

Х.-П. Бройер, Ф. Петруччионе

ТЕОРИЯ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Перевод с английского
С. А. Нуянзин, Я. А. Герасименко

Под научной редакцией и с дополнением
д. ф.-м. н. Ю. И. Богданова



Москва ♦ Ижевск

2010

УДК 531:530.145

ББК 22.314

Б882

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 08-02-07063.

Бройер Х.-П., Петруччионе Ф.

Теория открытых квантовых систем / Пер. с англ. под ред. Ю. И. Богданова. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. — 824 с.

В книге излагаются основные физические концепции и математические методы, используемые для исследования динамики открытых квантовых систем. Стремясь сделать книгу «самодостаточной», авторы начинают изложение с обзора классической теории вероятности и введения в основы квантовой механики, где особое внимание уделяют ее статистической интерпретации. Разрабатываются основы теории матриц плотности, квантовых марковских процессов и динамических полугрупп. Во многих примерах используются основные уравнения из квантовой оптики и теории квантового броуновского движения. Особое внимание уделяется теории декогерентизации, обусловленной окружающей средой, ее роли в динамическом описании процесса измерений, а также экспериментальным наблюдениям декогерентизации состояний, аналогичных состояниям кота Шредингера.

Книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей физики и прикладной математики, а также для исследователей, проявляющих интерес к фундаментальным вопросам квантовой механики и ее приложениям.

ISBN 978-5-93972-774-7

«*The Theory of Open Quantum Systems*» was originally published in English in 2002.
This translation is published by arrangement with Oxford University Press.

Книга «Теория открытых квантовых систем» впервые вышла на английском языке в 2002 году. Перевод публикуется по соглашению с издательством Oxford University Press.

© Oxford University Press, 2002

© Перевод на русский язык:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие научного редактора перевода	11
Предисловие	14
Слова благодарности	21

ЧАСТЬ I. ВЕРОЯТНОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ 23

ГЛАВА 1. Классическая теория вероятностей и стохастические процессы	25
1.1. Вероятностное пространство	25
1.1.1. σ -алгебра событий	25
1.1.2. Вероятностные меры и аксиомы Колмогорова	26
1.1.3. Условные вероятности и независимость	27
1.2. Случайные величины	28
1.2.1. Определение случайных величин	28
1.2.2. Преобразование случайных величин	31
1.2.3. Математические ожидания и характеристическая функция	32
1.3. Стохастические процессы	35
1.3.1. Формальное определение стохастического процесса	35
1.3.2. Иерархия совместных распределений вероятностей	36
1.4. Марковские процессы	38
1.4.1. Уравнение Чепмена–Колмогорова	38
1.4.2. Дифференциальное уравнение Чепмена–Колмогорова	42
1.4.3. Детерминированные процессы и уравнение Лиувилля	45
1.4.4. Скачкообразные процессы и основное уравнение	46
1.4.5. Диффузионные процессы и уравнение Фоккера–Планка	54
1.5. Кусочно-детерминированные процессы	60
1.5.1. Основное уравнение Лиувилля	60

1.5.2. Распределение времени ожидания и выборочные траектории	61
1.5.3. Представление интегралов по траекториям для КДП	65
1.5.4. Стохастический расчет для КДП	68
1.6. Процессы Леви	76
1.6.1. Трансляционная инвариантность процессов	76
1.6.2. Формула Леви–Хинчина	78
1.6.3. Стабильные процессы Леви	83
ГЛАВА 2. Квантовая вероятность	92
2.1. Статистическая интерпретация квантовой механики	92
2.1.1. Самосопряженные операторы и спектральная теорема	93
2.1.2. Наблюдаемые и случайные величины	97
2.1.3. Чистые состояния и статистическое перемешивание .	99
2.1.4. Совместные вероятности в квантовой механике	106
2.2. Составные квантовые системы	111
2.2.1. Тензорное произведение	111
2.2.2. Разложение Шмидта и запутанность	114
2.3. Квантовые меры энтропии	116
2.3.1. Энтропия фон Неймана	117
2.3.2. Относительная энтропия	119
2.3.3. Линейная энтропия	121
2.4. Теория квантового измерения	122
2.4.1. Идеальные квантовые измерения	122
2.4.2. Операции и эффекты	125
2.4.3. Теорема представления для квантовых операций	127
2.4.4. Квантовое измерение и энтропия	132
2.4.5. Приблизительные измерения	134
2.4.6. Непрямые квантовые измерения	137
2.4.7. Квантовые неразрушающие измерения	144

ЧАСТЬ II. ТЕОРИЯ МАТРИЦ ПЛОТНОСТИ 149

ГЛАВА 3. Основные квантовые уравнения	151
3.1. Замкнутые и открытые квантовые системы	152
3.1.1. Уравнение Лиувилля–фон Неймана	152
3.1.2. Гейзенберговское представление и представление взаимодействия	154
3.1.3. Динамика открытых систем	158

3.2.	Квантовые марковские процессы	160
3.2.1.	Квантовые динамические полугруппы	161
3.2.2.	Марковское основное квантовое уравнение	163
3.2.3.	Сопряженное основное квантовое уравнение	169
3.2.4.	Временные корреляционные функции	170
3.2.5.	Необратимость и производство энтропии	173
3.3.	Микроскопический вывод	176
3.3.1.	Предел слабого взаимодействия	176
3.3.2.	Релаксация к равновесию	183
3.3.3.	Предел сингулярной связи	185
3.3.4.	Предел низкой плотности	187
3.4.	Квантовое оптическое основное уравнение	189
3.4.1.	Вещество в квантованных полях излучения	189
3.4.2.	Затухание двухуровневой системы	195
3.4.3.	Затухание в сжатом вакуумном состоянии	199
3.4.4.	Резервуары более общего вида	202
3.4.5.	Резонансная флуоресценция	204
3.4.6.	Затухающий гармонический осциллятор	212
3.5.	Неселективные непрерывные измерения	218
3.5.1.	Квантовый эффект Зенона	219
3.5.2.	Уравнение для матрицы плотности	220
3.6.	Квантовое броуновское движение	225
3.6.1.	Модель Кальдейры–Леггетта	226
3.6.2.	Высокотемпературное основное уравнение	227
3.6.3.	Точные гейзенберговские уравнения движения	237
3.6.4.	Функционал влияния	248
3.7.	Нелинейные квантовые основные уравнения	259
3.7.1.	Квантовое уравнение Больцмана	260
3.7.2.	Основные уравнения в приближении среднего поля	262
3.7.3.	Лазерные уравнения в приближении среднего поля	264
3.7.4.	Нелинейное уравнение Шредингера	269
3.7.5.	Суперлюминисценция	271
ГЛАВА 4. Декогерентизация	281
4.1.	Функция декогерентизации	282
4.2.	Точно решаемая модель	288
4.2.1.	Временная эволюция всей системы	288
4.2.2.	Разрушение когерентностей и фактор декогерентизации	291
4.2.3.	Когерентные подпространства и зависимость от размера системы	294

4.3.	Марковские механизмы декогерентизации	297
4.3.1.	Интенсивность декогерентизации	297
4.3.2.	Квантовое броуновское движение	299
4.3.3.	Внутренние степени свободы	300
4.3.4.	Рассеяние частиц	303
4.4.	Затухающий гармонический осциллятор	308
4.4.1.	Вакуумная декогерентизация	309
4.4.2.	Тепловой шум	313
4.5.	Состояния электромагнитного поля	318
4.5.1.	Атомы, взаимодействующие с полевой модой полости	319
4.5.2.	Состояния шредингеровского кота	326
4.6.	Модель Кальдейры–Леггетта	331
4.6.1.	Основная формула декогерентизации	331
4.6.2.	Омические окружения	335
4.7.	Декогерентизация и квантовое измерение	341
4.7.1.	Динамический выбор измерительного базиса	342
4.7.2.	Динамическая модель для квантового измерения	348

ЧАСТЬ III. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА 5. Вероятностные распределения в гильбертовом пространстве	357
5.1. Вектор состояний как случайная величина в гильбертовом пространстве	357
5.1.1. Новый тип квантово-механического ансамбля	358
5.1.2. Эксперимент Штерна–Герлаха	363
5.2. Плотность вероятности для функционалов в гильбертовом пространстве	367
5.2.1. Вероятностные измерения на гильбертовом пространстве	367
5.2.2. Распределения на проективном гильбертовом пространстве	371
5.2.3. Математические ожидания	374
5.3. Смешанные ансамбли	376
5.3.1. Функционалы плотности вероятности на пространстве состояний	377
5.3.2. Описание селективных квантовых измерений	379

ГЛАВА 6. Стохастическая динамика в гильбертовом пространстве	382
6.1. Динамические полугруппы и КДП в гильбертовом пространстве	383
6.1.1. Динамика редуцированной системы как КДП	383
6.1.2. Интеграл по траектории в гильбертовом пространстве	392
6.1.3. Приближение диффузии	395
6.1.4. Многовременные корреляционные функции	397
6.2. Стохастическое представление непрерывных измерений	403
6.2.1. Стохастическая временная эволюция \mathcal{E}_P -ансамблей	404
6.2.2. Поведение пропагатора на коротких временах	405
6.3. Прямое фотодетектирование	407
6.3.1. Вывод КДП	408
6.3.2. Решение в виде интеграла по траекториям	414
6.4. Гомодинное фотодетектирование	420
6.4.1. Вывод КДП для гомодинного детектирования	420
6.4.2. Стохастическое уравнение Шредингера	426
6.5. Гетеродинное фотодетектирование	427
6.5.1. Стохастическое уравнение Шредингера	428
6.5.2. Стохастические модели коллапса	432
6.6. Стохастические уравнения для матрицы плотности	435
6.7. Фотодетектирование на полевой моде	438
6.7.1. Формула фотодетектирования	438
6.7.2. Квантовое неразрушающее измерение полевой моды .	443
ГЛАВА 7. Стохастический метод моделирования	451
7.1. Численные алгоритмы моделирования КДП	452
7.1.1. Оценка математических ожиданий	452
7.1.2. Генерирование реализаций процесса	454
7.1.3. Определение времени ожидания	455
7.1.4. Выбор скачков	458
7.2. Алгоритмы для стохастических уравнений Шредингера	459
7.2.1. Основные замечания по сходимости	459
7.2.2. Схема Эйлера	462
7.2.3. Схема Хьюна	462
7.2.4. Схема Рунге–Кутта четвертого порядка	463
7.2.5. Схема второго порядка малости	464
7.3. Примеры	464
7.3.1. Затухающий гармонический осциллятор	465
7.3.2. Возбуждаемая двухуровневая система	469
7.4. Исследование численной реализации	474

7.4.1. Численная эффективность и законы масштабирования	474
7.4.2. Затухающий возбужденный осциллятор Морзе	477
ГЛАВА 8. Приложения к квантовым оптическим системам	486
8.1. Непрерывные измерения в КЭД	487
8.1.1. Конструирование микроскопического гамильтониана	487
8.1.2. Определение КЭД-операции	490
8.1.3. Стохастическая динамика мультипольного излучения	493
8.1.4. Представление для неполных измерений	496
8.2. Темные резонансные состояния	498
8.2.1. Распределение времени ожидания и захваченное состояние	498
8.2.2. Измерительные схемы и стохастическая эволюция	502
8.3. Лазерное охлаждение и процессы Леви	508
8.3.1. Динамика атомной волновой функции	510
8.3.2. Когерентная заселенность ловушек	516
8.3.3. Времена ожидания и импульсные распределения	523
8.4. Взаимодействие с сильным полем и картина Флоке	530
8.4.1. Теория Флоке	532
8.4.2. Стохастическая динамика в картине Флоке	535
8.4.3. Спектральное детектирование и описание «одетых» атомов	538

ЧАСТЬ IV. НЕМАРКОВСКИЕ КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ 545

ГЛАВА 9. Проекционные операторные методы	547
9.1. Проекционный операторный метод Накажимы–Цванцига	548
9.1.1. Проекционные операторы	548
9.1.2. Уравнение Накажимы–Цванцига	549
9.2. Техника проекционных операторов, направленная на вычет временной свертки	552
9.2.1. Локальное во времени основное квантовое уравнение	553
9.2.2. Ряд теории возмущений для УВС-генератора	554
9.2.3. Разложение по кумулянтам	559
9.2.4. Разложение по малым параметрам неоднородности	560
9.2.5. Анализ точности	564
9.3. Стохастическая интерпретация в сдвоенном гильбертовом пространстве	565

ГЛАВА 10. Немарковская динамика в физических процессах	569
10.1. Спонтанный распад двухуровневой системы	570
10.1.1. Точное основное уравнение и УВС-генератор	571
10.1.2. Модель Джейнса – Каммингса в условиях резонанса . .	576
10.1.3. Модель Джейнса – Каммингса с расстройкой	583
10.1.4. Спонтанный фотонный распад в запрещенной зоне .	586
10.2. Затухающий гармонический осциллятор	587
10.2.1. Модель и частотная перенормировка	588
10.2.2. Факторизованные начальные условия	589
10.2.3. Стационарное состояние	594
10.2.4. Нефакторизованные начальные условия	599
10.2.5. Игнорирование неоднородности	602
10.3. Спин-бозонная система	605
10.3.1. Микроскопическая модель	605
10.3.2. Релаксация начального факторизованного состояния .	606
10.3.3. Равновесные корреляционные функции	609
10.3.4. Переход от когерентного к некогерентному движению	611

ЧАСТЬ V. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

615

ГЛАВА 11. Измерения в релятивистской квантовой механике	617
11.1. Уравнение Швингера – Томонаги	618
11.1.1. Состояния как функционал пространственноподобных гиперповерхностей	619
11.1.2. Расслоения пространства-времени	623
11.2. Измерение локальных переменных	625
11.2.1. Операция для нелокального измерения	625
11.2.2. Релятивистская редукция состояния	628
11.2.3. Многозначные пространственно-временные амплитуды	632
11.2.4. Согласованная иерархия совместных вероятностей .	636
11.2.5. ЭПР-корреляции	641
11.2.6. Непрерывные измерения	643
11.3. Нелокальные измерения и причинность	647
11.3.1. Запутанные квантовые датчики	648
11.3.2. Нелокальные измерения ЭПР-датчиками	652
11.3.3. Верификация квантового состояния	658
11.3.4. Нелокальные операции и принцип причинности . .	661
11.3.5. Ограничение на измеримость операторов	669

11.3.6. КНИ верификация нелокальных состояний	676
11.3.7. Приготовление нелокальных состояний	681
11.3.8. Обменные измерения	682
11.4. Квантовая телепортация	684
11.4.1. Когерентная передача квантовых состояний	685
11.4.2. Телепортация и измерение состояний Белла	688
11.4.3. Экспериментальная реализация	691
ГЛАВА 12. Квантовая электродинамика открытых систем	698
12.1. Теория матриц плотности для КЭД	699
12.1.1. Уравнения поля и корреляционные функции	699
12.1.2. Приведенная матрица плотности	707
12.2. Функционал влияния КЭД	709
12.2.1. Исключение степеней свободы излучения	709
12.2.2. Амплитуда вакуум-вакуум	715
12.2.3. Уравнение движения второго порядка	718
12.3. Декогерентизация посредством тормозного излучения	722
12.3.1. Введение функционала декогерентизации	722
12.3.2. Физическая интерпретация	728
12.3.3. Вычисление функционала декогерентизации	731
12.3.4. Метод интегралов по траекториям	743
12.4. Декогерентизация многочастичных состояний	752
Дополнение. Квантовая теория как унифицированная информационная модель статистических явлений	758
Предметный указатель	815

Предисловие научного редактора перевода

По некоторым оценкам, примерно одна треть ВВП (валового внутреннего продукта) Соединенных Штатов непосредственно основана на достижениях квантовой механики. Это и не удивительно, если учесть, что на этой науке основана практически вся электроника, нанотехнологии, лазерные технологии, атомная промышленность, новые химические материалы и др. Вероятно, вклад квантовой механики в современную российскую экономику не так велик, но хочется надеяться, что он будет увеличиваться по мере модернизации и роста доли высоких технологий.

Развитие современной науки и основанных на ее достижениях технологий происходит настолько быстро, что ориентироваться в огромном потоке информации трудно не только начинающему, но и опытному специалисту. К тому же усвоение современной научной информации оказывается очень трудной задачей, требующей от исследователя фундаментальной теоретической подготовки и большого упорства. Чтение современной научной литературы требует зачастую знаний, далеко выходящих за пределы традиционных университетских курсов. В этой связи трудно переоценить роль изданий, которые излагали бы систематически и детально современные достижения на высоком научном уровне. К числу таких руководств, несомненно, принадлежит книга Х.-П. Брайера и Ф. Петруччионе «Теория открытых квантовых систем». Англоязычное издание этой монографии пользуется заслуженной популярностью. Книга может рассматриваться как ясно написанное и самодостаточное руководство, способное быть не только очень хорошим учебником для студентов и аспирантов, но и незаменимым справочником для опытных исследователей. Таким образом, выход в свет книги на русском языке, осуществленный благодаря издательству «Регулярная и хаотическая динамика» и поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, представляется очень полезным и нужным для российского читателя.

Физика открытых квантовых систем играет важную роль в современных экспериментальных и теоретических исследованиях квантовых явлений. Немаловажно и то, что исследования открытых систем способствуют развитию более современной формулировки квантовой механики. Благодаря исключительно важной роли, которую играют измерения в описании

квантовых явлений квантовые системы являются открытыми по самой своей природе. Излишне также напоминать, что представление о замкнутых изолированных системах есть не более, чем идеализация, которая с необходимостью должна быть дополнена реалистическими представлениями о взаимодействии изучаемой системы с окружающим миром.

Анализ квантовой системы сводится к рассмотрению ее квантового состояния. Для изучения квантовой системы необходимо располагать квантовым статистическим ансамблем, все представители которого подготовлены в одном и том же квантовом состоянии. Таким образом, квантовые явления имеют ярко выраженную статистическую природу. Согласно принципу дополнительности Нильса Бора, чтобы экспериментальный анализ был полным, необходимо осуществлять различные взаимно-дополнительные измерения, отвечающие несовместным наблюдаемым (таким как координата и импульс, различные проекции спина и т. п.). При этом оказывается, что понятие замкнутости или открытости физической системы в квантовой теории принципиально отличается от аналогичного понятия в классической физике. Благодаря специальному квантовому явлению запутанности замкнутая квантовая система может быть образована различными пространственно удаленными друг от друга подсистемами. Хорошо известный пример такого рода дают состояния Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР). Частицы, входящие в ЭПР-пару, продолжают демонстрировать жесткие статистические корреляции, как бы далеко они не находились друг от друга. Таким образом, пространственная изолированность больше не может служить признаком замкнутости. Вместо этого в квантовой теории существует внутренний статистический критерий: квантовые системы, находящиеся в так называемом чистом состоянии оказываются статистически независимыми от окружения, в то время как так называемые смешанные состояния неизбежно имеют внешние связи. Такого рода статистические связи имеют информационную природу и описываются количественно такими характеристиками, как энтропия фон Неймана. Следовательно, квантовая теория должна рассматриваться как современная унифицированная информационная модель статистических явлений в природе. Такую точку зрения мы постарались развить в специально написанном для данной книги дополнении.

Следует особо подчеркнуть тесную связь, которая существует между физикой открытых систем и новейшими квантовыми информационными технологиями. Ключевая идея последних заключается в использовании квантовых систем для реализации принципиально новых методов передачи сообщений и вычислений (квантовые каналы связи, квантовая криптография, квантовый компьютер). Например, регистр из квантовых битов (кубитов) может рассматриваться как открытая квантовая система, находящая-

ся под действием внешнего управления, которое обеспечивает инициализацию заданного квантового состояния, его преобразование в процессе квантовых вычислений, а также считывание результата вычислений. В то же время несанкционированное, но практически неизбежное взаимодействие контролируемой квантовой системы с окружением, ведет к постепенной потере когерентности квантового состояния, т. е. к декогерентизации, которая является основным препятствием на пути создания полномасштабных квантовых компьютеров. Среди книг по физике квантовой информации у российского читателя заслуженной популярностью пользуется монография К. А. Валиева и А. А. Кокина «Квантовые компьютеры: надежды и реальность» (издательство «РХД», 2001), являющаяся первым отечественным руководством в этой области, а также перевод известной монографии М. Нильсена и И. Чанга «Квантовые вычисления и квантовая информация» (издательство «Мир», 2006). Книга Х.-П. Бройера и Ф. Петруччионе является очень полезным и ценным дополнительным руководством для исследователей, занимающихся разработкой принципов квантовых информационных технологий. В настоящей книге заинтересованный читатель найдет систематическое описание различных реалистичных моделей взаимодействия квантовых систем с окружением. Благодаря подробному изложению читатель сможет проследить за всеми основными этапами математических расчетов. Более глубокому усвоению материала способствуют многочисленные, детально разобранные, примеры. Важную и интересную часть изложения составляют подробно описанные методы и алгоритмы численного моделирования, иллюстрируемые значительным графическим материалом. Ориентироваться в большом объеме изложенного материала читателю поможет детальное и логически структурированное оглавление.

Перевод книги выполнили аспиранты Московского института электронной техники (технического университета) С. А. Нуянзин и Я. А. Герасименко. Главы 2 и 3 переведены Я. А. Герасименко, глава 12 переведена совместно Я. А. Герасименко и С. А. Нуянзином, остальные главы переведены С. А. Нуянзином.

Научный редактор и переводчики выражают особую благодарность студентам Московского физико-технического института (технического университета) Е. Д. Жебрак и И. Д. Букееву, а также сотруднику Физико-технологического института РАН А. К. Гавриченко за неоцененную помощь в чтении корректуры перевода и существенные замечания, которые способствовали улучшению текста книги.

Москва, Физико-технологический институт РАН,
Декабрь 2009

Ю. И. Богданов

Предисловие

Квантовая механика находится в центре нашего современного понимания законов физики. Это наиболее фундаментальная физическая теория. По своей сути квантовая механика является вероятностной теорией. Все предсказания, полученные из квантовой механики, носят вероятностный характер. Насколько нам известно, детерминированной теории, из которой могли бы быть выведены квантовые вероятности, не существует. Статистическая интерпретация квантовой механики предполагает, что предсказания делаются относительно поведения ансамблей, то есть большого количества независимых индивидуальных систем. Утверждения квантовой теории проверяются проведением измерений на больших выборках из таких систем.

Квантово-механические системы должны рассматриваться как открытые системы. Как и в классической физике, любая реальная система подвержена взаимодействию с неконтролируемым окружением, оказывающим на нее влияние, которым нельзя пренебречь. Таким образом, теория открытых квантовых систем играет ведущую роль во многих приложениях квантовой физики в силу того, что абсолютная изоляция квантовых систем невозможна, полное микроскопическое описание или контроль степеней свободы окружения также не реальны или возможны только частично. Наиболее интересные системы слишком сложны для описания на практике, если основываться на микроскопических законах физики. Можно сказать даже больше. Такое микроскопическое приближение не только невозможно на практике, но и не отражает того, что в действительности хотелось бы знать исследователю относительно изучаемой проблемы. Даже если решение микроскопических уравнений эволюции было бы возможно, оно бы давало труднообрабатываемое количество информации, подавляющая часть которой бесполезна для рационального описания.

Практические соображения требуют поиска несложного, эффективного вероятностного описания на языке динамики открытых систем. Использование теории вероятностей позволяет осуществлять рассмотрение сложных систем с включением громадного или даже бесконечного количества степеней свободы. Это достигается посредством ограничения математической формулировки, которая сводится к соответствующему набору небольшого числа характерных переменных. Опыт показывает, что при достаточно

общих условиях, эволюция таких переменных управляема простыми динамическими законами. Эти законы могут быть сформулированы на языке совокупности уравнений движения. Учет оставшихся микроскопических степеней свободы осуществляется приближенно через включение диссипативных и стохастических членов.

Существует и другая, более фундаментальная, причина для введения понятия открытой системы в квантовой теории. Уравнение Шредингера представляет собой детерминистический закон, который управляет динамикой распределений вероятности. Это уравнение описывает динамику случайных величин, относящихся к ансамблям изолированных систем, однако в качестве вероятностной теории квантовая механика должна также охватывать и случайное появление определенных событий, являющихся реализациями основополагающих распределений вероятности. Для оценки вероятности случайных событий квантовая система должна провзаимодействовать со своим окружением. Любая эмпирическая проверка статистических предсказаний в квантовой системе требует связи с измерительной аппаратурой. Такая связь, вообще говоря, приводит к влиянию измерения на квантовый объект, которым нельзя пренебречь. Таким образом, посредством измерительного процесса квантовая механика оказывается близко связана с понятием открытых квантовых систем.

Это издание рассматривает основные физические концепции и математические методы, используемые для изучения динамики открытых квантовых систем. Общий подход, которому мы следуем в этой книге, состоит в использовании двух различных методов вывода динамики открытых систем. Такая динамика следует либо из основополагающей микроскопической теории посредством исключения степеней свободы, относящихся к окружению, либо посредством формулировки специфических измерительных схем на языке квантовых операций. Существует тесная физическая и математическая связь между эволюцией открытой системы, изменение состояния которой вызвано квантовыми измерениями, и классическим понятием стохастического процесса. Читатель найдет детальное описание этих взаимоотношений, а также ряд физических примеров для иллюстрации математической структуры теории.

Для обеспечения самодостаточности изложения в начале книги (часть I) дается обзор классической теории вероятности и стохастических процессов (глава 1), а также введение в основы квантовой механики (глава 2). Кроме стандартных понятий, таких как вероятностное пространство, случайные величины и стохастические процессы, в главе 1 рассматриваются еще два вопроса, которые важны для дальнейшего развития теории. Это кусочно-детерминированные процессы и процессы Леви. В главе 2 акцент сделан на

статистической интерпретации квантовой механики и ее связи с классической теорией вероятности. В качестве подготовки для последующих глав мы также рассматриваем составные квантовые системы, понятие запутанных состояний, а также квантовую энтропию. Кроме того, дается детальное описание квантовой теории измерений в рамках формализма квантовых операций и эффектов.

В части II на языке основных квантовых уравнений представлены основы описания квантовой динамики открытых систем (наряду с наиболее важными приложениями). В главе 3 основное внимание уделяется теории квантовых динамических полугрупп, которые приводят к концепции квантовых процессов Маркова. Обсуждается релаксация к равновесию и мгновременная структура квантовых марковских процессов, а также их необратимая природа, которая характеризуется с помощью соответствующего функционала энтропии. Представлены детальные выводы для основных квантовых уравнений, таких как основное оптическое квантовое уравнение и основное уравнение броуновского движения. В контексте модели Кальдейры–Леггетта рассматривается метод функционала влияния. В качестве приложения, мы выводим основное уравнение, которое описывает непрерывный мониторинг квантового объекта, и изучаем его связь с квантовым эффектом Зенона. В главе 3 также представлены нелинейные основные квантовые уравнения среднего поля вместе с некоторыми приложениями к теории лазеров и суперлюминисценции.

В главе 4 мы изучаем важное явление декогерентизации, вызываемое влиянием окружения и приводящее к переходу к классическому описанию открытых квантовых систем. Разрабатывается набор методов для определения времен декогерентизации. В качестве конкретных примеров мы рассматриваем эксперименты по декогерентизации состояний электромагнитного поля типа шредингеровского кота, разрушение когерентности в модели Кальдейры–Леггетта и обусловленный окружением выбор измерительного базиса в квантовой теории измерений.

В то время как части I и II главным образом касаются стандартных аспектов теории, части III–V представляют собой обзор более современных методов и новейших разработок в области открытых квантовых систем. В части III вводится специфическое понятие «ансамбль ансамблей» и концепция стохастических волновых функций, а также стохастических матриц плотности. В главе 5 приводится основополагающая для случайных векторов состояний математическая структура вероятностных распределений в пространствах Гильберта и Лиувилля. В главе 6 эти концепции используются для описания динамики непрерывных измерений, выполняемых над открытыми системами. Показано, что эволюция вектора состояния, обу-

словленная регистрацией результатов измерений, задается кусочно-детерминированным процессом, включающим непрерывные эволюционные периоды времени, прерываемые внезапным появлением квантовых скачков. Общая теория иллюстрируется набором примеров, таких как прямое, гомодинное и гетеродинное фотодетектирование.

Общий формализм квантовых измерений в терминах квантовых операций дается в главе 8. Там же рассматриваются примеры из атомной физики и квантовой оптики, например резонансы «темных» состояний (dark state resonances) и лазерное охлаждение атомов. В частности, пример суботдачи в динамике охлаждения атомов хорошо иллюстрирует взаимодействие между некогерентными процессами и квантово-интерференционными эффектами, которые приводят к появлению распределений Леви с длинными хвостами для атомного времени ожидания.

Численное моделирование стохастических процессов на высокопроизводительных компьютерах обеспечивает эффективный инструмент для предсказаний динамических характеристик физических процессов. Формулировка динамики открытой системы в терминах кусочно-детерминированных процессов или стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве приводит к эффективным численным методам моделирования, которые введены и детально изучены в главе 7.

Часть IV посвящена основным свойствам более сложного немарковского описания открытых систем. В главе 9 дается общий обзор операторных методов Накажимы–Цванцига, с помощью которых могут быть получены так называемые обобщенные основные уравнения для динамики редуцированной системы. В немарковском режиме эти уравнения включают ядро, учитывающее память, так что интеграл временной свертки вычисляется с учетом истории редуцированной системы. В общем случае мы сталкиваемся со сложной задачей рассмотрения интегро-дифференциального уравнения для матрицы плотности открытой квантовой системы. Поэтому в главе 9 мы развиваем приближенный метод, основанный на уравнении движения, которое локально во времени и которое известно как операторный метод проектирования с целью вычета временной свертки. Этот метод служит в качестве отправной точки для систематической теории возмущений в марковском пределе, а также для численного рассмотрения. В главе 10 исследуется набор приложений немарковской динамики в физических системах, таких как модель Джейнса–Каммингса, квантовое броуновское движение и спин-бозонная модель.

Заключительная часть V касается релятивистской формулировки динамики открытых квантовых систем и квантовой теории измерения. Глава 11 рассматривает релятивистскую формулировку для постулата редукции со-

		Теория матрицы плотности	Квантовые измерения	Квантовые марковские процессы	Декогерентизация	Стохастические процессы в гильбертовом пространстве	Немарковские процессы
Часть I	Глава 1					●	
	Глава 2	●	●			●	
Часть II	Глава 3	●	●	●	●		●
	Глава 4		●	●	●		●
Часть III	Глава 5		●			●	
	Глава 6		●	●		●	
Часть IV	Глава 7					●	
	Глава 8		●	●		●	
Часть V	Глава 9	●				●	●
	Глава 10	●					●
Часть V	Глава 11		●			●	●
	Глава 12	●			●		●

Рис. 0.1. Возможные пути изучения книги при первом прочтении. Закрашенные точки показывают главы, в которых может быть найдена информация об основных идеях книги.

стояния в квантовой теории измерений. Этот постулат используется при изучении приложений к локальным и нелокальным измерениям, а также к формулировке ограничений на измеримость нелокальных величин, вы-

текущих из принципа причинности. Релятивистская формулировка позволяет нам рассмотреть с одного ракурса несколько важных экспериментов, таких как запутанности ЭПР-типа, измерение операторов состояния Белла, обменные измерения и квантовая телепортация. Релятивистская теория матрицы плотности в квантовой электродинамике, развитая в главе 12, использует функциональные методы из теории поля, методы интегралов по траекториям, формулировку функционала влияния. В качестве важного примера детально представлена теория декогерентизации в квантовой электродинамике.

Междисциплинарная, по своей природе, область открытых квантовых систем требует рассмотрения различных аспектов квантовой теории и приложений во многих областях физики. На рис. 0.1 мы сделали набросок возможных маршрутов по книге, которым можно следовать при первом прочтении.

Книга адресована студентам и выпускникам университетов, специализирующихся в физике, теоретической физике и прикладной математике. Предполагается знание лишь основ квантовой механики, математики и теории вероятностей. Главы написаны весьма независимо и могут быть использованы как материал для лекций и специальных курсов. Каждая глава заканчивается библиографией. Так как большинство глав рассматривают быстро развивающиеся области, то не всегда возможно дать полный список литературы. Вместо этого мы попытались дать ссылки на некоторые важные примеры оригинальных работ и вводных обзорных статей, которые описывают рассматриваемую тематику. На список ссылок сильно повлияло личное предпочтение, и мы извиняемся перед теми авторами, которых мы не процитировали. Существует огромное количество отличных книг и монографий общего характера, из которых мы узнали много ценного. Часть из них приведена ниже.

Библиография

Alicki, R. and Lendi, K. (1987). *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Volume 286 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin.

Braginsky, V. B. and Khalili, F. Ya. (1992). *Quantum Measurement*. Cambridge University Press, Cambridge.

Carmichael, H. (1993). *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Volume m18 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin.

Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J. and Grynberg, G. (1998). *Atom-Photon Interactions*. John Wiley, New York.

Davies, E. B. (1976). *Quantum Theory of Open Systems*. Academic Press, London.

Gardiner, C. W. and Zoller, P. (2000). *Quantum Noise* (second edition). Springer-Verlag, Berlin.

Giulini, D., Joos, E., Kiefer, C., Kupsch, J., Stamatescu, I.-O. and Zeh, H. D. (1996). *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer-Verlag, Berlin.

Louisell, W. (1990). *Quantum Statistical Properties of Radiation*. John Wiley, New York.

Mandel, L. and Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge. Имеется перевод: Мандель Л., Вольф Э. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* / Пер. с англ. (под ред. В. В. Самарцева). — М.: Наука, Физматлит, 2000. — 896 с.

Слова благодарности

С удовольствием благодарим Istituto Italiano per gli Studi Filosofici за содействие в исследовательской программе, которая и привела к созданию книги. Институт оказал помошь в проведении ряда плодотворных конференций по теории открытых квантовых систем. В частности, мы благодарим его президента, А. Жерардо Маротта, за постоянную помощь и поддержку в ходе исследований и подготовки рукописи.

Мы получили огромную поддержку со стороны друзей и коллег. Благодарим Роберта Алики, Франсуа Барду, Томаса Филка, Доменико Джулини, Жерара Милберна и Людгера Рюшендорфа за критичное прочтение отдельных частей рукописи и за предложения по ее совершенствованию. Наши беседы с ними оказались очень полезными.

Мы также в долгу перед нашими студентами, среди которых Петер Бичели, Ким Бострем, Уве Дорнер, Йенс Айзерт, Даниэль Фоллер, Вольфганг Хьюбер, Бернд Капплер, Андреа Ма, Вольфганг Ферсих и Фритьоф Вебер. Они вместе с нами разрабатывали отдельные части материала книги и внесли несколько свежих идей.

Особых слов благодарности заслуживает персонал Оксфордского университетского издательства за их исключительное сотрудничество. В частности, мы выражаем признательность Сёнке Эдлангу за профессиональные инструкции на всех этапах подготовки работы.

Часть I

Вероятность в классической и квантовой физике

ГЛАВА 1

Классическая теория вероятностей и стохастические процессы

Эта глава представляет собой небольшой обзор классической теории вероятностей и стохастических процессов. Наша цель — предоставить «самодостаточное» краткое изложение теории. Основное внимание мы уделяем тем объектам, которые будут важны для освоения следующих глав. Более детальное изложение со множеством интересных примеров и приложений классической теории вероятностей можно найти в учебниках. Для читателей с математическим складом ума мы рекомендуем учебники Феллера (Feller, 1968, 1971) и Дуба (Doob, 1953). Для тех, чьи основные интересы лежат в области физических приложений, — книги Гардинера (Gardiner, 1985), ван Кампена (van Kampen, 1992) и Рейчела (Reichl, 1998).

1.1. Вероятностное пространство

Фундаментальным понятием теории вероятностей является вероятностное пространство. Оно состоит из трех основных объектов: выборочное пространство элементарных событий, σ -алгебра событий и вероятностная мера на σ -алгебре. Эти понятия вводятся и объясняются ниже. Мы будем следовать аксиоматическому подходу к вероятности, принадлежащему Колмогорову (Kolmogorov, 1956).

1.1.1. σ -алгебра событий

Формальные объекты, которые мы хотим охарактеризовать вероятностью, называются событиями. Математически эти события являются подмножествами некоторого основного множества Ω , называемого *выборочным пространством* или пространством событий. Подмножества Ω , содержащие только один элемент $\omega \in \Omega$, относят к *элементарным событиям*.

Заданное выборочное пространство Ω обычно не интересно во всех возможных подмножествах Ω (Ω может быть, к примеру, бесконечным

и несчетным), так что мы должны указать, какие подмножества $A \subset \Omega$ мы хотели бы включить в нашу теорию. Существенное требование заключается в том, что события должны образовывать так называемую σ -алгебру, являющуюся системой \mathcal{A} подмножеств Ω со следующими условиями:

1. И само выборочное пространство, и пустое множество принадлежат системе событий, то есть $\Omega \in \mathcal{A}$ и $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Если $A_1 \in \mathcal{A}$ и $A_2 \in \mathcal{A}$, то также объединение $A_1 \cup A_2$, пересечение $A_1 \cap A_2$ и разность $A_1 \setminus A_2$ принадлежат системе \mathcal{A} .
3. Если совокупность событий $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ счетна, то объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ этих событий также принадлежит системе \mathcal{A} .

Мы всегда будем писать $A \in \mathcal{A}$, подчеркивая, что подмножество $A \subset \Omega$ есть событие нашей теории. Вышеприведенные требования гарантируют, что все выборочное пространство Ω и пустое множество \emptyset будут событиями, а также что над всеми событиями \mathcal{A} могут осуществляться логические операции «AND», «OR», «NOT», не приводящие к выходу за пределы системы событий. Вот почему \mathcal{A} называется алгеброй. Третье условие делает \mathcal{A} σ -алгеброй. Оно говорит о том, что любое счетное объединение событий само является событием.

1.1.2. Вероятностные меры и аксиомы Колмогорова

Построение вероятностного пространства завершается введением вероятностной меры на σ -алгебре. Вероятностная мера — это простое отображение: $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, которое связывает каждое событие A σ -алгебры с действительным числом $\mu(A)$,

$$A \mapsto \mu(A) \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Число $\mu(A)$ трактуется как вероятность события A . Таким образом, для выполнения аксиом Колмогорова требуется вероятностная мера μ :

1. Для всех событий $A \in \mathcal{A}$:

$$0 \leq \mu(A) \leq 1. \quad (1.2)$$

2. Нормировка вероятности:

$$\mu(\Omega) = 1. \quad (1.3)$$

3. Если совокупность несовместных событий счетна

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}, \quad \text{причем } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \quad (1.4)$$

то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (1.5)$$

На основе этих аксиом можно построить последовательную теорию вероятностей. В частности, аксиомы Колмогорова дают возможность определить вероятности всех событий, являющихся результатом логических операций над другими событиями. Например:

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2). \quad (1.6)$$

Подводя итог, вероятностное пространство состоит из выборочного пространства Ω , σ -алгебры событий \mathcal{A} и вероятностной меры μ на \mathcal{A} . Это общее понятие вероятностного пространства составляет аксиоматический базис классической теории вероятностей. Конечно, с физической точки зрения, имеется связь этих абстрактных представлений с экспериментом и специальными теоретическими моделями реальности, что является нетривиальной задачей.

1.1.3. Условные вероятности и независимость

Важным принципом теории вероятностей является понятие статистической независимости. Этот принцип часто формулируется вводом *условной вероятности* $\mu(A_1|A_2)$ события A_1 при условии осуществления события A_2 ,

$$\mu(A_1|A_2) = \frac{\mu(A_1 \cap A_2)}{\mu(A_2)}. \quad (1.7)$$

Предполагается, что оба события A_1 и A_2 берутся из σ -алгебры и $\mu(A_2) > 0$. Рассматриваемые события называются статистически независимыми, если

$$\mu(A_1|A_2) = \mu(A_1), \quad (1.8)$$

или, что эквивалентно,

$$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2). \quad (1.9)$$

Это означает, что вероятность совместного появления событий A_1 и A_2 равна произведению вероятностей A_1 и A_2 .

Для нескольких событий A_1, A_2, \dots, A_n условие статистической независимости следующее: для любого подмножества (i_1, i_2, \dots, i_k) множества индексов $(1, 2, \dots, n)$ должно выполняться

$$\mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mu(A_{i_1})\mu(A_{i_2}) \dots \mu(A_{i_k}), \quad (1.10)$$

это означает, что совместное появление любого подмножества событий A_i факторизуется. Как показывают простые примеры (Gardiner, 1985), проверка статистической независимости только всех возможных пар событий A_i и A_j не достаточна.

Следующее соотношение является прямым результатом определения (1.7)

$$\mu(A_1|A_2) = \mu(A_2|A_1) \frac{\mu(A_1)}{\mu(A_2)}, \quad (1.11)$$

оно известно как теорема Байеса.

1.2. Случайные величины

Элементы ω выборочного пространства Ω могут быть довольно абстрактными объектами. На практике часто хочется рассматривать просто числа (целые, действительные или комплексные) вместо этих абстрактных объектов. Например, хотелось бы складывать, умножать эти числа, а также рассматривать случайные функции от них. Таким образом, цель заключается в постановке чисел в соответствие элементам выборочного пространства. Эта идея приводит к понятию *случайной величины*.

1.2.1. Определение случайных величин

Случайная величина X определяется отображением

$$X: \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

которое связывает с каждым элементарным событием $\omega \in \Omega$ действительное число $X(\omega)$. При заданном ω значение

$$x = X(\omega) \quad (1.13)$$

называется *реализацией* X . В дальнейшем мы придерживаемся договоренности использовать прописные буквы для обозначения случайных величин,

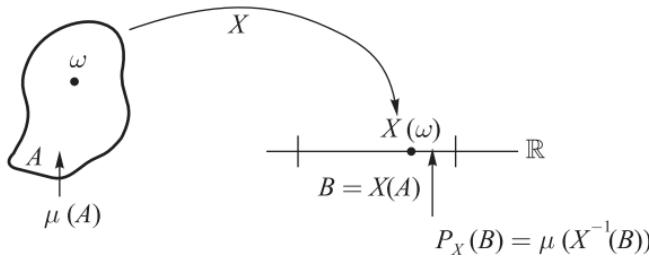


Рис. 1.1. Иллюстрация определения случайной величины. Случайная величина X является отображением из выборочного пространства в пространство действительных чисел. Вероятность того, что случайное число попадает в некоторое борелевское множество B равна вероятностной мере $\mu(A)$ события $A = X^{-1}(B)$, задаваемой прообразом B .

тогда как их реализации обозначаются соответствующими строчными буквами.

Наше определение случайной величины X еще не полно. Мы должны наложить определенное условие на функцию X . Чтобы сформулировать это условие, введем σ -алгебру борелевских множеств¹ \mathbb{R} , которые мы обозначим через \mathcal{B} . Условие, накладываемое на функцию X , заключается в том, что она должна быть измеримой, что означает, что для любого множества Бореля $B \in \mathcal{B}$ прообраз $A = X^{-1}(B)$ является членом σ -алгебры \mathcal{A} событий. Данное условие гарантирует, что $X^{-1}(B)$ является хорошо определенной величиной и что мы можем определить *распределение вероятности* X формулой

$$P_X(B) = \mu(X^{-1}(B)). \quad (1.14)$$

Таким образом, случайная величина X соответствует распределению вероятности $P_X(B)$ на борелевских множествах B на действительной оси (см. рис. 1.1).

Отдельные множества задаются $(-\infty, x]$, где $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим прообраз такого множества, который задается

$$A_x \equiv \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}. \quad (1.15)$$

По условию, наложенному на X , такие множества измеримы при лю-

¹ σ -алгебра множеств Бореля \mathbb{R} — наименьшая σ -алгебра, которая содержит все подмножества вида $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$. В частности, она включает все открытые и замкнутые интервалы действительных осей.

бых $x \in \mathbb{R}$, что позволяет ввести функцию

$$F_X(x) \equiv \mu(A_x) = \mu(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}). \quad (1.16)$$

Эта функция дает вероятность того, что случайная величина X принимает значение в интервале $(-\infty, x]$. $F_X(x)$ называется *кумулятивной функцией распределения* или просто *функцией распределения* X . Часто используется следующее условное обозначение:

$$F_X(x) \equiv \mu(X \leq x). \quad (1.17)$$

Как легко показать, функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F_X(x)$ монотонно растет:

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2), \quad \text{при } x_1 < x_2. \quad (1.18)$$

2. $F_X(x)$ непрерывна справа,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F_X(x + \varepsilon) = F_X(x). \quad (1.19)$$

3. $F_X(x)$ имеет следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1. \quad (1.20)$$

Говорят, что случайная величина X имеет плотность вероятности $p_X(x)$, если функция распределения может быть представлена как

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x) dx. \quad (1.21)$$

Если $F_X(x)$ абсолютно непрерывна, то мы получаем следующее соотношение:

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}. \quad (1.22)$$

В дальнейшем, как общепринято в физической литературе, мы будем часто представлять функции распределения через их плотности $p_X(x)$. Это

допустимо, если включить в $p_X(x)$ сумму δ -функций и исключить определенные сингулярные функции распределения (Feller, 1971). На языке плотностей, (1.14) можно записать как

$$P_X(B) = \int_B p_X(x)dx, \quad (1.23)$$

где интеграл берется по борелевскому множеству B .

Мы рассмотрели одномерную случайную величину. Безусловно, возможно также изучение произвольного набора

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_d) \quad (1.24)$$

случайных величин, определенных на том же вероятностном пространстве. Векторнозначная функция $X: \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ называется многомерной случайной величиной или случайным вектором. Это означает, что каждой компоненте X_i соответствует действительнозначная переменная. Для заданного $\omega \in \Omega$ величина $x = X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega))$ будет реализацией многомерной случайной величины. Совместная плотность вероятности многомерной случайной величины обозначается $p_X(x)$. Вероятность для переменной попасть в борелевское множество $B \subset \mathbb{R}^d$ задается выражением

$$P_X(B) = \mu(X^{-1}(B)) = \int_B p_X(x)d^d x. \quad (1.25)$$

В соответствии с нашим, сформулированным выше, определением две случайные величины X_1 и X_2 на том же вероятностном пространстве называются статистически независимыми, если

$$\mu(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \mu(X_1 \leq x_1) \cdot \mu(X_2 \leq x_2) \quad (1.26)$$

для всех x_1, x_2 . Здесь левая сторона задает сокращенное обозначение для вероятности:

$$\mu(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \equiv \mu(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leq x_1 \text{ и } X_2(\omega) \leq x_2\}). \quad (1.27)$$

Совместная статистическая независимость нескольких случайных величин определяется аналогично формуле (1.10).

1.2.2. Преобразование случайных величин

При заданной d -мерной случайной величине X мы можем сгенерировать новые случайные величины, используя соответствующие преобразования. Чтобы ввести их, рассмотрим сначала измеримые по Борелю функции

$$g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^f. \quad (1.28)$$

Предположим, что прообраз $g^{-1}(B)$ любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^f$ есть также борелевское множество в \mathbb{R}^d . Таким образом, уравнение

$$Y = g(X) \quad (1.29)$$

определяет новую f -мерную случайную величину Y . Если P_X – распределение вероятности случайной величины X , то распределение вероятности случайной величины Y задается посредством формулы

$$P_Y(B) = P_X(g^{-1}(B)). \quad (1.30)$$

Соответствующие плотности вероятности связаны соотношением

$$p_Y(y) = \int \delta^{(f)}(y - g(x)) p_X(x) d^d x, \quad (1.31)$$

где $\delta^{(f)}$ обозначает f -мерную δ -функцию. Данная формула дает возможность определения плотности $Y = g(X)$. Например, сумма $Y = X_1 + X_2$ двух случайных величин находится посредством $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Если X_1 и X_2 независимы, мы получаем формулу

$$p_Y(y) = \int p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(y - x_1) dx_1, \quad (1.32)$$

которая показывает, что плотность случайной величины Y есть свертка плотностей случайных величин X_1 и X_2 .

1.2.3. Математические ожидания и характеристическая функция

Расчет математических ожиданий распределений вероятностей является важным средством их описания. *Математическое ожидание* для действительнозначной случайной величины X определяется как²

$$E(X) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx. \quad (1.33)$$

Здесь величина $dF_X(x)$ определена как

$$dF_X(x) \equiv F_X(x + dx) - F_X(x) = \mu(x < X \leq x + dx). \quad (1.34)$$

²Мы следуем обычному соглашению теории вероятностей и обозначаем математическое ожидание классической случайной величины символом E для того, чтобы отличать его от математического ожидания в квантовой механике, которое будет обозначаться угловыми скобками.

Интегралы в (1.33) рассматриваются как интегралы Лебега – Стильеса соответственно (Feller, 1971). В более общем случае математическое ожидание для измеримых функций $g(X)$ от X определяется как

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p_X(x)dx. \quad (1.35)$$

Особенно важными примерами математических ожиданий являются моменты m -го порядка:

$$E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m p_X(x)dx. \quad (1.36)$$

Дисперсия случайной величины определяется как

$$\text{Var}(X) \equiv E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2. \quad (1.37)$$

Важность дисперсии связана с ее свойством быть мерой для флюктуаций случайной величины X . Это означает, что дисперсия задает пределы возможных отклонений реализации X от среднего значения $E(X)$. Этот факт выражается, например, неравенством Чебышева, которое гласит, что дисперсия контролирует вероятность для такого рода отклонений, а именно при всех $\varepsilon > 0$

$$\mu(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X). \quad (1.38)$$

В частности, если дисперсия стремится к нулю, то случайная величина X , фактически, становится детерминированной и принимает единственное значение $x = E(X)$ с вероятностью 1. Дисперсия играет важную роль в статистическом анализе экспериментальных данных (Honerkamp, 1998), где она используется, например, для оценки значения стандартной ошибки для выборочного среднего, полученного в эксперименте.

Для многомерной случайной величины $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ можно определить матричные элементы *ковариационной матрицы*

$$\text{Cov}(X_i, X_j) \equiv E([X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]). \quad (1.39)$$

Ковариационная матрица размерности $d \times d$ симметрична и положительно полуопределенна. Хорошо известно, что статистическая независимость

двух случайных величин X_1, X_2 подразумевает, что недиагональный элемент $\text{Cov}(X_1, X_2)$ становится равным нулю, однако обратное неверно. Недиагональные элементы задают меру линейной зависимости соответствующих случайных величин (например, X_1 и X_2). Чтобы увидеть это, рассмотрим коэффициент корреляции для любых двух случайных величин с ненулевой дисперсией

$$\text{Cor}(X_1, X_2) \equiv \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(X_2)}}, \quad (1.40)$$

который удовлетворяет неравенству $|\text{Cor}(X_1, X_2)| \leq 1$. Если абсолютное значение коэффициента корреляции равно единице, $|\text{Cor}(X_1, X_2)| = 1$, то существуют такие константы a и b , что $X_2 = aX_1 + b$ с вероятностью равной единице, то есть X_2 линейно зависит от X_1 .

В заключение введем важное для дальнейшего изложения математическое ожидание, которое может служить для полного описания случайной величины. Это *характеристическая функция*, которая определена как преобразование Фурье от плотности вероятности:

$$G(k) = E(\exp[ikX]) = \int p_X(x) \exp(ikx) dx. \quad (1.41)$$

Можно показать, что характеристическая функция $G(k)$ однозначно определяет соответствующую плотность распределения X . Моменты X , при условии существования производных $G(k)$ при $k = 0$, вычисляются как

$$E(X^m) = \left. \frac{1}{i^m} \frac{d^m}{dk^m} \right|_{k=0} G(k). \quad (1.42)$$

По этой причине $G(k)$ также называется *производящей функцией*. Для многомерной случайной величины приведенное выше выражение обобщается следующим образом:

$$G(k_1, k_2, \dots, k_d) = E \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^d k_j X_j \right] \right). \quad (1.43)$$

Укажем важное свойство характеристической функции. Как мы уже отметили выше, если X и Y — две независимые случайные величины, то плотность вероятности их суммы $Z = X + Y$ есть свертка плотностей X и Y . Соответственно, характеристическая функция для случайной величины Z есть произведение характеристических функций случайных величин X и Y .

1.3. Стохастические процессы

До сих пор мы рассматривали случайные величины на вероятностном пространстве без явной временной зависимости их статистических свойств. Для должного описания динамики физических процессов требуется ввести понятие *стохастического процесса*, которое естественным образом описывает случайную величину, чьи статистические свойства изменяются во времени. Идея стохастических процессов обобщает идею детерминированной временной эволюции. Последняя может быть представлена на языке дифференциальных уравнений, описывающих детерминированное изменение во времени нескольких переменных. В стохастическом процессе такая детерминированная эволюция заменена вероятностным законом временного развития случайных величин.

Ниже представлено сжатое введение в теорию стохастических процессов. После формального определения стохастического процесса мы опишем семейство совместных вероятностных распределений, которое характеризует стохастический процесс в такой степени, которая вполне достаточна для практических целей. В определенном смысле, когда мы имеем дело со стохастическими процессами, то заменяем дифференциальное уравнение детерминированной теории на определенное семейство совместных распределений вероятности. Это становится очевидным в рамках теоремы Колмогорова, которая также объясняется в настоящем разделе.

1.3.1. Формальное определение стохастического процесса

На языке математики стохастический процесс — это семейство случайных величин $X(t)$, заданных на общем вероятностном пространстве и зависящих от параметра $t \in T$. В большинстве физических приложений параметр t играет роль переменной времени. Поэтому множество значений параметра T — это обычно интервал действительной оси времени.

Согласно определению, для каждого фиксированного t величина $X(t)$ есть отображение выборочного пространства Ω в \mathbb{R} . Стохастический процесс, поэтому, может быть рассмотрен как отображение

$$X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.44)$$

которое связывает с каждым $\omega \in \Omega$ и $t \in T$ действительное число $X(\omega, t)$. Фиксируя ω , мы называем отображение

$$t \mapsto X(\omega, t), \quad t \in T, \quad (1.45)$$

реализацией, траекторией или выборочным путем стохастического процесса.

Определенное выше отображение (1.44) может быть вполне общим. Благодаря такому представлению стохастический процесс является широким понятием. Однако нам необходимо одно условие для возможности представления $X(t)$ случайной величиной при каждом фиксированном t . А именно, для каждого фиксированного t функция $X(t)$, которая отображает Ω в \mathbb{R} , должна быть измеримой в том смысле, что прообразы любого борелевского множества в \mathbb{R} должны принадлежать алгебре событий нашего вероятностного пространства.

Многомерный стохастический процесс $X(t)$ определяется аналогично: это есть векторнозначный стохастический процесс $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t))$, где каждая компонента $X_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, d$, является действительнозначным стохастическим процессом. Таким образом, формально, многомерный стохастический процесс может быть рассмотрен как отображение

$$X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (1.46)$$

1.3.2. Иерархия совместных распределений вероятностей

Стохастический процесс характеризуется тем, каким образом случайные величины $X(t)$ связаны друг с другом в различные моменты времени t . Эта взаимосвязь определяется степенью статистической зависимости между случайными величинами семейства.

Согласно определению, данному выше, стохастический процесс, если говорить формально, ни что иное, как зависимая от времени случайная величина. Поэтому он может быть описан однозначно, если сконструировать вероятностное пространство и отображение (1.46) на нем. Однако это не единственный метод описания стохастического процесса на практике. В большинстве приложений пытаются сконструировать соответствующий процесс на основе результатов наблюдений статистических корреляций между случайными величинами $X(t_\nu)$ на дискретном наборе времен t_ν . Это делается на основе экспериментальных данных, применяя некоторую феноменологическую модель, или с помощью некоторой, лежащей в основе микроскопической физической теории.

Таким образом, физическая теория обычно предоставляет так называемое *семейство конечномерных совместных распределений вероятности*, которые определены следующим образом (см. рис. 1.2). Возьмем набор t_1, t_2, \dots, t_m дискретных времен и борелевских множеств B_1, B_2, \dots, B_m в \mathbb{R}^d и рассмотрим для многомерного случайного процесса $X(t)$ величину

$$\begin{aligned} P(B_1, t_1; B_2, t_2; \dots, B_m, t_m) &\equiv \\ &\equiv \mu(X(t_1) \in B_1, X(t_2) \in B_2, \dots, X(t_m) \in B_m). \end{aligned} \quad (1.47)$$

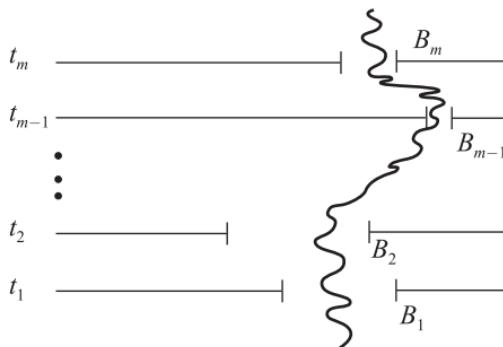


Рис. 1.2. Выборочная траектория $X(t, \omega)$ каждого стохастического процесса, которая проходит по временам $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m$ множеств $B_1, B_2, \dots, B_{m-1}, B_m$ соответственно. Вероятность появления такой траектории задается совместной вероятностью $P(B_1, t_1; \dots; B_m, t_m)$.

Эта величина есть совместное распределение вероятностей порядка m . Она дает вероятность того, что в процессе $X(t)$ реализуется некоторое значение B_1 в момент времени t_1 , некоторое значение B_2 в момент времени t_2, \dots , и некоторое значение B_m в момент времени t_m . Набор совместных распределений вероятностей для всех $m = 1, 2, \dots$, для всех дискретных времен t_ν , и для всех борелевских множеств B_ν называется семейством конечномерных совместных распределений вероятностей стохастического процесса.

Каждый стохастический процесс порождает такое семейство совместных вероятностей. Это следует немедленно из данного выше определения, согласно которому вероятности удовлетворяют условиям непротиворечивости Колмогорова:

$$P(\mathbb{R}^d, t) = 1, \quad (1.48)$$

$$P(B_1, t_1; \dots; B_m, t_m) \geq 0, \quad (1.49)$$

$$P(B_1, t_1; \dots; B_{m-1}, t_{m-1}; \mathbb{R}^d, t_m) = P(B_1, t_1; \dots; B_{m-1}, t_{m-1}), \quad (1.50)$$

$$P(B_{\pi(1)}, t_{\pi(1)}; \dots; B_{\pi(m)}, t_{\pi(m)}) = P(B_1, t_1; \dots; B_m, t_m). \quad (1.51)$$

Из первых двух условий следует, что распределения должны быть неотрицательными и что вероятность достоверного события $X(t) \in \mathbb{R}^d$ нормирована на 1. Третье условие утверждает, что при $\nu > 1$ достоверное событие $X(t_\nu) \in \mathbb{R}^d$ всегда может быть опущено из списка аргументов, тогда как четвертое условие означает, что вероятностное распределение инвариантно относительно всех перестановок своих аргументов π .

Конечно, для данного стохастического процесса $X(t)$ условия непротиворечивости (1.48)–(1.51) есть тривиальное следствие определения (1.47). Здесь важно отметить, что также верна следующая нетривиальная теорема: предположим, что задано семейство функций, удовлетворяющих (1.48)–(1.51). Тогда существует вероятностное пространство и стохастический процесс $X(t)$ на этом пространстве, такие что семейство совместных вероятностей, принадлежащих $X(t)$, совпадает с заданным семейством.

Это теорема Колмогорова. Она гарантирует, что для любого непротиворечивого семейства совместных вероятностей существует стохастический процесс $X(t)$ на некотором вероятностном пространстве. Однако нужно отметить, что процесс $X(t)$ неоднозначный; для заданного семейства совместных распределений вероятностей могут существовать различные стохастические процессы, где термин *различные* означает, что эти процессы могут быть отличны на событиях с ненулевой мерой.

На практике неоднозначность $X(t)$ обычно не вызывает каких-либо трудностей, так как семейства совместных конечномерных распределений вероятностей однозначно определяют вероятности всех событий, которые могут быть описаны конечным числом случайных величин. Так, например, если мы получим некоторую стохастическую модель посредством сравнения со множеством экспериментальных данных (которые всегда конечны), то не возникнет никаких проблем, обусловленных неоднозначностью процесса.

1.4. Марковские процессы

Марковские процессы играют важную роль в физике и естественных науках. Во-первых, многие процессы, возникающие в равновесной статистической механике, могут быть представлены как марковские при соответствующем выборе переменных. Во-вторых, многие типы стохастических процессов становятся марковскими при соответствующем расширении пространства состояний. Наконец, марковские процессы сравнительно легко описываются математически. В этом разделе мы определим и классифицируем наиболее важные марковские процессы, а также кратко рассмотрим их свойства.

1.4.1. Уравнение Чепмена – Колмогорова

По существу, марковский процесс — это стохастический процесс $X(t)$ с короткой памятью, то есть процесс, который быстро забывает свою предысторию. Данное свойство делает марковский процесс очень легким

для рассмотрения, так как оно гарантирует, что вся иерархия совместных вероятностей, введенная в предыдущей секции, может быть воспроизведена из двух функций распределения.

Данное условие для быстрого уменьшения эффектов памяти может быть сформулировано на языке условных совместных вероятностей как

$$\mu(X(t) \in B | X(t_m) = x_m, \dots, X(t_1) = x_1) = \mu(X(t) \in B | X(t_m) = x_m). \quad (1.52)$$

Это условие Маркова. Предполагается, что оно имеет место при всех $m = 1, 2, 3, \dots$, для всех упорядоченных множеств времени

$$t_1 < t_2 < \dots < t_m < t, \quad (1.53)$$

для всех борелевских множеств B и всех $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$. Марковское условие устанавливает, что вероятность события $X(t) \in B$, обусловленная m предыдущими событиями $X(t_1) = x_1, \dots, X(t_m) = x_m$, зависит только от последнего события $X(t_m) = x_m$.

Дальше мы обсудим следствия марковских условий, введя плотности совместных вероятностей:

$$P(B_m, t_m; \dots; B_1, t_1) = \int_{B_m} \dots \int_{B_1} p_m(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1) dx_m \dots dx_1 \quad (1.54)$$

и соответствующие плотности условных вероятностей:

$$\begin{aligned} p_{l|k}(x_{k+l}, t_{k+l}; \dots; x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k; \dots; x_1, t_1) &\equiv \\ &\equiv \frac{p_{k+l}(x_{k+l}, t_{k+l}; \dots; x_1, t_1)}{p_k(x_k, t_k; \dots; x_1, t_1)}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

на языке которых условие Маркова приобретает вид:

$$p_{1|m}(x, t | x_m, t_m; \dots; x_1, t_1) = p_{1|1}(x, t | x_m, t_m). \quad (1.56)$$

Это уравнение демонстрирует, что величина $p_{1|1}(x, t | x', t')$ играет ключевую роль в теории марковских процессов.

Для любого стохастического процесса (необязательно марковского) величина $p_{1|1}(x, t | x', t')$ равна плотности вероятности того, что процесс принимает значение x в момент времени t при условии, что процесс принимает значение x' в некоторое начальное время t' . Поэтому данная условная

вероятность называется *условной вероятностью перехода* или просто *пропагатором*. Введем обозначение:

$$T(x, t|x', t') \equiv p_{1|1}(x, t|x', t') \quad (1.57)$$

для пропагатора. Как следует из определения, пропагатор удовлетворяет соотношениям:

$$\int T(x, t|x', t')dx = 1, \quad (1.58)$$

$$\lim_{t \rightarrow t'} T(x, t|x', t') = \delta(x - x'). \quad (1.59)$$

Первое уравнение выражает тот факт, что с вероятностью 1 процесс принимает некоторое значение при любом фиксированном времени, а второе уравнение утверждает, что, при стремящемся к нулю приращении времени, с вероятностью 1 процесс не меняется.

Плотность вероятности $p_1(x, t)$, которая является просто плотностью для безусловной вероятности того, что процесс принимает значение x в момент времени t , будет обозначаться

$$p(x, t) \equiv p_1(x, t). \quad (1.60)$$

Плотность $p(x, t)$ связана с начальной плотностью в некоторый момент времени t_0 очевидным соотношением:

$$p(x, t) = \int T(x, t|x', t_0)p(x', t_0)dx'. \quad (1.61)$$

Стochasticкий процесс называется *стационарным*, если все совместные вероятностные плотности инвариантны относительно смещения во времени, то есть если для всех τ

$$p_m(x_m, t_m + \tau; \dots; x_1, t_1 + \tau) = p_m(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1). \quad (1.62)$$

В частности, стационарность предполагает, что плотность вероятности p не зависит от времени, $p(x, t) = p(x)$, и что пропагатор $T(x, t|x', t')$ зависит только от разности $t - t'$ своих аргументов времени. С помощью стационарных процессов можно описать, например, равновесные флуктуации в статистической механике.

Процесс называется *однородным* во времени, если пропагатор зависит только от разности своих временных аргументов. Таким образом, стационарный процесс однороден во времени, но существуют однородные процессы, которые нестационарны. В качестве примера можно привести винеровский процесс (см. ниже).

За счет условия Маркова задача сильно упрощается, благодаря тому, что общая иерархия совместных вероятностей может быть восстановлена из начальной плотности $p(x, t_0)$ и соответствующего пропагатора. Согласно (1.61) плотность $p(x, t)$ для последующих моментов времени $t > t_0$ получается из начальной плотности и пропагатора. Таким образом, распределение совместных вероятностей $p_2(x, t; x', t')$ также оказывается известным. В силу условия Маркова все функции распределения более высокого порядка могут быть заданы при условии, что пропагатор удовлетворяет определенному интегральному уравнению, которое сейчас будет выведено.

Для этого рассмотрим три момента времени $t_1 < t_2 < t_3$ и распределение 3-го порядка p_3 . Применяя определения условной вероятности и условия Маркова, получаем

$$\begin{aligned} p_3(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) &= p_{1|2}(x_3, t_3|x_2, t_2; x_1, t_1)p_2(x_2, t_2; x_1, t_1) = \\ &= p_{1|1}(x_3, t_3|x_2, t_2)p_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1)p_1(x_1, t_1). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Проинтегрируем это уравнение по x_2 :

$$p_2(x_3, t_3; x_1, t_1) = p_1(x_1, t_1) \int p_{1|1}(x_3, t_3|x_2, t_2)p_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1)dx_2 \quad (1.64)$$

и разделим на $p_1(x_1, t_1)$:

$$p_{1|1}(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int p_{1|1}(x_3, t_3|x_2, t_2)p_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1)dx_2. \quad (1.65)$$

Используя определение пропагатора (1.57), мы, таким образом, получаем

$$T(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int T(x_3, t_3|x_2, t_2)T(x_2, t_2|x_1, t_1)dx_2, \quad (1.66)$$

что есть *уравнение Чепмена–Колмогорова*.

Уравнение Чепмена–Колмогорова допускает простую наглядную интерпретацию, которая проиллюстрирована на рис. 1.3. Начиная с точки x_1 и времени t_1 , процесс достигает точки x_3 в момент времени t_3 . В некоторое фиксированное среднее время t_2 процесс принимает некоторое значение x_2 . Вероятность перехода из (x_1, t_1) в (x_3, t_3) получается перемножением вероятностей переходов $(x_1, t_1) \rightarrow (x_2, t_2)$ и $(x_2, t_2) \rightarrow (x_3, t_3)$ и суммированием по всем возможным средним положениям x_2 .

Имея пропагатор $T(x, t|x', t')$ и некоторую начальную плотность $p(x, t_0)$, мы можем сконструировать целую иерархию распределений совместных вероятностей. Как мы уже видели, пропагатор и начальная

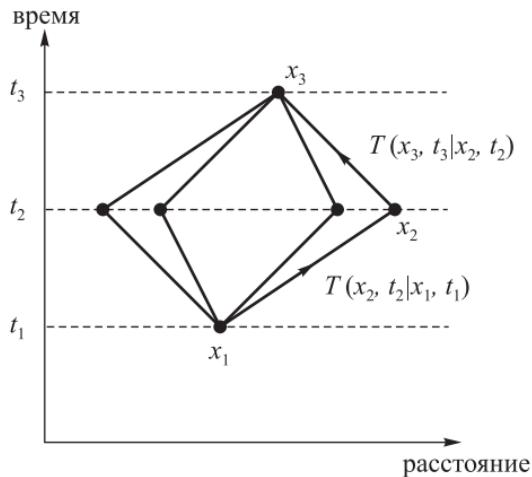


Рис. 1.3. Иллюстрация уравнения Чепмена – Колмогорова (1.66).

плотность дают зависимую от времени плотность $p(x, t)$. Нетрудно убедиться, что с этими величинами все совместные плотности вероятностей m -го порядка определяются через соотношение

$$p_m(x_m, t_m; x_{m-1}, t_{m-1}; \dots; x_1, t_1) = \prod_{\nu=1}^{m-1} T(x_{\nu+1}, t_{\nu+1} | x_\nu, t_\nu) p(x_1, t_1), \quad (1.67)$$

где $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$.

В итоге для определения стохастического марковского процесса нам нужно определить пропагатор $T(x, t | x', t')$, удовлетворяющий уравнению Чепмена – Колмогорова (1.66), и начальную плотность $p(x, t_0)$. Поэтому, по существу, классификация марковских процессов сводится к классификации решений уравнения Чепмена – Колмогорова.

1.4.2. Дифференциальное уравнение Чепмена – Колмогорова

Уравнение Чепмена – Колмогорова (1.66) является интегральным уравнением для вероятности условного перехода. По мере поиска решений часто полезно рассмотреть соответствующий дифференциальный вид этого уравнения — *дифференциальное уравнение Чепмена – Колмогорова*.

Мы полагаем, что пропагатор $T(x, t | x', t')$ дифференцируем по времени. Дифференцируя (1.66), мы получаем дифференциальное уравнение

Чепмена–Колмогорова,

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t|x', t') = \mathcal{A}(t)T(x, t|x', t'). \quad (1.68)$$

Здесь \mathcal{A} — линейный оператор, который генерирует бесконечно малые трансляции во времени. Это определяется действием на некоторую плотность $\rho(x)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t)\rho(x) &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int [T(x, t + \Delta t|x', t) - \delta(x - x')] \rho(x') dx' = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int T(x, t + \Delta t|x', t) \rho(x') dx' - \rho(x) \right]. \end{aligned} \quad (1.69)$$

В общем случае оператор \mathcal{A} может зависеть от времени t . Однако для однородного марковского процесса пропагатор $T(x, t + \Delta t|x', t)$ на интервале времени от t до $t + \Delta t$ не зависит от t и, таким образом, в этом случае генератор не зависит от времени.

Для однородного процесса Маркова мы можем записать пропагатор как $T_\tau(x|x')$, где $\tau = t - t' \geq 0$ означает разность его аргументов времени. Уравнение Чепмена–Колмогорова может быть переписано как

$$T_{\tau+\tau'}(x|x') = \int T_\tau(x|x'') T_{\tau'}(x''|x') dx'', \quad \tau', \tau \geq 0. \quad (1.70)$$

Если генератор \mathcal{A} известен, то решение уравнения Чепмена–Колмогорова для однородного процесса Маркова может быть формально записано как

$$T_\tau(x|x') = \exp(\tau\mathcal{A})\delta(x - x'), \quad \tau \geq 0. \quad (1.71)$$

Эти уравнения выражают тот факт, что однопараметрическое семейство $\{T_\tau | \tau \geq 0\}$ вероятностей условного перехода представляет собой динамическую полугруппу. Термин *полугруппа* служит признаком того, что семейство $\{T_\tau | \tau \geq 0\}$, по существу, является не полной группой, так как параметр τ ограничен неотрицательными значениями.

С физической точки зрения свойства полугрупп получаются из необратимой природы стохастических процессов. Предположим, что в момент времени t_0 задана начальная плотность $p(x, t_0)$. Упомянутое выше семейство вероятностей условного перехода позволяет нам однозначно распространить эту плотность на времена $t = t_0 + \tau > t_0$. С помощью уравнений (1.61) и (1.71) мы получаем

$$p(x, t) = \exp(\tau\mathcal{A})p(x, t_0). \quad (1.72)$$

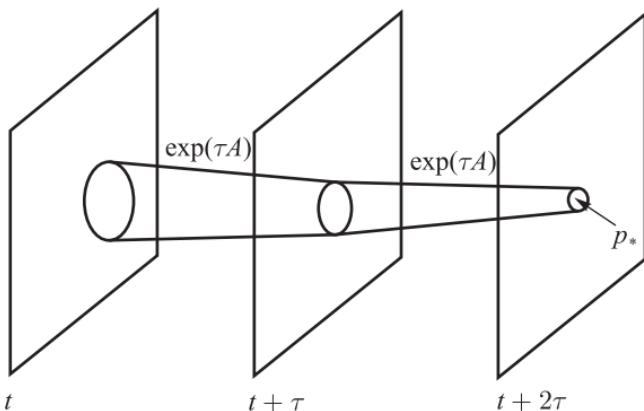


Рис. 1.4. Схематичное изображение необратимой природы динамической полугруппы. Рисунок показывает сжатие области определения пропагаторов T_τ при увеличении τ .

Однако в общем случае результирующий процесс не инвариантен относительно обращения времени, что означает, что невозможно для *каждой* плотности $p(x, t_0)$ найти такую плотность распределения $p(x, t)$ для некоторого более раннего момента времени $t < t_0$, которая эволюционировала бы к плотности $p(x, t_0)$. Математически это выглядит как то, что область определения оператора $\exp(\tau\mathcal{A})$ сжимается при увеличении τ , то есть этот оператор становится необратимым в общем пространстве всех вероятностных распределений (см. рис. 1.4). Вот почему необратимые процессы позволяют нам отличать будущее от прошлого.

Вышеописанная ситуация получается, если, например, процесс релаксирует к единственному стационарному состоянию $p_*(x)$ в пределе большого времени

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(x, t) = p_*(x). \quad (1.73)$$

Такие процессы возникают, например, в статистической механике, когда изучается релаксация закрытых физических систем к состоянию равновесия. Тогда очевидно, что стационарная плотность $p_*(x)$ должна быть нулевой операторной модой генератора

$$\mathcal{A}p_*(x) = 0. \quad (1.74)$$

Соответственно, при обратном распространении $p_*(x)$ также остается инвариантом, другого же способа для получения какого-либо характерного распределения, отличного от $p_*(x)$ в любое начальное время, не существует.

В следующих разделах мы введем три основных типа марковских процессов, которые могут распознаваться по виду их генератора или, что эквивалентно, поведению пропагатора на малых временах.

1.4.3. Детерминированные процессы и уравнение Лиувилля

Простейший пример марковского процесса представляется детерминированным процессом. Он определяется некоторой начальной плотностью $p(x, t_0)$ и пропагатором, описывающим детерминированную временную эволюцию, соответствующую системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^d. \quad (1.75)$$

Здесь $g(x)$ означает d -мерное векторное поле. Для простоты мы полагаем систему автономной, то есть вектор поля $g(x)$ явно не зависит от времени, так что результирующий процесс становится однородным (см. ниже). Большинство известных примеров этого типа процессов — процессы, появляющиеся в равновесной статистической механике, в случае которых (1.75) представляет гамильтониан уравнений движения в фазовом пространстве.

Такое обыкновенное дифференциальное уравнение соответствует фазовому потоку, который обозначается $\Phi_t(x)$. Это означает, что для фиксированного x фазовая кривая

$$t \mapsto \Phi_t(x) \quad (1.76)$$

представляет решение (1.75), соответствующее начальному значению $\Phi_0(x) = x$.

Выборочные пути детерминированного процесса задаются фазовыми кривыми (1.76). Таким образом, пропагатор для такого процесса есть просто

$$T(x, t|x', t') = \delta(x - \Phi_{t-t'}(x')). \quad (1.77)$$

Это уравнение говорит нам, что плотность вероятности достижения точки x в момент времени t процессом при условии, что он был в точке x' в момент времени t' , отлична от нуля, только если фазовый поток переносит x' в x за интервал времени между t' и t . То есть тогда и только тогда, когда $x = \Phi_{t-t'}(x')$.

Как легко убедиться, пропагатор (1.77) удовлетворяет соотношениям (1.58) и (1.59). Используя групповое свойство фазового потока, которое может быть выражено как

$$\Phi_t(\Phi_s(x)) = \Phi_{t+s}(x), \quad (1.78)$$

можно также показать, что (1.78) удовлетворяет уравнению Чепмена–Колмогорова. Таким образом, мы сконструировали решение уравнения Чепмена–Колмогорова и определили простой марковский процесс.

