Syllogismes : détermination par tables de vérité et programmation

Projet L1-mathématiques-informatique – Outils du discret

Pour un binôme.

L'objectif du projet décrit par le présent document est de modéliser les syllogismes étudiés dans l'unité d'enseignement « Outils du discret » (université de Poitiers, L1-mathématiques-informatique) à l'aide de tables de vérité, et de construire progressivement un prédicat booléen qui, étant donnés les caractéristiques d'un syllogisme en particulier, détermine s'il est valide ou non. Il s'agira alors de déterminer la validité de tous les syllogismes possibles, sous deux types d'hypothèses sur les éléments composant les syllogismes. La notion de syllogisme et le vocabulaire afférent sont supposés connus, mais certaines notions et notations directement utiles pour le projet sont rappelées.

Notions et notations : rappel. Un syllogisme est la donnée de trois propositions. Les deux premières sont appelées *prémisses* (n°1 et n°2) et la troisième la *conclusion* (C). Une proposition est de la forme $s \rightarrow p$, où et s et p sont appelés *termes*, appelés respectivement *sujet* et *prédicat*. La conclusion est notée S → P. La prémisse n°1 est composée de P et d'un terme M, dit *moyen*. Elle est de la forme P → M ou M → P. La prémisse n°2 est composée de S et du terme M. Elle est de la forme S → M ou M → S. Les quatre formes de syllogismes, dites *figures*, sont donc :

Figure 1		
M	→	P
S	→	M
S	→	P

Figure 2		
P	→	M
S	→	M
S	→	P

Figure 3		
M	→	P
M	→	S
S	→	P

Figure 4		
P	→	M
M	→	S
S	→	P

Chaque proposition a une *quantité* : *universelle* ou *particulière*, et une *qualité* : *affirmative* ou *négative*. Il est donc vrai ou faux que la quantité d'une proposition est universelle et que sa qualité est affirmative. Comme un syllogisme a 3 propositions, il faut 3 × 2 = 6 variables booléennes pour coder leurs qualités et quantités. Dans les prémisses, à la figure 1, S et P demeurent respectivement sujet et prédicat. Dans les prémisses de la figure 2, P devient sujet. Dans celles de la figure 3, S devient prédicat. Enfin, dans celles de la figure 4, P devient sujet et S devient prédicat. Il faut donc une variable booléenne pour coder la fonction de S dans sa proposition, et une autre pour coder la nature de P dans sa proposition. On caractérise donc un syllogisme de façon complète par 8 variables booléennes (tableau 1).

Variable	**Vraie quand…**
U_1	la 1re prémisse est universelle
U_2	la 2e prémisse est universelle
U_c	la conclusion est universelle
A_1	la 1re prémisse est affirmative
A_2	la 2e prémisse est affirmative
A_c	la conclusion est affirmative
S	S est sujet dans sa prémisse
P	P est prédicat dans sa prémisse

1. Variables d'un syllogisme

Proposition	*U* = vrai	*U* = faux
A = vrai	A	I
A = faux	E	O

2. Types des propositions

Figure	*S* = vrai	S = faux
P = vrai	1	3
P = faux	2	4

3. Type des figures

Il existe donc 2^8 = 256 types de syllogismes. Chacun est défini par les valeurs « vrai » ou « faux » que prennent les 8 variables qui le caractérisent. Pour une proposition donnée par ses variables U et A, le tableau 2 donne le type de proposition avec les notations usuelles pour les syllogismes. Pour un syllogisme donné par ses variables S et P, le tableau 3 donne la figure correspondante.

> **Exemple.** Soit le syllogisme suivant, repris comme exemple dans la suite du texte :
> *Tous les chats sont gris – Il existe un animal qui n'est pas gris – Il existe un animal qui n'est pas un chat*
>
> Dans la conclusion, le sujet S est animal et le prédicat P est chat. La première prémisse est universelle et affirmative, donc U_1 = vrai et A_1 = vrai. La seconde prémisse est particulière et négative, donc U_2 = faux et A_2 = faux. La conclusion est particulière et négative, donc U_c = faux et A_c = faux. Le sujet de la conclusion (animal) est sujet dans sa prémisse, donc S = vrai. Le prédicat de la conclusion est sujet dans sa prémisse, donc P = faux. Le syllogisme proposé est donc représenté par l'octuplet de variables booléennes $Z = (U_1, U_2, U_c, A_1, A_2, A_c, S, P)$ =

(vrai, faux, faux, vrai, faux, faux, vrai, faux). D'après le tableau 3, il correspond à la figure 2. À ce stade, l'on constate seulement que les trois propositions forment un syllogisme, mais l'on ne sait pas s'il est valide.

Comme une proposition, un terme a une quantité. S'il est sujet de la proposition, sa quantité est celle de sa proposition. Un sujet est donc universel quand sa proposition l'est (et particulier quand sa proposition l'est). Si un terme est prédicat de sa proposition, sa quantité est universelle quand sa proposition est négative (et particulière quand elle est affirmative).

Pour trouver les syllogismes valides parmi tous les syllogismes possibles, une méthode consiste à ne retenir que ceux qui vérifient toutes les règles suivantes, dont certaines portent sur les quantités et d'autres sur les qualités. La démonstration de la validité de ces règles n'entre pas dans le cadre du projet.

Règles sur les quantités

Règle du moyen terme. R_{mt} : la quantité de M doit être universelle dans l'une des prémisses au moins.
Règle du latius hos. R_{lh} : la quantité d'un terme de la conclusion ne peut être universelle que si elle l'est dans la prémisse contenant ce terme.

