Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения (3 семестр) Индивидуальное домашнее задание 1

Вариант 29

Подготовил:
Соловьёв Дмитрий R3235

Санкт-Петербург, 2024

Задание 1

Указать тип дифференциального уравнения первого порядка. Найти общее решение.

$$y'\sqrt{1+y^2} = \frac{x^2}{y}$$

Решение.

Перепишем производную $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y}$$

Умножим уравнение на y и дифференциал dx. Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y\,\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y = x^2\,\mathrm{d}x$$

Проинтегрируем:

$$\int y\,\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int x^2\,\mathrm{d}x$$

Вычисляем полученные интегралы:

$$\left(y^2+1\right)^{\frac{3}{2}} = x^3 + C$$

Ответ:

$$y^2 = \sqrt[3]{\left(x^3+C\right)^2} - 1$$

Задание 2

Указать тип дифференциального уравнения первого порядка. Найти общее решение.

$$x^2 y' = y(x + y)$$

Решение.

Перепишем производную $y'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{x^2\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\ (y + x)$$

Умножаем обе части уравнения на дифференциал dx и получаем однородное уравнение:

$$x^2\,\mathrm{d}y = y\ (y + x)\ \mathrm{d}x$$

Сделаем замену $y = ux$, $dy = udx + xdu$:

$$x^2\ (u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) = \left(u^2 + u\right)\ x^2\,\mathrm{d}x$$

Раскроем скобки и сократим подобные слагаемые:

$$x^3\,\mathrm{d}u = u^2\,x^2\,\mathrm{d}x$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Вычисляем полученные интегралы:

$$\frac{1}{u} = C - \ln(x)$$

Сделаем обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$:

$$\frac{x}{y} = C - \ln(x)$$

Ответ:

$$y = -\frac{x}{\ln(x) + C}$$

Задание 3

Указать тип дифференциального уравнения первого порядка. Найти решение задачи Коши.

$$y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0, y(0) = 0$$

Решение.

Перенесем слагаемые на другую сторону и получим линейное неоднородное уравнение:

$$y' - 3\,x^2\,y = x^2\,e^{x^3}$$

Сделаем замену $y = uv$, $y' = uv' + vu'$:

$$u\,v' + u'\,v - 3\,u\,v\,x^2 = x^2\,e^{x^3}$$

$$u'\,v + u\,\left(v' - 3\,v\,x^2\right) = x^2\,e^{x^3}$$

Решаем однородное уравнение:

$$v' - 3\,v\,x^2 = 0$$

Перепишем производную $v'(x) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3\,v\,x^2$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = 3\,x^2\,\mathrm{d}x$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{1}{v}\, \mathrm{d}v = \int 3\, x^2\, \mathrm{d}x$$

Вычисляем полученные интегралы:

$$\ln(v) = x^3$$

В итоге получаем:

$$v = e^{x^3}$$

Решаем второе уравнение

$$u'\, e^{x^3} = x^2\, e^{x^3}$$

Делим обе части уравнения на e^{x^3} и получим:

$$u' = x^2$$

Перепишем производную $u'(x) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\mathrm{d}u = x^2\, \mathrm{d}x$$

Проинтегрируем:

$$\int 1\, \mathrm{d}u = \int x^2\, \mathrm{d}x$$

Вычисляем полученные интегралы:

$$u = \frac{x^3}{3} + C$$

Сделаем обратную замену $u = \dfrac{y}{v}$, $v = e^{x^3}$, получаем:

$$y = \frac{\left(x^3 + 3\,C\right)\,e^{x^3}}{3}$$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\,e^{x^3}$$

Решим задачу Коши:

$$0 = \left(\frac{0^3}{3} + C\right)e^{0^3} \to C = 0$$

Решение задачи Коши:

$$y = \frac{x^3\,e^{x^3}}{3}$$

Задание 4

Указать тип дифференциального уравнения первого порядка. Найти общее решение.

$$y' - y + y^2 \cos x = 0$$

Решение.

Переносим слагаемые на другую сторону и получаем уравнение Бернулли:

$$y' - y = -\cos(x)\ y^2$$

Делим обе части уравнения на y^2(при делении теряем решение $y = 0$) и делаем замену: $u = \dfrac{1}{y}$, $u' = -\dfrac{y'}{y^2}$:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = -\cos(x) \to -u' - u = -\cos(x)$$

Получаем линейное неоднородное уравнение:

$$u' + u = \cos(x)$$

Сделаем замену $u = tv$, $u' = tv' + t'v$ и получим:

$$t\,v' + t'\,v + t\,v = \cos(x)$$

Или же:

$$t\,v' + v\ (t' + t) = \cos(x)$$

Решаем однородное уравнение:

$$t' + t = 0$$

Решение уравнения выглядит следующим образом:

$$t = e^{-x}$$

Решаем второе уравнение:

$$\frac{v'}{e^{x}} = \cos{\left(x \right)}$$

Перепишем производную $v'(x) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ и перенесем экспоненту в правую сторону уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = e^{x} \cos{\left(x \right)}$$

Домножим уравнение на дифференциал dx и получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\mathrm{d}v = e^{x} \cos{\left(x \right)} \,\mathrm{d}x$$

Проинтегрируем:

$$\int 1 \,\mathrm{d}v = \int e^{x} \cos{\left(x \right)} \,\mathrm{d}x$$

Вычисляем полученные интегралы:

$$v = \frac{e^{x} \sin{\left(x \right)}}{2} + \frac{e^{x} \cos{\left(x \right)}}{2} + C$$

Сделаем обратную замену $v = \dfrac{u}{t}$, $u = \dfrac{1}{y}$, $t = e^{-x}$ и получим ответ:

$$y = \frac{2 \, e^{x}}{e^{x} \sin{\left(x \right)} + e^{x} \cos{\left(x \right)} + C}$$