

Задание 1. Вещественные функции.

Придумайте числа a, b, t_0, t_1, t_2 такие, что $a, b > 0$ и $t_2 > t_1 > t_0 > 0$. Рассмотрите следующие функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

1. **Квадратная волна** — периодическая функция с периодом $T = t_2 - t_0$ такая, что

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_0, t_1), \\ b, & t \in [t_1, t_2). \end{cases}$$

2. Любая **чётная** периодическая функция по вашему выбору.
3. Любая **нечётная** периодическая функция по вашему выбору.
4. Любая периодическая функция по вашему выбору, график которой состоит не только из прямых линий, и которая не является **ни чётной, ни нечётной**.

Для каждой из функций $f(t)$ рассмотрите частичные суммы рядов Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right),$$
$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t},$$

где $\omega_n = 2\pi n/T$. Для этого:

- Приведите формулы для вычисления коэффициентов рядов Фурье (a_n, b_n) ($n = \overline{0, N}$) и c_n ($n = \overline{-N, N}$). Если значения некоторых из коэффициентов очевидны, то укажите это.
 - Для первой функции (**квадратная волна**) также вычислите значения указанных коэффициентов вручную при $N = 2$.
- Напишите программу для вычисления коэффициентов рядов Фурье (a_n, b_n) и c_n для произвольного N . Приведите в отчёте полученные коэффициенты при $N = 2$.
 - Для первой функции сравните результаты с полученными ранее вручную.
- Задайтесь пятью различными значениями N и постройте графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$. Сравните их друг с другом и с графиком исходной функции $f(t)$.
- Выберите наибольшее из рассмотренных N и проверьте выполнение равенства Парсеваля для оригинала функции $f(t)$ и рассмотренных частичных сумм ряда $F_N(t)$ и $G_N(t)$.

Ожидаемые результаты:

- Для каждый из функций $f(t)$:
 - Аналитическое выражение выбранной функции $f(t)$ и ее график, охватывающий не менее пары периодов.
 - Формулы для вычисления коэффициентов (a_n, b_n) и c_n . Для первой функции также привести результаты вычисления коэффициентов вручную по указанным формулам при $N = 2$ с выкладками расчетов.
 - Результаты программного вычисления коэффициентов (a_n, b_n) и c_n при $N = 2$. Для первой функции также сравнить их с полученными ранее.
 - Графики частичных сумм рядов $F_N(t)$ и $G_N(t)$ для не менее чем пяти различных значений N . Для повышения наглядности сравнения частичных сумм рядов между собой и с исходной функцией рекомендуется для каждого выбранного N приводить отдельный рисунок с выведенными на одну координатную плоскость графиками функции $f(t)$ и частичных сумм $F_N(t)$ и $G_N(t)$.
 - Результаты проверки равенства Парсеваля.
- Выводы.

Задание 2. Комплексная функция.

Задайтесь числами $R, T > 0$ и рассмотрите комплекснозначную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с периодом T такую, что

$$\operatorname{Re}(f(t)) = \begin{cases} R, & t \in [-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}), \\ 2R - 8Rt/T, & t \in [\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}), \\ -R, & t \in [\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}), \\ -6R + 8Rt/T, & t \in [\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}), \end{cases} \quad \operatorname{Im}(f(t)) = \begin{cases} 8Rt/T, & t \in [-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}), \\ R, & t \in [\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}), \\ 4R - 8Rt/T, & t \in [\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}), \\ -R, & t \in [\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}), \end{cases}$$

Для функции $f(t)$ рассмотрите частичные суммы ряда Фурье

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t},$$

где $\omega_n = 2\pi n/T$. Для этого:

- Приведите формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье c_n ($n = \overline{-N, N}$) и вычислите их значения вручную при $N = 2$.
- Напишите программу для вычисления коэффициентов ряда Фурье c_n для произвольного N и приведите в отчёте результаты работы программы при $N = 2$.
- Постройте параметрические графики (на комплексной плоскости) частичных сумм ряда $G_N(t)$ при $N = 1, 2, 3, 10$. Сравните их друг с другом и с параметрическим графиком исходной функции $f(t)$.
- Постройте графики $\operatorname{Re}(G_N(t))$, $\operatorname{Im}(G_N(t))$ при $N = 1, 2, 3, 10$ и сравните их с соответствующими графиками $\operatorname{Re}(f(t))$, $\operatorname{Im}(f(t))$.
- Выберите наибольшее из рассмотренных N и проверьте выполнение равенства Парсеваля для оригинала функции $f(t)$ и частичной суммы ряда $G_N(t)$.

Ожидаемые результаты:

- Аналитическое выражение функции $f(t)$ и ее параметрический график.
- Формулы для вычисления коэффициентов c_n и результаты их вычисления вручную по при $N = 2$ с выкладками расчетов.
- Результаты программного вычисления коэффициентов c_n при $N = 2$ и сравнение их с полученными вручную.
- Параметрические графики частичных сумм ряда $G_N(t)$ при $N = 1, 2, 3, 10$, их сравнение с оригинальной функции $f(t)$. Для повышения наглядности сравнения рекомендуется размещать полученные графики на одной координатной плоскости с графиками оригинальной функции.
- Графики $\operatorname{Re}(G_N(t))$, $\operatorname{Im}(G_N(t))$ при $N = 1, 2, 3, 10$, их сравнение с $\operatorname{Re}(f(t))$ и $\operatorname{Im}(f(t))$ соответственно. Для повышения наглядности сравнения рекомендуется размещать полученные графики на одной координатной плоскости с соответствующими графиками оригинальной функции (объединять $\operatorname{Re}(*)$ с $\operatorname{Re}(*)$ и $\operatorname{Im}(*)$ с $\operatorname{Im}(*)$).
- Результат проверки равенства Парсеваля.
- Выводы.

Задание 3. Произвольный рисунок. (Необязательное)

В этом задании вам предлагается воспроизвести результат, который можно увидеть в [этом](#) и [подобных ему](#) видео.

- Задайте произвольный рисунок на комплексной плоскости (это может быть сердечко, звёздочка, человечек — что угодно). Найдите способ сохранить его как набор последовательно расположенных точек, достаточно близких друг к другу.
- Задайте “расписание движения” по этим точкам: предположите, что движение между соседними точками происходит равномерно и прямолинейно.
- Найдите коэффициенты соответствующего ряда Фурье.
- Если чувствуете в себе силы, то можете сделать **анимацию**, соответствующую параметрическому графику частичной суммы ряда Фурье. Пусть ваш рисунок появляется прямо у вас на глазах — из суммы простых вращений! Если сделать анимацию кажется для вас слишком сложным, то постройте статичные параметрические графики по аналогии с предыдущим заданием.

Ожидаемые результаты:

- Выбранный произвольный рисунок на комплексной плоскости.
- Параметрические графики частичных сумм ряда Фурье для нескольких выбранных N , их сравнение с оригинальным рисунком. Для повышения наглядности сравнения рекомендуется размещать полученные графики на одной координатной плоскости с графиками оригинальной функции.
- (*Опционально*) Анимацию, соответствующую параметрическому графику частичной суммы ряда Фурье при достаточно большом N .

Контрольные вопросы для подготовки к защите:

1. Что такое тригонометрический ряд Фурье?
2. Какие функции могут быть разложены в тригонометрический ряд Фурье?
3. Какие базисы разложения в ряд Фурье вам известны? Какими свойствами они обладают? Когда они применимы?
4. Какие виды сходимости рядов Фурье к их оригиналам функций вам известны? При каких условиях они наблюдаются?
5. Что показывает равенство Парсеваля?