэффициентов ряда Фурье

В первом листинге описана функция для вычисления коэффициентов a_n , b_n , c_n . Здесь приведены функции для описания нашей комплексной функции:

```

1 R, T = 10, 16
2
3 def Re(t):
4     return np.piecewise(t,
5         [((-T / 8 <= t) & (t < T / 8)), ((T / 8 <= t) & (t < 3 * T / 8)), ((3
6             * T / 8 <= t) & (t < 5 * T / 8)), ((5 * T / 8 <= t) & (t < 7 * T / 8))],
7         [R, lambda t: 2 * R - 8 * R * t / T, -R, lambda t: -6 * R + 8 * R * t
8             / T])
9
10 def Im(t):
11     return np.piecewise(t,
12         [((-T / 8 <= t) & (t < T / 8)), ((T / 8 <= t) & (t < 3 * T / 8)), ((3
13             * T / 8 <= t) & (t < 5 * T / 8)), ((5 * T / 8 <= t) & (t < 7 * T / 8))],
14         [lambda t: 8 * R * t / T, R, lambda t: 4 * R - 8 * R * t / T, -R])

```

Листинг 3: Действительная и мнимая часть комплексной функции

3.0.4 Графики частичных сумм ряда

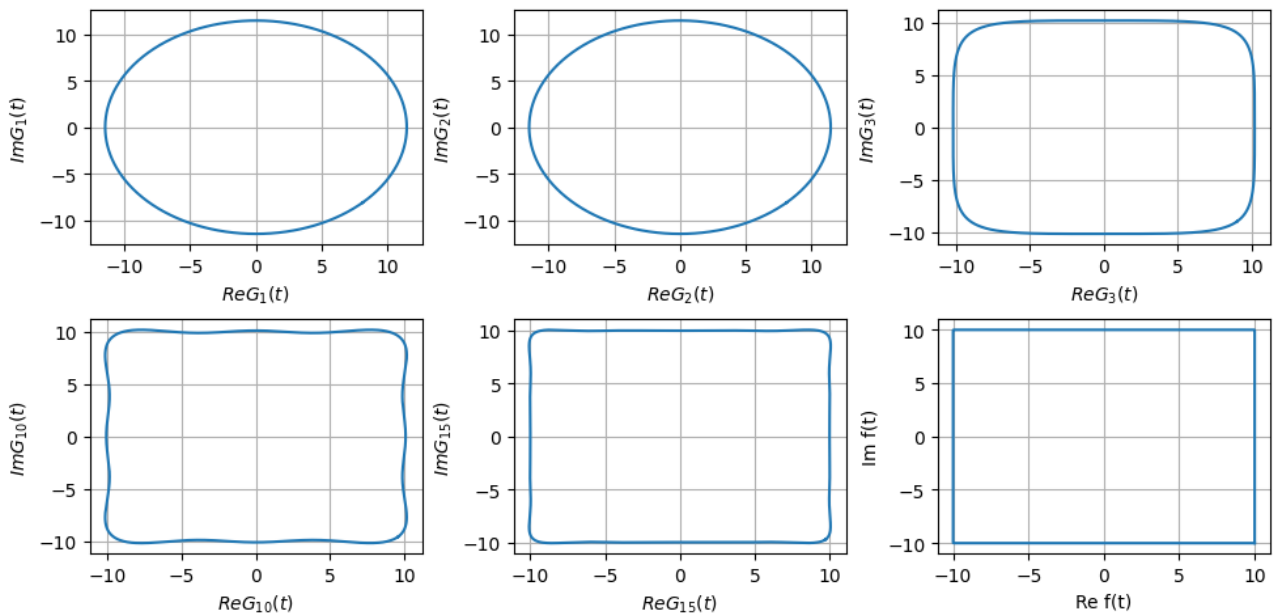


Рис. 14: График $G_n(t)$ для $N = 1, 2, 3, 10, 15$ и $f(t)$

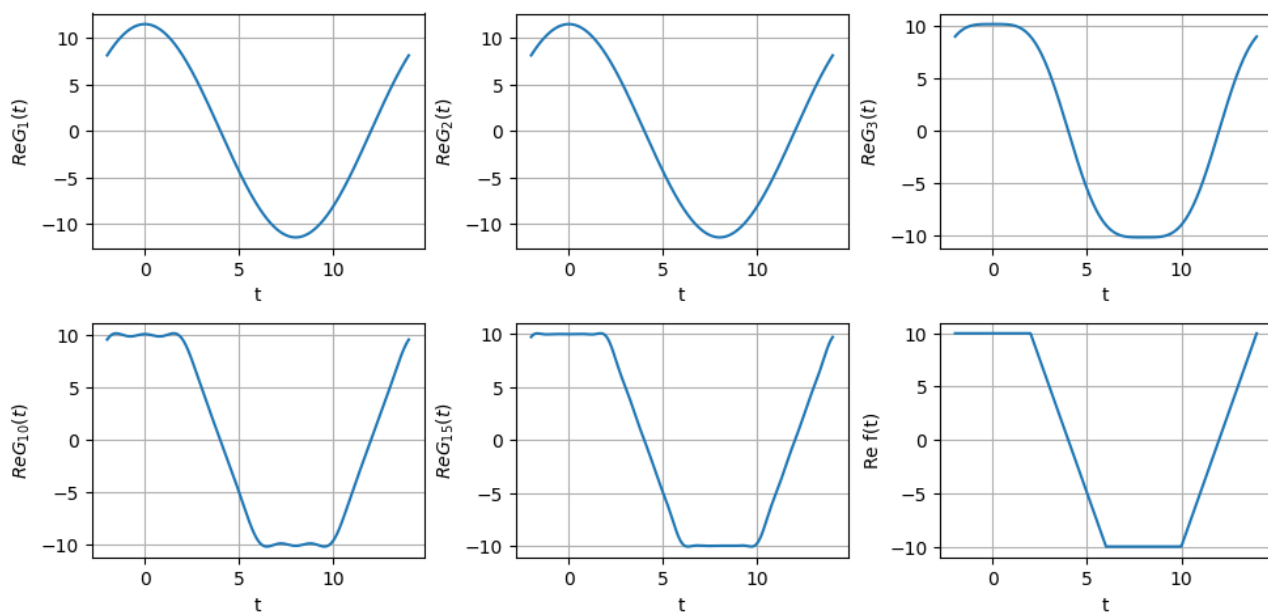


Рис. 15: График $ReG_n(t)$ для $N = 1, 2, 3, 10, 15$ и $Ref(t)$

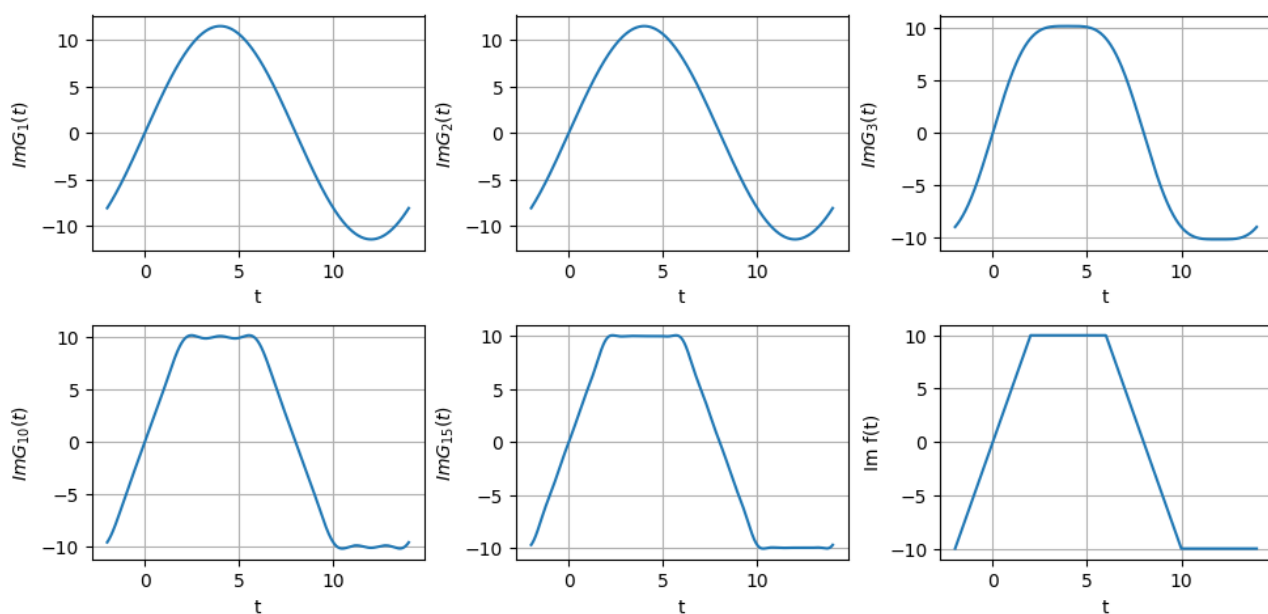


Рис. 16: График $ImG_n(t)$ для $N = 1, 2, 3, 10, 15$ и $Imf(t)$

3.0.5 Численные значения ряда Фурье

n	ω_n	a_n	b_n	c_n
-2	-0.785400	-0.023000	0.025200	-0.011500-0.012600j
-1	-0.392700	0.011100	0.026100	0.005600-0.013000j
0	0.000000	0.026500	0.000000	0.013300+0.000000j
1	0.392700	0.011100	-0.026100	0.005600+0.013000j