Для того чтобы найти бесконечно малый генератор \mathcal{A} для детерминированного процесса, мы подставим выражение (1.77) в определение (1.69):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\rho(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int [\delta(x - \Phi_{\Delta t}(x')) - \delta(x - x')] \rho(x') dx' = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int \delta(x - \Phi_t(x')) \rho(x') dx' = \int g_i(x') \left[\frac{\partial}{\partial x'_i} \delta(x - x') \right] \rho(x') dx' = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} [g_i(x) \rho(x)].\end{aligned}\quad (1.79)$$

Здесь через $g_i(x)$ обозначаются компоненты векторного поля $g(x)$, и предполагается суммирование по всем индексам i . Таким образом, генератор детерминированного процесса оказывается представим в виде

$$\mathcal{A} = -\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x), \quad (1.80)$$

а дифференциальное уравнение Чепмена–Колмогорова принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t|x', t') = -\frac{\partial}{\partial x_i} [g_i(x) T(x, t|x', t')]. \quad (1.81)$$

Это уравнение Лиувилля для детерминированного марковского процесса, соответствующее дифференциальному уравнению (1.75). Конечно, плотность $p(x, t)$ удовлетворяет уравнению, которое формально идентично (1.81).

1.4.4. Скачкообразные процессы и основное уравнение

Детерминированный процесс из предыдущего раздела довольно прост. Он представляет процесс, чьи выборочные траектории являются решениями детерминированного уравнения движения; только начальные условия берутся случайно. Теперь рассмотрим процессы с дискретными выборочными траекториями, подчиняющимися истинной вероятностной динамике.

1.4.4.1. Дифференциальное уравнение Чепмена–Колмогорова. Потребуем, чтобы выборочная траектория $X(t)$ вместо сглаженных решений дифференциального уравнения делала мгновенные скачки. Чтобы сформулировать дифференциальное уравнение Чепмена–Колмогорова для такого

скачкообразного процесса, мы должны сконструировать подходящее описание для пропагатора на малых временах.

Для этого мы введем интенсивности перескока $W(x|x', t)$ для скачков, которые определены ниже. Величина $W(x|x', t)\Delta t$ равна плотности вероятности мгновенного скачка из положения x' в положение x за бесконечно малый интервал времени $[t, t + \Delta t]$ при условии, что процесс находится в x' в момент времени t . Полагая, что $X(t) = x'$, суммарная интенсивность скачка в момент времени t , таким образом, есть

$$\Gamma(x', t) = \int W(x|x', t)dx, \quad (1.82)$$

что означает, что $\Gamma(x', t)\Delta t$ – условная вероятность того, что процесс в момент времени t перепрыгнет из x' в некоторое другое состояние.

Теперь характеристическое поведение пропагатора на малых временах может быть сформулировано как

$$T(x, t + \Delta t|x', t) = W(x|x', t)\Delta t + (1 - \Gamma(x', t)\Delta t)\delta(x - x') + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (1.83)$$

Первый член справа дает вероятность скачка из x' в x за интервал времени между t и $t + \Delta t$. Множитель перед дельта-функцией во втором члене есть вероятность того, что скачок не состоится и процесс останется в положении x' в момент времени $t + \Delta t$. Как это и должно быть, при $\Delta t \rightarrow 0$ пропагатор стремится к дельта-функции $\delta(x - x')$ (см. ур. (1.59)). Принимая во внимание (1.82), получаем, что пропагатор также удовлетворяет условию нормировки (1.58).

Теперь довольно легко вывести дифференциальное уравнение Чепмена–Колмогорова (1.68) для скачкообразного процесса. Подставляя (1.83) в (1.69) для генератора скачкообразного процесса, мы находим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t)\rho(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int T[(x, t + \Delta t|x', t) - \delta(x - x')] \rho(x') dx' = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int [W(x|x', t)\Delta t - \Gamma(x', t)\Delta t\delta(x - x')] \rho(x') dx' = \\ &= \int W(x|x', t)\rho(x') dx' - \Gamma(x, t)\rho(x) = \\ &= \int [W(x|x', t)\rho(x') - W(x'|x, t)\rho(x)] dx'. \end{aligned} \quad (1.84)$$

На последнем шаге мы использовали определение (1.82) для суммарной интенсивности перехода. Это непосредственно приводит нас к уравнению

движения для пропагатора,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t|x', t') &= \mathcal{A}(t)T(x, t|x', t') = \\ &= \int [W(x|x'', t)T(x'', t|x', t') - W(x''|x, t)T(x, t|x', t')]dx''. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Это дифференциальное уравнение Чепмена – Колмогорова для скачкообразного процесса. Оно также называется *основным уравнением*. Такое же уравнение имеет место и для плотности $p(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) &= \mathcal{A}(t)p(x, t) = \\ &= \int [W(x|x', t)p(x', t) - W(x'|x, t)p(x, t)]dx'. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Это уравнение также называется основным уравнением. Однако необходимо помнить, что основное уравнение в действительности есть уравнение для вероятности условного перехода процесса. Это важное место, так как уравнение для плотности первого порядка $p(x, t)$, эволюционирующей во времени, недостаточно для определения стохастического марковского процесса.

Основное уравнение (1.86) допускает наглядную интерпретацию в виде уравнения баланса для интенсивности изменения плотности вероятности в точке x . Первый член с правой стороны описывает интенсивность роста плотности вероятности в x , которая происходит благодаря скачкам из других состояний x' в состояние x . Второй член описывает интенсивность снижения вероятности вследствие скачков из состояния x .

Отметим, что в приведенном выше выводе мы не предполагали однородность процесса во времени. В случае однородности, интенсивности перехода должны быть независимы от времени: $W(x|x', t) = W(x|x')$. Тогда суммарная интенсивность $\Gamma(x')$ также является независимой от времени.

Для случая целочисленного процесса, который может быть как одномерным, так и многомерным, введем обозначение $X(t) = N(t)$. Распределение вероятности для дискретного процесса определяется как

$$P(n, t) = \mu(N(t) = n), \quad (1.87)$$

в то время как пропагатор принимает вид

$$T(n, t|n', t') = \mu(N(t) = n | N(t') = n'). \quad (1.88)$$

Соответствующее основное уравнение для распределения вероятности в этом случае приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n, t) = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} [W(n|n', t)P(n', t) - W(n'|n, t)P(n, t)], \quad (1.89)$$

с подобным уравнением для пропагатора.

1.4.4.2. Однородные и неоднородные пуассоновские процессы. Рассмотрим два простых примера для целочисленного скачкообразного процесса, называемые однородным и неоднородным пуассоновскими процессами. Эти примеры будут важны позже.

В качестве физического примера рассмотрим классический заряженный материальный ток, описываемый некоторой плотностью тока $\vec{j}(\vec{x}, t)$ в виде

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega_0 t} + \vec{j}(\vec{x})^* e^{i\omega_0 t}. \quad (1.90)$$

Плотность потока считается поперечной, то есть $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Из квантовой электродинамики известно (Bjorken, Drell, 1965), что такой поток создает радиационное поле, излучающее фотоны с частотой ω_0 и определенной интенсивностью γ . Явное выражение для этой интенсивности может быть выведено с помощью гамильтонiana взаимодействия:

$$H_I(t) = -\frac{e}{c} \int \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{A}(\vec{x}) d^3x, \quad (1.91)$$

который управляет взаимодействием между классическим материальным потоком $\vec{j}(\vec{x}, t)$ и квантованным полем излучения $\vec{A}(\vec{x})$. Рассматривая $H_I(t)$ как зависимое от времени взаимодействие и применяя золотое правило Ферми, можно получить явное выражение для интенсивности фотонной эмиссии

$$\gamma = \frac{e^2 \omega_0}{2\pi\hbar c^3} \int \sum_{\lambda=1,2} |\vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{j}(\vec{k})|^2 d\Omega, \quad (1.92)$$

где через $\vec{j}(\vec{k})$ обозначено Фурье-преобразование плотности потока

$$\vec{j}(\vec{k}) = \int \vec{j}(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x. \quad (1.93)$$

Очевидно, что в (1.92) интеграл берется по всему телесному углу $d\Omega$ в направлении \vec{k} излучения фотонов, а суммирование проходит по двум поперечным поляризованным векторам $\vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda)$.

Интенсивность γ характеризует вероятность излучения отдельного фотона в единицу времени. Мы ставим себе задачу определить количество $N(t)$ фотонов, излучаемых за ограниченный промежуток времени от 0 до t . Для этого мы полагаем, что ток, действующий как заданный классический источник радиационного поля, не изменяется во время излучательных процессов. Тогда для всех излучаемых фотонов интенсивность γ постоянна, а каждый излучательный процесс проходит согласно тем же самым условиям и независимо от всех предыдущих. Величина $N(t)$ становится стохастическим марковским процессом, известным как (однородный) процесс Пуассона. Он описывается следующим основным уравнением для пропагатора

$$\frac{\partial}{\partial t} T(n, t|n', t') = \gamma T(n - 1, t|n', t') - \gamma T(n, t|n', t'). \quad (1.94)$$

Дальше мы изучим детерминированное начальное условие $N(0) = 0$, то есть

$$P(n, 0) = \delta_{n,0}. \quad (1.95)$$

Пуассоновский процесс представляет пример одношагового процесса, для которого задано, что $N(t) = n$, возможны только переходы в соседние состояния $n \pm 1$. Пуассоновский процесс даже проще, если возможны только переходы из n в $n + 1$, а интенсивность перехода γ — константа, которая не зависит от n . Таким образом, неудивительно, что основное уравнение для пуассоновского процесса может быть легко решено точно. Это может быть сделано посредством характеристической (производящей) функции

$$G(k, t) = \sum_{n=n'}^{+\infty} e^{ik(n-n')} T(n, t|n', t'), \quad (1.96)$$

с фиксированными n' и t' . Мы производим суммирование от $n = n'$ до бесконечности, принимая во внимание, что

$$T(n, t|n', t') = 0 \quad \text{при} \quad n < n'. \quad (1.97)$$

Это условие есть прямое следствие того факта, что скачки только увеличивают число $N(t)$. Подставляя характеристическую функцию (1.96) в основное уравнение (1.94), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} G(k, t) = \gamma[e^{ik} - 1]G(k, t), \quad (1.98)$$

откуда непосредственно следует решение

$$G(k, t) = \exp [\gamma(t - t')(e^{ik} - 1)], \quad (1.99)$$

где мы используем начальное условие $G(k, t = t') = 1$, которое, в свою очередь, следует из $T(n, t'|n', t') = \delta_{nn'}$. При сравнении разложения в ряд Тейлора характеристической функции

$$\begin{aligned} G(k, t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{ikn} \frac{[\gamma(t - t')]^n}{n!} e^{-\gamma(t-t')} = \\ &= \sum_{n=n'}^{+\infty} e^{ik(n-n')} \frac{[\gamma(t - t')]^{n-n'}}{(n - n')!} e^{-\gamma(t-t')} \end{aligned} \quad (1.100)$$

с определением (1.96) получаем процесс Пуассона для пропагатора

$$T(n, t|n', t') = \frac{[\gamma(t - t')]^{n-n'}}{(n - n')!} e^{-\gamma(t-t')}, \quad n \geq n'. \quad (1.101)$$

Как и ожидалось, процесс однороден во времени. Он также однороден в пространстве, в том смысле, что $T(n, t|n', t')$ зависит только от разности $n - n'$. Соответствующее распределение $P(n, t)$ есть

$$P(n, t) = \frac{(\gamma t)^n}{n!} e^{-\gamma t}, \quad n \geq 0, \quad (1.102)$$

оно представляет собой распределение Пуассона с равными математическим ожиданием и дисперсией:

$$E(N(t)) = \text{Var}(N(t)) = \gamma t. \quad (1.103)$$

Рис. 1.5 показывает реализацию процесса Пуассона.

Однородный пуассоновский процесс описывает число $N(t)$ независимых событий во временном интервале от 0 до t , где каждое событие происходит с постоянной интенсивностью γ . Предположим, что по некоторым причинам эта интенсивность может изменяться со временем, то есть $\gamma = \gamma(t)$. Результирующий процесс называется *неоднородным пуассоновским процессом*, так как это уже неоднородный во времени процесс. Посредством подстановки в основное уравнение можно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial t} T(n, t|n', t') = \gamma(t) T(n - 1, t|n', t') - \gamma(t) T(n, t|n', t') \quad (1.104)$$

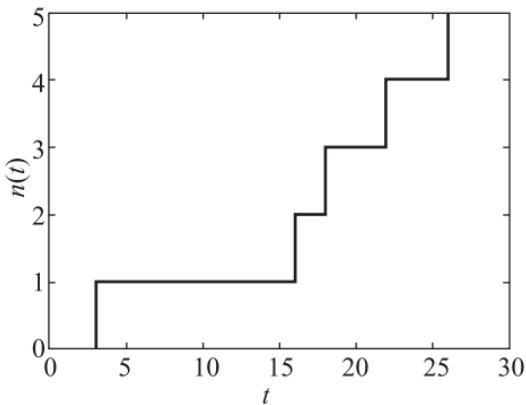


Рис. 1.5. Выборочная траектория пуассоновского процесса, полученная численным моделированием.

пропагатор неоднородного пуассоновского процесса задается уравнением

$$T(n, t | n', t') = \frac{[\mu(t, t')]^{n-n'}}{(n - n')!} e^{-\mu(t, t')}, \quad n \geq n', \quad (1.105)$$

и $T(n, t | n', t') = 0$ при $n < n'$. Здесь мы полагаем

$$\mu(t, t') \equiv \int_{t'}^t \gamma(s) ds. \quad (1.106)$$

Вероятность $P(n, t)$, соответственно, находится так:

$$P(n, t) = \frac{[\mu(t, 0)]^n}{n!} e^{-\mu(t, 0)}, \quad n \geq 0. \quad (1.107)$$

Посредством приведенных выше явных выражений мы сразу получаем обобщение соотношений (1.103) для неоднородного процесса Пуассона

$$E(N(t)) = \text{Var}(N(t)) = \mu(t, 0). \quad (1.108)$$

Установим также двухвременную корреляционную функцию, определенную как

$$\begin{aligned} E(N(t)N(s)) &= E(N(s)N(t)) = \\ &= \sum_{n_1, n_2} n_2 n_1 T(n_2, t | n_1, s) T(n_1, s | 0, 0), \end{aligned} \quad (1.109)$$

где во второй строчке мы допускаем без ограничения общности, что $t \geq s$. Дифференцируя по t и применяя основное уравнение, мы находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} E(N(t)N(s)) = \\
 &= \gamma(t) \sum_{n_1, n_2} [n_2 T(n_2 - 1, t | n_1, s) - n_2 T(n_2, t | n_1, s)] n_1 T(n_1, s | 0, 0) = \\
 &= \gamma(t) \sum_{n_1, n_2} n_1 T(n_2, t | n_1, s) T(n_1, s | 0, 0) = \\
 &= \gamma(t) \sum_{n_1} n_1 T(n_1, s | 0, 0) = \gamma(t) E(N(s)) = \\
 &= \gamma(t) \mu(s, 0). \tag{1.110}
 \end{aligned}$$

На втором шаге мы сделали сдвиг $n_2 \rightarrow n_2 + 1$ переменной суммирования n_2 в усилительном члене основного уравнения. Тогда с использованием начального условия $E(N(s)N(s)) = \mu(s, 0)^2 + \mu(s, 0)$ мы находим следующее выражение для двухвременной корреляционной функции неоднородного процесса Пуассона:

$$E(N(t)N(s)) = \mu(t, 0)\mu(s, 0) + \mu(s, 0). \tag{1.111}$$

1.4.4.3. Приращения пуассоновского процесса. Было бы интересным вывести свойства приращения $dN(t)$ неоднородного пуассоновского процесса для последних приложений. Для любого приращения времени $dt \geq 0$, соответствующее приращение пуассоновского процесса определяется

$$dN(t) \equiv N(t + dt) - N(t), \quad dt \geq 0. \tag{1.112}$$

Отметим, что мы не предполагали в этой точке бесконечную малость dt . Распределение вероятности приращения $dN(t)$ может быть найдено из соотношения

$$\mu(dN(t) = dn) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n + dn, t + dt | n, t) P(n, t). \tag{1.113}$$

Так как процесс однороден в пространстве, суммирование непосредственно по всем n может быть выполнено и, используя уравнение (1.105), мы находим

$$\mu(dN(t) = dn) = T(dn, t + dt | 0, t) = \frac{[\mu(t + dt, t)]^{dn}}{dn!} e^{-\mu(t+dt, t)}, \tag{1.114}$$

где $dn = 0, 1, 2, \dots$. Первый и второй моменты пуассоновского приращения, таким образом, задаются формулами

$$E(dN(t)) = \mu(t + dt, t), \quad (1.115)$$

$$E(dN(t)^2) = \mu(t + dt, t) + \mu(t + dt, t)^2. \quad (1.116)$$

Если теперь мы возьмем dt бесконечно малым, то увидим, что за вычетом членов порядка $\mathcal{O}(dt^2)$

$$E(dN(t)^2) = E(dN(t)) = \gamma(t)dt. \quad (1.117)$$

Последнее соотношение становится детерминированным условием в пределе $dt \rightarrow 0$. Действительно, согласно уравнению (1.114), вероятность события $dN(t) \geq 2$ есть член порядка dt^2 , и, соответственно,

$$\mu [dN(t)^2 = dN(t)] = 1 + \mathcal{O}(dt^2). \quad (1.118)$$

Таким образом, за вычетом членов порядка dt^2 , уравнение

$$dN(t)^2 = dN(t) \quad (1.119)$$

выполняется с вероятностью 1 и может быть рассмотрено как детерминированное соотношение в этом пределе.

Полученные результаты легко обобщаются на случай многомерного пуассоновского процесса $N(t) = (N_1(t), N_2(t), \dots, N_d(t))$. Мы берем статистически независимые компоненты $N_i(t)$, неоднородные пуассоновские процессы с соответствующими интенсивностями $\gamma_i(t)$. Соотношения

$$E(dN_i(t)) = \gamma_i(t)dt, \quad (1.120)$$

$$dN_i(t)dN_j(t) = \delta_{ij}dN_i(t) \quad (1.121)$$

истинны в пределе $dt \rightarrow 0$, где членами порядка $\mathcal{O}(dt^2)$ пренебрегли. Эти важные результаты будут использованы позже, когда мы сконструируем стохастическое дифференциальное уравнение, управляющее кусочно-детерминированным процессом.

1.4.5. Диффузионные процессы и уравнение Фоккера–Планка

До сих пор мы рассматривали два типа стохастических марковских процессов, чьи выборочные траектории являются либо гладкими решениями дифференциального уравнения, либо дискретными траекториями, прерывающимися мгновенными скачками. Можно показать, что реализации

марковского процесса непрерывны с вероятностью 1, если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-x'|>\varepsilon} T(x, t + \Delta t | x', t) dx = 0 \quad (1.122)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Это уравнение подразумевает, что вероятность перехода за время Δt , размер которого больше чем ε , уменьшается быстрее, чем Δt , при Δt , стремящимся к 0.

Конечно, детерминированные процессы должны удовлетворять этому условию непрерывности. Действительно, для детерминированного процесса мы имеем (θ обозначает ступенчатую функцию единичного скачка (функцию Хевисайда))

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-x'|>\varepsilon} T(x, t + \Delta t | x', t) dx = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-x'|>\varepsilon} \delta(x - \Phi_{\Delta t}(x')) dx = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \theta(|x' - \Phi_{\Delta t}(x')| - \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (1.123)$$

В случае скачкообразного процесса условие непрерывности, очевидно, нарушается, если интенсивность $W(x|x', t)$ допускает скачки размером больше некоторого $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-x'|>\varepsilon} T(x, t + \Delta t | x', t) dx = \int_{|x-x'|>\varepsilon} W(x|x', t) dx > 0. \quad (1.124)$$

Однако существует еще один класс стохастических марковских процессов. Диффузионные процессы, которые не являются детерминированными процессами, но также удовлетворяют условию непрерывности. Мы выведем дифференциальное уравнение Чепмена–Колмогорова для многомерного диффузионного процесса $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t))$ при рассмотрении определенного предела для скачкообразного процесса, который описывается основным уравнением (1.86). С этой целью пишем интенсивность перехода как

$$W(x|x', t) = f(x', y, t), \quad (1.125)$$

где $y = x - x'$ выступает в качестве функции f с начальной точкой x' , приращением скачка y и временем t . Подставляя (1.125) в основное уравнение (1.89), находим

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \int f(x - y, y, t) p(x - y, t) dy - p(x, t) \int f(x, y, t) dy. \quad (1.126)$$

Фундаментальное предположение состоит в том, что $f(x', y, t)$ изменяется гладко относительно x' , но это и функция от y , которая имеет резкий пик при $y \approx 0$. Дополнительно предполагается, что $p(x, t)$ изменяется медленно относительно x на масштабах порядка ширины f . Это дает возможность разложить усиливший член $f(x - y, y, t)p(x - y, t)$ до второго порядка по y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) &= \int f(x, y, t) p(x, t) dy - \int y_i \frac{\partial}{\partial x_i} [f(x, y, t) p(x, t)] dy + \\ &+ \int \frac{1}{2} y_i y_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [f(x, y, t) p(x, t)] dy - p(x, t) \int f(x, y, t) dy. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Индексы i, j отмечают различные компоненты многомерного процесса, по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Принимая полностью во внимание сильную зависимость $f(x', y, t)$ от y , мы не разложили y -зависимость от второго аргумента $f(x - y, y, t)$. Мы видим, что первый член с правой стороны уничтожает член, связанный с потерями. Таким образом, вводя первый и второй моменты скачкообразного распределения как

$$g_i(x, t) \equiv \int y_i f(x, y, t) dy, \quad D_{ij}(x, t) \equiv \int y_i y_j f(x, y, t) dy, \quad (1.128)$$

мы в результате приходим к дифференциальному уравнению Чепмена–Колмогорова для диффузионного процесса:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} [g_i(x, t) p(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [D_{ij}(x, t) p(x, t)]. \quad (1.129)$$

Это известное *уравнение Фоккера–Планка* для диффузионного процесса. Формально идентичное уравнение характерно для пропагатора процесса.

Снова, это уравнение допускает очевидную интерпретацию, в качестве уравнения непрерывности для плотности вероятности, если мы перепишем его как

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} J_i(x, t) = 0, \quad (1.130)$$

где мы ввели ток плотности вероятности

$$J_i(x, t) \equiv g_i(x, t)p(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} [D_{ij}(x, t)p(x, t)]. \quad (1.131)$$

Как мы уже знаем, первый член с правой стороны уравнения Фоккера–Планка описывает детерминированный дрейф, который соответствует дифференциальному уравнению с векторным полем g :

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(x(t), t). \quad (1.132)$$

Второй член с правой стороны уравнения Фоккера–Планка описывает диффузию стохастической переменной $X(t)$. Согласно определению матрицы $D(x, t)$, известная как диффузионная матрица, симметрична и положительно полуопределенна.

Самый известный пример диффузионного процесса получается при рассмотрении одномерного диффузионного процесса, когда дрейф равен нулю, $g(x, t) \equiv 0$, а $D(x, t) \equiv 1$. Это приводит к гауссовому пропагатору

$$T(x, t|x', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t')}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2(t-t')}\right). \quad (1.133)$$

Этот процесс однороден как в пространстве, так и во времени. Он часто характеризуется как процесс *броуновского движения*. Если мы, кроме того, возьмем начальную плотность в виде

$$p(x, t=0) = \delta(x), \quad (1.134)$$

то процесс $X(t)$ становится известным *винеровским процессом* $W(t)$.

Другой важный пример диффузионного процесса получается при добавлении к процессу броуновского движения с диффузионной константой D детерминированного дрейфа, соответствующего дифференциальному уравнению $dx/dt = -kx$ с константой $k > 0$. Соответствующий пропагатор принимает вид

$$T(x, t|x', t') = \sqrt{\frac{k}{\pi D \left[1 - e^{-2k(t-t')}\right]}} \exp\left(-\frac{k(x - e^{-k(t-t')}x')^2}{D \left[1 - e^{-2k(t-t')}\right]}\right), \quad (1.135)$$

а стационарное распределение первого порядка задается как

$$p(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi D}} \exp\left(-\frac{kx^2}{D}\right). \quad (1.136)$$

Это определяет *процесс Орнштейна – Уленбека*. Его физический смысл обусловлен тем фактом, что с точностью до тривиальных линейных преобразований это, по существу, единственный процесс, который является стационарным, марковским и гауссовым. Это утверждение известно как теорема Дуба. Для гауссова процесса, по определению, совместные вероятностные распределения являются гауссовыми функциями. Единственный другой процесс с упомянутыми выше тремя свойствами есть так называемый полностью случайный процесс, для которого все совместные плотности вероятностей t -го порядка есть произведения гауссовых распределений первого порядка. Мы показываем на рис. 1.6 и 1.7 реализации винеровского процесса и процесса Орнштейна – Уленбека.

С помощью явного выражения (1.133) для вероятности условного перехода винеровского процесса мы можем вычислить все характерные величины. Например, мы находим для среднего и дисперсии винеровского процесса

$$E(W(t)) = \int w T(w, t|0, 0) dw = 0, \quad (1.137)$$

$$E(W(t)^2) = \int w^2 T(w, t|0, 0) dw = t. \quad (1.138)$$

Второе соотношение показывает хорошо известное линейное увеличение дисперсии со временем t . Двухвременная корреляционная функция винеровского процесса также весьма интересна. Она определяется как

$$\begin{aligned} E(W(t)W(s)) &= E(W(s)W(t)) = \\ &= \iint w_1 w_2 T(w_2, t|w_1, s) T(w_1, s|0, 0) dw_2 dw_1, \end{aligned} \quad (1.139)$$

где во втором уравнении предполагается, что $t \geq s$. Интегралы могут быть легко вычислены с помощью (1.133). В результате получаем соотношение

$$E(W(t)W(s)) = \min(t, s), \quad (1.140)$$

которое справедливо при $t \geq s$ и $t < s$.

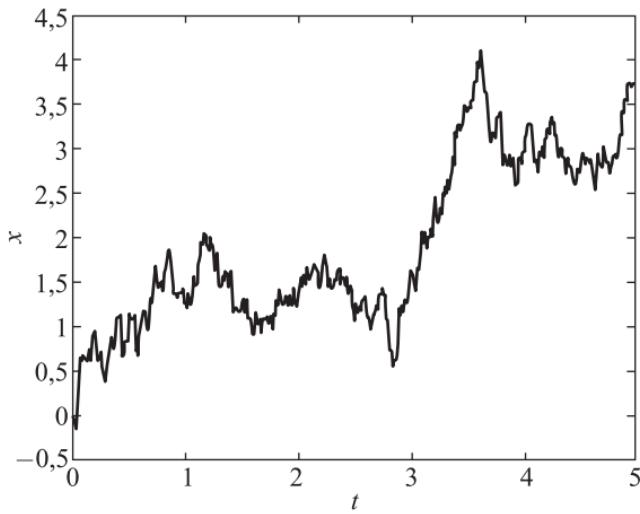


Рис. 1.6. Выборочная траектория винеровского процесса.

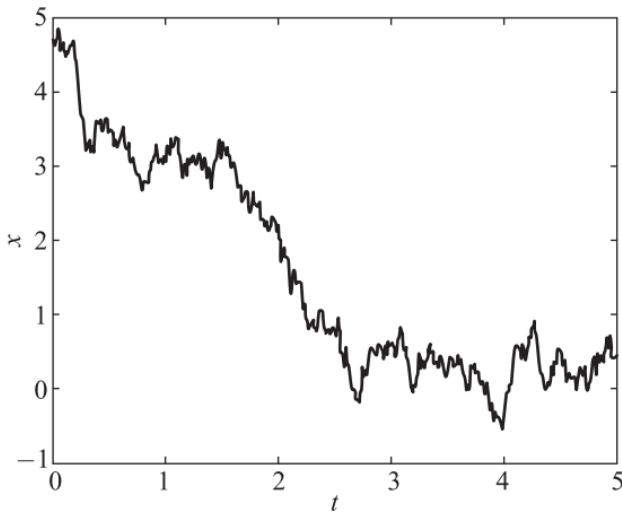


Рис. 1.7. Выборочная траектория процесса Орнштейна – Уленбека.

Используя эти результаты, мы также можем изучить свойства приращения $dW(t)$ винеровского процесса, которое определено для любого $dt \geqslant 0$:

$$dW(t) \equiv W(t + dt) - W(t). \quad (1.141)$$

Из уравнений (1.137) и (1.140) мы получаем

$$E[dW(t)] = 0, \quad (1.142)$$

$$E[dW(t)^2] = dt. \quad (1.143)$$

Для многомерного винеровского процесса со статистически независимыми компонентами $W_i(t)$ мы получаем важные формулы:

$$E[dW_i(t)] = 0, \quad (1.144)$$

$$E[dW_i(t)dW_j(t)] = \delta_{ij}dt, \quad (1.145)$$

$$E[(dW_i(t))^{2k}] = \mathcal{O}(dt^k), \quad (1.146)$$

$$E[(dW_i(t))^{2k+1}] = 0. \quad (1.147)$$

Последние два соотношения справедливы для всех положительных целых k и могут быть получены прямо, используя гауссов пропагатор для винеровского процесса.

1.5. Кусочно-детерминированные процессы

Теперь мы введем определенный тип стохастического процесса, который играет важную роль в этой книге, а именно так называемые кусочно-детерминированные процессы (КДП). По существу такие процессы получаются комбинированием детерминированной эволюции во времени со скачкообразным процессом.

Кусочно-детерминированные процессы имеют большое многообразие приложений в естественных науках и технологиях. Примеры и строгая математическая трактовка КДП могут быть найдены в книге Дэвиса (Davis, 1993). В теории открытых квантовых систем КДП представляют соответствующую математическую концепцию для описания эволюции состояния непрерывно управляемой системы (см. гл. 6). В этом разделе мы представим три различных математических формулировки кусочно-детерминированного процесса, а именно основное уравнение Лиувилля для его пропагатора, представление интегралов по траекториям и стохастическое дифференциальное уравнение для случайной величины.

1.5.1. Основное уравнение Лиувилля

Выборочные траектории КДП состоят из гладких детерминированных кусков, которые задаются решением некоторого дифференциального урав-

нения и прерываются мгновенными скачками. На основе наших предварительных результатов теперь легко записать соответствующее выражение для поведения пропагатора КДП при малых временах:

$$T(x, t + \Delta t | x', t) = (1 - \Gamma(x')\Delta t)\delta(x - x' - g(x')\Delta t) + \\ + W(x|x')\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (1.148)$$

δ -функция представляет поведение при малых временах, что является характеристикой детерминированного процесса, которая получается разложением потока детерминированного дифференциального уравнения (1.75),

$$\Phi_{\Delta t}(x') = x' + g(x')\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (1.149)$$

Сомножитель δ -функции включает суммарную интенсивность $\Gamma(x') = \int W(x|x')dx$ для скачков из состояния x' . Таким образом, множитель $(1 - \Gamma(x')\Delta t)$ представляет собой вероятность отсутствия скачков в интервале Δt .

Второй член с правой стороны уравнения (1.148) есть вероятность скачка из x' в x в пределах времени Δt . Отметим, что условия (1.58) и (1.59) удовлетворяются. Обращаем внимание, что для простоты мы рассматриваем здесь только однородные во времени процессы, так как обобщение на неоднородный случай очевидно.

С учетом приведенного выше поведения при малых временах мы можем сразу же написать дифференциальное уравнение Чепмена–Колмогорова для пропагатора:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t | x', t') = -\frac{\partial}{\partial x_i} [g_i(x)T(x, t | x', t')] + \\ + \int [W(x|x'')T(x'', t | x', t') - W(x''|x)T(x, t | x', t')] dx''. \quad (1.150)$$

Первый член справа описывает детерминированный сдвиг, в то время как вторая часть приводит к скачку $x' \rightarrow x$ с интенсивностью $W(x|x')$. Соответственно, (1.150) мы называем *основным уравнением Лиувилля*.

1.5.2. Распределение времени ожидания и выборочные траектории

Определим центральную величину для описания КДП, а именно распределение времени ожидания $F(\tau | x', t')$. Эта величина определяется как вероятность появления следующего скачка во временном интервале $[t', t' + \tau]$ при условии, что мы находимся в состоянии x' в момент времени t' .

Для того чтобы найти эту величину, мы учтем, что

$$F(\tau + d\tau|x', t') - F(\tau|x', t') \equiv dF(\tau|x', t') \quad (1.151)$$

есть истинная вероятность появления следующего скачка в интервале $[t' + \tau, t' + \tau + d\tau]$. Если мы разделим эту вероятность на вероятность $1 - F(\tau|x', t')$ отсутствия скачка в прежнем интервале от t' до $t' + \tau$, мы получим условную вероятность скачка в интервале $d\tau$. Последняя величина должна быть равной времени $d\tau$, умноженному на суммарную интенсивность $\Gamma(\Phi_\tau(x'))$ скачка из рассматриваемого нами состояния, обозначенного $\Phi_\tau(x')$ (так как если скачок возникает в момент времени $t' + \tau$, то детерминированная эволюция переносит нас из состояния x' в состояние $\Phi_\tau(x')$). Следовательно,

$$\frac{dF(\tau|x', t')}{1 - F(\tau|x', t')} = \Gamma(\Phi_\tau(x'))d\tau. \quad (1.152)$$

Это уравнение показывает, что на самом деле $F(\tau|x', t')$ не зависит от времени t' , в дальнейшем мы будем опускать этот аргумент (отметим, однако, что для КДП, который неоднороден во времени, например для неавтономных дифференциальных уравнений, зависимость от t' существует).

Полученное выше соотношение приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\tau} \ln[1 - F(\tau|x')] = -\Gamma(\Phi_\tau(x')), \quad (1.153)$$

решение которого легко находится:

$$F(\tau|x') = 1 - \exp \left[- \int_0^\tau \Gamma(\Phi_s(x')) ds \right]. \quad (1.154)$$

Здесь мы использовали начальное условие $F(\tau = 0|x') = 0$. Для заданного положения в состоянии x' выражение (1.154) будет кумулятивной функцией распределения случайного времени ожидания τ КДП.

Для чисто скачкового процесса ($g = 0$) мы просто имеем соотношение

$$F(\tau|x') = 1 - \exp[-\Gamma(x')\tau], \quad (1.155)$$

демонстрирующее, что при $\Gamma(x') > 0$ чистые скачковые процессы имеют экспоненциально распределенное время ожидания. Для $\Gamma(x') = 0$ мы имеем $F \equiv 0$, что означает неограниченность времени ожидания: процесс

никогда не покинет состояние x' , которое называется ловушечным состоянием процесса.

Для истинного КДП ($g \neq 0$) время ожидания в общем случае распределено не по экспоненциальному закону. Как показывает (1.154), это прямое следствие детерминированной временной эволюции между скачками, в результате которой суммарная интенсивность перехода может измениться нетривиальным способом. Так как $\Gamma(x')$ является неотрицательной функцией, то

$$I(\tau|x') = \int_0^\tau \Gamma(\Phi_s(x')) ds \quad (1.156)$$

увеличивается вместе с τ . Таким образом, по существу мы можем различать два случая:

1. Если функция $I(\tau|x')$ не ограничена, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau|x') = +\infty, \quad (1.157)$$

и, поэтому, мы имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} F(\tau|x') = 1. \quad (1.158)$$

Это означает, что скачки совершаются по истечении некоторого определенного времени. Можно получить реализацию случайного времени ожидания τ , например, воспользовавшись методом обратных функций. С этой целью берется случайная величина η , равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$. Случайное время ожидания может быть определено решением неявного уравнения

$$F(\tau|x') = \eta \quad (1.159)$$

для τ (см. рис. 1.8).

2. Если с одной стороны функция $I(\tau|x')$ ограничена, то предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau|x') = I(\infty|x') < \infty \quad (1.160)$$

существует. В этом случае мы находим

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} F(\tau|x') = 1 - \exp[-I(\infty|x')] \equiv 1 - q < 1. \quad (1.161)$$

Это означает, что с конечной вероятностью q , где $0 < q \leq 1$, скачки процесса прекращаются. Величина q называется *дефектом*. Формально эта ситуация может иметь дело с определенным состоянием

пространства случайного времени ожидания $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Тогда q — вероятность события $\tau = \infty$. Снова реализация τ может быть получена с помощью метода обратных функций (см. рис. 1.8). Имея выбранную равномерно распределенную случайную величину $\eta \in [0, 1]$, сначала получаем либо $\eta \geq 1 - q$, либо $\eta < 1 - q$. В первом случае полагаем, что $\tau = \infty$, во втором — τ определяется уравнением (1.159).

Мы только что описали, как определить реализацию случайных временных интервалов τ между скачками КДП. Приведенная выше процедура позволяет нам сконструировать простой алгоритм для генерации выборочной траектории $x(t)$ КДП:

1. Допустим, что в некоторый момент времени t_0 реализация достигает состояния x_0 посредством предыдущего скачка. В случае, когда t_0 — начальное время, x_0 должен браться из начальной плотности вероятности $p(x_0, t_0)$. В любом случае мы имеем

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.162)$$

2. Выберем случайное время ожидания τ из функции распределения $F(\tau|x_0)$ с использованием процедуры, описанной выше. Во временном интервале от t_0 до $t_0 + \tau$ реализация $x(t)$ следует решению детерминированного уравнения, которое есть

$$x(t_0 + s) = \Phi_s(x_0) \quad (1.163)$$

при $0 \leq s \leq \tau$.

3. Во время $t_0 + \tau$ выборочная траектория выполняет мгновенный скачок в некоторое состояние z , которое является случайной величиной, берущейся из плотности вероятности

$$Q(z|x(t_0 + \tau)) = \frac{W(z|x(t_0 + \tau))}{\Gamma(x(t_0 + \tau))}. \quad (1.164)$$

Заметим, что $Q(z|x)$ — плотность лишь условной вероятности для скачка в состояние z , задавая которое, мы уже знаем, что скачок будет сделан из состояния x . Отметим, что в дальнейшем $Q(z|x)$ корректно нормируется как

$$\int Q(z|x) dz = 1. \quad (1.165)$$

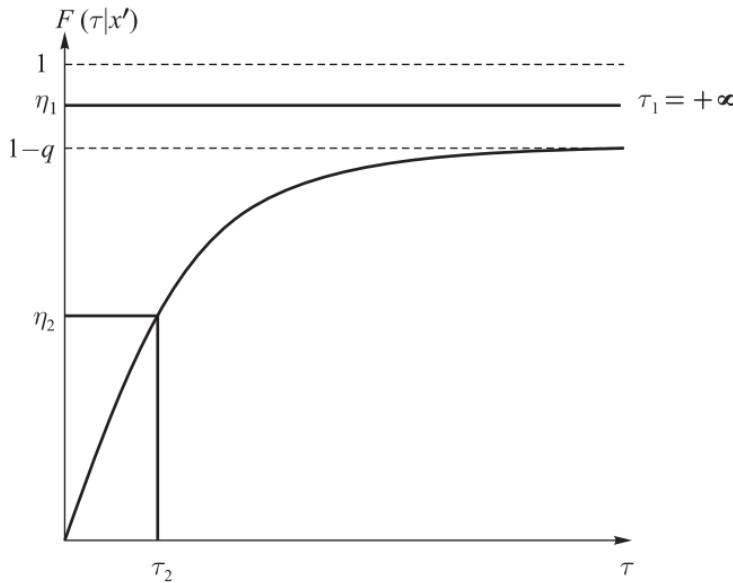


Рис. 1.8. Рисунок показывает обычное распределение времени ожидания $F(\tau|x')$ с дефектом q и иллюстрирует, как реализация τ получается методом обратных функций. η_1 и η_2 являются реализациями равномерно распределенной случайной величины $\eta \in [0, 1]$. При η_1 соответствующая реализация времени ожидания не ограничена, $\tau_1 = +\infty$, в то время как при η_2 реализация времени ожидания равна τ_2 .

В итоге мы получили

$$x(t_0 + \tau) = z. \quad (1.166)$$

Далее продолжаем снова с первого шага, приведенного выше.

Этот алгоритм может быть легко переведен в численную компьютерную программу. Используя такие программы, мы можем генерировать выборочные траектории процесса и затем оценивать все интересующие величины как выборочные средние. В этом сущность стохастических методов моделирования, которые будут проиллюстрированы с помощью ряда примеров в главах 6, 7 и 8.

1.5.3. Представление интегралов по траекториям для КДП

Приведенный выше алгоритм генерации выборочных траекторий КДП дает структуру возможных путей процесса и вероятность их возникнове-

ния. На математическом языке это означает, что пропагатор $T(x, t|x', t')$ КДП может быть представлен на языке этих выборочных траекторий, которые начинаются в x' в момент времени t' и заканчиваются в x в момент времени t . Каждая из этих траекторий входит с определенной вероятностью, а, суммируя по всем траекториям с соответствующими весовыми коэффициентами, мы получаем пропагатор. Такое представление КДП в виде интегралов по траекториям будет получено в настоящем разделе.

До сих пор мы описывали КДП дифференциальным уравнением Чепмена–Колмогорова (1.150), используя асимптотики на малых временах. Однако существует эквивалентное интегральное представление для пропагатора КДП, которое дается выражением

$$T(x, t|x', t') = T^{(0)}(x, t|x', t') + \\ + \int_{t'}^t \int \int T^{(0)}(x, t|y, s) W(y|z) T(z, s|x', t') dz dy ds. \quad (1.167)$$

Здесь мы ввели величину

$$T^{(0)}(x, t|x', t') = [1 - F(t - t'|x')] \delta(x - \Phi_{t-t'}(x')), \quad (1.168)$$

которая является плотностью условной вероятности для процесса достижения состояния x в момент времени t без какого-либо скачка, при условии, что система была в состоянии x' в момент времени t' . Легко видеть, что решения (1.167) удовлетворяют (1.58) и (1.59). Мы также можем проверить явными расчетами, что решения (1.167) удовлетворяют дифференциальному уравнению Чепмена–Колмогорова (1.150).

Мы не будем углубляться в детали этих расчетов (1.167), дав простую интерпретацию (см. рис. 1.9). Пропагатор записан как сумма двух членов, соответствующих двум вероятностям процесса движения из (x', t') в (x, t) . Первая вероятность — это отсутствие скачка в промежутке времени от t' до t . Соответствующая плотность условной вероятности задается величиной $T^{(0)}(x, t|x', t')$, введенной выше. Вторая вероятность — существование по крайней мере одного скачка. Соответствующий вклад вносит второй член с правой стороны уравнения (1.167). Переменной s обозначен момент последнего скачка³. Тогда $T(z, s|x', t')$ является вероятностью оказаться в некотором состоянии z непосредственно перед скачком, а $W(y|z)ds$ — вероятность скачка из состояния z в y за ds . Умножая на $T^{(0)}(x, t|y, s)$, мы

³Мы исключаем возможность того, что в некоторой точке временного интервала может накопиться бесконечное число скачков.

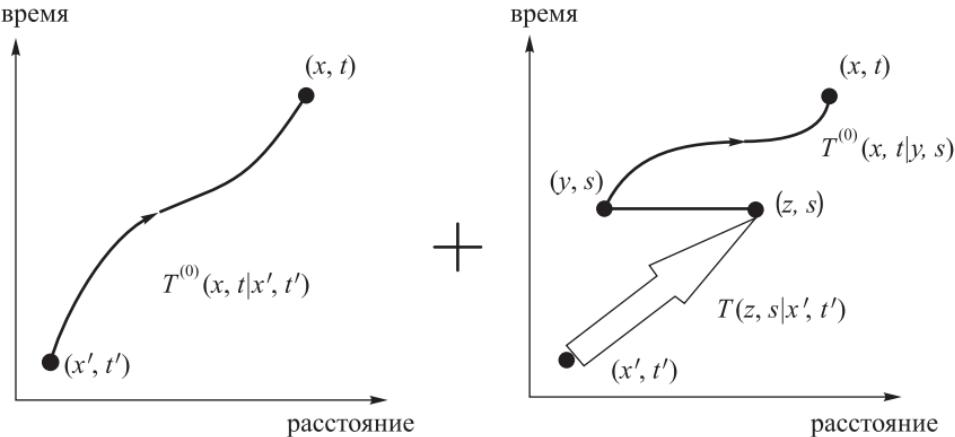


Рис. 1.9. Графическое представление прямого уравнения Колмогорова (1.167).

получаем вероятность процесса достичь состояния z за время s , затем перепрыгнуть в состояние y и достичь состояния x за оставшийся интервал времени без каких-либо дальнейших скачков. Общий вклад в $T(x, t|x', t')$ находится интегрированием по всем возможным скачковым временам s и по всем промежуточным состояниям z и y .

Уравнение (1.167) есть *прямое уравнение Колмогорова*. Это интегральное представление для пропагатора КДП, которое прямо приводит к представлению интегралов по траекториям. Наша интерпретация, представленная выше, делает естественным разложение пропагатора процесса на отдельные члены $T^{(N)}(x, t|x', t')$, каждый из которых представляет вклад от траекторий с количеством скачков N :

$$T(x, t|x', t') = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N T^{(N)}(x, t|x', t'). \quad (1.169)$$

Первый член этой суммы уже определен выше. Мы ввели формальное разложение по параметру ε , который впоследствии установится равным 1. Мы также вводим этот параметр в интегральное уравнение, формально считая интенсивности $W(y|z)$ величинами порядка ε . В этом случае разложение (1.169) становится разложением теории возмущений по степеням интенсивностей перехода.

Если мы подставим (1.169) в (1.167) и сгруппируем члены одинаковых порядков в ε , мы найдем следующее рекуррентное соотношение, которое

выполняется для $N \geq 1$:

$$T^{(N)}(x, t|x', t') = \int_{t'}^t \int \int T^{(0)}(x, t|y, s) W(y|z) T^{(N-1)}(z, s|x', t') dz dy ds. \quad (1.170)$$

При итерировании этого уравнения получается $T^{(N)}(x, t|x', t')$ для всех N . Подставляя результат в (1.169) и устанавливая $\varepsilon = 1$, мы получаем интегральное представление пропагатора по траекториям

$$\begin{aligned} T(x, t|x', t') &= T^{(0)}(x, t|x', t') + \\ &+ \sum_{N=1}^{\infty} \int_{t'}^t ds_N \int_{t'}^{s_N} ds_{N-1} \dots \int_{t'}^{s_2} ds_1 \int dy_N dz_N \int dy_{N-1} dz_{N-1} \dots \int dy_1 dz_1 \times \\ &\times T^{(0)}(x, t|y_N, s_N) W(y_N|z_N) T^{(0)}(z_N, s_N|y_{N-1}, s_{N-1}) W(y_{N-1}|z_{N-1}) \times \\ &\times T^{(0)}(z_{N-1}, s_{N-1}|y_{N-2}, s_{N-2}) \dots W(y_1|z_1) T^{(0)}(z_1, s_1|x', t'). \end{aligned} \quad (1.171)$$

Мы видим, что сумма по всем траекториям включает сумму по всем номерам N скачков, произведение интегралов по всем промежуточным временам перескоков $s_1 < s_2 < \dots < s_N$ и произведение по всем промежуточным состояниям $y_1, z_1, y_2, z_2, \dots, y_N, z_N$. Здесь z_ν — состояние перед ν -м скачком, тогда как y_ν — состояние сразу после ν -го скачка. В итоге, подынтегральное выражение в (1.171) есть соответствующая вероятность для траектории, заданной номером N , а также s_ν, y_ν и z_ν .

1.5.4. Стохастический расчет для КДП

В предыдущих разделах мы сформулировали динамику стохастического марковского процесса $X(t)$ с помощью соответствующих уравнений эволюции во времени для условного пропагатора процесса. Дополнительно можно также описать процесс на языке уравнения эволюции для его случайных переменных. Конечно, такое уравнение, в общем, не является детерминированным дифференциальным уравнением, но должно быть уравнением движения, включающем случайные коэффициенты, то есть стохастическим дифференциальным уравнением. Такой путь описания стохастического процесса хорошо известен для случая диффузионных процессов. Сначала в качестве заготовки для кусочно-детерминированных процессов мы дадим краткий обзор.

1.5.4.1. Ито-вычисления для диффузионных процессов. Рассмотрим многомерный диффузионный процесс $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t))$, который определяется уравнением Фоккера–Планка (1.129). Беря произвольную дифференцируемую скалярную функцию f , находим для математического ожидания $f(X(t))$, используя уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[f(X(t))] &= \int f(x) \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) dx = \\ &= E \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} g_i(X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}(X(t)) \right]. \end{aligned} \quad (1.172)$$

С использованием приращения $dX(t) = X(t + dt) - X(t)$ процесса мы можем получить

$$\begin{aligned} E[f(X(t) + dX(t)) - f(X(t))] &= \\ &= E \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} g_i(X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}(X(t)) \right] dt + \mathcal{O}(dt^2). \end{aligned} \quad (1.173)$$

Теперь в качестве f возьмем одну из координатных функций $f(x) = x_i$. Это дает

$$E[dX_i(t)] = E[g_i(X(t))]dt + \mathcal{O}(dt^2). \quad (1.174)$$

В главном порядке математическое ожидание приращения $dX_i(t)$ пропорционально dt , где коэффициент задается значением математического ожидания $g_i(X(t))$, описывающего детерминированный дрейф. Затем в качестве $f(x)$ мы берем $f(x) = x_i x_j$ для фиксированных пар индексов (i, j) . В результате получим

$$E[dX_i(t)dX_j(t)] = E[D_{ij}(X(t))]dt + \mathcal{O}(dt^2). \quad (1.175)$$

Для малых dt ковариационная матрица приращений $dX_i(t)$ задается временем dt и матожиданием диффузионной матрицы.

Обращаем внимание, что описание процессов, выраженное уравнениями (1.174) и (1.175), может быть получено посредством соответствующих линейных комбинаций винеровских приращений $dW_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, d$. Эти приращения предполагаются взаимно независимыми и независимыми от $X(t)$. Если мы положим

$$d\tilde{X}_i(t) \equiv g_i(X(t))dt + B_{ij}(X(t))dW_j(t) \quad (1.176)$$

с соответствующей матрицей $B_{ij}(x)$, то с помощью (1.144) и (1.145) мы получим, что

$$E \left[d\tilde{X}_i(t) \right] = E[g_i(X(t))]dt \quad (1.177)$$

и

$$E \left[d\tilde{X}_i(t)d\tilde{X}_j(t) \right] = E[D_{ij}(X(t))]dt + \mathcal{O}(dt^2). \quad (1.178)$$

Введенная матрица $B_{ij}(x)$ связана с диффузионной матрицей, $D_{ij}(x)$,

$$B_{ik}(x)B_{jk}(x) = D_{ij}(x). \quad (1.179)$$

Это выражение показывает, что среднее значение и ковариация элементов $dX_i(t)$ и $d\tilde{X}_i(t)$ совпадают в первом порядке dt . Поэтому мы видим, что на малых временных масштабах приращения $dX_i(t)$ диффузионного процесса ведут себя как приращения $d\tilde{X}_i(t)$, которые получены добавлением соответствующих линейных комбинаций винеровских приращений для детерминированного дрейфа. Можно ожидать, что приращения $dX_i(t)$ удовлетворяют *стохастическому дифференциальному уравнению* вида

$$dX_i(t) = g_i(X(t))dt + B_{ij}(X(t))dW_j(t). \quad (1.180)$$

Можно показать, что диффузионный процесс $X(t)$, который первоначально был определен на языке уравнения Фоккера–Планка его условного пропагатора, на самом деле эквивалентен стохастическому дифференциальному уравнению (1.180). Строгая математическая трактовка стохастического дифференциального уравнения требует введения понятия стохастического интегрирования, которое облегчает проведение стохастических расчетов для диффузионных процессов, понятия, известного как *Ито-вычисление*. Уравнение (1.180) интерпретируется как стохастическое дифференциальное уравнение в Ито-представлении. Мы не даем здесь глубокого обсуждения по стохастическим вычислениям, что является темой нескольких отличных книг (Gardiner, 1985; Doob, 1953; Kloeden and Platen, 1992; Arnold, 1974).

Тем не менее покажем, что приращения $d\tilde{X}_i(t)$, определенные уравнением (1.176), корректно воспроизводятся в заданных границах, все математические ожидания вида (1.173) определяются через уравнение Фоккера–Планка. Чтобы показать это, мы должны определить математическое ожидание

$$\begin{aligned} E \left[f(X(t) + d\tilde{X}(t)) - f(X(t)) \right] &= \\ &= E[f(X_i(t) + g_i(X(t))dt + B_{ij}(X(t))dW_j(t)) - f(X(t))]. \end{aligned} \quad (1.181)$$

Используя уравнения (1.144)–(1.147), разложения f вблизи $X(t)$ и пренебрегая членами порядка dt^2 , мы получим

$$\begin{aligned} E \left[f(X(t) + d\tilde{X}(t)) - f(X(t)) \right] &= \\ = E \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} (g_i dt + B_{ij} dW_j) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} B_{ik} B_{jl} dW_k dW_l \right] + \mathcal{O}(dt^2) &= \\ = E \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} g_i(X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}(X(t)) \right] dt + \mathcal{O}(dt^2). & \quad (1.182) \end{aligned}$$

Видно, что данное выражение в первом порядке по dt совпадает с математическим ожиданием (1.173), определяемым уравнением Фоккера–Планка, что и доказывает наше утверждение.

Подобные вычисления приводят к следующей формуле для приращения произвольной функции $\phi(X(t))$ стохастической переменной, известной как формула Ито,

$$d\phi(X(t)) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_i} g_i(X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}(X(t)) \right] dt + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} B_{ij}(X(t)) dW_j(t). \quad (1.183)$$

Заметим, что это выражение для приращения ϕ может быть получено прямо разложением разности $d\phi(X(t)) = \phi(X(t) + dX(t)) - \phi(X(t))$ по степеням $dX(t)$ и применением следующих правил Ито-вычислений:

$$dW_i(t)dW_j(t) = \delta_{ij} dt, \quad (1.184)$$

$$dW_i(t)dt = 0, \quad (1.185)$$

$$[dW_i(t)]^k = 0 \quad \text{при } k > 2. \quad (1.186)$$

В результате эти правила могут быть сформулированы следующим образом: (i) Выбираются все члены порядка $dt^{1/2}$ и dt , в силу чего $dW_i(t)$ считается величиной порядка $dt^{1/2}$, и (ii) все члены порядка $dt^{3/2}$ и выше отбрасываются.

1.5.4.2. Ито-исчисление для КДП. Теперь разработаем аналогичное исчисление для кусочно-детерминированных процессов. Для этого мы сначала рассмотрим действительнозначный КДП $X(t)$ и снова определим приращения $dX(t) \equiv X(t+dt) - X(t)$, $dt \geq 0$. Наша цель — сконструировать, по

аналогии с процедурами из предшествующего подраздела, стохастическое дифференциальное уравнение для КДП, которое имеет следующую форму:

$$dX(t) = g(X(t))dt + dJ(X(t)). \quad (1.187)$$

Очевидно, что первый член описывает детерминированный дрейф КДП. Второй член $dJ(X(t))$ представляет часть процесса, связанную со скачком. Интуитивно ясно, что второй член не мал в обычном понимании, когда dt стремится к нулю, так как $X(t)$ претерпевает мгновенные скачки конечных размеров. Этот факт, как мы скоро увидим, делает стохастическое исчисление для КДП очень отличным от обычного исчисления.

Наша задача — найти статистические свойства скачковой части $dJ(X(t))$. Предположим, что состояние $X(t)$ задано. Согласно основному уравнению Лиувилля (1.150) система может выполнить мгновенный скачок из данного заданного состояния в некоторое другое состояние с интенсивностью $W(z|X(t))$. Если за интервал времени dt скачок не происходит, то обязательно $dJ(x) = 0$, что, конечно, означает наличие только детерминированного дрейфа.

Рассмотрим теперь величину $dN_z(t)dz$, которая определяется как число скачков из заданного состояния $X(t)$ в элемент объема dz вблизи z за интервал dt . Для малых dt среднее значение случайной величины $dN_z(t)dz$ должно быть равно произведению dt на интенсивность $W(z|X(t))dz$ при перепрыгивании в элемент dz , то есть

$$E[dN_z(t)] = W(z|X(t))dt. \quad (1.188)$$

Это уравнение показывает, что математическое ожидание с левой стороны есть условное ожидание, называемое условным в заданном состоянии $X(t)$.

Если случайная величина $dN_z(t)dz$ принимает значение равное 1, мы получаем новое состояние $X(t+dt) = z$, то есть приращение $dX(t)$ равно $z - X(t)$. Таким образом, мы пришли к следующей записи члена для стохастического скачка:

$$dJ(X(t)) = \int (z - X(t))dN_z(t)dz, \quad (1.189)$$

такой, что стохастическое дифференциальное уравнение для КДП может быть переписано как

$$dX(t) = g(X(t))dt + \int (z - X(t))dN_z(t)dz. \quad (1.190)$$

Мы еще не полностью определили статистику случайных величин $dN_z(t)$, в (1.188), определены только лишь их математические ожидания. Так как КДП влечет за собой отсчеты скачков, которые увеличиваются линейно с dt , ожидается, что для малых dt может появиться не более одного скачка, то есть мы ожидаем выполнения соотношения

$$dN_{z'}(t) \cdot dN_z(t) = \delta(z' - z)dN_z(t). \quad (1.191)$$

Согласно уравнению (1.191) случайные величины $dN_z(t)$ образуют *поле* независимых пуассоновских приращений, что может быть увидено следующим образом. Мы полагаем, что, начиная с заданного состояния $X(t)$, процесс может выполнять дискретный набор переходов

$$X(t) \rightarrow z_\alpha = z_\alpha(X(t)), \quad (1.192)$$

помеченный индексом α . Интенсивность отдельного перехода α будет обозначаться как $\gamma_\alpha(X(t))$. Естественно, эта интенсивность, а также конечное состояние $z_\alpha(X(t))$ перехода может зависеть от начального состояния $X(t)$. Тогда мы имеем

$$W(z|X(t)) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha(X(t)) \delta[z - z_\alpha(X(t))]. \quad (1.193)$$

Дальше разбиваем пространство состояний на непересекающиеся малые элементы Δz_α таким образом, что каждая точка z_α содержится точно в одном Δz_α . Случайные величины

$$dN_\alpha(t) \equiv \int_{\Delta z_\alpha} dN_z(t) dz \quad (1.194)$$

обозначают число скачков в элемент Δz_α за временной интервал dt . В силу уравнений (1.188) и (1.193) их математические ожидания задаются как

$$E(dN_\alpha(t)) = \gamma_\alpha(X(t))dt. \quad (1.195)$$

Используя уравнение (1.191), мы также находим, что

$$dN_\alpha(t)dN_\beta(t) = \delta_{\alpha\beta}dN_\alpha(t). \quad (1.196)$$

Это показывает, что $dN_\alpha(t)$ при малых dt ведут себя как независимые пуассоновские приращения (в сравнении с уравнениями (1.120) и (1.121)).

С учетом этих определений стохастическое дифференциальное уравнение (1.190) сводится к очень прозрачной форме

$$dX(t) = g(X(t))dt + \sum_{\alpha} \{z_{\alpha}(X(t)) - X(t)\}dN_{\alpha}(t). \quad (1.197)$$

Это уравнение имеет очевидную интерпретацию: ввиду (1.196) либо все $dN_{\alpha}(t)$ равны нулю, либо $dN_{\alpha}(t) = 1$ ровно для одного индекса α . В первом случае $X(t)$ соответствует детерминированному дрейфу, во втором случае $X(t)$ выполняет отдельный скачок, соответствующий индексу α .

Уравнения (1.190) и (1.197) представляют желаемую формулировку КДП на языке стохастического дифференциального уравнения. Убедимся, что они приводят к корректному динамическому поведению, которое диктуется основным уравнением Лиувилля (1.150). Из последнего для математического ожидания приращения любой функции f мы находим

$$\begin{aligned} E[f(X(t) + dX(t)) - f(X(t))] &= \\ &= E \left[\frac{\partial f}{\partial x} g(X(t)) + \int \{f(z) - f(X(t))\} W(z|X(t)) dz \right] dt + \mathcal{O}(dt^2). \end{aligned} \quad (1.198)$$

Наша цель — показать, что то же самое уравнение получается, если заменяется правая часть уравнения (1.190) для $dX(t)$ и используются свойства (1.188) и (1.191). Для этого мы сначала определим степени скачка $dJ(t)$ в стохастическом дифференциальном уравнении. Ссылаясь на (1.191) легко проверить, что для всех $k = 1, 2, 3, \dots$ мы имеем

$$[dJ(X(t))]^k = \int \{z - X(t)\}^k dN_z(t) dz. \quad (1.199)$$

Это означает, что после усреднения все степени $dJ(X(t))$ одного и того же порядка по dt . Рассмотрим теперь математическое ожидание

$$E \equiv E [f(X(t) + g(X(t))dt + dJ(X(t))) - f(X(t))], \quad (1.200)$$

которое должно быть равным правой части уравнения (1.198) вплоть до членов порядка dt^2 . Это может быть достигнуто в первом приближении по дрейфовому члену, сохраняя скачковый член для всех порядков, что приводит к

$$E = E \left[\frac{\partial f}{\partial x} (X + dJ) g dt + f(X + dJ) - f(X) \right] + \mathcal{O}(dt^2). \quad (1.201)$$

В первом члене производная f определяется в точке $X + dJ$. Однако, так как этот член уже порядка dt , мы можем оценить его в точке X , в связи с этим создается ошибка только порядка dt^2 , благодаря приведенному выше свойству dJ . Таким образом, мы можем записать

$$E = E \left[\frac{\partial f}{\partial x} g dt + f(X + dJ) - f(X) \right] + \mathcal{O}(dt^2). \quad (1.202)$$

Второй член должен быть рассмотрен, однако, полностью отличным способом, так как при усреднении все степени dJ имеют один и тот же порядок dt , то есть мы должны точно оценить разницу $f(X + dJ) - f(X)$. Очевидно, благодаря этому факту данный процесс выполняет мгновенные скачки конечных размеров, такие, что любая аппроксимация этой разности конечным разложением Тейлора несостоятельна. Тогда пишем, через $f^{(k)}$ обозначая k -ю производную функции f

$$\begin{aligned} E[f(X + dJ) - f(X)] &= E \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(X) [dJ]^k \right] = \\ &= E \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(X) \int \{z - X\}^k dN_z(t) dz \right] = \\ &= E \left[\int \{f(z) - f(X)\} dN_z(t) dz \right] = \\ &= E \left[\int \{f(z) - f(X)\} W(z|X) dz \right] dt. \end{aligned} \quad (1.203)$$

Таким образом, мы имеем выражение

$$E = E \left[\frac{\partial f}{\partial x} g + \int \{f(z) - f(X)\} W(z|X) dz \right] dt + \mathcal{O}(dt^2), \quad (1.204)$$

которое совпадает с правой частью (1.198) и доказывает, что стохастическое дифференциальное уравнение (1.190) корректно воспроизводит математические ожидания приращений всех функций f .

В заключение мы отметим, что стохастические дифференциальные уравнения, подобные (1.190) или (1.197), также остаются в силе в случае многомерного процесса. Явно мы можем записать

$$dX_i(t) = g_i(X(t))dt + \int \{z_i - X_i(t)\} dN_z(t) dz \quad (1.205)$$

для стохастического дифференциального уравнения многомерного КДП с компонентами $X_i(t)$.

1.6. Процессы Леви

В предыдущих разделах наше исследование марковских процессов было основано, главным образом, на дифференциальном уравнении Чепмена–Колмогорова. Альтернативный подход — прямой поиск решений соответствующего интегрального уравнения. Такая стратегия действительно возможна, если заданы определенные свойства симметрии и инвариантности. Пример — требование однородности процесса во времени и пространстве, которое ведет к важному классу процессов Леви (Itô, 1993; Bertoin, 1996). Как мы обсудим в этом разделе, можно дать полную характеристику стохастических процессов этого класса. Процессы Леви обладают большим числом интересных приложений (Klafter, Shlesinger, Zumofen, 1996). В качестве примера в главе 8 показывается, что определенное стабильное распределение Леви появляется в стохастическом представлении динамики открытых квантовых систем.

1.6.1. Трансляционная инвариантность процессов

Процесс Леви определяется стохастическим процессом $X(t)$, $t \geq 0$, который однороден в пространстве и времени. Для простоты мы предполагаем, что процесс действительно назначенный (обобщение на d измерений выводится непосредственно) и что процесс начинается в момент времени $t_0 = 0$ из точки $X(0) = 0$. Пропагатор такого процесса зависит только от разниц для его временного и пространственного аргументов

$$T(x, t|x', t') = T_{t-t'}(x - x'), \quad (1.206)$$

что означает, что пропагатор инвариантен относительно пространственно-временных трансляций.

Альтернативно, трансляционная инвариантность может быть сформулирована следующим образом. Мы берем любые упорядоченные наборы времен

$$t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m. \quad (1.207)$$

Пространственная однородность подразумевает, что m случайных переменных

$$X(t_\nu) - X(t_{\nu-1}), \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (1.208)$$

взаимно независимы. Такой процесс также называется *аддитивным процессом* или процессом с независимыми приращениями. Однородность во времени означает, что случайная величина $X(t+s) - X(t'+s)$ при $t > t'$

подчиняется тому же распределению, что и случайная величина $X(t) - X(t')$ при всех $s > 0$. Такие процессы называются процессами со стационарными приращениями. Процесс Леви, таким образом, — это процесс с независимыми и стационарными приращениями.

Используя трансляционную инвариантность, запишем уравнение Чепмена–Колмогорова как

$$T_{t+t'}(y) = \int T_t(y - y') T_{t'}(y') dy'. \quad (1.209)$$

Это означает, что пропагатор за время $t + t'$ равен свертке пропагаторов за времена t и t' . Удобно рассмотреть характеристическую функцию

$$G(k, t) \equiv E \left[e^{ikX(t)} \right] = \int e^{iky} T_t(y) dy, \quad (1.210)$$

для которой уравнение Чепмена–Колмогорова ведет к

$$G(k, t_1 + t_2) = G(k, t_1)G(k, t_2). \quad (1.211)$$

Это уравнение показывает, что логарифм $\ln G(k, t)$ характеристической функции (производящей функции кумулянтов) линеен по t , и поэтому мы можем записать характеристическую функцию как

$$G(k, t) = \exp [t\Psi(k)]. \quad (1.212)$$

Величина $\Psi(k)$ называется *характеристическим показателем* процесса.

Характеристический показатель $\Psi(k)$ прямо связан с генератором \mathcal{A} процесса Леви. Мы записываем пропагатор как

$$\begin{aligned} T_t(y) &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-iky} G(k, t) = \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-iky} (1 + t\Psi(k)) + \mathcal{O}(t^2) = \\ &= \delta(y) + t \int \frac{dk}{2\pi} e^{-iky} \Psi(k) + \mathcal{O}(t^2). \end{aligned} \quad (1.213)$$

Отсюда мы получаем определение генератора

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\rho(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int [T_t(y) - \delta(y)] \rho(x - y) dy = \\ &= \int \left[\int \frac{dk}{2\pi} e^{-iky} \Psi(k) \right] \rho(x - y) dy \equiv \\ &\equiv \int \mathcal{A}(y) \rho(x - y) dy. \end{aligned} \quad (1.214)$$

Таким образом, мы получаем, что интегральное ядро $\mathcal{A}(y)$ генератора равно Фурье-преобразованию характеристического показателя $\Psi(k)$.

1.6.2. Формула Леви – Хинчина

Согласно уравнению (1.211) характеристическая функция $G(k, t)$ есть m -я степень $G(k, t/m)$. Это подразумевает, что пропагатор за время t равен m -й степени свертки пропагатора за время t/m , то есть

$$T_t = T_{t/m} * T_{t/m} * \dots * T_{t/m}, \quad (1.215)$$

где $*$ обозначает свертку, а правая сторона содержит m множителей. Распределение с таким свойством называется неограниченно делящимся. Это можно увидеть непосредственно следующим образом. Положим $t_\nu = \nu t/m$ при $\nu = 0, 1, 2, \dots, m$. В силу тождества

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^m (X(t_\nu) - X(t_{\nu-1})) \quad (1.216)$$

случайная величина $X(t)$ представлена как сумма m независимо распределенных случайных чисел. Это точное определение для неограниченно делимой случайной величины $X(t)$ (и ее соответствующего распределения T_t).

Можно дать полное описание всех возможных процессов Леви с использованием свойства неограниченной делимости их пропагаторов. Это достигается фундаментальной теоремой Леви и Хинчина. Примененная к нашему случаю, данная теорема утверждает, что наиболее общая форма характеристического показателя процесса Леви задается следующим уравнением:

$$\Psi(k) = igk - \frac{D}{2}k^2 + \int [e^{iky} - 1 - iky\theta(h - |y|)] W(y) dy. \quad (1.217)$$

Здесь g и D – действительные константы, где $D \geq 0$. $\theta(x)$ – единичная ступенчатая функция, такая, что

$$\theta(h - |y|) = \begin{cases} 1, & |y| < h, \\ 0, & |y| \geq h. \end{cases} \quad (1.218)$$

Эта функция отсекает последние члены интеграла по y на некоторой длине масштаба h , значение которого будет обсуждаться ниже. В результате возникает $W(y)$ – некоторая неотрицательная мера, мера Леви, определенная

на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ со свойствами

$$\int_{|y| < h} y^2 W(y) dy < \infty, \quad (1.219)$$

$$\int_{|y| \geq h} W(y) dy < \infty. \quad (1.220)$$

Согласно теореме Леви–Хинчина любой трансляционно-инвариантный процесс $X(t)$ имеет характеристический показатель $\Psi(k)$ вида (1.217). Для заданной длины масштаба h константы g и D и мера $W(y)$ в этом представлении однозначно определяются процессом.

Чтобы лучше понять представление Леви–Хинчина, мы рассмотрим несколько простых примеров. В первом возьмем $W(y) \equiv 0$, тогда получим

$$\Psi(k) = igk - \frac{D}{2}k^2, \quad (1.221)$$

и, соответственно,

$$G(k, t) = \exp \left[\left(igk - \frac{D}{2}k^2 \right) t \right]. \quad (1.222)$$

При Фурье-преобразовании этой характеристической функции мы непосредственно получаем

$$T_t(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D t}} \exp \left\{ -\frac{(y - gt)^2}{2Dt} \right\}, \quad (1.223)$$

что определяется как пропагатор гауссова диффузационного процесса с постоянным коэффициентом дрейфа g (соответствующего линейному дрейфу) и постоянным коэффициентом диффузии D . Конечно, g и D должны быть постоянны с момента предположения об однородности процесса.

Теперь рассмотрим случай $g = D = 0$ и возьмем меру Леви

$$W(y) = \gamma \delta(y - y_0), \quad (1.224)$$

с некоторой положительной постоянной γ и $y_0 > h$. Найденный в этом случае характеристический показатель тогда есть

$$\Psi(k) = \gamma(e^{iky_0} - 1), \quad (1.225)$$

поэтому

$$G(k, t) = \exp [\gamma t(e^{iky_0} - 1)]. \quad (1.226)$$

Таким образом, $X(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью γ и размером шага y_0 (сравните с (1.99)) или, что эквивалентно, пуассоновский процесс $N(t)$ с единичным, умноженным на y_0 , шагом, то есть $X(t) = y_0 N(t)$.

Этот пример легко обобщается на случай, когда мера Леви есть дискретная сумма δ -функций,

$$W(y) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \delta(y - y_{\alpha}), \quad (1.227)$$

где $\gamma_{\alpha} > 0$ и $y_{\alpha} > h$. Характеристическая функция соответствующего процесса в этом случае задается как

$$G(k, t) = \exp \left[\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} t(e^{iky_{\alpha}} - 1) \right] = \prod_{\alpha} \exp[\gamma_{\alpha} t(e^{iky_{\alpha}} - 1)]. \quad (1.228)$$

В результате процесс Леви $X(t)$ теперь является дискретной суммой независимых пуассоновских процессов с интенсивностями γ_{α} и размерами шага y_{α} . Вводя соответствующие независимые пуассоновские процессы $N_{\alpha}(t)$ с единичным шагом, мы, таким образом, имеем

$$X(t) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} N_{\alpha}(t). \quad (1.229)$$

Тогда

$$dX(t) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} dN_{\alpha}(t) \quad (1.230)$$

и

$$E[dN_{\alpha}(t)] = \gamma_{\alpha} dt, \quad dN_{\alpha}(t)dN_{\beta}(t) = \delta_{\alpha\beta} dN_{\alpha}(t). \quad (1.231)$$

Это точно соответствует нашим старым результатам (1.195) и (1.196) для специального случая КДП без дрейфа и с пуассоновскими приращениями $dN_{\alpha}(t)$, статистика которых не зависит от $X(t)$ благодаря трансляционной инвариантности процесса. Соответственно, мера Леви $W(y)$ равна $W(x + y|x) = W(x|x - y)$, что является как раз дискретным распределением скачковых интенсивностей.

В общем случае мы ожидаем, что мера Леви $W(y)$ представляет собой непрерывную сумму независимых пуассоновских процессов, задаваемых

размером их скачка y . Это можно увидеть непосредственно из общего вида генератора \mathcal{A} следующим образом с помощью выражения (1.214) и формулы Леви–Хинчина

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\rho(x) = & \int dy \int \frac{dk}{2\pi} \left[igk - \frac{D}{2}k^2 \right] e^{-iky} \rho(x-y) + \\ & + \int dy \int \frac{dk}{2\pi} \int [e^{ikz} - 1 - ikz\theta(h - |z|)] e^{-iky} W(z) \rho(x-y) dz.\end{aligned}\quad (1.232)$$

Легко видеть, что первый член будет генератором линейного диффузионного процесса, тогда как второй член определяется как

$$\begin{aligned}\int dy \int \left[\delta(z-y) - \delta(y) + z\theta(h-|z|)\delta(y)\frac{\partial}{\partial x} \right] W(z) \rho(x-y) dz = \\ = \int W(z) \left[\rho(x-z) - \rho(x) + z\theta(h-|z|)\frac{\partial}{\partial x} \rho(x) \right] dz.\end{aligned}\quad (1.233)$$

Таким образом, для наиболее общей формы генератора процесса Леви мы находим:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\rho(x) = & \left[-g\frac{\partial}{\partial x} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \rho(x) + \\ & + \int W(y) \left[\rho(x-y) - \rho(x) + y\theta(h-|y|)\frac{\partial}{\partial x} \rho(x) \right] dy.\end{aligned}\quad (1.234)$$

За исключением дополнительного члена под интегралом, который пропорционален $\theta(h-|y|)$, это в точности генератор процесса, полученный добавлением скачкового процесса к диффузионному процессу Гаусса. Конечно, в силу требований трансляционной инвариантности процесса, коэффициенты дрейфа и диффузии должны быть постоянными, а скачковая интенсивность $W(y)$ в основной части уравнения (1.234) зависит только от разницы y положений начального и конечного состояний.

Каково значение дополнительного члена $y\theta(h-|y|)\partial\rho/\partial x$, который, очевидно, зависит от произвольной масштабной длины h ? Для ответа на этот вопрос мы внимательнее рассмотрим условия (1.219) и (1.220), наложенные на меру Леви. Эти условия контролируют характеристику $W(y)$ при нуле и бесконечности. До сих пор в этом разделе, а также в предыдущем мы всегда неявно предполагали, что суммарная интенсивность перехода

$$\Gamma = \int W(y) dy \quad (1.235)$$

ограничена. В этом случае оба условия (1.219) и (1.220) удовлетворяются при любом $h > 0$. Но также величина $\int\limits_{|y|< h} yW(y)dy$ ограничена, и мы можем включить последний член из (1.234) в коэффициент дрейфа, что дает

$$\mathcal{A}\rho(x) = \left[-g' \frac{\partial}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \rho(x) + \int W(y)[\rho(x-y) - \rho(x)]dy, \quad (1.236)$$

где мы ввели новый коэффициент дрейфа

$$g' = g - \int\limits_{|y|< h} yW(y)dy. \quad (1.237)$$

Таким образом, мы видим, что для ограниченной суммарной интенсивности перехода Γ масштаб h полностью произвольный, а генератор процесса Леви приобретает точно тот же вид, с которым мы сталкивались ранее.

