Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения (3 семестр) Индивидуальное домашнее задание 2

Подготовил:
Соловьёв Дмитрий R3235

Санкт-Петербург, 2024

Задание 1

Найти все действительные решения для уравнения (задача 1):

$$y^{(4)} + 4y'' = 8e^{2x} + 8x^2$$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0$$

Получаем корни:

$$\lambda = 0,\ k = 2 \text{ - алгебраическая кратность.}\quad \tau : C_1 x + C$$
$$\lambda = \pm 2i,\ k = 1 \text{ - алгебраическая кратность.}\quad \tau : C_3 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

Получаем общее решение $\overline{y}$ однородного уравнения:

$$\overline{y} = C_3\ \sin 2x + C_2\ \cos 2x + C_1\, x + C$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения с помощью метода неопределенных коэффициентов. Частное решение для слагаемого $8e^{2x}$ имеет вид:

$$y_0 = Ae^{2x}$$

Найдем производные:

$$y_0'' = 4Ae^{2x}$$
$$y_0^{(4)} = 16Ae^{2x}$$

Для нахождения коэффициентов подставляем вид частного решения и его производные в дифференциальное уравнение:

$$32\,A\,e^{2\,x} = 8\,e^{2\,x}$$

Получаем, что:

$$32\,A = 8 \to A = \frac{1}{4}$$

Получаем частное решение для слагаемого $8e^{2x}$:

$$y_0 = \frac{e^{2\,x}}{4}$$

У слагаемого $8x^2$ появляется резонансный случай. Частное решение будет выглядеть:

$$y_1 = x^2(Ax^2 + Bx + C)$$

Найдем производные:

$$\begin{aligned} y_1'' &= 12\,A\,x^2 + 6\,B\,x + 2\,C, \\ y_1^{(4)} &= 24\,A. \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов подставляем вид частного решения и его производные в дифференциальное уравнение:

$$48\,A\,x^2 + 24\,B\,x + 8\,C + 24\,A = 8\,x^2$$

Приравняем коэффициенты подобных слагаемых с обеих сторон:

$$\begin{cases} 48\,A = 8 \\ 24\,B = 0 \\ 8\,C + 24\,A = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = 0 \\ C = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Получаем частное решение для слагаемого $8x^2$:

$$y_1 = x^2 \left(\frac{x^2}{6} - \frac{1}{2} \right)$$

Ответ:

$$y = \bar{y} + y_0 + y_1 = C_3 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{e^{2\,x}}{4} + x^2 \left(\frac{x^2}{6} - \frac{1}{2} \right) + C_1\, x + C$$

Задание 2

Найти все действительные решения систем уравнений (задача 29):

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y \\ \dot{y} = 4y - 3z \\ \dot{z} = -x + 3y + 5z \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Для решения системы воспользуемся методом Эйлера. Для этого найдем собственные значения и собственные вектора матрицы:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -3 \\ -1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Получим уравнение:

$$((4-\lambda)(5-\lambda)+9)(4-\lambda)+9 = -(4-\lambda)(5-\lambda)\lambda - 9\lambda + 4(4-\lambda)(5-\lambda) + 45 = 0$$

Или же:

$$-\left(\lambda - 5\right)\left(\lambda^2 - 8\,\lambda + 25\right) = 0$$

Найдем корни уравнения:

$$\lambda - 5 \to \lambda_1 = 5,\, k = 1,$$
$$\lambda^2 - 8\lambda + 25 \to \lambda_{2,3} = \pm 3i + 4,\, k = 1.$$

Найдем собственный вектор для собственного значения $\lambda_1 = 5$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -9x_3 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \to V_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Компонент решения для $\lambda_1 = 5$ по формуле $X_i = C_i e^{\lambda_i} V_i$ выглядит:

$$X_1 = \begin{cases} x = -9C_1 e^{5t} \\ y = -3C_1 e^{5t} \\ z = C_1 e^{5t} \end{cases}$$

