Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения
Лабораторная работа № 2

Подготовил:
Соловьёв Дмитрий

Санкт-Петербург, 2025

I часть

Уравнение Бесселя:

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0,\ x > 0,\ \nu \geq 0 - \mathrm{const} \tag{1}$$

Найдем производные первого и второго порядка для $y_1(x) = x^\nu \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$y_1'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)a_n x^{n+\nu-1}$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)(n+\nu-1)a_n x^{n+\nu-2}$$

Подставим $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ в уравнение (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)(n+\nu-1)a_n x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)a_n x^{n+\nu} + (x^2-\nu^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n((n+\nu)(n+\nu-1) + n + \nu + x^2 - \nu^2) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(n^2 + n\nu - n + n\nu + \nu^2 - \nu + n + \nu + x^2 - \nu^2) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(n^2 + 2n\nu + x^2) = 0$$

В итоге получим:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(2\nu+n)a_n x^n$$

Получим следующее рекуррентное соотношение:

$$-a_n = (n+2)(2\nu+n+2)a_{n+2}$$
$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(2\nu+n+2)}$$

На основе рекуррентного соотношения получим следующее выражение(все нечетные степени обнуляются):

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!!\prod\limits_{i=1}^{k}(2\nu+2i)} = \frac{(-1)^k a_0}{2^k(2k)!!\prod\limits_{i=1}^{k}(\nu+i)}$$

При подстановке a_{2k} видим, что $y_1(x)$ будет выглядеть следующим образом:

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{2^k(2k)!!\prod\limits_{i=1}^{k}(\nu+i)} x^{2k}$$

Давайте упростим это выражение и перепишим через гамма-функцию. Заметим, что $\prod\limits_{i=1}^{k}(\nu+i) = \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}$ и $(2k)!! = 2^k k!$. Тогда получим:

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\Gamma(\nu+1)a_0}{k!2^{2k}\Gamma(\nu+k+1)}x^{2k} = \Gamma(\nu+1)a_0 2^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

В итоге получим следующее выражение для решения $y_1(x)$:

$$y_1(x) = C_1 J_\nu(x) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \text{ где } C_1 = \Gamma(\nu+1)2^\nu a_0$$

Если ν не является целым числом, функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы и, следовательно, являются решениями уравнения. Но если $\nu \in \mathbb{Z}$, то верно следующее соотношение:

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$$

Найдем производные первого и второго порядка для $y_2(x) = x^{-\nu} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$:

$$y_2'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\nu}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\nu) b_n x^{n-\nu-1}$$

$$y_2''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\nu)(n-\nu-1) b_n x^{n-\nu-2}$$

Подставим $y_2(x)$, $y_2'(x)$, $y_2''(x)$ в уравнение (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-\nu)(n-\nu-1) b_n x^{n-\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-\nu) b_n x^{n-\nu} + (x^2-\nu^2) x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n (n^2 - 2n\nu + x^2) = 0$$

В итоге получим:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-2\nu) b_n x^n$$

Получим следующее рекуррентное соотношение:

$$b_{n+2} = -\frac{b_n}{(n+2)(n+2-2\nu)}$$

На основе рекуррентного соотношения получим следующее выражение(все нечетные степени обнуляются):

$$b_{2k} = \frac{(-1)^k b_0}{(2k)!!\prod\limits_{i=0}^{k}(-2\nu+2i)} = \frac{(-1)^k b_0}{2^k(2k)!!\prod\limits_{i=1}^{k}(-\nu+i)}$$

При подстановке b_{2k} видим, что $y_2(x)$ будет выглядеть следующим образом:

$$y_2(x) = C_2 J_{-\nu}(x) = C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \text{ где } C_2 = 2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)b_0$$

Тогда получаем общее решение уравнения (1) для $\nu \notin \mathbb{Z}$:

$$y_\nu(x) = C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} + C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

Найдем производную для $y_\nu(x)$:

$$y'_\nu(x) = C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)x^{2k+\nu-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)2^{2k+\nu}} + C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-\nu)x^{2k-\nu-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)2^{2k-\nu}}$$

II часть

Система уравнений движения:

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} + \beta v^2 + \mu m g - qu = 0 \\ \frac{dm}{dt} = -q \end{cases} \tag{2}$$