Однако важно отметить, что условия (1.219) и (1.220) не исключают возможности того, что суммарная интенсивность перехода расходится, что касается в особенности $W(y)$ при $y = 0$. Причина этой расходимости в том, что особенность меры Леви при $y = 0$ может привести к неограниченному накоплению количества скачков в ограниченном интервале времени. В качестве примера возьмем $W(y)$, пропорциональную $|y|^{-2}$. Такая мера уменьшается достаточно быстро для интеграла (1.220), чтобы сходиться, тогда как особенность при $y = 0$ достаточно слаба для удовлетворения (1.219). Но суммарная интенсивность перехода, задаваемая интегралом (1.235), очевидно, расходится. Несмотря на это, генератор (1.234) и характеристический показатель $\Psi(k)$ хорошо определены и ограничены.

Перепишем общую форму (1.234) генератора как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\rho(x) = & \left[-g \frac{\partial}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \rho(x) + \int\limits_{|y|\geqslant h} W(y)[\rho(x-y) - \rho(x)]dy + \\ & + \int\limits_{|y|< h} W(y) \left[\rho(x-y) - \rho(x) + y \frac{\partial}{\partial x} \rho(x) \right] dy. \end{aligned} \quad (1.238)$$

Второй член с правой стороны порождает большие скачки размера $|y| \geqslant h$, в то время как третий член включает маленькие скачки. Если применить

генератор к гладкой плотности вероятности $\rho(x)$, которая значительно меняется на обычном масштабе длины $L \gg h$, можно расширить подынтегральную функцию в третьем члене вблизи x , чтобы получить выражение

$$\frac{1}{2} \int_{|y| < h} y^2 W(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x) dy. \quad (1.239)$$

По условию (1.219) это выражение существует для любого фиксированного $h > 0$, хорошо определено и ограничено. Мы, таким образом, видим, что вклад (1.239) от маленьких скачков приводит к характеристике процесса диффузионного типа на малых длинах масштаба.

1.6.3. Стабильные процессы Леви

В предыдущем подразделе мы обсудили наиболее общую форму генератора процесса Леви. Вопрос, который появляется из предшествующей дискуссии: существуют ли такие интересные меры Леви, для которых суммарная интенсивность расходится? Как мы увидим ниже, есть такие меры, существование которых тесно связано с понятиями инвариантности масштаба и стабильности соответствующих процессов.

1.6.3.1. Стабильные распределения и соотношения масштабирования. Процесс Леви $X(t)$ называется *стабильным*⁴, если он обладает следующими свойствами масштабирования. Для любого $u > 0$ существует соответствующая функция $\lambda(u) > 0$, такая, что случайная величина $X(ut)$ подчиняется тому же распределению, что и $\lambda(u)X(t)$. Это означает, что изменение временного масштаба множителем u приводит к тому же распределению, что и изменение масштаба длины соответствующим множителем $\lambda(u)$ (здесь и в дальнейшем мы будем полагать, для определенности, что переменная X имеет размерность длины). Стабильность процесса, таким образом, выражает определенную масштабную инвариантность, которая часто называется самоподобием. Символически мы записываем условие стабильности как

$$X(ut) \sim \lambda(u)X(t), \quad (1.240)$$

где символ \sim служит для указания того, что левая и правая части придерживаются одного и того же распределения.

Можно показать, что процесс Леви стабилен тогда и только тогда, когда соответствующий пропагатор представляет стабильное распределение. Сначала определим стабильные распределения. Рассмотрим некоторую случайную величину Z с распределением $p(z)$ и взаимно независимые

⁴Точнее наше определение есть определение стабильности в строгом смысле.

копии $Z_1, Z_2, \dots, Z_\nu, \dots, Z$ все с тем же распределением $p(z)$. Тогда $p(z)$ считается стабильным распределением, если для каждого положительного целого m существует множитель $\lambda(m)$ такой, что сумма $\sum_{\nu=1}^m Z_\nu$ имеет то же распределение, что и случайное число $\lambda(m)Z$:

$$\sum_{\nu=1}^m Z_\nu \sim \lambda(m)Z. \quad (1.241)$$

Таким образом, распределение p стабильное, если все m -е степени свертки p равны p с точностью до соответствующего изменения масштаба. Известный пример стабильного распределения — нормальное распределение, которое, очевидно, обладает этим свойством с множителем масштабирования $\lambda(m) = \sqrt{m}$.

Легко показать, что пропагатор $T_t(y)$ стабильного процесса Леви $X(t)$ должен быть стабильным распределением. Для любого m мы можем написать

$$X(mt) = \sum_{\nu=1}^m (X(\nu t) - X([\nu-1]t)). \quad (1.242)$$

Левая часть этого уравнения имеет то же распределение, что и $\lambda(m)X(t)$, в то время как правая часть — сумма m независимых одинаково распределенных случайных величин $X(\nu t) - X([\nu-1]t)$, которые подчиняются тому же распределению, что и $X(t)$. Это показывает, что распределение $X(t)$, а именно $T_t(y)$, должно быть стабильным. Обратное тоже верно: если мы берем стабильное распределение, то приходим к пропагатору стабильного процесса Леви.

Дальше исследуем, какое значение имеет стабильность для характеристического показателя $\Psi(k)$. Соотношение $X(ut) \sim \lambda(u)X(t)$ приводит к соотношению масштабирования

$$T_{ut}(y) = \frac{1}{\lambda(u)} T_t \left(\frac{y}{\lambda(u)} \right) \quad (1.243)$$

для пропагатора. Соответствующее соотношение для характеристических функций есть

$$\Psi(k) = \frac{1}{u} \Psi(\lambda(u)k). \quad (1.244)$$

Если мы посмотрим на формулу Леви–Хинчина (1.217), получим следующее очевидное решение для условия масштабирования (1.244): для $D =$

$= W = 0$ мы имеем $\lambda(u) = 0$, что является масштабированием для линейного дрейфа, соответствующего сингулярному стабильному распределению $T_t(y) = \delta(y - gt)$. Для $g = W = 0$ находим $\lambda(u) = \sqrt{u}$, что является масштабированием для случая броуновского движения, соответствующим стабильному гауссовому пропагатору

$$T_t(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left[-\frac{y^2}{2Dt}\right]. \quad (1.245)$$

Возникает вопрос: а есть ли нетривиальные меры Леви, приводящие к стабильным процессам Леви? Чтобы ответить на этот вопрос: установим $D = 0$, поскольку, как мы уже знаем, $D > 0$ соответствует броуновскому движению. Однако мы сохраним ненулевым g по причинам, которые станут ясны немного позже. При использовании формулы Леви–Хинчина условие масштабирования (1.244) принимает тогда вид

$$\begin{aligned} igk + \int [e^{iky} - 1 - iky\theta(h - |y|)]W(y)dy &= \\ = i\left(\frac{\lambda}{u}\right)gk + \int [e^{iky} - 1 - iky\theta(\lambda h - |y|)]\frac{1}{u\lambda}W\left(\frac{y}{\lambda}\right)dy. \end{aligned} \quad (1.246)$$

Это уравнение предполагает, что мы можем удовлетворить соотношению масштабирования, если возьмем меры Леви со свойством

$$W(y) = \frac{1}{u\lambda}W\left(\frac{y}{\lambda}\right), \quad (1.247)$$

при условии, что масштабная зависимость, представленная через член $\theta(\lambda h - y)$, может быть удалена некоторым путем (что действительно так!). Игнорирование этого члена (на мгновение) приводит нас к (1.247), что, конечно, может быть получено прямо из анализа размерности, так как $W(y)$ имеет размерность $(\text{длина} \cdot \text{время})^{-1}$. Таким образом, мы находим стабильные меры Леви

$$W_\alpha(y) = \begin{cases} C_+y^{-1-\alpha}, & y > 0, \\ C_-|y|^{-1-\alpha}, & y < 0, \end{cases} \quad (1.248)$$

с неотрицательными константами C_\pm . Эти меры приводят к соотношению масштабирования

$$\lambda(u) = (u)^{1/\alpha}, \quad (1.249)$$

то есть мы имеем $X(ut) \sim u^{1/\alpha}X(t)$.

Возможные значения для экспоненты показателя масштабирования α ограничены условиями (1.219) и (1.220), которые должны удовлетворяться любой мерой Леви. Условие (1.219) приводит к $\alpha < 2$, в то время как условие (1.220) в результате дает $\alpha > 0$. Тогда

$$0 < \alpha < 2. \quad (1.250)$$

Напомним, что случай $\alpha = 2$, соответствующий соотношению масштабирования $\lambda(u) = \sqrt{u}$, получен для неисчезающего коэффициента диффузии D и установкой $g = W = 0$.

Данное соотношение масштабирования имеет интересные следствия для последовательностей независимых случайных величин $X, X_1, X_2, \dots, X_\nu, \dots$, подчиняющихся соответствующему стабильному распределению. Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$. Тогда мы имеем

$$\sum_{\nu=1}^m X_\nu \sim m^{1/\alpha} X, \quad (1.251)$$

при $1/\alpha > 1$. Это показывает, что сумма растет быстрее, чем число m членов в ней. Другими словами, вполне вероятно, что максимальный член суммы становится очень большим и доминирует в значении суммы. Понятно, что центральная предельная теорема теории вероятностей нарушается, что связано с тем, что дисперсия стабильного распределения не ограничена при $\alpha < 2$. Действительно, можно показать, что стабильное распределение с ограниченной дисперсией должно быть гауссовым (или концентрированным в отдельной точке). Это видно из того факта, что плотность $p(y)$ стабильного распределения с показателем $\alpha \neq 2$ для больших y ведет себя как $|y|^{-1-\alpha}$.

1.6.3.2. Характеристические показатели стабильных процессов Леви. Наш анализ пока еще не полный, так как мы пренебрегали представленным выше масштабно зависимым членом в уравнении (1.246), и поэтому мы еще не знаем характеристических показателей $\Psi_\alpha(k)$ стабильных процессов.

Как мы видели, если что-то изменяет масштаб длины h на другое значение h' , соответствующее изменение характеристического показателя $\Psi_\alpha(k)$ может быть компенсировано должным сдвигом коэффициента дрейфа, который задается как

$$g \rightarrow g' = g + \int y W_\alpha(y) [\theta(h' - |y|) - \theta(h - |y|)] dy. \quad (1.252)$$

В дальнейшем этот новый коэффициент g' будет называться ренормализованным коэффициентом дрейфа. Таким образом, мы видим, что выбор масштаба длины характеризуется широким произволом и мы можем использовать эту свободу для нахождения характеристических показателей стабильных распределений. Мы различаем три случая.

1. Рассмотрим первый случай $0 < \alpha < 1$. В этом случае интеграл

$$\int_{|y| < h} y W_\alpha(y) dy \quad (1.253)$$

сходится. Таким образом, мы можем позволить h' перейти в ноль в (1.252). В дальнейшем мы устанавливаем ренормализованный коэффициент дрейфа равным нулю, так как ненулевой дрейфовый член нарушал бы соотношение масштабирования (см. (1.246)). Характеристический показатель сводится к

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iky} - 1) W_\alpha(y) dy = \\ &= C_+ \int_0^{+\infty} (e^{iky} - 1) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} + C_- \int_{-\infty}^0 (e^{iky} - 1) \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.254)$$

Интегралы могут быть определены явно и дают следующий результат для характеристического показателя α -стабильных распределений:

$$\Psi_\alpha(k) = \left(-C_0 + i \frac{k}{|k|} C_1 \right) |k|^\alpha. \quad (1.255)$$

Новые константы C_0 и C_1 связаны с константами C_\pm меры Леви через

$$C_0 = -(C_+ + C_-) \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), \quad (1.256)$$

$$C_1 = -(C_+ - C_-) \Gamma(-\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right). \quad (1.257)$$

Здесь Γ обозначает гамма-функцию. Как и должно быть, мы имеем $C_0 \geq 0$, так как $\Gamma(-\alpha) < 0$. C_0 — масштабный параметр, а C_1 — параметр симметрии; для $C_1 = 0$ соответствующее стабильное распределение, очевидно, симметрично.

2. Рассмотрим теперь случай $1 < \alpha < 2$. Мы не можем следовать представленной выше процедуре, в данном случае интеграл (1.253) расходится. Однако для $1 < \alpha < 2$ интеграл

$$\int_{|y|>h} y W_\alpha(y) dy \quad (1.258)$$

ограничен. Это позволяет нам взять предел $h' \rightarrow \infty$ в (1.252). Снова, устанавливая ренормализованный коэффициент дрейфа в ноль, мы получаем

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iky} - 1 - iky) W_\alpha(y) dy = \\ &= C_+ \int_0^{+\infty} (e^{iky} - 1 - iky) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} + C_- \int_{-\infty}^0 (e^{iky} - 1 - iky) \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.259)$$

Интегралы могут быть посчитаны явно, а результат точно такой же, как выше, то есть мы снова получили (1.255) с коэффициентами, задаваемыми (1.256) и (1.257). Отметим, что снова $C_0 \geq 0$, так как $\Gamma(-\alpha) > 0$ и $\cos(\pi\alpha/2) < 0$.

3. Случай $\alpha = 1$ требует специальной трактовки с включением ненулевого коэффициента дрейфа. Отметим, что дрейфовый член удовлетворяет условию масштабирования (см. (1.246)), так как $\alpha = 1$ дает $\lambda(u) = u$. Может быть показано, что для строгого стабильного процесса мера Леви $W_1(y)$ должна быть симметричной. Таким образом, в указанном случае $\alpha = 1$ мы пишем

$$W_1(y) = \frac{C_0}{\pi} \frac{1}{|y|^2}, \quad C_0 \geq 0. \quad (1.260)$$

Характеристический показатель задается как

$$\Psi_1(k) = iC_1 k + \frac{C_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{iky} - 1 - \frac{iky}{1 + (y/h)^2} \right) \frac{dy}{y^2}. \quad (1.261)$$

Отметим, что здесь мы включили ограниченный дрейфовый член с коэффициентом C_1 и изменили функцию обрезания с $\theta(h - |y|)$ на $1/(1 + (y/h)^2)$. Это допустимо, так как это изменение также приводит к конечной перенормировке дрейфового коэффициента. Интеграл в (1.261) может быть вычис-

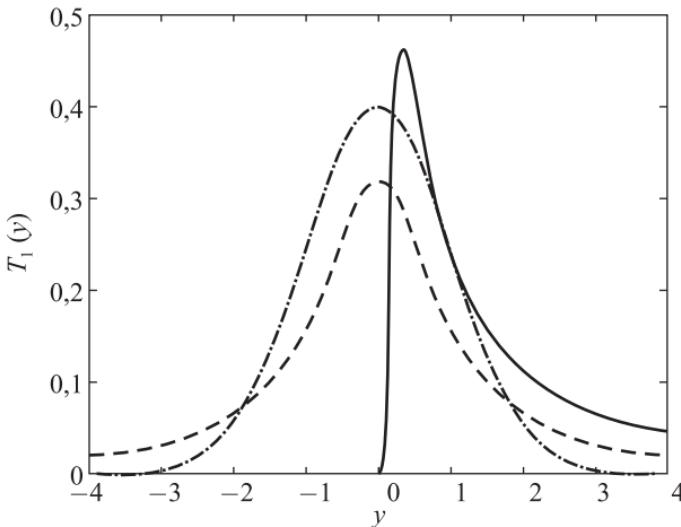


Рис. 1.10. Графики пропагаторов $T_1(y)$ для трех α -стабильных процессов Леви: гауссов пропагатор (1.245) с $\alpha = 2$ и $D = 1$ (штрихпунктирная линия), пропагатор Коши (1.263) с $\alpha = 1$ и $C_0 = 1$ (штриховая линия) и пропагатор (1.264), соответствующий $\alpha = 1/2$ (сплошная линия).

лен явно, используя метод вычетов, который дает независимое от h значение $-\pi|k|$. В результате находим ту же формулу, что и в остальных случаях:

$$\Psi_1(k) = iC_1k - C_0|k| = \left(-C_0 + i\frac{k}{|k|}C_1\right)|k|. \quad (1.262)$$

При преобразовании Фурье для $C_1 = 0$ мы сразу же получаем пропагатор

$$T_t(y) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-C_0|k|t - iky} = \frac{1}{\pi} \frac{C_0 t}{(C_0 t)^2 + y^2}, \quad (1.263)$$

представленный симметричным процессом Коши (рис. 1.10).

Выше мы получили наиболее общую форму характеристического показателя для стабильных процессов Леви с показателем масштабирования α . Кроме того, мы имеем явные выражения для соответствующих мер Леви. Однако стабильные функции распределения, полученные преобразованием Фурье характеристических функций, известны только для очень специальных случаев. Для $\alpha = 1$ мы уже видели, что получается распределение

Коши. Другой случай — представляемый пропагатором, задаваемым как

$$T_t(y) = \frac{t}{\sqrt{2\pi y^3}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2y}\right\}, \quad y > 0, \quad (1.264)$$

и $T_t(y) = 0$ при $y \leq 0$ (см. рис. 1.10). Он соответствует стабильному распределению с показателем масштабирования $\alpha = 1/2$, параметр масштабирования $C_0 = 1$ и симметричный параметр $C_1 = 1$. Тогда получаем $\lambda(u) = u^2$. В главе 8 мы обсудим физический пример, где это стабильное распределение всплывает в распределении времен ожидания КДП.

Библиография

Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations*. John Wiley, New York.

Bertoin, J. (1996). *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Cambridge.

Bjorken, J. D. and Drell, S. D. (1965). *Relativistic Quantum Fields*. McGrawHill, New York. Имеется перевод: Бьёркен Дж., Дрел С. *Релятивистская квантовая теория*. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1978.

Davis, M. H. A. (1993). *Markov Models and Optimization*. Chapman & Hall, London.

Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes*. John Wiley, New York. Имеется перевод: Дуб Дж. Л. *Вероятностные процессы*. — М.: ИЛ, 1956.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume I. (third edition). John Wiley, New York. Имеется перевод: Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т. 1. — М.: Мир, 1984.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume II. (second edition). John Wiley, New York. Имеется перевод: Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т. 2. — М.: Мир, 1984.

Gardiner, C. W. (1985). *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (second edition). Springer-Verlag, Berlin.

Honerkamp, J. (1998). *Statistical Physics*. Springer-Verlag, Berlin.

Itô, Kiyosi (ed.) (1993). *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* (second edition). The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

- Klafter, J., Shlesinger, M. F. and Zumofen, G. (1996, February). Beyond Brownian motion. *Phys. Today*, **49**, 33–39.
- Kloeden, P. E. and Platen, E. (1992). *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin.
- Kolmogorov, A. N. (1956). *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company, New York. Имеется издание на русском языке: Колмогоров А. Н. *Основные понятия теории вероятностей*. — М.: ФАЗИС, 1998.
- Reichl, L. E. (1998). *A Modern Course in Statistical Physics* (second edition). John Wiley, New York.
- van Kampen, N. G. (1992). *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (second edition). North-Holland, Amsterdam.

ГЛАВА 2

Квантовая вероятность

Очертив классическую теорию вероятности и стохастических процессов, мы обратимся к пониманию вероятности в квантовой механике. В этой главе акцент сделан на стандартной формулировке квантовой механики в том виде, в каком ее можно найти более детально во многих отличных учебниках (von Neumann, 1955; Landau, Lifshitz, 1958; Cohen-Tannoudji, Diu, Laloë, 1977; Bohm, 1993).

В первом параграфе мы сконцентрируемся на тех аспектах, которые проясняют отношение между квантовой механикой и классической теорией вероятностей. Наиболее существенным в нашем обсуждении станет то, что, хотя квантовая механика является по сути вероятностной теорией, приложение концепций вероятностей к квантовой механике сильно отличается от классической теории. Оказывается, что понятие пространства вероятностей вместе с соответствующим пространством случайных величин не применимо к квантовой механике. Напротив, эта концепция несовместима с основными конструкциями квантовой механики, а именно гильбертовым пространством векторов состояния и соответствующей алгеброй наблюдаемых.

Далее в этой главе мы представим концепцию составной квантовой системы, которая важна для изучения открытых систем. Сюда же включен и параграф о квантовых энтропиях. Описание измерений, проводимых над квантовой системой, дает существенную часть статистической интерпретации квантовой механики. Поэтому в этой главе мы приведем основы общей теории квантовых измерений, которая основана на понятиях операций и эффектов. Эти концепции будут играть значительную роль в развитии стохастической теории открытых квантовых систем.

2.1. Статистическая интерпретация квантовой механики

В этом параграфе мы в общих чертах рассмотрим основные математические понятия, используемые в формулировке квантовой механики и ее

статистической интерпретации. Мы начнем с некоторых формальных понятий из функционального анализа и потом в последующих подразделах дадим основы их физического и статистического значений. Дальнейшие математические подробности вероятностной интерпретации квантовой механики могут быть найдены в книге Холево (Holevo, 1982).

2.1.1. Самосопряженные операторы и спектральная теорема

В квантовой механике состояние замкнутой физической системы описывается вектором состояния¹ или волновой функцией ψ , которая является элементом некоторого гильбертова пространства \mathcal{H} . Скалярное произведение в гильбертовом пространстве будет обозначаться угловыми скобками, то есть скалярное произведение двух векторов состояния $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ мы запишем в виде $\langle \varphi | \psi \rangle$. Соответственно, норма ψ :

$$\|\psi\| \equiv \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (2.1)$$

Гильбертово пространство считается сепарабельным, что означает существование конечного или счетного ортонормированного базиса $\{\varphi_\alpha\}$ векторов состояния, удовлетворяющих

$$\langle \varphi_\alpha | \varphi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

таких что каждый вектор состояния $|\psi\rangle$ может быть единственным образом разложен в виде

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\varphi_{\alpha}\rangle \langle \varphi_{\alpha} | \psi \rangle. \quad (2.3)$$

Измеримые величины, или *наблюдаемые*, замкнутой физической системы представляются линейными самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве. Линейный оператор \hat{R} ,

$$\hat{R}: \mathcal{D}(\hat{R}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad (2.4)$$

является самосопряженным, если его область определения $\mathcal{D}(\hat{R})$ совпадает с областью определения $\mathcal{D}(\hat{R}^\dagger)$ сопряженного оператора \hat{R}^\dagger и если $\hat{R}\psi = \hat{R}^\dagger\psi$ в общей области.

¹Мы будем использовать оба обозначения ψ и «кет» $|\psi\rangle$ для элемента гильбертова пространства \mathcal{H} . Символ $\langle \psi |$ обозначает элемент сопряженного пространства $\mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}$, то есть «бра»-вектор.

Основная теорема, связанная с самосопряженными операторами, — спектральная теорема (Akhiezer, Glazman, 1981). Она утверждает, что для любого самосопряженного оператора \widehat{R} существует единственное спектральное семейство E_r , такое что

$$\widehat{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} r dE_r. \quad (2.5)$$

Спектральное семейство E_r , где $r \in \mathbb{R}$, является однопараметрическим семейством коммутирующих операторов ортогонального проектирования со следующими свойствами:

- 1) Семейство проекций является монотонно возрастающим,

$$E_{r'} \geq E_r \quad \text{для} \quad r' > r. \quad (2.6)$$

- 2) Семейство непрерывно справа,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} E_{r+\varepsilon} = E_r. \quad (2.7)$$

- 3) Имеют место следующие пределы:

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} E_r = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} E_r = I, \quad (2.8)$$

где I означает единичный оператор.

Уравнение (2.5) представляет спектральное разложение самосопряженных операторов, на котором основана статистическая интерпретация квантовой механики.

Спектральная теорема утверждает, что все проекторы E_r спектрально-го семейства коммутируют с \widehat{R} и что область определения \widehat{R} может быть описана следующим образом:

$$\mathcal{D}(\widehat{R}) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 d\langle \psi | E_r | \psi \rangle < \infty \right\}. \quad (2.9)$$

Заметьте, что интеграл в правой части — обыкновенный (Римана–Стильтьеса) и может быть записан иначе:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r^2 d\langle \psi | E_r | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 d\|E_r \psi\|^2 = \|\widehat{R}\psi\|^2. \quad (2.10)$$

Вообще, для любой непрерывной функции $f(r)$ можно определить функцию-оператор $f(\hat{R})$ в терминах спектрального разложения:

$$f(\hat{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) dE_r. \quad (2.11)$$

Более того, спектральное семейство порождает ортогональное разложение единичного оператора. Рассмотрим произвольное непересекающееся разбиение действительной оси на интервалы $\Delta r_\alpha = (r_{\alpha-1}, r_\alpha]$ и определим соответствующие проекторы:

$$\Delta E_\alpha = E_{r_\alpha} - E_{r_{\alpha-1}}. \quad (2.12)$$

Используя свойства (2.6)–(2.8) спектрального семейства, мы находим условие полноты

$$\sum_\alpha \Delta E_\alpha = I \quad (2.13)$$

и условие ортогональности

$$\Delta E_\alpha \Delta E_\beta = \delta_{\alpha\beta} \Delta E_\beta. \quad (2.14)$$

Спектр $\text{spec}(\hat{R})$ самосопряженного оператора \hat{R} может быть выражен в терминах свойств его спектрального семейства E_r . Точка $r \in \mathbb{R}$ называется стационарной, если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$E_{r+\varepsilon} - E_{r-\varepsilon} = 0. \quad (2.15)$$

Это означает, что спектральное семейство постоянно в ε -окрестности r . Спектр $\text{spec}(\hat{R})$ тогда определен как множество всех нестационарных точек.

Спектр $\text{spec}(\hat{R})$ может быть разложен в дискретный и непрерывный спектры. Дискретный спектр состоит из так называемых точек разрыва. Точка $r \in \mathbb{R}$ называется точкой разрыва, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$E_r - E_{r-\varepsilon} \neq 0, \quad (2.16)$$

что означает, что E_r не непрерывна слева от r . Если, например, размерность E_r увеличивается на единицу в r , для некоторого нормированного вектора φ мы имеем

$$E_r - E_{r-\varepsilon} = |\varphi\rangle\langle\varphi|. \quad (2.17)$$

Отсюда следует, что φ является собственным вектором \widehat{R} с собственным значением r , то есть $\widehat{R}\varphi = r\varphi$. С другой стороны, точка $r \in \text{spec}(\widehat{R})$ принадлежит к непрерывному спектру, если спектральное семейство непрерывно по r .

ПРИМЕР 2.1. Простейший пример самосопряженного оператора \widehat{R} – оператор с чисто дискретным спектром, который получается из уравнения на собственные значения

$$\widehat{R}\psi_{n,k} = r_n \psi_{n,k}. \quad (2.18)$$

Индекс n обозначает различные собственные значения r_n , тогда как k различает собственные векторы, соответствующие одному собственному значению. Таким образом, проектор на собственное пространство с собственным значением r_n может быть записан как

$$\Pi_n = \sum_k |\psi_{n,k}\rangle\langle\psi_{n,k}|. \quad (2.19)$$

Спектральное семейство имеет вид

$$E_r = \sum_{r_n \leq r} \Pi_n, \quad (2.20)$$

а спектральное разложение \widehat{R} дается выражением

$$\widehat{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} r dE_r = \sum_n r_n \Pi_n. \quad (2.21)$$

ПРИМЕР 2.2. В шредингеровском представлении оператор координаты \widehat{Q} одномерной системы с гильбертовым пространством $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, являющимся пространством квадратично-интегрируемых функций в \mathbb{R} , определяется через

$$(\widehat{Q}\psi)(x) = x\psi(x). \quad (2.22)$$

Спектральное семейство может быть определено как

$$(E_q \psi)(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{для } x \leq q \\ 0, & \text{для } x > q \end{cases} = \theta(q - x)\psi(x). \quad (2.23)$$

Очевидно, \widehat{Q} имеет только непрерывный спектр, который покрывает всю действительную ось.

ПРИМЕР 2.3. Оператор импульса \widehat{P} , канонически сопряженный с \widehat{Q} , задается (считая постоянную Планка \hbar равной 1) как

$$(\widehat{P}\psi)(x) = -i \frac{d}{dx} \psi(x). \quad (2.24)$$

Область определения \widehat{P} состоит из всех функций $\psi(x)$, которые непрерывны и производная которых принадлежит $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Спектральное семейство оператора импульса наиболее просто определяется с помощью преобразования Фурье

$$\tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \psi(x) dx \quad (2.25)$$

функции $\psi(x)$, в обозначениях которой мы получаем

$$(E_p \psi)(x) = \int_{-\infty}^p \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{\psi}(k). \quad (2.26)$$

Легко проверить, что оператор импульса также имеет непрерывный спектр, который покрывает целиком действительную ось и что (2.26), по сути, является спектральным разложением оператора импульса. А именно, если $\psi(x)$ является непрерывной, то с помощью (2.26) мы находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p dE_p \psi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} p e^{ipx} \tilde{\psi}(p) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \left(-i \frac{d}{dx} e^{ipx} \right) \tilde{\psi}(p) = -i \frac{d}{dx} \psi(x) = \\ &= (\widehat{P}\psi)(x). \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.1.2. Наблюдаемые и случайные величины

Статистическая интерпретация квантовой механики тесно связана со спектральным разложением (2.5) самосопряженных операторов \widehat{R} , представленных в предыдущем параграфе. Она основана на следующих постулятах.

Мы рассматриваем статистический ансамбль \mathcal{E} , состоящий из большого числа одинаково приготовленных квантовых систем $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(N)}$,

$$\mathcal{E} = \left\{ S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(N)} \right\}. \quad (2.28)$$

Как и в классической теории, создание такого ансамбля требует указания (спецификации) определенного набора экспериментальных условий, которые могут быть реализованы, хотя бы в принципе, бесконечное число раз. Каждая реализация этого идентичного набора условий приводит к подготовке одной квантовой системы $S^{(i)}$, принадлежащей ансамблю \mathcal{E} . Первый постулат: при определенных условиях (подробнее о них позже) полное описание такого статистического ансамбля дается нормированным вектором состояния $|\psi\rangle$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , относящемся к квантово-механической системе.

Второй постулат: измеряемые величины статистического ансамбля \mathcal{E} представляются самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Результаты измерений наблюдаемой \hat{R} , проведенных над ансамблем, описываемым $|\psi\rangle$, представляют действительную случайную переменную R с функцией распределения $F_R(r)$

$$F_R(r) = \langle \psi | E_r | \psi \rangle, \quad (2.29)$$

где E_r — спектральное семейство \hat{R} .

Уравнение (2.29) представляет основу статистической интерпретации (von Neumann, 1955). Легко видеть, что $F_R(r)$ фактически обладает свойствами (1.18)–(1.20) функции распределения действительной случайной величины R . Заметим, что это является прямым следствием свойств (2.6)–(2.8) спектрального семейства E_r . В функциональном анализе $F_R(r)$ называется спектральной мерой. С точки зрения уравнения (2.29) очевидно также, что возможные результаты измерения, представляемого \hat{R} , даются значениям r , которые принадлежат спектру \hat{R} . Другими словами, если r не содержится в $\text{spec}(\hat{R})$, тогда спектральное семейство постоянно в окрестности r и, таким образом, $F_R(r)$ там также постоянна. Для случайной переменной R вероятность попасть в эту окрестность равна, следовательно, нулю.

На основании уравнения (2.29) можно также определить вероятности для более общих событий. Если B обозначает некоторое борелевское множество в \mathbb{R} , мы можем ввести соответствующий проекционный оператор

$$E(B) = \int_B dE_r, \quad (2.30)$$

так что вероятность для результата измерения попасть в множество B

$$P_R(B) = \langle \psi | E(B) | \psi \rangle. \quad (2.31)$$

Например, вероятность для r попасть в интервал $(a, b]$ оказывается равной $\langle \psi | E_b - E_a | \psi \rangle = F_R(b) - F_R(a)$. С позиций уравнения (2.30) мы видим соответствие между борелевскими множествами B и проекционным операторами $E(B)$, определенными в терминах спектрального семейства. Для любой последовательности непересекающихся борелевских множеств B_i мы имеем

$$E\left(\bigcup_i B_i\right) = \sum_i E(B_i), \quad (2.32)$$

и формально такое же отношение сохраняет силу для соответствующих вероятностей, то есть

$$P_R\left(\bigcup_i B_i\right) = \sum_i P_R(B_i). \quad (2.33)$$

В математических терминах, соответствие $B \mapsto E(B)$ со свойством (2.32) называется проекционно-значной мерой.

Таким образом, мы видим, что наблюдаемая \hat{R} приводит через свое спектральное семейство к действительной случайной переменной R , которая описывает вероятности для всех возможных результатов измерения. Выборочное пространство Ω является действительной осью, а алгебра событий \mathcal{B} задается борелевскими множествами в \mathbb{R} . В частности, используя спектральное разложение, для среднего значения R можно получить хорошо известное выражение

$$E(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} r dF_R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} r d\langle \psi | E_r | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{R} | \psi \rangle, \quad (2.34)$$

тогда как дисперсия R

$$\text{Var}(R) = E(R^2) - [E(R)]^2 = \langle \psi | \hat{R}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{R} | \psi \rangle^2. \quad (2.35)$$

2.1.3. Чистые состояния и статистическое перемешивание

Наша характеристика квантовых состояний — еще не самая общая, которую можно встретить в приложениях квантовой теории. Очевидный

способ получить более общий ансамбль — следующий. Рассмотрим множество M ансамблей $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_M$ того же типа, который был представлен в предыдущем параграфе. Каждый из этих ансамблей описывается вектором состояния ψ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, M$, в соответствующем гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Тогда естественно рассмотреть общий ансамбль \mathcal{E} , который получен перемешиванием всех ансамблей \mathcal{E}_α с соответствующими весами w_α , удовлетворяющими следующим условиям:

$$w_\alpha \geq 0, \quad \sum_{\alpha=1}^M w_\alpha = 1. \quad (2.36)$$

Смешивание достигается выборкой большого числа N_α систем из каждого ансамбля \mathcal{E}_α . Тогда полное число $N = \sum_\alpha N_\alpha$ систем образует новый ансамбль \mathcal{E} , а веса w_α даются выражением $w_\alpha = N_\alpha/N$.

2.1.3.1. Статистическая формулировка квантовой механики. В соответствии с правилами классической теории вероятности, любой самосопряженный оператор \hat{R} дает в результате случайную переменную R с кумулятивной (накопительной) функцией распределения

$$F_R(r) = \sum_{\alpha} w_\alpha \langle \psi_\alpha | E_r | \psi_\alpha \rangle. \quad (2.37)$$

Это уравнение обобщает (2.29) на случай смеси состояний. Соответственно, среднее значение R теперь определяется как

$$E(R) = \sum_{\alpha} w_\alpha \langle \psi_\alpha | \hat{R} | \psi_\alpha \rangle. \quad (2.38)$$

Эти формулы могут быть записаны в компактном виде, если ввести *матрицу плотности* или *статистический оператор*

$$\rho = \sum_{\alpha} w_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|, \quad (2.39)$$

что позволяет написать функцию распределения случайной переменной R в виде

$$F_R(r) = \text{tr}\{E_r \rho\}, \quad (2.40)$$

где tr означает операцию нахождения следа матрицы. След оператора A определяется как

$$\text{tr } A = \sum_i \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle, \quad (2.41)$$

где $\{\varphi_i\}$ является ортонормированным базисом в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Допуская, что след существует, легко показать, что он не зависит от выбора базиса $\{\varphi_i\}$.

Аналогично, матожидание (среднее значение) и дисперсия случайной переменной R могут теперь быть записаны в следующем виде:

$$E(R) = \text{tr}\{\hat{R}\rho\}, \quad (2.42)$$

$$\text{Var}(R) = \text{tr}\{\hat{R}^2\rho\} - [\text{tr}\{\hat{R}\rho\}]^2. \quad (2.43)$$

Следуя обычным обозначениям, мы также запишем ожидаемое значение R как

$$\langle \hat{R} \rangle = \text{tr}\{\hat{R}\rho\} \quad (2.44)$$

и дисперсию

$$\text{Var}(\hat{R}) = \langle \hat{R}^2 \rangle - \langle \hat{R} \rangle^2. \quad (2.45)$$

Таким образом, смешанный ансамбль \mathcal{E} может, в отношении его статистических свойств, быть полностью охарактеризован матрицей плотности ρ . С помощью (2.39) легко проверить, что ρ — самосопряженная, положительно определенная² матрица и ее след равен единице

$$\rho^\dagger = \rho, \quad \rho \geqslant 0, \quad \text{tr } \rho = 1. \quad (2.46)$$

Приведенные выше рассуждения могут быть подтверждены аксиоматическим подходом (von Neumann, 1955). А именно, рассмотрим множество ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Мы обозначим это множество \mathcal{R} . Мы ищем математическое выражение для матожидания, которое рассматривается как действительный функционал $\tilde{E}(\hat{R})$ на \mathcal{R} , то есть такой, который ставит в соответствие действительное число каждому оператору $\hat{R} \in \mathcal{R}$. Каждый такой функционал должен удовлетворять следующему естественному набору требований:

$$\tilde{E}(I) = 1, \quad (2.47)$$

$$\tilde{E}(\Pi) \geqslant 0, \quad (2.48)$$

$$\tilde{E}\left(\sum_i c_i \hat{R}_i\right) = \sum_i c_i \tilde{E}(\hat{R}_i), \quad c_i \in \mathbb{R}. \quad (2.49)$$

²Оператор A называется положительным, если для всех $\psi \in \mathcal{D}(A)$ выполняется неравенство $\langle \psi | A\psi \rangle \geqslant 0$, которое зачастую записывается просто как $A \geqslant 0$. Обратите внимание, что мы включаем знак равенства в определение положительности (то есть рассматриваем нестрогое неравенство).

Первое условие означает, что единичный оператор, соответствующий детерминированной (то есть без дисперсии) переменной $R = 1$, имеет математическое ожидание 1. Второе условие отражает естественное требование, что ожидаемое любого проекционного оператора Π должно быть положительным. Это требование вытекает из нашего предыдущего наблюдения, что любые события теории относятся к проекционным операторам в гильбертовом пространстве, таким что $\tilde{E}(\Pi)$ является вероятностью события, представленного оператором Π (см. (2.30) и (2.31)). Наконец, третье условие утверждает, что \tilde{E} должен быть линейным функционалом на \mathcal{R} . Фундаментальная теорема (Langerholc, 1965) утверждает тогда, что любой функционал $\tilde{E}(\hat{R})$ с этими свойствами должен быть вида (2.42), так что существует единственный оператор ρ со свойствами (2.46), такой что $\tilde{E}(\hat{R}) = E(R) = \text{tr}(\hat{R}\rho)$.

В нашем определении матрицы плотности (2.39) мы не делали допущения, что $|\psi_\alpha\rangle$ — ортогональны. Однако мы, конечно, можем диагонализовать ρ . Так как матрица ρ положительно определенная, ее значения больше или равны нулю. Спектральная теория операторов плотности допускает, что у ρ имеется только счетное число строго положительных собственных значений $p_i > 0$. Ноль — единственно возможная аккумулирующая точка спектра. Следовательно, строго положительные собственные значения вырождены конечное число раз и ноль является единственным возможным бесконечно вырожденным собственным значением. Следовательно, спектральное разложение ρ может быть записано как

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \quad (2.50)$$

где суммирование проводится по полному набору собственных функций $|\varphi_i\rangle$ с собственными значениями p_i . Условие нормировки, следовательно, имеет вид

$$\text{tr } \rho = \sum_i p_i = 1. \quad (2.51)$$

2.1.3.2. Свойства матрицы плотности. Мы кратко обсудим наиболее важные общие свойства матриц плотности. Первое из них

$$\text{tr } \rho^2 \leqslant \text{tr } \rho = 1. \quad (2.52)$$

Можно показать, что знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда ρ имеет вид $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ для некоторого единичного вектора состояния $|\psi\rangle$. Этот случай рассмотрен в предыдущем параграфе 2.1.2. Про-

ансамбль с таким свойством говорят, что он находится в чистом состоянии. Понятно, что можно заменить $|\psi\rangle$ на $\exp(i\chi)|\psi\rangle$ с фиксированной фазой $\chi \in [0, 2\pi)$, не изменяя матрицу плотности и статистические формулы. Чистое состояние единственным образом описывается лучом в гильбертовом пространстве. В математических терминах можно, следовательно, сказать, что множество чистых состояний является изоморфным множеству полупрямых в \mathcal{H} , то есть проективному гильбертову пространству.

Если левая часть в (2.52) строго меньше 1, то ансамбль называется статистической смесью. Альтернативно, разница между чистыми состояниями и смесями может быть описана следующим образом. Множество всех матриц плотности будет обозначаться $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Это множество — выпуклое, то есть для любых двух матриц плотности ρ_1 и ρ_2 выпуклая линейная комбинация

$$\rho = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (2.53)$$

также является матрицей плотности. Физически, эта выпуклая линейная комбинация описывает ансамбль, который получен из смеси ансамблей \mathcal{E}_1 (относящегося к ρ_1) и \mathcal{E}_2 (относящегося к ρ_2) с весами λ и $1 - \lambda$ соответственно. Чистые состояния лежат на границе множества $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ и отличаются тем, что они не могут быть представлены в виде нетривиальной выпуклой линейной комбинации двух разных матриц плотности. Точнее, если ρ является чистым состоянием и если (2.53) выполняется для некоторого $\lambda \in (0, 1)$, тогда $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Физическим следствием является то, что разложение чистого статистического ансамбля \mathcal{E} на два составляющих ансамбля \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 никаким образом не изменяет статистических свойств, то есть \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 имеют ту же статистику, что и \mathcal{E} .

В уравнении (2.39) матрица плотности была введена как выпуклая линейная комбинация нормированных, не обязательно ортогональных состояний $|\psi_\alpha\rangle$ с весами w_α , удовлетворяющими (2.36). Для некоторой матрицы плотности ρ такое разложение в выпуклую линейную комбинацию чистых состояний является, в общем случае, не единственным (Hughston, Jozsa, Wootters, 1993; Nielsen, Chuang, 2000). Для того чтобы описать возможные выпуклые линейные комбинации, которые приводят к одной и той же матрице плотности, удобно работать с ненормированными состояниями $|\tilde{\psi}_\alpha\rangle = \sqrt{w_\alpha}|\psi_\alpha\rangle$ и записать матрицу плотности как

$$\rho = \sum_{\alpha} |\tilde{\psi}_{\alpha}\rangle\langle\tilde{\psi}_{\alpha}|. \quad (2.54)$$

Про такое множество состояний $\{|\tilde{\psi}_\alpha\rangle\}$ говорят, что оно генерирует заданную матрицу плотности ρ . Рассмотрим теперь два множества состоя-

ний $\{|\tilde{\psi}_\alpha\rangle\}$ и $\{|\tilde{\chi}_\alpha\rangle\}$. Эти два множества генерируют одну и ту же матрицу плотности ρ , то есть

$$\rho = \sum_{\alpha} |\tilde{\psi}_{\alpha}\rangle\langle\tilde{\psi}_{\alpha}| = \sum_{\alpha} |\tilde{\chi}_{\alpha}\rangle\langle\tilde{\chi}_{\alpha}|, \quad (2.55)$$

тогда и только тогда, когда существует унитарная матрица $u = (u_{\alpha\beta})$, такая что

$$|\tilde{\psi}_{\alpha}\rangle = \sum_{\beta} u_{\alpha\beta} |\tilde{\chi}_{\beta}\rangle. \quad (2.56)$$

Здесь ко множеству с меньшим числом состояний добавлены нулевые векторы, таким образом число состояний в обоих множествах становится равным.

Это утверждение будет полезно и далее, например, при описании свободы, которая имеется в изложении обобщенных квантовых измерений. Чтобы доказать утверждение, мы сперва допустим, что выполняется (2.56). Прямой подстановкой можно просто получить, что (2.55) тоже выполняется, то есть оба множества генерируют одну и ту же матрицу плотности. Наоборот, предположим, что выполняется (2.55). Запишем разложение ρ в спектр (2.50) как $\rho = \sum_i |\tilde{\varphi}_i\rangle\langle\tilde{\varphi}_i|$, где $|\tilde{\varphi}_i\rangle = \sqrt{p_i}|\varphi_i\rangle$. Рассмотрим произвольное состояние $|\psi\rangle$, которое ортогонально к пространству, натянутому на состояния $\{|\tilde{\varphi}_i\rangle\}$. Тогда мы имеем

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle = 0 = \sum_{\alpha} |\langle\psi|\tilde{\psi}_{\alpha}\rangle|^2, \quad (2.57)$$

откуда делаем вывод, что $\langle\psi|\tilde{\psi}_{\alpha}\rangle = 0$ для всех α и для всех $|\psi\rangle$ приведенного выше вида. Это означает, что $|\tilde{\psi}_{\alpha}\rangle$ может быть выражено, как линейная комбинация $|\tilde{\varphi}_i\rangle$,

$$|\tilde{\psi}_{\alpha}\rangle = \sum_i c_{\alpha i} |\tilde{\varphi}_i\rangle. \quad (2.58)$$

Это дает

$$\rho = \sum_i |\tilde{\varphi}_i\rangle\langle\tilde{\varphi}_i| = \sum_{ij} \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha j}^* c_{\alpha i} \right) |\tilde{\varphi}_i\rangle\langle\tilde{\varphi}_j|, \quad (2.59)$$

откуда мы получаем

$$\sum_{\alpha} c_{j\alpha}^* c_{\alpha i} = \delta_{ji}. \quad (2.60)$$

Это означает, что матрица $c = (c_{\alpha i})$ может быть дополнена до квадратной и унитарной матрицы, такой что

$$|\tilde{\psi}_\alpha\rangle = \sum_\beta c_{\alpha\beta} |\tilde{\varphi}_\beta\rangle, \quad (2.61)$$

где, если необходимо, ко множеству состояний $|\tilde{\varphi}_i\rangle$ должны быть добавлены нулевые векторы. Тем же способом мы получаем отношение вида

$$|\tilde{\chi}_\alpha\rangle = \sum_\beta d_{\alpha\beta} |\tilde{\varphi}_\beta\rangle, \quad (2.62)$$

с унитарной матрицей d . Последние два уравнения дают в результате отношение требуемого вида (2.56), где матрица $u = cd^\dagger$ является унитарной, так как c и d — унитарные.

2.1.3.3. Невозможность существования бездисперсионных ансамблей. Хорошо известно, что квантовая механика не может быть сформулирована как статистическая теория на классическом вероятностном пространстве. Существует много математических теорем, которые разными способами выражают этот факт (см. например Gudder, 1979). Здесь и в следующем параграфе мы объясним это утверждение с вероятностной точки зрения.

Рассмотрим произвольную борелевскую алгебру \mathcal{B} событий на пространстве выборок Ω (см. параграф 1.1). Тогда всегда можно ввести бездисперсионную меру μ на \mathcal{B} следующим способом: возьмем некоторую фиксированную точку $\omega_0 \in \Omega$ и определим $A \in \mathcal{B}$,

$$\mu(A) \equiv \begin{cases} 1, & \text{для } \omega_0 \in A, \\ 0, & \text{для } \omega_0 \notin A. \end{cases} \quad (2.63)$$

Вероятностное пространство, определенное таким образом, имеет то свойство, что все случайные величины X на нем являются бездисперсионными. Фактически, кумулятивное распределение X задается (см. (1.17))

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x < x_0, \\ 1, & \text{для } x \geq x_0. \end{cases} \quad (2.64)$$

Это говорит о том, что X является точной, детерминированной величиной, которая с единичной вероятностью принимает единственное значение $x_0 = X(\omega_0)$.

Согласно известной теореме фон Неймана (von Neumann, 1955) в квантовой механике ситуация заметно отличается, а именно, не существует бездисперсионных ансамблей \mathcal{E} какого бы то ни было типа. Это просто выводится с помощью полученной выше статистической формулы. Действительно, если бы \mathcal{E} был таковым ансамблем и ρ — его статистическим оператором, то мы должны были бы получить $\text{Var}(R) = 0$ для всех наблюдаемых \hat{R} , так что

$$\text{tr} \left\{ \hat{R}^2 \rho \right\} = \left[\text{tr} \left\{ \hat{R} \rho \right\} \right]^2. \quad (2.65)$$

Выбирая для \hat{R} одномерные проекции $\hat{R} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\|\psi\| = 1$, находим

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle = \langle\psi|\rho|\psi\rangle^2, \quad (2.66)$$

и, следовательно, $\langle\psi|\rho|\psi\rangle$ должна быть или 0 или 1 для всех ортов в \mathcal{H} . Отсюда следует, что $\rho = 0$ или $\rho = I$, но оба варианта невозможны, поскольку не являются статистическими операторами (они нарушают условие нормировки $\text{tr}(\rho) = 1$; если допускаются ненормируемые матрицы плотности, то случай $\rho = 0$ явно исключается, но также исключается случай $\rho = I$, так как он не задает бездисперсионного ансамбля, что просто показать прямыми вычислениями).

2.1.4. Совместные вероятности в квантовой механике

Как мы уже видели, самосопряженный оператор \hat{R} через свое спектральное семейство E_r приводит к случайной величине R с кумулятивной функцией распределения $F_R(r)$, задаваемой (2.29) (для простоты мы рассматриваем только ансамбли в чистых состояниях). Рассмотрим теперь два самосопряженных оператора \hat{R}_1 и \hat{R}_2 и соответствующие случайные величины R_1, R_2 с функциями распределения

$$F_i(r) = \langle\psi|E_r^i|\psi\rangle, \quad i = 1, 2, \quad (2.67)$$

где E_r^1 и E_r^2 обозначают спектральные семейства \hat{R}_1 и \hat{R}_2 соответственно. Важный вопрос: какова природа статистических корреляций между случайными величинами R_1 и R_2 , и можно ли описать эти корреляции в терминах классической совместной вероятности?

Ответ дает теорема Нельсона (Nelson, 1967), которая, в сущности, утверждает, что две наблюдаемых \hat{R}_1 и \hat{R}_2 могут быть представлены во всех состояниях как случайные величины на обычном, классическом вероятностном пространстве тогда и только тогда, когда они коммутируют,

то есть тогда и только тогда, когда $[\hat{R}_1, \hat{R}_2] = 0$. Следовательно, корреляции между некоммутирующими наблюдаемыми в общем случае не допускают описания с помощью классических совместных распределений вероятности.

Сформулируем эту теорему более точно. Рассмотрим два случайных числа R_1, R_2 на обычном вероятностном пространстве с мерой вероятности μ . Обозначим через

$$F(r_1, r_2) = \mu(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2) \quad (2.68)$$

их кумулятивное совместное распределение вероятностей. Если R_1 и R_2 — статистически независимы (см. (1.26)), совместное распределение вероятностей раскладывается на множители, $F(r_1, r_2) = F_1(r_1) \cdot F_2(r_2)$. В этом случае $F(r_1, r_2)$ может быть получена, конечно, из маргинальных распределений $F_1(r_1)$ и $F_2(r_2)$. Это невозможно, если R_1 и R_2 — статистически зависимы. Тем не менее, если функция распределения случайной величины

$$k \cdot R \equiv k_1 R_1 + k_2 R_2, \quad (2.69)$$

а именно функция

$$F_{k \cdot R}(r) = \mu(k_1 R_1 + k_2 R_2 \leq r), \quad (2.70)$$

известна для всех действительных k_1, k_2 , совместное распределение $F(r_1, r_2)$ определено единственным образом. Эта теорема относится к классической теории вероятностей и может быть выведена следующим путем. Вспомним, что $F(r_1, r_2)$ единственным образом определяется своей характеристической функцией

$$G(k_1, k_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp[i(k_1 r_1 + k_2 r_2)] dF(r_1, r_2). \quad (2.71)$$

Это уравнение, записанное в виде

$$G(k_1, k_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ir} dF_{k \cdot R}(r), \quad (2.72)$$

явно показывает, что характеристическая функция для $F(r_1, r_2)$ и, следовательно, сама $F(r_1, r_2)$ может быть получена из $F_{k \cdot R}(r)$.

Обратимся теперь к квантовой механике и рассмотрим описанные выше самосопряженные операторы \hat{R}_1 , \hat{R}_2 . Мы также допускаем, что линейная комбинация

$$k \cdot \hat{R} \equiv k_1 \hat{R}_1 + k_2 \hat{R}_2 \quad (2.73)$$

является самосопряженной для всех действительных k_1 , k_2 , и обозначим через $E_r^{k \cdot \hat{R}}$ спектральное семейство оператора $k \cdot \hat{R}$. Тогда можно было бы ожидать, что самосопряженный оператор (2.73) соответствует случайной величине (2.69), что означает, в соответствии со статистическими формулами квантовой механики, что функция распределения (2.69) задается через

$$F_{k \cdot R}(r) = \langle \psi | E_r^{k \cdot \hat{R}} | \psi \rangle. \quad (2.74)$$

Если это верно, то наблюдаемые \hat{R}_1 и \hat{R}_2 имеют совместное распределение вероятности $F(r_1, r_2)$, которая может быть определена из $F_{k \cdot R}(r)$ с помощью уравнения (2.72). Поэтому мы приходим к следующей формулировке: считается, что две наблюдаемых \hat{R}_1 и \hat{R}_2 имеют совместную функцию распределения в состоянии ψ , если существует классическое вероятностное пространство и два случайных числа R_1 , R_2 в нем, таких что для всех действительных k_1 , k_2 выполняется (2.74).

Подставляя уравнение (2.74) в (2.72), мы получаем

$$\begin{aligned} G(k_1, k_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ir} dF_{k \cdot R}(r) = \left\langle \psi \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ir} dE_r^{k \cdot \hat{R}} \right| \psi \right\rangle = \\ &= \left\langle \psi \left| \exp(i k \cdot \hat{R}) \right| \psi \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.75)$$

здесь мы применили уравнение (2.11) к функции $f(r) = \exp(ir)$ и оператору $k \cdot \hat{R}$. Следовательно, мы видим, что \hat{R}_1 и \hat{R}_2 имеют совместное распределение вероятности в состоянии ψ , тогда (2.75) обязательно является его характеристической функцией.

Исследуем значения матожидания, сгенерированные $G(k_1, k_2)$. Первые члены ряда Тейлора вблизи $k = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} G(k_1, k_2) &= 1 + ik_1 \langle \psi | \hat{R}_1 | \psi \rangle + ik_2 \langle \psi | \hat{R}_2 | \psi \rangle - \frac{k_1^2}{2} \langle \psi | \hat{R}_1^2 | \psi \rangle - \frac{k_2^2}{2} \langle \psi | \hat{R}_2^2 | \psi \rangle - \\ &- \frac{1}{2} k_1 k_2 \langle \psi | \hat{R}_1 \hat{R}_2 + \hat{R}_2 \hat{R}_1 | \psi \rangle + \mathcal{O}(k^3). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Из уравнения видно, что $G(k_1, k_2)$ генерирует квантовое матожидание симметризованного произведения $(\hat{R}_1 \hat{R}_2 + \hat{R}_2 \hat{R}_1)/2$, но не оператора $i(\hat{R}_1 \hat{R}_2 - \hat{R}_2 \hat{R}_1)/2$. Иными словами, G не содержит никакой информации о разнице между матожиданием $\langle \psi | \hat{R}_1 \hat{R}_2 | \psi \rangle$ и $\langle \psi | \hat{R}_2 \hat{R}_1 | \psi \rangle$.

С введенным выше определением совместного распределения мы можем точно сформулировать теорему Нельсона: наблюдаемые \hat{R}_1 и \hat{R}_2 имеют совместное распределение вероятностей во всех состояниях ψ тогда и только тогда, когда они коммутируют, то есть тогда и только тогда, когда $[\hat{R}_1, \hat{R}_2] = 0$.

Очевидно, что \hat{R}_1 и \hat{R}_2 имеют совместное распределение вероятностей, если они коммутируют, а именно

$$F(r_1, r_2) = \langle \psi | E_{r_1}^1 E_{r_2}^2 | \psi \rangle. \quad (2.77)$$

Как легко проверяется с использованием свойств спектральных семейств $E_{r_1}^1$ и $E_{r_2}^2$, это действительная, неотрицательная функция со свойствами истинной функции совместного распределения. Вдобавок, она приводит к характеристической функции (2.75), и выполняется отношение (2.74).

Общее доказательство части теоремы *и только тогда* — более сложное. Мы не будем приводить детали доказательства, а только обсудим важный случай $\hat{R}_1 = \hat{Q}$, оператор координаты, и $\hat{R}_2 = \hat{P}$, оператор импульса, удовлетворяющие гейзенберговскому коммутационному соотношению ($\hbar = 1$)

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i. \quad (2.78)$$

Легко видеть, что функция (2.75) *не* является характеристической функцией классического совместного распределения вероятностей. Фактически, проводя преобразование Фурье, мы находим, что плотность $F(q, p)$ дается

$$\begin{aligned} f(q, p) &\equiv \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} = \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi} e^{-i(k_1 q + k_2 p)} \left\langle \psi \left| e^{i(k_1 \hat{Q} + k_2 \hat{P})} \right| \psi \right\rangle = (2.79) \\ &= \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi} \int dx e^{-i(k_1 q + k_2 p) + ik_1 k_2 / 2 + ik_1 x} \psi^*(x) \psi(x + k_2). \end{aligned}$$

Здесь мы ввели координатное представление вектора состояния, $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$. Далее мы воспользовались

$$e^{i(k_1 \hat{Q} + k_2 \hat{P})} = e^{ik_1 \hat{Q}} e^{ik_2 \hat{P}} e^{ik_1 k_2 / 2} \quad (2.80)$$

и тем фактом, что $\exp(ik_2\hat{P})$ вызывает сдвиг $x \mapsto x + k_2$. Проводя интегрирование по k_1 и x и заменяя $s = -k_2$, в итоге мы приходим к

$$f(q, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{2\pi} e^{isp} \psi^*(q + s/2) \psi(q - s/2). \quad (2.81)$$

Это известное *вигнеровское распределение* (см. например Louisell, 1990). Интересно видеть, что, в рассматриваемом контексте, оно оказывается единственным возможным кандидатом для совместной плотности вероятности координаты и импульса. Однако, как хорошо известно, оно не представляет собой истинную плотность вероятности, так как не является положительным для произвольного ψ . Пример приведен на рис. 2.1.

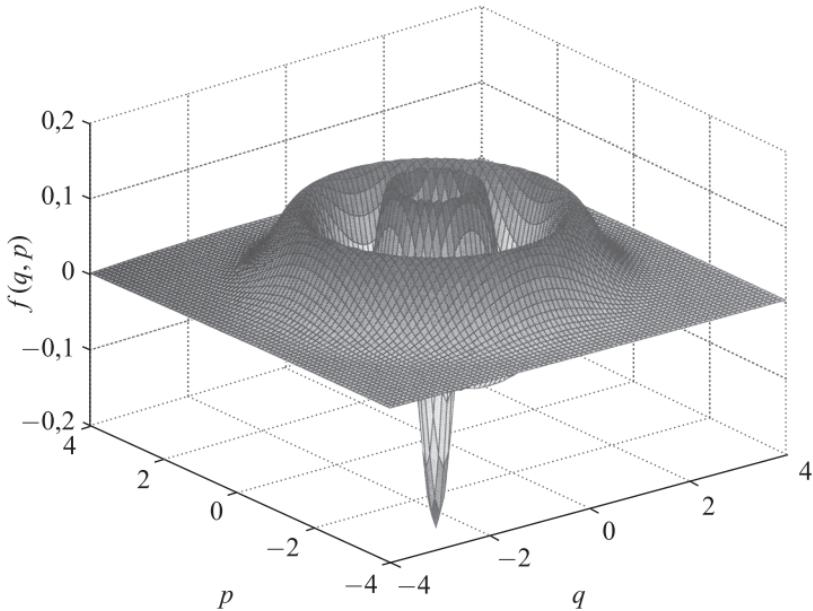


Рис. 2.1. Распределение Вигнера, (2.81), соответствующее третьему возбужденному собственному состоянию гармонического осциллятора с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2)$.

Несмотря на тот факт, что вигнеровское распределение не является истинным распределением вероятности, — это хорошая величина. Ее Фурье-

рье-преобразование известно как *вигнеровская характеристическая функция*. Для системы описываемой произвольной матрицей плотности ρ она задается

$$G(k_1, k_2) = \text{tr} \left\{ \exp \left(i(k_1 \hat{Q} + k_2 \hat{P}) \right) \rho \right\}. \quad (2.82)$$

Вводя операторы рождения и уничтожения b^\dagger и b через соотношения $\hat{Q} = (b + b^\dagger)/\sqrt{2}$, $\hat{P} = -i(b - b^\dagger)/\sqrt{2}$ и используя комплексную переменную $\alpha = ik_1 - k_2$, вигнеровскую характеристическую функцию часто записывают в виде

$$\chi(\alpha, \alpha^*) = \text{tr} \{ \exp(\alpha b^\dagger - \alpha^* b) \rho \}. \quad (2.83)$$

Подобно уравнению (2.76), разложением экспоненты может быть показано, что $\chi(\alpha, \alpha^*)$ генерирует симметричные произведения b и b^\dagger через формулу

$$\text{tr} \left\{ (b^n b^{\dagger m})_s \rho \right\} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial(-\alpha^*)^n \partial \alpha^m} \chi(\alpha, \alpha^*) \Big|_{\alpha=\alpha^*=0}. \quad (2.84)$$

Здесь симметризованное упорядоченное произведение $(b^n b^{\dagger m})_s$ определено посредством усреднения по всем возможным способам упорядочения операторов в произведении $b^n b^{\dagger m}$.

2.2. Составные квантовые системы

В теории открытых квантовых систем понятие составных систем является фундаментальным. Гильбертово пространство составной квантовой системы — это тензорное произведение гильбертовых пространств ее подсистем. Настоящий раздел служит для введения в некоторые общие особенности тензорных произведений гильбертовых пространств и статистических свойств сложных систем и их подсистем.

2.2.1. Тензорное произведение

Мы рассматриваем две квантовые системы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ с соответствующими гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$. Две системы могут представлять две (различимые) частицы, два различных составных объекта (например, два атома или молекулы) или две разных степени свободы одного и того же объекта (например, вращательную и трансляционную степени свободы молекулы). В общем случае $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ взаимодействуют друг с другом. В соответствии с постулатами квантовой механики пространство

состояний \mathcal{H} составной системы $S = S^{(1)} + S^{(2)}$ дается тензорным произведением гильбертовых пространств, относящихся к подсистемам $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}. \quad (2.85)$$

Если мы выберем заданные (фиксированные) ортонормированные базисы $\{|\varphi_i^{(1)}\rangle\}$ и $\{|\varphi_j^{(2)}\rangle\}$ в $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ соответственно, то общее состояние в тензорном произведении пространств \mathcal{H} может быть записано как

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} \alpha_{ij} |\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle. \quad (2.86)$$

Это означает, что элементы $|\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle$ образуют базис в тензорном произведении пространств и что размерность \mathcal{H} равна произведению размерностей $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$.

Если $A^{(1)}$ есть оператор, действующий в $\mathcal{H}^{(1)}$, и $A^{(2)}$ есть оператор, действующий в $\mathcal{H}^{(2)}$, то можно определить их тензорное произведение $A^{(1)} \otimes A^{(2)}$ как

$$(A^{(1)} \otimes A^{(2)})(|\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle) \equiv (A^{(1)}|\varphi_i^{(1)}\rangle) \otimes (A^{(2)}|\varphi_j^{(2)}\rangle), \quad (2.87)$$

а также линейным продолжением этой формулы для произвольных состояний (2.86). Любой оператор A , действующий в \mathcal{H} , может быть представлен в виде линейной комбинации тензорных произведений,

$$A = \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{(1)} \otimes A_{\alpha}^{(2)}. \quad (2.88)$$

В частности, наблюдаемые системы $S^{(1)}$ принимают форму $A^{(1)} \otimes I^{(2)}$, тогда как наблюдаемые системы $S^{(2)}$ задаются выражением $I^{(1)} \otimes A^{(2)}$. Единичные операторы в $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ обозначены, соответственно, $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$.

Матрица плотности сложной системы S является оператором в пространстве состояний $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Если подсистемы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ – не коррелированы, полная матрица плотности принимает форму тензорного произведения матриц плотности подсистем,

$$\rho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}. \quad (2.89)$$

Отсюда следует, что матожидание любого тензорного произведения операторов, относящихся к подсистемам, разлагается на сомножители (фактори-

зуется),

$$\begin{aligned} \langle A^{(1)} \otimes A^{(2)} \rangle &\equiv \text{tr} \left\{ \left(A^{(1)} \otimes A^{(2)} \right) \rho \right\} = \text{tr}^{(1)} \left\{ A^{(1)} \rho^{(1)} \right\} \cdot \text{tr}^{(2)} \left\{ A^{(2)} \rho^{(2)} \right\} = \\ &= \langle A^{(1)} \rangle \cdot \langle A^{(2)} \rangle. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Здесь $\text{tr}^{(1)}$ и $\text{tr}^{(2)}$ обозначают частичный след по гильбертовым пространствам $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ соответственно.

Если интерес представляют только наблюдаемые подсистемы $S^{(1)}$, то есть только операторы вида

$$A = A^{(1)} \otimes I^{(2)}, \quad (2.91)$$

то удобно ввести редуцированную матрицу плотности, относящуюся к подсистеме, посредством

$$\rho^{(1)} \equiv \text{tr}^{(2)} \rho. \quad (2.92)$$

В этом уравнении $\text{tr}^{(2)}$ обозначает частичный след, взятый по второму гильбертовому пространству $\mathcal{H}^{(2)}$. Матрица плотности, полученная путем вычисления частичного следа матрицы плотности в некотором большем пространстве, иногда называется «фиктивной» смесью. Она полностью описывает статистические свойства всех наблюдаемых, принадлежащих к рассматриваемой подсистеме, так как матожидание любой наблюдаемой вида (2.91) может быть определено с помощью формулы

$$\langle A \rangle = \text{tr}^{(1)} \left\{ A^{(1)} \rho^{(1)} \right\}. \quad (2.93)$$

Мы видели, что приведенная матрица плотности подсистемы $S^{(1)}$ получается вычислением частичного следа по подсистеме $S^{(2)}$. Интересно будет заметить, что такой способ описания подсистемы $S^{(1)}$ единственно возможный. Точнее, если мы ищем функцию $f: \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}^{(1)})$, которая ставит в соответствие пространство состояний сложной системы пространству состояний подсистемы, тогда функция $f(\rho) = \text{tr}^{(2)} \rho$ единственная обладает свойством

$$\text{tr}^{(1)} \left\{ A^{(1)} f(\rho) \right\} = \text{tr} \left\{ \left(A^{(1)} \otimes I^{(2)} \right) \rho \right\}. \quad (2.94)$$

Следовательно, данное выше определение приведенной матрицы плотности является единственно возможным, совместимым со статистическими формулами.

Чтобы доказать это утверждение, удобно ввести пространство Лиувилля. Для некоторого заданного гильбертова пространства \mathcal{H} пространство Лиувилля есть пространство операторов Гильберта–Шмидта, то есть пространство операторов A в \mathcal{H} , для которых $\text{tr } A^\dagger A$ конечен. Дополненное скалярным произведением

$$(A, B) \equiv \text{tr}\{A^\dagger B\} \quad (2.95)$$

пространство операторов Гильберта–Шмидта становится гильбертовым пространством. Следовательно, можно ввести ортонормированный базис $\{B_i\}$ в этом пространстве, удовлетворяющий условиям ортогональности и полноты,

$$(B_i, B_j) = \delta_{ij}, \quad (2.96)$$

$$A = \sum_i B_i (B_i, A). \quad (2.97)$$

Рассмотрим теперь пространство Лиувилля, связанное с пространством состояний $\mathcal{H}^{(1)}$ подсистемы $S^{(1)}$. Мы возьмем ортонормированный базис $\{B_i\}$ эрмитовых операторов B_i на $\mathcal{H}^{(1)}$. Используя условие полноты (2.97) и требование (2.94), мы получим

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \sum_i B_i (B_i, f(\rho)) = \\ &= \sum_i B_i \text{tr}^{(1)}\{B_i f(\rho)\} = \\ &= \sum_i B_i \text{tr}\{(B_i \otimes I^{(2)})\rho\} = \\ &= \sum_i B_i \text{tr}^{(1)}\{B_i \rho^{(1)}\} = \\ &= \sum_i B_i (B_i, \rho^{(1)}) = \\ &= \rho^{(1)} = \text{tr}^{(2)} \rho, \end{aligned} \quad (2.98)$$

которое доказывает, что $f(\rho)$ обязательно задается частичным следом ρ , взятым по подсистеме $S^{(2)}$.

2.2.2. Разложение Шмидта и запутанность

Важная характеристика состояний сложной квантовой системы получается при помощи теоремы о разложении Шмидта. Эта теорема утверждает

ет, что для любого заданного состояния $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ существуют ортонормированные базисы, базисы Шмидта $\{|\chi_i^{(1)}\rangle\}$ и $\{|\chi_j^{(2)}\rangle\}$ в $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ соответственно, такие что

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle. \quad (2.99)$$

α_i — комплексные числа, называемые коэффициентами Шмидта. Для нормированного состояния мы имеем, очевидно,

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_i |\alpha_i|^2 = 1. \quad (2.100)$$

Нужно заметить, что базис Шмидта, который допускает представление в виде (2.99), зависит, в общем случае, от состояния $|\Psi\rangle$.

Теорему о разложении Шмидта можно доказать следующим способом. Во-первых, мы свободно можем предположить, что $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ имеют одинаковую размерность. Тогда матрица $\alpha = (\alpha_{ij})$ коэффициентов в разложении (2.86) относительно фиксированных базисных векторов $|\varphi_i^{(1)}\rangle$ и $|\varphi_j^{(2)}\rangle$ является квадратной. При помощи разложения по сингулярным числам эта матрица может всегда быть записана в виде $\alpha = u d v$, где u и v — унитарные матрицы, а d — диагональная матрица с неотрицательными диагональными элементами $\alpha_i \geq 0$. Следовательно, разложение (2.86) принимает вид

$$|\Psi\rangle = \sum_{ijk} u_{ij} \alpha_j v_{jk} |\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_k^{(2)}\rangle. \quad (2.101)$$

В силу унитарности u и v векторы, определенные как

$$|\chi_j^{(1)}\rangle \equiv \sum_i u_{ij} |\varphi_i^{(1)}\rangle, \quad (2.102)$$

$$|\chi_j^{(2)}\rangle \equiv \sum_k v_{jk} |\varphi_k^{(2)}\rangle, \quad (2.103)$$

образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ соответственно. Применив эти выражения к уравнению (2.101), мы немедленно получаем разложение Шмидта (2.99). Обратите внимание, что доказательство также демонстрирует, что базис Шмидта всегда может быть выбран таким, что коэффициенты Шмидта будут действительными и неотрицательными.

Число ненулевых коэффициентов Шмидта α_i называется числом Шмидта. Это число инвариантно относительно унитарных преобразований $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$, которые действуют только в пространствах $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$.

соответственно. По той же причине число Шмидта не зависит от выбранного базиса Шмидта и поэтому однозначно определено для данного состояния $|\Psi\rangle$.

Состояние $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ называется *запутанным*, если оно не может быть записано в виде тензорного произведения $|\varphi^{(1)}\rangle \otimes |\varphi^{(2)}\rangle$ состояний подсистем. Если $|\Psi\rangle$ может быть записано в виде тензорного произведения, мы называем его факторизованным состоянием. Из теоремы о разложении Шмидта следует, что $|\Psi\rangle$ является запутанным состоянием, тогда и только тогда, когда число Шмидта больше 1. Аналогично, $|\Psi\rangle$ является произведением состояний, тогда и только тогда, когда его число Шмидта равно 1. Другое понятие будет полезно позже: если модули всех ненулевых коэффициентов Шмидта для данного состояния $|\Psi\rangle$ равны друг другу, такое состояние называется *максимально запутанным*.

Разложение Шмидта может быть использовано для доказательства нескольких интересных утверждений о состояниях сложной системы и ее подсистем. Например, если сложная система S находится в чистом состоянии $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, приведенные матрицы $\rho^{(1)} = \text{tr}^{(2)}\rho$ и $\rho^{(2)} = \text{tr}^{(1)}\rho$ имеют одинаковые собственные значения. Действительно, разложение Шмидта $|\Psi\rangle$ немедленно дает

$$\rho^{(1)} = \text{tr}^{(2)} \{|\Psi\rangle\langle\Psi|\} = \sum_i |\alpha_i|^2 |\chi_i^{(1)}\rangle\langle\chi_i^{(1)}|, \quad (2.104)$$

$$\rho^{(2)} = \text{tr}^{(1)} \{|\Psi\rangle\langle\Psi|\} = \sum_i |\alpha_i|^2 |\chi_i^{(2)}\rangle\langle\chi_i^{(2)}|, \quad (2.105)$$

откуда и следует утверждение. Заметим, что подсистемы обычно описываются смешанными состояниями. В частности, если $|\Psi\rangle$ — максимально запутанное, то приведенные матрицы плотности пропорциональны единичным матрицам в подпространствах, натянутых на базисные векторы Шмидта, соответствующие ненулевым коэффициентам Шмидта. Кроме того, полученные представления для матриц плотности подсистем показывают, что $|\Psi\rangle$ является факторизованным состоянием в том и только в том случае, когда редуцированные матрицы плотности $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ описывают чистые состояния.

2.3. Квантовые меры энтропии

Квантовые меры энтропии играют ключевую роль в квантовой статистической механике и теории квантовой информации. В этом разделе мы

дадим краткий обзор основных определений и некоторые важные свойства квантовых энтропий, которые будут использованы в последующих разделах для описания, например, получаемой при квантовом измерении информации и необратимой природы квантовой динамики открытых систем. Подробности о квантовых энтропиях можно найти в обзоре Верла (Werl, 1978) и книге Нильсена и Чанга (Nielsen, Chuang, 2000).

2.3.1. Энтропия фон Неймана

Энтропия фон Неймана дает важный энтропийный функционал, используемый в квантовой статистической механике и термодинамике. Если состояние квантового статистического ансамбля задано через матрицу плотности ρ , то энтропия фон Неймана определяется как

$$S(\rho) \equiv -\text{tr}\{\rho \ln \rho\}. \quad (2.106)$$

В текущем разделе мы считаем постоянную Больцмана k_B равной 1, так что мы измеряем температуру в энергетических единицах. Используя спектральное разложение матрицы плотности,

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (2.107)$$

мы можем записать

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \ln p_i \equiv H(\{p_i\}). \quad (2.108)$$

В этих выражениях считается, что $0 \cdot \ln 0 \equiv 0$. В точной математической формулировке $S(\rho)$ определяется посредством уравнения (2.106), если след конечен, и полагается $S(\rho) = +\infty$ в противном случае.

Уравнение (2.108) показывает, что энтропия фон Неймана равна *информационной энтропии Шеннона* $H(\{p_i\})$ распределения $i \mapsto p_i$, то есть случайного числа I с распределением $p_i = \mu(I = i)$, заданным спектральным разложением матрицы плотности ρ . Статистическая смесь, описываемая ρ , может быть получена перемешиванием чистых ансамблей, описываемых состояниями $|\varphi_i\rangle$ с соответствующими весами p_i . Тогда $S(\rho)$ выражает неопределенность или недостаток знаний о реализации конкретного состояния $|\varphi_i\rangle$ в смеси.

Мы перечислим без доказательства некоторые важные свойства энтропии фон Неймана, которые делают очевидным ее значение для квантовой статистической механики и теории квантовой информации.

- 1) Для любой матрицы плотности справедливо

$$S(\rho) \geq 0, \quad (2.109)$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда ρ является чистым состоянием.

- 2) Если гильбертово пространство имеет конечную размерность, $\dim \mathcal{H} = D < \infty$, энтропия фон Неймана ограничена сверху $S(\rho) \leq \ln D$, где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда ρ является полностью смешанным состоянием или состоянием с бесконечной температурой, $\rho = I/D$.
- 3) Энтропия фон Неймана инвариантна относительно унитарных преобразований U гильбертова пространства, то есть $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.

- 4) Энтропия фон Неймана является вогнутым функционалом $\rho \mapsto S(\rho)$ на пространстве матриц плотности. Это означает, что для любого набора плотностей ρ_i и чисел $\lambda_i \geq 0$, удовлетворяющих $\sum_i \lambda_i = 1$, имеет место неравенство

$$S\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_i \lambda_i S(\rho_i). \quad (2.110)$$

В этом соотношении равенство имеет место тогда и только тогда, когда все ρ_i с ненулевыми λ_i равны друг другу. Это свойство называется строгой вогнутостью функционала энтропии. В физических терминах это означает, что неопределенность относительно состояния $\rho = \sum_i \lambda_i \rho_i$ больше или равна среднему неопределенности состояний ρ_i , образующих результатирующую смесь.