Найдем собственный вектор для собственного значения $\lambda_{2,3} = 3i + 4$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -3i & 3 & 0 \\ 0 & -3i & -3 \\ -1 & 3 & 1-3i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 3i & 0 \\ 0 & 3 & -3i \\ -1 & 3 & 1-3i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 3i & 0 \\ 0 & 3 & -3i \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 + ix_2 = 0 \\ ix_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = ix_1 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = ix_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \to V_{\lambda_{2,3}} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Компонент решения для $\lambda_{2,3} = 4 \pm 3i$ по формуле $X_i = C_i \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_i t} V_i\right) + C_{i+1} \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_i t} V_i\right)$ выглядит:

$$X_2 = \begin{cases} x = C_2 e^{4t} \sin 3t + C_3 e^{4t} \cos 3t \\ y = C_2 e^{4t} \cos 3t - C_3 e^{4t} \sin 3t \\ z = C_2 e^{4t} \sin 3t + C_3 e^{4t} \cos 3t \end{cases}$$

Ответ:

$$X = X_1 + X_2 = \begin{cases} x = -9C_1 e^{5t} + C_2 e^{4t} \sin 3t + C_3 e^{4t} \cos 3t \\ y = -3C_1 e^{5t} + C_2 e^{4t} \cos 3t - C_3 e^{4t} \sin 3t \\ z = +C_1 e^{5t} + C_2 e^{4t} \sin 3t + C_3 e^{4t} \cos 3t \end{cases}$$

Задание 3

Решить задачу Коши (задача 57):

$$2y^2y''\sin x - 2y^2y'\cos x + (y')^3 - 2y(y')^2\sin x = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Решение.

Уравнение является однородным относительно y, y', y'', поэтому делаем замену $y' = yz$, $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Получим:

$$2y^2y(z^2 + z')\sin x - 2y^2yz\cos x + (yz)^3 - 2y(yz)^2\sin x = 0$$

Делим уравнение на y^3. Получаем уравнение Бернулли:

$$2z'\sin x - 2z\cos x = -z^3$$

Сделаем замену $p = \dfrac{1}{z^2}$, $p' = -\dfrac{2z'}{z^3}$. Получим неоднородное линейное уравнение первого порядка:

$$p'\sin x + 2p\cos x = 1$$

Решим однородное уравнение:

$$p'\sin x + 2p\cos x = 0$$

Распишим производную $p' = \dfrac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}\sin x = -2p\cos x$$

Разделим уравнение на $\sin x$ и умножим на дифференциал dx. Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\cos x dx}{\sin x}$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{2\cos x dx}{\sin x}$$

Вычисляем интегралы:

$$\ln|p| = -2\ln|\sin x| + \ln C_0$$

Получаем:

$$p = \frac{C}{sin^2 x}$$

Полагаем, что $C = C(x)$, подставим p в линейное неоднородное уравнение:

$$\frac{C'}{\sin^2 x}\sin x - \frac{2C\cos x}{\sin^3 x}\sin x + 2\frac{C}{\sin^2 x}\cos x = 1, \quad C' = \sin x.$$

Найдем C. Решим уравнение:

$$dC = \sin x dx$$
$$C = -\cos x + C_1$$

Получим:

$$p = \frac{-cosx + C_1}{\sin^2 x} \to z^2 = \frac{1}{p} = \frac{\sin^2 x}{-\cos x + C_1}$$

Найдем значение C_1:

$$z(\frac{\pi}{2}) = \frac{y'(\frac{\pi}{2})}{y(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{-1} = -1 \to z^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to \frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{-\cos\frac{\pi}{2} + C_1} = 1 \to C_1 = 1$$

В итоге получим:

$$\frac{y'}{y} = \pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Так как y, y' имеют разные знаки при $x = \frac{\pi}{2}$. То выбираем знак минус:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Распишим производную $y' = \frac{dy}{dx}$. Домножим на dx. Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$$

Проинтегрируем:

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$$

Вычисляем интегралы:

$$\ln|y| = -2\sqrt{1-\cos x} + C_2$$

Найдем C_2:

$$\ln|1| = -2\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2}} + C_2 \to C_2 = 2$$

Ответ:

$$y = e^{2-2\sqrt{1-\cos x}}$$

Задание 5

Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые (задача 113):

$$(6x+6y)^5 = y'(y'+6)^5$$

Решение.

