Лабораторная работа №2. Линейные уравнения и системы уравнений.

Когда люди считали, что Земля плоская, они были неправы. Когда люди считали, что Земля [идеально] шарообразна, они были неправы. Но если вы считаете, что и те и другие были неправы одинаково, вы неправее, чем и те и другие вместе взятые.

Айзек Азимов, отрывок из эссе «Относительность неправды»

Инструкция

Перед Вами вторая лабораторная работа. В ней придется снова порешать что-то на бумаге (куда же без этого), посмотреть на практический пример применения дифференциальных уравнений, а также при помощи компьютера (и страшных языков программирования) посмотреть на результаты всех стараний.

Все общие размышления от автора выделены голубым цветом, а задания, которые Вам необходимо выполнить – красным.

Соответственно, из рассуждений и ответов на красные задания и складывается Ваш отчет. Старайтесь, чтобы он состоял не просто из сухих ответов, а действительно содержал мысли; чтобы он читался как текст, а не отдельные вырезки; чтобы новый год проверяющий преподаватель начал с приятного чтения Ваших чудесных отчетов.

Помните о том, что Вам это должно быть в первую очередь интересно и полезно. Если что-то не получается или непонятно, то обязательно пишите за подсказками.

Вступление

Хотели когда-нибудь побить мировой рекорд?

Сегодня мы попытаемся проследовать вслед за такими же мечтателями из Австралии, которые захотели развить скорость в 1000 миль в час на машине (или в нормальных единицах измерения около 1600 километров в час). Это может звучать нереально, но предыдущий рекорд составляет 1228 км/ч. И был поставлен он в далеком 1997 году на машине с названием `Thrust SSC` (Рис. 1). И как бы люди не хвалились развитием во всех технических направлениях, до сих пор никому не удалось побить это достижение. Подробнее о разных рекордах скорости можно почитать на Википедии и на сайте команды Thrust SSC.

Рис. 1: Thrust SSC

Рис. 2: Aussie Invader 5R

Однако мы хотим большего и стремимся построить машину (а машина ли это вообще), которая достигнет скорости $>$ 1600 км/ч. Для этого мы присоединимся к проекту `Aussie Invader 5R` (Рис. 2), участники которого уже несколько лет моделируют, высчитывают и собирают все, что поможет достичь цели. К счастью для нас, первый этап проекта закончен и сама машина уже построена. Однако теперь надо понять, теоретически достигнем ли мы цели. Эту задачу мы и будем решать сегодня. О том, на каком сейчас этапе находится сам проект можно почитать на их сайте.

Так как речь идет про движение машины, то есть какую-то динамику, то анализ точно будет включать в себя различные дифференциальные уравнения. В прошлой лабораторной работе мы уже рассмотрели различные численные методы их решения. Однако уже там стоило подметить, что далеко не всегда это лучший вариант. Да и вообще, лучше честного решения ничего быть не может. Поэтому мы сегодня посмотрим на пример того, как свести динамику движения к чему-то, на первый взгляд, более сложному, а на самом деле решаемому аналитически. Конечно, и здесь не без подвоха…Но давайте не будем забегать вперед и пока разберемся, с чем же мы будем иметь дело.

I часть — Теоретическая...

Уравнением Бесселя называют уравнение вида

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0, \qquad (1)$$

где $x > 0$, $\nu \geqslant 0$ — некоторая константа.

Будем искать решение данного уравнения в виде ряда

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (2)$$

Небольшим спойлером уже является то, как мы назвали это решение — $y_1(x)$. На самом деле дальше действительно окажется, что мы получим лишь частное решение. Но об этом позже.

Подставьте выражение 2 для y_1 в уравнение Бесселя 1 и найдите реккурентное соотношение для коэффициентов ряда.

На основе реккурентного соотношения напишите выражение для решения $y_1(x)$. Почему оно все-таки не общее?

Второе линейно независимое с y_1 решение на самом деле можно предложить в общем виде (об этом можно почитать, например, в книжках тут и тут). Мы же остановимся на самом простом случае, который нам понадобится во второй части.

Пусть 2ν оказалось нецелым числом (что наверняка происходит не так уж и редко). Тогда второе решение будем искать в виде

$$y_2(x) = x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \qquad (3)$$

Аналогично тому, как искали y_1, найдите коэффициенты b_n и запишите найденное $y_2(x)$.