- 5) Рассмотрим составную систему в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ и обозначим ρ матрицу плотности всей системы, а $\rho^{(1)} = \text{tr}^{(2)} \rho$ и $\rho^{(2)} = \text{tr}^{(1)} \rho$ — матрица плотности подсистем. Тогда энтропия фон Неймана подчиняется так называемому условию субаддитивности,

$$S(\rho) \leq S(\rho^{(1)}) + S(\rho^{(2)}), \quad (2.111)$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда полная матрица плотности описывает некоррелированное состояние, $\rho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$. Следовательно, неопределенность произведения состояний $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$ в общем случае больше, чем неопределенность состояния ρ сложной системы. Иными словами, вычисляя след по подсистемам, мы теряем информацию о корреляциях между подсистемами

и, следовательно, увеличиваем энтропию. Если $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ является чистым состоянием, мы получаем $S(\rho) = 0$. Из разложения Шмидта следует, что $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ имеют одинаковые собственные значения (см. уравнения (2.104) и (2.105)), и поэтому энтропии фон Неймана для подсистем равны друг другу. Получается

$$S(\rho^{(1)}) = S(\rho^{(2)}) = - \sum_i |\alpha_i|^2 \ln |\alpha_i|^2 \geq 0, \quad (2.112)$$

и левая часть неравенства строго больше нуля тогда и только тогда, когда $|\Psi\rangle$ — запутанное состояние.

2.3.2. Относительная энтропия

Для некоторой пары матриц плотности ρ и σ относительная энтропия определяется как

$$S(\rho\|\sigma) \equiv \text{tr}\{\rho \ln \rho\} - \text{tr}\{\rho \ln \sigma\}. \quad (2.113)$$

Чтобы дать строгое определение, введем ядро матрицы плотности как пространство, образованное собственными состояниями с нулевыми собственными значениями, а образ матрицы плотности как пространство, образованное собственными состояниями, относящимися к ненулевым собственным значениям. Тогда относительная энтропия считается равной $+\infty$, если ядро σ имеет нетривиальное пересечение с образом ρ .

Можно дать физическую интерпретацию относительной энтропии, если снова рассмотреть сложную квантовую систему, как в пункте 5 параграфа 2.3.1. Тогда мы имеем

$$S(\rho\|\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}) = S(\rho^{(1)}) + S(\rho^{(2)}) - S(\rho). \quad (2.114)$$

Энтропия матрицы плотности ρ сложной системы относительно соответствующего некоррелированного состояния $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$ является, следовательно, мерой изменения фон неймановской энтропии, вытекающего из вычисления следа по подсистемам, и дает меру соответствующей потери информации.

Резюмируем некоторые важные свойства функционала относительной энтропии.

- 1) Относительная энтропия удовлетворяет неравенству

$$S(\rho\|\sigma) \geq 0 \quad (2.115)$$

для всех ρ и σ , что известно как неравенство Клейна. Знак равенства имеет место, только если $\rho = \sigma$. Вместе с уравнением (2.114) неравенство Клейна приводит к свойству субаддитивности (2.111) энтропии фон Неймана.

- 2) Аналогично энтропии фон Неймана, относительная энтропия инвариантна по отношению к унитарным преобразованиям U ,

$$S(U\rho U^\dagger || U\sigma U^\dagger) = S(\rho || \sigma). \quad (2.116)$$

- 3) Относительная энтропия — взаимно выпуклая относительно своих аргументов. Это означает, что для $0 \leq \lambda \leq 1$ выполняется неравенство

$$S(\rho || \sigma) \leq \lambda S(\rho_1 || \sigma_1) + (1 - \lambda) S(\rho_2 || \sigma_2), \quad (2.117)$$

где $\rho = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$ и $\sigma = \lambda\sigma_1 + (1 - \lambda)\sigma_2$.

- 4) Если $\rho^{(1)} = \text{tr}^{(2)} \rho$ и $\sigma^{(1)} = \text{tr}^{(2)} \sigma$, то

$$S(\rho^{(1)} || \sigma^{(1)}) \leq S(\rho || \sigma). \quad (2.118)$$

Следовательно, вычисление следа по подсистеме в обоих аргументах уменьшает относительную энтропию. В частности, если ρ — некоррелированное состояние, находим

$$S(\rho^{(1)} || \sigma^{(1)}) = S(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)} || \sigma^{(1)} \otimes \rho^{(2)}). \quad (2.119)$$

Наконец, мы кратко прокомментируем теорему, имеющую фундаментальное значение для многих доказательств энтропийных неравенств. Это теорема Либа, которая утверждает, что функционал

$$f_t(A, B) = -\text{tr}\{X^\dagger A^t X B^{1-t}\} \quad (2.120)$$

является совместно выпуклым по своим аргументам A и B . Здесь A и B — положительные операторы, тогда как X является некоторым фиксированным оператором, а t — фиксированное число из отрезка $[0, 1]$. В качестве примера отметим, что теорема Либа играет ключевую роль в доказательстве теоремы о строгой субаддитивности энтропии фон Неймана (Lieb, 1973), которая утверждает, что для любой системы, состоящей из трех подсистем $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ и $S^{(3)}$, имеет место неравенство

$$S(\rho^{(1, 2, 3)}) + S(\rho^{(2)}) \leq S(\rho^{(1, 2)}) + S(\rho^{(2, 3)}), \quad (2.121)$$

где $\rho^{(1, 2, 3)}$ — матрица плотности всей системы, а

$$\rho^{(1, 2)} = \text{tr}^{(3)} \rho^{(1, 2, 3)}, \quad (2.122)$$

$$\rho^{(2, 3)} = \text{tr}^{(1)} \rho^{(1, 2, 3)}, \quad (2.123)$$

$$\rho^{(2)} = \text{tr}^{(1, 3)} \rho^{(1, 2, 3)} \quad (2.124)$$

являются приведенными матрицами плотности, относящимися к подсистемам $S^{(1)} + S^{(2)}$, $S^{(2)} + S^{(3)}$ и $S^{(2)}$ соответственно. Строгую субаддитивность для классических систем доказать достаточно просто. Напротив, простое доказательство строгой субаддитивности для квантового случая неизвестно (подробнее см. Werl, 1978; Nielsen, Chuang, 2000).

Мы применим теорему Либа в главе 3, чтобы доказать, что скорость производства энтропии для квантовой динамической полугруппы является выпуклым функционалом на пространстве состояний открытой квантовой системы. В качестве подготовительно шага мы примем в уравнении (2.120) $A = B = \rho$, чтобы получить выпуклый функционал

$$f_t(\rho) = -\text{tr}\{X^\dagger \rho^t X \rho^{1-t}\}. \quad (2.125)$$

Так как $f_0(\rho) = -\text{tr}\{X^\dagger X \rho\}$ — линейный функционал, откуда мы делаем вывод, что производная $f_t(\rho)$ по t , взятая в точке $t = 0$, также является выпуклым функционалом. Следовательно, по теореме Либа, функционал

$$\rho \mapsto -\text{tr}\{(X \rho X^\dagger - X^\dagger X \rho) \ln \rho\} \quad (2.126)$$

— выпуклый. Чтобы доказать выпуклость скорости производства энтропии, мы должны будем связать выражение в фигурных скобках с генератором необратимой квантовой динамической полугруппы, который будет получен в главе 3.

2.3.3. Линейная энтропия

В качестве еще одной меры чистоты состояний иногда полезно вместе энтропии фон Неймана использовать так называемую линейную энтропию $S_l(\rho)$, которая определяется как

$$S_l(\rho) = \text{tr}\{\rho - \rho^2\} = 1 - \text{tr} \rho^2. \quad (2.127)$$

Мы сразу же можем задать верхнюю и нижнюю границы для этого функционала,

$$0 \leq S_l(\rho) \leq 1. \quad (2.128)$$

Первое неравенство получается из неравенства (2.52), которое также показывает, что $S_l(\rho)$ равно нулю тогда и только тогда, когда ρ — чистое состояние. Второе неравенство следует из того факта, что $\text{tr } \rho^2$ — положительный оператор.

Для D -мерного пространства, $\dim \mathcal{H} = D$, имеется верхняя граница

$$S_l(\rho) \leqslant 1 - \frac{1}{D}. \quad (2.129)$$

Функционал $S_l(\rho)$ достигает своего максимального значения для состояния при бесконечной температуре, $\rho = I/D$.

2.4. Теория квантового измерения

В этом разделе мы обсудим квантовую теорию измерений, которая является базовой для статистической интерпретации квантовой механики. Общее введение может быть найдено в книге Готтфрида (Gottfried, 1974).

Процесс измерения в квантовой механике играет двоякую роль. С одной стороны, он описывает, каким образом изменяется квантовая система, если над ней производится измерение, таким образом влияя на предсказания относительно поведения системы в будущем. С другой стороны, измерение дает рецепт для приготовления квантовой системы в определенном состоянии. Следовательно, процесс измерения говорит нам, как выбрать множество экспериментальных условий, о которых мы говорили в начале параграфа 2.1.2 и которые приводили бы к реализации требуемых квантовых статистических ансамблей.

2.4.1. Идеальные квантовые измерения

Фундаментальный постулат измерений в квантовой механике может быть сформулирован следующим образом. Предположим, что некоторое свойство B с соответствующим проекционным оператором $E(B)$ измеряется на квантовом ансамбле \mathcal{E} , описываемом матрицей плотности ρ . Тогда, после измерения, матрица плотности

$$\rho' = \frac{E(B)\rho E(B)}{\text{tr}\{E(B)\rho E(B)\}} \quad (2.130)$$

описывает субансамбль \mathcal{E}' , состоящий из тех систем, для которых свойство B оказалось истинным. Это хорошо известный проекционный посту-

лат Неймана – Людерса (von Neumann, 1955; Lüders, 1951). Обратите внимание, что знаменатель в (2.130) гарантирует, что ρ' – нормирована, $\text{tr } \rho' = 1$, и что это вероятность обнаружения измеряемого свойства, а именно

$$P(B) = \text{tr}\{E(B)\rho E(B)\} = \text{tr}\{E(B)\rho\}. \quad (2.131)$$

Если мы возьмем некоторый самосопряженный оператор \hat{R} , тогда B может быть, например, борелевым множеством в \mathbb{R} , соответствующим событием является то, что случайная величина R принимает значение из B . Проекционный оператор $E(B)$ определяется в терминах спектрального семейства \hat{R} из уравнения (2.30). Например, рассмотрим ортогональное разложение единицы, которое дается проекторами ΔE_α , определенными в уравнении (2.12). Тогда вероятность для события $R \in \Delta r_\alpha$ принимает вид

$$P(\Delta r_\alpha) = \text{tr}\{\Delta E_\alpha \rho\}, \quad (2.132)$$

тогда как субансамбль, соответствующий конкретно этому событию, описывается матрицей плотности

$$\rho'_\alpha = \frac{1}{P(\Delta r_\alpha)} \Delta E_\alpha \rho \Delta E_\alpha. \quad (2.133)$$

Вероятности $P(\Delta r_\alpha)$ нормированы на 1 в смысле условия полноты (2.13),

$$\sum_{\alpha} P(\Delta r_\alpha) = 1. \quad (2.134)$$

Матрицы плотности ρ'_α субансамблей – ортогональны в том смысле, что $\rho'_\alpha \rho'_\beta = \delta_{\alpha\beta} \rho'_\beta$.

Измерение, задаваемое ортогональным разложением ΔE_α единицы, следовательно, приводит к разложению исходного ансамбля \mathcal{E} на множество субансамблей, обозначенных здесь индексом α . Такое разбиение исходного ансамбля на множество ансамблей, каждый из которых обусловлен конкретным результатом измерения, называется *селективным измерением*.

Можно представить экспериментальную ситуацию, в которой различные субансамбли снова перемешаны с вероятностями $P(\Delta r_\alpha)$ их появления. Тогда получившийся ансамбль описывается матрицей плотности

$$\rho' = \sum_{\alpha} P(\Delta r_\alpha) \rho'_\alpha = \sum_{\alpha} \Delta E_\alpha \rho \Delta E_\alpha. \quad (2.135)$$

Перемешивание субансамблей после измерения называется *неселективным измерением*.

В качестве другого примера, возьмем самосопряженный оператор \hat{R} с дискретным, возможно, вырожденным спектром (см. пример 2.1) и исходную матрицу плотности $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Вероятность для измерения дискретного собственного значения r_n , то есть для события $R = r_n$, относящегося к проекционному оператору Π_n , дается

$$P(r_n) = \text{tr}\{\Pi_n \rho\} = \langle\psi|\Pi_n|\psi\rangle. \quad (2.136)$$

Соответствующий субансамбль описывается матрицей плотности

$$\rho'_n = \frac{\Pi_n|\psi\rangle\langle\psi|\Pi_n}{P(r_n)} = |\phi\rangle\langle\phi|, \quad (2.137)$$

откуда следует, что измеренный субансамбль может быть представлен нормированным вектором состояния

$$\phi = P(r_n)^{-1/2} \Pi_n \psi. \quad (2.138)$$

Следовательно, мы видим, что субансамбль снова является чистым состоянием. В общем случае это неверно, если исходная матрица плотности ρ — настоящая смесь. Однако, если собственное значение r_n — невырожденное, проекция $\Pi_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, тогда измерение приводит к субансамблю, описываемому чистым состоянием ϕ , даже если ρ — настоящая смесь, а именно $\phi = \psi_n$ с вероятностью $P(r_n) = \langle\psi_n|\rho|\psi_n\rangle$.

Наконец, рассмотрим оператор координаты \hat{Q} (см. пример 2.2). Предположим, что идеальное измерение события $Q \in \Delta \equiv (a, b]$, то есть того события, что координата лежит в интервале $(a, b]$, выполняется на ансамбле \mathcal{E} в чистом состоянии $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Вероятность этого события

$$P(\Delta) = \text{tr}\{E(\Delta)\rho\} = \int_a^b dx |\psi(x)|^2, \quad (2.139)$$

и соответствующий субансамбль обязательно описывается чистым состоянием $\rho' = |\phi\rangle\langle\phi|$, где

$$\phi(x) = \begin{cases} P(\Delta)^{-1/2} \psi(x), & a < x \leq b, \\ 0, & x \leq a, \quad x > b, \end{cases} \quad (2.140)$$

представляет собой новую волновую функцию после измерения.

2.4.2. Операции и эффекты

Важно отметить, что последний пример предыдущего параграфа описывает идеальное квантовое измерение проекции $E(\Delta)$, которая получается из непрерывного спектрального семейства E_q оператора координаты \hat{Q} . Однако нужно понимать, что на практике измеряется не в точности спектральное семейство E_q , а скорее некоторое приближение, которое связано с ограниченным разрешением детектора. Более того, как мы увидим, на практике встречаются многие другие разновидности схем квантовых измерений. Получается, что в этом контексте оказывается очень полезной обобщенная теория квантовых измерений, основанная на понятиях операций и эффектов.

Мы рассмотрим некоторую измерительную схему, у которой есть множество \mathcal{M} возможных исходов $m \in \mathcal{M}$. Можно рассматривать \mathcal{M} как классическое пространство выборок, а возможные исходы m как элементарные события. Для простоты мы считаем множество \mathcal{M} дискретным. Измерение проводится над некоторым квантовым статистическим ансамблем, который описывается матрицей плотности ρ .

Обобщенная теория квантовых измерений (Kraus, 1983; Davies, 1976; Braginsky, Khalili, 1992) основана на принципах, которые изображены на рис. 2.2 и которые могут рассматриваться как естественное обобщение проекционного постулата Неймана–Людерса (ср. (2.130) и (2.131)):

- 1) Результат измерения m представляет классическую случайную величину с распределением вероятности

$$P(m) = \text{tr}\{F_m \rho\}, \quad (2.141)$$

где F_m — положительный оператор, называемый *эффектом* и удовлетворяющий условию нормировки

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} F_m = I, \quad (2.142)$$

такому что $P(m)$ тоже нормирована, то есть

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} P(m) = 1. \quad (2.143)$$

- 2) В случае когда измерение — селективное, субансамбль тех систем, для которых был получен исход m , следует описывать матрицей плотности

$$\rho'_m = P(m)^{-1} \Phi_m(\rho), \quad (2.144)$$

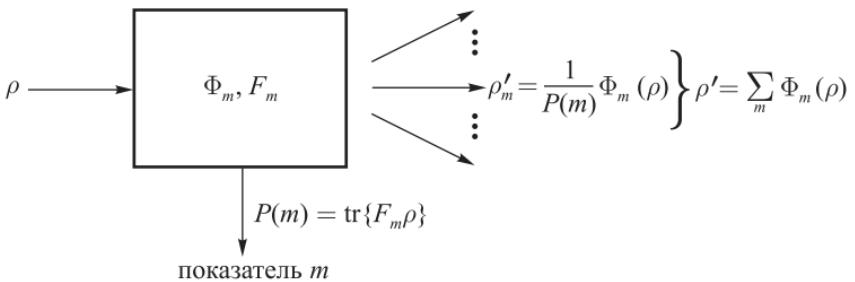


Рис. 2.2. Иллюстрация операции Φ_m и эффекта F_m обобщенной схемы измерения.

где $\Phi_m = \Phi_m(\rho)$ — положительный супероператор, называемый *операцией*, который отображает положительные операторы в положительные операторы. В дальнейшем предполагается, что операция Φ_m удовлетворяет условию согласованности

$$\text{tr } \Phi_m(\rho) = \text{tr} \{F_m \rho\}, \quad (2.145)$$

которое вместе с уравнением (2.141) дает нормированную матрицу плотности ρ'_m , то есть

$$\text{tr } \rho'_m = P(m)^{-1} \text{tr } \Phi_m(\rho) = 1. \quad (2.146)$$

- 3) Для соответствующего неселективного измерения мы получаем матрицу плотности

$$\rho' = \sum_{m \in \mathcal{M}} P(m) \rho'_m = \sum_{m \in \mathcal{M}} \Phi_m(\rho), \quad (2.147)$$

которая нормируется в соответствии с уравнениями (2.145) и (2.142),

$$\text{tr } \rho' = \sum_{m \in \mathcal{M}} \text{tr } \Phi_m(\rho) = \sum_{m \in \mathcal{M}} \text{tr} \{F_m \rho\} = \text{tr } \rho = 1. \quad (2.148)$$

Схема Неймана–Людерса для идеального квантового измерения, очевидно, является специальным случаем приведенной выше общей схемы. А именно, возьмем ортогональное разложение единицы ΔE_α и, считая \mathcal{M} множеством интервалов Δr_α этого разложения, для результата измерения $m = \Delta r_\alpha$ найдем эффект $F_m = \Delta E_\alpha$ и операцию $\Phi_m(\rho) = \Delta E_\alpha \rho \Delta E_\alpha$. Кроме того, условие полноты (2.13) гарантирует выполнение уравнения (2.142), тогда как (2.145) следует из того факта, что ΔE_α — проекционные операторы.

В качестве естественного обобщения этого примера можно рассмотреть операцию

$$\Phi_m(\rho) = \Omega_m \rho \Omega_m^\dagger \quad (2.149)$$

и соответствующий эффект

$$F_m = \Omega_m^\dagger \Omega_m, \quad (2.150)$$

где Ω_m — линейные операторы в базисном гильбертовом пространстве, удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} F_m = \sum_{m \in \mathcal{M}} \Omega_m^\dagger \Omega_m = I. \quad (2.151)$$

Как мы видели, идеальное квантовое измерение порождает проекционную меру, которая каждому результату измерения $m = \Delta r_\alpha$ ставит в соответствие проекционный оператор $F_m = \Delta E_\alpha$. Приведенная выше концепция обобщенной теории измерений естественным путем приводит к более общей идее *положительной операторнозначной меры*, которая каждому результату измерения m ставит в соответствие положительный оператор $F_m = \Omega_m^\dagger \Omega_m$. Конкретный пример этой концепции будет обсуждаться в параграфах 2.4.5 и 2.4.6.

2.4.3. Теорема представления для квантовых операций

На практике зачастую очень удобно работать с явным представлением для операций Φ_m . Такое представление дается важной теоремой Крауса (Kraus, 1983). Сначала мы сформулируем лежащие в основе этой теоремы три условия, а потом в общих чертах опишем доказательство.

Рассмотрим набор положительных отображений $\Phi_m(\rho)$, где индекс — возможный исход m обобщенного измерения. Каждое из этих отображений должно удовлетворять следующим трем условиям.

- 1) Поскольку мы собираемся интерпретировать $P(m) = \text{tr } \Phi_m(\rho)$ как вероятность исхода m , для начала потребуем, чтобы

$$0 \leq \text{tr } \Phi_m(\rho) \leq 1. \quad (2.152)$$

- 2) Далее от отображения Φ_m требуется быть линейно выпуклым, то есть для любого набора матриц плотности ρ_i и неотрицательных чисел $p_i \geq 0$ с $\sum_i p_i = 1$ мы требуем

$$\Phi_m \left(\sum_i p_i \rho_i \right) = \sum_i p_i \Phi_m(\rho_i). \quad (2.153)$$

Необходимость этого условия можно обосновать с помощью теоремы Байеса (1.11). Для этого мы предполагаем, что состояние $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ описывает ансамбль, который получается приготовлением состояний ρ_i с вероятностями p_i . Тогда мы ожидаем, что выполняется следующее соотношение:

$$\frac{\Phi_m(\rho)}{\text{tr } \Phi_m(\rho)} = \sum_i p(i|m) \frac{\Phi_m(\rho_i)}{\text{tr } \Phi_m(\rho_i)}. \quad (2.154)$$

Выражение в левой части представляет состояние всей смеси при условии, что получился результат m . Величина $\Phi_m(\rho_i)/\text{tr } \Phi_m(\rho_i)$ дает состояние после того, как получился результат m , при условии, что было приготовлено состояние ρ_i . Это состояние домножается на вероятность $p(i|m)$, которая является вероятностью того, что состояние ρ_i было приготовлено при условии, что получился результат m , то есть при условии, что на систему действует операция Φ_m . Применяя теорему Байеса (1.11), мы получаем

$$p(i|m) = p(m|i) \frac{p_i}{\text{tr } \Phi_m(\rho)} = \text{tr } \Phi_m(\rho_i) \frac{p_i}{\text{tr } \Phi_m(\rho)}, \quad (2.155)$$

где $p(m|i) = \text{tr } \Phi_m(\rho_i)$ — вероятность появления исхода m при условии, что было приготовлено состояние ρ_i . Заметьте также, что p_i является безусловной вероятностью приготовления ρ_i , в то время как $\text{tr } \Phi_m(\rho)$ — безусловная вероятность появления исхода m . Подстановка (2.155) в (2.154) приводит к выпуклой линейности (2.153) операции.

- 3) Наконец, от отображения Φ_m требуется быть *полностью* положительным. Это условие сильнее, чем положительность (см., например, Gorini, Kossakowski, Sudarshan, 1976), и может быть сформулировано следующим образом. Положительность Φ_m означает, что $\Phi_m(A)$ является положительным для любого положительного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Рассмотрим теперь второе гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}$ некоторой размерности D . Тогда мы можем определить составную операцию $\Phi_m \otimes I$, которая действует на произведении $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ следующим образом

$$(\Phi_m \otimes I) \left(\sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} \Phi_m(A_{\alpha}) \otimes B_{\alpha}. \quad (2.156)$$

Полная положительность означает, что не только Φ_m положительно, но и составная операция $\Phi_m \otimes I$ для всех размерностей D , то есть $\Phi_m \otimes I$ ставит в соответствие положительные операторы составной системы положительным операторам. Это физически обоснованное условие, поскольку составная операция $\Phi_m \otimes I$ может рассматриваться как операция, которая действует локально на первой из двух значительно разделенных в пространстве систем без влияния на вторую систему.

Теорема представлений для квантовых операций утверждает, что операция Φ_m удовлетворяет приведенным выше трем условиям тогда и только тогда, когда существует счетное множество операторов Ω_{mk} , таких что операция может быть записана как

$$\Phi_m(\rho) = \sum_k \Omega_{mk} \rho \Omega_{mk}^\dagger, \quad (2.157)$$

тогда как эффекты удовлетворяют условию

$$F_m = \sum_k \Omega_{mk}^\dagger \Omega_{mk} \leq I. \quad (2.158)$$

Это наиболее общие формы записи для операций и эффектов.

Мы в общих чертах опишем доказательство теоремы представлений для конечномерных пространств. Предположим сначала, что у нас имеется операция Φ_m , которая задана через операторы Ω_{mk} как в уравнениях (2.157) и (2.158). Тогда Φ_m , очевидно, удовлетворяют приведенным выше трем условиям. Например, немедленно следует полная положительность Φ_m , поскольку

$$\langle \varphi | (\Omega_{mk} \otimes I) A (\Omega_{mk}^\dagger \otimes I) | \varphi \rangle = \langle \varphi_{mk} | A | \varphi_{mk} \rangle \geq 0 \quad (2.159)$$

для положительных операторов A , действующих в произведении $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$, где мы определили $|\varphi_{mk}\rangle \equiv (\Omega_{mk}^\dagger \otimes I)|\varphi\rangle$.

Обратно, предположим у нас имеется операция Φ_m , удовлетворяющая трем условиям. Дадим явное построение для операторов Ω_{mk} . Для этого мы возьмем вспомогательное гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}$ той же размерности, что и исходное пространство \mathcal{H} , и выберем фиксированные ортонормированные базисы $\{|\chi_i\rangle\}$ и $\{|\tilde{\chi}_i\rangle\}$ в \mathcal{H} и $\tilde{\mathcal{H}}$ соответственно. Следующим шагом мы введем максимально запутанное состояние

$$|\varphi\rangle \equiv \sum_i |\chi_i\rangle \otimes |\tilde{\chi}_i\rangle \quad (2.160)$$

и определим оператор

$$\sigma_m \equiv (\Phi_m \otimes I)(|\varphi\rangle\langle\varphi|). \quad (2.161)$$

Заметим, что σ_m является оператором в тензорном произведении пространств, относящимся к сложной системе. В силу полной положительности Φ_m , этот оператор — положительный, поскольку $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ — положительно. Таким образом, σ_m имеет спектральное разложение вида

$$\sigma_m = \sum_k |\varphi_{mk}\rangle\langle\varphi_{mk}|. \quad (2.162)$$

Состояния $|\varphi_{mk}\rangle$ являются состояниями сложной системы и, в общем случае, не нормированы. Наконец, для любого состояния

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\chi_i\rangle \quad (2.163)$$

в \mathcal{H} мы вводим соответствующее состояние в $\tilde{\mathcal{H}}$ посредством

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_i \alpha_i^* |\tilde{\chi}_i\rangle. \quad (2.164)$$

Для каждого индекса k уравнение

$$\Omega_{mk}|\psi\rangle \equiv \langle\tilde{\psi}|\varphi_{mk}\rangle = \sum_i \alpha_i \langle\tilde{\chi}_i|\varphi_{mk}\rangle \quad (2.165)$$

определяет тогда линейный оператор в \mathcal{H} . Теперь докажем, что набор операторов Ω_{mk} представляет операцию Φ_m в соответствии с уравнением (2.157). Для этого сначала рассмотрим чистое состояние. При помощи наших определений мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_k \Omega_{mk}|\psi\rangle\langle\psi|\Omega_{mk}^\dagger &= \sum_k \langle\tilde{\psi}|\varphi_{mk}\rangle\langle\varphi_{mk}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\tilde{\psi}|\sigma_m|\tilde{\psi}\rangle = \\ &= \langle\psi|(\Phi_m \otimes I)(|\varphi\rangle\langle\varphi|)|\tilde{\psi}\rangle = \\ &= \sum_{ij} \langle\tilde{\psi}|\Phi_m(|\chi_i\rangle\langle\chi_j|) \otimes (|\tilde{\chi}_i\rangle\langle\tilde{\chi}_j|)|\tilde{\psi}\rangle = \\ &= \sum_{ij} \Phi_m(|\chi_i\rangle\langle\chi_j|)\alpha_j^*\alpha_i. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Следовательно,

$$\Phi_m(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_k \Omega_{mk}|\psi\rangle\langle\psi|\Omega_{mk}^\dagger. \quad (2.167)$$

Это доказывает представление (2.157) для чистых состояний. Общий случай просто получается при помощи выпуклой линейности Φ_m . Наконец, неравенство в (2.158) является прямым следствием условия (2.152).

Теорема представления показывает, что полностью положительная квантовая операция Φ_m может быть представлена в виде набора операторов Ω_{mk} . Это приводит к интересному вопросу, касающемуся свободы в выборе операторов Ω_{mk} . Рассмотрим два набора $\{\Omega_{mk}\}$ и $\{\tilde{\Omega}_{mk}\}$ операторов, которые представляют операции Φ_m и $\tilde{\Phi}_m$ соответственно, согласно теореме представления

$$\Phi_m(\rho) = \sum_k \Omega_{mk} \rho \Omega_{mk}^\dagger, \quad (2.168)$$

$$\tilde{\Phi}_m(\rho) = \sum_k \tilde{\Omega}_{mk} \rho \tilde{\Omega}_{mk}^\dagger. \quad (2.169)$$

Добавляя нулевые операторы к меньшему набору, всегда можно добиться того, что оба набора будут содержать одинаковое число элементов. В таком случае обе операции равны, то есть $\Phi_m = \tilde{\Phi}_m$, тогда и только тогда, когда существует унитарная матрица $u = (u_{kl})$, такая что

$$\Omega_{mk} = \sum_l u_{kl} \tilde{\Omega}_{ml}. \quad (2.170)$$

Следовательно, две квантовые операции равны друг другу тогда и только тогда, когда их соответствующие Ω -операторы соотносятся через линейную комбинацию, включающую унитарную матрицу коэффициентов.

Чтобы доказать приведенное выше утверждение, предположим для начала, что выполняется (2.170). При помощи (2.168), (2.169) немедленно получаем $\Phi_m = \tilde{\Phi}_m$. Наоборот, допустим $\Phi_m = \tilde{\Phi}_m$, тогда

$$\sum_k \Omega_{mk} \rho \Omega_{mk}^\dagger = \sum_k \tilde{\Omega}_{mk} \rho \tilde{\Omega}_{mk}^\dagger \quad (2.171)$$

для всех плотностей ρ . Воспользовавшись той же самой конструкцией и обозначениями, что и в доказательстве теоремы представления, определим

$$|\varphi_{mk}\rangle = (\Omega_{mk} \otimes I)|\varphi\rangle, \quad |\tilde{\varphi}_{mk}\rangle = (\tilde{\Omega}_{mk} \otimes I)|\varphi\rangle, \quad (2.172)$$

что дает

$$\sigma_m = \sum_k |\varphi_{mk}\rangle \langle \varphi_{mk}| = \sum_k |\tilde{\varphi}_{mk}\rangle \langle \tilde{\varphi}_{mk}|. \quad (2.173)$$

Это показывает, что положительный оператор σ_m создается (генерируется) двумя множествами состояний $\{|\varphi_{mk}\rangle\}$ и $\{|\tilde{\varphi}_{mk}\rangle\}$. Эти состояния связаны друг с другом посредством преобразования

$$|\varphi_{mk}\rangle = \sum_l u_{kl} |\tilde{\varphi}_{ml}\rangle \quad (2.174)$$

с некоторой унитарной матрицей u (см. уравнение (2.56)). Для произвольного $|\psi\rangle$ имеем

$$\Omega_{mk} |\psi\rangle = \langle \tilde{\psi} | \varphi_{mk} \rangle = \sum_l u_{kl} \langle \tilde{\psi} | \tilde{\varphi}_{ml} \rangle = \sum_l u_{kl} \tilde{\Omega}_{ml} |\psi\rangle, \quad (2.175)$$

откуда получаем (2.170), что и требовалось доказать.

Важное следствие этого утверждения состоит в том, что любая операция Φ_m , действующая в D -мерном гильбертовом пространстве состояний, может быть представлена при помощи самое большое D^2 операторов Ω_{mk} .

2.4.4. Квантовое измерение и энтропия

В общем случае квантовое измерение приводит к изменению энтропии фон Неймана. Определим изменение энтропии в неселективном квантовом измерении, описываемом операциями Φ_m , как

$$\Delta S = S(\rho') - S(\rho) = S \left(\sum_m \Phi_m(\rho) \right) - S(\rho). \quad (2.176)$$

Рассмотрим сначала идеальное квантовое измерение, для которого $\Phi_m(\rho) = \Pi_m \rho \Pi_m$ с ортогональными проекциями Π_m , удовлетворяющими $\sum_m \Pi_m = I$. Из неравенства Клейна (2.115) получаем

$$0 \leq S(\rho' \parallel \rho') = -S(\rho) - \text{tr}\{\rho \ln \rho'\}. \quad (2.177)$$

Используя условие полноты и тот факт, что $\rho' = \sum_m \Pi_m \rho \Pi_m$ коммутирует с проекциями Π_m , для второго члена в правой части равенства находим

$$\begin{aligned} -\text{tr}\{\rho \ln \rho'\} &= -\text{tr} \left\{ \sum_m \Pi_m \rho (\ln \rho') \Pi_m \right\} = \\ &= -\text{tr} \left\{ \sum_m \Pi_m \rho \Pi_m \ln \rho' \right\} = -\text{tr}\{\rho' \ln \rho'\} = S(\rho'), \end{aligned} \quad (2.178)$$

и, следовательно,

$$\Delta S \geq 0. \quad (2.179)$$

Мы делаем вывод, что неселективные идеальные квантовые измерения не уменьшают энтропию фон Неймана. Заметим также, что $\Delta S = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho' = \rho$, то есть тогда и только тогда, когда матрица плотности не изменяется при измерении.

Заключение, сделанное выше, в общем случае, неверно для обобщенного измерения, как можно видеть из следующего примера. Рассмотрим двухуровневую систему, гильбертово пространство которой образовано базисом из двух состояний $|e\rangle$ и $|g\rangle$. Определим две операции $\Phi_m(\rho) = \Omega_m \rho \Omega_m^\dagger$, $m = 1, 2$, где $\Omega_1 = |g\rangle\langle g|$ и $\Omega_2 = |g\rangle\langle e|$. Следовательно, эффектами являются $\Omega_1^\dagger \Omega_1 = |g\rangle\langle g|$ и $\Omega_2^\dagger \Omega_2 = |e\rangle\langle e|$, а их сумма равна единице I . Тем не менее для нормированной начальной матрицы плотности ρ находим, что состояние после неселективного измерения есть

$$\rho' = \Omega_1 \rho \Omega_1^\dagger + \Omega_2 \rho \Omega_2^\dagger = |g\rangle\langle g|. \quad (2.180)$$

Конечное состояние, следовательно, является всегда чистым состоянием и $S(\rho') = 0$. Таким образом, энтропия уменьшается до нуля, если мы начинаем с исходной плотности с положительной энтропией. Этот пример показывает, что обобщенное измерение может уменьшать энтропию фон Неймана.

Другой интересный вопрос касается изменения энтропии, связанного с переходом от селективного к неселективному способу измерения. Определим величину

$$\delta S = S \left(\sum_m P(m) \rho'_m \right) - \sum_m P(m) S(\rho'_m), \quad (2.181)$$

которую назовем энтропией смешивания. Это энтропия итоговой матрицы плотности $\rho' = \sum_m P(m) \rho'_m$ при неселективном способе за минусом среднего энтропий субансамблей, описываемых состояниями ρ'_m . Энтропия смешивания удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \delta S \leq H(\{P(m)\}). \quad (2.182)$$

Таким образом, δS — всегда неотрицательна. Это утверждение немедленно следует из вогнутости энтропии фон Неймана (см. уравнение (2.110)). Второе неравенство показывает, что δS никогда не превышает шенноновскую энтропию, связанную со случайной переменной m с распределением $m \mapsto P(m)$. Доказательство этого утверждения может быть найдено,

например, в книге Нильсена и Чанга (Nielsen, Chuang, 2000). Мы можем интерпретировать шенноновскую энтропию $H(\{P(m)\})$ как потери информации при переходе от селективного к неселективному уровню, так как в процессе перемешивания мы забываем о результатах измерений. Другими словами, шенноновская энтропия распределения $P(m)$ является мерой информации, выделенной из измерений путем получения конкретной реализации случайной переменной m . Таким образом, мы видим, что энтропия смешивания равна шенноновской тогда и только тогда, когда плотности ρ'_m имеют ортогональные образы. Так происходит при идеальном измерении, в случае которого энтропия смешивания становится равна шенноновской.

2.4.5. Приблизительные измерения

Рассмотренный обобщенный подход для описания квантовых измерений применим для описания, например, приблизительных измерений, когда измерительные устройства, которые измеряют спектр некоторой наблюдаемой \hat{R} , делают это только с конечным разрешением (Braginsky, Khalili, 1992).

Рассмотрим некоторую физическую ситуацию, в которой измеряется наблюдаемая \hat{R} с дискретным невырожденным спектром:

$$\hat{R} = \sum_m r_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m|. \quad (2.183)$$

Если собственные значения r_m расположены не слишком близко друг к другу, такую наблюдаемую можно измерить точно, если разрешение измерительного устройства достаточно велико. Тем не менее можно провести приблизительное измерение, если разрешение прибора недостаточно для того, чтобы различить, например, соседние собственные значения. Для такого случая вводится распределение условной вероятности $W(m|m')$, которое представляет вероятность получения значения m в результате измерения, если известно, что система находилась в состоянии $\psi_{m'}$ с собственным значением m' . Распределение условной вероятности используется для описания конечного разрешения прибора, возможных возмущений от окружения, так же как возможных неопределенностей в точности состояния прибора до измерения.

Предполагая, что прибор всегда дает определенный результат, получаем

$$\sum_m W(m|m') = 1. \quad (2.184)$$

Тогда распределение вероятности для исходов измерения r_m принимает вид

$$P(m) = \sum_{m'} W(m|m') \langle \psi_{m'} | \rho | \psi_{m'} \rangle, \quad (2.185)$$

и нормировано на 1,

$$\sum_m P(m) = 1. \quad (2.186)$$

Определив оператор эффекта

$$F_m \equiv \sum_{m'} |\psi_{m'}\rangle W(m|m') \langle \psi_{m'}|, \quad (2.187)$$

запишем распределение вероятности исходов как

$$P(m) = \text{tr}\{F_m \rho\}. \quad (2.188)$$

Как легко проверяется, (2.187) является положительным оператором и удовлетворяет условию нормировки (2.142).

Чтобы найти подходящую операцию, применим подстановку (2.149) и из условия согласованности (2.145) получим соотношение (2.150). Наиболее общее решение для этого отношения имеет вид

$$\Omega_m = U_m F_m^{1/2}, \quad (2.189)$$

где U_m – (неопределенный) унитарный оператор, а

$$F_m^{1/2} = \sum_{m'} |\psi_{m'}\rangle \sqrt{W(m|m')} \langle \psi_{m'}| \quad (2.190)$$

является квадратным корнем из F_m . Таким образом, имеется операция

$$\Phi_m = U_m F_m^{1/2} \rho F_m^{1/2} U_m^\dagger, \quad (2.191)$$

которая показывает, что переход от исходной матрицы плотности ρ к той, что описывает субансамбль, обусловленный исходом r_m , может рассматриваться формально как двухступенчатый процесс:

$$\rho \rightarrow \rho'_m = P(m)^{-1} F_m^{1/2} \rho F_m^{1/2} \rightarrow \rho''_m = U_m \rho'_m U_m^\dagger. \quad (2.192)$$

Второй шаг в (2.192) представляет собой унитарное преобразование матрицы плотности. На протяжении этого шага энтропия, следовательно,

остается неизменной, и не извлекается никакой информации о квантовой системе. Конкретная форма унитарного оператора U_m определяется особенностями измерительного устройства. Проведенный анализ показывает, что нельзя определить точную форму операции, пользуясь только распределением вероятности исходов измерения. Как мы увидим, унитарный оператор U_m описывает возмущение квантового объекта измерительным прибором (см. раздел 2.4.7).

Первый шаг в (2.192) описывает получение информации во время измерения. На этом шаге, в общем случае, исходный ансамбль разбивается на множество субансамблей. Эффект F_m единственным образом определяется спектральным семейством \hat{R} и распределением условной вероятности $W(m|m')$, описывающим конечное разрешение измерительного устройства. Поскольку \hat{R} и F_m обладают одним и тем же спектральным семейством, они коммутируют, $[F_m, \hat{R}] = 0$. Как мы увидим, это является достаточным условием для первого шага квантового неразрушающего измерения.

В случае бесконечного разрешения имеем $W(m|m') = \delta_{mm'}$ и, следовательно, эффект сводится к идеальному измерению \hat{R} , то есть $F_m = |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$. Соответственно, операция принимает вид, похожий на тот, что дан в постулате фон Неймана–Людерса, а именно:

$$\rho''_m = U_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| U_m^\dagger, \quad (2.193)$$

где проекция, вообще говоря, сопровождается унитарным преобразованием.

В качестве следующего примера рассмотрим приближенное измерение оператора координаты \hat{Q} (Davies, 1976). Плотность вероятности $p(q)$ для исхода q берется в виде

$$p(q) = \int dq' W(q - q') \langle q' | \rho | q' \rangle. \quad (2.194)$$

Здесь распределение $W(q - q')$ дает плотность условной вероятности того, что прибор выдаст значение q для системы в (обобщенном) собственном состоянии $|q'\rangle$ оператора \hat{Q} . Отметим, что точное измерение положения будет получено, если $W(q)$ близко к δ -функции Дирака. Соответствующий эффект

$$F_q = \int dq' |q'\rangle W(q - q') \langle q'|. \quad (2.195)$$

Интересно определить среднее значение $E(Q, W)$ и дисперсию $\text{Var}(Q, W)$ результатов этого приближенного измерения. При помощи функции распределения $p(q)$ находим

$$E(Q, W) = E(Q) + \int dq qW(q), \quad (2.196)$$

$$\text{Var}(Q, W) = \text{Var}(Q) + \int dq q^2 W(q) - \left[\int dq qW(q) \right]^2, \quad (2.197)$$

где $E(Q)$ и $\text{Var}(Q)$ обозначают, как обычно, среднее значение и дисперсию, полученные при идеальном измерении \hat{Q} . Первое уравнение показывает, что неисчезающее среднее значение $W(q)$ приводит к систематическому смещению результатов измерений. Второе уравнение говорит нам о том, что конечная дисперсия распределения $W(q)$ придает дополнительную дисперсию, которая накладывается на собственные квантовые флуктуации, задаваемые $\text{Var}(Q)$.

2.4.6. Непрямые квантовые измерения

Важная измерительная схема, которая также может рассматриваться в рамках обобщенной теории квантовых измерений, обусловлена концепцией непрямого измерения (Braginsky, Khalili, 1992).

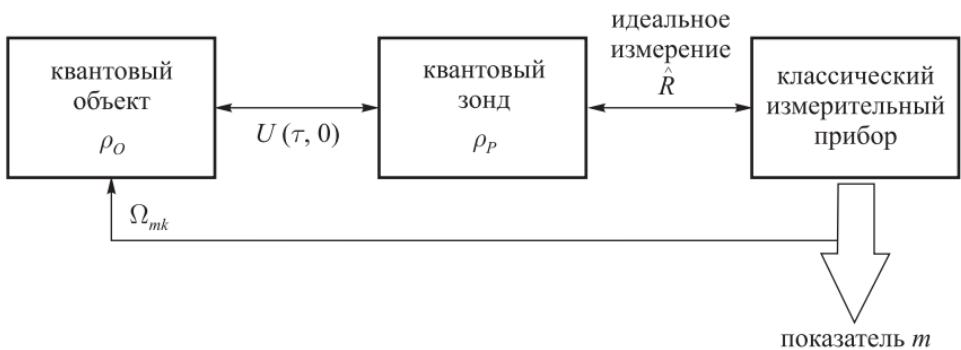


Рис. 2.3. Схематическая картина непрямого измерения.

Непрямое измерение может рассматриваться как состоящее из трех элементов (см. рис. 2.3). Первый элемент — это квантовая система, над которой проводится измерение, то есть система, из которой извлекается

информация. Эта система, следовательно, называется *квантовым объектом* и будет рассматриваться в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_O . Второй элемент — это так называемый *квантовый зонд* с гильбертовым пространством \mathcal{H}_P . Квантовый зонд тоже является конкретной квантовой системой, которая взаимодействует с квантовым объектом. Считается, что зондирующая система заранее, до указанного взаимодействия, подготовлена и находится в подходящем состоянии, заданным некоторой матрицей плотности ρ_P . В результате последующего взаимодействия устанавливается корреляции между зондом и объектом. Третий элемент в схеме — это классический прибор, при помощи которого осуществляется измерение над квантовым зондом, после того как взаимодействие между объектом и зондом прекращено. Цель этой схемы состоит в получении информации о состоянии объекта посредством измерений над зондом. Эта информация прослеживается из корреляций между объектом и зондом, установившихся в процессе их взаимодействия. Таким образом, можно сформулировать три основных требования к идеальному измерению:

- 1) До взаимодействия между объектом и зондом в момент времени $t = 0$ зонд подготовлен в хорошо определенном квантовом состоянии ρ_P . В то же время квантовый объект находится в состоянии ρ_O .
- 2) Взаимодействие между квантовым объектом и зондом начинается при $t = 0$ и заканчивается в некоторый момент времени $t = \tau > 0$ до того, как начинается измерение с помощью прибора.
- 3) Третий элемент в схеме представляет классический прибор, и измерение над квантовым зондом может быть описано как идеальное измерение в соответствии с проекционным постулатом фон Неймана–Людерса.

В дальнейшем мы получим явные выражения для эффекта и операции, относящихся к такой схеме идеального измерения.

В момент времени $t = 0$ полная квантовая система, состоящая из объекта и зонда, описывается матрицей плотности $\rho_O \otimes \rho_P$ в общем гильбертовом пространстве, заданным тензорным произведением $\mathcal{H} = \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_P$. Гамильтониан системы берется в виде

$$H(t) = H_O + H_P + H_I(t), \quad (2.198)$$

где H_O и H_P описывают свободную эволюцию объекта и зонда соответственно, а $H_I(t)$ — их взаимодействие. Это зависящее от времени взаимодействие считается затухающим вне интервала $[0, \tau]$. Соответствующий

унитарный оператор, описывающий временную эволюцию в этом интервале в соответствии с уравнением Шредингера, будет обозначен через U ,

$$U \equiv U(\tau, 0) = T \exp \left[-i \int_0^\tau dt H(t) \right], \quad (2.199)$$

где T обозначает хронологическое упорядочение, $\hbar = 1$.

Исходная матрица плотности $\rho(0) = \rho_O \otimes \rho_P$ всей системы по прошествии времени τ превращается в

$$\rho(\tau) = U(\rho_O \otimes \rho_P)U^\dagger. \quad (2.200)$$

Допустим теперь, что в момент τ классический прибор измеряет наблюдаемую зонда

$$\hat{R} = \sum_m r_m |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m| \quad (2.201)$$

с невырожденным дискретным спектром. Заметим, что \hat{R} является самосопряженным оператором, который действует в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_P квантового зонда. Вероятность $P(m)$ для исхода r_m в этом измерении равна

$$P(m) = \text{tr}\{|\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|\rho(\tau)\} = \text{tr}\{U^\dagger|\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|U(\rho_O \otimes \rho_P)\}, \quad (2.202)$$

где след вычисляется по всему гильбертовому пространству \mathcal{H} . Частичные следы по пространствам \mathcal{H}_O и \mathcal{H}_P будут обозначаться tr_O и tr_P соответственно. Тогда выражение для $P(m)$ может быть переписано как

$$P(m) = \text{tr}_O\{F_m \rho_O\}, \quad (2.203)$$

где эффект имеет вид

$$F_m \rho_O = \text{tr}_P\{U^\dagger|\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|U(\rho_O \otimes \rho_P)\}. \quad (2.204)$$

Как легко проверяется, F_m является положительным оператором, который действует в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_O квантового объекта и который удовлетворяет условию нормировки, а именно

$$\sum_m F_m \rho_O = \sum_m \text{tr}_P\{U^\dagger|\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|U(\rho_O \otimes \rho_P)\} = \text{tr}_P\{(\rho_O \otimes \rho_P)\} = \rho_O. \quad (2.205)$$

Полученный результат показывает, что выполняется (2.142).

Операция для непрямого измерения получается посредством применения проекционного постулата фон Неймана–Людерса к измерению над зондом, что немедленно дает следующее состояние квантового объекта:

$$\rho'_m = P(m)^{-1} \langle \varphi_m | U(\rho_O \otimes \rho_P) U^\dagger | \varphi_m \rangle. \quad (2.206)$$

Вводя спектральное разложение матрицы плотности зонда

$$\rho_P = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|, \quad (2.207)$$

можно записать операцию над квантовым объектом как

$$\Phi_m(\rho_O) = \sum_k \Omega_{mk} \rho_O \Omega_{mk}^\dagger, \quad (2.208)$$

где

$$\Omega_{mk} = \sqrt{p_k} \langle \varphi_m | U | \phi_k \rangle. \quad (2.209)$$

При использовании этих операторов эффект задается формулой

$$F_m = \sum_k \Omega_{mk}^\dagger \Omega_{mk}. \quad (2.210)$$

Таким образом, мы видим, что операция и эффект принимают в точности ту же форму, что дается теоремой представления, см. уравнения (2.157) и (2.158). Если изначально зонд находился в чистом состоянии $\rho_P = |\phi\rangle\langle\phi|$, получаем величину

$$\Omega_m = \langle \varphi_m | U | \phi \rangle, \quad (2.211)$$

пропорциональную амплитуде перехода зонда из состояния ϕ в собственное состояние φ_m измеряемой наблюдаемой \hat{R} . Заметим, что Ω_m является оператором в гильбертовом пространстве квантового объекта, который описывает изменение состояния объекта, вызванное исходом r_m измерения над зондом. Дополнительное суммирование по k в общем выражении (2.208) появляется из-за дополнительной неопределенности в случае, когда исходное состояние зонда является статистической смесью.

Приведенные выше результаты без труда обобщаются на случай наблюдаемой \hat{R} с непрерывным спектром. Рассмотрим конкретный пример. Будем считать \hat{R} оператором импульса \hat{P} в данном направлении, то есть классический прибор измеряет определенную компоненту импульса некоторой зондирующей частицы. Наша цель состоит в определении посредством непрямого измерения невырожденной, дискретной наблюдаемой

$$\hat{A} = \sum_\nu a_\nu |\chi_\nu\rangle\langle\chi_\nu| \quad (2.212)$$

квантового объекта. Для этого подействуем оператором координаты \hat{Q} , канонически сопряженным с \hat{P} ,

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i, \quad (2.213)$$

на наблюдаемую \hat{A} , то есть рассмотрим гамильтониан взаимодействия

$$H_I(t) = g(t)\hat{A}\hat{Q}, \quad (2.214)$$

где зависящее от времени взаимодействие $g(t)$ считается затухающим вне временного интервала $[0, \tau]$. Для простоты дальше будем считать, что время взаимодействия τ очень мало и что свободным изменением, производимым за счет $H_O + H_P$ в течение этого времени, можно пренебречь. Универсальный оператор эволюции во времени принимает тогда простой вид

$$U = \exp \left[-iG\hat{A}\hat{Q} \right], \quad (2.215)$$

где

$$G \equiv \int_0^\tau dt g(t) \quad (2.216)$$

обозначает суммарную силу взаимодействия. Считается, что квантовый зонд находится в исходном состоянии $\rho_P = |\phi\rangle\langle\phi|$, таком что для оператора Ω_p , относящегося к исходу p (см. уравнение (2.211)), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \langle p | U | \phi \rangle = \\ &= \langle p | \exp \left[-iG\hat{A}\hat{Q} \right] | \phi \rangle = \\ &= \sum_\nu |\chi_\nu\rangle \langle p | \exp \left[-iG a_\nu \hat{Q} \right] | \phi \rangle \langle \chi_\nu|. \end{aligned} \quad (2.217)$$

Матричный элемент в последнем выражении равен $\phi(p + G a_\nu)$, где $\phi(p) \equiv \equiv \langle p | \phi \rangle$ — начальная волновая функция зонда в импульсном представлении. Следовательно, мы имеем

$$\Omega_p = \sum_\nu |\chi_\nu\rangle \phi(p + G a_\nu) \langle \chi_\nu| = \phi(p + G \hat{A}). \quad (2.218)$$

Отсюда следует, что плотность вероятности $f(p)$ для измерения импульса (во избежание путаницы с импульсом, мы обозначаем здесь плотности

вероятностей через f) дается выражением

$$f(p) = \text{tr}\{\Omega_p^\dagger \Omega_p \rho_O\} = \sum_\nu |\phi(p + Ga_\nu)|^2 \langle \chi_\nu | \rho_O | \chi_\nu \rangle. \quad (2.219)$$

Последние два уравнения могут теперь быть интерпретированы как описывающие приближенное измерение наблюдаемой \hat{A} . Чтобы увидеть это, мы должны ответить на следующий вопрос: Какая информация о наблюдаемой \hat{A} квантового объекта может быть извлечена из измерения \hat{P} ? Предположим на мгновение, что $|\phi(p)|^2$ сосредоточена вблизи своего среднего значения

$$\langle p \rangle \equiv \langle \phi | \hat{P} | \phi \rangle \equiv \int dp p |\phi(p)|^2. \quad (2.220)$$

Тогда из уравнения (2.218) мы увидим, что измерение p эффективно проецирует состояние квантового объекта на группу собственных состояния χ_ν наблюдаемой \hat{A} , чьи собственные состояния a_ν удовлетворяют $p + Ga_\nu \approx \approx \langle p \rangle$. Точное число состояний в этой группе определяется шириной волновой функции зонда в импульсном представлении. Таким образом, посредством соотношения $p + Ga = \langle p \rangle$, на основе измерения p на выходе мы определяем значения a , так что

$$a = \frac{1}{G}(\langle p \rangle - p). \quad (2.221)$$

Тогда для плотности вероятности a мы получим

$$f(a) = \sum_\nu W(a - a_\nu) \langle \chi_\nu | \rho_O | \chi_\nu \rangle, \quad (2.222)$$

где

$$W(a - a_\nu) = |G| \cdot |\phi(\langle p \rangle - G[a - a_\nu])|^2. \quad (2.223)$$

Мы, следовательно, видим, что прямое измерение импульса \hat{P} частицы зонда дает приблизительное измерение \hat{A} : оно дает плотность для получения значения a при условии, что объект находится в собственном состоянии с собственным значением a_ν .

Очевидно, $W(a - a_\nu)$ нормировано на 1,

$$\int da W(a - a_\nu) = 1, \quad (2.224)$$

и удовлетворяет

$$\int da aW(a - a_\nu) = a_\nu, \quad (2.225)$$

$$\int da a^2 W(a - a_\nu) = a_\nu^2 + \frac{1}{G^2} \text{Var}(P), \quad (2.226)$$

где $\text{Var}(P)$ обозначена дисперсия \hat{P} в исходном состоянии ϕ зонда. Из уравнения (2.225) следует, что выражение (2.221) для значения a , полученное из измерения результата p , имеет нулевое смещение, то есть его матожидание совпадает с точным средним значением \hat{A} ,

$$E(a) \equiv \int da af(a) = \text{tr} \left\{ \hat{A} \rho_O \right\} = E(A). \quad (2.227)$$

Уравнение (2.226), с другой стороны, приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \text{Var}(a) &\equiv \int da a^2 f(a) - \left[\int da af(a) \right]^2 = \\ &= \text{Var}(A) + \frac{1}{G^2} \text{Var}(P). \end{aligned} \quad (2.228)$$

Это уравнение говорит нам, что дисперсия полученного значения a равна сумме точной квантовой дисперсии $\text{Var}(A)$ наблюдаемой \hat{A} и дисперсии импульса зонда в начальном состоянии, деленной на G^2 . Отсюда следует, что измерение тем точнее, чем меньше неопределенность импульса зонда и сильнее взаимодействие между квантовым объектом и зондом.

Получив конкретное значение a , соответствующая операция дается оператором

$$\Omega_a = \sum_\nu |\chi_\nu\rangle \sqrt{|G|} \phi(\langle p \rangle - G[a - a_\nu]) \langle \chi_\nu| = \sqrt{|G|} \phi \left(\langle p \rangle - G(a - \hat{A}) \right). \quad (2.229)$$

Матрица плотности результирующего субансамбля принимает тогда форму

$$\begin{aligned} \rho'_a &= \frac{\sum_{\nu\nu'} |\chi_\nu\rangle \phi(\langle p \rangle - G[a - a_\nu]) \langle \chi_\nu| \rho_O |\chi_{\nu'}\rangle \phi^*(\langle p \rangle - G[a - a_{\nu'}]) \langle \chi_{\nu'}|}{\sum_\nu |\phi(\langle p \rangle - G[a - a_\nu])|^2 \langle \chi_\nu| \rho_O |\chi_\nu\rangle} = \\ &= \frac{\Omega_a \rho_O \Omega_a}{\text{tr}\{\Omega_a^\dagger \Omega_a \rho_O\}}. \end{aligned} \quad (2.230)$$

В идеальном случае точно заданного начального импульса p_0 зонда, имеем $|\phi(p)|^2 \rightarrow \delta(p - p_0)$ и, следовательно,

$$f(a) = \sum_{\nu} \delta(a - a_{\nu}) \langle \chi_{\nu} | \rho_O | \chi_{\nu} \rangle, \quad (2.231)$$

которое показывает, что a принимает только дискретный набор значений, задаваемый собственными значениями оператора \hat{A} . Соответствующие вероятности

$$P(a_{\nu}) = \langle \chi_{\nu} | \rho_O | \chi_{\nu} \rangle, \quad (2.232)$$

также как и новая матрица плотности

$$\rho'_{a_{\nu}} = |\chi_{\nu}\rangle\langle\chi_{\nu}|, \quad (2.233)$$

даются корректной квантово-механической формулой, соответствующей идеальному квантовому измерению \hat{A} .

2.4.7. Квантовые неразрушающие измерения

Представим идеальное неселективное измерение некоторой наблюдаемой \hat{A} , которое производится над квантовой системой в состоянии ρ . Как хорошо известно, если \hat{A} коммутирует с ρ , тогда состояние системы не изменяется в результате измерения. Фактически, если

$$\hat{A} = \sum_{\nu} a_{\nu} \Pi_{\nu} \quad (2.234)$$

представляет собой спектральное разложение \hat{A} , a_{ν} обозначают собственные значения, а Π_{ν} — соответствующие собственные проекторы, тогда для неселективной матрицы плотности ρ' после измерения находим

$$\rho' = \sum_{\nu} \Pi_{\nu} \rho \Pi_{\nu} = \sum_{\nu} \Pi_{\nu} \rho = \rho, \quad (2.235)$$

где мы использовали отношение полноты и тот факт, что ρ коммутирует с проекциями Π_{ν} .

Рассмотрим теперь некоторую обобщенную схему измерения с операциями Φ_m , определенными в терминах операторов Ω_m (см. (2.149)). Согласно определению, такая схема является квантовым неразрушающим измерением (КНИ измерение) (Braginsky, Khalili, 1992) для некоторой наблюдаемой \hat{A} , если распределение вероятности для идеального измерения \hat{A}

остается неизменным на протяжении процесса измерения, то есть если распределение собственных значений \hat{A} одинаково в начальной и конечной матрицах плотности. Здесь обобщенное измерение считается неселективным. Отметим, что КНИ измерительные устройства является важной частью в разработке квантовых измерений высокой точности (Bocko and Onofrio, 1996).

Используя выражение (2.149) для операции обобщенного измерения, мы можем записать приведенное выше определение в следующей математической форме:

$$\mathrm{tr} \left\{ \hat{A}^k \rho \right\} = \mathrm{tr} \left\{ \hat{A}^k \rho' \right\} = \sum_m \mathrm{tr} \left\{ \hat{A}^k \Omega_m \rho \Omega_m^\dagger \right\}. \quad (2.236)$$

Это означает, что все моменты \hat{A} совпадают в начальном и конечном состоянии и, следовательно, совпадают распределения ее собственных значений (допустим для простоты, что моменты существуют). В приведенном примере идеального измерения \hat{A} , Ω_m задаются проекторами Π_ν , и условие (2.236), очевидно, выполняется, поскольку ρ коммутирует с Ω_m . Это условие для квантовой системы, над которой проводится измерение.

Аналогично, мы можем рассматривать уравнение (2.236) как условие для операторов Ω_m , которое должно выполняться для всех состояний ρ квантовой системы. Используя условие нормировки (2.151), мы можем привести уравнение (2.236) к виду

$$\sum_m \mathrm{tr} \left\{ \Omega_m^\dagger \left[\hat{A}^k, \Omega_m \right] \rho \right\} = 0. \quad (2.237)$$

Поскольку это условие считается выполненным для всех ρ , мы делаем вывод, что достаточное условие для КНИ измерения задается как

$$\left[\hat{A}, \Omega_m \right] = 0. \quad (2.238)$$

Следовательно, измерение является КНИ измерением для наблюдаемой \hat{A} , если операторы Ω_m , описывающие изменение квантовой системы, вызванное измерением, коммутируют с \hat{A} . Условие (2.238) всегда выполняется для идеального измерения наблюдаемой \hat{A} , то есть идеальное измерение \hat{A} всегда является КНИ измерением в определенном выше смысле. Мы также немедленно видим из уравнения (2.229), что пример для схемы непрямого

измерения, обсуждавшейся в предыдущем подразделе, удовлетворяет условию КНИ (2.238). Это происходит благодаря тому факту, что Ω_a является диагональной в \hat{A} -представлении, которое, в свою очередь, вытекает из того, что гамильтониан взаимодействия $H_I(t)$ коммутирует с измеряемой величиной. В результате \hat{A} является интегралом движения на протяжении процесса измерения.

Рассмотрим общую установку для непрямого измерения с зондом в чистом состоянии ϕ . Подставляя (2.211) в (2.238), мы находим

$$\langle \varphi_m | [\hat{A}, U(\tau, 0)] |\phi \rangle = 0. \quad (2.239)$$

Поскольку это должно быть верно для всех t и потому что φ_m представляют базис в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_P зонда, мы делаем вывод, что

$$[\hat{A}, U(\tau, 0)] |\phi \rangle = 0. \quad (2.240)$$

Одним из вариантов достижения этого равенства может быть приготовление зонда в подходящем состоянии ϕ . Поскольку это, очевидно, сложная задача, на практике обычно требуют, чтобы исчезал сам коммутатор, что приводит к следующему достаточному КНИ условию:

$$[\hat{A}, U(\tau, 0)] = 0. \quad (2.241)$$

В соответствии с этим уравнением, оператор в гейзенберговском представлении

$$\hat{A}_H(t) = U^\dagger(t, 0) \hat{A} U(t, 0) \quad (2.242)$$

возвращается к своему исходному значению через время $t = \tau$, то есть $\hat{A}_H(\tau) = \hat{A}_H(0)$. Самый простой способ этого добиться — это потребовать, чтобы наблюдаемая \hat{A} коммутировала с полным гамильтонианом $H(t) = H_O + H_P + H_I(t)$, то есть

$$[\hat{A}, H_O + H_I(t)] = 0. \quad (2.243)$$

Если \hat{A} является интегралом движения при свободном изменении квантового объекта, общее достаточное условие для КНИ измерения имеет вид

$$[\hat{A}, H_I(t)] = 0. \quad (2.244)$$

Это условие известно также как условие отсутствия обратного действия. Оно гарантирует, что взаимодействие квантового объекта с зондирующей системой не возмущает измеряемую величину.

В заключение мы отметим, что тем же способом можно показать, что достаточное условие для того, чтобы приближенное измерение, обсуждавшееся в подразделе 2.4.5, было КНИ измерением, имеет вид $[\hat{R}, U_m] = 0$ и означает, что наблюдаемая, измеренная приближенно, должна коммутировать с унитарными операторами U_m , которые возникают на втором шаге (2.192). Таким образом, эти унитарные преобразования, вообще говоря, возмущают распределение вероятностей измеряемой величины.

Библиография

Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M. (1981). *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Pitman, Boston.

Bocko, M. F. and Onofrio, R. (1996). On the measurement of a weak classical force coupled to a harmonic oscillator: Experimental progress. *Rev. Mod. Phys.*, **68**, 775–799.

Bohm, A. (1993). *Quantum Mechanics* (third edition). Springer-Verlag, New York. Имеется издание на русском языке: Бом Д. *Квантовая теория*. — М.: Наука, 1965. — 728 с.

Braginsky, V. B. and Khalili, F. Ya. (1992). *Quantum Measurement*. Cambridge University Press, Cambridge.

Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. and Laloë, F. (1977). *Quantum Mechanics*, Volume I and II. John Wiley, New York. Имеется перевод: Коэн-Таннуджи К., Диу Б., Лалоэ Ф. *Квантовая механика*. Т. I, II. — Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2000.

Davies, E. B. (1976). *Quantum Theory of Open Systems*. Academic Press, London.

Gorini, V., Kossakowski, A. and Sudarshan, E. C. G. (1976). Completely positive dynamical semigroups of N-level systems. *J. Math. Phys.*, **17**, 821–825.

Gottfried, K. (1974). *Quantum Mechanics*. W. A. Benjamin, Reading, Massachusetts.

Gudder, S. P. (1979). *Stochastic Methods in Quantum Mechanics*. Elsevier, North Holland, New York.

Holevo, A. S. (1982). *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, Volume I of North-Holland Series in Statistics and Probability. North-Holland, Amsterdam. Имеется издание на русском языке: Холево А. С. *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*. ISBN 5-93972-254-7. РХД, 2003.

Hughston, L. P., Jozsa, R. and Wootters, W. K. (1993). A complete classification of quantum ensembles having a given density matrix. *Phys. Lett.*, **A183**, 14–18.

Kraus, K. (1983). *States, Effects, and Operations*, Volume 190 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin.

Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1958). *Quantum Mechanics*. Pergamon Press, London. Имеется издание на русском языке: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. — Издание 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Наука, 1963.

Langerholc, J. (1965). Trace formalism for quantum mechanical expectation values. *J. Math. Phys.*, **6**, 1210–1218.

Lieb, E. H. (1973). Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy. *J. Math. Phys.*, **14**, 1938–1941.

Louisell, W. H. (1990). *Quantum Statistical Properties of Radiation*. John Wiley, New York.

Lüders, G. (1951). Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß. *Ann. Phys. (Leipzig)*, **8**, 322–328.

Nelson, E. (1967). *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, Princeton.

Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge. Имеется перевод: Нильсен М., Чанг И. *Квантовые вычисления и квантовая информация* / пер. с англ. — М.: Мир, 2006.

von Neumann, J. (1955). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton. Имеется перевод: фон Нейман. *Математические основы квантовой механики*. — М.: Наука, 1964.

Werl, A. (1978). General properties of entropy. *Rev. Mod. Phys.*, **50**, 221–260.

Часть II

Теория матриц плотности

ГЛАВА 3

Основные квантовые уравнения

В отличие от случая замкнутой системы, квантовая динамика открытой системы в общем случае не может быть представлена в терминах унитарной временной эволюции. Во многих случаях оказывается полезным сформулировать динамику открытой системы посредством подходящего уравнения движения для ее матрицы плотности, так называемого основного квантового уравнения. В этой главе мы дадим обзор различных типов основных уравнений, которыми можно воспользоваться для анализа квантовой динамики открытых систем. Акцент будет сделан на марковской динамике открытых систем. Систематическое рассмотрение немарковских квантовых процессов будет представлено в части IV.

Для начала мы дадим общую характеристику динамики замкнутых и открытых квантовых систем. Затем введем квантовые марковские процессы, которые представляют собой простейший случай динамики открытых систем. Они могут рассматриваться, по сути, как прямое обобщение классической вероятностной концепции динамических полугрупп на квантовую механику. По аналогии с дифференциальным уравнением Чепмена–Колмогорова в классической теории вероятностей, квантовая динамическая полугруппа приводит к линейному дифференциальному уравнению первого порядка для приведенной матрицы плотности, которое называется основным квантовым марковским уравнением в форме Линдблада.

Будут приведены несколько способов получения марковских уравнений для матрицы плотности, которые стартуют с различных микроскопических моделей, таких как слабое взаимодействие излучения с веществом и модель Кальдейры–Леггетта. Получившиеся уравнения для матрицы плотности позволяют исследовать общие свойства, такие как необратимость, производство энтропии и релаксация к состоянию равновесия. Особое значение в стандартных приложениях динамики открытых систем имеют два предельных случая. Это основное квантовое оптическое уравнение и основное квантовое уравнение броуновского движения. Мы приведем ряд примеров и обсудим общие свойства соответствующих основных уравнений. Для последующих приложений будет изучена модель Кальдейры–

Леггетта с более широкой точки зрения с использованием точных гейзенберговских уравнений движения, а также функционала влияния и техники интегралов по траекториям.

Основные квантовые уравнения встречаются также при рассмотрении открытых многочастичных систем. Если рассматривать взаимодействия между частицами в приближении среднего поля, то в приведенную матрицу плотности входит генератор нелинейной временной эволюции. При определенных условиях решения таких нелинейных уравнений для матрицы плотности могут быть получены при помощи нелинейного уравнения типа Шредингера. В качестве двух известных примеров основных уравнений среднего поля мы рассмотрим лазерные уравнения и явление сверхизлучения.

3.1. Замкнутые и открытые квантовые системы

3.1.1. Уравнение Лиувилля – фон Неймана

Вектор состояния $|\psi(t)\rangle$ в квантовой механике изменяется во времени согласно уравнению Шредингера,

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle, \quad (3.1)$$

где $H(t)$ — гамильтониан системы, а постоянная Планка \hbar считается равной 1. Решение уравнения Шредингера может быть представлено в терминах унитарного оператора эволюции во времени $U(t, t_0)$, который превращает состояние $|\psi(t_0)\rangle$ в некоторый начальный момент времени t_0 в состояние $|\psi(t)\rangle$ в момент времени t ,

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (3.2)$$

Если мы подставим выражение (3.2) в уравнение Шредингера (3.1), то получим операторное уравнение для оператора эволюции во времени $U(t, t_0)$,

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0), \quad (3.3)$$

с начальным условием

$$U(t_0, t_0) = I. \quad (3.4)$$

При помощи (3.3) и (3.4) легко показать, что $U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) \equiv I$ и, следовательно, $U(t, t_0)$ является унитарным оператором.

Гамильтониан H для замкнутой, изолированной физической системы не зависит от времени, и интегрирование уравнения (3.3) дает хорошо известное выражение

$$U(t, t_0) = \exp[-iH(t - t_0)]. \quad (3.5)$$

В физических приложениях часто встречается ситуация, когда рассматриваемая система подвергается воздействию внешних сил, внешнего электромагнитного поля, например. Если в этом случае динамика квантовой системы может быть сформулирована в терминах гамильтонова генератора $H(t)$, который может зависеть от времени, система вновь будет называться *замкнутой*, тогда как термин *изолированная* будет зарезервирован для обозначения того, что гамильтониан системы не зависит от времени. Для зависящего от времени гамильтониана решение уравнения (3.3) с начальным условием (3.4) может быть представлено как хронологически упорядоченная экспонента,

$$U(t, t_0) = T_{\leftarrow} \exp \left[-i \int_{t_0}^t ds H(s) \right], \quad (3.6)$$

где T_{\leftarrow} обозначает оператор хронологического упорядочения по времени, который сортирует произведения зависящих от времени операторов так, что их временные аргументы увеличиваются справа налево, как показано стрелкой.

Если рассматриваемая система находится в смешанном состоянии, соответствующий квантовый статистический ансамбль может быть охарактеризован при помощи статистического оператора ρ . Можно непосредственно вывести уравнение движения для матрицы плотности, начав с уравнения Шредингера (3.1). Допустим, что в некоторый начальный момент времени t_0 состояние системы характеризуется матрицей плотности (см. раздел 2.1.3)

$$\rho(t_0) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\psi_{\alpha}(t_0)\rangle \langle \psi_{\alpha}(t_0)|, \quad (3.7)$$

где w_{α} — положительные веса, а $|\psi_{\alpha}(t_0)\rangle$ являются нормированными векторами состояния, которые изменяются во времени согласно уравнению Шредингера (3.2). Состояние системы в момент времени t будет, следовательно, иметь вид

$$\rho(t) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} U(t, t_0) |\psi_{\alpha}(t_0)\rangle \langle \psi_{\alpha}(t_0)| U^{\dagger}(t, t_0), \quad (3.8)$$

полученное выражение можно записать более сжато как

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0). \quad (3.9)$$

Дифференцирование этого уравнения по времени немедленно даст уравнение движения для матрицы плотности

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H(t), \rho(t)], \quad (3.10)$$

которое часто называется *уравнением фон Неймана* или *Лиувилля–фон Неймана*.

Для того чтобы подчеркнуть аналогию между уравнением фон Неймана и соответствующим уравнением движения для плотности вероятности в классической статистической механике, оно часто записывается в виде, аналогичном классическому уравнению Лиувилля,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}(t)\rho(t). \quad (3.11)$$

Здесь \mathcal{L} – *оператор Лиувилля*, который определяется через условие, что $\mathcal{L}(t)\rho$ равно $-i$, помноженному на коммутатор $H(t)$ с ρ . Точнее, \mathcal{L} часто называется *супероператором* Лиувилля, поскольку он действует на оператор, чтобы получить другой оператор. Аналогично уравнению (3.6) уравнение Лиувилля (3.11) приводит к формальному выражению

$$\rho(t) = T_{\leftarrow} \exp \left[\int_{t_0}^t ds \mathcal{L}(s) \right] \rho(t_0). \quad (3.12)$$

В случае, когда гамильтониан не зависит от времени, супероператор Лиувилля также не зависит от времени, и мы, очевидно, имеем

$$\rho(t) = \exp[\mathcal{L}(t - t_0)]\rho(t_0). \quad (3.13)$$

3.1.2. Гейзенберговское представление и представление взаимодействия

В шредингеровском представлении временная зависимость матрицы плотности $\rho(t)$ подчиняется уравнению Лиувилля–фон Неймана (3.11). Эквивалентное описание квантовой динамики получается при переносе временной зависимости от матриц плотности к операторам в гильбертовом

пространстве \mathcal{H} . Это приводит к гейзенберговскому представлению. Будем считать, что в некоторый фиксированный момент времени t_0 квантовые состояния в обоих представлениях совпадают, то есть $\rho(t_0) = \rho_H(t_0)$. Здесь и далее при использовании гейзенберговского представления операторы будут обозначаться индексом H . Операторы в шредингеровском и гейзенберговском представлении соотносятся через каноническое преобразование

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0)A(t)U(t, t_0), \quad (3.14)$$

где оператор $A(t)$ в шредингеровском представлении может явно зависеть от времени. Очевидно, в момент времени t_0 операторы в шредингеровском и гейзенберговском представлениях совпадают, $A_H(t_0) = A(t_0)$. В гейзенберговском представлении квантовые средние значения определяются через фиксированную матрицу плотности $\rho_H(t_0)$. Физическая эквивалентность этих двух представлений становится очевидной благодаря тому факту, что среднее значение наблюдаемой $A(t)$ одно и то же в обоих представлениях:

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}\{A(t)\rho(t)\} = \text{tr}\{A_H(t)\rho_H(t_0)\}. \quad (3.15)$$

Уравнение движения для оператора $A_H(t)$ для гейзенберговского представления получается напрямую из закона преобразования (3.14). Дифференцируя обе части (3.14) по времени, получаем гейзенберговское уравнение движения

$$\frac{d}{dt}A_H(t) = i[H_H(t), A_H(t)] + \frac{\partial A_H(t)}{\partial t}, \quad (3.16)$$

где $H_H(t)$ обозначает гамильтониан в гейзенберговском представлении,

$$H_H(t) = U^\dagger(t, t_0)H(t)U(t, t_0). \quad (3.17)$$

В уравнении (3.16) d/dt означает полную производную по времени, тогда как $\partial/\partial t$ — частную производную для явно зависящих от времени операторов в шредингеровском представлении. В явном виде,

$$\frac{\partial A_H(t)}{\partial t} = U^\dagger(t, t_0) \frac{\partial A(t)}{\partial t} U(t, t_0). \quad (3.18)$$

Если $dA_H(t)/dt = 0$, то A_H является интегралом движения. Важный частный случай гейзенберговского уравнения движения получается в случае, когда A — гамильтониан системы, $A = H$. Для изолированной системы $\partial H/\partial t = 0$, и оператор эволюции во времени имеет особый

вид (3.5). Тогда гамильтониан коммутирует с оператором эволюции во времени $U(t, t_0)$ и, следовательно, гамильтониан $H_H(t)$ в гейзенберговском представлении является интегралом движения, то есть

$$\frac{d}{dt}H_H = 0. \quad (3.19)$$

Более того, если шредингеровский оператор A явно не зависит от времени и если система изолирована, гейзенберговское уравнение движения сводится к виду

$$\frac{d}{dt}A_H(t) = i[H, A_H(t)]. \quad (3.20)$$

Давайте теперь посмотрим на уравнение движения для среднего значения произвольной наблюдаемой $A(t)$ в шредингеровском представлении, которая в общем случае явно зависит от времени. Дифференцируя (3.15) по времени и обращаясь к гейзенберговскому уравнению движения (3.16), находим

$$\frac{d}{dt}\langle A(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}A_H(t) \right\rangle = \text{tr} \left\{ \left(i[H_H(t), A_H(t)] + \frac{\partial A_H(t)}{\partial t} \right) \rho_H(t_0) \right\}. \quad (3.21)$$

Это уравнение называется уравнением Эренфеста. Оно утверждает, что изменение во времени среднего значения наблюдаемой $A(t)$ равно среднему значению производной по времени соответствующей наблюдаемой $A_H(t)$ в гейзенберговском представлении.