Ces règles expriment, indirectement pour R_{mt} et directement pour R_{lh}, que les éléments de la conclusion ne peuvent être plus forts que ceux des prémisses, au sens où une proposition universelle est plus forte qu'une proposition particulière et une proposition affirmative est plus forte qu'une proposition négative.

Exemple, suite.

Règle R_{mt}. Dans la figure 2, M (gris) est prédicat. Comme la proposition n°2 qui le contient est négative, sa quantité est universelle. La règle est donc vérifiée.

Règle R_{lh}. La quantité de S (animal) est particulière, parce que la quantité de la conclusion l'est. La quantité de P (chat) est universelle, parce que la conclusion est négative. P (chat) est le sujet de la première prémisse. Sa quantité est donc celle de la première prémisse, c'est-à-dire universelle aussi. La règle est donc vérifiée, puisqu'il ne figure pas dans la conclusion de terme de quantité universelle qui serait de quantité particulière dans son prédicat.

Règles sur les qualités

R_{nn} : deux prémisses négatives ne donnent pas de conclusion.
R_n : si une prémisse est négative, la conclusion est négative.
R_{aa} : deux prémisses affirmatives donnent une conclusion affirmative.
R_{pp} : deux prémisses particulières ne donnent pas de conclusion.
R_p : si une prémisse est particulière la conclusion est particulière.

Il est à noter que ces règles sont partiellement redondantes, puisqu'un syllogisme peut être écarté par plusieurs d'entre elles.

Exemple, fin.
R_{nn}. La première prémisse est affirmative donc R_{nn} est vérifiée.
R_n. La seconde prémisse est négative et la conclusion l'est aussi, donc est R_{nn} est vérifiée.
R_{aa}. Le syllogisme n'a pas deux prémisses affirmatives, donc R_{aa} est vérifiée.
R_{pp}. Le syllogisme n'a qu'une prémisse particulière (la seconde) donc R_{pp} est vérifiée.
R_p. La seconde prémisse est particulière, comme la conclusion, donc R_p est vérifiée.

Toutes les règles sont vérifiées pour le syllogisme proposé : il est donc valide.

Questions.

On note Z un syllogisme décrit par un octuplet de variables booléennes $Z = (U_1, U_2, U_c, A_1, A_2, A_c, S, P)$.

1. Écrire les fonctions booléennes :

- *rmt*(Z) : vraie si et seulement si Z vérifie la règle R_{mt}.
- *rlh*(Z) : vraie si et seulement si Z vérifie la règle R_{lh}.
- *rnn*(Z) : vraie si et seulement si Z vérifie la règle R_{nn}.
- *rn*(Z) : vraie si et seulement si Z vérifie la règle R_n.
- *raa*(Z) : vraie si et seulement si Z vérifie la règle R_{aa}.
- *rpp*(Z) : vraie si et seulement si Z vérifie la règle R_{pp}.
- *rp*(Z) : vraie si et seulement si Z vérifie la règle R_p.

2. Écrire une fonction booléenne *valide* :

- *valide*(Z) : vraie si et seulement si les fonctions de la question 1 sont toutes vraies pour Z.

3. Avec un tableur, écrire les 256 lignes et 8 colonnes décrivant toutes les valeurs possibles de 8 variables booléennes U_1, U_2, U_c, A_1, A_2, A_c, S et P.

4. Dans 7 colonnes additionnelles, donner aux 7 cellules de la première ligne les valeurs des fonctions booléennes de la question 1. Étendre ces valeurs aux 255 lignes suivantes.

5. Dans une colonne additionnelle, donner à la case de la première ligne la valeur de la fonction *valide*. Étendre cette valeur aux 255 lignes suivantes. Combien de syllogismes sont valides et quels sont-ils ? Décrire les syllogismes valides selon la notation classique, avec 3 lettres prises dans {A, E, I, O} et avec un numéro de figure.

Les questions précédentes fournissent tous les syllogismes valides à condition que l'on suppose non vides les ensembles représentant les trois termes. Si cette hypothèse n'est pas retenue, on peut montrer qu'il faut écarter les syllogismes construits avec deux prémisses universelles et une conclusion particulière. Pour cela on ajoute la règle suivante :

R_{uu} : deux prémisses universelles ne donnent pas de conclusion particulière.

6. Reprendre les questions 1 à 5 en y ajoutant la règle R_{uu}. Combien de syllogismes restent valides et quels sont-ils ?

La question 5 a conduit à identifier 24 syllogismes valides. Or les syllogismes classiquement énumérés sont au nombre de 19. Comment obtenir ces 19 syllogismes ? À partir des 19 syllogismes classiques, on en obtient 5 de plus en considérant chaque syllogisme à conclusion universelle, et en substituant à cette conclusion une conclusion particulière de même qualité. Par exemple, la figure 1 comporte classiquement 4 syllogismes. Deux d'entre eux sont à conclusion universelle. On construit donc 2 syllogismes supplémentaires en remplaçant ces deux conclusions universelles par 2 conclusions particulières. On a donc au total pour la figure 1 : 2 syllogismes à conclusion universelle, 2 syllogismes à conclusion particulière dérivés des 2 premiers, et 2 autres syllogismes à conclusion particulière.

7. Reprendre les questions 1 à 5 en y ajoutant une règle pour obtenir les 19 syllogismes classiques. Indication : la règle à ajouter, étant donné un syllogisme valide à conclusion particulière parmi les syllogismes valides trouvés à la question 2, l'élimine s'il existe un syllogisme valide de même figure, de même type de prémisses, et de conclusion universelle de même qualité.