

В этой лабораторной мы будем воспринимать любую матрицу 2×2 как линейное отображение, преобразующее точки плоскости по закону

$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}.$$

Подготовка. Перед началом выполнения заданий подготовьтесь. Для этого

- Выберите четыре целых числа a , b , c и d таким образом, чтобы все они были различными и ни одно из них не равнялось 0 или ± 1 .
- Задайте n точек, образующих вершины произвольного многоугольника. Используя MATLAB или Python, постройте его графическое изображение.
- По ходу первого задания, выполните визуализацию каждого пункта. Для этого найдите линейное отображение всех вершин многоугольника матрицей преобразования. После постройте графическое изображение многоугольника на полученных (отображённых) вершинах. Также, добавьте на картинку прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

Задание 1. Придумайте. Придумайте матрицы 2×2 , которые задают:

1. Отражение (симметрию) плоскости относительно прямой $y = ax$.
2. Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$.
3. Поворот плоскости на $10c$ градусов против часовой стрелки.
4. Центральную симметрию плоскости относительно начала координат.
5. Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = ax$, потом поворот на $10d$ градусов по часовой стрелке.
6. Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = ax$ и прямую $x = 0$ в $y = bx$.
7. Отображение, которое переводит прямую $y = ax$ в $y = 0$ и прямую $y = bx$ в $x = 0$.
8. Отображение, которое меняет местами прямые $y = ax$ и $y = bx$.
9. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади c .
10. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади d .
11. Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$.

12. Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.
13. Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей).
14. Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.
15. Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: $AB \neq BA$. Сделайте визуализацию всех рассматриваемых отображений, а именно: A , B , AB и BA .
16. Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: $AB = BA$. Постарайтесь, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга. Сделайте визуализацию, аналогичную предыдущему пункту.

Задание 2. Проанализируйте.

- Найдите образ и ядро придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 13, 14.
- Найдите собственные числа и собственные вектора придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16.
- Найдите определитель матриц из пунктов 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10.
- В каких пунктах матрица обязательно получается симметричной?