Представления Гейзенberга и Шредингера — это предельные случаи более общего представления, которое называется представлением взаимодействий. Запишем гамильтониан системы в виде суммы двух частей

$$H(t) = H_0 + \hat{H}_I(t). \quad (3.22)$$

Конкретный способ разбиения гамильтониана зависит от изучаемой физической системы. В общем случае, H_0 представляет сумму энергий двух систем, когда взаимодействие между ними не учитывается. Будем считать этот гамильтониан не зависящим от времени. $\hat{H}_I(t)$ описывает взаимодействие между системами. Оператор эволюции во времени всей системы снова будет обозначаться $U(t, t_0)$. Согласно уравнению (3.15) среднее значение шредингеровской наблюдаемой $A(t)$ (которая может явно зависеть от времени) в момент времени t выражается как

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr} \{ A(t)U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) \}, \quad (3.23)$$

где $\rho(t_0)$ — состояние системы в момент времени t_0 .

Введем унитарные операторы эволюции во времени

$$U_0(t, t_0) \equiv \exp[-iH_0(t - t_0)] \quad (3.24)$$

и

$$U_I(t, t_0) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)U(t, t_0). \quad (3.25)$$

Тогда среднее значение (3.23) может быть записано как

$$\begin{aligned} \langle A(t) \rangle &= \text{tr} \left\{ U_0^\dagger(t, t_0)A(t)U_0(t, t_0)U_I(t)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0) \right\} \equiv \\ &\equiv \text{tr}\{A_I(t)\rho_I(t)\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $A_I(t)$ введен как оператор в представлении взаимодействия

$$A_I(t) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)A(t)U_0(t, t_0) \quad (3.27)$$

и $\rho_I(t)$ — как матрица плотности в представлении взаимодействия

$$\rho_I(t) \equiv U_I(t, t_0)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0). \quad (3.28)$$

Важно отметить, что в отличие от гейзенберговского представления изменение во времени операторов в представлении взаимодействия определяется не полным гамильтонианом H , а только его свободной частью H_0 . Если $\widehat{H}_I(t) = 0$, получаем $U_0(t, t_0) = U(t, t_0)$ и $U_I(t, t_0) = I$, так что представление взаимодействия идентично гейзенберговскому. Наоборот, во втором предельном случае стремящегося к нулю свободного гамильтониана, $H_0 = 0$, получаем $H_I(t) = H(t)$, так что $U_0(t, t_0) = I$ и $U_I(t, t_0) = U(t, t_0)$, и мы приходим к шредингеровскому представлению.

Очевидно, что оператор эволюции во времени $U_I(t, t_0)$ в представлении взаимодействия является решением дифференциального уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_I(t, t_0) = H_I(t)U_I(t, t_0) \quad (3.29)$$

с начальным условием $U_I(t_0, t_0) = I$. Здесь мы обозначили гамильтониан в представлении взаимодействия посредством

$$H_I(t) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)\widehat{H}_I(t)U_0(t, t_0). \quad (3.30)$$

Соответствующее уравнение фон Неймана в представления взаимодействия принимает, следовательно, вид

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = -i[H_I(t), \rho_I(t)]. \quad (3.31)$$

Часто уравнение фон Неймана в представлении взаимодействия записывается в эквивалентном интегральном виде

$$\rho_I(t) = \rho_I(t_0) - i \int_{t_0}^t ds [H_I(s), \rho_I(s)]. \quad (3.32)$$

Этот вид уравнения фон Неймана можно использовать в качестве отправной точки для построения приближенных решений в рамках теории возмущения.

3.1.3. Динамика открытых систем

Сделав краткий обзор фундаментальных уравнений, описывающих гамильтонову динамику замкнутой квантовой системы, обратимся к рассмотрению открытых систем. В общих терминах, открытая система — это квантовая система S , которая взаимодействует с другой квантовой системой B , носящей название окружения. Таким образом, она представляет подсистему составной полной системы $S + B$ (см. раздел 2.2), в соответствии с чем составная система считается замкнутой, подчиняющейся гамильтоновой динамике. Состояние подсистемы S , однако, будет изменяться вследствие внутренней динамики и взаимодействия с окружением. Взаимодействие приводит к некоторым корреляциям система-среда, таким что происходящие в результате изменения состояния S не могут, в общем случае, больше описываться в терминах унитарной, гамильтоновой динамики. Динамика подсистемы S , вызванная изменением гамильтониана всей системы, часто называется *динамикой редуцированной системы*, а S — *редуцированной системой*.

Обозначим через \mathcal{H}_S гильбертово пространство системы, а через \mathcal{H}_B — окружения. Гильбертово пространство полной системы $S + B$ дается тогда тензорным произведением $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$ (см. раздел 2.2.1). Полный гамильтониан $H(t)$ принимает вид

$$H(t) = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + \hat{H}_I(t), \quad (3.33)$$

где H_S является собственным гамильтонианом открытой системы S , H_B — свободный гамильтониан окружения B и $\hat{H}_I(t)$ — гамильтониан, описывающий взаимодействие между системой и окружением. Конечно, в модель можно включить зависящие от времени взаимодействия. Схематичный вид типичной изучаемой системы показан на рис. 3.1.

Если мы говорим об открытой системе S , будем использовать общий термин *окружения* для взаимодействующей с ней системы B . Термин

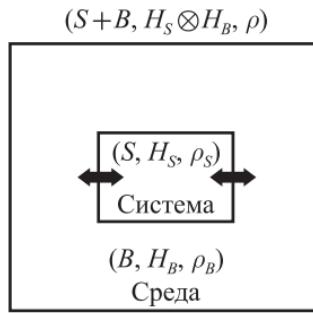


Рис. 3.1. Схематический рисунок открытой квантовой системы.

резервуар относится к системе с бесконечным числом степеней свободы, так что частоты мод резервуара образуют континuum. Как будет показано, это свойство, в общем случае, приводит к необратимому поведению открытой квантовой системы. Наконец, термин *термостат* будет использоваться для резервуара, который находится в состоянии равновесия.

Мы собираемся рассмотреть в этой книге несколько примеров открытых квантовых систем. В основном, изучение открытых квантовых систем мотивировано тем, что во многих физически важных ситуациях полная математическая модель динамики составной системы является слишком сложной. Окружение может представлять собой, например, резервуар или термостат, имеющий бесконечно большое число степеней свободы. В этом случае точное рассмотрение требует решения бесконечной иерархии связанных уравнений движения. Даже если решение известно, встает задача отделения и определения интересующих физических величин усреднением по оставшимся, неважным степеням свободы. Более того, часто встречается ситуация, когда моды среды либо не известны точно, либо неуправляемы. Поэтому, пытаются разработать более простое описание в редуцированном пространстве состояний, образованном ограниченным множеством физически важных переменных, что достигается использованием различных аналитических и приближенных методов.

Открытая система S выделяется тем, что все интересующие измерения относятся к этой подсистеме. Согласно разделу 2.2.1 наблюдаемые, относящиеся к S , все имеют вид $A \otimes I_B$, где A – оператор, действующий в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_S , а I_B обозначает единицу в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_B . Если состояние полной системы описывается некоторой матрицей плотности ρ , тогда средние значения наблюдаемых, действующих в гильбертовом пространстве открытой системы определяются с помощью

формулы

$$\langle A \rangle = \text{tr}_S \{A \rho_S\}, \quad (3.34)$$

где

$$\rho_S = \text{tr}_B \rho \quad (3.35)$$

является приведенной матрицей плотности открытой квантовой системы S (см. уравнение (2.92)). Здесь и далее tr_S обозначает частичный след по гильбертовому пространству открытой системы, в то время как tr_B обозначает частичный след по степеням свободы окружения B . Ясно, что редуцированный оператор плотности ρ_S будет центральной изучаемой величиной при описании открытых квантовых систем.

Приведенная матрица плотности $\rho_S(t)$ в момент времени t получается из матрицы плотности $\rho(t)$ полной системы вычислением частичного следа по степеням свободы окружения. Поскольку полная матрица плотности изменяется унитарным образом, получаем

$$\rho_S(t) = \text{tr}_B \{U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)\}, \quad (3.36)$$

где $U(t, t_0)$ — оператор эволюции во времени всей системы. Аналогичным образом уравнение движения приведенной матрицы плотности получается вычислением частичного следа по окружению в обеих частях уравнения Лиувилля – фон Неймана полной системы

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i \text{tr}_B [H(t), \rho(t)]. \quad (3.37)$$

В следующих разделах мы дадим обзор наиболее важных уравнений движения для приведенной матрицы плотности, используемых как приближения рассмотренных выше точных уравнений динамики.

3.2. Квантовые марковские процессы

Наиболее важным свойством классического, однородного марковского процесса является свойство полугруппы, которое обычно формулируется в терминах дифференциального уравнения Чепмена – Колмогорова (1.68), включающего зависящий от времени генератор. Распространение этого свойства на квантовую механику приводит к концепциям квантовой динамической полугруппы и квантового марковского процесса (Kraus, 1971; Davies, 1976; Alicki, Lendi, 1987; Alicki, Fannes, 2001). Эти концепции представлены в текущем разделе, в котором выводится общий вид главного

квантового марковского уравнения. Мы также обсудим некоторые общие свойства квантовых марковских процессов, такие как сопряженное главное уравнение, квантовая регрессионная теорема, необратимость и производство энтропии.

3.2.1. Квантовые динамические полугруппы

В общем случае динамика приведенной системы, определенная через точные уравнения (3.36) и (3.37), будет очень сложной. Однако в условиях малого времени взаимодействия с окружением можно пренебречь эффектами памяти и сформулировать динамику приведенной системы в терминах квантовой динамической полугруппы.

Для начала введем концепцию динамического отображения. Для этого предположим, что мы можем приготовить в начальный момент времени $t = 0$ состояние всей системы $S + B$ как некоррелированное произведение $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B$, где $\rho_S(0)$ — это начальное состояние приведенной системы S , а ρ_B представляет некоторое исходное состояние окружения, например, состояние теплового равновесия. Тогда преобразование, описывающее изменение приведенной системы от начального момента времени $t = 0$ до некоторого момента $t > 0$, может быть записано в виде

$$\rho_S(0) \mapsto \rho_S(t) = V(t)\rho_S(0) \equiv \text{tr}_B \{U(t, 0)[\rho_S(0) \otimes \rho_B]U^\dagger(t, 0)\}. \quad (3.38)$$

Если мы зафиксируем исходное состояние ρ_B и конечный момент времени t , то это соотношение определяет отображение пространства $\mathcal{S}(\mathcal{H}_S)$ матриц плотности приведенной системы на само себя,

$$V(t): \mathcal{S}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_S). \quad (3.39)$$

Это отображение, описывающее изменение состояния открытой системы за время t , называется *динамическим отображением* (см. рис. 3.2).

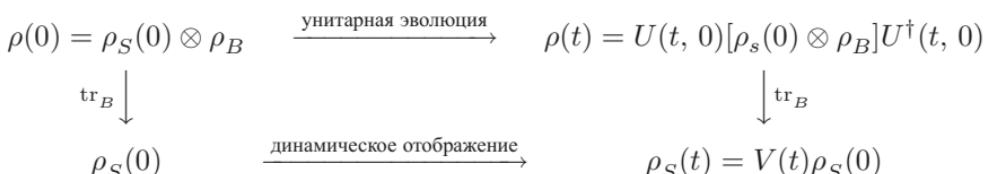


Рис. 3.2. Коммутативная диаграмма, показывающая действие динамического отображения $V(t)$.

Динамическое отображение может быть целиком охарактеризовано при помощи операторов, относящихся к гильбертовому пространству \mathcal{H}_S открытой системы. Для этого мы воспользуемся спектральным разложением матрицы плотности ρ_B окружения,

$$\rho_B = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\varphi_{\alpha}\rangle\langle\varphi_{\alpha}|. \quad (3.40)$$

Здесь $|\varphi_{\alpha}\rangle$ образуют ортонормированный базис в \mathcal{H}_B , а λ_{α} — неотрицательные действительные числа, удовлетворяющие $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$. Определение (3.38) немедленно дает следующее представление:

$$V(t)\rho_S = \sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha\beta}(t)\rho_S W_{\alpha\beta}^{\dagger}(t), \quad (3.41)$$

где $W_{\alpha\beta}$, являющиеся операторами в \mathcal{H}_S , определяются как

$$W_{\alpha\beta}(t) = \sqrt{\lambda_{\beta}} \langle\varphi_{\alpha}|U(t, 0)|\varphi_{\beta}\rangle. \quad (3.42)$$

В соответствии с уравнением (3.41), динамическое отображение $V(t)$ имеет вид (2.157) операции Φ_m , описывающей обобщенное квантовое измерение. Более того, операторы $W_{\alpha\beta}(t)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha\beta}^{\dagger}(t)W_{\alpha\beta}(t) = I_S, \quad (3.43)$$

из которого мы получаем, что

$$\text{tr}_S\{V(t)\rho_S\} = \text{tr}_S \rho_S = 1. \quad (3.44)$$

Таким образом, мы делаем вывод, что динамическое отображение $V(t)$ представляет выпукло-линейную, полностью положительную и сохраняющую след квантовую операцию.

Выше мы ввели динамическое отображение $V(t)$ для фиксированного времени $t \geq 0$. Если мы теперь позволим t изменяться, то получим однопараметрическое семейство $\{V(t)|t \geq 0\}$ динамических отображений, где $V(0)$ — отображение соответствия. Такое семейство описывает всю будущую эволюцию открытой системы, которая в общем случае может оказаться очень сложной. Тем не менее, если характерные временные масштабы, на которых затухает корреляционная функция резервуара, намного

меньше характерных временных масштабов эволюции системы, справедливо пренебречь эффектами памяти в динамике приведенной системы. Как и в классической теории, ожидается, следовательно, марковское поведение. Для однородного случая последнее может быть formalизовано при помощи свойства полугруппы (ср. с (1.70))

$$V(t_1)V(t_2) = V(t_1 + t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0. \quad (3.45)$$

Точные физические условия, лежащие в основе марковского приближения, будут получены при микроскопическом выводе марковских основных квантовых уравнений (см. параграфы 3.3 и 3.4). Систематическое исследование и разложение вблизи марковского предела отложены до части IV. Резюмируя, квантовая динамическая полугруппа является непрерывным однопараметрическим семейством динамических отображений, удовлетворяющих свойству полугруппы (3.45).

3.2.2. Марковское основное квантовое уравнение

Пусть задана квантовая динамическая полугруппа. Тогда существует, при определенных математических условиях (см. ниже), линейное отображение \mathcal{L} , генератор полугруппы, который позволяет представить полугруппу в экспоненциальном виде,

$$V(t) = \exp(\mathcal{L}t). \quad (3.46)$$

Это представление немедленно дает дифференциальное уравнение первого порядка для приведенной матрицы плотности открытой системы,

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \mathcal{L} \rho_S(t), \quad (3.47)$$

которое называется марковским основным квантовым уравнением. Генератор полугруппы \mathcal{L} представляет собой супероператор. Его можно рассматривать как обобщение супероператора Лиувилля, введенного в (3.11) и который задается коммутатором с некоторым гамильтонианом.

Построим наиболее общую форму для генератора \mathcal{L} квантовой динамической полугруппы. Для этого мы сначала рассмотрим простой случай конечномерного гильбертова пространства \mathcal{H}_S , $\dim \mathcal{H}_S = N$. Соответствующее пространство Лиувилля является комплексным пространством размерности N^2 , и мы выберем полный базис (см. (2.97)) ортонормированных операторов F_i , $i = 1, 2, \dots, N^2$, в этом пространстве, так что

$$(F_i, F_j) \equiv \text{tr}_S \left\{ F_i^\dagger F_j \right\} = \delta_{ij}. \quad (3.48)$$

Для удобства один из базисных операторов выбран пропорциональным единице, а именно $F_{N^2} = (1/N)^{1/2}I_S$, так, чтобы другие базисные операторы являлись операторами с нулевым следом, то есть $\text{tr}_S F_i = 0$ для $i = 1, 2, \dots, N^2 - 1$. Применяя условие полноты к каждому из операторов $W_{\alpha\beta}(t)$, определенных в уравнении (3.42), получаем

$$W_{\alpha\beta}(t) = \sum_{i=1}^{N^2} F_i (F_i, W_{\alpha\beta}(t)). \quad (3.49)$$

При помощи представления (3.41) мы можем записать действие динамического отображения $V(t)$ как

$$V(t)\rho_S = \sum_{i,j=1}^{N^2} c_{ij}(t) F_i \rho_S F_j^\dagger, \quad (3.50)$$

где

$$c_{ij}(t) \equiv \sum_{\alpha\beta} (F_i, W_{\alpha\beta}(t)) (F_j, W_{\alpha\beta}(t))^*. \quad (3.51)$$

Как легко увидеть, матрица коэффициентов $c = (c_{ij})$ является эрмитовой и положительной. Фактически, для любого N^2 -мерного комплексного вектора v мы имеем

$$\sum_{ij} c_{ij} v_i^* v_j = \sum_{\alpha\beta} \left| \left(\sum_i v_i F_i, W_{\alpha\beta}(t) \right) \right|^2 \geq 0, \quad (3.52)$$

которое доказывает, что $c \geq 0$.

Определение (3.46) генератора \mathcal{L} в совокупности с уравнением (3.50) дает

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\rho_S &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{V(\varepsilon)\rho_S - \rho_S\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{N} \frac{c_{N^2N^2}(\varepsilon) - N}{\varepsilon} \rho_S + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} \left(\frac{c_{iN^2}(\varepsilon)}{\varepsilon} F_i \rho_S + \frac{c_{N^2i}(\varepsilon)}{\varepsilon} \rho_S F_i^\dagger \right) + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} \frac{c_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon} F_i \rho_S F_j^\dagger \right\}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Следующим шагом мы определим коэффициенты a_{ij} как

$$a_{N^2N^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c_{N^2N^2}(\varepsilon) - N}{\varepsilon}, \quad (3.54)$$

$$a_{iN^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c_{iN^2}(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad i = 1, \dots, N^2 - 1, \quad (3.55)$$

$$a_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad i, j = 1, \dots, N^2 - 1, \quad (3.56)$$

и введем величины

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} a_{iN^2} F_i \quad (3.57)$$

и

$$G = \frac{1}{2N} a_{N^2N^2} I_S + \frac{1}{2}(F^\dagger + F), \quad (3.58)$$

наряду с эрмитовым оператором

$$H = \frac{1}{2i}(F^\dagger - F). \quad (3.59)$$

Заметим, что матрица, сформированная коэффициентами a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N^2 - 1$, является эрмитовой и положительной. С помощью этих определений мы можем записать генератор как

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H, \rho_S] + \{G, \rho_S\} + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_i \rho_S F_j^\dagger. \quad (3.60)$$

Поскольку полугруппа сохраняет след, для всех матриц плотности ρ_S мы имеем

$$0 = \text{tr}_S \{\mathcal{L}\rho_S\} = \text{tr}_S \left\{ \left(2G + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \right) \rho_S \right\}, \quad (3.61)$$

откуда мы получаем, что

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i. \quad (3.62)$$

Таким образом, мы получаем из (3.60) *первый стандартный вид генератора*:

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H, \rho_S] + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} \left(F_i \rho_S F_j^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ F_j^\dagger F_i, \rho_S \right\} \right). \quad (3.63)$$

Поскольку матрица коэффициентов $a = (a_{ij})$ является положительной, ее можно диагонализовать с помощью подходящего унитарного преобразования u ,

$$uau^\dagger = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{N^2-1} \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

где собственные значения γ_i — неотрицательны. Если ввести новый набор операторов A_k через

$$F_i = \sum_{k=1}^{N^2-1} u_{ki} A_k, \quad (3.65)$$

то получится следующий *диагональный вид генератора*:

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H, \rho_S] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k \left(A_k \rho_S A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S A_k^\dagger A_k \right). \quad (3.66)$$

Это наиболее общая форма генератора квантовой динамической полугруппы. Первый член генератора представляет собой унитарную часть динамики, генерируемую гамильтонианом H . Операторы A_k , введенные выше как подходящие линейные комбинации базисных операторов F_i в пространстве Лиувилля, обычно называются операторами Линдблада, а соответствующее уравнение (3.47) для матрицы плотности — уравнением Линдблада. Заметим, что неотрицательные величины γ_k имеют размерность обратного времени, что следует из выбора A_k безразмерными. Как мы увидим далее, γ_k задаются в терминах определенных корреляционных функций окружения и играют роль скоростей релаксации для различных видов затухания открытой системы.

Точное математическое доказательство того, что (3.63) определяет наиболее общий генератор квантовой динамической полугруппы для случая конечномерного гильбертова пространства, было дано Горини, Коссаковским и Сударшаном (Gorini, Kossakowski, Sudarshan, 1976). В то же время

Линдблад (Lindblad, 1976) доказал в теореме, носящей его имя, что (3.66) дает наиболее общий вид для ограниченного генератора в сепарабельном гильбертовом пространстве, если индекс k пробегает значения из счетного множества. В физической литературе главные квантовые уравнения вида (3.63) или (3.66) появились намного раньше, например, в контексте динамики спиновой релаксации и теории лазеров (см., например, Bausch, 1966; Haake, 1973; Haken, 1984). Мы подчеркиваем, что теорема Линдблада предполагает, что генератор \mathcal{L} — ограниченный. В физических приложениях это обычно не так: гамильтониан H_S приведенной системы, так же как и операторы Линдблада в общем случае, не являются ограниченными. Однако все известные примеры для генераторов квантовых динамических полугрупп — либо вида Линдблада, либо могут быть приведены к нему с небольшими изменениями.

Выше мы опустили все математические подробности. Тем не менее мы сделаем несколько замечаний по математической теории (для обзора см., например, Gorini, Frigerio, Verri, Kossakowski, Sudarshan, 1978; Spohn, 1980; Alicki, Lendi, 1987). Во-первых, мы отметим, что теория квантовых динамических полугрупп обычно формулируется в терминах гейзенберговского, а не шредингеровского представления. Динамическое отображение в гейзенберговском представлении будет обозначаться как $V^\dagger(t)$ и действовать на операторы A в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_S открытой системы, так что мы имеем

$$\text{tr}_S\{A(V(t)\rho_S)\} = \text{tr}_S\{(V^\dagger(t)A)\rho_S\} \quad (3.67)$$

для всех ρ_S . Поскольку мы знаем, что $V(t)$ отображает матрицы плотности в матрицы плотности, отображение $V^\dagger(t)$ в гейзенберговском представлении должно также переводить положительные операторы в положительные операторы и должен сохранять единичный оператор, то есть $V^\dagger(t)I_S = I_S$. Если математическая теория основана на аксиоматическом подходе к динамическим отображениям, нужно потребовать не только положительности, но более строгого условия полной положительности (см. параграф 2.4.3). Однако с физической точки зрения дополнительное требование полной положительности не добавляет нового условия, если динамические отображения вводятся тем способом, как мы это сделали выше, через приведенную динамику, индуцированную унитарной динамикой в большей системе $S + B$.

Мы также потребовали, чтобы однопараметрическое семейство динамических отображений $V(t)$ было непрерывным. Можно показать, что достаточно потребовать очень слабой непрерывности, которая означает, что мы

должны иметь

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{tr}_S \{ (V^\dagger(\varepsilon) A - A) \rho_S \} = 0 \quad (3.68)$$

для всех ρ_S и всех ограниченных операторов A . Далее можно показать, что квантовые динамические полугруппы всегда обладают свойством быть сжимающими, то есть для них выполняется условие

$$\|V(t)^\dagger A\|_1 \leq \|A\|_1, \quad (3.69)$$

где $\|A\|_1 = \text{tr}_S |A|$ называется нормой следа. Это свойство позволяет применять теорию сжимающих полугрупп и допускает введение бесконечно малого генератора \mathcal{L} .

Иногда удобно ввести *диссипатор*

$$\mathcal{D}(\rho_S) \equiv \sum_k \gamma_k \left(A_k \rho_S A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S A_k^\dagger A_k \right) \quad (3.70)$$

и записать основное квантовое уравнение (3.47) в виде

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -i[H, \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t)). \quad (3.71)$$

Отметим, что оператор H в общем случае не может рассматриваться как свободный гамильтониан H_S приведенной системы S : гамильтониан H может содержать дополнительные члены, которые появляются из-за взаимодействия системы с ее окружением (см., например, раздел 3.3.1). Также отметим, что генератор \mathcal{L} не устанавливает единственным образом вид гамильтониана H и операторов Линдблада A_i . Фактически, генератор инвариантен относительно следующих преобразований:

1) унитарные преобразования множества операторов Линдблада,

$$\sqrt{\gamma_i} A_i \rightarrow \sqrt{\gamma'_i} A'_i = \sum_j u_{ij} \sqrt{\gamma_j} A_j, \quad (3.72)$$

где u_{ij} является унитарной матрицей,

2) неоднородные преобразования

$$\begin{aligned} A_i &\rightarrow A'_i = A_i + a_i, \\ H &\rightarrow H' = H + \frac{1}{2i} \sum_j \gamma_j \left(a_j^* A_j - a_j A_j^\dagger \right) + b, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где a_i — комплексные числа и b — действительное.

Благодаря второму свойству инвариантности всегда возможно выбрать операторы Линдблада с нулевым следом.

Как мы уже замечали, открытая система может подвергаться воздействию внешних переменных полей. Для описания такой открытой системы могут потребоваться зависящие от времени генераторы. Очевидное обобщение (3.47) с учетом временной зависимости может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}(t)\rho_S(t), \quad (3.74)$$

где $\mathcal{L}(t)$ — генератор квантовой динамической полугруппы для каждого фиксированного момента времени $t \geq 0$. Введем соответствующий пропагатор посредством

$$V(t, t_0) = T_{\leftarrow} \exp \left(\int_{t_0}^t ds \mathcal{L}(s) \right), \quad (3.75)$$

который удовлетворяет

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t, t_0) = \mathcal{L}(t)V(t, t_0). \quad (3.76)$$

Вместо свойства полугруппы (3.45) теперь мы имеем

$$V(t, t_1)V(t_1, t_0) = V(t, t_0). \quad (3.77)$$

Мы рассмотрим генераторы Линдблада в переменных полях в разделе 8.4.

3.2.3. Сопряженное основное квантовое уравнение

В полной аналогии с замкнутыми квантовыми системами, для открытых квантовых можно определить для каждого оператора A в шредингеровском представлении соответствующий оператор $A_H(t)$ в гейзенберговском. Это достигается с помощью уравнения (3.67), которое мы перепишем как

$$\text{tr}_S\{AV(t, 0)\rho_S\} = \text{tr}_S\{(V^\dagger(t, 0)A)\rho_S\} = \text{tr}_S\{A_H(t)\rho_S\}, \quad (3.78)$$

где мы допускаем временную зависимость генератора Линдблада. По аналогии с уравнением (3.75) мы введем сопряженный пропагатор

$$V^\dagger(t, t_0) = T_{\rightarrow} \exp \left(\int_{t_0}^t ds \mathcal{L}^\dagger(s) \right). \quad (3.79)$$

Символ T_{\rightarrow} обозначает оператор антихронологического упорядочения времени, в то время как сопряженный генератор \mathcal{L}^{\dagger} определяется

$$\text{tr}_S \{ A \mathcal{L}(t) \rho_S \} = \text{tr}_S \{ (\mathcal{L}^{\dagger}(t) A) \rho_S \}. \quad (3.80)$$

Сопряженный пропагатор $V^{\dagger}(t, t_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} V^{\dagger}(t, t_0) = V^{\dagger}(t, t_0) \mathcal{L}^{\dagger}(t) \quad (3.81)$$

и описывает изменение во времени операторов в гейзенберговском представлении,

$$A_H(t) = V^{\dagger}(t, 0) A. \quad (3.82)$$

Это приводит к следующему уравнению движения для гейзенберговского оператора $A_H(t)$:

$$\frac{d}{dt} A_H(t) = V^{\dagger}(t, 0) \{ \mathcal{L}^{\dagger}(t) A \}, \quad (3.83)$$

которое известно как *сопряженное основное уравнение*.

Заметим, что в правой части уравнения (3.83) сопряженный оператор Линдблада сначала действует на оператор A и затем результат распространяется с помощью сопряженного пропагатора. Чтобы определить вид уравнения движения в момент времени t , недостаточно знания гейзенберговского оператора $A_H(t)$; необходим также, в общем случае, сопряженный пропагатор.

Важный частный случай получается, если генератор Линдблада не зависит явно от времени, как в случае уравнения (3.66). В этом случае сопряженный генератор Линдблада \mathcal{L}^{\dagger} коммутирует с $V^{\dagger}(t, t_0)$ и сопряженное квантовое основное уравнение принимает более простой вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_H(t) &= \mathcal{L}^{\dagger} A_H(t) = i[H, A_H(t)] + \\ &+ \sum_k \gamma_k \left(A_k^{\dagger} A_H(t) A_k - \frac{1}{2} A_H(t) A_k^{\dagger} A_k - \frac{1}{2} A_k^{\dagger} A_k A_H(t) \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Теперь правая часть сопряженного основного уравнения зависит только от гейзенберговского оператора $A_H(t)$ в момент времени t . Пример применения сопряженного основного уравнения будет обсуждаться в разделе 3.4.6.

3.2.4. Временные корреляционные функции

Основное квантовое уравнение (3.47) и сопряженное основное уравнение (3.83) описывают изменение во времени матрицы плотности и операторов в гейзенберговском представлении. С их помощью мы можем определить средние значения матричных элементов всех наблюдаемых. Тем не

менее важно осознавать тот факт, что для открытых квантовых систем имеются не только наблюдаемые величины. Полное статистическое описание также требует знания средних значений операторов, взятых в разные времена, то есть временные корреляционные функции. Они особенно интересны в физических применениях, поскольку зачастую напрямую связаны с измеряемыми величинами. Типичным примером служит $a(t)$ — мода излучения электромагнитного поля. В этом случае интерес может представлять спектр флуктуаций, который определяется в терминах преобразования Фурье двухвременной корреляционной функции $\langle a^\dagger(t)a(0) \rangle$.

Для начала рассмотрим двухвременную корреляционную функцию в виде

$$g(t, s) \equiv \langle B(t)C(s) \rangle = \text{tr}_S\{B(t)C(s)\rho_S(0)\}, \quad (3.85)$$

где $t > s \geq 0$. Опуская для простоты индекс H , мы пишем $B(t)$ и $C(t)$ для произвольных гейзенберговских операторов, где мы выбираем фиксированный начальный момент времени $t_0 = 0$. С использованием пропагатора основного квантового уравнения мы можем записать уравнение (3.85) в следующем виде:

$$g(t, s) = \text{tr}_S\{BV(t, s)CV(s, 0)\rho_S(0)\}, \quad (3.86)$$

где B и C являются операторами в шредингеровском представлении. Здесь и далее мы воспользовались соглашением, что супероператоры $V(t, s)$ всегда действуют на то, что справа от них. Уравнение (3.86), таким образом, означает, что для вычисления двухвременной корреляционной функции нужно распространить матрицу плотности $\rho_S(0)$ от момента времени 0 к моменту s , применить слева оператор C , распространить новую «матрицу плотности» $C\rho_S(s)$ от момента времени s к моменту t и, наконец, применить слева B и вычислить след по \mathcal{H}_S .

Результат легко приводится к более общему виду измеряемой временной корреляционной функции, которая дается (Gardiner, Zoller, 2000; Gardiner, Collett, 1985)

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2, \dots, t_n; s_1, s_2, \dots, s_m) &\equiv \\ &\equiv \langle B_1(s_1)B_2(s_2)\dots B_m(s_m)C_n(t_n)\dots C_2(t_2)C_1(t_1) \rangle = \\ &= \text{tr}_S\{C_n(t_n)\dots C_2(t_2)C_1(t_1)\rho_S(0)B_1(s_1)B_2(s_2)\dots B_m(s_m)\}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Здесь $B_j(s_j)$, $j = 1, \dots, m$, и $C_i(t_i)$, $i = 1, \dots, n$, — произвольные гейзенберговские операторы, и s_j и t_i упорядочены по времени так, что

$$t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 \geq 0, \quad s_m > s_{m-1} > \dots > s_1 \geq 0. \quad (3.88)$$

Для того чтобы привести временную корреляционную функцию к виду, аналогичному (3.86), упорядочим по времени множество $\{t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_m\}$. Заметим, что число q элементов этого множества может

быть меньше, чем $n + m$, так как мы допускаем возможность того, что $t_i = s_j$ для некоторых индексов i, j . Обозначим упорядоченные по времени элементы через r_l , $l = 1, 2, \dots, q$. Таким образом,

$$r_q > r_{q-1} > \dots > r_1 \geq 0. \quad (3.89)$$

Для каждого l определим супероператор \mathcal{F}_l через

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l \rho &= C_i \rho, && \text{если } r_l = t_i \neq s_j \text{ для некоторого } i \text{ и всех } j, \\ \mathcal{F}_l \rho &= \rho B_j, && \text{если } r_l = s_j \neq t_i \text{ для некоторого } j \text{ и всех } i, \\ \mathcal{F}_l \rho &= C_i \rho B_j, && \text{если } r_l = t_i = s_j \text{ для некоторых } i \text{ и } j. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2, \dots, t_n; s_1, s_2, \dots, s_m) &= \\ &= \text{tr}_S \{ \mathcal{F}_q V(r_q, r_{q-1}) \mathcal{F}_{q-1} V(r_{q-1}, r_{q-2}) \dots \mathcal{F}_1 V(r_1, 0) \rho_S(0) \}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Это уравнение представляет собой общее выражение для всех упорядоченных по времени временных корреляционных функций в терминах пропагатора, лежащего в основе марковского основного квантового уравнения.

В практических приложениях часто бывает полезно формулировать динамику корреляционных функций в терминах системы дифференциальных уравнений. Предположим, имеется множество операторов $\{B_i\}$ таких, что марковское основное уравнение (3.47) приводит к замкнутой линейной системе дифференциальных уравнений для их средних,

$$\frac{d}{dt} \langle B_i(t) \rangle = \sum_j G_{ij} \langle B_j(t) \rangle \quad (3.92)$$

с некоторой матрицей коэффициентов G_{ij} . Двухточечная корреляционная функция удовлетворяет тогда такой же системе дифференциальных уравнений,

$$\frac{d}{d\tau} \langle B_i(t + \tau) B_l(t) \rangle = \sum_j G_{ij} \langle B_j(t + \tau) B_l(t) \rangle. \quad (3.93)$$

Это утверждение называется *квантовой регрессионной теоремой* (Lax, 1963; Gardiner and Zoller, 2000). Чтобы доказать ее, сначала запишем

$$\frac{d}{dt} \langle B_i(t) \rangle = \text{tr}_S \{ (\mathcal{L}^\dagger B_i) \rho_S(t) \} = \text{tr}_S \left\{ \left(\sum_j G_{ij} B_j \right) \rho_S(t) \right\}. \quad (3.94)$$

Поскольку рассматриваемое соотношение должно выполняться для любой исходной матрицы плотности $\rho_S(0)$, мы делаем вывод, что

$$\mathcal{L}^\dagger B_i = \sum_j G_{ij} B_j. \quad (3.95)$$

Следовательно, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle B_i(t + \tau) B_l(t) \rangle &= \text{tr}_S \{ (\mathcal{L}^\dagger B_i) V(t + \tau, t) B_l \rho_S(t) \} = \\ &= \sum_j G_{ij} \langle B_j(t + \tau) B_l(t) \rangle, \end{aligned} \quad (3.96)$$

что и требовалось показать. Важность квантовой регрессионной теоремы следует из того факта, что она позволяет нам определить явные выражения для корреляционных функций, если известно решение для средних значений. Пример будет обсуждаться в разделе 3.4.5.

3.2.5. Необратимость и производство энтропии

Марковское основное квантовое уравнение (3.47) описывает необратимое изменение открытой квантовой системы. Чтобы обсудить более детально необратимый характер квантовых динамических полугрупп, мы выведем в этом разделе общее выражение для скорости производства энтропии σ в открытой квантовой системе, которая допускает стационарное состояние, и покажем, что эта скорость всегда неотрицательна.

Для начала рассмотрим произвольное динамическое отображение $V(t)$. Исследуем изменение относительной энтропии $S(\rho \parallel \rho_0)$ двух состояний ρ, ρ_0 системы S , которое вызвано $V(t)$ (Lindblad, 1975). Подставляя $V(t)$ в уравнение (3.38) и используя уравнения (2.116) и (2.119) и неравенство (2.118), мы находим¹

$$\begin{aligned} S(V(t)\rho \parallel V(t)\rho_0) &= \\ &= S(\text{tr}_B\{U(t, 0)\rho \otimes \rho_B U^\dagger(t, 0)\} \parallel \text{tr}_B\{U(t, 0)\rho_0 \otimes \rho_B U^\dagger(t, 0)\}) \leqslant \\ &\leqslant S(U(t, 0)\rho \otimes \rho_B U^\dagger(t, 0) \parallel U(t, 0)\rho_0 \otimes \rho_B U^\dagger(t, 0)) = \\ &= S(\rho \otimes \rho_B \parallel \rho_0 \otimes \rho_B) = S(\rho \parallel \rho_0). \end{aligned} \quad (3.97)$$

¹ Для простоты мы опускаем индекс S на величинах приведенной системы.

Предположим, что ρ_0 является стационарным состоянием S , то есть $V(t)\rho_0 = \rho_0$. Тогда мы можем заключить, что динамическое отображение $V(t)$ понижает относительную энтропию по отношению к стационарному состоянию,

$$S(V(t)\rho\|\rho_0) \leq S(\rho\|\rho_0). \quad (3.98)$$

Если теперь $V(t) = \exp \mathcal{L}t$ — динамическая полугруппа, из неравенства (3.98) следует, что производная относительной энтропии по $-t$ является положительной, то есть имеет место неравенство

$$\sigma(\rho(t)) \equiv -\frac{d}{dt}S(\rho(t)\|\rho_0) \geq 0, \quad (3.99)$$

где $\rho(t) = V(t)\rho(0)$. Применяя аргументы из неравновесной термодинамики, мы можем интерпретировать функционал $\sigma(\rho)$ как *скорость производства энтропии* (см. ниже). Определение функционала относительной энтропии, уравнение (2.113), приводит к явному выражению

$$\sigma(\rho) = -k_B \operatorname{tr}\{\mathcal{L}(\rho) \ln \rho\} + k_B \operatorname{tr}\{\mathcal{L}(\rho) \ln \rho_0\} \geq 0. \quad (3.100)$$

Заметим, что мы включили постоянную Больцмана в определение энтропии.

Уравнение (3.100) показывает, что производство энтропии является неотрицательным и убывает в стационарном состоянии. При помощи теоремы Либа (см. уравнение (2.120)) мы можем доказать даже больше, а именно что отображение $\rho \mapsto \sigma(\rho)$ является выпуклым функционалом на пространстве состояний открытой системы (Spohn, 1978). Чтобы увидеть это, для начала мы отметим, что второй член в выражении (3.100) является линейным функционалом. Так, достаточно показать, что отображение

$$\rho \mapsto -k_B \operatorname{tr}\{\mathcal{L}(\rho) \ln \rho\} \quad (3.101)$$

является выпуклым функционалом. Используя общий вид (3.66) генератора \mathcal{L} , мы видим, что это отображение принимает форму

$$\rho \mapsto -k_B \sum_k \gamma_k \operatorname{tr} \left\{ \left(A_k \rho A_k^\dagger - A_k^\dagger A_k \rho \right) \ln \rho \right\}. \quad (3.102)$$

Выпуклость функционала производства энтропии $\sigma(\rho)$ теперь немедленно следует из выпуклости отображения (2.126).

Обоснуем определение (3.100) для скорости производства энтропии с использованием аргументов из неравновесной термодинамики. Для этого предположим, что каноническое равновесное распределение (состояние Гиббса)

$$\rho_{th} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H) \quad (3.103)$$

является стационарным решением основного уравнения. Это означает, что $\mathcal{L}(\rho_{th}) = \mathcal{D}(\rho_{th}) = 0$, где \mathcal{D} обозначает диссипатор основного квантового уравнения (см. уравнения (3.70) и (3.71)). Нормировочный множитель $Z = \text{tr} \exp(-\beta H)$ является статсуммой, а

$$\beta \equiv \frac{1}{k_B T} \quad (3.104)$$

— обратной температурой. Точные физические условия, лежащие в основе этого допущения, будут обсуждаться позже.

В неравновесной термодинамике энтропия подчиняется уравнению баланса, которое может быть записано в виде

$$\sigma = \frac{dS}{dt} + J. \quad (3.105)$$

Здесь S — энтропия фон Неймана (см. раздел 2.3.1) открытой системы. Величина J обозначает поток энтропии, то есть количество энтропии, которым открытая система обменивается с окружением в единицу времени, где мы используем договоренность, что для $J > 0$ энтропия вытекает из открытой системы в окружение. Следовательно, величина σ является скоростью производства энтропии, то есть количеством энтропии, производимым в единицу времени в результате необратимых процессов.

Легко вычислить производную по времени от энтропии фон Неймана

$$\frac{dS}{dt} = -k_B \text{tr}\{\mathcal{L}(\rho) \ln \rho\}. \quad (3.106)$$

С другой стороны, поток энтропии J имеет место вследствие изменений внутренней энергии $E = \text{tr}\{H\rho\}$, которые являются результатом диссипативных эффектов. Таким образом, можно определить поток энтропии посредством

$$J = -\frac{1}{T} \frac{d}{dt} \Big|_{diss} E \equiv -\frac{1}{T} \text{tr}\{H\mathcal{D}(\rho)\} = -\frac{1}{T} \text{tr}\{H\mathcal{L}(\rho)\}. \quad (3.107)$$

Используя явное выражение (3.103) для теплового распределения, находим

$$-\frac{1}{T}H = k_B \ln \rho_{th} + k_B \ln Z, \quad (3.108)$$

так что поток энтропии может быть записан как

$$J = k_B \operatorname{tr}\{\mathcal{L}(\rho) \ln \rho_{th}\}, \quad (3.109)$$

где мы воспользовались тем фактом, что генератор сохраняет след, то есть $\operatorname{tr}\{\mathcal{L}(\rho)\} = 0$. Добавляя уравнения (3.106) и (3.109), мы видим, что термодинамическая скорость производства энтропии, определенная из уравнения баланса (3.105), совпадает с выражением (3.100) для отрицательной скорости изменения относительной энтропии по отношению к равновесному состоянию. В этом контексте неравенство $\sigma(\rho) \geq 0$ выражает второй закон термодинамики. Заметим также, что $\sigma(\rho_{th}) = 0$, то есть производство энтропии прекращается в равновесном состоянии. Таким образом, мы делаем вывод, что скорость производства энтропии $\sigma(\rho)$ является выпуклым функционалом в пространстве матриц плотности, который становится равным нулю в состоянии теплового равновесия.

3.3. Микроскопический вывод

С фундаментальной точки зрения желательно вывести генератор квантовой динамической полугруппы из гамильтоновой динамики полной системы. Цель этого раздела — показать, при каких допущениях такой вывод может быть дан на основе различных приближений.

3.3.1. Предел слабого взаимодействия

Мы начнем с рассмотрения квантово-механической системы S , слабо взаимодействующей с резервуаром B . Предположим, что гамильтониан полной системы имеет вид

$$H = H_S + H_B + H_I, \quad (3.110)$$

где H_S и H_B обозначают, соответственно, свободный гамильтониан системы и резервуара, и H_I описывает взаимодействие между системой и резервуаром. Вывод марковского основного квантового уравнения наиболее просто осуществляется в представлении взаимодействий. Нашей отправной точкой, таким образом, станет уравнение фон Неймана в представлении взаимодействий (см. раздел 3.1.2)

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(t)] \quad (3.111)$$

для полной матрицы плотности $\rho(t)$ и его интегральная форма

$$\rho(t) = \rho(0) - i \int_0^t ds [H_I(s), \rho(s)]. \quad (3.112)$$

Заметьте, что мы для простоты обозначений опускаем здесь индекс I , который используется для обозначения представления взаимодействий в разделе 3.1.2. Подставляя интегральную форму в (3.111) и вычисляя след по резервуару, находим

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = - \int_0^t ds \operatorname{tr}_B [H_I(t), [H_I(s), \rho(s)]]. \quad (3.113)$$

Здесь мы допускаем, что

$$\operatorname{tr}_B [H_I(t), \rho(0)] = 0. \quad (3.114)$$

Уравнение (3.113) по-прежнему содержит матрицу плотности полной системы $\rho(t)$ в правой части. Чтобы исключить $\rho(t)$ из уравнения движения, мы сделаем первое приближение — так называемое *приближение Борна*. В нем делается допущение, что взаимодействие между системой и резервуаром слабое, так что влияние системы на резервуар мало (приближение слабой связи). Таким образом, матрица плотности резервуара ρ_B только незначительно подвержена влиянию взаимодействия, и состояние всей системы в момент времени t может быть приблизительно охарактеризовано тензорным произведением

$$\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_B. \quad (3.115)$$

Мы обращаем внимание, что это не означает, что в резервуаре нет возбуждений, вызванных приведенной системой. Марковское приближение, которое будет получено ниже, представляет описание на грубом временном масштабе, и допущение состоит в том, что возбуждения окружения затухают за малые (неразрешаемые) времена. Подставляя тензорное произведение в точное решение уравнения движения (3.113), мы получаем замкнутое интегро-дифференциальное уравнение для приведенной матрицы плотности $\rho_S(t)$

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = - \int_0^t ds \operatorname{tr}_B [H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]]. \quad (3.116)$$

Чтобы упростить это уравнение, мы применим *приближение Маркова*, в котором интегрируемая функция $\rho_S(s)$ сначала заменяется на $\rho_S(t)$. Таким способом мы получаем уравнение движения для матрицы плотности приведенной системы, в котором эволюция состояния системы в момент времени t зависит только от текущего состояния $\rho_S(t)$,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t ds \operatorname{tr}_B [H_I(t), [H_I(s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]. \quad (3.117)$$

Это уравнение называется уравнением Редфилда (Redfield, 1957; Blum, 1981).

Уравнение Редфилда локально по времени, но это еще не марковское основное уравнение, поскольку изменение во времени приведенной матрицы плотности по-прежнему зависит от явного выбора изначально приготовленного состояния в момент времени $t = 0$. Это означает, что динамика приведенной системы еще не описывается динамической полугруппой. Для того чтобы достичь этого, мы заменим s на $t - s$ в интеграле в уравнении (3.117) и устремим верхний предел интеграла к бесконечности. Это возможно, если подинтегральная функция быстро убывает при $s \gg \tau_B$. Приближение Маркова, следовательно, выполняется, если масштаб времени τ_R , на котором система заметно изменяется, много больше по сравнению с τ_B , на котором убывает корреляционная функция резервуара. Таким образом, мы получаем, наконец, марковское основное квантовое уравнение

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^\infty ds \operatorname{tr}_B [H_I(t), [H_I(t - s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]. \quad (3.118)$$

Важно понять, что в описании динамики приведенной системы на основе марковского основного квантового уравнения динамическое поведение на временах больше порядка величины корреляционного времени τ_B не разрешимо. Как упоминалось выше, изменение во времени описывается грубой временной шкалой.

Приведенное выше приближение обычно называется *приближением Борна–Маркова*. В общем случае оно не гарантирует, однако, что результатирующее уравнение (3.118) определяет генератор динамической полугруппы (Davies, 1974; Dümcke, Spohn, 1979). Поэтому применяется следующее приближение больших времен (т. н. секулярное приближение), которое использует усреднение по быстро осциллирующим членам основного уравнения и называется приближение вращающейся волны. Чтобы объяснить

методику, запишем гамильтониан взаимодействия H_I в шредингеровском представлении в виде

$$H_I = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha}, \quad (3.119)$$

где $A_{\alpha}^{\dagger} = A_{\alpha}$ и $B_{\alpha}^{\dagger} = B_{\alpha}$. Это наиболее общий вид взаимодействия. Секулярное приближение легко применяется, если разложить гамильтониан взаимодействия H_I по собственным операторам гамильтониана системы H_S . Предполагая спектр H_S дискретным, это можно сделать следующим образом. Обозначим собственные значения H_S через ε и проекции на собственное пространство, относящиеся к собственному значению ε через $\Pi(\varepsilon)$. Тогда мы можем определить операторы

$$A_{\alpha}(\omega) \equiv \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = \omega} \Pi(\varepsilon) A_{\alpha} \Pi(\varepsilon'). \quad (3.120)$$

В этом выражении суммирование производится по всем собственным значениям энергии ε' и ε гамильтониана H_S с фиксированной разностью ω . Из этого определения немедленно следует, что выполняются следующие соотношения:

$$[H_S, A_{\alpha}(\omega)] = -\omega A_{\alpha}(\omega), \quad (3.121)$$

$$[H_S, A_{\alpha}^{\dagger}(\omega)] = +\omega A_{\alpha}^{\dagger}(\omega). \quad (3.122)$$

Операторы $A_{\alpha}(\omega)$ и $A_{\alpha}^{\dagger}(\omega)$ являются, таким образом, собственными операторами H_S , относящимися к частотам $\pm\omega$ соответственно. Из соотношений (3.121) и (3.122) следует, что соответствующие операторы в представлении взаимодействий принимают вид

$$e^{iH_S t} A_{\alpha}(\omega) e^{-iH_S t} = e^{-i\omega t} A_{\alpha}(\omega), \quad (3.123)$$

$$e^{iH_S t} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) e^{-iH_S t} = e^{+i\omega t} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega). \quad (3.124)$$

Наконец, заметим, что

$$[H_S, A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega)] = 0 \quad (3.125)$$

и

$$A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) = A_{\alpha}(-\omega). \quad (3.126)$$

Суммируя (3.120) по всем разностям энергий и применяя условие полноты, мы получаем

$$\sum_{\omega} A_{\alpha}(\omega) = \sum_{\omega} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) = A_{\alpha}. \quad (3.127)$$

Это позволяет нам преобразовать гамильтониан взаимодействия к следующему виду:

$$H_I = \sum_{\alpha, \omega} A_\alpha(\omega) \otimes B_\alpha = \sum_{\alpha, \omega} A_\alpha^\dagger(\omega) \otimes B_\alpha^\dagger. \quad (3.128)$$

Это искомое разложение взаимодействия по собственным операторам гамильтониана системы. Заметьте, что частотный спектр $\{\omega\}$ является, в общем случае, вырожденным: для фиксированного ω индекс α обозначает разные операторы $A_\alpha(\omega)$, относящиеся к одной и той же частоте. Конкретный пример встретится в разделе 3.4, где α будет обозначать декартовы компоненты оператора диполя.

Причина введения разложения (3.128) состоит в том, что гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействий может быть теперь записан в простом виде

$$H_I(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega) \otimes B_\alpha(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{+i\omega t} A_\alpha^\dagger(\omega) \otimes B_\alpha^\dagger(t), \quad (3.129)$$

где

$$B_\alpha(t) = e^{iH_B t} B_\alpha e^{-iH_B t} \quad (3.130)$$

— операторы окружения в представлении взаимодействий. Заметим также, что условие (3.114) принимает вид

$$\langle B_\alpha(t) \rangle \equiv \text{tr}\{B_\alpha(t)\rho_B\} = 0, \quad (3.131)$$

то есть средние $B_\alpha(t)$ по резервуару стремятся к нулю.

Подставляя теперь (3.129) в основное уравнение (3.118), мы получим после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) &= \\ &= \int_0^\infty ds \text{tr}_B \{ H_I(t-s) \rho_S(t) \rho_B H_I(t) - H_I(t) H_I(t-s) \rho_S(t) \rho_B \} + \text{k.c.} = \\ &= \sum_{\omega, \omega'} \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\omega' - \omega)t} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) (A_\beta(\omega) \rho_S(t) A_\alpha^\dagger(\omega') - A_\alpha^\dagger(\omega') A_\beta(\omega) \rho_S(t)) + \text{э.с.} \end{aligned} \quad (3.132)$$

Здесь э.с. обозначает эрмитово сопряженное выражение, мы также ввели односторонние преобразования Фурье

$$\Gamma_{\alpha\beta} \equiv \int_0^\infty ds e^{i\omega s} \langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle \quad (3.133)$$

корреляционных функций резервуара

$$\langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle \equiv \text{tr}_B \{ B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rho_B \}. \quad (3.134)$$

Предположим, что ρ_B является стационарным состоянием резервуара, то есть $[H_B, \rho_B] = 0$. Корреляционные функции резервуара являются тогда однородными по времени, что дает

$$\langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle = \langle B_\alpha^\dagger(s) B_\beta(0) \rangle, \quad (3.135)$$

показывая, что величины $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega)$ не зависят от времени. Отметим, что в некоторых интересных случаях корреляционные функции резервуара зависят от временного аргумента t . Это имеет место, например, если резервуар представляет собой сжатое вакуумное состояние (см. раздел 3.4.3).

Как упоминалось выше, основное условие, лежащее в основе приближения Маркова, состоит в том, что корреляционные функции резервуара (3.135) убывают достаточно быстро за время τ_B , которое мало по сравнению с временем релаксации τ_R . Типичные примеры поведения этих корреляционных функций будут обсуждаться в разделах 3.6.2.1 и 12.1.1.3. Важно отметить, что затухание корреляций строго возможно только для бесконечно большого окружения с бесконечным набором частот. В типичной ситуации резервуар представлен набором мод гармонических осцилляторов b_n и частотами ω_n , B_α определяются линейными комбинациями b_n . Если спектр частот $\{\omega_n\}$ мод резервуара дискретен, то легко видеть, что корреляционные функции типа (3.135) являются квазипериодическими функциями s . Быстрое затухание корреляций резервуара, таким образом, требует континуума частот: бесконечно малая частота будет задавать бесконечно большие времена возвращения Пуанкаре, что будет приводить к возникновению необратимой динамики.

Мы обозначили через τ_S типичный временной масштаб собственной эволюции системы S . Этот масштаб времени τ_S определяется типичным значением $|\omega' - \omega|^{-1}$, $\omega' \neq \omega$, то есть типичным значением обратной величины разностей частот. Если τ_S много больше по сравнению с временем релаксации τ_R открытой системы, несекулярными членами в (3.132), то есть членами, для которых $\omega' \neq \omega$, можно пренебречь, поскольку они совершают много осцилляций за время τ_R , за которое заметно изменяется ρ_S . Это условие обычно удовлетворяется для квантовых оптических систем и носит название приближение врачающейся волны. Таким образом, мы имеем

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) (A_\beta(\omega) \rho_S(t) A_\alpha^\dagger(\omega) - A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega) \rho_S(t)) + \text{э.с.} \quad (3.136)$$

Удобно разложить Фурье-образы корреляционных функций резервуара следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(\omega) + iS_{\alpha\beta}(\omega), \quad (3.137)$$

где для фиксированных ω коэффициенты

$$S_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2i} (\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) - \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega)) \quad (3.138)$$

образуют эрмитову матрицу, и матрица, определенная как

$$\gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) + \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega s} \langle B_\alpha^\dagger(s) B_\beta(0) \rangle, \quad (3.139)$$

— положительная (см. ниже). С помощью этих определений мы можем, наконец, записать основное уравнение в представлении взаимодействий

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -i[H_{LS}, \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t)). \quad (3.140)$$

Эрмитов оператор

$$H_{LS} = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} S_{\alpha\beta}(\omega) A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega) \quad (3.141)$$

описывает гамильтонов вклад в динамику. Этот член обычно называют гамильтонианом лэмбовского сдвига, поскольку он приводит к перенормировке лэмбовского типа для невозмущенных уровней энергии, вызванной взаимодействием системы и резервуара. Обратите внимание, что гамильтониан лэмбовского сдвига коммутирует с невозмущенным гамильтонианом системы

$$[H_S, H_{LS}] = 0, \quad (3.142)$$

с учетом уравнения (3.125). Диссипатор основного уравнения принимает вид

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left(A_\beta(\omega) \rho_S A_\alpha^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{ A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega), \rho_S \} \right). \quad (3.143)$$

Отметим, что основное уравнение (3.140) — первого стандартного вида (3.63). Оно может быть приведено к линдбладовскому виду (3.66) диагонализацией матриц $\gamma_{\alpha\beta}(\omega)$, определенных в уравнении (3.139). Чтобы

доказать, что эти матрицы положительны, воспользуемся теоремой Боннера, согласно которой Фурье-образ функции $f(s)$ является положительным, если $f(s)$ удовлетворяет следующему условию. Для произвольных t_1, t_2, \dots, t_n и всех $n (n \times n)$ -матрица $a_{kl} = f(t_k - t_l)$ должна быть положительной. Поскольку все однородные корреляционные функции $f(s) = \langle B^\dagger(s)B(0) \rangle$ являются положительными, отсюда немедленно следует положительность матриц $\gamma_{\alpha\beta}(\omega)$. В заключение, мы заметим, что основное уравнение в шредингеровском представлении получается из (3.140) простым добавлением гамильтониана H_S к H_{LS} , как легко проверить с помощью свойств (3.121), (3.122) и (3.125) собственных операторов.

Подведем итог различным приближениям, использованным в выкладках. Первое приближение является следствием допущения слабого взаимодействия, которое позволяет нам разложить точное уравнение движения для матриц плотности до второго порядка. Совместно с условием $\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_B$ это приводит к борновскому приближению в основном уравнении. Второе приближение — приближение Маркова, в котором основное квантовое уравнение становится локальным по времени через замену матрицы плотности $\rho_S(s)$ в запаздывающий момент времени s на текущую $\rho_S(t)$. Кроме того, предел интегрирования устремляется к бесконечности для получения приближения Борна–Маркова основного уравнения. Важное условие для приближения Борна–Маркова состоит в том, что корреляционное время резервуара τ_B много меньше времени релаксации системы, то есть $\tau_B \ll \tau_R$. В заключение, в приближении вращающейся волны пренебрегается быстро осцилирующими членами, пропорциональными $\exp[i(\omega' - \omega)t]$ для $\omega' \neq \omega$, что обеспечивает основному квантовому уравнению линдбладовский вид. Соответствующее условие состоит в том, что обратные разности частот, имеющих отношение к задаче, много меньше по сравнению с временами релаксации системы, то есть $\tau_S \sim |\omega' - \omega|^{-1} \ll \tau_R$.

3.3.2. Релаксация к равновесию

В предыдущем разделе мы допустили, что окружение находится в стационарном состоянии ρ_B , которое инвариантно по отношению к динамике резервуара. Теперь мы хотим рассмотреть ситуацию, в которой окружение является термостатом с обратной температурой β . В отсутствии внешних переменных полей гиббсовское состояние

$$\rho_{th} = \frac{\exp(-\beta H_S)}{\text{tr}_S \exp(-\beta H_S)} \quad (3.144)$$

должно быть стационарным решением основного квантового уравнения (3.140). Можно показать, что для произвольного начального состояния система возвращается в равновесие,

$$\rho_S(t) \rightarrow \rho_{th} \quad \text{для } t \rightarrow +\infty, \quad (3.145)$$

если квантовая динамическая полугруппа обладает свойством эргодичности. Это означает, что из соотношений

$$[X, A_\alpha^\dagger(\omega)] = [X, A_\alpha(\omega)] = 0 \quad \text{для всех } \alpha, \omega \quad (3.146)$$

следует, что X пропорционален единице.

Чтобы показать, что уравнение (3.144) действительно является стационарным решением основного уравнения (3.140), мы можем воспользоваться основным условием КМШ (Кубо – Мартина – Швингера (KMS Kubo – Martin – Schwinger)), согласно которому корреляционные функции термостата соотносятся через

$$\langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(0) \rangle = \langle B_\beta(0) B_\alpha^\dagger(t + i\beta) \rangle. \quad (3.147)$$

Условие KMS может быть легко проверено, если резервуар является термостатом с каноническим равновесным распределением

$$\rho_B = \frac{\exp(-\beta H_B)}{\text{tr}_B \exp(-\beta H_B)}. \quad (3.148)$$

Можно показать, что оно выполняется в термодинамическом пределе для систем в тепловом равновесии. Уравнение (3.147) приводит к следующим соотношениям между преобразованиями Фурье (3.139) корреляционных функций резервуара:

$$\gamma_{\alpha\beta}(-\omega) = \exp(-\beta\omega) \gamma_{\beta\alpha}(\omega). \quad (3.149)$$

Далее, пользуясь уравнениями (3.121) и (3.122), мы имеем

$$\rho_{th} A_\alpha(\omega) = e^{\beta\omega} A_\alpha(\omega) \rho_{th}, \quad (3.150)$$

$$\rho_{th} A_\alpha^\dagger(\omega) = e^{-\beta\omega} A_\alpha^\dagger(\omega) \rho_{th}. \quad (3.151)$$

Доказательство стационарности ρ_{th} теперь легко получается с помощью соотношений (3.142), (3.149), (3.150) и (3.151).

Отметим полезное в дальнейшем свойство основного квантового уравнения (3.140). Если спектр гамильтониана системы $H_S = \sum_n \varepsilon_n |n\rangle\langle n|$ является невырожденным, то он приводит к замкнутому уравнению движения для населенностей

$$P(n, t) = \langle n | \rho_S(t) | n \rangle \quad (3.152)$$

собственных состояний $|n\rangle$. Таким образом, уравнение для диагональных элементов матрицы плотности в собственном базисе H_S не зависит от недиагональных элементов. Как легко проверяется с использованием основного квантового уравнения, населенности подчиняются уравнению

$$\frac{d}{dt} P(n, t) = \sum_m [W(n|m)P(m, t) - W(m|n)P(n, t)]. \quad (3.153)$$

Это уравнение имеет вид классического дискретного основного уравнения (1.89) с не зависящими от времени интенсивностями перехода, определяемыми через соотношения

$$W(n|m) = \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha\beta} (\varepsilon_m - \varepsilon_n) \langle m | A_\alpha | n \rangle \langle n | A_\beta | m \rangle. \quad (3.154)$$

Уравнение (3.153) называется также основным уравнением Паули. Интенсивности (3.154) являются действительными и неотрицательными вследствие положительности матриц $\gamma_{\alpha\beta}(\omega)$. Они совпадают с полученными при помощи золотого правила Ферми.

Соотношение (3.149) дает

$$W(m|n) \exp(-\beta \varepsilon_n) = W(n|m) \exp(-\beta \varepsilon_m), \quad (3.155)$$

которое носит название условия детального баланса и которое приводит к заключению о том, что равновесные населенности $P_s(n)$ подчиняются распределению Больцмана

$$P_s(n) = \text{const} \times \exp(-\beta \varepsilon_n) \quad (3.156)$$

по собственным значениям энергии ε_n .

3.3.3. Предел сингулярной связи

В пределе слабого взаимодействия возмущение, вызванное взаимодействием между системой и окружением, считается малым. В результате степени свободы окружения являются быстрыми переменными и могут быть

эффективно исключены. При подходящем масштабировании временного параметра можно при определенных условиях получить линейное основное квантовое уравнение также и для случая сильного взаимодействия. В так называемом пределе сингулярной связи рассматривается гамильтониан вида

$$H = H_S + \varepsilon^{-2} H_B + \varepsilon^{-1} H_I, \quad (3.157)$$

где гамильтониан взаимодействия вновь записывается в виде

$$H_I = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha}, \quad (3.158)$$

где $A_{\alpha}^{\dagger} = A_{\alpha}$ и $B_{\alpha}^{\dagger} = B_{\alpha}$. Задача состоит в выводе уравнения движения для приведенной матрицы плотности в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Чтобы пояснить выбор гамильтониана в виде (3.157), заметим, что время затухания корреляционных функций резервуара вида (3.134) уменьшается в ε^2 раз за счет скейлинга $H_B \rightarrow \varepsilon^{-2} H_B$. Скейлинг $H_I \rightarrow \varepsilon^{-1} H_I$ гамильтониана взаимодействия обеспечивает конечность Фурье-образов корреляционных функций резервуара в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

Вывод основного квантового уравнения из микроскопической модели похож на случай слабого взаимодействия, и его подробности здесь приводиться не будут. Единственное важное отличие состоит в том, что нет необходимости применять приближение врачающейся волны. Результатом является следующее основное уравнение в шредингеровском представлении:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) = & -i[H_S + H_{LS}, \rho_S(t)] + \\ & + \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha \beta} \left(A_{\beta} \rho_S(t) A_{\alpha} - \frac{1}{2} \{A_{\alpha} A_{\beta}, \rho_S(t)\} \right), \end{aligned} \quad (3.159)$$

где гамильтониан лэмбовского сдвига

$$H_{LS} = \sum_{\alpha \beta} S_{\alpha \beta} A_{\alpha} A_{\beta}, \quad (3.160)$$

с $S_{\alpha \beta}$, определенными по аналогии с (3.138), и

$$\gamma_{\alpha \beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \langle B_{\alpha}(s) B_{\beta}(0) \rangle. \quad (3.161)$$

Матрица $\gamma_{\alpha\beta}$ по-прежнему является эрмитовой и положительной. Таким образом, генератор основного квантового уравнения (3.159) имеет первый стандартный вид (3.63) и может быть записан в линдбладовском виде после диагонализации матрицы $\gamma_{\alpha\beta}$. Основные уравнения общего вида (3.159) будут встречаться, например, при изучении нами квантового эффекта Зенона в разделе 3.5.2 и в пределе квантового броуновского движения без отдачи (см. раздел 3.6.4.5).

3.3.4. Предел низкой плотности

Рассмотрим газ частиц с низкой плотностью n . Частицы в газе взаимодействуют через столкновения, включающие возбуждение внутренних степеней свободы частиц газа. Столкновения частиц газа рассматриваются как статистически независимые процессы. Задача состоит в написании основного уравнения, которое эффективно описывает динамику внутренних степеней свободы. Для этого внутренние переменные принимаются за приведенную систему S , тогда как трансляционные степени свободы частиц газа являются окружением B .

Внутренние степени свободы частиц могут быть описаны свободным гамильтонианом вида

$$H_S = \sum_k \epsilon_k |k\rangle\langle k|. \quad (3.162)$$

Трансляционные степени свободы частиц газа описываются гамильтонианом

$$H_B = \int d^3 p E(\vec{p}) |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|, \quad (3.163)$$

где $|\vec{p}\rangle$ — собственное состояние импульса, а $E(\vec{p}) = \vec{p}^2/2m$ — энергия свободной частицы. Одночастичные состояния окружения даются матрицей плотности

$$\rho_B = \frac{1}{V} \int d^3 p G(\vec{p}) |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|, \quad (3.164)$$

где $G(\vec{p})$ представляет собой распределение по импульсам частиц газа. Матрица плотности ρ_B нормирована в некотором объеме V согласно

$$\text{tr } \rho_B = \int d^3 p \langle \vec{p} | \rho_B | \vec{p} \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} G(\vec{p}) = 1. \quad (3.165)$$

Взаимодействие внутренних степеней свободы с трансляционными дается реакциями рассеяния, при которых исходный импульс \vec{p} меняется на \vec{q} ,

а внутренний уровень меняется с $|l\rangle$ на $|k\rangle$. Амплитуда рассеяния для этого процесса может быть записана в виде

$$\langle k, \vec{q}|S|l, \vec{p}\rangle = \delta(\vec{q}-\vec{p})\delta_{kl} - 2\pi i\delta(\epsilon_k + E(\vec{q}) - \epsilon_l - E(\vec{p}))T(k, \vec{q}|l, \vec{p}), \quad (3.166)$$

где S -матрица и T -матрица известны из теории рассеяния. В пределе низкой плотности можно показать, что приведенная динамика квантовой системы, формируемая внутренними степенями свободы, приводит к основному квантовому уравнению в шредингеровском представлении

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_S + H_{LS}, \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t)). \quad (3.167)$$

Гамильтониан H_{LS} задает перенормировку гамильтониана системы,

$$H_{LS} = \frac{n}{2} \sum_{\epsilon_k=\epsilon_l} \int d^3p G(\vec{p}) \{ T(k, \vec{p}|l, \vec{p}) + T^*(l, \vec{p}|k, \vec{p}) \} |k\rangle\langle l|, \quad (3.168)$$

и диссипатор дается уравнением

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\rho_S) = & 2\pi n \sum_{\omega} \int d^3p \int d^3q G(\vec{p}) \delta(E(\vec{q}) - E(\vec{p}) + \omega) \times \\ & \times \left\{ T_{\omega}(\vec{q}, \vec{p})\rho_S T_{\omega}^{\dagger}(\vec{q}, \vec{p}) - \frac{1}{2}\rho_S T_{\omega}^{\dagger}(\vec{q}, \vec{p})T_{\omega}(\vec{q}, \vec{p}) - \frac{1}{2}T_{\omega}^{\dagger}(\vec{q}, \vec{p})T_{\omega}(\vec{q}, \vec{p})\rho_S \right\}, \end{aligned} \quad (3.169)$$

где $T_{\omega}(\vec{q}, \vec{p})$ определяется как

$$T_{\omega}(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{\epsilon_k - \epsilon_l = \omega} T(k, \vec{q}|l, \vec{p}) |k\rangle\langle l|. \quad (3.170)$$

Таким образом, оператор линдбладовского вида $T_{\omega}(\vec{q}, \vec{p})$ задается когерентной суперпозицией амплитуд рассеяния для всех процессов, которые дают вклад в данную энергию возбуждения ω внутренних степеней свободы,

$$\omega = \epsilon_k - \epsilon_l = E(\vec{p}) - E(\vec{q}). \quad (3.171)$$

Это предел низкой плотности для основного квантового уравнения, который, как может быть показано, выполняется в термодинамическом пределе. Строгое доказательство можно найти в (Dümcke, 1985). Уравнение (3.167) является, очевидно, уравнением линдбладовского вида, где имеется, однако, непрерывное семейство линдбладовских операторов. Для

получения основного уравнения выполняется процедура усреднения по временам, много большим среднего времени столкновения τ_C , что аналогично приближению вращающейся волны. Пусть d будет линейным размером объема взаимодействия, v — средней скоростью частицы, а l — средней длиной свободного пробега. Тогда основное уравнение для низкой плотности справедливо до тех пор, пока

$$\tau_C \sim v^{-1}d \ll v^{-1}l \sim v^{-1}n^{-1/3}, \quad (3.172)$$

что означает, что среднее время столкновений τ_C должно быть много меньше по сравнению со временем между столкновениями. Следовательно, мы получаем условие низкой плотности $n \ll d^{-3}$.

3.4. Квантовое оптическое основное уравнение

Взаимодействие вещества с электромагнитным излучением в квантовом оптическом пределе представляет собой типичную область применения квантовых динамических полугрупп и марковских основных квантовых уравнений (Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc, Grynberg, 1998; Gardiner, Zoller, 2000; Walls, Milburn, 1994). Причина этого заключается в том, что в типичной квантовой оптической ситуации хорошо выполняются физические условия, лежащие в основе марковского приближения. Ряд примеров будет обсуждаться в этом разделе.

3.4.1. Вещество в квантованных полях излучения

Мы рассмотрим связанную квантовую систему, например атом или молекулу, которая взаимодействует с квантованным полем излучения. Поле излучения представляет собой резервуар с бесконечным числом степеней свободы, а связанная система является приведенной системой. Невзаимодействующий атом или молекула описываются некоторым гамильтонианом H_S , тогда как свободное квантованное поле излучения выражается гамильтонианом (за вычетом бесконечного с-числа для энергии вакуума)

$$H_B = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1,2} \hbar \omega_k b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) b_{\lambda}(\vec{k}). \quad (3.173)$$

В этом разделе мы снова явно введем все физические константы, такие как постоянную Планка \hbar и скорость света c . Для простоты, мы разложим поле излучения по модам Фурье в ящике объема V , налагая периодические граничные условия. Эти моды обозначены волновым вектором \vec{k} и двумя

соответствующими единичными векторами поперечной поляризации $\vec{e}_\lambda(\vec{k})$, так что

$$\vec{k} \cdot \vec{e}_\lambda(\vec{k}) = 0, \quad (3.174)$$

$$\vec{e}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{e}_{\lambda'}(\vec{k}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (3.175)$$

$$\sum_{\lambda=1,2} e_\lambda^i(\vec{k}) e_\lambda^j(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.176)$$

Законом дисперсии является соотношение $\omega_k = ck = c|\vec{k}|$. Полевые операторы $b_\lambda(\vec{k})$ и $b_\lambda^\dagger(\vec{k})$ описывают уничтожение и рождение фотонов с волновым вектором \vec{k} и поляризацией $\vec{e}_\lambda(\vec{k})$. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[b_\lambda(\vec{k}), b_{\lambda'}(\vec{k}') \right] = \left[b_\lambda^\dagger(\vec{k}), b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right] = 0, \quad (3.177)$$

$$\left[b_\lambda(\vec{k}), b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.178)$$

Наконец, мы допускаем, что гамильтониан взаимодействия в дипольном приближении записывается в виде

$$H_I = -\vec{D} \cdot \vec{E}, \quad (3.179)$$

где \vec{D} — дипольный оператор рассматриваемой системы, а \vec{E} — оператор электрического поля в шредингеровском представлении,

$$\vec{E} = i \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \left(b_\lambda(\vec{k}) - b_\lambda^\dagger(\vec{k}) \right). \quad (3.180)$$

В этих определениях полный гамильтониан взаимодействующей степеней свободы вещества и степеней свободы излучения записывается как

$$H = H_S + H_B + H_I. \quad (3.181)$$

3.4.1.1. Приближение Борна–Маркова. Мы поступим так же, как в разделе 3.3.1, и разложим дипольный оператор \vec{D} по собственным операторам гамильтониана H_S . Последние принимают вид (см. уравнение (3.120))

$$\vec{A}(\omega) \equiv \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = \hbar\omega} \Pi(\varepsilon) \vec{D} \Pi(\varepsilon'). \quad (3.182)$$

Обратите внимание, что индекс α , использованный в разделе 3.3.1, обозначает здесь декартовы компоненты D_i , $i = 1, 2, 3$, дипольного оператора. В соответствии с уравнениями (3.121), (3.122) и (3.126), мы имеем

$$[H_S, \vec{A}(\omega)] = -\hbar\omega \vec{A}(\omega), \quad [H_S, \vec{A}^\dagger(\omega)] = +\hbar\omega \vec{A}^\dagger(\omega) \quad (3.183)$$

и

$$\vec{A}^\dagger(\omega) = \vec{A}(-\omega). \quad (3.184)$$

Разложение дипольного оператора $\vec{D}(t)$ в представлении взаимодействия по собственным операторам, следовательно, имеет вид

$$\vec{D}(t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \vec{A}(\omega) = \sum_{\omega} e^{+i\omega t} \vec{A}^\dagger(\omega), \quad (3.185)$$

и гамильтониан взаимодействия может теперь быть записан в представлении взаимодействия в виде, аналогичном уравнению (3.129):

$$H_I(t) = - \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \vec{A}(\omega) \cdot \vec{E}(t), \quad (3.186)$$

где $\vec{E}(t)$ обозначает оператор электрического поля в представлении взаимодействия.