Введем параметр $p = \dfrac{dy}{dx}$:

$$6x+6y = p^{\frac{1}{5}}(p+6)$$

Возьмем производные у обоих частей уравнения и заменим y' на p:

$$6(1+p) = \frac{1}{5}p^{-\frac{4}{5}}p'(p+6) + p^{\frac{1}{5}}p'$$

Умножим уравнение на $p^{\frac{4}{5}}$ и сделаем преобразования:

$$6(1+p)p^{\frac{4}{5}} = \frac{6}{5}p'(p+1)$$

Перенесем все в левую сторону:

$$(p+1)\left(p^{\frac{4}{5}} - \frac{p'}{5}\right) = 0$$

Получаем 2 случая:

$$p=-1 \to y = -x - \frac{5}{6},$$
$$p' = 5p^{\frac{4}{5}} \to \frac{1}{5}p^{-\frac{4}{5}}dp = dx \to p^{\frac{1}{5}} = x + C \to p = (x+C)^5,$$
$$y = -x + \frac{1}{6}(x+C)((x+C)^5+6) \to y = C + \frac{1}{6}(x+C)^6.$$

Найдем p-дискриминантное множество, исключив параметр p из уравнений:

$$(6x + 6y)^5 = p(p + 6)^5,$$
$$\frac{\partial}{\partial p}\left((6x + 6y)^5 - p(p + 6)^5\right) = 0.$$

То есть получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (6x + 6y)^5 = p(p + 6)^5 \\ 6(p + 1)(p + 6)^4 = 0 \end{cases}$$

Получим 2 решения. Если $p = -6$. То $y = -x$ - это не решение исходного уравнения. Если $p = -1$, то $y = -x - \frac{5}{6}$ - единственное особое решение:

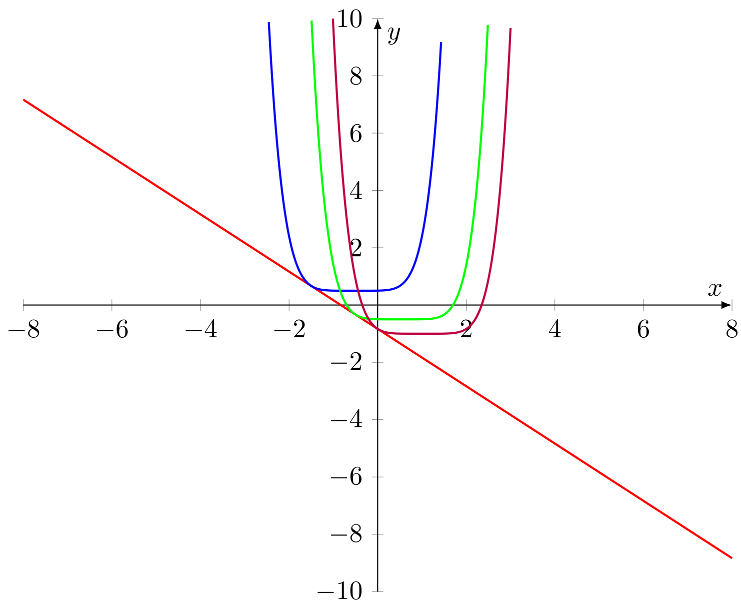

Рис. 1: График прямой $y = -x - \frac{5}{6}$ и интегральных кривых $y = C + \frac{1}{6}(x + C)^6$ для различных значений C