2	0.785400	-0.023000	-0.025200	-0.011500+0.012600j

3.0.6 Равенство Парсеваля

```

1 def check_parseval(
2     f: Callable[[np.ndarray], np.ndarray],
3     t: np.ndarray,
4     T: float,
5     N: int,

```

```

6     label: str
7 ) -> List[complex]:
8
9     C: List[complex] = []
10    for n in range(-N, N + 1):
11        w_n: float = 2 * np.pi * n / T
12        c_n: complex = np.sqrt(1 / T) * simpson(f(t) * np.exp(-1j * w_n * t), t)
13        C.append(c_n)
14
15    # Проверка равенства Парсеваля
16    parseval_error: float = np.round(simpson(f(t) ** 2, t) - np.sum(np.abs(C) ** 2), 4)
17
18    display(Math(f'|\{\texttt{label}\} f|^2 - \sum_{n=-\{N\}}^{\{N\}} |\hat{c}_n|^2 = \{\texttt{parseval\_error}\}'))
19
20    return C
21

```

Листинг 4: Функция для проверки равенства Парсеваля

3.0.7 Результаты при $N = 100$

$$||Re f||^2 - \sum_{n=-100}^{100} |\hat{c}_n|^2 = 0.0980$$

$$||Im f||^2 - \sum_{n=-100}^{100} |\hat{c}_n|^2 = 0.0981$$

4 Выводы

В ходе лабораторной работы я изучил подходы к нахождению коэффициентов Фурье и различные разложения ряда Фурье: тригонометрическое и комплексное. Выяснил, что структура разложения зависит от чётности функции: у чётных функций ряд содержит только косинусы, у нечётных — только синусы, а в общем случае присутствуют оба. Также я убедился, что с увеличением числа членов ряд Фурье лучше аппроксимирует исходную функцию, что подтверждается графически и аналитически через равенство Парсеваля.