Допуская, как в уравнении (3.131), что

$$\langle \vec{E}(t) \rangle \equiv \text{tr} \left\{ \vec{E}(t) \rho_B \right\} = 0, \quad (3.187)$$

мы можем немедленно записать уравнение движения, аналогичное уравнению (3.132),

$$\frac{d}{dt} \rho_S = \sum_{\omega, \omega'} \sum_{i,j} e^{i(\omega' - \omega)t} \Gamma_{ij}(\omega) \left(A_j(\omega) \rho_S A_i^\dagger(\omega') - A_i^\dagger(\omega') A_j(\omega) \rho_S \right) + \text{э.с.} \quad (3.188)$$

Корреляционные функции оператора электрического поля определяются через

$$\langle E_i(t) E_j(t-s) \rangle \equiv \text{tr}_B \{ E_i(t) E_j(t-s) \rho_B \}, \quad (3.189)$$

а их односторонние преобразования Фурье имеют вид

$$\Gamma_{ij}(\omega) \equiv \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty ds e^{i\omega s} \langle E_i(t) E_j(t-s) \rangle. \quad (3.190)$$

Мы будем называть матрицу $\Gamma_{ij}(\omega)$ спектральным корреляционным тензором. В общем случае она зависит от t . Фактически, без дальнейших допущений о состоянии ρ_B резервуара, мы находим

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}(\omega) = & \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sum_{\lambda, \lambda'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{k'}}{V}} e_\lambda^i(\vec{k}) e_{\lambda'}^j(\vec{k}') \times \\ & \times \int_0^\infty ds \left[\langle b_\lambda(\vec{k}) b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \rangle \exp[+i(\omega_{k'} - \omega_k)t - i(\omega_{k'} - \omega)s] + \right. \\ & + \langle b_\lambda^\dagger(\vec{k}) b_{\lambda'}(\vec{k}') \rangle \exp[-i(\omega_{k'} - \omega_k)t + i(\omega_{k'} + \omega)s] - \\ & - \langle b_\lambda(\vec{k}) b_{\lambda'}(\vec{k}') \rangle \exp[-i(\omega_{k'} + \omega_k)t + i(\omega_{k'} + \omega)s] - \\ & \left. - \langle b_\lambda^\dagger(\vec{k}) b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \rangle \exp[+i(\omega_{k'} + \omega_k)t - i(\omega_{k'} - \omega)s] \right]. \quad (3.191)\end{aligned}$$

3.4.1.2. Тепловой резервуар. В качестве первого примера возьмем находящийся в равновесии резервуар мод излучения при температуре T ,

$$\rho_B = \frac{1}{Z_B} \exp[-\beta H_B] = \prod_{\vec{k}, \lambda} (1 - \exp[-\beta \hbar \omega_k]) \exp \left[-\beta \hbar \omega_k b_\lambda^\dagger(\vec{k}) b_\lambda(\vec{k}) \right]. \quad (3.192)$$

Как это делалось выше, средние значения в этом равновесном состоянии обозначаются угловыми скобками. Заметьте, что $\langle \vec{E}(t) \rangle = 0$, так как полевой оператор линеен по операторам рождения и уничтожения. Поскольку состояние теплового равновесия является стационарным по отношению к динамике резервуара, корреляционные функции резервуара однородны по времени, и мы имеем

$$\langle E_i(t) E_j(t-s) \rangle = \langle E_i(s) E_j(0) \rangle. \quad (3.193)$$

Отсюда следует, что спектральный корреляционный тензор $\Gamma_{ij}(\omega)$ не зависит от времени t . Следовательно, если мы применим приближение врачающейся волны в уравнении (3.188), останутся только диагональные члены $\omega = \omega'$ двойной суммы по частотам системы, и мы приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} \rho_S = \sum_{\omega} \sum_{i,j} \Gamma_{ij}(\omega) \left\{ A_j(\omega) \rho_S A_i^\dagger(\omega) - A_i^\dagger(\omega) A_j(\omega) \rho_S \right\} + \text{э.с.} \quad (3.194)$$

Осталось определить спектральный корреляционный тензор. Для этого мы воспользуемся соотношениями

$$\langle b_\lambda(\vec{k})b_{\lambda'}(\vec{k}') \rangle = \langle b_\lambda^\dagger(\vec{k})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \rangle = 0, \quad (3.195)$$

$$\langle b_\lambda(\vec{k})b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}(1 + N(\omega_k)), \quad (3.196)$$

$$\langle b_\lambda^\dagger(\vec{k})b_{\lambda'}(\vec{k}') \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}N(\omega_k), \quad (3.197)$$

где

$$N(\omega_k) = \frac{1}{\exp[\beta\hbar\omega_k] - 1} \quad (3.198)$$

обозначает распределение Планка, то есть среднее число фотонов в моде с частотой ω_k . Дальше мы перейдем к непрерывному пределу,

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^2 \int d\Omega. \quad (3.199)$$

Интегрирование по телесному углу $d\Omega$ волнового вектора \vec{k} выполняется при помощи

$$\int d\Omega \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \frac{8\pi}{3} \delta_{ij}. \quad (3.200)$$

Уравнение (3.191) тогда дает

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\omega) = & \frac{2}{3\pi\hbar c^3} \delta_{ij} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^3 \left[(1 + N(\omega_k)) \int_0^\infty ds \exp[-i(\omega_k - \omega)s] + \right. \\ & \left. + N(\omega_k) \int_0^\infty ds \exp[+i(\omega_k + \omega)s] \right]. \end{aligned} \quad (3.201)$$

Используя формулу

$$\int_0^\infty ds e^{-i\varepsilon s} = \pi\delta(\varepsilon) - iP\frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.202)$$

где P обозначает основное значение Коши, мы в итоге получаем

$$\Gamma_{ij}(\omega) = \delta_{ij} \left(\frac{1}{2} \gamma(\omega) + iS(\omega) \right), \quad (3.203)$$

где мы ввели величины

$$\gamma(\omega) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}(1 + N(\omega)) \quad (3.204)$$

и

$$S(\omega) = \frac{2}{3\pi\hbar c^3} \text{P} \int_0^{+\infty} d\omega_k \omega_k^3 \left[\frac{1 + N(\omega_k)}{\omega - \omega_k} + \frac{N(\omega_k)}{\omega + \omega_k} \right]. \quad (3.205)$$

Заметим, что распределение Планка удовлетворяет условию $N(-\omega) = -(1 + N(\omega))$, так что $\gamma(\omega) = 4\omega^3(1 + N(\omega))/3\hbar c^3$ для $\omega > 0$ и $\gamma(\omega) = 4|\omega|^3N(|\omega|)/3\hbar c^3$ для $\omega < 0$.

Суммируя наши результаты, мы получаем марковское основное квантовое уравнение для степеней свободы вещества, часто называемое *оптическим основным квантовым уравнением*, которое может быть записано в линдбладовском виде,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_{LS}, \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t)). \quad (3.206)$$

Гамильтониан

$$H_{LS} = \sum_{\omega} \hbar S(\omega) \vec{A}^\dagger(\omega) \cdot \vec{A}(\omega) \quad (3.207)$$

приводит к перенормировке гамильтониана системы H_S , которая вызвана вакуумными флуктуациями поля излучения (сдвиг Лэмба) и тепловыми процессами (сдвиг Штарка). Более детальное рассмотрение сдвига Лэмба дано в разделе 12.2.3.2. Диссипатор основного квантового уравнения принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\rho_S) = & \sum_{\omega>0} \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}(1 + N(\omega)) \left(\vec{A}(\omega)\rho_S\vec{A}^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ \vec{A}^\dagger(\omega)\vec{A}(\omega), \rho_S \right\} \right) + \\ & + \sum_{\omega>0} \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}N(\omega) \left(\vec{A}^\dagger(\omega)\rho_S\vec{A}(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ \vec{A}(\omega)\vec{A}^\dagger(\omega), \rho_S \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.208)$$

Чтобы получить это выражение, мы преобразовали сумму по отрицательным частотам в сумму по положительным частотам и воспользовались соотношением (3.184). Видно, что диссипатор основного квантового уравнения описывает спонтанные и тепловые процессы. Пользуясь уравнением (3.121), мы видим, что операторы Линдблада $A_i(\omega)$ понижают энергию атома на величину $\hbar\omega$. Если ψ является собственным состоянием H_S

с энергией ε , тогда $A_i(\omega)\psi$ также будет собственным состоянием H_S , относящимся к собственному значению $\varepsilon - \hbar\omega$. Соответственно, операторы $A_i^\dagger(\omega)$ повышают энергию атома на $\hbar\omega$. Таким образом, операторы Линдблада $A_i(\omega)$ описывают спонтанные и тепловые процессы испускания, которые происходят с интенсивностью $4\omega^3(1+N(\omega))/3\hbar c^3$, тогда как $A_i^\dagger(\omega)$ описывают термически индуцированные процессы поглощения, происходящие с интенсивностью $4\omega^3N(\omega)/3\hbar c^3$.

В заключение прокомментируем применимость оптического основного квантового уравнения. Время релаксации τ_R дается обратной величиной типичной интенсивности релаксации γ_0 . Последняя определяется типичным значением интенсивности электрических дипольных переходов $4\omega^3|\vec{d}|^2/3\hbar c^3$, где \vec{d} является соответствующим матричным элементом дипольного оператора. С другой стороны, вакуумное корреляционное время τ_B резервуара излучательных степеней свободы дается обратной типичной частотой переходов ω_0 . Это будет явно видно в нашем обсуждении систематического разложения по малому параметру теории возмущений вблизи марковского предела в главе 10. Это также может быть получено из хорошо известного вывода золотого правила в квантовой механике. Условие $\tau_B \ll \tau_R$ для приближения Борна–Маркова дает, следовательно, $\gamma_0 \ll \omega_0$, которое, очевидно, является условием слабого взаимодействия. Это условие обычно хорошо выполняется в квантовом оптическом режиме. Например, типичные обратные излучательные времена жизни по порядку от 10^7 с^{-1} до 10^9 с^{-1} или даже меньше, тогда как оптические частоты порядка 10^{15} с^{-1} . Более того, должно быть отмечено, что нам необходимо условие $\tau_S \ll \tau_R$, если основное уравнение включает ряд различных частот переходов (см. раздел 3.3.1). Это условие позволяет применить приближение врачающейся волны и гарантирует, что переходы с разными частотами могут описываться как отдельные каналы затухания, вовлекающие различные операторы Линдблада.

3.4.2. Затухание двухуровневой системы

Простейшей квантовой системой является двухуровневая система, чье гильбертово пространство разделено только на два состояния — возбужденное $|e\rangle$ и основное $|g\rangle$. Гильбертово пространство такой системы эквивалентно системе со спином $\frac{1}{2}$. Фактически, операторы Паули

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|, & \sigma_2 &= -i|e\rangle\langle g| + i|g\rangle\langle e|, \\ \sigma_3 &= |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\end{aligned}\tag{3.209}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (3.210)$$

так же как и антисимметрическим соотношениям

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (3.211)$$

Удобно определить также операторы

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g| = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \quad \sigma_- = |g\rangle\langle e| = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2). \quad (3.212)$$

Соответствующее матричное представление этих операторов в базисе $|e\rangle$, $|g\rangle$ принимает вид

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.213)$$

и

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.214)$$

Выберем свободный гамильтониан H_S системы так, чтобы он был диагонален в базисе $|e\rangle$, $|g\rangle$. При подходящем выборе энергии основного состояния мы получим

$$H_S = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_3, \quad (3.215)$$

где $\omega_0 > 0$ является частотой перехода и $\hbar = 1$. Далее мы будем работать в представлении взаимодействия.

Физически, такая двухуровневая система возникает всякий раз, когда динамика изучаемой системы эффективно ограничивается до двумерного подпространства, то есть при условии, что переходами на остальные уровни можно пренебречь. Более конкретно, мы рассматриваем здесь модель, описывающую динамику двухуровневого атома с частотой перехода ω_0 в оптическом диапазоне. Заметим, что операторы Паули σ_\pm представляют собой собственные операторы атомного гамильтониана,

$$[H_S, \sigma_-] = -\omega_0\sigma_-, \quad [H_S, \sigma_+] = +\omega_0\sigma_+, \quad (3.216)$$

и, следовательно, σ_\pm изменяют энергию атома на величину $\pm\omega_0$, соответствующую процессам поглощения и испускания. Таким образом, мы имеем два оператора Линдблада

$$\vec{A}(\omega_0) \equiv \vec{A} = \vec{d}\sigma_-, \quad \vec{A}(-\omega_0) \equiv \vec{A}^\dagger = \vec{d}^*\sigma_+, \quad (3.217)$$

где $\vec{d} = \langle g | \vec{D} | e \rangle$ является матричным элементом дипольного оператора (здесь считается, что диагональные элементы дипольного оператора равны нулю). В пределах двухуровневого приближения атомный дипольный оператор в представлении взаимодействия может, таким образом, быть записан как

$$\vec{D}(t) = \vec{d}\sigma_- e^{-i\omega_0 t} + \vec{d}^*\sigma_+ e^{+i\omega_0 t}. \quad (3.218)$$

Пренебрегая вкладами сдвигов Лэмба и Штарка, мы можем теперь записать оптическое основное квантовое уравнение (3.206) в виде (для простоты записывая ρ вместо ρ_S)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & \gamma_0(N+1) \left(\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_+ \sigma_- \right) + \\ & + \gamma_0 N \left(\sigma_+ \rho(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_- \sigma_+ \right), \end{aligned} \quad (3.219)$$

с интенсивностью спонтанных переходов

$$\gamma_0 = \frac{4\omega_0^3 |\vec{d}|^2}{3\hbar c^3}. \quad (3.220)$$

Диссипатор основного уравнения описывает процессы спонтанного излучения (с интенсивностью γ_0), а также термически индуцированные процессы излучения и поглощения (с интенсивностью $\gamma_0 N$). Итоговая интенсивность переходов будет обозначаться как

$$\gamma = \gamma_0(2N+1), \quad (3.221)$$

где $N = N(\omega_0)$ обозначает распределение Планка на частоте переходов.

Чтобы решить уравнение (3.219), удобно представить матрицу плотности как

$$\rho(t) = \frac{1}{2}(I + \langle \vec{\sigma}(t) \rangle \cdot \vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_3(t) \rangle) & \langle \sigma_-(t) \rangle \\ \langle \sigma_+(t) \rangle & \frac{1}{2}(1 - \langle \sigma_3(t) \rangle) \end{pmatrix}, \quad (3.222)$$

где вектор

$$\vec{v}(t) \equiv \langle \vec{\sigma}(t) \rangle = \text{tr}\{\vec{\sigma}\rho(t)\} \quad (3.223)$$

называется блоховским. Он представляет собой действительный 3-вектор, удовлетворяющий $|\vec{v}(t)| \leq 1$. Это условие эквивалентно требованию того, что $\rho(t)$ должна быть положительной. Для $|\vec{v}(t)| < 1$ соответствующая матрица плотности описывает настоящую статистическую смесь, тогда

как блоховский вектор, удовлетворяющий условию $|\vec{v}(t)| = 1$, представляет чистое состояние. Таким образом, мы видим, что множество матриц плотности двухуровневой системы изоморфно единичному шару, поверхность которого задает множество чистых состояний и называется сферой Блоха.

Матричные элементы $\rho_{11}(t) = p_e(t)$ и $\rho_{22}(t) = p_g(t)$ являются заселеностями уровней возбужденного и основного состояний соответственно. Недиагональные элементы $\rho_{12}(t) = \rho_{21}^*(t)$, называемые когерентностями, задаются средними значениями от атомных повышающего и понижающего операторов σ_{\pm} . С помощью алгебры матриц Паули легко получить дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_1(t)\rangle = -\frac{\gamma}{2}\langle\sigma_1(t)\rangle, \quad (3.224)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_2(t)\rangle = -\frac{\gamma}{2}\langle\sigma_2(t)\rangle, \quad (3.225)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_3(t)\rangle = -\gamma\langle\sigma_3(t)\rangle - \gamma_0. \quad (3.226)$$

Мы видим, что третья компонента блоховского вектора экспоненциально затухает со скоростью γ , в то время как когерентности $\langle\sigma_{\pm}(t)\rangle$ со скоростью $\gamma/2$. Стационарное решение имеет вид

$$\langle\sigma_1\rangle_s = \langle\sigma_2\rangle_s = 0, \quad \langle\sigma_3\rangle_s = -\frac{\gamma_0}{\gamma} = -\frac{1}{2N+1}, \quad (3.227)$$

и стационарная заселенность верхнего уровня

$$p_e^s = \frac{1}{2}(1 + \langle\sigma_3\rangle_s) = \frac{N}{2N+1}. \quad (3.228)$$

Конечно, стационарное решение основного уравнения есть состояние теплового равновесия $\rho_s = \rho_{th}$ (3.144).

Если мы выберем, например, исходным состоянием $\rho(0) = |g\rangle\langle g|$, то соответствующее зависящее от времени решение

$$\langle\sigma_3(t)\rangle = -e^{-\gamma t}(1 + \langle\sigma_3\rangle_s) + \langle\sigma_3\rangle_s, \quad (3.229)$$

$$p_e(t) = p_e^s(1 - e^{-\gamma t}) \quad (3.230)$$

явно показывает экспоненциальное приближение к значениям в тепловом равновесии.

3.4.3. Затухание в сжатом вакуумном состоянии

В предыдущем параграфе мы рассмотрели резервуар, который является стационарным относительно динамики термостата. Для того чтобы дать пример нестационарного состояния среды, мы рассмотрим здесь двумерную систему, взаимодействующую с резервуаром в состоянии вида $\rho_B = |\phi\rangle\langle\phi|$, где $|\phi\rangle$ представляет сжатый вакуум

$$|\phi\rangle = \prod_{\vec{k}, \lambda} S_{\vec{k}, \lambda}(\xi_k) |0\rangle. \quad (3.231)$$

Здесь мы ввели унитарный оператор сжатия (Walls and Milburn, 1994)

$$S_{\vec{k}, \lambda}(\xi) = \exp \left[\frac{1}{2} \xi_k^* b_\lambda(\vec{k})^2 - \frac{1}{2} \xi_k b_\lambda^\dagger(\vec{k})^2 \right], \quad (3.232)$$

где $\xi_k = r_k e^{i\theta_k}$. При помощи свойств этого преобразования,

$$S_{\vec{k}, \lambda}^\dagger(\xi_k) b_\lambda(\vec{k}) S_{\vec{k}, \lambda}(\xi_k) = b_\lambda(\vec{k}) \operatorname{ch} r_k - b_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{i\theta_k} \operatorname{sh} r_k, \quad (3.233)$$

$$S_{\vec{k}, \lambda}^\dagger(\xi_k) b_\lambda^\dagger(\vec{k}) S_{\vec{k}, \lambda}(\xi_k) = b_\lambda^\dagger(\vec{k}) \operatorname{ch} r_k - b_\lambda(\vec{k}) e^{-i\theta_k} \operatorname{sh} r_k, \quad (3.234)$$

мы получаем средние значения (ср. (3.195)–(3.197))

$$\langle b_\lambda(\vec{k}) b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} (1 + N_k), \quad (3.235)$$

$$\langle b_\lambda^\dagger(\vec{k}) b_{\lambda'}(\vec{k}') \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} N_k, \quad (3.236)$$

$$\langle b_\lambda(\vec{k}) b_{\lambda'}(\vec{k}') \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} M_k, \quad (3.237)$$

$$\langle b_\lambda^\dagger(\vec{k}) b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} M_k^*, \quad (3.238)$$

где мы ввели величины

$$N_k \equiv \operatorname{sh}^2 r_k, \quad M_k \equiv -\operatorname{ch} r_k \operatorname{sh} r_k e^{i\theta_k}. \quad (3.239)$$

Заметим, что эти соотношения совместимы с коммутационными соотношениями (3.177), (3.178) полевых операторов и что

$$|M_k|^2 = N_k(N_k + 1). \quad (3.240)$$

Для теплового резервуара мы имеем $\langle \vec{E}(t) \rangle = \langle \phi | \vec{E}(t) | \phi \rangle = 0$. Однако корреляционные функции (3.189) оператора электрического поля больше

неоднородны во времени, так как ρ_B не является инвариантным состоянием. Как следствие, спектральный корреляционный тензор теперь явно зависит от времени t . С помощью уравнения (3.191) спектральный корреляционный тензор для сжатого вакуума может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\omega) &= \frac{2\delta_{ij}}{3\pi\hbar c^3} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^3 \left[(1 + N_k) \int_0^\infty ds e^{-i(\omega_k - \omega)s} + N_k \int_0^\infty ds e^{+i(\omega_k + \omega)s} - \right. \\ &\quad \left. - M_k e^{-2i\omega_k t} \int_0^\infty ds e^{+i(\omega_k + \omega)s} - M_k^* e^{+2i\omega_k t} \int_0^\infty ds e^{-i(\omega_k - \omega)s} \right] \equiv \\ &\equiv \Gamma_{ij}^{(1)}(\omega) + \Gamma_{ij}^{(2)}(\omega). \end{aligned} \quad (3.241)$$

Считается, что сжатие — однородное по всему телесному углу 4π . Мы видим, что спектральный корреляционный тензор состоит из двух частей: первый вклад $\Gamma_{ij}^{(1)}(\omega)$ не зависит от t и формально идентичен тепловому корреляционному тензору (3.201), тогда как второй вклад $\Gamma_{ij}^{(2)}(\omega)$ включает в себя быстро осциллирующие экспоненты $\exp(\pm 2i\omega_k t)$.

Соответственно, диссипатор главного уравнения состоит из двух частей,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{D}^{(1)}(\rho(t)) + \mathcal{D}^{(2)}(\rho(t)). \quad (3.242)$$

Вклад $\mathcal{D}^{(1)}$ определяется через $\Gamma_{ij}^{(1)}(\omega)$. Следовательно, он формально имеет ту же структуру, что и тепловой диссипатор, который выражается правой частью уравнения (3.219), где N — значение N_k на резонансной частоте $\omega_0 = ck_0$. N записывается в терминах резонансного параметра сжатия r в виде

$$N = \operatorname{sh}^2 r, \quad N + 1 = \operatorname{ch}^2 r. \quad (3.243)$$

Если пренебречь вкладом сдвигов Лэмба и Штарка, мы находим зависящую от времени часть спектрального корреляционного тензора

$$\Gamma_{ij}^{(2)}(\omega) = -\frac{2\omega^3}{3\hbar c^3} \delta_{ij} M^* e^{2i\omega t}, \quad \text{для } \omega > 0, \quad (3.244)$$

и

$$\Gamma_{ij}^{(2)}(\omega) = -\frac{2|\omega|^3}{3\hbar c^3} \delta_{ij} M e^{2i\omega t}, \quad \text{для } \omega < 0, \quad (3.245)$$

где M — снова значение M_k на резонансной частоте, то есть

$$M = -\operatorname{ch} r \operatorname{sh} r e^{i\theta}, \quad (3.246)$$

с резонансным параметром сжатия r и резонансной фазой θ . Чтобы найти вклад $\mathcal{D}^{(2)}$ диссипатора основного уравнения, мы подставляем $\Gamma_{ij}^{(2)}(\omega)$ в правую часть уравнения (3.188) и применяем приближение врачающейся волны. Поскольку $\Gamma_{ij}^{(2)}(\omega)$ осциллирует в соответствии со множителем $\exp(2i\omega t)$, в приближении врачающейся волны остаются только два резонансных члена из суммы по двойным частотам, а именно члены, которые соответствуют случаю $\omega = -\omega_0$, $\omega' = +\omega_0$ и случаю $\omega = +\omega_0$, $\omega' = -\omega_0$. Первый случай, как видно, приводит ко вкладу

$$\vec{A}(\omega)\rho\vec{A}^\dagger(\omega') \equiv \vec{A}^\dagger\rho\vec{A}^\dagger = \vec{d}^{*2}\sigma_+\rho\sigma_+, \quad (3.247)$$

тогда как во втором случае

$$\vec{A}(\omega)\rho\vec{A}^\dagger(\omega') \equiv \vec{A}\rho\vec{A} = \vec{d}^2\sigma_-\rho\sigma_-. \quad (3.248)$$

Включая фазу дипольного матричного элемента в фазу сжатия θ , мы, таким образом, получаем

$$\mathcal{D}^{(2)}(\rho) = -\frac{\gamma_0}{2}[M\sigma_+\rho\sigma_+ + M^*\sigma_-\rho\sigma_-] + \text{э.с.} \quad (3.249)$$

Добавляя первую часть $\mathcal{D}^{(1)}(\rho)$ диссипатора, мы получаем в результате уравнение для матрицы плотности

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) &= \gamma_0(N+1) \left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_+\sigma_- \right) + \\ &+ \gamma_0 N \left(\sigma_+\rho(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_-\sigma_+ \right) - \\ &- \gamma_0 M\sigma_+\rho(t)\sigma_+ - \gamma_0 M^*\sigma_-\rho(t)\sigma_-. \end{aligned} \quad (3.250)$$

Это и есть основное уравнение, описывающее затухание двухуровневой системы в сжатом вакууме. Важно понимать, что оно может быть записано в линдбладовском виде. Действительно, вводя оператор Линдблада

$$C \equiv \sigma_- \operatorname{ch} r + \sigma_+ \operatorname{sh} r e^{i\theta}, \quad (3.251)$$

мы находим

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \gamma_0 \left(C \rho(t) C^\dagger - \frac{1}{2} C^\dagger C \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) C^\dagger C \right). \quad (3.252)$$

Применяя алгебру матриц Паули, мы получаем уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_+(t) \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \sigma_-(t) \rangle^* = \\ &= -\frac{\gamma_0}{2} (\operatorname{ch}^2 r + \operatorname{sh}^2 r) \langle \sigma_+(t) \rangle + \gamma_0 \operatorname{sh} r \operatorname{ch} r e^{-i\theta} \langle \sigma_-(t) \rangle, \end{aligned} \quad (3.253)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_3(t) \rangle = -\gamma_0 (\operatorname{ch}^2 r + \operatorname{sh}^2 r) \langle \sigma_3(t) \rangle - \gamma_0. \quad (3.254)$$

Эти уравнения описывают зависящую от фазы релаксацию когерентностей и релаксацию третьей компоненты блоховского вектора, которая усиливается по сравнению с затуханием в поле вакуума. Если $\theta = 0$, то уравнения движения для блоховского вектора принимают вид

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_1(t) \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} e^{-2r} \langle \sigma_1(t) \rangle, \quad (3.255)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_2(t) \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} e^{+2r} \langle \sigma_2(t) \rangle, \quad (3.256)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_3(t) \rangle = -\gamma_0 (2 \operatorname{sh}^2 r + 1) \langle \sigma_3(t) \rangle - \gamma_0. \quad (3.257)$$

Соответствующие блоховские уравнения в вакууме ((3.224)–(3.226) для $\gamma = \gamma_0$) получаются в пределе $r \rightarrow 0$. Мы видим, что для сжатого вакуума компоненты $\langle \sigma_{1,2} \rangle$ блоховского вектора затухают с разными интенсивностями: по сравнению с вакуумным состоянием интенсивность релаксации усиливается в одном направлении и понижается в другом. Третья компонента блоховского вектора стремится к стационарному состоянию

$$\langle \sigma_3 \rangle_s = -\frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 r + 1}, \quad (3.258)$$

которое имеет тот же вид, что и в уравнении (3.227), где $N = \operatorname{sh}^2 r$ играет здесь роль распределения Планка.

3.4.4. Резервуары более общего вида

Основное уравнение вида (3.250) выполняется для общего состояния окружения ρ_B , которое можно представить как произведение независимых

мод, которые удовлетворяют $\langle b_\lambda(\vec{k}) \rangle = \langle b_\lambda^\dagger(\vec{k}) \rangle = 0$. Например, если мы рассмотрим сжатое тепловое состояние, то есть если мы заменим вакуумное состояние $|0\rangle\langle 0|$, которое мы использовали в предыдущем параграфе, на состояние теплового равновесия и сожмем последнее, то вместо уравнений (3.243) и (3.246) мы получим

$$N = N_{th}(\ch^2 r + \sh^2 r) + \sh^2 r, \quad (3.259)$$

$$M = -\ch r \sh r e^{i\theta}(2N_{th} + 1), \quad (3.260)$$

где вместо распределения Планка мы написали $N_{th} = 1/(\exp[\beta\omega_0] - 1)$. Очевидно, величины N и M не являются независимыми. Легко проверить соотношение

$$|M|^2 = N(N + 1) - N_{th}(N_{th} + 1). \quad (3.261)$$

Из последнего уравнения следует, что выполняется неравенство

$$|M|^2 \leq N(N + 1). \quad (3.262)$$

Это неравенство выполняется для описанного выше ρ_B общего вида, что можно доказать с помощью соответствующего соотношения неопределенностей. Для этого мы выбираем фиксированную моду $b \equiv b_\lambda(\vec{k})$ и записываем

$$\langle b^\dagger b \rangle = N, \quad \langle bb^\dagger \rangle = N + 1, \quad (3.263)$$

$$\langle bb \rangle = M = |M|e^{i\theta}, \quad \langle b^\dagger b^\dagger \rangle = M^* = |M|e^{-i\theta}. \quad (3.264)$$

Это наиболее общая параметризация, которая совместима с коммутационными соотношениями $[b, b^\dagger] = 1$. Затем мы определяем эрмитовы операторы

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\theta/2} b + e^{+i\theta/2} b^\dagger \right), \quad Y = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\theta/2} b - e^{+i\theta/2} b^\dagger \right), \quad (3.265)$$

которые удовлетворяют $\langle X \rangle = \langle Y \rangle = 0$ и $[X, Y] = -i$. Тогда соотношение неопределенностей $\langle X^2 \rangle \cdot \langle Y^2 \rangle \geq 1/4$ немедленно приводит к неравенству (3.262).

Значение неравенства (3.262) заключается в том, что оно гарантирует положительность генератора основного уравнения (3.250). Действительно, генератор уравнения (3.250) имеет первый стандартный вид (3.63) при $F_1 = \sigma_-$, $F_2 = \sigma_+$ и матрице коэффициентов

$$(a_{ij}) = \gamma_0 \begin{pmatrix} N + 1 & -M^* \\ -M & N \end{pmatrix}. \quad (3.266)$$

Положительность матрицы приводит к условию (3.262).

3.4.5. Резонансная флуоресценция

Рассмотрим случай, в котором атомный переход $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ вызван внешним когерентным резонансным полем с одной модой. Применяя дипольное приближение, мы получаем гамильтониан в представлении взаимодействия, описывающий взаимодействие системы с задающей модой

$$H_L = -\vec{E}_L(t) \cdot \vec{D}(t). \quad (3.267)$$

Здесь величина

$$\vec{E}_L(t) = \vec{\varepsilon} e^{-i\omega_0 t} + \vec{\varepsilon}^* e^{+i\omega_0 t} \quad (3.268)$$

— амплитуда электрического поля задающей моды. Произведение

$$\Omega = 2\vec{\varepsilon} \cdot \vec{d}^* \quad (3.269)$$

называется частотой Раби. В дальнейшем мы выберем фазу внешнего поля такой, чтобы Ω была действительной и положительной. В рамках этих определений мы можем записать взаимодействие атом-поле в приближении вращающейся волны следующим образом:

$$H_L = -\frac{\Omega}{2}(\sigma_+ + \sigma_-). \quad (3.270)$$

Теперь приведем систему во взаимодействие с тепловым резервуаром мод излучения. В соответствии с параграфом 3.4.2 основное квантовое уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & \frac{i\Omega}{2}[\sigma_+ + \sigma_-, \rho(t)] + \\ & + \gamma_0(N+1)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_+\sigma_-\right) + \\ & + \gamma_0N\left(\sigma_+\rho(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_-\sigma_+\right). \end{aligned} \quad (3.271)$$

3.4.5.1. Уравнение движения блоховского вектора. Основное уравнение (3.271) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{\sigma}(t)\rangle = G\langle\vec{\sigma}(t)\rangle + \vec{b}, \quad (3.272)$$

где мы ввели матрицу

$$G = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 & \Omega \\ 0 & -\Omega & -\gamma \end{pmatrix} \quad (3.273)$$

и 3-вектор

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}. \quad (3.274)$$

Уравнение (3.272) называется *блоховским уравнением*.

Стационарным решением уравнения (3.272) является

$$\langle \sigma_3 \rangle_s = -\frac{\gamma_0 \gamma}{\gamma^2 + 2\Omega^2}, \quad (3.275)$$

$$\langle \sigma_+ \rangle_s = \langle \sigma_- \rangle_s^* = \frac{-i\Omega\gamma_0}{\gamma^2 + 2\Omega^2}. \quad (3.276)$$

Следовательно, стационарная заселенность верхнего уровня равна

$$p_e^s = \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma - \gamma_0) + 2\Omega^2}{\gamma^2 + 2\Omega^2}. \quad (3.277)$$

При нулевой температуре ($N = 0, \gamma = \gamma_0$) стационарное решение принимает вид

$$\langle \sigma_3 \rangle_s = -\frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2}, \quad (3.278)$$

$$\langle \sigma_+ \rangle_s = \langle \sigma_- \rangle_s^* = \frac{-i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2}, \quad (3.279)$$

в то время как стационарная заселенность верхнего уровня равна

$$p_e^s = \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2}. \quad (3.280)$$

В пределе $\Omega \gg \gamma_0$ мы получаем $p_e^s = 1/2$ и $\langle \sigma_+ \rangle_s = -i\gamma_0/2\Omega$.

Нестационарное решение уравнения Блоха (3.272) наиболее просто получить, вводя вектор

$$\langle\langle \vec{\sigma}(t) \rangle\rangle = \langle \vec{\sigma}(t) \rangle - \langle \vec{\sigma} \rangle_s. \quad (3.281)$$

Поскольку этот вектор представляет собой отклонение от стационарного решения, он удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d}{dt} \langle\langle \vec{\sigma}(t) \rangle\rangle = G \langle\langle \vec{\sigma}(t) \rangle\rangle, \quad (3.282)$$

которое можно легко решить диагонализацией матрицы G . Собственные значения G выражаются как

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2}, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{3\gamma}{4} \pm i\mu, \quad (3.283)$$

где мы ввели

$$\mu = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma}{4}\right)^2}. \quad (3.284)$$

Отметим, что все собственные значения имеют отрицательные действительные части. Следовательно, любая исходная матрица плотности под действием возбуждения переходит в единственное стационарное решение $\langle\vec{\sigma}\rangle_s$ введенного выше блоховского уравнения. Нестационарное решение может быть представлено как

$$\begin{aligned} \langle\langle\sigma_3(t)\rangle\rangle &= e^{-3\gamma t/4} \left[\cos \mu t - \frac{\gamma}{4\mu} \sin \mu t \right] \langle\langle\sigma_3(0)\rangle\rangle + \\ &+ \frac{i\Omega}{\mu} e^{-3\gamma t/4} \sin \mu t (\langle\langle\sigma_+(0)\rangle\rangle - \langle\langle\sigma_-(0)\rangle\rangle) \end{aligned} \quad (3.285)$$

и

$$\begin{aligned} \langle\langle\sigma_+(t)\rangle\rangle &= \frac{1}{2} e^{-\gamma t/2} (\langle\langle\sigma_+(0)\rangle\rangle + \langle\langle\sigma_-(0)\rangle\rangle) + \\ &+ \frac{1}{2} e^{-3\gamma t/4} \left[\cos \mu t + \frac{\gamma}{4\mu} \sin \mu t \right] (\langle\langle\sigma_+(0)\rangle\rangle - \langle\langle\sigma_-(0)\rangle\rangle) + \\ &+ \frac{i\Omega}{2\mu} e^{-3\gamma t/4} \sin \mu t \langle\langle\sigma_3(0)\rangle\rangle. \end{aligned} \quad (3.286)$$

Рассмотрим случай, когда атом в начале находится в основном состоянии, $\rho(0) = |g\rangle\langle g|$, при котором

$$\langle\langle\sigma_\pm(0)\rangle\rangle = -\langle\sigma_\pm\rangle_s, \quad (3.287)$$

$$\langle\langle\sigma_3(0)\rangle\rangle = -1 - \langle\sigma_3\rangle_s. \quad (3.288)$$

При нулевой температуре ($\gamma = \gamma_0$) для произвольной силы задающего воздействия мы находим

$$p_e(t) = \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left[1 - e^{-3\gamma_0 t/4} \left\{ \cos \mu t + \frac{3\gamma_0}{4\mu} \sin \mu t \right\} \right], \quad (3.289)$$

$$\langle\sigma_+(t)\rangle = \frac{-i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left[1 - e^{-3\gamma_0 t/4} \left\{ \cos \mu t + \left(\frac{\gamma_0}{4\mu} - \frac{\Omega^2}{\gamma_0\mu} \right) \sin \mu t \right\} \right]. \quad (3.290)$$

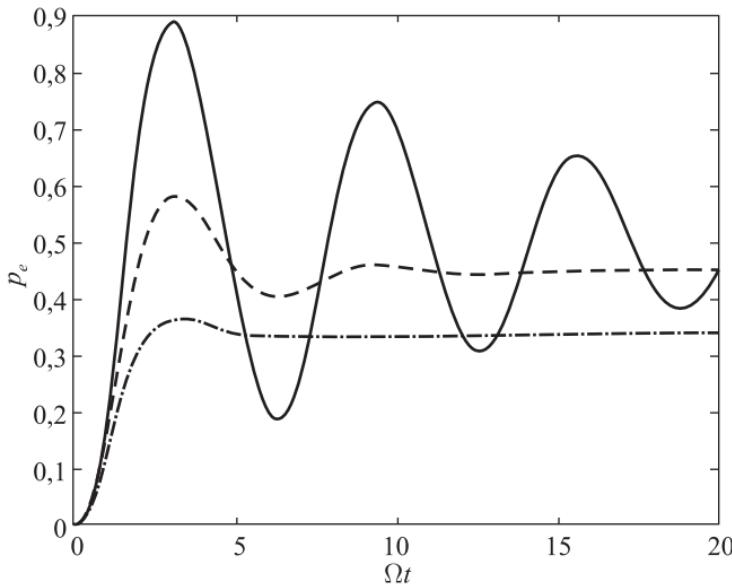


Рис. 3.3. Заселенность верхнего уровня $p_e(t)$ для возбуждаемой двухуровневой системы как функция времени. Параметры: $\gamma_0/\Omega = 0,1$ (сплошная линия), $\gamma_0/\Omega = 0,5$ (пунктирная линия) и $\gamma_0/\Omega = 1$ (штрих-пунктирная линия).

В случае слабого затухания, то есть когда $\Omega > \gamma_0/4$, величина μ — действительная, и как заселенность верхнего уровня, так и когерентности испытывают экспоненциально затухающие осцилляции, как показано на рис. 3.3 и 3.4. Наоборот, в случае сильного затухания, $\Omega < \gamma_0/4$, величина μ становится чисто мнимой

$$\mu = i\tilde{\mu} = i\sqrt{\left(\frac{\gamma_0}{4}\right)^2 - \Omega^2}. \quad (3.291)$$

Вероятности заселения и когерентности монотонно приближаются к своим стационарным значениям.

В пределе очень сильных колебаний, $\Omega \gg \gamma_0/4$, мы получаем асимптотические выражения

$$p_e(t) \approx \frac{1}{2} \left[1 - e^{-3\gamma_0 t/4} \cos \Omega t \right], \quad (3.292)$$

$$\langle \sigma_+(t) \rangle \approx -\frac{i}{2} e^{-3\gamma_0 t/4} \sin \Omega t. \quad (3.293)$$

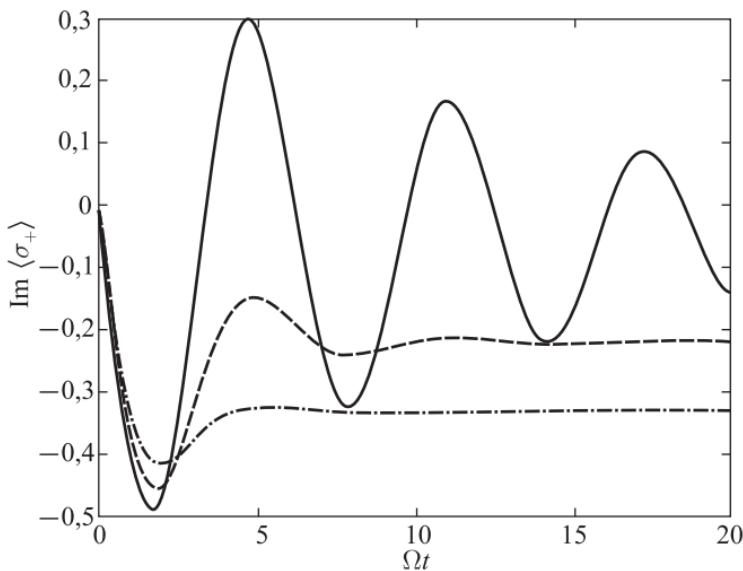


Рис. 3.4. Мнимая часть когерентностей $\langle \sigma_+(t) \rangle$ для возбуждаемой двухуровневой системы как функция времени. Параметры: $\gamma_0/\Omega = 0,1$ (сплошная линия), $\gamma_0/\Omega = 0,5$ (пунктирная линия) и $\gamma_0/\Omega = 1$ (штрих-пунктирная линия).

Таким образом, конец блоховского вектора описывает экспоненциальную спираль в плоскости $(2, 3)$ вокруг начала координат, причем круговая частота равна частоте Раби Ω .

3.4.5.2. Спектр резонансной флуоресценции. В качестве приложения квантовой регрессионной теоремы (см. параграф 3.2.4), мы определим флуоресцентный спектр испускаемого излучения в стационарном состоянии. Спектр излучения определяется некоторой двухвременной корреляционной функцией системы. Чтобы получить его, заметим для начала, что из запаздывающего решения уравнения Максвелла получается, что излучаемая источником компонента электрического поля диполя с положительной частотой равна

$$\vec{E}^{(+)}(t, \vec{x}) = \frac{\omega_0^2}{c^2 r} \left([\vec{n} \times \vec{d}] \times \vec{n} \right) \sigma_-(t - r/c). \quad (3.294)$$

Здесь диполь расположен в начале координат системы, $r = |\vec{x}|$ и $\vec{n} = \vec{x}/r$ является единичным вектором, сонаправленным с \vec{x} . Это уравнение свя-

зывает компоненту излучаемого поля с положительной частотой и атомный понижающий оператор σ_- в запаздывающий момент времени $t - r/c$. С другой стороны, спектральная интенсивность, излучаемая осцилирующим диполем в единицу телесного угла, дается уравнением

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi} e^{i\omega\tau} \langle \vec{E}^{(-)}(t, \vec{x}) \vec{E}^{(+)}(t + \tau, \vec{x}) \rangle_s. \quad (3.295)$$

Подставляя уравнение (3.294), находим

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega_0^4}{8\pi^2 c^3} \left| (\vec{n} \times \vec{d}) \times \vec{n} \right|^2 S(\omega), \quad (3.296)$$

которое показывает типичное угловое распределение излучения диполя, тогда как частотная зависимость заключена в спектральной функции

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \sigma_+(\tau) \sigma_-(0) \rangle_s. \quad (3.297)$$

Здесь мы воспользовались однородностью стационарной корреляционной функции во времени.

Таким образом, для того чтобы получить спектр, нам необходима атомная корреляционная функция $\langle \sigma_+(\tau) \sigma_-(0) \rangle_s$. Для этого мы рассмотрим вектор

$$\langle \langle \vec{\sigma}(\tau) \sigma_-(0) \rangle \rangle \equiv \langle \vec{\sigma}(\tau) \sigma_-(0) \rangle_s - \langle \vec{\sigma} \rangle_s \langle \sigma_- \rangle_s. \quad (3.298)$$

Из квантовой регрессионной теоремы следует, что динамика этого вектора определяется через однородную часть оптического блоховского уравнения, то есть

$$\frac{d}{d\tau} \langle \langle \vec{\sigma}(\tau) \sigma_-(0) \rangle \rangle = G \langle \langle \vec{\sigma}(\tau) \sigma_-(0) \rangle \rangle. \quad (3.299)$$

Мы делаем вывод, что искомая корреляционная функция $\langle \langle \vec{\sigma}_+(\tau) \sigma_-(0) \rangle \rangle$ задается правой частью уравнения (3.286), где исходные значения $\langle \langle \sigma_\pm(0) \rangle \rangle$ и $\langle \langle \sigma_3(0) \rangle \rangle$ должны быть заменены, соответственно, на

$$\langle \langle \sigma_+(0) \sigma_-(0) \rangle \rangle = \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_s - \langle \sigma_+ \rangle_s \langle \sigma_- \rangle_s = p_e^s - |\langle \sigma_+ \rangle_s|^2, \quad (3.300)$$

$$\langle \langle \sigma_-(0) \sigma_-(0) \rangle \rangle = \langle \sigma_- \sigma_- \rangle_s - \langle \sigma_- \rangle_s \langle \sigma_- \rangle_s = -\langle \sigma_- \rangle_s^2, \quad (3.301)$$

$$\langle \langle \sigma_3(0) \sigma_-(0) \rangle \rangle = \langle \sigma_3 \sigma_- \rangle_s - \langle \sigma_3 \rangle_s \langle \sigma_- \rangle_s = -\langle \sigma_- \rangle_s - \langle \sigma_3 \rangle_s \langle \sigma_- \rangle_s. \quad (3.302)$$

Наконец, мы должны учесть, что блоховские уравнения решались в представлении взаимодействия. Для того чтобы вернуться в шредингеровское представление, мы заменяем $\sigma_{\pm}(t)$ на $\exp[\pm i\omega_0 t]\sigma_{\pm}(t)$. Это дает двухвременную корреляционную функцию в стационарном состоянии

$$\langle \sigma_+(\tau)\sigma_-(0) \rangle_s = \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left\{ \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \exp[i\omega_0 t] + \right. \\ + \frac{1}{2} \exp \left[- \left(\frac{\gamma_0}{2} - i\omega_0 \right) \tau \right] + A_+ \exp \left[- \left(\frac{3\gamma_0}{4} - \tilde{\mu} - i\omega_0 \right) \tau \right] + \\ \left. + A_- \exp \left[- \left(\frac{3\gamma_0}{4} + \tilde{\mu} - i\omega_0 \right) \tau \right] \right\}, \quad (3.303)$$

где мы ввели амплитуды

$$A_{\pm} = \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left[2\Omega^2 - \gamma_0^2 \pm \frac{\gamma_0}{4\tilde{\mu}} (10\Omega^2 - \gamma_0^2) \right]. \quad (3.304)$$

Уравнение (3.303) дает двухвременную корреляционную функцию для $\tau \geq 0$; для отрицательных времен функция находится с помощью соотношения $\langle \sigma_+(-\tau)\sigma_-(0) \rangle_s = \langle \sigma_+(\tau)\sigma_-(0) \rangle_s^*$.

Корреляционная функция, как видно из полученного результата, состоит из четырех членов. Первый член представляет вклад от упругого релеевского рассеяния, которое приводит к δ -образной спектральной функции (см. ниже). Другие три члена описывают неупругие процессы рассеяния и дают кривые в виде лоренциана. В случае сильного затухания, когда $\Omega < \gamma_0/4$, величина $\tilde{\mu}$ — действительная, так что спектральная функция содержит сумму трех лоренцианов с пиком при $\omega = \omega_0$. В случае слабого затухания, когда $\Omega > \gamma_0/4$, величина $\tilde{\mu} = -i\mu$ становится мнимой и один пик от неупругого рассеяния разделяется на три с центрами в $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_0 \pm \mu$. Действительно, выполнив преобразование Фурье над (3.303), мы находим спектральную функцию для флуоресцентного излучения атомного диполя в случае слабого затухания (см. рис. 3.5):

$$S(\omega) = \frac{2\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left\{ \frac{\pi\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\gamma_0/2}{(\gamma_0/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \right. \\ + \Re \frac{A_+(3\gamma_0/4 - i[\omega - \omega_0 + \mu])}{(3\gamma_0/4)^2 + (\omega - \omega_0 + \mu)^2} + \Re \frac{A_-(3\gamma_0/4 - i[\omega - \omega_0 - \mu])}{(3\gamma_0/4)^2 + (\omega - \omega_0 - \mu)^2} \left. \right\}. \quad (3.305)$$

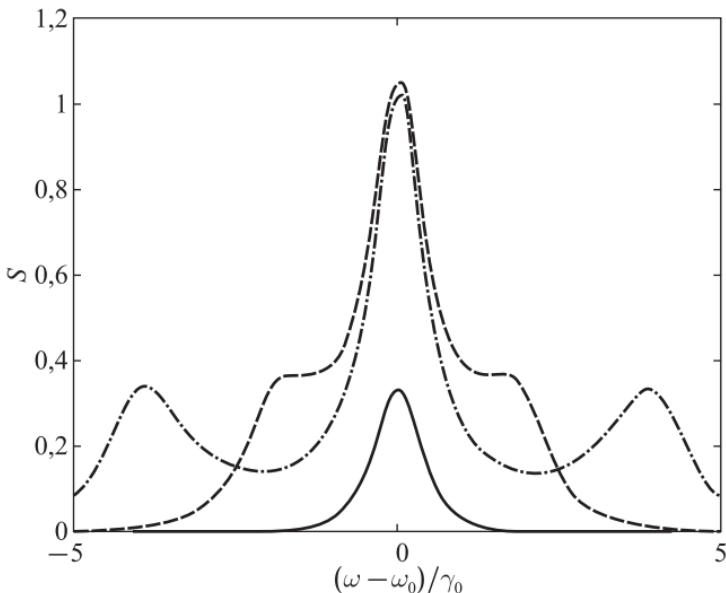


Рис. 3.5. Спектр резонансной флуоресценции согласно (3.305) без вклада упругого рассеяния. Рисунок показывает $S(\omega)$ для трех значений $4\Omega/\gamma_0 = 2$ (сплошная линия), $4\Omega/\gamma_0 = 8$ (пунктирующая линия) и $4\Omega/\gamma_0 = 16$ (штрих-пунктирная линия).

В пределе сильных колебаний, $\Omega \gg \gamma_0/4$, амплитуды A_{\pm} стремятся к 1/4 и вклад от упругого рассеяния становится пренебрежимо мал. Это дает следующий спектр в пределе сильного возбуждения:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0/2}{(\gamma_0/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \\ + \frac{1}{4} \frac{3\gamma_0/4}{(3\gamma_0/4)^2 + (\omega - \omega_0 + \Omega)^2} + \frac{1}{4} \frac{3\gamma_0/4}{(3\gamma_0/4)^2 + (\omega - \omega_0 - \Omega)^2}. \quad (3.306)$$

Таким образом, спектр состоит из трех лоренцианов: центральный пик при $\omega = \omega_0$ с шириной $\gamma_0/2$ и два боковых пика при $\omega = \omega_0 \pm \Omega$ с шириной $3\gamma_0/4$. Соотношение между высотами пиков — 1 : 3 : 1, тогда как между интегральными интенсивностями — 1 : 2 : 1. Описанный выше спектр был получен теоретически Моллоу (Mollow, 1969) и проверен экспериментально Ву, Гроув и Эзекиел (Wu, Grove, Ezekiel, 1975) и Хартиг и др. (Hartig et al., 1976). Дальнейшие интересные особенности двухуровневой системы,

такие как статистика фотонов и явление фотонной антигруппировки, будут обсуждаться в разделе 6.3.2.

3.4.6. Затухающий гармонический осциллятор

В качестве следующего примера динамической полугруппы мы рассмотрим основное уравнение для затухающего гармонического осциллятора. Свободная эволюция генерируется гамильтонианом системы $H_S = \omega_0 a^\dagger a$, который описывает гармонический осциллятор с частотой ω_0 . Основное уравнение в шредингеровском представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= -i\omega_0 [a^\dagger a, \rho_S(t)] + \\ &+ \gamma_0(N+1) \left\{ a\rho_S(t)a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a\rho_S(t) - \frac{1}{2}\rho_S(t)a^\dagger a \right\} + \\ &+ \gamma_0 N \left\{ a^\dagger \rho_S(t)a - \frac{1}{2}aa^\dagger \rho_S(t) - \frac{1}{2}\rho_S(t)aa^\dagger \right\} \equiv \\ &\equiv \mathcal{L}\rho_S(t). \end{aligned} \quad (3.307)$$

Это уравнение используется, например, при описании затухания электромагнитного поля внутри полости, в случае которого a^\dagger и a обозначают операторы рождения и уничтожения моды полости. Окружением являются, например, моды снаружи полости, которые приводят к затуханию моды полости с интенсивностью γ_0 . Величина

$$N = [\exp(\omega_0/k_B T) - 1]^{-1} \quad (3.308)$$

является средним числом квантов моды с частотой ω_0 теплового резервуара.

3.4.6.1. Паулиевское основное уравнение и стационарное решение.

Обозначим через $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, n -е собственное состояние осциллятора, то есть $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$. Основное уравнение (3.307) приводит к замкнутому уравнению для заселенности n -го уровня

$$P(n, t) = \langle n | \rho_S(t) | n \rangle, \quad (3.309)$$

которое принимает вид классического основного уравнения для одноступенчатого процесса (см. параграф 1.4.4.2), паулиевского основного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(n, t) &= \gamma_0(N+1)[(n+1)P(n+1, t) - nP(n, t)] + \\ &+ \gamma_0 N[nP(n-1, t) - (n+1)P(n, t)]. \end{aligned} \quad (3.310)$$

Стационарное решение этого уравнения дается выражением

$$P_s(n) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{N}{N+1} \right)^n. \quad (3.311)$$

При помощи уравнения (3.308) можно переписать это решение в виде

$$P_s(n) = [1 - \exp(-\omega_0/k_B T)] \exp[-n\omega_0/k_B T], \quad (3.312)$$

который называется бульцмановским распределением по собственным состояниям осциллятора. Стационарное значение среднего числа квантов моды, таким образом, равно термодинамическому среднему,

$$\langle a^\dagger a \rangle_s = \sum_{n=0}^{\infty} n P_s(n) = N. \quad (3.313)$$

3.4.6.2. Сопряженное основное уравнение. Для изучения динамики можно вывести уравнения движения для средних значений операторов системы напрямую из основного уравнения. Аналогично можно использовать сопряженное основное уравнение (3.84), которое принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_H(t) &= +i\omega_0 [a^\dagger a, A_H(t)] + \\ &+ \gamma_0(N+1) \left\{ a^\dagger A_H(t)a - \frac{1}{2}a^\dagger a A_H(t) - \frac{1}{2}A_H(t)a^\dagger a \right\} + \\ &+ \gamma_0 N \left\{ a A_H(t)a^\dagger - \frac{1}{2}aa^\dagger A_H(t) - \frac{1}{2}A_H(t)aa^\dagger \right\}, \end{aligned} \quad (3.314)$$

для определения динамики соответствующих гейзенберговских операторов $A_H(t)$. Решая это уравнение с тем начальным условием, что гейзенберговские и шредингеровские операторы совпадают при $t = 0$, находим, например,

$$a_H(t) = e^{(-i\omega_0 - \gamma_0/2)t} a, \quad (3.315)$$

$$a_H^\dagger(t) = e^{(+i\omega_0 - \gamma_0/2)t} a^\dagger, \quad (3.316)$$

$$(a^\dagger a)_H(t) = e^{-\gamma_0 t} a^\dagger a + N (1 - e^{-\gamma_0 t}). \quad (3.317)$$

Из этих уравнений немедленно получаются средняя амплитуда осциллятора,

$$\langle a(t) \rangle = \text{tr}\{a_H(t)\rho_S(0)\} = \langle a(0) \rangle e^{(-i\omega_0 - \gamma_0/2)t}, \quad (3.318)$$

и среднее число квантов,

$$\langle a^\dagger a(t) \rangle = \text{tr} \{ (a^\dagger a)_H(t) \rho_S(0) \} = \langle a^\dagger a(0) \rangle e^{-\gamma_0 t} + N (1 - e^{-\gamma_0 t}). \quad (3.319)$$

Среднее значение амплитуды осциллятора, следовательно, изменяется по экспоненциальной спирали в комплексной плоскости, сходясь к началу координат при $\gamma_0 t \gg 1$. Среднее число квантов стартует с начального значения $\langle a^\dagger a(0) \rangle$ и стремится, для времен много больших обратной частоты затухания, к термодинамическому среднему N , которое не зависит от начального значения.

3.4.6.3. Представление когерентного состояния. В приложениях квантовой оптики зачастую рассматривается основное уравнение с помощью методов фазового пространства. В качестве примера мы рассмотрим здесь *представление когерентного состояния* или *P-представление* основного уравнения. Подробности и различные другие представления можно найти в (Gardiner, Zoller, 2000).

Для любого комплексного числа α когерентное состояние $|\alpha\rangle$ определяется в терминах состояний осциллятора $|n\rangle$ в представлении чисел заполнения в виде

$$|\alpha\rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \exp [\alpha a^\dagger - \alpha^* a] |0\rangle. \quad (3.320)$$

Когерентные состояния нормированы на 1, но не ортогональны друг другу. Перекрытие двух когерентных состояний дается соотношением

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} |\beta|^2 + \alpha^* \beta \right]. \quad (3.321)$$

Когерентные состояния являются собственными состояниями неэрмитова оператора уничтожения a , то есть

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.322)$$

Они образуют переполненное множество состояний, удовлетворяющих соотношению полноты

$$\frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = I. \quad (3.323)$$

Представление когерентного состояния для матрицы плотности системы получено в работах (Glauber, 1963) и (Sudarshan, 1963) и определяется как

$$\rho_S(t) = \int d^2 \alpha P(\alpha, \alpha^*, t) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (3.324)$$

Таким образом, $\rho_S(t)$ представляется как смесь когерентных состояний $|\alpha\rangle$ с соответствующей *весовой функцией* $P(\alpha, \alpha^*, t)$, которая единственным образом определяется через заданную матрицу плотности. Нужно отметить, однако, что P является только своего рода квазивероятностью, так как не является положительной функцией распределения. Можно показать (Klauder, McKenna, Currie, 1965), что распределение P существует для любой матрицы плотности, если считать P обобщенной сингулярной функцией. Нормировка матрицы плотности приводит к условию нормировки

$$\text{tr}_S \rho_S(t) = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*, t) = 1. \quad (3.325)$$

Произведение операторов рождения и уничтожения $a^\dagger(t)$, $a(t)$ называется нормально упорядоченным, если все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения. Для такого нормально упорядоченного произведения мы получаем

$$\langle (a^\dagger(t))^p a(t)^q \rangle = \int d^2\alpha (\alpha^*)^p \alpha^q P(\alpha, \alpha^*, t). \quad (3.326)$$

Это является важным свойством P -представления, которое означает, что среднее значение нормально упорядоченного произведения операторов рождения и уничтожения преобразуется в соответствующий момент распределения $P(\alpha, \alpha^*, t)$.

Чтобы вывести уравнение для $P(\alpha, \alpha^*, t)$, нужно подставить P -представление в квантовое основное уравнение (3.307) и использовать свойства

$$a|\alpha\rangle\langle\alpha| = \alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (3.327)$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|a^\dagger = \alpha^*|\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (3.328)$$

$$a^\dagger|\alpha\rangle\langle\alpha| = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \alpha^* \right) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (3.329)$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|a = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*} + \alpha \right) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (3.330)$$

которые легко могут быть получены из определения когерентных состояний. Далее проводится интегрирование по частям (считая нулевыми граничные условия на бесконечности), которое добавляет по минусу для каж-

дого дифференциального оператора. Перечисленные выше свойства показывают, что тогда мы имеем следующие соответствия:

$$a\rho_S \leftrightarrow \alpha P, \quad (3.331)$$

$$\rho_S a^\dagger \leftrightarrow \alpha^* P, \quad (3.332)$$

$$a^\dagger \rho_S \leftrightarrow \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} + \alpha^* \right) P, \quad (3.333)$$

$$\rho_S a \leftrightarrow \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \alpha \right) P. \quad (3.334)$$

С помощью этих соотношений легко получить следующие уравнение движения в P -представлении типа Фоккера–Планка (Scully, Zubairy, 1997):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, \alpha^*, t) = \\ = - \left[\left(-i\omega_0 - \frac{\gamma_0}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \left(+i\omega_0 - \frac{\gamma_0}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right] P(\alpha, \alpha^*, t) + \\ + \gamma_0 N \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} P(\alpha, \alpha^*, t). \end{aligned} \quad (3.335)$$

Это уравнение по своей структуре похоже на классическое уравнение Фоккера–Планка (1.129) для процесса диффузии: первый член в правой части представляет детерминированный дрейф, в то время как второй член имеет структуру диффузионного члена.

Решим уравнение (3.335) для начального значения

$$P(\alpha, \alpha^*, 0) = \delta^2(\alpha - \alpha_0), \quad (3.336)$$

которое означает, что начальное состояние является когерентным состоянием $|\alpha_0\rangle$. Соответствующее решение может быть получено подстановкой гауссового ансатца

$$P(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{1}{\pi \sigma^2(t)} \exp \left[-\frac{|\alpha - \beta(t)|^2}{\sigma^2(t)} \right] \quad (3.337)$$

в (3.335) и решением дифференциальных уравнений для зависящих от времени функций $\sigma^2(t)$ и $\beta(t)$. Однако более простой путь состоит в том, чтобы показать, что $\beta(t)$ равна средней амплитуде, поскольку

$$\beta(t) = \int d^2 \alpha \alpha P(\alpha, \alpha^*, t) = \langle \alpha_0 | a_H(t) | \alpha_0 \rangle = \alpha_0 e^{(-i\omega_0 - \gamma_0/2)t}. \quad (3.338)$$

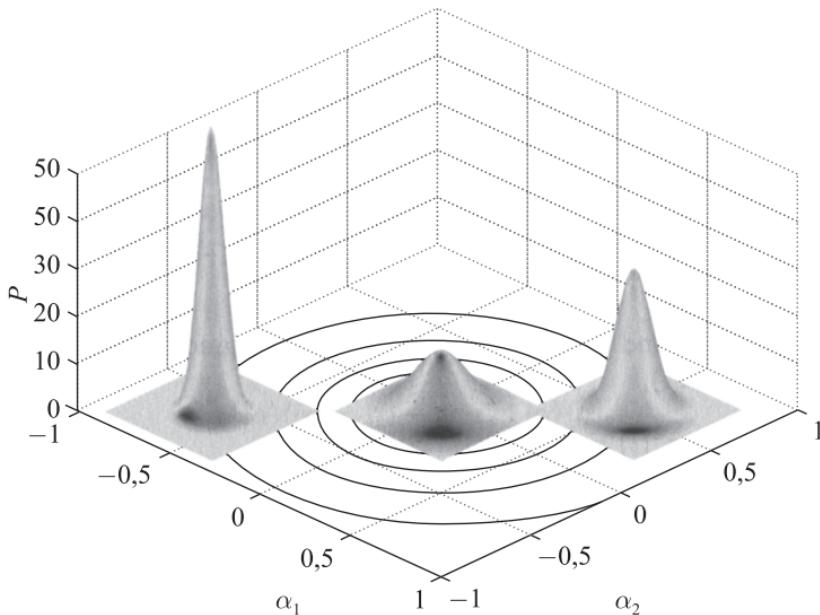


Рис. 3.6. Представление когерентного состояния затухающего гармонического осциллятора. Рисунок показывает функцию распределения $P(\alpha, \alpha^*, t)$ в соответствии с уравнением (3.337) на комплексной фазовой плоскости с координатами $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ при трех разных временах, задаваемых $\omega_0 t = 3\pi/4, 7\pi/4, 32\pi$. Параметры: $\gamma_0/\omega_0 = 0,1$, $\alpha_0 = 1$, и $N = 0,025$. Также показана траектория средней амплитуды $\beta(t)$.

Соответственно, мы получаем, что $\sigma^2(t)$ равна дисперсии оператора числа частиц $a^\dagger a$, которая может быть получена при помощи (3.317),

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \text{Var}(a^\dagger(t)a(t)) \equiv \\ &\equiv \langle \alpha_0 | (a^\dagger a)_H(t) | \alpha_0 \rangle - \alpha_0^* \alpha_0 e^{-\gamma_0 t} = \\ &= N(1 - e^{-\gamma_0 t}). \end{aligned} \quad (3.339)$$

P -представление задается, следовательно, гауссианом, среднее значение которого изменяется по спирали вокруг начала координат фазовой плоскости. Ширина $\sigma^2(t)$ возрастает от нуля до термодинамического среднего N , когда осциллятор приходит в равновесие с резервуаром (см. рис. 3.6). Отметим также, что при нулевой температуре ($N = 0$) начальное когерентное состояние остается когерентным состоянием с течением времени.

Уравнение Фоккера–Планка (3.335) описывает эволюцию комплексного процесса Орнштейна–Уленбека (см. раздел 1.4.5), и эквивалентное стохастическое дифференциальное уравнение (см. параграф 1.5.4.1) выражается как

$$d\alpha(t) = \left(-i\omega_0 - \frac{\gamma_0}{2} \right) \alpha(t) dt + \sqrt{\gamma_0 N} dW(t). \quad (3.340)$$

Здесь $dW(t)$ – приращение комплексного процесса Винера, который удовлетворяет условиям:

$$E[dW(t)] = E[dW^*(t)] = 0, \quad (3.341)$$

$$dW(t)dW(t) = dW^*(t)dW^*(t) = 0, \quad (3.342)$$

$$dW(t)dW^*(t) = dt. \quad (3.343)$$

Комплексное приращение можно представить в терминах двух статистически независимых действительных винеровских процессов следующим соотношением:

$$dW(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(dW_1(t) + i dW_2(t)), \quad (3.344)$$

которое легко проверяется с помощью соотношений (1.184)–(1.186).

Таким образом, мы видим, что для подходящих начальных условий, которые приводят к настоящему распределению вероятности в P -представлении, динамика комплексных амплитуд осциллятора может быть смоделирована в терминах классического стохастического процесса $\alpha(t)$. Нужно отметить, однако, что отсюда не следует, как мы уже знаем, что все эти особенности динамики могут быть описаны с помощью классического стохастического процесса на фазовой плоскости. Квантовое оптическое основное уравнение (3.307) для затухающего гармонического осциллятора будет встречаться в нескольких случаях в последующих главах. Например, оно будет использоваться для изучения явления декогерентизации в главе 4, в контексте стохастического анализа непрерывных измерений в разделе 6.7 и для проверки численных алгоритмов моделирования в параграфе 7.3.1.

3.5. Неселективные непрерывные измерения

Уравнения для матриц плотности могут быть использованы, чтобы описать эволюцию системы, подверженной неселективному непрерывному измерению некоторой наблюдаемой в системе. Идеальное непрерывное измерение приводит к так называемому квантовому эффекту Зенона, который описывается в первом подразделе. Затем мы обратимся к описанию непрерывного непрямого измерения наблюдаемой в системе и решим уравнение движения для матрицы плотности исследуемой системы.

3.5.1. Квантовый эффект Зенона

Рассмотрим измерение наблюдаемой A , спектр которой, для простоты, считается дискретным и невырожденным,

$$A = \sum_n a_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|. \quad (3.345)$$

Ряд идеальных и мгновенных измерений наблюдаемой A проводится таким образом, что два последовательных измерения разделены по времени фиксированным интервалом θ . В промежутке между двумя последовательными измерениями вектор состояния изменяется согласно уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \quad (3.346)$$

с некоторым гамильтонианом H . В пределе $\theta \rightarrow 0$ говорят о *непрерывном измерении* наблюдаемой A .

Допустим, что система изначально находится в собственном состоянии $|\psi_n\rangle$, соответствующем собственному значению a_n наблюдаемой A ,

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_n\rangle. \quad (3.347)$$

Для достаточно малых t в соответствии с уравнением Шредингера мы имеем

$$|\psi(t)\rangle = \left[I - iHt - \frac{1}{2}H^2t^2 + \dots \right] |\psi_n\rangle. \quad (3.348)$$

Первое идеальное измерение A выполняется в момент времени $t = \theta$. Вероятность получения собственного значения a_n в этом измерении дается

$$w_{nn}(\theta) = |\langle\psi_n|\psi(\theta)\rangle|^2 = 1 - (\Delta E)_n^2\theta^2 + \dots, \quad (3.349)$$

где точки обозначают члены более высокого порядка и

$$(\Delta E)_n^2 = \langle\psi_n|H^2|\psi_n\rangle - \langle\psi_n|H|\psi_n\rangle^2 \quad (3.350)$$

есть неопределенность энергии в состоянии $|\psi_n\rangle$. Величина $w_{nn}(\theta)$ является вероятностью того, что система по-прежнему находится в начальном состоянии $|\psi_n\rangle$ через время θ . Через время $\tau = k\theta$, то есть после k измерений, эта вероятность равна, следовательно,

$$w_{nn}(\tau) \approx [1 - (\Delta E)_n^2\theta^2]^k. \quad (3.351)$$

Для больших k и фиксированных τ , то есть в пределе $\theta = \tau/k \rightarrow 0$, это приводит к

$$w_{nn}(\tau) \approx \left[1 - (\Delta E)_n^2 \frac{\tau\theta}{k} \right]^k \approx \exp [-(\Delta E)_n^2 \tau\theta] \rightarrow 1. \quad (3.352)$$

Это уравнение говорит нам, что система остается с вероятностью 1 в начальном состоянии $|\psi_n\rangle$, если над системой выполняется непрерывное идеальное измерение наблюдаемой A . В результате непрерывной редукции состояния, вызванной измерениями, система не может покинуть свое начальное состояние. Формально, причина этому состоит в том, что в пределе малых θ вероятность ухода из состояния $|\psi_n\rangle$ пропорциональна квадрату θ , то есть $1 - w_{nn}(\theta) \propto \theta^2$, в то время как число k измерений возрастает как θ^{-1} . Редукция состояния, вызванная проведением измерений, происходит, таким образом, быстрее, чем возможные переходы на другие состояния. По аналогии с парадоксом Зенона это явление называется квантовым эффектом Зенона.

3.5.2. Уравнение для матрицы плотности

Описанный выше квантовый эффект Зенона является, конечно, результатом идеализации, которая предполагает идеальное непрерывное измерение. Для того чтобы исследовать, что происходит при неидеальных измерениях, мы рассмотрим следующую модель непрямого непрерывного наблюдения за системой.

Так же как и в предыдущем подразделе, мы сначала разделим временную ось на интервалы длиной θ . На каждом интервале исследуемая система изменяется согласно уравнению Шредингера (3.346). Однако, вместо выполнения идеальных измерений в начале каждого интервала, мы проведем непрямые измерения A (см. параграф 2.4.6). В начале каждого интервала одиночная пробная частица с координатой Q взаимодействует с квантовым объектом через гамильтониан взаимодействия вида $H_I(t) = g(t)AQ$. Пробные частицы независимы и предполагаются находящимися в начальных состояниях $|\phi_\theta\rangle$. После взаимодействия объекта и частицы, импульс P канонически сопряженный Q измеряется напрямую на каждой пробной частице. Это приводит к квантовой операции, которая описывается операторами (ср. (2.217))

$$\langle p | \exp(-iGAQ) | \phi_\theta \rangle, \quad (3.353)$$

где $|p\rangle$ является собственным состоянием оператора импульса и $G = \int dt g(t) = \theta$ — проинтегрированная сила взаимодействия, которая считается масштабируемой пропорционально θ .

Включая когерентную эволюцию, генерируемую H , мы, таким образом, имеем операцию, описываемую операторами

$$\Omega_p = \exp(-iH\theta)\langle p | \exp(-iAQ\theta)|\phi_\theta\rangle. \quad (3.354)$$

Эволюция матрицы плотности объекта за время θ на неселективном уровне может, следовательно, быть записана как

$$\rho(t + \theta) = \int dp \Omega_p \rho(t) \Omega_p^\dagger. \quad (3.355)$$

Подставляя выражение (3.354) и раскладывая когерентную часть до первого, а некогерентную часть до второго порядка по θ , получаем

$$\begin{aligned} \rho(t + \theta) &= \rho(t) - i[H, \rho(t)]\theta - i[A, \rho(t)]\langle Q \rangle_\theta \theta + \\ &+ \left[A\rho(t)A - \frac{1}{2}A^2\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)A^2 \right] \langle Q^2 \rangle_\theta \theta^2, \end{aligned} \quad (3.356)$$

где мы определили

$$\langle Q \rangle_\theta = \langle \phi_\theta | Q | \phi_\theta \rangle, \quad \langle Q^2 \rangle_\theta = \langle \phi_\theta | Q^2 | \phi_\theta \rangle. \quad (3.357)$$

Предположим теперь, что $\langle Q \rangle_\theta = 0$. Это означает, что дрейфовый вклад $-i[A, \rho(t)]\langle Q \rangle_\theta$ стремится к нулю и, следовательно, измерительное устройство не приводит к систематическому обратному действию на динамику квантового объекта. Более того, считается, что предел

$$\sigma_Q^2 \equiv \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \langle Q^2 \rangle_\theta \quad (3.358)$$

существует и конечен. Следовательно, стохастическое обратное действие, вызванное измерительным устройством, остается конечным в непрерывном пределе $\theta \rightarrow 0$.

Таким образом, в непрерывном пределе мы получаем следующее уравнение движения для состояния исследуемой системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= -i[H, \rho(t)] + \sigma_Q^2 \left[A\rho(t)A - \frac{1}{2}A^2\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)A^2 \right] = \\ &= -i[H, \rho(t)] - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 [A, [A, \rho(t)]]. \end{aligned} \quad (3.359)$$

Правая часть этого уравнения, очевидно, принимает вид генератора квантовой динамической полугруппы. Генератор имеет вид, полученный в параграфе 3.3.3 в пределе сингулярной связи. Он включает в себя один эрмитов линдбладовский оператор A , задаваемый косвенно измеряемой переменной.

Диссипатор основного уравнения описывает обратное действие на исследуемую систему, вызванное измерительным устройством. Мы видим, что величина этого обратного действия соотносится с точностью измерения A , а именно, считая $\langle P \rangle_\theta = 0$, с помощью соотношения неопределенностей мы получаем

$$\frac{\langle P^2 \rangle_\theta}{\theta} \cdot \theta \langle Q^2 \rangle_\theta \geq \frac{1}{4}. \quad (3.360)$$

При $\theta \rightarrow 0$ получаем

$$\sigma_A^2 \cdot \sigma_Q^2 \geq \frac{1}{4}, \quad (3.361)$$

где мы определили

$$\sigma_A^2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\langle P^2 \rangle_\theta}{\theta}. \quad (3.362)$$

Величина σ_A является мерой неопределенности при измерении A (см. параграф 2.4.6), а уравнение (3.361) говорит нам, что обратное действие, вызванное измерением, тем сильнее, чем точнее измеряется A . Уравнение (3.361), таким образом, представляет собой своего рода соотношение неопределенностей для точности наблюдения и результирующего флюктуирующего обратного действия на измеряемую систему. Если мы выберем A безразмерным, величина σ_Q^2 будет иметь размерность обратного времени,

$$\tau_0 \equiv [\sigma_Q^2]^{-1}, \quad (3.363)$$

которое можно назвать временем Зенона. Действительно, время τ_0 пропорционально точности измерения A . Для стремящегося к нулю времени Зенона, $\tau_0 \rightarrow 0$, то есть для сколь угодно точного измерения A , мы возвращаемся к описанному выше квантовому эффекту Зенона.