Сделаем замену:

$$v(t) = \frac{m(t)\dot{V}(t)}{\beta V(t)} \tag{3}$$

Посчитаем производную для замены $v(t) = \frac{m(t)\dot{V}(t)}{\beta V(t)}$:

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{\beta}\frac{(\dot{m}(t)\dot{V}(t) + m(t)\ddot{V}(t))V(t) - \dot{V}(t)m(t)\dot{V}(t)}{V^2(t)}$$

Подставим в первое уравнение системы (2):

$$\frac{m}{\beta} \cdot \frac{(\dot{m}\dot{V} + m\ddot{V})V - \dot{V}^2 m}{V^2} + \beta \cdot \frac{m^2\dot{V}^2}{\beta^2 V^2} + \mu m g - qu = 0$$

Раскроем скобки и домножим на βV^2 левую часть уравнения:

$$m\dot{m}\dot{V}V + m^2\ddot{V}V - \dot{V}^2 m^2 + m^2\dot{V}^2 + (\mu m g - qu)\beta V^2 = 0$$

В итоге получим следующее уравнение после замены:

$$m^2\ddot{V} - mq\dot{V} + \beta(\mu m g - qu)V = 0 \tag{4}$$

Сделаем замену:

$$\tau = \frac{2}{q}\sqrt{\beta \mu m(t) g} \tag{5}$$

Выразим $m(t)$ через τ:

$$m(t) = \frac{q^2\tau^2}{4\beta\mu g}$$

Найдем производную $\dot{\tau}$:

$$\dot{\tau} = \frac{2}{q}\frac{\beta\mu g\dot{m}(t)}{2\sqrt{\beta\mu g m(t)}} = -\frac{2}{q}\frac{\beta\mu g q}{2\sqrt{\beta\mu g m(t)}} = -\sqrt{\frac{\beta\mu g}{m(t)}} = -\frac{2\beta\mu g}{q\tau}$$

Найдем производную $\frac{dV}{dt}$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{dV}{d\tau}\cdot\frac{2\beta\mu g}{q\tau}$$

Найдем вторую производную $\frac{d^2V}{dt^2}$:

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dV}{dt}\right)\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau}\left(-\frac{dV}{d\tau}\frac{2\beta\mu g}{q\tau}\right)\cdot\left(-\frac{2\beta\mu g}{q\tau}\right) = \frac{4\beta^2\mu^2g^2}{q^2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dV}{d\tau}\cdot\frac{1}{\tau}\right)\cdot\frac{1}{\tau}$$
$$= \frac{4\beta^2\mu^2g^2}{q^2}\left(\frac{d^2V}{d\tau^2}\cdot\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}\cdot\frac{dV}{d\tau}\right)\cdot\frac{1}{\tau} = \frac{4\beta^2\mu^2g^2}{\tau^3q^2}\left(\tau\frac{d^2V}{d\tau^2} - \frac{dV}{d\tau}\right)$$

Подставим $m(t)$, $\frac{dV}{d\tau}$ и $\frac{d^2V}{d\tau^2}$ в уравнение (4):

$$\frac{q^4\tau^4}{16\beta^2\mu^2g^2}\cdot\frac{4\beta^2\mu^2g^2}{\tau^3q^2}\left(\tau\frac{d^2V}{d\tau^2} - \frac{dV}{d\tau}\right) + \frac{q^3\tau^2}{4\beta\mu g}\cdot\frac{dV}{d\tau}\cdot\frac{2\beta\mu g}{q\tau} + \beta\left(\mu\cdot\frac{q^2\tau^2}{4\beta\mu g}\cdot g - qu\right)V = 0$$

Преобразуем:

$$\frac{q^2\tau}{4}\left(\tau\frac{d^2V}{d\tau^2} - \frac{dV}{d\tau}\right) + \frac{q^2\tau}{2}\frac{dV}{d\tau} + \left(\frac{q^2}{4}\tau^2 - qu\beta\right)V = 0$$

Раскроем первые скобки и получим:

$$\frac{q^2\tau^2}{4}\frac{d^2V}{d\tau^2} + \frac{q^2\tau}{4}\frac{dV}{d\tau} + \left(\frac{q^2}{4}\tau^2 - qu\beta\right)V = 0$$