Проверим касание, чтобы доказать, что решение особое:

$$\begin{cases} -x - \frac{5}{6} = C + \frac{1}{6}(x+C)^6 \\ -1 = (x+C)^5 \end{cases}$$

При $C = -1-x$ в тождество обращается первое уравнение. То есть получим, что $y = C + \dfrac{1}{6}(x+C)^6$ при $C = -x-1$ касается прямой $y = -x - \dfrac{5}{6}$ в точке $\left(-x, -x - \dfrac{5}{6}\right)$

Задание 8

Решить уравнение (задача 197):

$$(x+1)y'' - 3(2x+1)y' + 9xy = 2e^{4x}$$

Решение.

Частное решение уравнения ищем путем подбора в виде $y_z = e^{\alpha x}$, $y_1' = \alpha e^{\alpha x}$, $y_1'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$ в однородное дифференциальное уравнение $(x+1)y'' - 3(2x+1)y' + 9xy = 0$. Получим:

$$\alpha^2 (x+1)e^{\alpha x} - 3(2x+1)\alpha e^{\alpha x} + 9xe^{\alpha x} = 0$$

Так как функции 1 и x линейно независимы, то:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha = 0 \end{cases} \xrightarrow{\alpha=3} y_1 = e^{3x}$$

Согласно формуле Остроградского–Лиувилля:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$$

В нашем случае $p(x) = -\dfrac{3(2x+1)}{x+1} = -6 + \dfrac{3}{x+1}$:

$$-\int p(x)dx = \int \left(6 - \frac{3}{x+1}\right) dx = 6x - 3\ln|x+1| + \bar{C}$$

$$y_2 = e^{3x} \int \bar{\bar{C}} e^{-6x} e^{6x - 3\ln|x+1|} dx + C_2 e^{3x}$$

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$\int e^{-6x} e^{6x-3\ln|x+1|} dx = \int \frac{1}{(x+1)^3} = -\frac{1}{2(x+1)^2} + C^*$$

Получим в итоге общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 \frac{e^{3x}}{(x+1)^2}$$

Решим исходное неоднородное дифференциальное уравнение методом вариации постоянных:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{3x} + C_2'(x)\dfrac{e^{3x}}{(x+1)^2} = 0 \\ 3C_1'(x)e^{3x} + C_2'(x)\left(\dfrac{3e^{3x}}{(x+1)^2} - \dfrac{2e^{3x}}{(x+1)63}\right) = \dfrac{2e^{4x}}{x+1} \end{cases}$$

Из второго уравнения вычитаем тройное первое и получаем:

$$-2C_2'(x)\frac{e^{3x}}{(x+1)^3} = \frac{2e^{4x}}{x+1} \rightarrow C_2'(x) = -e^x(x+1)^2$$

Проинтегрируем и найдем $C_2(x)$:

$$\begin{aligned} C_2(x) = -\int e^x(x^2+2x+1)\,dx = \\ &= -\left((x^2+2x+1)e^x - \int e^x(2x+2)\,dx\right) \\ &= -\left((x^2+2x+1)e^x - \left(\int 2xe^x\,dx + 2e^x\right)\right) = \\ &= -\big((x^2+2x+1)e^x - (-2xe^x - 2e^x + 2e^x)\big) + C_2 = \\ &= -x^2e^x - e^x + C_2 \end{aligned}$$

Из первого уравнения найдем $C_1(x)$:

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{1}{(x+1)^2} = e^x \rightarrow C_1(x) = e^x + C_1$$

Найдем решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = (e^x + C_1)e^{3x} + (-x^2e^x - e^x + C_2)\frac{e^{3x}}{(x+1)^2}$$

Ответ:

$$y = \frac{2xe^{4x}}{(x+1)^2} + C_1e^{3x} + C_2\frac{e^{3x}}{(x+1)^2}$$