Запишите общее решение $y(x)$ исходного уравнения 1 (не забывайте, что это только для случая $2\nu \notin \mathbb{Z}$).

Найдите производную $y'(x)$ общего решения — это понадобится нам позднее во второй части.

II часть — Наконец-то к машинкам

Конечно, чтобы побить рекорд по скорости при движении по земле, необходимо иметь очень мощный двигатель. Пока ничего мощнее ракетного двигателя не придумали — его и возьмем. А ракетный двигатель — это, очень упрощенно, выбрасывание чего-то назад, чтобы ехать вперед. Только в очень усиленной версии. Именно отсюда рождается вполне понятная система уравнений движения.

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} + \beta v^2 + \mu m g - q u = 0, \\ \dfrac{dm}{dt} = -q, \end{cases} \tag{4}$$

где v — скорость машины; m — масса машины, которая уменьшается со скоростью q сжигания топлива; β — коэффициент сопротивления воздуха; μ — коэффициент трения между колесами и землей; u — постоянная скорость выбрасывания топлива относительно движения машины.

При этом начальные условия вполне понятны из смысла задачи: $m(0) = m_0$ — в начале масса состоит из массы машины и топлива, $v(0) = 0$ — скорость на старте нулевая.

Также видно, что второе уравнение достаточно просто решается и дает нам понимание об изменении массы: $m(t) = m_0 - qt$.

Пока не очень похоже на уравнение Бесселя. Да и система нелинейная — а значит непонятно как ее решать. Поэтому чуть преобразуем ее несколькими заменами.

Введем «измененную скорость» $V(t)$ такую, что

$$v(t) = \frac{m(t)\dfrac{dV}{dt}}{\beta V(t)}. \tag{5}$$

При этом естественным образом поднимется порядок уравнения до второго порядка, но мы избавимся от одной из нелинейностей — v^2.

Пересчитайте производную $\frac{dv}{dt}$.

Покажите, что этой заменой первое уравнение системы 4 приводится к

$$m^2(t)\frac{d^2V}{dt^2} - qm(t)\frac{dV}{dt} + \beta(\mu m(t)g - qu)V(t) = 0. \tag{6}$$

В качестве второй замены рассмотрим уже

$$\tau = \frac{2}{q}\sqrt{\beta\mu m(t)g}. \tag{7}$$

При такой замене можно пересчитать производные из соображений

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \text{ и } \frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d\frac{dV}{dt}}{dt} = \frac{d\frac{dV}{dt}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}.$$

Запишите выражения для производных $\frac{dV}{dt}$ и $\frac{d^2V}{dt^2}$, а также $m(t)$ через τ. Подставьте в уравнение 6 и преобразуйте его до вида

$$\tau^2\frac{d^2V}{d\tau^2} + \tau\frac{dV}{d\tau} + (\tau^2 - \nu^2)V = 0. \tag{8}$$

Чему равно ν в данном случае?

Наконец-то уравнение Бесселя! Его мы решать уже умеем (если, конечно, ν — удачное).

Так давайте запишем его решение $V(\tau)$ при условии, что $2\nu \notin \mathbb{Z}$. Для этого надо подставить в коэффициенты a_n и b_n нужные значения.

Не забывайте, что мы все-таки хотим узнать нашу скорость v. Поэтому надо понимать, как она записывается через решение уравнения 8. Вспомните замены 5 и 7. Производную решения уравнения Бесселя мы уже как-то считали в первой части.

Запишите выражение для $v(t)$. Обратите внимание, что мы знаем только $\dfrac{dV}{d\tau}$ и $V(\tau)$. Чтобы получить значение от t можно в качестве аргумента подставить ровно то, чему равно $\tau(t)$.

Осталось разобраться с константами. Из замены 5 можно заметить, что скорость пропорциональна $\frac{\frac{dV}{d\tau}}{V(\tau)}$. Если мы теперь вынесем одну из констант в числителе и знаменателе, то они сократятся. А оставшееся отношение констант можно принять за новую константу C.