Взаимосвязь между характерными временами когерентного движения исследуемой системы и временем Зенона τ_0 может быть хорошо проиллюстрирована на двухуровневой системе. Гамильтониан свободного объекта берется в виде $H = -\frac{\Omega}{2}\sigma_1$, описывающим когерентные рабиевские осцилляции с частотой Ω . Измеряется величина $A = \sigma_3$, то есть измерительное устройство спроектировано для наблюдения за тем, находится ли система в возбужденном $|e\rangle$ или основном $|g\rangle$ состоянии. Соответствующее уравнение для матрицы плотности, соответственно, принимает вид

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{i\Omega}{2}[\sigma_1, \rho(t)] - \frac{1}{2\tau_0}[\sigma_3, [\sigma_3, \rho(t)]], \quad (3.364)$$

который приводит к следующим дифференциальным уравнениям для компонент блоховского вектора:

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_1(t) \rangle = -\frac{2}{\tau_0} \langle \sigma_1(t) \rangle, \quad (3.365)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_2(t) \rangle = -\frac{2}{\tau_0} \langle \sigma_2(t) \rangle + \Omega \langle \sigma_3(t) \rangle, \quad (3.366)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_3(t) \rangle = -\Omega \langle \sigma_2(t) \rangle. \quad (3.367)$$

Рассмотрим случай, при котором исследуемая система находится в возбужденном состоянии, что означает $\rho(0) = |e\rangle\langle e|$, так что $\langle \sigma_1(0) \rangle = \langle \sigma_2(0) \rangle = 0$ и $\langle \sigma_3(0) \rangle = 1$. Соответствующее решение приведенных выше дифференциальных уравнений приводит к

$$\langle \sigma_3(t) \rangle = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} (\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1 e^{-\mu_2 t}), \quad (3.368)$$

где характерные частоты задаются как

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{\tau_0} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - \Omega^2}. \quad (3.369)$$

С помощью этих соотношений заселенность верхнего уровня

$$p_e(t) = \frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_3(t) \rangle). \quad (3.370)$$

Поскольку действительные части $\mu_{1,2}$ всегда положительны, вероятность заполнения $p_e(t)$ верхнего уровня стремится к $1/2$ в пределе больших времен. Это означает, что обратное действие измерительного устройства приводит квантовый объект в стационарное состояние с равными заселенностями верхнего и нижнего уровней. В случае $\Omega\tau_0 > 1$ характерные частоты являются комплексными. Мы запишем их как $\mu_{1,2} = 1/\tau_0 \pm i\nu$ с

$$\nu = \Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2 \tau_0^2}}. \quad (3.371)$$

Таким образом, мы имеем

$$\langle \sigma_3(t) \rangle = \left(\cos \nu t + \frac{1}{\nu \tau_0} \sin \nu t \right) e^{-t/\tau_0}. \quad (3.372)$$

Откуда видно, что $p_e(t)$ имеет вид экспоненциально затухающих осцилляций с частотой ν . Для $\Omega\tau_0 \gg 1$, то есть для времени Зенона много большего по сравнению с обратной частотой Раби, исследуемая система осциллирует много раз с почти невозмущенной частотой $\nu \approx \Omega$. Если время Зенона уменьшается, частота ν становится меньше, и когерентные осцилляции исчезают при $\Omega\tau_0 = 1$.

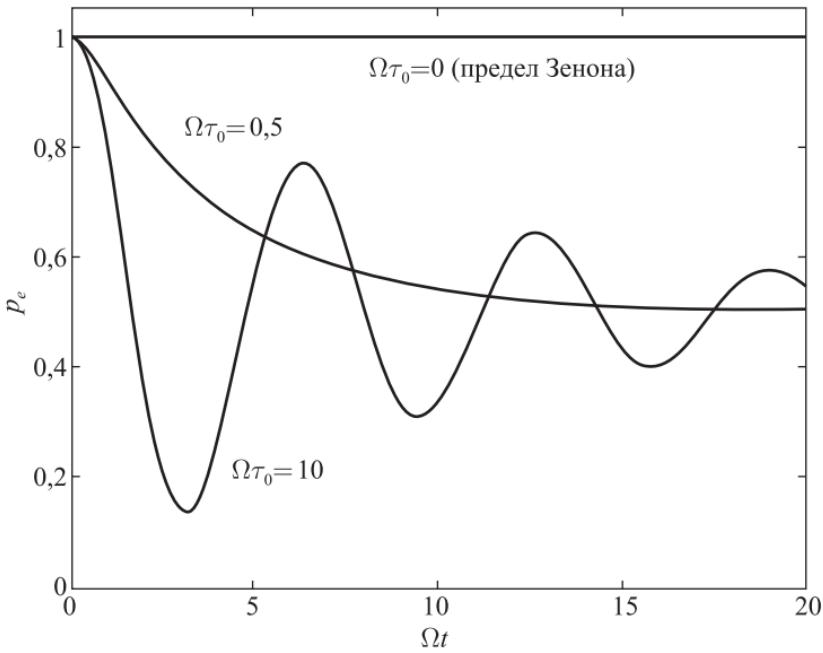


Рис. 3.7. Вероятность заполнения $p_e(t)$ (уравнение (3.370)) как функция времени для трех различных времен Зенона τ_0 .

В случае $\Omega\tau_0 < 1$ имеем монотонное приближение к стационарному состоянию. Таким образом, для достаточно малых времен Зенона когерентные осцилляции невозмущенного движения полностью подавлены (см. рис. 3.7). В случае $\Omega\tau_0 \ll 1$ находим приближенное решение

$$\langle \sigma_3(t) \rangle \approx e^{-t/\tau}, \quad (3.373)$$

где постоянная времени τ равна

$$\tau = \frac{2}{\Omega^2 \tau_0}. \quad (3.374)$$

Время затухания верхнего уровня, таким образом, становится обратно пропорционально времени Зенона τ_0 . В пределе $\tau_0 \rightarrow 0$ имеем $\tau \rightarrow \infty$. Этот предел соответствует бесконечной точности измерения σ_3 и исчезновению эффекта Зенона: время жизни верхнего уровня становится бесконечным, то есть исследуемая система остается в своем исходном состоянии. Отметим, что возникновение эффекта Зенона наблюдалось экспериментально в похожей системе (Itano, Heinzen, Bollinger, Wineland, 1990).

3.6. Квантовое броуновское движение

В предыдущих разделах мы в основном занимались исследованием основных уравнений, которые возникают в квантовом оптическом пределе. В этом пределе приближение вращающейся волны позволяет получить марковские уравнения для матрицы плотности, которые определяют квантовую динамическую полугруппу. Физическое условие, лежащее в основе приближения вращающейся волны, состоит в том, что систематическая эволюция системы происходит быстро, что означает, что за типичное время релаксации когерентная динамика проходит через множество циклов. В некоторых физических приложениях, включающих сильное взаимодействие системы с окружением и низкие температуры, это условие нарушается. В отличие от типичной для квантовой оптики ситуации, может оказаться, что систематическая динамика приведенной системы медленна по сравнению с корреляционным временем окружения. Это характерная ситуация для квантового броуновского движения. При таких обстоятельствах возникает другой тип основного уравнения, который требует приближенной схемы, отличающейся от оптического случая.

В этом разделе мы собираемся ввести и обсудить детали специфической модели система-резервуар, которая подходит для изучения различных аспектов квантового броуновского движения. Это знаменитая модель Кальдейры–Леггетта (Caldeira and Leggett, 1983), которая является прототипом для модели система-резервуар при описании явлений диссипации в физике твердого тела (Weiss, 1999). В высокотемпературном пределе модель приводит к квантовому основному уравнению, которое сильно отличается от полученного в квантовом оптическом случае, но по-прежнему марковской природы. Тем не менее для низких температур и/или сильных взаимодействий приведенная система проявляет немарковский характер и необходимо пересмотреть различные техники для того, чтобы описать динамику приведенной системы. Мы обсудим здесь применение точных гейзенберговских уравнений движения для взаимодействующей системы, флуктуаций

онно-диссипационную теорему и известный метод функционала влияния Фейнмана – Вернона (Feynman and Vernon, 1963). Дополнительные подробности немарковских процессов и систематическое разложение по малому параметру откладываются до части IV.

3.6.1. Модель Кальдейры – Леггетта

Модель описывает броуновскую частицу массы m с координатой x , которая движется в потенциале $V(x)$. Свободный гамильтониан H_S частицы, следовательно, берется в виде

$$H_S = \frac{1}{2m}p^2 + V(x), \quad (3.375)$$

где p — импульс частицы. Считается, что частица взаимодействует с термостатом, состоящим из большого числа гармонических осцилляторов с массами m_n и частотами ω_n , которые описываются гамильтонианом

$$H_B = \sum_n \hbar\omega_n \left(b_n^\dagger b_n + \frac{1}{2} \right) = \sum_n \left(\frac{1}{2m_n} p_n^2 + \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 x_n^2 \right). \quad (3.376)$$

Здесь b_n , b_n^\dagger обозначают операторы рождения и уничтожения мод термостата, тогда как x_n и p_n являются соответствующими координатами и канонически сопряженными импульсами.

В рассматриваемой модели координата x броуновской частицы считается линейно взаимодействующей с координатами x_n осцилляторов термостата. Соответствующий гамильтониан взаимодействия H_I берется в виде

$$H_I = -x \sum_n \kappa_n x_n \equiv -xB, \quad (3.377)$$

где оператор термостата

$$B = \sum_n \kappa_n x_n = \sum_n \kappa_n \sqrt{\frac{\hbar}{2m_n \omega_n}} (b_n + b_n^\dagger) \quad (3.378)$$

является взвешенной суммой по координатам x_n мод термостата с соответствующими постоянными взаимодействия κ_n . Этот тип взаимодействия, как мы увидим дальше, перенормирует потенциал $V(x)$ броуновской частицы. Для компенсации этой перенормировки удобно включить в гамильтониан взаимодействия следующий член вида

$$H_c = x^2 \sum_n \frac{\kappa_n^2}{2m_n \omega_n^2}. \quad (3.379)$$

Этот член, называемый *контрчленом*, действует только в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_S броуновской частицы.

Полный гамильтониан составной системы $S + B$ равен, следовательно,

$$H = H_S + H_B + H_I + H_c = \\ = \frac{1}{2m} p^2 + V_c(x) = \sum_n \left(\frac{1}{2m_n} p_n^2 + \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 x_n^2 \right) - x \sum_n \kappa_n x_n. \quad (3.380)$$

Во втором выражении мы включили контрчлен H_c в потенциал частицы,

$$V_c(x) = V(x) + x^2 \sum_n \frac{\kappa_n^2}{2m_n \omega_n^2}. \quad (3.381)$$

3.6.2. Высокотемпературное основное уравнение

Мы начнем наше обсуждение с рассмотрения простейшего случая, а именно движения броуновской частицы в пределе слабого взаимодействия и высокой температуры. Этот предел позволяет вывести марковское основное уравнение для приведенной матрицы плотности частицы, которое называется основным уравнением Кальдейра – Леггетта.

3.6.2.1. Вывод основного уравнения. Отправной точкой является приближение Борна – Маркова для приведенной матрицы плотности броуновской частицы, которое может быть записано в шредингеровском представлении следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S + H_c, \rho_S(t)] + \mathcal{K} \rho_S(t), \quad (3.382)$$

где мы ввели супероператор

$$\mathcal{K} \rho_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \operatorname{tr}_B [H_I, [H_I(-\tau), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]. \quad (3.383)$$

Это выражение может быть легко получено преобразованием (3.118) обратно в шредингеровское представление. Заметьте, что с контролем H_c нужно обращаться как с членом второго порядка по взаимодействию, тогда как H_I — первого порядка, так что (3.382) дает согласованное разложение уравнения движения до второго порядка по взаимодействию. Здесь и в дальнейшем операторы со временем в аргументе, такие как $H_I(t)$,

обозначают операторы в представлении взаимодействия по отношению к невозмущенному гамильтониану $H_0 = H_S + H_B$. Мы будем считать начальные условия факторизуемыми и предполагать, что термостат находится в состоянии теплового равновесия ρ_B при температуре $T = 1/k_B\beta$,

$$\rho_B = \frac{\exp(-\beta H_B)}{\text{tr}_B \exp(-\beta H_B)}. \quad (3.384)$$

Опять, средние по ρ_B обозначаются угловыми скобками.

Для обсуждения квантового броуновского движения удобно ввести следующие корреляционные функции²:

$$D(\tau) \equiv i\langle [B, B(-\tau)] \rangle = -i[B, B(-\tau)], \quad (3.385)$$

$$D_1(\tau) \equiv \langle \{B, B(-\tau)\} \rangle. \quad (3.386)$$

По причинам, которые станут понятны дальше, функции $D(\tau)$, $D_1(\tau)$ часто называются диссипационным и шумовым ядрами соответственно. Отметим, что среднее по термостату может быть опущено в выражении для диссипационного ядра $D(\tau)$, так как коммутатор $[B, B(-\tau)]$ является с-числом. Пользуясь спектральной плотностью, определенной как

$$J(\omega) = \sum_n \frac{\kappa_n^2}{2m_n\omega_n} \delta(\omega - \omega_n), \quad (3.387)$$

мы можем выразить корреляционные функции термостата

$$D(\tau) = 2\hbar \int_0^\infty d\omega J(\omega) \sin \omega\tau, \quad (3.388)$$

$$D_1(\tau) = 2\hbar \int_0^\infty d\omega J(\omega) \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T) \cos \omega\tau. \quad (3.389)$$

После небольшой перестановки супероператор \mathcal{K} может быть записан как

$$\mathcal{K}\rho_S(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \left(\frac{i}{2} D(\tau) [x, \{x(-\tau), \rho_S(t)\}] - \frac{1}{2} D_1(\tau) [x, [x(-\tau), \rho_S(t)]] \right). \quad (3.390)$$

²Мы используем обозначения, аналогичные обычным обозначениям для соответствующих корреляционных функций в КЭД, см. главу 12.

Свойства генератора \mathcal{K} сильно зависят от поведения диссипационного и шумового ядер, которые, в свою очередь, определяются спектральной плотностью $J(\omega)$. Для того чтобы получить настоящую необратимую динамику, вводят непрерывное распределение мод термостата и заменяют спектральную плотность на гладкую функцию частоты ω мод термостата. В феноменологических моделях часто вводят зависящую от частоты константу затухания γ и берут спектральную плотность пропорциональной частоте для малых ω ,

$$J(\omega) = \frac{2m\gamma}{\pi}\omega \quad \text{для } \omega \rightarrow 0. \quad (3.391)$$

Далее мы увидим, что этот вид спектральной плотности, который называется омической спектральной плотностью, приводит к частотно-независимому затуханию с частотой γ . С другой стороны, высокочастотные моды окружения приводят к перенормировке физических параметров потенциала частицы. Для учета этой перенормировки гамильтониана частицы вводят высокочастотное обрезание на частоте Ω в спектральной плотности. Для примера мы выберем омическую спектральную функцию с функцией обрезания Лоренца–Друде,

$$J(\omega) = \frac{2m\gamma}{\pi}\omega \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \omega^2}. \quad (3.392)$$

Для этого типа спектральной плотности корреляции термостата могут быть вычислены аналитически

$$D(\tau) = 2m\gamma\hbar\Omega^2 e^{-\Omega|\tau|} \operatorname{sign} \tau, \quad (3.393)$$

$$D_1(\tau) = 4m\gamma k_B T \Omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega e^{-\Omega|\tau|} - |\nu_n| e^{-|\nu_n| |\tau|}}{\Omega^2 - \nu_n^2}. \quad (3.394)$$

Здесь шумовое ядро $D_1(\tau)$ вычисляется с помощью формулы

$$\operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T) = \frac{2k_B T}{\hbar} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + \nu_n^2}, \quad (3.395)$$

где $\nu_n = 2\pi n k_B T / \hbar$ называются частотами Мацубары. Оставшиеся интегралы тогда определяются при помощи метода вычетов.

Мы видим, что корреляционные функции включают в себя корреляционные времена Ω^{-1} и $|\nu_n|^{-1}$ для $n \neq 0$. Самое большое корреляционное

время, следовательно, равно $\tau_B = \text{Max}\{\Omega^{-1}, \hbar/2\pi k_B T\}$ и условие применимости приближения Борна–Маркова

$$\hbar\gamma \ll \text{Min}\{\hbar\Omega, 2\pi k_B T\}. \quad (3.396)$$

Это условие соответствует условию $\tau_B \ll \tau_R$, которое уже использовалось при выводе предела слабого взаимодействия и оптических основных квантовых уравнений в разделах 3.3.1 и 3.4. Однако в квантовом оптическом случае мы применяем приближение вращающейся волны, которое требует того, чтобы систематическая эволюция приведенной системы была быстрой по сравнению с типичными временами релаксации, то есть $\tau_S \sim |\omega' - \omega|^{-1} \ll \tau_R$. Наоборот, здесь мы исследуем случай того, что систематическая эволюция происходит медленнее по сравнению с корреляционным временем термостата. Если мы обозначим через $\omega_0 = \tau_S^{-1}$ типичную частоту эволюции системы, то последнее условие принимает вид

$$\hbar\omega_0 \ll \text{Min}\{\hbar\Omega, 2\pi k_B T\}. \quad (3.397)$$

Фундаментальная разница между квантовой оптикой и квантовым броуновским движением приведена в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Разница временных масштабов в квантовом оптическом пределе и квантовом броуновском движении.

квантовый оптический предел	квантовое броуновское движение
$\tau_B \ll \tau_R$	$\tau_B \ll \tau_R$
$\tau_S \ll \tau_R$	$\tau_B \ll \tau_S$

Чтобы упростить выражение для генератора \mathcal{K} , мы учтем условие (3.397) и найдем $x(-\tau)$ в приближении свободной динамики,

$$x(-\tau) \equiv e^{-iH_S\tau/\hbar} xe^{iH_S\tau/\hbar} \approx x - \frac{i}{\hbar}[H_S, x]\tau = x - \frac{p}{m}\tau. \quad (3.398)$$

Подставляя в уравнение (3.390), мы видим, что генератор состоит теперь из четырех членов:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\rho_S &= \frac{i}{2\hbar^2} \int_0^\infty d\tau D(\tau)[x, \{x, \rho_S\}] - \frac{i}{2\hbar^2 m} \int_0^\infty d\tau \tau D(\tau)[x, \{p, \rho_S\}] - \\ &- \frac{1}{2\hbar^2} \int_0^\infty d\tau D_1(\tau)[x, [x, \rho_S]] + \frac{1}{2\hbar^2 m} \int_0^\infty d\tau \tau D_1(\tau)[x, [p, \rho_S]]. \end{aligned} \quad (3.399)$$

Первый член в правой части этого уравнения может быть определен с помощью соотношения

$$\int_0^\infty d\tau \sin \omega \tau = P \frac{1}{\omega}. \quad (3.400)$$

Следовательно, мы имеем

$$\int_0^\infty d\tau D(\tau) = 2\hbar \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} = 2\hbar \sum_n \frac{\kappa_n^2}{2m_n \omega_n^2}. \quad (3.401)$$

Поскольку, вдобавок, $[x, \{x, \rho_S\}] = [x^2, \rho_S]$, первый член в правой части уравнения (3.399) может быть преобразован к виду

$$\frac{i}{\hbar} \sum_n \frac{\kappa_n^2}{2m_n \omega_n^2} [x^2, \rho_S] = \frac{i}{\hbar} [H_c, \rho_S]. \quad (3.402)$$

Очевидно, этот член компенсирует вклад от контрчлена в гамильтоновой части уравнения (3.382). Таким образом, мы на самом деле видим, как утверждалось ранее, что взаимодействие с термостатом приводит к перенормировке гамильтониана свободной частицы H_S , которая в точности уничтожается контрчленом H_c .

Чтобы определить второй член в правой части (3.399), мы используем

$$\int_0^\infty d\tau \tau \sin \omega \tau = -\frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^\infty d\tau \cos \omega \tau = -\pi \delta'(\omega), \quad (3.403)$$

что дает

$$\int_0^\infty d\tau \tau D(\tau) = \hbar \pi J'(0) = 2m\gamma\hbar \quad (3.404)$$

и позволяет записать второй член как

$$-\frac{i\gamma}{\hbar} [x, \{p, \rho_S\}]. \quad (3.405)$$

Соответственно, мы находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\tau D_1(\tau) &= 2\pi\hbar \int_0^\infty d\omega J(\omega) \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T) \delta(\omega) = \\ &= \hbar\pi \lim_{\omega \rightarrow 0} J(\omega) \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T) = 4m\gamma k_B T. \end{aligned} \quad (3.406)$$

Третий член в (3.399) может быть преобразован к виду

$$-\frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2} [x, [x, \rho_S]]. \quad (3.407)$$

Четвертый член в (3.399), наконец, зависит от частоты отсечки Ω и может быть определен при помощи явного выражения (3.394) для омической спектральной плотности с функцией обрезания Лоренца – Друде. В пределе высоких температур, таких что $k_B T \gtrsim \hbar\Omega$, мы получаем

$$\int_0^\infty d\tau \tau D_1(\tau) \approx \frac{4m\gamma k_B T}{\Omega}. \quad (3.408)$$

Таким образом, четвертый член имеет вид

$$\frac{2\gamma k_B T}{\hbar^2 \Omega} [x, [p, \rho_S]]. \quad (3.409)$$

Чтобы определить важность этого вклада, мы сравним его с третьим членом (3.407). Поскольку импульс порядка $p = m\dot{x} \sim m\omega_0 x$, мы видим, что член (3.409) отличается от члена (3.407) на множитель ω_0/Ω , который, согласно предположению, мал. Следовательно, мы можем пренебречь четвертым членом в основном уравнении.

Суммируя наши результаты, мы, наконец, получаем основное уравнение Кальдейры – Леггетта (Caldeira and Leggett, 1983)

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] - \frac{i\gamma}{\hbar} [x, [p, \rho_S(t)]] - \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2} [x, [x, \rho_S(t)]]. \quad (3.410)$$

Первый член в правой части основного уравнения описывают свободную когерентную динамику системы. Второй член, который пропорционален скорости релаксации γ , является диссилиационным членом, который вытекает из вклада, включающего диссилиационное ядро $D(\tau)$. Последний член, который пропорционален температуре, описывает тепловые флуктуации и, как мы увидим дальше, имеет фундаментальное значение в теоретическом описании явления декогерентизации.

Возникает вопрос о том, можно ли привести генератор основного уравнения броуновского движения (3.410) к линдбладовскому виду. Ответ на этот вопрос отрицателен. Тем не менее он может быть записан в линдбладовском виде добавлением члена, который мал в высокотемпературном

пределе. Чтобы показать это, заметим, что (3.410) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}\rho_S = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho_S] - \frac{i\gamma}{2\hbar}[xp + px, \rho_S] + \mathcal{D}(\rho_S). \quad (3.411)$$

Коммутатор $[xp + px, \rho_S]$ дает гамильтонов вклад в генератор, в то время как $\mathcal{D}(\rho_S)$ имеет вид диссипатора в уравнении (3.63) с $F_1 = x$, $F_2 = p$ и матрицей коэффициентов

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 4m\gamma k_B T/\hbar^2 & -i\gamma/\hbar \\ i\gamma/\hbar & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.412)$$

Следовательно, генератор основного уравнения Кальдейры–Леггетта имеет первый стандартный вид (3.63) при условии, что матрица a_{ij} — положительная. Это условие, очевидно, нарушается для $\det a = -(\gamma/\hbar)^2 < 0$. Тем не менее мы можем ввести ненулевой коэффициент a_{22} , который соответствует дополнительному члену вида $-a_{22}[p, [p, \rho_S]]/2$ в генераторе основного уравнения. С таким членом условие положительности принимает вид

$$\det a = \frac{4m\gamma k_B T}{\hbar^2} a_{22} - (\gamma/\hbar)^2 \geq 0. \quad (3.413)$$

Применим минимально возмущающую модификацию и потребуем, чтобы $\det a = 0$, что дает $a_{22} = \gamma/4mk_B T$. Эта модификация сводится к добавлению члена

$$-\frac{\gamma}{8mk_B T}[p, [p, \rho_S]] \quad (3.414)$$

к правой части основного уравнения, что делает генератор положительным и позволяет записать основное уравнение в линдбладовском виде (3.66) с единственной скоростью релаксации γ и единственным линдбладовским оператором

$$A = \sqrt{\frac{4mk_B T}{\hbar^2}}x + i\sqrt{\frac{1}{4mk_B T}}p. \quad (3.415)$$

Член (3.414) мал по сравнению с членом в двойном x -коммутаторе, поскольку обеспечивается условие $\hbar/k_B T \ll \omega_0^{-1}$. Это показывает, что добавленный выше член действительно мал при условиях, которые использовались при выводе основного уравнения.

3.6.2.2. Приближенное стационарное решение. В координатном представлении основное уравнение (3.410) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S(x, x't) = \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) - \frac{i}{\hbar} (V(x) - V(x')) - \gamma(x - x') \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) - \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2} (x - x')^2 \right] \rho_S(x, x't). \quad (3.416)$$

Вводя новые переменные r и q как

$$x = r + \hbar q, \quad x' = r - \hbar q, \quad (3.417)$$

мы получаем уравнение для функции $f(r, q, t) = \rho_S(x, x', t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \left[\frac{i}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r \partial q} - \frac{i}{\hbar} (V(r + \hbar q) - V(r - \hbar q)) - 2\gamma q \frac{\partial}{\partial q} - 8\gamma m k_B T q^2 \right] f. \quad (3.418)$$

В приближении

$$V(r + \hbar q) - V(r - \hbar q) \approx 2V'(r)\hbar q \quad (3.419)$$

стационарное решение может быть записано как

$$f(r, q) = N \exp \left[-\frac{V(r)}{k_B T} - 2mk_B T q^2 \right], \quad (3.420)$$

так что приближенное стационарное решение основного уравнения (3.410) есть

$$\rho_S(x, x') = N \exp \left[-\frac{V((x + x')/2)}{k_B T} - \frac{mk_B T (x - x')^2}{2\hbar^2} \right], \quad (3.421)$$

с нормировочным множителем

$$N^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left[-\frac{V(x)}{k_B T} \right]. \quad (3.422)$$

Мы видим, что главная диагональ матрицы плотности в координатном пространстве представляет равновесное распределение пропорционально $\exp[-V(x)/k_B T]$ в соответствии с результатом статистической механики. Недиагональные элементы экспоненциально затухают на расстоянии $|x - x'|$ от диагонали, где существенный масштаб длины задается тепловой длиной $\lambda_{th} = \hbar / \sqrt{2mk_B T}$. Раскладывая левую часть (3.419) до

второго порядка, мы, таким образом, видим, что (3.419) является хорошим приближением до тех пор, пока тепловая длина мала по сравнению с $\sqrt{24|V'|/|V'''|}$.

Заметим также, что (3.419) становится равенством для квадратичного потенциала $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$, в случае которого стационарная плотность представляется гауссовой функцией

$$\rho_S(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_x^2} \left(\frac{x+x'}{2} \right)^2 - \frac{\sigma_p^2}{2\hbar^2}(x-x')^2 \right], \quad (3.423)$$

с соответствующими выражениями для дисперсий координаты и импульса

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m\omega_0^2}, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle = m k_B T. \quad (3.424)$$

Произведение неопределенностей координаты и импульса, следовательно, равно

$$\sigma_x \cdot \sigma_p = \frac{k_B T}{\omega_0} \gg \frac{\hbar}{2}. \quad (3.425)$$

Таким образом, в высокотемпературном приближении произведение неопределенностей велико по сравнению с минимально возможным значением, допускаемым соотношением неопределенностей.

3.6.2.3. Уравнение движения для средних значений и дисперсий.

С помощью основного уравнения (3.410) легко получить следующие уравнения для первого и второго моментов координаты и импульса броуновской частицы

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle, \quad (3.426)$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = -\langle V'(x) \rangle - 2\gamma \langle p \rangle, \quad (3.427)$$

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{1}{m} \langle px + xp \rangle, \quad (3.428)$$

$$\frac{d}{dt} \langle px + xp \rangle = \frac{2}{m} \langle p^2 \rangle - 2\langle xV'(x) \rangle - 2\gamma \langle px + xp \rangle, \quad (3.429)$$

$$\frac{d}{dt} \langle p^2 \rangle = -\langle pV'(x) + V'(x)p \rangle - 4\gamma \langle p^2 \rangle + 4m\gamma k_B T. \quad (3.430)$$

Это уравнения Эренфеста для первого и второго моментов координаты и импульса релаксирующей частицы. Они включают силу трения $-2\gamma p$. Соответствующие классические уравнения движения выражаются через стохастические дифференциальные уравнения

$$dx(t) = \frac{1}{m} p(t) dt, \quad (3.431)$$

$$dp(t) = -V'(x(t))dt - 2\gamma p(t)dt + \sqrt{4m\gamma k_B T} dW(t). \quad (3.432)$$

Решим уравнения движения (3.426)–(3.430) для свободной броуновской частицы, то есть для $V = 0$. Решения для первого момента дают

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle + \frac{1}{2m\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \langle p(0) \rangle, \quad (3.433)$$

$$\langle p(t) \rangle = e^{-2\gamma t} \langle p(0) \rangle. \quad (3.434)$$

Таким образом, начальный импульс экспоненциально релаксирует к нулю за время $1/2\gamma$, в то время как средняя координата смещается асимптотически на величину $\langle \dot{x}(0) \rangle / 2\gamma$. Определяя

$$\sigma_x^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2, \quad (3.435)$$

$$\sigma_p^2(t) = \langle p^2(t) \rangle - \langle p(t) \rangle^2, \quad (3.436)$$

$$\sigma_{px}(t) = \langle \{p(t), x(t)\} \rangle - 2\langle p(t) \rangle \langle x(t) \rangle, \quad (3.437)$$

мы можем представить решения для второго момента в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \sigma_x^2(0) + \left(\frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \right)^2 \frac{\sigma_p^2(0)}{m^2} + \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2m\gamma} \sigma_{px}(0) + \\ &+ \frac{k_B T}{m\gamma^2} \left[\gamma t - (1 - e^{-2\gamma t}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-4\gamma t}) \right], \end{aligned} \quad (3.438)$$

$$\sigma_p^2(t) = e^{-4\gamma t} \sigma_p^2(0) + m k_B T (1 - e^{-4\gamma t}), \quad (3.439)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{px}(t) &= e^{-2\gamma t} \sigma_{px}^2(0) + \frac{1}{m\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) e^{-2\gamma t} \sigma_p^2(0) + \\ &+ \frac{k_B T}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t})^2. \end{aligned} \quad (3.440)$$

В пределе больших времен ($\gamma t \gg 1$) мы, следовательно, получаем асимптотические выражения

$$\sigma_x^2 \rightarrow \frac{k_B T}{m\gamma} t, \quad \sigma_p^2 \rightarrow m k_B T, \quad \sigma_{px} \rightarrow \frac{k_B T}{\gamma}. \quad (3.441)$$

Очевидно, процесс не становится стационарным в пределе больших времен. Неопределенность импульса стремится к значению, которое равно значению в тепловом равновесии (см. (3.424)). Неопределенность координаты, тем не менее, увеличивается как квадратный корень из времени, точно так же как в классическом броуновском движении.

Для чисто гауссова (минимальная неопределенность) исходного состояния мы имеем $\sigma_p^2(0) = \hbar^2/4\sigma_x^2(0)$ и $\sigma_{px}(0) = 0$, что приводит к

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \sigma_x^2(0) + \frac{\hbar^2}{4m^2\sigma_x^2(0)} \left(\frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \right)^2 + \\ &+ \frac{k_B T}{m\gamma^2} \left[\gamma t - (1 - e^{-2\gamma t}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-4\gamma t}) \right] \approx \\ &\approx \sigma_x^2(0) + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma_x^2(0)} + \frac{4k_B T}{3m\gamma^2} (\gamma t)^3, \end{aligned} \quad (3.442)$$

где второе соотношение выполняется при $\gamma t \ll 1$. Второй член в последней формуле описывает расплывание гауссова волнового пакета в соответствии с уравнением Шредингера для свободного движения. При малых временах влияние окружения приводит к дополнительному вкладу в расплывание, который пропорционален третьей степени t .

3.6.3. Точные гейзенберговские уравнения движения

Для ряда приложений полезно не переходить к приближенному основному уравнению для приведенной матрицы плотности, а работать вместо этого напрямую с гейзенберговскими уравнениями движения системы. Поскольку в модели Кальдейры–Леггетта термостат является набором гармонических осцилляторов и поскольку взаимодействие с приведенной системой линейно, можно полностью исключить динамику переменных термостата из уравнений Гейзенберга для переменных, касающихся приведенной системы. Это будет сделано в настоящем параграфе. Применение полученных в результате гейзенберговских уравнений движения будет проиллюстрировано с помощью нескольких примеров свободного броуновского движения и посредством флукутационно-диссипационной теоремы.

3.6.3.1. Вывод гейзенберговских уравнений. Полная модель Кальдейры–Леггетта приводит к следующим точным гейзенберговским уравнени-

ниям движения для броуновской частицы и осцилляторов окружения:

$$\dot{x}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, x(t)] = \frac{1}{m}p(t), \quad (3.443)$$

$$\dot{x}_n(t) = \frac{i}{\hbar}[H, x_n(t)] = \frac{1}{m_n}p_n(t), \quad (3.444)$$

$$\dot{p}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, p(t)] = -V'_c(x(t)) + \sum_n \kappa_n x_n(t), \quad (3.445)$$

$$\dot{p}_n(t) = \frac{i}{\hbar}[H, p_n(t)] = -m_n \omega_n^2 x_n(t) + \kappa_n x(t). \quad (3.446)$$

Соответствующим уравнением для координаты броуновской частицы является, следовательно,

$$m\ddot{x}(t) + V'_c(x(t)) - \sum_n \kappa_n x_n(t) = 0, \quad (3.447)$$

в то время как уравнения для координат осцилляторов термостата принимают вид

$$m_n \ddot{x}_n(t) + m_n \omega_n^2 x_n(t) - \kappa_n x(t) = 0. \quad (3.448)$$

Последнее уравнение показывает, что n -й осциллятор термостата возбуждается силой $\kappa_n x(t)$, которая линейно зависит от координаты броуновской частицы. Для того чтобы получить замкнутое уравнение движения для $x(t)$, решают уравнение (3.448) относительно $x(t)$ и начальных условий для мод термостата и подставляют результат в уравнение (3.447). Для этого удобно выразить координаты осцилляторов термостата в терминах операторов рождения и уничтожения b_n^\dagger, b_n как

$$x_n(0) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_n \omega_n}} (b_n + b_n^\dagger), \quad p_n(0) = -i \sqrt{\frac{m_n \hbar \omega_n}{2}} (b_n - b_n^\dagger). \quad (3.449)$$

Решение уравнения (3.448) тогда есть

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_n \omega_n}} (e^{-i\omega_n t} b_n + e^{i\omega_n t} b_n^\dagger) + \frac{\kappa_n}{m_n \omega_n} \int_0^t ds \sin[\omega_n(t-s)] x(s). \quad (3.450)$$

Подстановка в уравнение (3.447) дает

$$m\ddot{x}(t) + V'_c(x(t)) - \sum_n \frac{\kappa_n^2}{m_n \omega_n} \int_0^t ds \sin[\omega_n(t-s)] x(s) = B(t), \quad (3.451)$$

где, как ранее говорилось, оператор $B(t)$, который возникает в правой части, является оператором в представлении взаимодействия,

$$B(t) = \sum_n \kappa_n \sqrt{\frac{\hbar}{2m_n\omega_n}} (e^{-i\omega_n t} b_n + e^{i\omega_n t} b_n^\dagger), \quad (3.452)$$

соответствующим шредингеровскому оператору $B = \sum_n \kappa_n x_n(0)$. С помощью диссипационного ядра мы можем записать уравнение движения для координаты броуновской частицы как

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{m} V'_c(x(t)) - \frac{1}{\hbar m} \int_0^t ds D(t-s)x(s) = \frac{1}{m} B(t). \quad (3.453)$$

В теории квантового броуновского движения полезно выразить диссипационное ядро в терминах другой величины, которая называется демпфирующим ядром

$$\gamma(t-s) = \frac{2}{m} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \cos[\omega(t-s)]. \quad (3.454)$$

Введенное ядро удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \gamma(t-s) = -\frac{1}{\hbar m} D(t-s) \quad (3.455)$$

и

$$\gamma(0) = \frac{2}{m} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} = \sum_n \frac{\kappa_n^2}{mm_n\omega_n^2}. \quad (3.456)$$

При помощи демпфирующего ядра мы можем записать диссипативный член уравнения (3.453) в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\hbar m} \int_0^t ds D(t-s)x(s) &= \int_0^t ds \frac{d}{dt} \gamma(t-s)x(s) = \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t ds \gamma(t-s)x(s) - \gamma(0)x(t). \end{aligned} \quad (3.457)$$

С учетом уравнения (3.456) последний член $-\gamma(0)x(t)$, как видно, уничтожает вклад от контрчлена, содержащегося в потенциале $V_c(x)$. Таким образом, мы получаем, наконец, следующее точное гейзенберговское уравнение движения

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{m}V'(x(t)) + \frac{d}{dt} \int_0^t ds \gamma(t-s)x(s) = \frac{1}{m}B(t). \quad (3.458)$$

Уравнение (3.458) — искомое уравнение движения для координаты броуновской частицы. Его можно рассматривать как квантовый аналог классического стохастического дифференциального уравнения, включающего демпфирующее ядро $\gamma(t-s)$ и стохастическую силу $B(t)$, чьи статистические свойства зависят от начального распределения при $t=0$. В случае окружения с омической спектральной плотностью с бесконечной отсечкой, $\Omega \rightarrow \infty$, мы получаем демпфирующее ядро (см. (3.392) и (3.454))

$$\gamma(t) = 4\gamma\delta(t), \quad (3.459)$$

так что гейзенберговские уравнения движения принимают вид

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m}p(t), \quad (3.460)$$

$$\dot{p}(t) = -V'(x(t)) - 2m\gamma\dot{x}(t) + B(t). \quad (3.461)$$

Как и в классических стохастических дифференциальных уравнениях (3.431) и (3.432), сила трения равна $-2m\gamma\dot{x}$.

Статистика вынуждающего члена $B(t)$ в уравнении (3.458) описывается квантовой корреляционной функцией $\langle\{B(t), B(t')\}\rangle$. Обратим внимание, что угловые скобки обозначают здесь среднее по начальному распределению $\rho(0)$ полной системы, так как мы работаем в гейзенберговском представлении. Если мы воспользуемся некоррелированным начальным состоянием в виде $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B$, то эта корреляционная функция будет равна шумовому ядру $D_1(t-t')$, введенному в уравнении (3.386). Для омической спектральной плотности она равна

$$D_1(t-t') = \langle\{B(t), B(t')\}\rangle = \frac{4m\gamma\hbar}{\pi} \int_0^\Omega d\omega \omega \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T) \cos[\omega(t-t')]. \quad (3.462)$$

В пределе высоких температур можно допустить, что $2k_B T \gg \hbar\omega$ для всех значащих частот ω , что дает

$$\frac{1}{2}\langle\{B(t), B(t')\}\rangle \approx \frac{2m\gamma\hbar}{\pi} \frac{2k_B T}{\hbar} \int_0^\infty d\omega \cos[\omega(t-t')] = 4m\gamma k_B T \delta(t-t'). \quad (3.463)$$

Отсюда видно, что \hbar выпадает из корреляционной функции, и что мы получаем в точности корреляционную функцию шумового члена в классических стохастических уравнениях (3.431) и (3.432).

3.6.3.2. Квадратичные потенциалы.

Для квадратичного потенциала

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \quad (3.464)$$

гейзенберговское уравнение (3.458) принимает вид

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \frac{d}{dt} \int_0^t ds \gamma(t-s) x(s) = \frac{1}{m} B(t). \quad (3.465)$$

Для того чтобы решить это уравнение, мы введем фундаментальные решения $G_1(t)$ и $G_2(t)$ однородной части уравнения (3.465), которые получаются приравниванием правой части к нулю. Эти решения определяются через начальные условия

$$G_1(0) = 1, \quad \dot{G}_1(0) = 0, \quad (3.466)$$

$$G_2(0) = 0, \quad \dot{G}_2(0) = 1. \quad (3.467)$$

Введем преобразование Лапласа

$$\hat{f}(z) = \int_0^\infty dt e^{-zt} f(t). \quad (3.468)$$

Преобразования Лапласа фундаментальных решений можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{G}_1(z) &= \frac{z}{z^2 + \omega_0^2 + z\hat{\gamma}(z)}, \\ \hat{G}_2(z) &= \frac{1}{z^2 + \omega_0^2 + z\hat{\gamma}(z)}, \end{aligned} \quad (3.469)$$

где $\hat{\gamma}(z)$ является лапласовским преобразованием демпфирующего ядра.

В терминах фундаментальных решений можно записать общее решение гейзенберговского уравнения (3.465) как

$$x(t) = G_1(t)x(0) + G_2(t)\dot{x}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t ds G_2(t-s)B(s). \quad (3.470)$$

С помощью этого решения все искомые средние значения, дисперсии и корреляционные функции броуновской частицы могут быть выражены в терминах средних по начальному распределению $\rho(0)$ всей системы.

3.6.3.3. Свободное броуновское движение. В качестве примера мы изучим свободное броуновское движение, которое задается условием $V = 0$, для омической спектральной плотности. Для бесконечной частоты отсечки фундаментальные решения принимают вид

$$G_1(t) = 1, \quad G_2(t) = \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}), \quad (3.471)$$

что дает

$$x(t) = x(0) + \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma}\dot{x}(0) + \int_0^t ds \frac{1 - e^{-2\gamma(t-s)}}{2m\gamma} B(s), \quad (3.472)$$

$$p(t) = e^{-2\gamma t}p(0) + \int_0^t ds e^{-2\gamma(t-s)} B(s). \quad (3.473)$$

Рассмотрим факторизуемое начальное состояние $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B$. Начальные координаты броуновской частицы и осцилляторов термостата являются тогда некоррелированными, и средние вида $\langle x(0)B(s) \rangle$ и $\langle p(0)B(s) \rangle$ стремятся к нулю. С помощью (3.473) среднее значение кинетической энергии броуновской частицы, например, вычисляется как

$$E(t) \equiv \frac{1}{2m} \langle p^2(t) \rangle = \quad (3.474)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2m} \langle p^2(0) \rangle e^{-4\gamma t} + \frac{1}{4m} \int_0^t ds \int_0^t ds' e^{-2\gamma(2t-s-s')} D_1(s-s') = \\ &= \frac{1}{2m} \langle p^2(0) \rangle e^{-4\gamma t} + \frac{\gamma\hbar}{\pi} \int_0^\Omega d\omega \omega \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T) \frac{|e^{i\omega t} - e^{-2\gamma t}|^2}{\omega^2 + (2\gamma)^2}, \end{aligned}$$

где мы использовали выражение (3.462) для шумового ядра. Если мы перейдем к пределу $\gamma t \rightarrow \infty$, то получим, что средняя кинетическая энергия стремится к значению

$$E(\infty) = \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^{\Omega} d\omega \frac{\hbar\omega \left(N(\omega) + \frac{1}{2} \right)}{\omega^2 + (2\gamma)^2} \equiv E_{th} + E_{vac}. \quad (3.475)$$

Это уравнение представляет собой спектральное представление средней кинетической энергии броуновской частицы: каждая компонента данной частоты равна средней энергии осцилляторов окружения на этой частоте, помноженной на спектральную плотность типа лоренциана.

Тепловой вклад E_{th} кинетической энергии равен интегралу, который сходится в пределе бесконечной частоты отсечки,

$$E_{th} = \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\hbar\omega N(\omega)}{\omega^2 + (2\gamma)^2}. \quad (3.476)$$

В пределе высоких температур $k_B T \gg \hbar\gamma$ это выражение приводит к хорошо известному результату классической статистической механики, $E_{th} \approx \frac{1}{2}k_B T$. С другой стороны, вакуумный вклад E_{vac} логарифмически расходится при бесконечной частоте отсечки,

$$E_{vac} = \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^{\Omega} d\omega \frac{\hbar\omega/2}{\omega^2 + (2\gamma)^2} = \frac{\gamma\hbar}{2\pi} \ln \left[1 + \left(\frac{\Omega}{2\gamma} \right)^2 \right]. \quad (3.477)$$

Взаимодействие броуновской частицы с вакуумными флуктуациями высокочастотных мод окружения, таким образом, дает логарифмически расходящийся вклад в среднюю кинетическую энергию.

В качестве следующего примера мы определим средний квадрат смещения

$$d^2(t, t') = \langle [x(t) - x(t')]^2 \rangle \quad (3.478)$$

частицы, который является важной величиной в теории броуновского движения. Используя уравнения (3.472) и (3.462), получаем

$$\begin{aligned} d^2(t, t') &= \frac{1}{4m^2\gamma^2} (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma t'})^2 \langle p^2(0) \rangle + \\ &+ \frac{2\gamma\hbar}{m\pi} \int_0^{\Omega} d\omega \frac{\omega \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T)}{\omega^2 + (2\gamma)^2} \left| \frac{e^{i\omega t} - e^{i\omega t'}}{i\omega} + \frac{e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma t'}}{2\gamma} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.479)$$

Второй член с квадратом модуля приводит к интегралу, который расходится в пределе бесконечной частоты отсечки. Действительно, зависящий от частоты отсечки вклад в средний квадрат смещения равен

$$d^2(t, t')|_{\text{singular}} = \frac{1}{4\gamma^2} \left(e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma t'} \right)^2 \frac{2E_{vac}}{m}. \quad (3.480)$$

Отсюда видно, что ультрафиолетовая расходимость вакуумной части среднеквадратичной скорости $2E_{vac}/m$ приводит к соответствующему расходящемуся вкладу среднеквадратичного смещения: броуновская частица может поглотить произвольное количество энергии от высокочастотных мод окружения и может проходить произвольное расстояние за конечный временной интервал.

Это сингулярное поведение, известное как «первоначальная встряска», является, очевидно, результатом искусственного допущения о некоррелированном начальном состоянии. Действительно, если мы устремим времена t и t' к бесконечности, зафиксировав их разницу $\tau \equiv t - t'$, все промежуточные члены устремятся к нулю и средний квадрат смещения станет функцией τ , которая задается интегралом без ультрафиолетовой расходимости

$$d^2(\tau) = \frac{2\gamma\hbar}{m\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T)}{\omega^2 + (2\gamma)^2} \frac{4 \sin^2(\omega\tau/2)}{\omega^2}. \quad (3.481)$$

Для любой конечной температуры мы можем заменить второй сомножитель в подинтегральной функции на $2\pi|\tau|\delta(\omega)$, что приводит к асимптотическому выражению

$$d^2(\tau) \approx \frac{k_B T}{m\gamma} |\tau|. \quad (3.482)$$

Эта формула описывает хорошо известный режим классической диффузии, который действителен для $\gamma|\tau| \gg 1$ и $|\tau| \gg \hbar/k_B T$. Тот же самый результат справедлив и для классической броуновской частицы. С другой стороны, для нулевой температуры член $\omega \operatorname{cth}(\hbar\omega/k_B T)$ в подинтегральной функции должен быть заменен на ω , и получается асимптотическое выражение

$$d^2(\tau) = \frac{8\gamma\hbar}{m\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{\omega(\omega^2 + (2\gamma)^2)} \approx \frac{\hbar}{m\pi\gamma} \ln(\gamma|\tau|), \quad (3.483)$$

которое справедливо для $\gamma|\tau| \gg 1$. Мы видим сильное субдиффузионное поведение частицы в квантовом режиме. Средний квадрат смещения только немного возрастает как логарифм от времени, причем характерный масштаб длины для квантовой диффузии равен $\sqrt{\hbar/m\pi\gamma}$.

3.6.3.4. Функция отклика, равновесная корреляционная функция и флюктуационно-диссипационная теорема. Для того чтобы определить равновесные флюктуации полной системы, полезно привлечь флюктуационно-диссипационную теорему (ФДТ). Совместно с точными решениями гейзенберговских уравнений движения ФДТ позволяет определить все равновесные корреляции броуновской частицы. Чтобы сформулировать ФДТ, мы введем симметризованную автокорреляционную функцию некоторого оператора $z(t)$ полной системы в гейзенберговском представлении,

$$S(\tau) = \frac{1}{2} \langle \{z(t + \tau), z(t)\} \rangle = \frac{1}{2} \langle \{z(\tau), z(0)\} \rangle. \quad (3.484)$$

Для простоты будем считать, что $\langle z(t) \rangle = 0$ и $z^\dagger(t) = z(t)$. Обратим внимание, что угловые скобки обозначают здесь среднее по равновесному распределению полной системы, равное

$$\rho = \frac{\exp(-\beta H)}{\text{tr} \exp(-\beta H)}, \quad (3.485)$$

где H является гамильтонианом составной системы $S + B$. В силу однородности времени, автокорреляционная функция зависит только от τ и удовлетворяет условию $S^*(\tau) = S(\tau) = S(-\tau)$. Спектр равновесных флюктуаций определяется преобразованием Фурье автокорреляционной функции,

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \cos \omega \tau S(\tau). \quad (3.486)$$

Отметим, что спектр обладает свойством $\tilde{S}^*(\omega) = \tilde{S}(\omega) = \tilde{S}(-\omega)$.

Функция отклика переменной $z(t)$ определяется как

$$\chi(\tau) = \frac{i}{\hbar} \theta(\tau) \langle [z(\tau), z(0)] \rangle. \quad (3.487)$$

Она описывает линейный отклик системы на внешнюю силу $F(t)$, которая приложена при $t > 0$ и представляется переменным во времени возмущением вида $V(t) = -zF(t)$ в гамильтониане полной системы. Теория возмущений первого порядка дает тогда линейный отклик системы

$$\langle \delta z(t) \rangle = \int_0^{\infty} ds \chi(t-s) F(s), \quad (3.488)$$

где $\delta z(t) \equiv z_V(t) - z(t)$ и $z_V(t)$ обозначают гейзенберговские операторы возмущенного гамильтониана $H + V(t)$. Среднее изменение первого порядка переменной $z(t)$ равно, следовательно, линейному интегральному преобразованию приложенной силы, где ядро интеграла представляет собой функцию отклика. Отметим, что линейный отклик в момент времени t зависит только от значений силы в моменты времени, предшествующие t , что показывает причинный характер отклика системы. Фурье-образ функции отклика может быть записан как

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \chi(\tau) = \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \chi(\tau) \equiv \tilde{\chi}'(\omega) + i\tilde{\chi}''(\omega), \quad (3.489)$$

где мы разделили $\tilde{\chi}(\omega)$ на действительную и мнимую части.

Флуктуационно-диссипационная теорема представляет собой соотношение между линейным откликом системы на внешнюю силу и флуктуациями в равновесии. На языке частот это соотношение можно представить в виде (см., например, Landau, Lifshitz, 1958)

$$\tilde{S}(\omega) = \hbar \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T) \tilde{\chi}''(\omega). \quad (3.490)$$

Представленный результат выражает спектр равновесных флуктуаций в терминах мнимой части Фурье-образа функции отклика.

Флуктуационно-диссипационная теорема выполняется для произвольной системы в тепловом равновесии и для произвольной наблюдаемой $z(t)$ в гейзенберговском представлении. Применим теперь теорему к координате $x(t)$ броуновской частицы в гармоническом потенциале. Поскольку коммутатор $[x(\tau), x(0)]$ является с-числом, мы немедленно можем определить функцию отклика при помощи точного решения (3.470) гейзенберговского уравнения движения (3.465),

$$\chi(\tau) = \frac{i}{\hbar} \theta(\tau) [x(\tau), x(0)] = \frac{i}{\hbar} \theta(\tau) G_2(\tau) [\dot{x}(0), x(0)] = \theta(\tau) \frac{1}{m} G_2(\tau). \quad (3.491)$$

Это соотношение может также быть получено напрямую из уравнения (3.470). Действительно, добавка возмущения $-xF(t)$ к полному гамильтониану системы сводится к замене $B(t)$ на $B(t) + F(t)$ в уравнении движения (3.465). Эта замена дает дополнительный член $\int_0^t ds G_2(t-s)F(s)/m$ в правой части (3.470), который показывает, что функция

отклика действительно связана с общим решением $G_2(\tau)$ через уравнение (3.491).

Выражая Фурье-образ функции отклика в терминах его преобразования Лапласа, мы, таким образом, получаем

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G_2(\tau) = \frac{1}{m} \hat{G}_2(-i\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\hat{\gamma}(-i\omega)}. \quad (3.492)$$

Мнимая часть Фурье-образа функции отклика равна

$$\tilde{\chi}''(\omega) = \frac{1}{m} \frac{\omega \Re[\hat{\gamma}(-i\omega)]}{(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega \Im[\hat{\gamma}(-i\omega)])^2 + \omega^2 (\Re[\hat{\gamma}(-i\omega)])^2}, \quad (3.493)$$

и ФДТ (3.490) немедленно приводит к следующему выражению для автокорреляционной функции координаты броуновской частицы

$$S(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hbar \coth(\hbar\omega/2k_B T) \tilde{\chi}''(\omega) \cos \omega\tau. \quad (3.494)$$

При помощи уравнений (3.494) и (3.493) можно определить точные равновесные корреляции в терминах преобразования Лапласа $\hat{\gamma}(z)$ демпфирующего ядра. Например, по определению автокорреляционной функции мы имеем

$$\langle x^2 \rangle = S(0), \quad (3.495)$$

$$\langle px + xp \rangle = 2m \dot{S}(0) = 0, \quad (3.496)$$

$$\langle p^2 \rangle = -m^2 \ddot{S}(0), \quad (3.497)$$

и, следовательно,

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hbar \coth(\hbar\omega/2k_B T) \tilde{\chi}''(\omega), \quad (3.498)$$

$$\langle p^2 \rangle = m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hbar \omega^2 \coth(\hbar\omega/2k_B T) \tilde{\chi}''(\omega). \quad (3.499)$$

В качестве примера рассмотрим омическую спектральную плотность (3.392) с функцией обрезания Лоренца–Друде. В соответствии с определением (3.454) это приводит к демпфирующему ядру

$$\gamma(\tau) = 2\gamma\Omega e^{-\Omega|\tau|}, \quad (3.500)$$

с преобразованием Лапласа

$$\hat{\gamma}(z) = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega + z}. \quad (3.501)$$

Следовательно, мы получаем

$$\Re[\hat{\gamma}(\varepsilon - i\omega)] = 2\gamma \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \rightarrow 2\gamma, \quad (3.502)$$

$$\Im[\hat{\gamma}(\varepsilon - i\omega)] = 2\gamma \frac{\omega}{\Omega} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \rightarrow 0, \quad (3.503)$$

где предел взят при бесконечной частоте отсечки $\Omega \rightarrow \infty$. Преобразование Лапласа демпфирующего ядра становится действительной функцией при бесконечной частоте отсечки, и спектр флюктуаций принимает вид

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{2\hbar\gamma}{m} \frac{\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T). \quad (3.504)$$

Для частот, таких что $k_B T \gg \hbar\omega$, постоянная Планка выпадает и спектр становится равен

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{4\gamma k_B T}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (3.505)$$

Последняя формула в точности соответствует классическому флюктуационному спектру затухающего гармонического осциллятора в тепловом равновесии.

3.6.4. Функционал влияния

В случае модели Кальдейры–Леггетта можно точно (без использования приближений) исключить переменные окружения. Это возможно, так

как предполагается, что окружение находится в тепловом состоянии с гауссовой характеристической функцией, а приведенная система линейно взаимодействует с операторами $B(t)$ термостата, чьи коммутаторы представляют собой с-числа. В этом подразделе мы собираемся сконструировать точное супероператорное представление для приведенной матрицы плотности и вывести из него соответствующее представление в интегралах по траекториям. Интегралы по траекториям включают в себя некоторый функционал, который называется функционалом влияния Фейнмана–Вернона, который точно представляет влияние термостата на приведенную систему.

3.6.4.1. Супероператор влияния. Для того чтобы получить точное представление для приведенной матрицы плотности, будем считать начальные условия факторизуемыми и предположим, что начальное состояние окружения является гауссовым (тепловым) состоянием. Отметим, что допущение о некоррелированном начальном состоянии сделано здесь только для упрощения; возможно провести вывод также и для коррелированных начальных состояний (см. Grabert, Schramm, Ingold, 1988).

Подходящей отправной точкой для вывода является следующее точное представление приведенной матрицы плотности $\rho_S(t_f)$ в момент времени t_f в терминах полной матрицы плотности $\rho(t_i)$ в некоторый начальный момент времени t_i

$$\rho_S(t_f) = \text{tr}_B \{ U(t_f, t_i) \rho(t_i) U^\dagger(t_f, t_i) \}. \quad (3.506)$$

Мы снова работаем в представлении взаимодействия, так что $U(t_f, t_i)$ является оператором эволюции во времени полной системы в представлении взаимодействия. Для исключения переменных термостата из этого выражения можно поступить следующим способом. Оператор временной эволюции в представлении взаимодействия включает упорядочение по времени как приведенной системы, так и переменных термостата. Для начала исключается упорядочение по времени переменных термостата, которое легко выполняется, если коммутатор переменных термостата является классическим. После этого остается найти простое среднее, взятое по состоянию термостата. На втором шаге это среднее определяется с помощью кумулянтного разложения, которое ограничено вторым порядком, так как состояние термостата — гауссово. Конечным результатом этой процедуры является выражение

$$\rho_S(t_f) = T_{\leftarrow} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \Phi[x_c, x_a] \right) \rho_S(t_i). \quad (3.507)$$

Подробности вычислений, приводящих к этому результату, будут даны в разделе 12.2 (см. (12.99)) в более общем контексте и поэтому здесь будут опущены. В уравнении (3.507) символ T_{\leftarrow} обозначает, как обычно, хронологическое упорядочение по времени в представлении взаимодействия. Фаза упорядоченной по времени экспоненты представляет собой супероператор, который равен

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar}\Phi[x_c, x_a] &= \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}_c(t) + \\ &+ \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \left\{ \frac{i}{2\hbar^2} D(t-t') x_c(t) x_a(t') - \frac{1}{2\hbar^2} D_1(t-t') x_c(t) x_c(t') \right\}. \end{aligned} \quad (3.508)$$

Первый член в правой части происходит из контрчлена H_c в гамильтониане полной системы и определяется в терминах супероператора в форме коммутатора

$$\mathcal{L}_c(t)\rho_S \equiv -\frac{i}{\hbar}[H_c(t), \rho_S] = -\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\gamma(0)[x^2(t), \rho_S]. \quad (3.509)$$

Второй член в правой части (3.508) включает в себя супероператор в форме коммутатора и антисимметрического ядра

$$x_c(t)\rho_S \equiv [x(t), \rho_S], \quad x_a(t)\rho_S \equiv \{x(t), \rho_S\}, \quad (3.510)$$

где все операторы, имеющие временной аргумент, являются операторами в представлении взаимодействия по отношению к свободному гамильтониану $H_0 = H_S + H_B$.

Фаза $\Phi[x_c, x_a]$ целиком относится к влиянию окружения на динамику приведенной системы и, таким образом, может быть названа фазовым функционалом влияния. Формально, $\Phi[x_c, x_a]$ является как супероператором, действующим на начальное состояние $\rho_S(t_i)$, так и билинейным функционалом, который включает в себя диссипационное ядро $D(t-t')$ и шумовое ядро $D_1(t-t')$. Отметим, что генератор второго порядка (3.390) может быть получен из уравнения (3.507) разложением экспоненты по фазе влияния до первого порядка и принятием во внимание того, что временные интегралы в уравнении (3.508) для фазы влияния уже упорядочены.

3.6.4.2. Представление в форме интегралов по траекториям. Уравнение (3.507) является основой для эквивалентного представления в форме

интегралов по траекториям приведенной матрицы плотности. Оно представляет собой операторную формулировку знаменитого функционала влияния Фейнмана–Вернона. Чтобы сконструировать представление в форме интегралов по траекториям, мы возвращаемся к шредингеровскому представлению и вводим так называемый пропагатор J через соотношение

$$\rho_S(x_f, x'_f, t_f) = \int dx_i \int dx'_i J(x_f, x'_f, t_f; x_i, x'_i, t_i) \rho_S(x_i, x'_i, t_i). \quad (3.511)$$

Пропагатор является просто функцией Грина для приведенной матрицы плотности в координатном представлении. В терминах супероператора влияния в уравнении (3.507) он выражается через соотношение

$$J(x_f, x'_f, t_f; x_i, x'_i, t_i) = \langle x_f t_f | \left(T_{\leftarrow} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \Phi[x_c, x_a] \right) |x_i t_i\rangle \langle x'_i t_i| \right) |x'_f t_f \rangle, \quad (3.512)$$

где $|xt\rangle$ является собственным состоянием оператора $x(t)$ в представлении взаимодействия, соответствующего собственному значению x , то есть

$$|xt\rangle = \exp(+iH_S(t - t_i)/\hbar)|x\rangle. \quad (3.513)$$

Отметим, что (3.512) приводит к следующим начальным и нормировочным условиям:

$$\begin{aligned} \lim_{t_f \rightarrow t_i} J(x_f, x'_f, t_f; x_i, x'_i, t_i) &= \langle x_f | x_i \rangle \langle x'_i | x'_f \rangle = \\ &= \delta(x_f - x_i) \delta(x'_f - x'_i), \end{aligned} \quad (3.514)$$

$$\int dx_f J(x_f, x'_f, t_f; x_i, x'_i, t_i) = \langle x'_i | x_i \rangle = \delta(x_i - x'_i). \quad (3.515)$$

Мы также видим, что для стремящегося к нулю взаимодействия между системой и окружением ($\Phi = 0$) пропагатор сводится к произведению функции Грина G_S для уравнения Шредингера с гамильтонианом H_S

$$\begin{aligned} J(x_f, x'_f, t_f; x_i, x'_i, t_i) &= \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \langle x'_i t_i | x'_f t_f \rangle = \\ &= G_S(x_f, t_f; x_i, t_i) G_S^*(x'_f, t_f; x'_i, t_i). \end{aligned} \quad (3.516)$$

Представление функционала влияния в форме интегралов по траекториям получается через запись G_S как интеграла по траекториям:

$$G_S(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f | \exp(-iH_S(t_f - t_i)/\hbar) | x_i \rangle = \int Dx \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0[x] \right), \quad (3.517)$$

где

$$S_0[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) \quad (3.518)$$

является классическим функционалом действия свободной броуновской частицы. Здесь интеграл берется по всем траекториям $x(t)$ с граничными условиями $x(t_i) = x_i$ и $x(t_f) = x_f$.

Теперь, если $T_{\leftarrow} \mathcal{O}[x(t)]$ является некоторым упорядоченным по времени произведением, соответствующий матричный элемент может быть получен из интеграла по траекториям следующим образом:

$$\langle x_f t_f | T_{\leftarrow} \mathcal{O}[x(t)] | x_i t_i \rangle = \int Dx \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0[x] \right) \mathcal{O}[x(t)]. \quad (3.519)$$

Другими словами, интеграл по траекториям автоматически выполняет упорядочение по времени, если оператор упорядоченного по времени произведения заменяется на соответствующее классическое выражение под интегралом. Похожим образом выражаются в виде двойных интегралов по траекториям матричные элементы супероператора в форме коммутатора и антисимметрического элемента $x_{c,a}(t)$

$$\begin{aligned} \langle x_f t_f | x_{a,c}(t) (|x_i t_i\rangle \langle x'_i t_i|) |x'_f t_f\rangle &= \\ &= \langle x_f t_f | x(t) |x_i t_i\rangle \langle x'_i t_i | x'_f t_f \rangle \pm \langle x_f t_f | x_i t_i\rangle \langle x'_i t_i | x(t) | x'_f t_f \rangle = \\ &= \int Dx \int Dx' \exp \left(\frac{i}{\hbar} (S_0[x] - S_0[x']) \right) (x(t) \pm x(t')). \end{aligned} \quad (3.520)$$

Таким образом, мы видим, что переход от супероператорного представления к представлению интегралов по траекториям может быть осуществлен заменами

$$x_a(t) \rightarrow x(t) + x'(t), \quad x_c(t) \rightarrow x(t) - x'(t). \quad (3.521)$$

Несложно понять, что это также верно в общем случае произвольного упорядоченного по времени произведения супероператоров $x_{c,a}(t)$. В результате мы приходим к выражению

$$J(x_f, x'_f, t_f; x_i, x'_i, t_i) = \int Dx \int Dx' \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{A}[x, x'] \right). \quad (3.522)$$

Это представление двойного интеграла по траекториям для пропагатора, которое является хорошо известной техникой функционала влияния Фейнмана–Вернона (Feynman and Vernon, 1963). Она включает интегрирование

по всем траекториям $x(t)$ и $x'(t)$, удовлетворяющим граничным условиям

$$x(t_i) = x_i, \quad x(t_f) = x_f, \quad x'(t_i) = x'_i, \quad x'(t_f) = x'_f. \quad (3.523)$$

Весовой множитель траекторий выражается через эффективный функционал действия

$$\mathcal{A}[x, x'] = S_0[x] - S_0[x'] + \Phi[x, x'], \quad (3.524)$$

где представление в интегралах по траекториям фазового функционала влияния $\Phi[x, x']$ получается из (3.508) при помощи замен (3.521),

$$\begin{aligned} \Phi[x, x'] = & - \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \gamma(0) [x^2(t) - x'^2(t)] + \\ & + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \frac{1}{2\hbar} D(t-t')[x(t) - x'(t)][x(t') + x'(t')] + \\ & + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \frac{i}{2\hbar} D_1(t-t')[x(t) - x'(t)][x(t') - x'(t')]. \end{aligned} \quad (3.525)$$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести новые переменные

$$q = x - x', \quad r = \frac{1}{2}(x + x') \quad (3.526)$$

и считать пропагатор J как функцию $(r_f, q_f, t_f; r_i, q_i, t_i)$. Соответствующее представление в интегралах по траекториям имеет вид

$$J(r_f, q_f, t_f; r_i, q_i, t_i) = \int Dr \int Dq \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{A}[r, q] \right), \quad (3.527)$$

то есть является двойным интегралом по всем траекториям $r(t)$, $q(t)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$r(t_i) = r_i, \quad r(t_f) = r_f, \quad q(t_i) = q_i, \quad q(t_f) = q_f. \quad (3.528)$$

Начальные условия и нормировка пропагатора имеют вид

$$\lim_{t_f \rightarrow t_i} J(r_f, q_f, t_f; r_i, q_i, t_i) = \delta(r_f - r_i)\delta(q_f - q_i), \quad (3.529)$$

$$\int dr_f J(r_f, q_f = 0, t_f; r_i, q_i, t_i) = \delta(q_i). \quad (3.530)$$

Эффективный функционал действия (3.524) выражается теперь в новых переменных как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[r, q] = & \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{r}\dot{q} - V(r + q/2) + V(r - q/2) - m\gamma(0)rq) + \\ & + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \left\{ \frac{1}{\hbar} D(t - t')q(t)r(t') + \frac{i}{2\hbar} D_1(t - t')q(t)q(t') \right\}. \end{aligned} \quad (3.531)$$

3.6.4.3. Классическое уравнение движения. Функционал действия (3.531) приводит к классическим уравнениям движения, которые получаются приравниванием первой вариации \mathcal{A} к нулю. Вариация по $q(t)$ дает уравнение движения для $r(t)$,

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) + \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial r} (V(r + q/2) + V(r - q/2)) + \frac{d}{dt} \int_{t_i}^t dt' \gamma(t - t')r(t') = \\ = \frac{i}{2m\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt' D_1(t - t')q(t'), \end{aligned} \quad (3.532)$$

тогда как вариация по $r(t)$ приводит к уравнению для $q(t)$,

$$\ddot{q}(t) + \frac{2}{m} \frac{\partial}{\partial q} (V(r + q/2) + V(r - q/2)) - \frac{d}{dt} \int_t^{t_f} dt' \gamma(t' - t)q(t') = 0. \quad (3.533)$$

Здесь мы выразили уравнения движения через демпфирующее ядро $\gamma(t - t')$ (см. (3.454)) и шумовое ядро $D_1(t - t')$. Заметим, что для $q = 0$ динамическое уравнение для траектории $r(t)$ принимает вид однородной части гейзенберговского уравнения движения (3.458).

3.6.4.4. Определение интеграла по траекториям для гармонических потенциалов. Для того чтобы проиллюстрировать технику интегралов по траекториям, рассмотрим гармонический потенциал

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2, \quad (3.534)$$

который приводит к классическому уравнению движения

$$\ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) + \frac{d}{dt} \int_{t_i}^t dt' \gamma(t-t') r(t') = \frac{i}{2m\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt' D_1(t-t') q(t'), \quad (3.535)$$

и

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) - \frac{d}{dt} \int_t^{t_f} dt' \gamma(t'-t) q(t') = 0. \quad (3.536)$$

Заметим, что уравнение (3.536) представляет обращенное уравнение однородной части уравнения (3.535), то есть если $r(t)$ является решением однородной части (3.535), тогда $q(t) \equiv r(t_f + t_i - t)$ является решением уравнения (3.536).

Поскольку функционал действия является квадратичным двойным интегралом (3.527), его можно определить точно вычислением действия по классическому решению с учетом гауссовых флуктуаций около классических траекторий. Пусть $r(t)$, $q(t)$ будут решениями классических уравнений движения (3.535) и (3.536), удовлетворяющих граничным условиям (3.528). Значение функционала действия (3.531) вдоль этого решения может быть записано как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[r, q] &= m(\dot{r}_f q_f - \dot{r}_i q_i) - \\ &- \int_{t_i}^{t_f} dt m q(t) \left(\ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) + \frac{d}{dt} \int_{t_i}^t dt' \gamma(t-t') r(t') \right) + \\ &+ \frac{i}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' D_1(t-t') q(t) q(t') = \\ &= m(\dot{r}_f q_f - \dot{r}_i q_i) - \frac{i}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' D_1(t-t') q(t) q(t'), \end{aligned} \quad (3.537)$$

где уравнение движения (3.535) было использовано на втором шаге.

Из-за неоднородного члена в правой части уравнения (3.535) $r(t)$ связана с $q(t)$ через шумовое ядро $D_1(t-t')$. В результате, решение $r(t)$, в общем случае, является комплексным. Мы представим $r(t)$ в виде действительной и мнимой частей

$$r(t) = r^{(1)}(t) + i r^{(2)}(t). \quad (3.538)$$

Действительная часть $r^{(1)}(t)$ является решением однородной части уравнения (3.535), тогда как мнимая часть — решением неоднородного уравнения

$$\ddot{r}^{(2)}(t) + \omega_0^2 r^{(2)}(t) + \frac{d}{dt} \int_{t_i}^t dt' \gamma(t-t') r^{(2)}(t') = \frac{1}{2m\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt' D_1(t-t') q(t'). \quad (3.539)$$

Теперь мы покажем полезное свойство: для того чтобы найти классическое действие, достаточно определить действительное решение $r^{(1)}(t)$ и подставить его в функционал действия так, что мы получим соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[r, q] &= \mathcal{A}[r^{(1)}, q] = \\ &= m \left(\dot{r}_f^{(1)} q_f - \dot{r}_i^{(1)} q_i \right) + \frac{i}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' D_1(t-t') q(t) q(t'). \end{aligned} \quad (3.540)$$

Чтобы доказать это утверждение, для начала, используем уравнение движения для мнимой части $r^{(2)}(t)$ и для $q(t)$, чтобы показать, что

$$\frac{i}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' D_1(t-t') q(t) q(t') = im \left(\dot{r}_f^{(2)} q_f - \dot{r}_i^{(2)} q_i \right). \quad (3.541)$$

Чтобы получить это уравнение, выполним двойное интегрирование по частям и используем условие $r_i^{(2)} = r_f^{(2)} = 0$, так как граничные условия для траекторий окажутся действительными. Комбинируя последнее уравнение с (3.537), немедленно получаем уравнение (3.540), которое доказывает утверждение.

Процедура определения пропагатора может быть описана следующим образом. В начале решаются однородные классические уравнения движения

$$\ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) + \frac{d}{dt} \int_{t_i}^t dt' \gamma(t-t') r(t') = 0, \quad (3.542)$$

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) - \frac{d}{dt} \int_t^{t_f} dt' \gamma(t-t') q(t') = 0 \quad (3.543)$$

с граничными условиями (3.528). Подставляя затем эти решения в функционал действия, получаем пропагатор

$$\begin{aligned} J(r_f, q_f, t_f; r_i, q_i, t_i) &= N(t_f, t_i) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}[r, q]\right) = \\ &= N(t_f, t_i) \exp\left(\frac{im}{\hbar}(\dot{r}_f q_f - \dot{r}_i q_i) + \Gamma(q_f, t_f; q_i, t_i)\right), \end{aligned} \quad (3.544)$$

где

$$\Gamma(q_f, t_f; q_i, t_i) = -\frac{1}{4\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' D_1(t - t') q(t) q(t'). \quad (3.545)$$

В уравнении (3.544) $N(t_f, t_i)$ является зависящим от времени нормировочным множителем. Пусть дальше для простоты $t_i = 0$. С помощью фундаментальных решений $G_1(t)$ и $G_2(t)$ (см. уравнения (3.466) и (3.467)) мы можем записать решения (3.542) и (3.543) как

$$r(t) = \left[G_1(t) - \frac{G_1(t_f)}{G_2(t_f)} G_2(t) \right] r_i + \frac{G_2(t)}{G_2(t_f)} r_f, \quad (3.546)$$

$$q(t) = \frac{G_2(t_f - t)}{G_2(t_f)} q_i + \left[G_1(t_f - t) - \frac{G_1(t_f)}{G_2(t_f)} G_2(t_f - t) \right] q_f. \quad (3.547)$$

Используя условие нормировки (3.530), находим нормировочный множитель

$$N(t_f, 0) = \frac{m}{2\pi\hbar G_2(t_f)}. \quad (3.548)$$

Полученные выше выражения полностью решают задачу определения пропагатора. Очевидно, пропагатор является гауссовой функцией, в показателе экспоненты которой стоит квадратичная форма координат (r_f, q_f, r_i, q_i) , которая определяется подстановкой (3.546) и (3.547) в (3.544). Отметим также, что нормировочный множитель напрямую связан с функцией отклика посредством $N(t_f, 0) = 1/2\pi\hbar\chi(t_f)$.

3.6.4.5. Решение основного уравнения Кальдейры – Леггетта. В качестве примера мы рассмотрим свободное броуновское движение ($\omega_0 = 0$)

для омического окружения. В пределе бесконечной частоты отсечки имеются простые выражения $G_1(t) \equiv 1$ и $G_2(t) = [1 - \exp(-2\gamma t)]/2\gamma$, которые дают уравнения

$$\dot{r}_i = \frac{1}{G_2(t_f)}(r_f - r_i), \quad \dot{r}_f = \frac{\dot{G}_2(t_f)}{G_2(t_f)}(r_f - r_i), \quad (3.549)$$

показывающие трансляционную инвариантность пропагатора. Следовательно, мы получаем

$$J(r_f, q_f, t_f; r_i, q_i, t_i) = \quad (3.550)$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar G_2(t_f)} \exp\left(\frac{im}{\hbar G_2(t_f)}(r_f - r_i)[\dot{G}_2(t_f)q_f - q_i] + \Gamma(q_f, t_f; q_i, 0)\right).$$

Выражение для пропагатора может быть использовано для получения общего решения основного уравнения Кальдейры–Леггетта (3.410). Для этого нам нужно только вычислить функцию $\Gamma(q_f, t_f; q_i, 0)$ в высокотемпературном пределе, который дается выражением

$$\Gamma(q_f, t_f; q_i, 0) \approx -\frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2} \int_0^{t_f} dt q^2(t). \quad (3.551)$$

Подстановка решения $q(t)$ (уравнение (3.547)) и вычисление интеграла по времени дает в результате

$$\begin{aligned} J(r_f, q_f, t_f; r_i, q_i, 0) &= \\ &= \frac{2m\gamma}{2\pi\hbar(1 - e^{-2\gamma t_f})} \exp\left(\frac{2im\gamma/\hbar}{1 - e^{-2\gamma t_f}}(r_f - r_i)(e^{-2\gamma t_f}q_f - q_i) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2mk_B T}{\hbar^2} \left\{ \frac{\gamma t_f - (1 - e^{-2\gamma t_f}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-4\gamma t_f})}{(1 - e^{-2\gamma t_f})^2} (q_f - q_i)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\gamma t_f - \frac{1}{2}(1 - e^{-2\gamma t_f})}{1 - e^{-2\gamma t_f}} 2q_f(q_f - q_i) + \gamma t_f q_f^2 \right\} \right). \quad (3.552) \end{aligned}$$

Это явное выражение для пропагатора основного уравнения Кальдейры–Леггетта для свободного броуновского движения. С помощью соотношений

$$\gamma t_f - \frac{1}{2}(1 - e^{-2\gamma t_f}) = (\gamma t_f)^2 + \mathcal{O}((\gamma t_f)^3), \quad (3.553)$$

$$\gamma t_f - (1 - e^{-2\gamma t_f}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-4\gamma t_f}) = \frac{4}{3}(\gamma t_f)^3 + \mathcal{O}((\gamma t_f)^4) \quad (3.554)$$

легко показать, что в пределе $\gamma t_f \rightarrow 0$ пропагатор стремится к выражению

$$J(r_f, q_f, t_f; r_i, q_i, 0) \rightarrow \frac{m}{2\pi\hbar t_f} \exp\left(\frac{im}{\hbar t_f}(r_f - r_i)(q_f - q_i)\right), \quad (3.555)$$

которое имеет вид функции Грина соответствующего уравнения фон Неймана для свободной шредингеровской частицы.

