В этой лабораторной мы будем работать с непрерывными ($t \in \mathbb{R}$) и дискретными ($k \in \mathbb{Z}$) линейными динамическими системами второго порядка вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_3 x_1(t) + a_4 x_2(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(k+1) = a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k), \\ x_2(k+1) = a_3 x_1(k) + a_4 x_2(k), \end{cases}$$

или в более компактной форме:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(k+1) = Ax(k),$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Задание 1. Придумайте непрерывное. Задайтесь двумя неколлинеарными векторами $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, не лежащими на координатных осях. Придумайте непрерывные динамические системы со следующими свойствами (по одной для каждого пункта):

1. Система асимптотически устойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $x(t) \in \operatorname{Span}\{v_1\}$, а если $x(0) = v_2$, то $x(t) \in \operatorname{Span}\{v_2\}$ при всех $t \geq 0$.
2. Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.
3. Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.
4. Система асимптотически устойчива, при этом матрица $A \in \mathbb{R}^2$ имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in \mathbb{C}^2$.
5. Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.
6. Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные вектора такие же, как в пункте 4.

Укажите собственные числа, собственные вектора и обобщённые собственные вектора (при наличии) для каждой из матриц A.

Моделирование непрерывного. Задайтесь пятью различными наборами ненулевых начальных условий $x(0)$ (два из которых лежат на собственных векторах) и постройте графики $x_1(t)$, $x_2(t)$, а также фазовые траектории $x_2(x_1)$ для каждой системы и каждого набора начальных условий. Поместите графики, соответствующие различным наборам начальных условий, но относящиеся к одной системе, на одну картинку. Сделайте выводы о характере движения каждой системы.

Задание 2. Придумайте дискретное. Придумайте дискретные динамические системы, обладающие следующими собственными числами (при этом ни одна из придуманных вами матриц A не должна быть диагональной или жордановой!):

1. $\lambda_{1,2} = -1$.
2. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$.
3. $\lambda_{1,2} = \pm i$.
4. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$.
5. $\lambda_{1,2} = 1$.

6-8. Те же собственные числа, что и в пунктах 1, 3, 5, только умноженные на выбранную вами константу c такую, что $0 < c < 1$.

9-11. Те же собственные числа, что и в пунктах 1, 3, 5, только умноженные на выбранную вами константу d такую, что $d > 1$.

12. $\lambda_{1,2} = 0$.

Изобразите собственные числа для каждого случая на комплексной плоскости.

Моделирование дискретного. Задайтесь ненулевыми начальными условиями $x(0)$ и постройте графики $x_1(k)$, $x_2(k)$ для каждой системы. Исследуйте закономерность, того как влияет расположение собственных чисел на комплексной плоскости на характер движения дискретной системы.

Задание 3. Осциллятор? Рассмотрите непрерывную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1 + bx_2. \end{cases}$$

Проанализируйте устойчивость и характер движения данной системы при

1. $a < 0$, $b = 0$.
2. $a < 0$, $b < 0$.
3. $a > 0$, $b = 0$.
4. $a > 0$, $b < 0$.

Для каждого из 4-х случаев придумайте физическую систему, движение которой приближённо подчиняется указанному уравнению. Постройте графики движения $x(t)$. Дайте физическую интерпретацию переменных x_1, x_2, а также параметров a и b.