Теперь поделим уравнение на $\frac{q^2}{4}$ и получим уравнение Бесселя:

$$\tau^2\frac{d^2V}{d\tau^2} + \tau\frac{dV}{d\tau} + \left(\tau^2 - \nu^2\right)V = 0 \tag{6}$$

$$\nu = 2\sqrt{\frac{\beta u}{q}}$$

Запишим решение $V(\tau)$ для уравнения Бесселя (6):

$$V(\tau) = C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k+\nu} + C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k-\nu}$$

Запишим выражение для $v(t)$, основываясь на замене (3) и (5). Вынесем константу C_2 и сделаем замену для констант $C = \frac{C_1}{C_2}$:

$$v(t) = -\frac{2\mu m(t)g}{q\tau(t)}\cdot\frac{C\frac{dJ_\nu(\tau)}{d\tau} + \frac{dJ_{-\nu}(\tau)}{d\tau}}{CJ_\nu(\tau) + J_{-\nu}(\tau)}$$

Получим следующее решение, если подставим выражение для $\tau(t)$:

$$v(t) = -\frac{\sqrt{\mu g m(t)}}{2\sqrt{\beta}}\cdot\frac{C\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{\sqrt{\beta\mu m(t)g}}{q}\right)^{2k+\nu-1} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-\nu)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{\sqrt{\beta\mu m(t)g}}{q}\right)^{2k-\nu-1}}{C\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{\sqrt{\beta\mu m(t)g}}{q}\right)^{2k+\nu} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{\sqrt{\beta\mu m(t)g}}{q}\right)^{2k-\nu}}$$

Давайте поймем, откуда же взялось, что $\frac{dV}{d\tau}\Big|_{\tau_0} = 0$. У нас есть начальные условия $v(0) = 0$ и $m(0) = m_0$. А значит получим следующее выражение:

$$v(0) = 0 = \frac{m_0 \left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0}}{\beta V(0)} = \frac{m_0 \left.\frac{dV}{d\tau}\right|_{\tau_0} \left.\frac{d\tau}{dt}\right|_{t=0}}{\beta V(0)} \to \left.\frac{dV}{d\tau}\right|_{\tau_0} = 0, \text{ так как } \left.\frac{d\tau}{dt}\right|_{t=0} \neq 0$$

Теперь мы можем записать тогда выражение для константы C:

$$C = -\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-\nu)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{\sqrt{\beta\mu m_0 g}}{q}\right)^{2k-\nu-1}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{\sqrt{\beta\mu m_0 g}}{q}\right)^{2k+\nu-1}} \tag{7}$$

III часть

Нам даны примерные параметры Aussie Invader 5R:

m_0, кг	m_{final}, кг	q, $\frac{\text{кг}}{\text{с}}$	u, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$	β	μ
9100	6300	130	1550	0.1	0.5

Проверять скорость будет логично до момента времени T, соответствующего достижению условия $m(t) = m_{\text{final}}$:

$$m(t) = m_0 - qt = m_{\text{final}} \to T = \frac{m_0 - m_{\text{final}}}{q} \approx 21.54\text{с}$$

Построим графики, показывающую разницу между вычисленными значениями ряда если брать 2, 5 и 50 членов ряда:

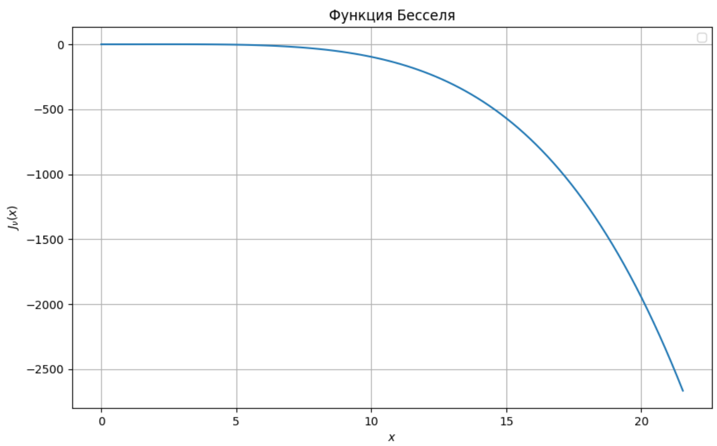

Рис. 1: Функция Бесселя для $n = 2$

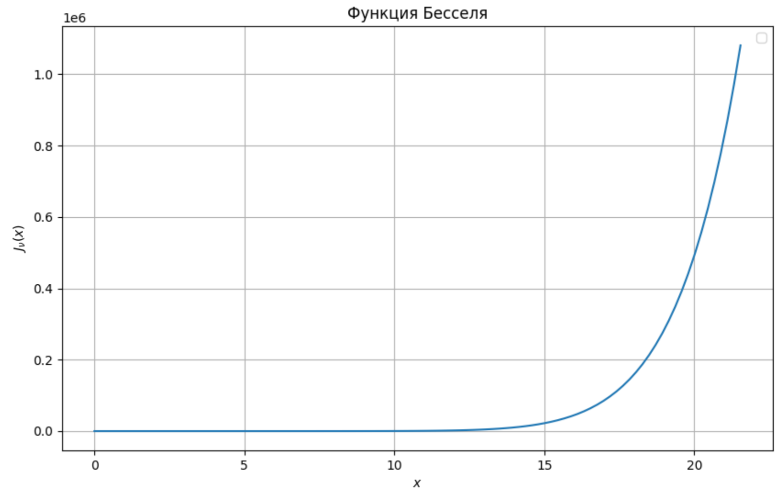

Рис. 2: Функция Бесселя для $n = 5$

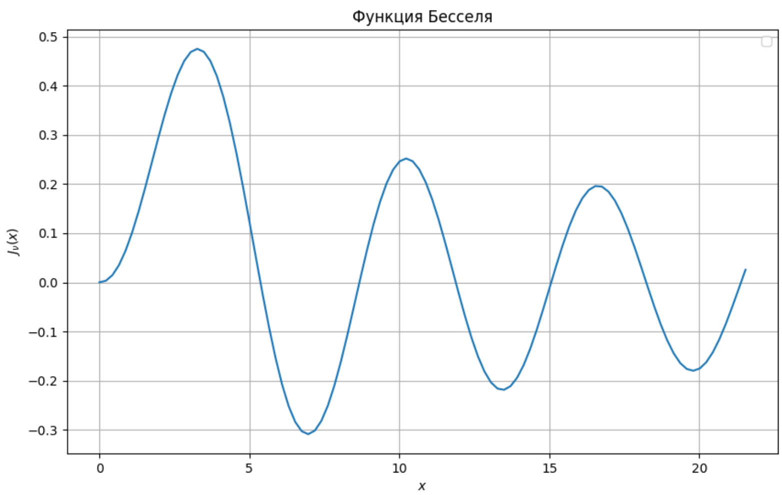

Рис. 3: Функция Бесселя для $n = 50$

На основе формулы (7) мы получим, что $C \approx 8.955$. Построим графики для $v(t)$ в км/ч для разного количества ряда:

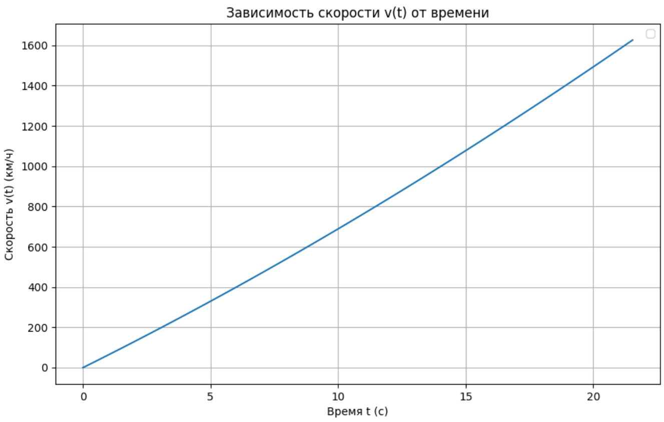

Рис. 4: График для $v(t)$ при $n = 2$

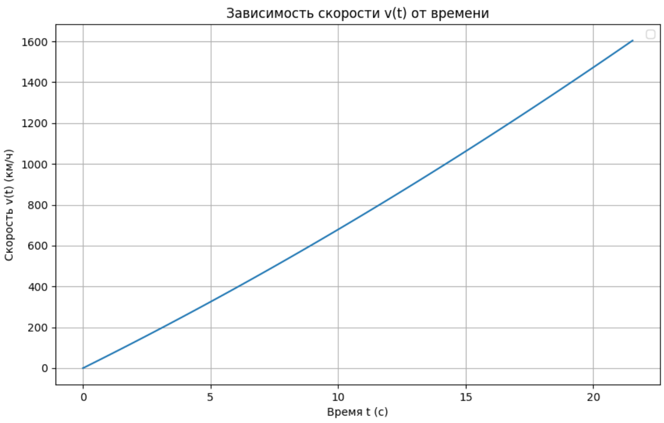

Рис. 5: График для $v(t)$ при $n = 5$

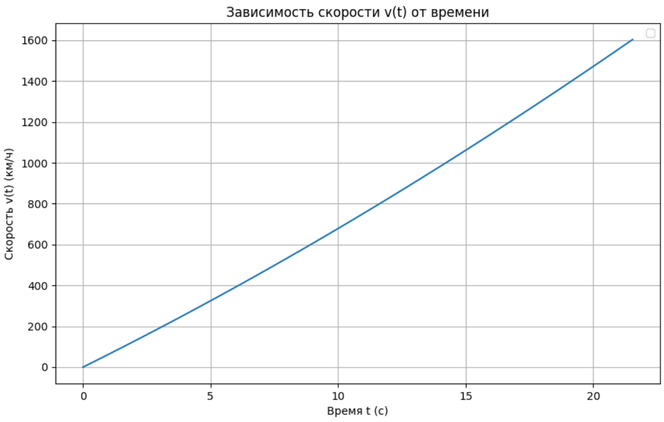

Рис. 6: График для $v(t)$ при $n = 50$

Решим исходную систему дифференциальных уравнений (4) методом Рунге-Кутты 4 порядка:

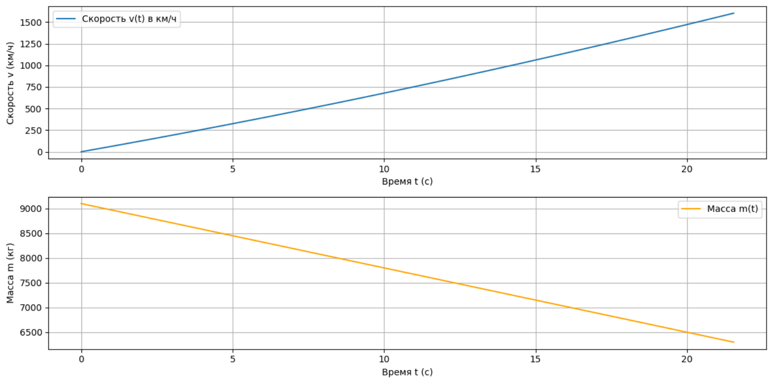

Рис. 7: Решение методом Рунге-Кутты 4 порядка

Вывод: Сравнение графиков скорости, полученных методом Бесселевых рядов и методом Рунге-Кутты 4-го порядка, показало высокую степень совпадения. Это подтверждает точность численного метода при условии правильной настройки шагов интегрирования. Решение через ряды оказалось вычислительно сложным из-за необходимости расчета большого количества членов ряда и использования специальных функций, что требует значительных ресурсов для точного приближения. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка продемонстрировал простую реализацию и высокую скорость вычислений при приемлемой точности.

Приложение 1

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import gamma, sqrt
import matplotlib
matplotlib.use('TkAgg')

# Initial parameters
m_0 = 9100  # initial mass
m_final = 6300  # final mass
q = 130  # mass consumption rate
u = 1550  # exhaust velocity
beta = 0.1  # coefficient
mu = 0.5  # coefficient
g = 9.8  # gravitational acceleration

# Calculation of additional parameters
nu = 2 * sqrt((beta * u) / q)  # value of
T = (m_0 - m_final) / q  # fuel depletion time

# Definition of functions
m = lambda t: m_0 - q * t
tau = lambda t: (2 / q) * math.sqrt(beta * mu * m(t) * g)

y_1 = lambda x, n: sum(
    (-1)**k / (gamma(k+1) * gamma(k + nu + 1)) * (x / 2)**(2 * k + nu)
    for k in range(n))
y_2 = lambda x, n: sum(
    (-1)**k / (gamma(k+1) * gamma(k - nu + 1)) * (x / 2)**(2 * k - nu)
    for k in range(n))
derivative_y_1 = lambda x, n: sum(
    ((2 * k + nu) * (-1) ** k * x ** (2 * k + nu - 1)) /
    (gamma(k + 1) * gamma(k + nu + 1)*2 ** (2 * k + nu))
    for k in range(n))
derivative_y_2 = lambda x, n: sum(
    ((2 * k - nu) * (-1) ** k * x ** (2 * k - nu - 1)) /
    (gamma(k + 1) * gamma(k - nu + 1)*2 ** (2 * k - nu))
    for k in range(n))

