Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Μάθημα: Αριθμητική Ανάλυση

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ: 01/06/2024

Επέκταση της μεθόδου Newton για την επίλυση εξισώσεων μιας μεταβλητής

Υπάρχουν αρκετές τεχνικές εύρεσης ριζών πέρα από αυτές που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα στο μάθημα. Μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποιες από αυτές τις μεθόδους χρησιμοποιώντας την σειρά Taylor όπως περιγράφεται παρακάτω.

Κοντά στο x_0 η συνάρτηση $f(x)$ προσεγγίζεται από τη σειρά Taylor:

$$f(x) \approx y = f(x_0) + \sum_{n=1}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

όπου N είναι θετικός ακέραιος. Σε έναν αλγόριθμο αναζήτησης ρίζας θέτουμε το y ίσο με μηδέν για να βρούμε τη ρίζα της προσεγγιστικής συνάρτησης. Η ρίζα αυτής της συνάρτησης θα πρέπει να είναι κοντά στην πραγματική ρίζα που αναζητούμε. Επομένως, έχουμε την παρακάτω εξίσωση :

$$0 = f(x_0) + \sum_{n=1}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ως προς x. Για παράδειγμα, για $N = 1$ θα πρέπει να επιλυθεί η $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ως προς x. Κάνοντας αυτό, έχουμε ότι $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, που είναι ο τύπος που αντιστοιχεί στη μέθοδο Newton.

Για $N = 2$, θα πρέπει να επιλυθεί ως προς x η παρακάτω εξίσωση:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

.

(α) Να λύσετε ως προς x την παραπάνω εξίσωση (περίπτωση που $N = 2$). Στη συνέχεια να γράψετε κώδικα που να υλοποιεί αυτή τη μέθοδο αναζήτησης ρίζας.

(β) Να δείξετε ότι ο κώδικάς σας από το (α) πράγματι λειτουργεί επιλύοντας παραδείγματα προβλημάτων επίλυσης εξισώσεων για τα οποία γνωρίζετε την ακριβή λύση.

(γ) Να δημιουργήσετε ένα διάγραμμα λογαριθμικής κλίμακας (log-log) με τη λογαριθμική τιμή του απόλυτου σφάλματος στον άξονα y και τη λογαριθμική τιμή των επαναλήψεων στον άξονα x για διάφορα παραδείγματα προβλημάτων επίλυσης εξισώσεων.

(δ) Ποια είναι τα θετικά και ποια τα αρνητικά της "νέας" αυτής μεθόδου;

Ελένη και Πάρης

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο χαρακτήρες, η Ελένη και ο Πάρης, των οποίων το συναίσθημα ποσοτικοποιείται σε μια κλίμακα από -5 έως 5 ως εξής:

- -5: Μίσος
- -2,5: Αποστροφή
- 0: Αδιαφορία
- 2,5: Συμπάθεια
- 5: Απέραντη Αγάπη

Οι χαρακτήρες αυτοί ταλαιπωρούνται λόγω της έλλειψης αμοιβαιότητας των συναισθημάτων τους. Συγκεκριμένα, οι χαρακτηρες αυτοί κάνουν τις παρακάτω σκέψεις:

- Πάρης: Τα συναισθήματά μου για την Ελένη μειώνονται ανάλογα με την αγάπη της για εμένα.
- Ελένη: Η αγάπη μου για τον Πάρη αυξάνεται ανάλογα με την αγάπη του για εμένα.
- Οι συναισθηματικές μεταβολές οδηγούν την Ελένη σε αϋπνίες, οι οποίες μετριάζουν τα συναισθήματά της.

Μαθηματικά τα παραπάνω εκφράζονται από το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay \\ \frac{dy}{dt} = \beta x - \gamma y^2 \end{cases}$$

όπου η $x(t)$ εκφράζει το συναίσθημα του Πάρη για την Ελένη και η $y(t)$ εκφράζει το συναίσθημα της Ελένης για τον Πάρη την χρονική στιγμή t.

(α) Να γράψετε κώδικα που θα επιλύει το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες: $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, και τιμές παραμέτρων: $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 0{,}8$ και $\gamma = 0{,}1$, για $t \in [0, 60]$, κάνοντας χρήση της κλάσσικής μεθόδου Runge-Kutta. Ποια είναι η μοίρα της σχέσης αυτού του ζευγαριού υπό αυτές τις παραδοχές;

(β) Να γράψετε κώδικα που θα προσεγγίζει την παράμετρο γ ώστε η Ελένη να έχει αίσθημα αδιαφορίας την χρονική στιγμή $t = 30$. Υποθέστε και σε αυτό το ερώτημα ότι: $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 0{,}8$, $x(0) = 2$, και $y(0) = 0$.

Παραδοτέο στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο elearning (Εργασία 2024): Αρχείο .ipynb που θα περιέχει τον κώδικα και τις απαντήσεις στα ανωτέρω ερωτήματα. Εναλλακτικά, μπορείτε να παραδώσετε ένα αρχείο με τον κώδικά σας και ένα αρχείο σε μορφή pdf με τις απαντήσεις σας.