Таким образом, на самом деле v зависит от одной константы. Это нетрудно понять, посмотрев на этот вопрос и с другой стороны: исходное уравнение для скорости в системе 4 является уравнением первого порядка. А значит и решение должно записываться ровно через одну константу.

Запишите выражение для нахождение $v(t)$ через одну константу $C = \frac{C_1}{C_2}$ (где C_1 и C_2 — это константы из общего решения уравнения Бесселя).

Найдите выражение для константы C из того, что $\frac{dV}{d\tau} = 0$ (кстати, откуда это взялось?).

III часть — Симуляция

Однако из каких-то страшных рядов мы не увидим поведения нашей скорости. А хочется увидеть графики да и самого главного — значения максимальной скорости. Побьем ли мы рекорд?

Точные параметры экспериментов коллег неизвестны, но многое можно найти у них на сайте проекта. Рассмотрим предложенные в таблице 1 параметры.

m_0, кг	m_{final}, кг	q, $\frac{\text{кг}}{\text{с}}$	u, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$	β	μ
9100	6300	130	1550	0.1	0.5

Таблица 1: Примерные параметры Aussie Invader 5R

До какого времени T логично проверять скорость? Где случится максимум?

Выберите разбиение отрезка $[0,\ T]$, то есть точки, в которых будем считать значение скорости.

Воспользуйтесь любым языком программирования для численного вычисления рядов, полученных для y_1, y_2, y_1' и y_2' в выбранных точках, взяв первые 2, 5 и затем 50 членов. Постройте графики, показывающую разницу между вычисленными значениями для разного числа взятых членов для ряда y_1. Как Вам кажется, сколько членов ряда брать вполне достаточно? Поясните свою точку зрения.

Посчитайте значение константы C на основе полученных рядов.

Вычислите скорость v в выбранных ранее точках и постройте график $v(t)$ в км/ч (придется перевести из м/с) для разного количества членов ряда.

Какую максимальную скорость все-таки удалось развить? Пал ли рекорд (теоретически) под натиском математики? Пробьют ли отметку в 1000 миль в час австралийские энтузиасты?

В первой лабораторной работе мы рассматривали пример численного решения уравнений. И казалось бы, зачем мучиться и решать что-то на бумаге. Давайте сравним наши результаты двух лабораторных.

Для этого решите методом Рунге-Кутты 4-ого порядка (можно взять встроенные в языки программирования) исходную систему 4. Постройте график скорости от времени поверх полученного ранее через ряды (не забудьте учесть переходы между t и τ, а также единицы измерения).

Сравните полученные графики для скорости с решением через ряды. Сделайте выводы относительно точности, скорости, вычислительной сложности и других необходимых сравнительных параметров.

P. S.

Стоит признаться, что на самом деле наши вычисления немного не совпадают с тем, что получилось у команды Aussie Invader 5R. Дело в том, что мы рассмотрели достаточно упрощенную модель и совершенно не учли, например, момент преодоления звукового барьера, в который немного меняются физические процессы. Это можно увидеть на графике, предоставленном на сайте проекта (Рис. 3). Видно, что примерно при 760 милях в час начинается изгиб кривой. Так как мы нигде не учли это изменения, то мне пришлось чуть подогнать параметры, чтобы казалось, что все хорошо. Но при этом до прохода звукового барьера почти линейное поведение скорости отлично передается нашей моделью.

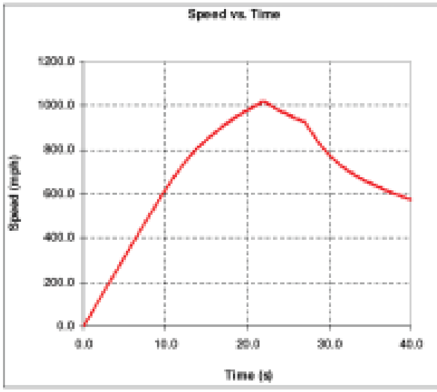

Рис. 3: Официальные данные скорости

Более того, мы совершенно не учитываем, что происходит после достижения этой скорости. Конечно, нельзя просто отключить двигатель на скорости в 1600 км/ч — испытываемые водителем в таком случае силы достигнут 16G, а это практически невозможно выдержать человеку. Однако нас интересовала максимальная скорость, и мы ее действительно получили.