"""Task 1"""
# Dividing the interval [0, T] into points
t_values = np.linspace(0, T, 100)

# Calculating the series values for the first 2, 5, and 50 terms
n_values = [2, 5, 50]
results_y_1 = {n: [y_1(t, n) for t in t_values] for n in n_values}

# Plotting graphs
plt.figure(figsize=(10, 6))
for n in n_values:
    plt.plot(t_values, results_y_1[n])
    plt.xlabel('$x$')
    plt.ylabel(r"$J_{\nu}(x)$")
    plt.title('Bessel Function')
    plt.grid()
    plt.show()
```

Листинг 1: Численное вычисление ряда y_1 для разных n

Приложение 2

```
c_const = lambda n: - derivative_y_2(tau(0), n)/derivative_y_1(tau(0), n)
C = c_const(50)
```

Листинг 2: Вычисление константы C

Приложение 3

```
v = lambda t, n: -((2 * mu * m(t) * g) / (q * tau(t))) * (
    (C * derivative_y_1(tau(t), n) + derivative_y_2(tau(t), n)) /
    (C * y_1(tau(t), n) + y_2(tau(t), n))
)

for n_value in n_values:
    v_values = [v(t, n_value) * 3.6 for t in t_values]  # converting speed to km/h
    # Plotting the speed graph
    plt.figure(figsize=(10, 6))
    plt.plot(t_values, v_values)
    plt.xlabel('Time t (s)')
    plt.ylabel('Speed v(t) (km/h)')
    plt.title('Speed v(t) as a function of time')
    plt.grid()
    plt.show()

    # Finding the maximum speed
    max_speed = max(v_values)
    print(f"Maximum speed: {max_speed:.2f} km/h for n = {n_value}")
```

Листинг 3: Вычисление константы C

Приложение 4

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

matplotlib.use('TkAgg')

# System parameters
beta = 0.1
mu = 0.5
g = 9.81
q = 130
u = 1550

# Right-hand side of the system of differential equations
def derivatives(t, v, m):
    dv_dt = -(beta * v**2 + mu * m * g - q*u) / m
    dm_dt = -q
    return dv_dt, dm_dt

# Runge-Kutta 4th order method
def runge_kutta_4(t0, v0, m0, dt, T):
    t_values = [t0]
    v_values = [v0]
    m_values = [m0]

    t = t0
    v = v0
    m = m0

    while t < T:
        k1_v, k1_m = derivatives(t, v, m)
        k2_v, k2_m = derivatives(t + dt/2, v + k1_v * dt/2, m +
            k1_m * dt/2)
        k3_v, k3_m = derivatives(t + dt/2, v + k2_v * dt/2, m +
            k2_m * dt/2)
        k4_v, k4_m = derivatives(t + dt, v + k3_v * dt, m + k3_m *
            dt)

        dv = dt * (k1_v + 2*k2_v + 2*k3_v + k4_v) / 6
        dm = dt * (k1_m + 2*k2_m + 2*k3_m + k4_m) / 6

        v += dv
        m += dm
        t += dt

        t_values.append(t)
        v_values.append(v)
        m_values.append(m)

    return np.array(t_values), np.array(v_values), np.array(
        m_values)

# Initial conditions
t0 = 0.0      # Initial time
v0 = 0.0      # Initial velocity
m0 = 9100     # Initial mass
T = 21.54      # Final time

# Integration step
```

```python
dt = 0.01

# Solving the system
t, v, m = runge_kutta_4(t0, v0, m0, dt, T)

# Converting velocity from m/s to km/h
v_kmh = v * 3.6

# Plotting graphs
plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t, v_kmh, label='Speed v(t) in km/h')
plt.xlabel('Time t (s)')
plt.ylabel('Speed v (km/h)')
plt.grid()
plt.legend()

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t, m, label='Mass m(t)', color='orange')
plt.xlabel('Time t (s)')
plt.ylabel('Mass m (kg)')
plt.grid()
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Листинг 4: Численное вычисление системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4 порядка