В заключение рассмотрим так называемый безотдаточный предел основного уравнения. Это предел тяжелой частицы, которая рассматривается на временах меньших по сравнению с временем релаксации. Он соответствует основному уравнению Кальдейры–Леггетта (3.410) без члена трения $-i\gamma[x, \{p, \rho_S\}]/\hbar$. Тогда мы принимаем $\Lambda = 2m\gamma k_B T/\hbar^2$ и переходим к пределу при $\gamma t_f \rightarrow 0$, сохраняя Λ неизменной. Используя уравнения (3.553) и (3.554), находим пропагатор

$$J(x_f, x'_f, t_f; x_i, x'_i, 0) = \frac{m}{2\pi\hbar t_f} \exp\left(\frac{im}{2\hbar t_f}\{(x_f - x_i)^2 - (x'_f - x'_i)^2\} - \frac{\Lambda t_f}{3}\{(x_f - x'_f)^2 + (x_i - x'_i)^2 + (x_f - x'_f)(x_i - x'_i)\}\right), \quad (3.556)$$

где мы снова воспользовались исходными координатами.

3.7. Нелинейные квантовые основные уравнения

В классической статистической механике динамика многочастичной системы зачастую может быть аппроксимирована в терминах нелинейного кинетического уравнения для зависящей от времени функции распределения $f(\vec{p}, \vec{x}, t)$ на одночастичном фазовом пространстве (Reichl, 1998). Наиболее известный пример такого кинетического уравнения — это уравнение Больцмана. Для соответствующего приближения квантово-механической многочастичной системы нужно заменить классическое распределение $f(\vec{p}, \vec{x}, t)$ на одночастичную матрицу $\rho(t)$. Тогда можно ожидать, что

последняя будет удовлетворять нелинейному основному уравнению, которое дает описание типа среднего поля для многочастичной системы. В этих рамках возможно также рассмотреть многочастичную систему, взаимодействующую с внешним резервуаром. Взаимодействие с внешним резервуаром может рассматриваться как на уровне приближения среднего поля, так и на уровне многочастичной системы. Ниже мы обсудим ряд примеров нелинейных основных уравнений, таких как квантовое уравнение Больцмана, временное уравнение Хартри и нелинейное уравнение Шредингера (Alicki, Messer, 1983).

Общая структура нелинейного квантового уравнения может быть постулирована следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}[\rho(t)]\rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (3.557)$$

Здесь $\mathcal{L}[\sigma]$ является супероператором, который имеет вид линдбладовского для каждой фиксированной матрицы σ . Следовательно, уравнение (3.557) является квантовым основным уравнением линдбладовского типа, генератор которого параметрически зависит от матрицы плотности. При определенных условиях уравнение (3.557) имеет единственное решение

$$\rho(t) = V_t(\rho_0), \quad t \geq 0, \quad (3.558)$$

где $\{V_t | t \geq 0\}$ является однопараметрическим семейством нелинейных отображений, удовлетворяющих свойству полугруппы

$$V_t(V_s(\rho)) = V_{t+s}(\rho), \quad V_0 = I. \quad (3.559)$$

Про уравнение (3.557) говорят, что оно *параметрического линдбладовского вида*.

3.7.1. Квантовое уравнение Больцмана

Дискретное квантовое уравнение Больцмана является примером нелинейного основного уравнения вида (3.557). Феноменологически это уравнение может быть получено по формальной аналогии с классическим уравнением Больцмана для одночастичной плотности $f(\vec{p}, \vec{x}, t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\vec{p}, \vec{x}, t) = -\{h, f(\vec{p}, \vec{x}, t)\} + C[f](\vec{p}, \vec{x}, t). \quad (3.560)$$

Здесь $h = \vec{p}^2/2m$ является гамильтонианом одной частицы с импульсом \vec{p} и массой m . Фигурные скобки обозначают скобки Пуассона, а $C[f] -$

больцмановский оператор столкновений (интеграл рассеяния), который является билинейным функционалом одночастичной плотности f .

Мы рассмотрим систему из N тождественных частиц. Внутренние степени свободы частиц описываются одночастичным гамильтонианом h с дискретным спектром. Частицы взаимодействуют посредством столкновений, во время которых они могут обмениваться внутренней энергией, тогда как полная энергия сохраняется. Подходящее основное уравнение аналогично классическому уравнению Больцмана (3.560) и дается выражением

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[h, \rho(t)] + \mathcal{D}(\rho(t)), \quad (3.561)$$

которое называется квантовым уравнением Больцмана. Диссипатор $\mathcal{D}(\rho)$, который заменяет интеграл столкновений классического уравнения Больцмана, дается, по определению, билинейным выражением

$$\mathcal{D}(\rho) = \text{tr}_2\{\mathcal{K}(\rho \otimes \rho)\}, \quad (3.562)$$

где \mathcal{K} является линдбладовским генератором, который действует в двухчастичном пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ следующим образом:

$$\mathcal{K}(R) = \sum_{\alpha} \left\{ T_{\alpha} R T_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} T_{\alpha}^{\dagger} T_{\alpha} R - \frac{1}{2} R T_{\alpha}^{\dagger} T_{\alpha} \right\}. \quad (3.563)$$

Далее мы будем использовать символ tr_2 для обозначения частичного следа, взятого по второму гильбертову пространству \mathcal{H}_2 .

Операторы T_{α} , введенные в уравнении (3.563), действуют в двухчастичном пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Они описывают обмен энергией между частицами во время столкновений и должны удовлетворять определенным условиям. Во-первых, чтобы гарантировать сохранение энергии, потребуем

$$[T_{\alpha}, h_1 + h_2] = 0. \quad (3.564)$$

Во-вторых, микрообратимость требует, чтобы

$$T_{\alpha}^{\dagger} T_{\alpha} = T_{\alpha} T_{\alpha}^{\dagger}, \quad (3.565)$$

и, в третьих, T_{α} предполагаются инвариантными относительно перестановок $\pi(1, 2)$ частиц

$$[\pi(1, 2), T_{\alpha}] = 0. \quad (3.566)$$

Легко показать, что уравнение (3.561) имеет параметрический линдбладовский вид (3.557). Далее мы отметим, что квантовое уравнение Больцмана, в тесной аналогии с классическим уравнением Больцмана, обладает следующими свойствами. Оно сохраняет энергию

$$\frac{d}{dt} \text{tr}(h\rho(t)) = 0, \quad (3.567)$$

выполняется H -теорема, которая утверждает, что энтропия фон Неймана $S(\rho)$ не убывает,

$$\frac{d}{dt} S(\rho(t)) \geq 0, \quad (3.568)$$

и каноническое распределение $\rho_{th} = \exp(-\beta h)/\text{tr} \exp(-\beta h)$ является стационарным решением, то есть $\mathcal{D}(\rho_{th}) = 0$. Эти свойства можно проверить при помощи условий (3.564)–(3.566).

3.7.2. Основные уравнения в приближении среднего поля

Рассмотрим N тождественных квантовых систем, которым поставим в соответствие конкретные координаты $j = 1, 2, \dots, N$ решетки (например, можно рассмотреть спиновую решетку). Гильбертово пространство j -й частицы обозначим через \mathcal{H}_j и ее собственный гамильтониан — через $h = h_j$, оператор, действующий в \mathcal{H}_j . Системы в двух различных позициях i и j взаимодействуют через двухчастичный потенциал $V = V_{ij}$, который считается оператором в $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j$. Гамильтониан полной системы, следовательно, принимает вид

$$H_N = \sum_{j=1}^N h_j + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^N V_{ij} \quad (3.569)$$

и действует в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N \quad (3.570)$$

всей системы. Взаимодействие масштабируется множителем $1/N$, чтобы гарантировать, что полный гамильтониан масштабируется с ростом числа частиц как $\langle H_N \rangle \sim N$.

Обозначим через $\text{tr}_{[n, N]}$ частичный след по n -му гильбертову пространству \mathcal{H}_n и введем сокращенное обозначение

$$\text{tr}_{[n, N]} = \text{tr}_n \text{tr}_{n+1} \dots \text{tr}_N \quad (3.571)$$

для частичного следа, взятого по гильбертовым пространствам с индексами $n, n+1, \dots, N$. Тогда выполняется следующая теорема о приближении Хартри или среднего поля (Spohn, 1980). Предположим, что начальное состояние системы берется в виде произведения

$$\rho_N = \rho \otimes \dots \otimes \rho \quad (N \text{ сомножителей}). \quad (3.572)$$

Тогда в пределе бесконечного числа частиц

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr}_{[n+1, N]} \{ e^{-iH_N t} \rho_N e^{iH_N t} \} = \rho(t) \otimes \dots \otimes \rho(t) \quad (n \text{ сомножителей}), \quad (3.573)$$

где $\rho(t)$ является решением уравнения Хартри

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[h, \rho(t)] - i \text{tr}_2 [V_{12} + V_{21}, \rho(t) \otimes \rho(t)] \quad (3.574)$$

с начальным условием $\rho(0) = \rho$. Соотношение (3.573) выполняется для всех n , и сходимость понимается как сходимость в следовой норме. Приближение среднего поля состоит в выполнении приближенного равенства $\rho_2(t) \approx \rho(t) \otimes \rho(t)$ в иерархии связанных уравнений движения для n -частичных матриц плотности

$$\rho_n(t) = \text{tr}_{[n+1, N]} \rho_N(t), \quad (3.575)$$

где

$$\rho_N(t) = \exp(-iH_N t) \rho_N \exp(+iH_N t) \quad (3.576)$$

представляет собой точную динамику полной системы. Приведенная выше теорема показывает, что приближение выполняется в пределе $N \rightarrow \infty$.

Мы не будем приводить детализированное доказательство уравнения (3.573). Продемонстрируем, что уравнение Хартри (3.574) получается как следствие (3.573). Для этого обратим сначала внимание на то, что для $n = 1$ уравнение (3.573) дает

$$\rho(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr}_{[2, N]} \rho_N(t), \quad (3.577)$$

откуда мы получаем

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i \lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr}_{[2, N]} \left\{ \sum_j [h_j, \rho_N(t)] + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} [V_{ij}, \rho_N(t)] \right\}. \quad (3.578)$$

Первый член в правой части может быть записан как

$$\begin{aligned} & -i \lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr}_{[2, N]} \left\{ [h_1, \rho_N(t)] + \sum_{j=2}^N [h_j, \rho_N(t)] \right\} = \\ & = -i \left[h, \lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr}_{[2, N]} \rho_N(t) \right] - i \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^N \text{tr}_{[2, N]} [h_j, \rho_N(t)] = \\ & = -i[h, \rho(t)], \end{aligned} \quad (3.579)$$

где мы воспользовались тем фактом, что частичный след $\text{tr}_{[2, N]} [h_j, \rho_N(t)]$ стремится к нулю для $j = 2, 3, \dots, N$. Следовательно, мы можем записать уравнение движения для матрицы плотности $\rho(t)$ в виде

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[h, \rho(t)] - i \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \text{tr}_{[2, N]} [V_{ij}, \rho_N(t)]. \quad (3.580)$$

Так как след вычисляется по $\mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$, то остаются только те слагаемые во втором члене в правой части (3.580), для которых либо $i = 1$, либо $j = 1$. Второй член в (3.580) равен тогда

$$-i \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=2}^N \text{tr}_{[2, N]} [V_{1j} + V_{j1}, \rho_N(t)]. \quad (3.581)$$

Из-за симметрии ρ_N и $\rho_N(t)$ все члены в сумме по j равны друг другу. Следовательно, выражение (3.581) может быть записано как

$$-i \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N} \text{tr}_{[2, N]} [V_{12} + V_{21}, \rho_N(t)] = -i \text{tr}_2 [V_{12} + V_{21}, \rho(t) \otimes \rho(t)], \quad (3.582)$$

где мы использовали $\text{tr}_{[2, N]} = \text{tr}_2 \text{tr}_{[3, N]}$ и уравнение (3.573) для $n = 2$, то есть

$$\rho(t) \otimes \rho(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr}_{[3, N]} \rho_N(t). \quad (3.583)$$

Это показывает, что уравнение Хартри (3.574) следует из приближения среднего поля (3.573).

3.7.3. Лазерные уравнения в приближении среднего поля

Как пример применения уравнения Хартри с линейной диссипацией, мы рассмотрим простую модель для лазера, а именно модель, развитую в работах (Haken, 1984; Lax, 1966; Louisell, 1990; Gordon, 1967). Для этого мы сначала выведем уравнения среднего поля, управляющие динамикой

атомно-лазерной моды, а потом приведем внешние резервуары во взаимодействие с системой для описания накачки атомов и потерь поля.

Атомы описываются двухуровневыми системами с частотой переходов ω в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_A \cong \mathbb{C}^2$. Атомы связаны с лазерной модой, описываемой операторами рождения и уничтожения a^\dagger, a , действующими в одномодовом пространстве \mathcal{H}_F . Применяя приближение врачающейся волны и предполагая точный резонанс, мы можем записать гамильтониан атомно-лазерной моды как

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{\omega}{2} \sigma_j^3 + \omega a^\dagger a + i\tilde{g} \sum_{j=1}^N (a^\dagger \sigma_j^- - a \sigma_j^+) \equiv H_A + H_F + H_{AF}. \quad (3.584)$$

H_A и H_F являются свободными гамильтонианами для атомных и лазерных мод соответственно, а $\sigma_j^3, \sigma_j^+, \sigma_j^-$ — матрица Паули j -го атома и повышающие и понижающие операторы в обычных обозначениях соответственно. Взаимодействие атома с полем дается гамильтонианом H_{AF} с постоянной взаимодействия \tilde{g} .

Чтобы привести гамильтониан системы к виду (3.569), который требуется для применения теории среднего поля, мы воспользуемся следующим приемом. Введем N тождественных копий a_j мод поля, удовлетворяющих коммутационным соотношениям $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$, и выполним следующие замены:

$$a \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j a_j, \quad a^\dagger a \rightarrow \sum_j a_j^\dagger a_j. \quad (3.585)$$

Если мы промасштабируем постоянную взаимодействия

$$\tilde{g} = \frac{g}{\sqrt{N}}, \quad (3.586)$$

то сможем записать гамильтониан атомно-лазерной моды как

$$H = \sum_{j=1}^N \omega a_j^\dagger a_j + \sum_{j=1}^N \frac{\omega}{2} \sigma_j^3 + \frac{ig}{N} \sum_{i \neq j} \left(a_i^\dagger \sigma_j^- - a_i \sigma_j^+ \right). \quad (3.587)$$

Это представление позволяет нам воспользоваться следующими обозначениями:

$$h_j = \omega a_j^\dagger a_j + \frac{\omega}{2} \sigma_j^3, \quad (3.588)$$

$$V_{ij} = ig \left(a_i^\dagger \sigma_j^- - a_i \sigma_j^+ \right). \quad (3.589)$$

Следовательно, уравнение Хартри (3.574) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & -i \left[\omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}\sigma^3, \rho(t) \right] + \\ & + g[\text{tr}(\sigma^- \rho(t))a^\dagger - \text{tr}(\sigma^+ \rho(t))a, \rho(t)] + \\ & + g[\text{tr}(a^\dagger \rho(t))\sigma^- - \text{tr}(a \rho(t))\sigma^+, \rho(t)]. \end{aligned} \quad (3.590)$$

Это выражение представляет собой приближение среднего поля для динамики атомно-лазерной моды.

На следующем шаге рассматриваются потери поля излучения и накачка двухуровневых атомов. Для этого лазерная мода и атомы приводятся во взаимодействие с двумя разными резервуарами. Эти взаимодействия моделируются в рамках приближения слабой связи и приводят к двум линдбладовским генераторам, которые прибавляются к правой части уравнения среднего поля:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & -i \left[\omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}\sigma^3, \rho(t) \right] + \\ & + g[\text{tr}(\sigma^- \rho(t))a^\dagger - \text{tr}(\sigma^+ \rho(t))a, \rho(t)] + \\ & + g[\text{tr}(a^\dagger \rho(t))\sigma^- - \text{tr}(a \rho(t))\sigma^+, \rho(t)] + \\ & + 2\kappa \left(a\rho(t)a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)a^\dagger a \right) + \\ & + W_{21} \left(\sigma^- \rho(t)\sigma^+ - \frac{1}{2}\sigma^+\sigma^- \rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma^+\sigma^- \right) + \\ & + W_{12} \left(\sigma^+ \rho(t)\sigma^- - \frac{1}{2}\sigma^-\sigma^+ \rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma^-\sigma^+ \right). \end{aligned} \quad (3.591)$$

Затухание лазерной моды за счет потерь и выхода излучения наружу описывается линдбладовским оператором a и постоянной затухания 2κ . Резервуар для атомов приводит к линдбладовским операторам σ^- и σ^+ , где мы обозначили через W_{21} и W_{12} интенсивности переходов вниз и вверх соответственно. Резервуар для атомов берется с отрицательной температурой, то есть $W_{12} > W_{21}$, для того чтобы учесть накачку.

Теперь легко проверить, что уравнение (3.591) приводит к следующей замкнутой системе уравнений для средних значений $\langle a(t) \rangle = \text{tr}(a \rho(t))$, $\langle \sigma^-(t) \rangle = \text{tr}(\sigma^- \rho(t))$ и $\langle \sigma^3(t) \rangle = \text{tr}(\sigma^3 \rho(t))$,

$$\frac{d}{dt}\langle a(t) \rangle = (-i\omega - \kappa)\langle a(t) \rangle + g\langle \sigma^-(t) \rangle, \quad (3.592)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma^- (t) \rangle = (-i\omega - \gamma) \langle \sigma^- (t) \rangle + g \langle a(t) \rangle \langle \sigma^3 (t) \rangle, \quad (3.593)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma^3 (t) \rangle &= -2g(\langle a^\dagger (t) \rangle \langle \sigma^- (t) \rangle + \langle a(t) \rangle \langle \sigma^+ (t) \rangle) - \\ &- 2\gamma(\langle \sigma^3 (t) \rangle - d). \end{aligned} \quad (3.594)$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma \equiv \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21}) \quad (3.595)$$

и

$$d \equiv \frac{W_{12} - W_{21}}{W_{12} + W_{21}}. \quad (3.596)$$

Вводя в качестве новых переменных отрицательно-частотную часть лазерного поля

$$A(t) = \langle a(t) \rangle \exp(+i\omega t), \quad (3.597)$$

отрицательно-частотную часть поляризации

$$S(t) = \langle \sigma^- (t) \rangle \exp(+i\omega t) \quad (3.598)$$

и инверсию

$$D(t) = \langle \sigma^3 (t) \rangle, \quad (3.599)$$

мы можем записать систему дифференциальных уравнений (3.592)–(3.594) как

$$\frac{d}{dt} A(t) = -\kappa A(t) + g S(t), \quad (3.600)$$

$$\frac{d}{dt} S(t) = -\gamma S(t) + g A(t) D(t), \quad (3.601)$$

$$\frac{d}{dt} D(t) = -2g(A^*(t)S(t) + A(t)S^*(t)) - 2\gamma(D(t) - d). \quad (3.602)$$

Это лазерные уравнения в приближении среднего поля. При помощи подходящего преобразования переменных A , S и D можно показать, что эта нелинейная система дифференциальных уравнений эквивалентна знаменитым уравнениям Лоренца для динамики жидкостей (Haken, 1975). Отметим, что нелинейные члены пропорциональны g . Эти члены появляются из-за взаимодействия между полем и атомами в приближении среднего поля. Как легко видеть, система (3.600)–(3.602) обладает нетривиальным стационарным решением $A \neq 0$, соответствующим возникновению среднего

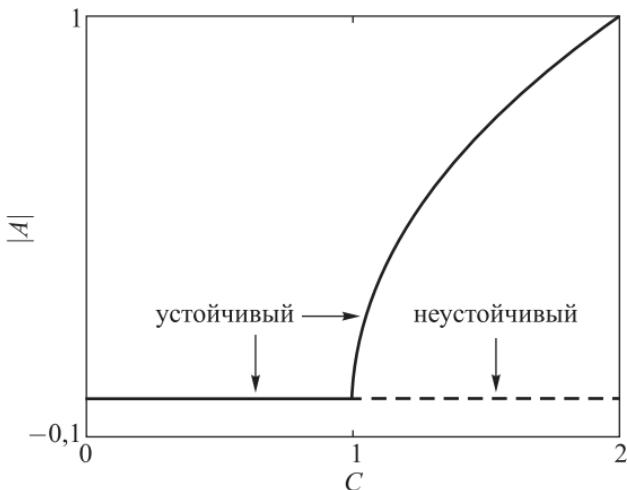


Рис. 3.8. Бифуркационная диаграмма нелинейного уравнения (3.604) для амплитуды лазерного поля A .

когерентного поля — лазерной генерации, которая задается так называемым параметром накачки

$$C \equiv \frac{dg^2}{\gamma\kappa}, \quad (3.603)$$

который удовлетворяет условию $C > 1$. Это, очевидно, возможно только для $g \neq 0$, то есть генерация может рассматриваться как коллективное взаимодействие среднего поля.

Система (3.600)–(3.602) определяется тремя постоянными времени κ^{-1} , g^{-1} и γ^{-1} . Поскольку γ^{-1} является наименьшим временем в задаче, мы можем адиабатически исключить быстрые переменные S и D . Приравнивая $\dot{S} = \dot{D} = 0$, получаем дифференциальное уравнение для амплитуды поля

$$\frac{dA}{dt} = -\kappa A \left(1 - \frac{C}{1 + |A|^2/n_0} \right), \quad (3.604)$$

где $n_0 = \gamma^2/2g^2$. Из этого уравнения мы находим стационарные решения и их устойчивость. Стационарное решение $A = 0$ — единственное и устойчивое для $C < 1$. При $C = 1$ возникает бифуркация Хопфа. Для $C > 1$ состояние $A = 0$ становится неустойчивым, в то время как возникает однопараметрическое семейство стационарных состояний, которое определяется через условие $|A|^2 = n_0(C - 1)$ (см. рис. 3.8).

3.7.4. Нелинейное уравнение Шредингера

В предыдущем примере лазерных уравнений мы сначала применяли приближение среднего поля, а затем добавили линейные линдбладовские генераторы для описания взаимодействия с резервуарами. Эта процедура соответствует приближению слабого взаимодействия на уровне среднего поля. Далее мы рассмотрим случай, в котором в начале проводятся вычисления в приближении слабой связи на уровне N -частичной системы, а затем применяется приближение среднего поля. Такая процедура приближений приводит к нелинейным диссипативным членам в основном уравнении и порождает нелинейное уравнение шредингеровского типа.

Отправной точкой снова является полный гамильтониан вида (3.569). Полная система N частиц взаимодействует с некоторым резервуаром. В приближении слабой связи предполагается, что взаимодействие с резервуаром приводит к генератору линдбладовского типа в основном уравнении для полной матрицы плотности $\rho_N(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_N(t) = & -i\left[\sum_j h_j + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} V_{ij}, \rho_N(t)\right] + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \left\{ W^{\alpha} \rho_N(t) W^{\alpha\dagger} - \frac{1}{2} W^{\alpha\dagger} W^{\alpha} \rho_N(t) - \frac{1}{2} \rho_N(t) W^{\alpha\dagger} W^{\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (3.605)$$

Предполагается, что операторы W^{α} в этом уравнении являются коллективными линдбладовскими операторами вида

$$W^{\alpha} = \sum_i V_i^{\alpha}, \quad (3.606)$$

где V_i^{α} — одночастичные операторы, действующие в гильбертовом пространстве i -й частицы. Пример для такого основного уравнения будет приведен в следующем подразделе.

Приближение среднего поля для записанного выше основного уравнения получается способом, похожим на использованный в разделе 3.7.2. В пределе больших N получаем основное уравнение среднего поля

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[h, \rho(t)] - i \text{tr}_2[V_{12} + V_{21}, \rho(t) \otimes \rho(t)] - i[V_D(\rho(t)), \rho(t)]. \quad (3.607)$$

Первые два члена в правой части дают приближение Хартри, тогда как третий член описывает коллективные диссипативные процессы посредством

нелинейного потенциала вида

$$V_D(\rho) = \frac{i}{2} \sum_{\alpha} \{ \text{tr}(V^{\alpha\dagger} \rho) V^{\alpha} - \text{tr}(V^{\alpha} \rho) V^{\alpha\dagger} \}. \quad (3.608)$$

Чтобы показать как возникает этот потенциал, мы определим величину

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr}_{[2, N]} \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \sum_{ij} \left\{ V_i^{\alpha} \rho_N V_j^{\alpha\dagger} - \frac{1}{2} V_j^{\alpha\dagger} V_i^{\alpha} \rho_N - \frac{1}{2} \rho_N V_j^{\alpha\dagger} V_i^{\alpha} \right\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} \text{tr}_{[2, N]} \left\{ V_2^{\alpha} \rho_N V_1^{\alpha\dagger} - \frac{1}{2} V_1^{\alpha\dagger} V_2^{\alpha} \rho_N - \frac{1}{2} \rho_N V_1^{\alpha\dagger} V_2^{\alpha} \right\} + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (3.609)$$

Символ $(1 \leftrightarrow 2)$ означает, что нужно прибавить члены с переставленными индексами 1 и 2. Применяя приближение среднего поля (3.573) для $n = 2$, мы получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} \text{tr}_2 \left\{ V_2^{\alpha} \rho \otimes \rho V_1^{\alpha\dagger} - \frac{1}{2} V_1^{\alpha\dagger} V_2^{\alpha} \rho \otimes \rho - \frac{1}{2} \rho \otimes \rho V_1^{\alpha\dagger} V_2^{\alpha} \right\} + (1 \leftrightarrow 2) = \\ &= \sum_{\alpha} \left\{ \text{tr}(V^{\alpha} \rho) \rho V^{\alpha\dagger} - \frac{1}{2} \text{tr}(V^{\alpha} \rho) V^{\alpha\dagger} \rho - \frac{1}{2} \text{tr}(V^{\alpha} \rho) \rho V^{\alpha\dagger} + \right. \\ & \quad \left. + \text{tr}(V^{\alpha\dagger} \rho) V^{\alpha} \rho - \frac{1}{2} \text{tr}(V^{\alpha\dagger} \rho) V^{\alpha} \rho - \frac{1}{2} \text{tr}(V^{\alpha\dagger} \rho) \rho V^{\alpha} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \{ \text{tr}(V^{\alpha\dagger} \rho) [V^{\alpha}, \rho] - \text{tr}(V^{\alpha} \rho) [V^{\alpha\dagger}, \rho] \} = \\ &= -i[V_D(\rho), \rho(t)]. \end{aligned} \quad (3.610)$$

Это показывает, что основное уравнение (3.605) приводит к возникновению нелинейного потенциала (3.608) на уровне среднего поля.

Нелинейное основное уравнение (3.607) обладает тем свойством, что оно может быть записано в виде *нелинейного уравнения Шредингера*. Действительно, если вектор состояния $\psi(t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению шредингеровского типа

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = -i[h + V_H(\psi) + V_D(\psi)]\psi(t), \quad (3.611)$$

тогда матрица плотности чистого состояния

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad (3.612)$$

является решением уравнения (3.607). В уравнении (3.611) h — одновременный гамильтониан. $V_H(\psi) = \langle \psi | V_{12} + V_{21} | \psi \rangle$ представляет собой потенциал Хартри, а $V_D(\psi)$ обозначает нелинейный потенциал

$$V_D(\psi) = \frac{i}{2} \sum_{\alpha} \{ \langle \psi | V_{\alpha}^{\dagger} | \psi \rangle V_{\alpha} - \langle \psi | V_{\alpha} | \psi \rangle V_{\alpha}^{\dagger} \}. \quad (3.613)$$

Нелинейное уравнение Шредингера (3.611), очевидно, сохраняет норму вектора состояния, так как $\text{tr } \rho(t) = \|\psi(t)\|^2 = 1$.

3.7.5. Суперлюминисценция

В качестве примера нелинейных диссипативных процессов и нелинейного уравнения Шредингера (3.611) мы изучим явление суперлюминисценции (Gross, Haroche, 1982). Для этого мы рассмотрим N тождественных двухуровневых атомов с частотой переходов ω , взаимодействующих с вакуумом электромагнитного поля. Атомы расположены в фиксированных положениях \vec{r}_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Матрицы Паули, связанные с j -м атомом, снова будем обозначать σ_j^3 , σ_j^{\pm} . Гамильтониан атомов берется в виде

$$H_A = \frac{\omega}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^3, \quad (3.614)$$

тогда как взаимодействие атомов с полем излучения будет описываться в дипольном приближении,

$$H_I = - \sum_{j=1}^N \left(\sigma_j^- \vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{r}_j) + \sigma_j^+ \vec{d}^* \cdot \vec{E}(\vec{r}_j) \right). \quad (3.615)$$

Вектор $\vec{D}_j = \vec{d}(\sigma_j^+ + \sigma_j^-)$ представляет собой дипольный оператор j -го атома, \vec{d} является дипольным матричным элементом атомного перехода. Оператор электрического поля в шредингеровском представлении в точке \vec{r} (ср. (3.180))

$$\vec{E}(\vec{r}) = i \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{V}} \vec{e}_{\lambda}(\vec{k}) \left(b_{\lambda}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) - b_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \right). \quad (3.616)$$

Исходя из общего вида (3.143) диссипатора в пределе слабой связи мы немедленно получаем следующее основное уравнение для N -атомной системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_N(t) = & -i\omega \sum_{i=1}^N [\sigma_i^3, \rho_N(t)] + \\ & + \sum_{ij} a_{ij} \left\{ \sigma_j^- \rho_N \sigma_i^+ - \frac{1}{2} \sigma_i^+ \sigma_j^- \rho_N - \frac{1}{2} \rho_N \sigma_i^+ \sigma_j^- \right\}. \end{aligned} \quad (3.617)$$

Коэффициенты a_{ij} выражаются как

$$a_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t) \langle \vec{d}^* \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t) \vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{r}_j, 0) \rangle. \quad (3.618)$$

В уравнении (3.617) мы пренебрегли вкладом от сдвига Лэмба, а температура поля излучения считается равной нулю. Следовательно, корреляционные функции в уравнении (3.618) являются вакуумными средними значениями.

Фурье-образы корреляционных функций резервуара можно определить явно. Выполняя переход к континуальному пределу для мод излучения и действуя, как в параграфе 3.4.1.2, получим

$$a_{ij} = \frac{\omega^3}{2\pi} \int d\Omega \left(\vec{d}^* \cdot \vec{d} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{d}^*)(\vec{k} \cdot \vec{d})}{|k|^2} \right) \exp(i\vec{k}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)). \quad (3.619)$$

После проведения интегрирования по углам получаем

$$a_{ij} = \frac{4}{3} \omega^3 |\vec{d}|^2 \{ j_0(x_{ij}) + P_2(\cos \theta_{ij}) j_2(x_{ij}) \}, \quad (3.620)$$

где мы ввели функции Бесселя

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x \quad (3.621)$$

и полином Лежандра

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \quad (3.622)$$

и обозначили

$$x_{ij} = \omega |\vec{r}_i - \vec{r}_j|, \quad \cos^2 \theta_{ij} = \frac{|\vec{d} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)|^2}{|\vec{d}|^2 \cdot |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}. \quad (3.623)$$

Собственные значения $(N \times N)$ -матрицы a_{ij} определяют скорости релаксации системы. Диагональные элементы матрицы равны интенсивности спонтанного излучения для одного атома

$$a_{ii} = \frac{4}{3}\omega^3 |\vec{d}|^2 \equiv \gamma_0. \quad (3.624)$$

Предположим, что все атомы изначально находятся в возбужденном состоянии, что для начального состояния N -атомной системы дает

$$|\Psi_0\rangle = |e, e, \dots, e\rangle \quad (N \text{ сомножителей}). \quad (3.625)$$

В соответствии с уравнением (3.620), матрица a_{ij} практически диагональна, так как среднее расстояние между атомами много больше длины волны $\bar{\lambda} \equiv 1/\omega$ излучения. Следовательно, в этом случае мы имеем $a_{ij} \approx \gamma_0 \delta_{ij}$. Атомы, таким образом, излучают существенно независимо друг от друга, а интенсивность излучения спадает экспоненциально

$$I(t) = \gamma_0 \omega N e^{-\gamma_0 t}. \quad (3.626)$$

Испускаемое атомами излучение складывается некогерентно, что приводит к полной интенсивности, пропорциональной N .

Мы обозначим r линейный размер N -атомной системы. Для $r \ll \bar{\lambda}$ матричные элементы приблизительно равны друг другу, то есть $a_{ij} \approx \gamma_0$. Тогда обнаруживается совершенно другое поведение: после некоторого времени задержки τ_D испущенное излучение превращается в короткий импульс, максимальная интенсивность которого пропорциональна N^2 , а ширина изменяется как N^{-1} . Это явление называется суперлюминисценцией (см. рис. 3.9).

Для того чтобы качественно понять такое поведение, отметим, для начала, что из-за условия $r \ll \bar{\lambda}$ взаимодействие (3.615) является практически симметричным относительно перестановки атомов. Следовательно, мы можем считать, что волновая функция $|\Psi(t)\rangle$ всей системы остается симметричной с течением времени. Считая двухуровневые атомы частицами со спином $1/2$, мы можем ввести оператор полного «углового момента»

$$\vec{J} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \vec{\sigma}_j. \quad (3.627)$$

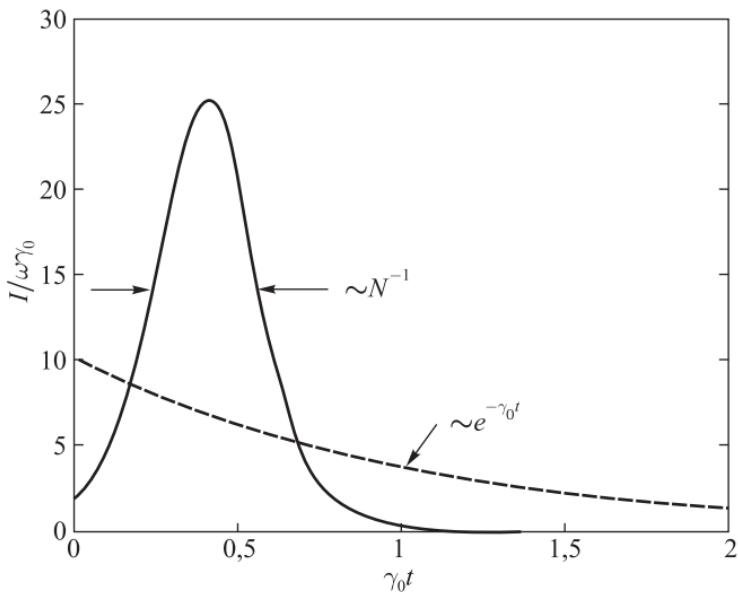


Рис. 3.9. Качественная картина интенсивности излучения $I(t)$ системы N двухуровневых атомов. Пунктирная линия: независимое спонтанное излучение приводит к экспоненциальному затуханию (3.626). Сплошная линия: суперлюминисценция возникает в виде короткого импульса ширины, пропорциональной N^{-1} , и высоты, пропорциональной N^2 . Профиль интенсивности суперлюминисценции был взят из результата для среднего поля (3.643) для $N = 10$ и $\gamma_0 t_D = 0,4$.

Его третья компонента пропорциональна атомному гамильтониану H_A ,

$$J^3 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \sigma_j^3 = \frac{1}{\omega} H_A. \quad (3.628)$$

Соответствующие понижающие и повышающие операторы берутся в виде

$$J^\pm = \sum_{j=1}^N \sigma_j^\pm. \quad (3.629)$$

С помощью этих операторов энергия собственных состояний H_A может быть охарактеризована совместными собственными состояниями $|J, M\rangle \vec{J}^2$ и J^3 , где $J = 0, 1, 2, \dots, N/2$ и $M = -J, \dots, +J$. Эти состояния называются состояниями Дики (Dicke) (см., например, Mandel, Wolf, 1995).

Хорошо известно, что подпространство, которое полностью симметрично относительно перестановок атомов, образовано состояниями с максимальным угловым моментом $J = N/2$. Мы можем, таким образом, упорядочить полностью симметричные собственные состояния системы с понижающейся энергией следующим образом:

$$\begin{aligned} |J, M = J\rangle &= |e, e, \dots, e\rangle, \\ |J, M = J - 1\rangle &= \mathcal{S}|g, e, \dots, e\rangle, \\ |J, M = J - 2\rangle &= \mathcal{S}|g, g, \dots, e\rangle, \\ &\dots \\ |J, M = -J\rangle &= |g, g, \dots, g\rangle, \end{aligned}$$

где \mathcal{S} — оператор симметризации. С точки зрения этой схемы суперлюминисценцию можно рассматривать как каскад излучений вдоль лестницы собственных состояний «угловых моментов». Интенсивность излучения $W(M)$ для перехода $|J, M\rangle \rightarrow |J, M - 1\rangle$ выражается через квадрат коэффициента Клебша–Гордана,

$$W(M) = \gamma_0 |\langle J, M - 1 | J^- | J, M \rangle|^2 = \gamma_0 (J - M + 1)(J + M). \quad (3.630)$$

Мы видим, таким образом, что интенсивность излучения возрастает от начального состояния $W(M = J) = 2\gamma_0 J = \gamma_0 N$ до максимального значения

$$W(M = 0, 1) = \gamma_0 J(J + 1) = \frac{\gamma_0}{4} N(N + 2), \quad \text{для четных } N, \quad (3.631)$$

$$W(M = 1/2) = \gamma_0 (J + 1/2)^2 = \frac{\gamma_0}{4} (N + 1)^2, \quad \text{для нечетных } N, \quad (3.632)$$

которое изменяется как квадрат N^2 числа атомов. Наконец, интенсивность снова уменьшается до $W(M = -J) = 0$.

Применим теперь теорию среднего поля. Для $r \ll \bar{\lambda}$ мы получаем основное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_N(t) &= -i\omega [J^3, \rho_N(t)] + \\ &+ \gamma_0 \left(J^- \rho_N(t) J^+ - \frac{1}{2} J^+ J^- \rho_N(t) - \frac{1}{2} \rho_N(t) J^+ J^- \right). \quad (3.633) \end{aligned}$$

Это уравнение типа основного уравнения среднего поля (3.605) с колективным линдбладовским оператором J^- , и мы можем немедленно записать

соответствующее уравнение Шредингера (3.611)

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -i\frac{\omega}{2}\sigma^3\psi(t) - iV_D(\psi(t))\psi(t), \quad (3.634)$$

где

$$V_D(\psi) = i\frac{N\gamma_0}{2}(\langle\psi|\sigma^+|\psi\rangle\sigma^- - \langle\psi|\sigma^-|\psi\rangle\sigma^+) \quad (3.635)$$

— нелинейный потенциал. Вводя параметризацию

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p(t)} \exp(i\theta(t)) \\ \sqrt{1-p(t)} \exp(i\phi(t)) \end{pmatrix} \quad (3.636)$$

и используя представления матриц Паули (3.213) и (3.214), находим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{p} + 2ip\dot{\theta} = -i\omega p - N\gamma_0 p(1-p), \quad (3.637)$$

$$\dot{p} - 2i(1-p)\dot{\phi} = -i\omega(1-p) - N\gamma_0 p(1-p). \quad (3.638)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получаем $2\dot{\theta} = -\omega$ и $2\dot{\phi} = +\omega$. Фазы θ и ϕ волновых функций среднего поля изменяются, таким образом, согласно динамике свободного движения.

Поскольку $\psi(t)$ представляет собой приближение среднего поля N -частичной системы, величина $Np(t) = N|\psi_1(t)|^2$ должна быть интерпретирована как среднее число атомов в возбужденном состоянии. Следовательно,

$$I(t) = -N\omega \frac{d}{dt}p(t) \quad (3.639)$$

является средней интенсивностью излучения. Из системы дифференциальных уравнений (3.637) и (3.638) мы получаем дифференциальное уравнение для $p(t)$,

$$\dot{p} = -N\gamma_0 p(1-p), \quad (3.640)$$

которое имеет решение

$$\frac{p(t)}{1-p(t)} = \frac{p_D}{1-p_D} \exp[-\gamma_0 N(t-t_D)]. \quad (3.641)$$

Мы считаем t_D временем задержки суперлюминисценции, а $p(t=t_D) = p_D$ является средней вероятностью заполнения возбужденного состояния $|e\rangle$ в момент времени $t=t_D$, то есть в момент максимальной интенсивности. Приведенная выше интерпретация в терминах каскадного процесса (см. уравнения (3.631) и (3.632)) дает $p_D \approx 1/2$, так что в итоге мы

получаем

$$p(t) = \frac{1}{\exp[\gamma_0 N(t - t_D)] + 1}. \quad (3.642)$$

Интенсивность излучения, следовательно, выражается как

$$I(t) = \frac{\gamma_0 \omega N^2}{4} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_0 N}{2}(t - t_D) \right) \right]^{-2}. \quad (3.643)$$

Отметим, что эта формула описывает характерные особенности суперлюминисценции (Gross and Haroche, 1982) как показано на рис. 3.9: интенсивность, пропорциональная N^2 , максимальная интенсивность достигается после задержки t_D и ширина импульса излучения изменяется как N^{-1} . Нужно отметить, однако, что время задержки испытывает сильные флуктуации, которые определяются квантовыми флуктуациями начальной фазы процесса сверхизлучения. Простое описание в среднем поле, данное выше, не может учесть статистику времени задержки.

Библиография

- Alicki, R. and Messer, J. (1983). Nonlinear quantum dynamical semigroups for many-body open systems. *J. Stat. Phys.*, **32**, 299–312.
- Alicki, R. and Lendi, K. (1987). Quantum Dynamical Semigroups and Applications, Volume 286 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Alicki, R. and Fannes, M. (2001). *Quantum Dynamical Systems*. Oxford University Press, Oxford.
- Bausch, R. (1966). Bewegungsgesetze nicht abgeschlossener Quantensysteme. *Z. Phys.*, **193**, 246–265.
- Blum, K. (1981). *Density Matrix Theory and Applications*. Plenum Press, New York, London. Имеется издание на русском языке: Блум К. *Теория матрицы плотности и ее приложения*. — М.: Мир, 1983.
- Caldeira, A. O. and Leggett, A. J. (1983). Path integral approach to quantum Brownian motion. *Physica*, **121A**, 587–616.
- Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J. and Grynberg, G. (1998). *Atom-Photon Interactions*. John Wiley, New York.
- Davies, E. B. (1974). Markovian master equations. *Commun. Math. Phys.*, **39**, 91–110.

Davies, E. B. (1976). *Quantum Theory of Open Systems*. Academic Press. London.

Dümcke, R. and Spohn, H. (1979). The proper form of the generator in the weak coupling limit. *Z. Phys.*, **B34**, 419–422.

Dümcke, R. (1985). The low density limit for an N-level system interacting with a free Bose or Fermi gas. *Commun. Math. Phys.*, **97**, 331–359.

Feynman, R. P. and Vernon, F. L. (1963). The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **24**, 118–173.

Gardiner, C. W. and Collett, M. J. (1985). Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the quantum master equation. *Phys. Rev.*, **A31**, 3761–3774.

Gardiner, C. W. and Zoller, P. (2000). *Quantum Noise* (second edition). Springer-Verlag, Berlin.

Glauber, R. J. (1963). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, **131**, 2766–2788.

Gordon, J. P. (1967). Quantum theory of a simple maser oscillator. *Phys. Rev.*, **161**, 367–386.

Gorini, V., Kossakowski, A. and Sudarshan, E. C. G. (1976). Completely positive dynamical semigroups of N -level systems. *J. Math. Phys.*, **17**, 821–825.

Gorini, V., Frigerio, A., Verri, M., Kossakowski, A. and Sudarshan, E. C. G. (1978). Properties of quantum Markovian master equations. *Rep. Math. Phys.*, **13**, 149–173.

Grabert, H., Schramm, P. and Ingold, G.-L. (1988). Quantum Brownian motion: The functional integral approach. *Phys. Rep.*, **168**, 115–207.

Gross, M. and Haroche, S. (1982). Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission. *Phys. Rep.*, **93**, 301–396.

Haake, F. (1973). Statistical treatment of open systems by generalized master equations. *Springer Tracts in Modern Physics*, **66**, 98–168.

Haken, H. (1975). Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. *Phys. Lett.*, **A53**, 77–78.

Haken, H. (1984). *Laser Theory*. Springer-Verlag, Berlin.

Hartig, W., Rasmussen, W., Schieder, R. and Walther, H. (1976). Study of the frequency distribution of the fluorescent light induced by monochromatic radiation. *Z. Phys.*, **A278**, 205–210.

- Itano, W. M., Heinzen, D. J., Bollinger, J. J. and Wineland, D. J. (1990). Quantum Zeno effect. *Phys. Rev.*, **A41**, 2295–2300.
- Klauder, J. R., McKenna, J. and Currie, D. G. (1965). On «diagonal» coherent state representations for quantum-mechanical density matrices. *J. Math. Phys.*, **6**, 734–739.
- Kraus, K. (1971). General state changes in quantum theory. *Ann. Phys.* (N.Y.), **64**, 311–335.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1958). *Statistical Physics*. Pergamon Press, London. Имеется издание на русском языке: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика*. Часть 1. — М.-Л.: ГИИТЛ, 1951.
- Lax, M. (1963). Formal theory of quantum fluctuations from a driven state. *Phys. Rev.*, **129**, 2342–2348.
- Lax, M. (1966). Quantum noise. IV. Quantum theory of noise sources. *Phys. Rev.*, **145**, 110–129.
- Lindblad, G. (1975). Completely positive maps and entropy inequalities. *Commun. Math. Phys.*, **40**, 147–151.
- Lindblad, G. (1976). On the generator of quantum dynamical semigroups. *Commun. Math. Phys.*, **48**, 119–130.
- Louisell, W. (1990). *Quantum Statistical Properties of Radiation*. John Wiley, New York.
- Mandel, L. and Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge. Имеется перевод: Мандель Л., Вольф Э. *Оптическая когерентность и квантовая оптика*. — М.: Физматлит, 2000.
- Mollow, B. R. (1969). Power spectrum of light scattered by two-level systems. *Phys. Rev.*, **188**, 1969–1975.
- Redfield, A. G. (1957). On the theory of relaxation processes. *IBM J. Res. Dev.*, **1**, 19–31.
- Reichl, L. E. (1998). *A Modern Course in Statistical Physics* (second edition). John Wiley, New York.
- Scully, M. O. and Zubairy, M. S. (1997). *Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge. Имеется перевод: Скалли М. О., Зубайри М. С. *Квантовая оптика* / Пер. с англ.; Под ред. В. В. Самаранцева. — М.: Физматлит, 2003.
- Spohn, H. (1978). Entropy production for quantum dynamical semigroups. *J. Math. Phys.*, **19**, 1227–1230.

- Spohn, H. (1980). Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits. *Rev. Mod. Phys.*, **53**, 569–615.
- Sudarshan, E. C. G. (1963). Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 277–279.
- Walls, D. F. and Milburn, G. J. (1994). *Quantum Optics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Weiss, U. (1999). *Quantum Dissipative Systems* (second edition). World Scientific, Singapore.
- Wu, F. Y., Grove, R. E. and Ezekiel, S. (1975). Investigation of the spectrum of resonance fluorescence induced by a monochromatic field. *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1426–1429.

ГЛАВА 4

Декогерентизация

Взаимодействие открытых квантовых систем с их окружением создает корреляции между состояниями системы и окружения. Окружение несет информацию об открытых квантовых системах в форме этих корреляций. При определенных взаимодействиях система-окружение окружение ведет себя подобно квантовому зонду, выполняющему своего рода непрямые измерения на открытой системе. После взятия следа по степеням свободы окружения возникает определенный набор состояний гильбертова пространства открытых систем, проявляющий устойчивые свойства. В то же время суперпозиция состояний разрушается с течением времени, часто это происходит почти мгновенно. Такое динамическое разрушение квантовой когерентности, вызываемое окружением, называется декогерентизацией. Это приводит к динамическому отбору различного набора чистых состояний открытой системы и противодействует принципу суперпозиции открытой системы в гильбертовом пространстве.

Теория декогерентизации приводит к ряду интересных физических приложений, простирающихся от фундаментальных вопросов квантовой механики до технологических приложений в обработке квантовой информации. Кроме того, современные методы делают доступным наблюдение и контроль явления декогерентизации, а также количественное сравнение с теоретическим анализом. Важное приложение декогерентизации — объяснение предельной чувствительности когерентных суперпозиций макроскопически различных состояний при влиянии их окружений.

Оказывается, что в различных теоретических моделях взаимодействие с окружением приводит к разрушению когерентности таких суперпозиций на предельно коротких масштабах времени, более коротких, чем соответствующие масштабы времени открытых систем. Таким образом, окружение индуцирует появление эффективных секторов суперотбора. Последние являются результатом разложения редуцированного гильбертового пространства системы на когерентные подпространства таким образом, что когерентности между различными подпространствами малы (не больше локально наблюдаемых через измерения на редуцированной системе). Такое

разрушение квантовых когерентностей имеет особое значение при формулировке динамических моделей квантовых измерений. Это обеспечивает физический механизм для выбора предпочтительного измерительного базиса, который существует для определенного набора аппаратных состояний, что также называется классическими альтернативными результатами.

В разделе 4.1 мы начнем с общего обсуждения динамической структуры, которая ведет к тому, что может быть названо идеальной декогерентизацией, индуцируемой окружением, то есть разрушением квантовой когерентности без затухания. Основная концепция развита так, что динамический выбор предпочтительного базиса, времени декогерентизации и возникновения когерентных подпространств иллюстрируется с помощью простой аналитически разрешимой модели в разделе 4.2. Раздел 4.3 посвящен рассмотрению различных фундаментальных физических механизмов декогерентизации, которые приводят к пространственной локализации сложных квантовых объектов. Это высокотемпературное квантовое броуновское движение, декогерентизация через возбужденные внутренние степени свободы и декогерентизация через рассеяние частиц. Локализация в пространстве будет видна почти одновременно для макроскопических объектов.

Взаимодействие между декогерентизацией и диссиляцией исследуется в разделе 4.4 посредством примера затухающего гармонического осциллятора. Центральной темой будет определение времени, требуемого для разрушения квантовых когерентностей через резервуар в вакуумном состоянии и в присутствии термического шума. В качестве приложения теоретического анализа в разделе 4.5 мы изучаем эксперимент по декогерентизации состояний электромагнитного поля, который был выполнен Харошем и сотрудниками. Этот эксперимент позволил наблюдать ход декогерентизации в мезоскопическом варианте известного *мысленного* эксперимента Шредингера, включающего суперпозицию живого и мертвого кота.

Точное рассмотрение декогерентизации в модели Кальдейры–Леггетта, включающей полную немарковскую динамику, представлено в разделе 4.6. В заключение в разделе 4.7 мы обсудим роль окружения, стимулирующего декогерентизацию в квантовой теории измерений.

4.1. Функция декогерентизации

В чистом виде декогерентизация возникает для определенных типов взаимодействий система-резервуар. Это взаимодействия типа тех, которые используются для описания идеального непрямого измерения (см. раздел 2.4.6) над открытой системой посредством окружения, играющего роль

квантового зонда¹. Характеристической особенностью этого типа взаимодействия является то, что редуцированная система воздействует на окружение способом, приводящим к определенным корреляциям система-резервуар, однако обратное действие резервуара на определенные состояния системы пренебрежительно мало. Как результат, затухание заселенностей редуцированной матрицы плотности в указанном базисном представлении мало, в то время как когерентности чрезвычайно быстро гаснут на предельно коротких масштабах времени.

Начальная точка нашего обсуждения — микроскопическая форма гамильтониана

$$H = H_S + H_B + H_I = H_0 + H_I, \quad (4.1)$$

где гамильтониан взаимодействия берется в виде

$$H_I = \sum_n |n\rangle\langle n| \otimes B_n \equiv \sum_n A_n \otimes B_n. \quad (4.2)$$

Этот гамильтониан выделяет особый набор ортонормированных базисных векторов $|n\rangle$ редуцированной системы, пока для произвольных операторов резервуара $B_n = B_n^\dagger$. В дальнейшем мы предполагаем, что гамильтониан системы H_S коммутирует с проекциями $A_n = |n\rangle\langle n|$, что приводит к результату

$$[H_0 + H_I, A_n] = [H_0, A_n] = 0, \quad (4.3)$$

такому что для операторов системы A_n значения сохраняются. Как следствие, средняя энергия оказывается постоянной во времени, то есть

$$\frac{d}{dt} \langle H_S(t) \rangle = 0. \quad (4.4)$$

Гамильтониан в представлении взаимодействия, таким образом, приобретает форму

$$H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t} = \sum_n |n\rangle\langle n| \otimes B_n(t), \quad B_n(t) = e^{iH_0 t} B_n e^{-iH_0 t}, \quad (4.5)$$

в этом представлении оператор эволюции во времени для составной системы может быть записан как

$$U(t) = T_{\leftarrow} \exp \left[-i \int_0^t \sum_n |n\rangle\langle n| \otimes B_n(s) ds \right]. \quad (4.6)$$

¹Необходимо подчеркнуть, что мы не говорим о реальном квантовом измерении, вовлекающем редукцию вектора состояний, а только об определенном типе взаимодействия система-резервуар, который формирует эти непрямые взаимодействия.

Эти выражения показывают, что, как прямое следствие коммутационного соотношения (4.3), базисные состояния $|n\rangle$ не подвержены влиянию связанный динамики и что начальное состояние

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \otimes |\phi\rangle, \quad (4.7)$$

где $|\phi\rangle$ — произвольное состояние резервуара, эволюционирует в состояние

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \otimes |\phi_n(t)\rangle, \quad (4.8)$$

где

$$|\phi_n(t)\rangle = T_{\leftarrow} \exp \left[-i \int_0^t B_n(s) ds \right] |\phi\rangle \equiv V_n(t) |\phi\rangle. \quad (4.9)$$

Состояние (4.8) — запутанное состояние система-резервуар, задаваемое суперпозицией состояний $|n\rangle \otimes |\phi_n(t)\rangle$. Последнее представляет собой идеальные корреляции между различными состояниями системы $|n\rangle$ и соответствующими состояниями резервуара $|\phi_n(t)\rangle$. Благодаря измерению, резервуар передает информацию состоянию системы. Однако $|\Psi(t)\rangle$ еще и суперпозиция, включающая все состояния системы $|n\rangle$, уже представленные в начальном состоянии $|\Psi(0)\rangle$. Как следствие, когерентности также представлены в редуцированной матрице плотности системы, которая задается выражением

$$\rho_S(t) = \text{tr}_B \{ |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| \} = \sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle \langle m| \langle \phi_m(t) | \phi_n(t) \rangle. \quad (4.10)$$

Из унитарности следует, что $\langle \phi_n(t) | \phi_n(t) \rangle = 1$ и, таким образом, диагональные элементы $\rho_S(t)$ постоянны во времени. Однако недиагональные элементы $\rho_S(t)$ в общем случае изменяются со временем. Временная зависимость матричных элементов $\langle n | \rho_S(t) | m \rangle$ задается перекрытием соответствующих состояний резервуара $|\phi_n(t)\rangle$ и $|\phi_m(t)\rangle$, то есть

$$|\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle| = \exp[\Gamma_{nm}(t)], \quad \Gamma_{nm}(t) \leq 0. \quad (4.11)$$

При $n \neq m$ величина $\Gamma_{nm}(t)$ описывает поведение недиагональных элементов редуцированной матрицы плотности и в дальнейшем будет называться функцией декогерентизации.

Временная зависимость функции декогерентизации $\Gamma_{nm}(t)$, вообще говоря, сильно зависит от характерного вида связывания система-резервуар, различных параметров, лежащих в основе микроскопической модели, а также от свойств начального состояния. Для многих физических систем это означает, что необратимая динамика, порожденная взаимодействием система-резервуар, приводит к быстрому уменьшению перекрытия $\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle$ при $n \neq m$. Несколько примеров такого поведения будут рассмотрены в следующих разделах. Рассмотрим такой предельный случай, что при $n \neq m$ перекрытие состояний $|\phi_n(t)\rangle$ и $|\phi_m(t)\rangle$ уменьшается до нуля по истечении времени, много большего времени декогерентизации, характерный масштаб которого есть τ_D

$$\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle \rightarrow \delta_{nm} \quad \text{для} \quad t \gg \tau_D. \quad (4.12)$$

Это условие приводит к редуцированной матрице плотности системы

$$\rho_S(t) \rightarrow \sum_n |c_n|^2 |n\rangle \langle n|. \quad (4.13)$$

Когерентности матриц плотности в базисе $|n\rangle$ исчезают, как результат взаимодействия с окружением. После времен $t \gg \tau_D$ состояние $\rho_S(t)$ редуцированной системы характеризуется как некогерентная смесь состояний $|n\rangle$, в том смысле, что интерференционные члены вида $\langle m|A|n\rangle$, $n \neq m$, больше не появляются в математическом ожидании каких-либо наблюдаемых системы A . Суперпозиции состояний $|n\rangle$ эффективно разрушаются локально, что означает, что они ненаблюдаются для всех измерений, выполненных только на системе S .

Динамический переход, выражаемый (4.13), называется декогерентизацией. Согласно этому соотношению редуцированная матрица плотности становится диагональной в частном наборе базисных состояний $|n\rangle$, который иногда называется предпочтительным базисом. Ясно, что эти базисные состояния различаются по виду взаимодействия (4.2) между системой и окружением, а поведение функции декогерентизации отражено в (4.12). Кроме того, в силу условия (4.3), предпочтительный базис состоит из тех состояний, которые не затронуты за время эволюции. Таким образом, эти состояния стабильны относительно взаимодействия система-окружение.

В более общем виде может быть изучено начальное состояние целой объединенной системы вида

$$\rho(0) = |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)| \otimes \rho_B(0), \quad (4.14)$$

где

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (4.15)$$

— начальное состояние системы, а $\rho_B(0)$ может быть любой матрицей плотности резервуара, например, состоянием термодинамического равновесия. Редуцированная матрица плотности системы в момент времени t может быть записана как

$$\rho_S(t) = \sum_{nm} c_n c_m^* |n\rangle \langle m| \operatorname{tr}_B \{ V_m^{-1}(t) V_n(t) \rho_B(0) \}, \quad (4.16)$$

таким образом, функция декогерентизации принимает следующий вид:

$$\Gamma_{nm}(t) = \ln |\langle V_m^{-1}(t) V_n(t) \rangle|. \quad (4.17)$$

Здесь угловые скобки обозначают математическое ожидание, взятое по начальной плотности резервуара $\rho_B(0)$.

Как можно видеть из (4.4), средняя энергия системы есть константа во времени для простого класса изученных здесь моделей. В противоположность, энтропия редуцированной системы в общем зависит от времени, так как исходное чистое состояние преобразуется в статистическую смесь с течением времени. Определим поведение линейной энтропии (2.127)

$$S_l(\rho_S(t)) = 1 - \sum_{nm} |c_n|^2 |c_m|^2 \exp[2\Gamma_{nm}(t)]. \quad (4.18)$$

Представленная формула показывает, что линейная энтропия может быть выражена на языке начальных заселенностей $|c_n|^2$ и функции декогерентизации $\Gamma_{nm}(t)$. Отметим, что $S_l(\rho_S(0)) = 0$, так как мы начали с исходного чистого состояния. Для полной декогерентизации в пределе большого времени мы получаем

$$S_l(\rho_S(+\infty)) = 1 - \sum_n |c_n|^4. \quad (4.19)$$

Например, если начальное состояние (4.15) максимально запутано, то есть если все неисчезнувшие амплитуды c_n равны по величине, $|c_n| = 1/\sqrt{D}$ для $n = 1, 2, \dots, D$, то мы находим, что линейная энтропия достигает своего максимально возможного значения в D -мерном пространстве

$$S_l(\rho_S(+\infty)) = 1 - \frac{1}{D}. \quad (4.20)$$

Гамильтониан взаимодействия (4.2) характеризуется специальным набором базисных состояний $|n\rangle$. Это именно тот базис, который не подвергается влиянию взаимодействия с окружением, так как величины $A_n = |n\rangle\langle n|$ сохраняются. В противоположность этому, суперпозиция таких базисных состояний в общем случае реагирует предельно чувствительно на это взаимодействие. Рассмотрим снова взаимодействие вида $H_I = \sum_n A_n \otimes B_n$, где теперь операторы

$$A_n = \sum_{j=1}^{d_n} |nj\rangle\langle nj| \quad (4.21)$$

представляют ортогональное разложение состояния системы пространства \mathcal{H}_S в линейных подпространствах $A_n \mathcal{H}_S$ размерности $d_n \geq 1$. Решение нестационарного уравнения Шредингера, соответствующее начальному состоянию, есть

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n,j} c_{nj} |nj\rangle \otimes |\phi\rangle, \quad (4.22)$$

что немедленно дает редуцированную матрицу

$$\rho_S(t) = \sum_{nm} \sum_{jj'} c_{nj} c_{mj'}^* |nj\rangle\langle mj'| \langle \phi_m(t)| \phi_n(t)\rangle. \quad (4.23)$$

В условиях полной декогерентизации, выражаемых (4.12), приведенная выше запись принимает вид

$$\rho_S(t) \rightarrow \sum_n \sum_{jj'} c_{nj} c_{nj'}^* |nj\rangle\langle nj'| \quad \text{для } t \gg \tau_D. \quad (4.24)$$

Таким образом, мы видим, что когерентности между состояниями $|nj\rangle$ для различных j и фиксированных n еще видимы в редуцированной матрице плотности системы. Другими словами, когерентности, относящиеся к одному и тому же подпространству $A_n \mathcal{H}_S$, не подвержены взаимодействию с окружением. Последнее, таким образом, порождает ортогональное разложение гильбертова пространства систем в *когерентных подпространствах* $A_n \mathcal{H}_S$ или *секторах суперотбора*,

$$\mathcal{H}_S = \sum_n A_n \mathcal{H}_S, \quad (4.25)$$

таких что когерентности наблюдаются локально только в пределах одного и того же подпространства. Измерение любой наблюданной системы ви-

да $A = \sum_n a_n A_n$, то есть любой наблюдаемой системы, которая коммутирует с проекциями A_n , представляет собой квантовое неразрушающее измерение состояния (4.24). Таково общее описание для порождаемого средой правила суперотбора, называемого в английском языке *einselection* (сокращение от *environment – induced superselection*), термин ввел Зурек (Zurek, 1998).

Мы завершаем этот раздел исследованием поведения функции декогерентизации на малых временах. Для этого, для простоты, мы рассмотрим важный случай, когда среднее операторов резервуара B_n , берущееся по начальному состоянию $\rho_B(0)$, равно нулю, то есть $\langle B_n(t) \rangle = 0$. Тогда, используя разложение унитарного оператора эволюции $V(t)$ по малому времени, из (4.9) легко получается соотношение

$$\Gamma_{nm}(t) \approx -\frac{t^2}{2} \langle (B_n - B_m)^2 \rangle, \quad (4.26)$$

показывающее, что матричные элементы $\Gamma_{nm}(t)$ пропорциональны квадрату t малых времен. Соответственно, поведение линейной энтропии (4.18) при малых временах оказывается следующим:

$$S_l(\rho_S(t)) \approx t^2 \sum_{n \neq m} |c_n|^2 |c_m|^2 \langle (B_n - B_m)^2 \rangle, \quad (4.27)$$

то есть растет квадратично во времени.

4.2. Точно решаемая модель

Общее обсуждение предыдущего раздела может быть проиллюстрировано при помощи характерной модели система-резервуар (Unruh, 1995; Palma, Suominen, Ekert, 1996). Преимущество этой модели в том, что, с одной стороны, она показывает несколько важных особенностей декогерентизации, а с другой стороны, она проста и допускает точное аналитическое решение. Как будет видно, эта модель представляет декогерентизацию в чистом виде, поскольку описывает разрушение квантовой когерентности без изменения населенности.

4.2.1. Временная эволюция всей системы

Мы рассмотрим двухуровневую систему, которая связана с резервуаром гармонических осцилляторов. Суммарный гамильтониан в шредингере-

ровской картине принимает вид

$$\begin{aligned} H &= H_S + H_B + H_I = \\ &= H_0 + H_I = \\ &= \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k \sigma_3 \left(g_k b_k^\dagger + g_k^* b_k \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где ω_0 — расстояние между уровнями двухуровневой системы и k относятся к модам резервуара с частотами ω_k , а операторы и рождения уничтожения бозонов b_k^\dagger и b_k удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[b_k, b_{k'}^\dagger \right] = \delta_{kk'}. \quad (4.29)$$

g_k — константы связи, которые описывают связь двухуровневых систем и мод резервуара b_k через матрицы Паули σ_3 . Гамильтониан (4.28) дает простой частный пример спин-бозонной модели. Изначально модель была введена для изучения декогерентизации в квантовых компьютерах (Di-Vincenzo, 1995). В этом контексте двухуровневая система именуется как *кубит*, элементарный строительный блок квантового компьютера (Steane, 1998; Bouwmeester, Ekert, Zeilinger, 2000).

Введем базисные векторы состояния кубитов согласно условиям $\sigma_3|0\rangle = -|0\rangle$ и $\sigma_3|1\rangle = +|1\rangle$. В обычном представлении мы, таким образом, имеем

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Гамильтониан (4.28) имеет вид выражений (4.1) и (4.2), которые использовались нами в общих рассуждениях. В частности, матрица Паули σ_3 задает сохраняющуюся величину для данной модели, поскольку она коммутирует с суммарным гамильтонианом $[H, \sigma_3] = 0$. Отсюда следует, что заселенности

$$\rho_{11} = \text{tr}_{S+B} \{ |1\rangle\langle 1| \rho(t) \} = \langle 1 | \rho_S(t) | 1 \rangle, \quad (4.31)$$

$$\rho_{00} = \text{tr}_{S+B} \{ |0\rangle\langle 0| \rho(t) \} = \langle 0 | \rho_S(t) | 0 \rangle \quad (4.32)$$

являются константами во времени, где $\rho(t)$ есть матрица плотности всей системы. Для определения функции декогерентизации для этой модели заметим, что в представлении взаимодействия гамильтониан задается как

$$H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t} = \sum_k \sigma_3 \left(g_k b_k^\dagger e^{i\omega_k t} + g_k^* b_k e^{-i\omega_k t} \right), \quad (4.33)$$

а унитарный оператор эволюции в картине взаимодействия может быть записан как

$$U(t) = T_{\leftarrow} \exp \left[-i \int_0^t H_I(s) ds \right]. \quad (4.34)$$

Так как коммутатор гамильтониана взаимодействия для двух разных времен является обычной числовой функцией

$$[H_I(t), H_I(t')] = -2i \sum_k |g_k|^2 \sin \omega_k (t - t') \equiv -2i\varphi(t - t'), \quad (4.35)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^t [H_I(s), H_I(s')] \theta(s - s') ds' \right] \exp \left[-i \int_0^t H_I(s) ds \right] = \\ &= \exp \left[i \int_0^t ds \int_0^t \varphi(s - s') \theta(s - s') ds' \right] V(t), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где унитарный оператор $V(t)$ определяется как

$$V(t) = \exp \left[\frac{1}{2} \sigma_3 \sum_k (\alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k) \right] \quad (4.37)$$

с амплитудами

$$\alpha_k = 2g_k \frac{1 - e^{i\omega_k t}}{\omega_k}. \quad (4.38)$$

Таким образом, мы видим, что фазовый множитель, зависящий от времени, управляет отдельно оператором $V(t)$, определенным выше. Временная зависимость оказывается точно того же вида, что и определенная в предыдущем разделе. Для произвольного состояния резервуара $|\phi\rangle$ мы находим

$$V(t) (|0\rangle \otimes |\phi\rangle) = |0\rangle \otimes \prod_k D(-\alpha_k/2) |\phi\rangle \equiv |0\rangle \otimes |\phi_0(t)\rangle, \quad (4.39)$$

$$V(t) (|1\rangle \otimes |\phi\rangle) = |1\rangle \otimes \prod_k D(+\alpha_k/2) |\phi\rangle \equiv |1\rangle \otimes |\phi_1(t)\rangle, \quad (4.40)$$

где

$$D(\alpha_k) = \exp \left[\alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k \right] \quad (4.41)$$

есть генератор когерентного состояния. Таким образом, взаимодействие системы с окружением создает корреляции между состояниями системы $|0\rangle$ и $|1\rangle$ и определенными состояниями резервуара $|\phi_0(t)\rangle$ и $|\phi_1(t)\rangle$ соответственно. Если изначально резервуар не в вакуумном состоянии, мы находим, что состояния резервуара

$$|\phi_0(t)\rangle = \prod_k |-\alpha_k/2\rangle, \quad |\phi_1(t)\rangle = \prod_k |+\alpha_k/2\rangle \quad (4.42)$$

есть произведения когерентных состояний с амплитудами $\pm\alpha_k/2$, где знак смещения генерируется $D(\alpha_k)$, который, в свою очередь, приводится в действие квантовым числом состояния системы.

4.2.2. Разрушение когерентностей и фактор декогерентизации

Предположим, что начальное состояние суммарной системы задается

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B, \quad \rho_B = \frac{1}{Z_B} e^{-\beta H_B}. \quad (4.43)$$

Здесь резервуар находится в термодинамически равновесном состоянии при температуре T , где $\beta = 1/k_B T$ и Z_B есть статистическая частичная функция резервуара. Матричные элементы матрицы плотности системы могут быть определены из соотношения

$$\rho_{ij}(t) = \langle i | \rho_S(t) | j \rangle = \langle i | \text{tr}_B \{ V(t) \rho(0) V^{-1}(t) \} | j \rangle, \quad (4.44)$$

где $i, j = 0, 1$. Легко проверить, что заселенности остаются постоянными во времени, $\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0)$, $\rho_{00}(t) = \rho_{00}(0)$ до тех пор, пока когерентности ведут себя как

$$\rho_{10}(t) = \rho_{01}(t)^* = \rho_{10}(0) e^{\Gamma(t)}. \quad (4.45)$$

С помощью уравнений (4.37) и (4.44) находится функция декогерентизации

$$\Gamma(t) = \ln \text{tr}_B \left\{ \exp \left[\sum_k \left(\alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k \right) \right] \rho_B \right\} = \sum_k \ln \left\langle \exp \left[\alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k \right] \right\rangle. \quad (4.46)$$

Угловые скобки обозначают математическое ожидание с соответствующим температурным распределением ρ_B . Математическое ожидание

$$\chi(\alpha_k, \alpha_k^*) \equiv \left\langle \exp \left[\alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k \right] \right\rangle \quad (4.47)$$

есть вигнеровская характеристическая функция k -й моды термостата. Она представляет собой функцию Гаусса, которая определяется выражением

$$\chi(\alpha_k, \alpha_k^*) = \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha_k|^2 \left\langle \{b_k, b_k^\dagger\} \right\rangle \right]. \quad (4.48)$$

Таким образом, мы находим, что

$$\Gamma(t) = - \sum_k \frac{1}{2} |\alpha_k|^2 \left\langle \{b_k, b_k^\dagger\} \right\rangle = - \sum_k \frac{4|g_k|^2}{\omega_k^2} \operatorname{cth}(\omega_k/2k_B T) (1 - \cos \omega_k t). \quad (4.49)$$

Рассмотрим теперь непрерывный предел для мод термостата. Вводя плотность $f(\omega)$ мод частоты ω , спектральную плотность определим как

$$J(\omega) = 4f(\omega)|g(\omega)|^2. \quad (4.50)$$

Мы можем написать функцию декогерентизации как

$$\Gamma(t) = - \int_0^\infty J(\omega) \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} d\omega. \quad (4.51)$$

Таким образом, мы получили явное выражение для функции декогерентизации для представленной модели. Очевидно, что $\Gamma(t)$ зависит от температуры T окружения и формы спектральной плотности $J(\omega)$. Чтобы продемонстрировать динамическую характеристику функции декогерентизации, возьмем спектральную плотность вида

$$J(\omega) = A\omega e^{-\omega/\Omega}. \quad (4.52)$$

Мы предполагаем линейный рост $J(\omega)$ для малых частот и экспоненциальное обрезание на частотах порядка Ω . Такая форма для спектральной плотности обычно получается в квантовом оптическом режиме, где $g(\omega) \sim \sqrt{\omega}$, с учетом допущения одномерности поля мод термостата с постоянной плотностью мод $f(\omega) = \text{const}$. Отметим также, что у нас есть безразмерная

константа связи, постоянный сомножитель A спектральной плотности, который оказывается является безразмерным и будет приниматься равным 1.

Для того чтобы определить функцию декогерентизации, полезно разделить ее на вакуумную часть $\Gamma_{vac}(t)$ и термическую часть $\Gamma_{th}(t)$ как показано ниже:

$$\Gamma(t) = \Gamma_{vac}(t) + \Gamma_{th}(t). \quad (4.53)$$

Вклад вакуума может быть определен явно

$$\Gamma_{vac}(t) \equiv - \int_0^\infty e^{-\omega/\Omega} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega} d\omega = -\frac{1}{2} \ln(1 + \Omega^2 t^2). \quad (4.54)$$

Он не зависит от температуры и описывает, как флуктуации вакуумного поля влияют на когерентность открытой системы. Эта часть зависит от частоты обрезания Ω . Термический вклад в функцию декогерентизации задается как

$$\begin{aligned} \Gamma_{th}(t) &\equiv - \int_0^\infty e^{-\omega/\Omega} [\coth(\omega/2k_B T) - 1] \frac{1 - \cos \omega t}{\omega} d\omega = \\ &= -\frac{1}{\beta} \int_0^t ds \int_0^\infty e^{-k_B T x / \Omega} [\coth(x/2) - 1] \sin(sx/\beta) dx. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Если принять, что $k_B T \ll \Omega$, термический вклад становится равным

$$\begin{aligned} \Gamma_{th}(t) &\approx -\frac{1}{\beta} \int_0^t ds \int_0^\infty [\coth(x/2) - 1] \sin(sx/\beta) dx = \\ &= -\ln \left[\frac{\text{sh}(t/\tau_B)}{t/\tau_B} \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Здесь мы выполнили интегрирование по x с помощью формулы

$$\int_0^\infty [\coth(x/2) - 1] \sin(\alpha x) dx = \pi \coth(\pi\alpha) - \frac{1}{\alpha} \quad (4.57)$$

и ввели время термической корреляции

$$\tau_B = \frac{\beta}{\pi} = \frac{1}{\pi k_B T} \approx 2,43 \cdot 10^{-12} \frac{\text{с}}{T[\text{К}]}. \quad (4.58)$$

Суммируя результаты, мы можем записать функцию декогерентизации как

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{2} \ln(1 + \Omega^2 t^2) - \ln \left[\frac{\operatorname{sh}(t/\tau_B)}{t/\tau_B} \right]. \quad (4.59)$$

Очевидно, можно определить три различных временных режима:

1. Режим малых времен $t \ll \Omega^{-1}$: в этом режиме величина Γ увеличивается пропорционально квадрату t

$$\Gamma(t) \approx -\frac{1}{2}\Omega^2 t^2, \quad (4.60)$$

рассматриваемое выражение следует прямо из разложения оператора эволюции (см. (4.26)) по малому времени. Отметим, что поведение при малых временах в этом режиме полностью определяется вакуумным вкладом Γ_{vac} .

2. Вакуумный режим $\Omega^{-1} \ll t \ll \tau_B$: здесь мы можем приблизительно считать функцию декогерентизации как

$$\Gamma(t) \approx -\ln \Omega t. \quad (4.61)$$

В этом диапазоне времени эффекты декогерентизации происходят, главным образом, благодаря флуктуациям поля.

3. Термический режим $\tau_B \ll t$: этот режим может быть назван марковским режимом с величиной декогерентизации, увеличивающейся линейно во времени:

$$\Gamma(t) \approx -\frac{t}{\tau_B}, \quad (4.62)$$

что означает, что недиагональные элементы редуцированной матрицы плотности экспоненциально угасают с интенсивностью, задаваемой τ_B^{-1} .

График функции декогерентизации $\Gamma(t)$ показан на рис. 4.1 вместе с указанными выше режимами.

4.2.3. Когерентные подпространства и зависимость от размера системы

Пример приведенной выше модели может быть также использован для иллюстрации когерентных подпространств и зависимости функции декогерентизации от размера системы (Palma, Suominen, Ekert, 1996). Для этого

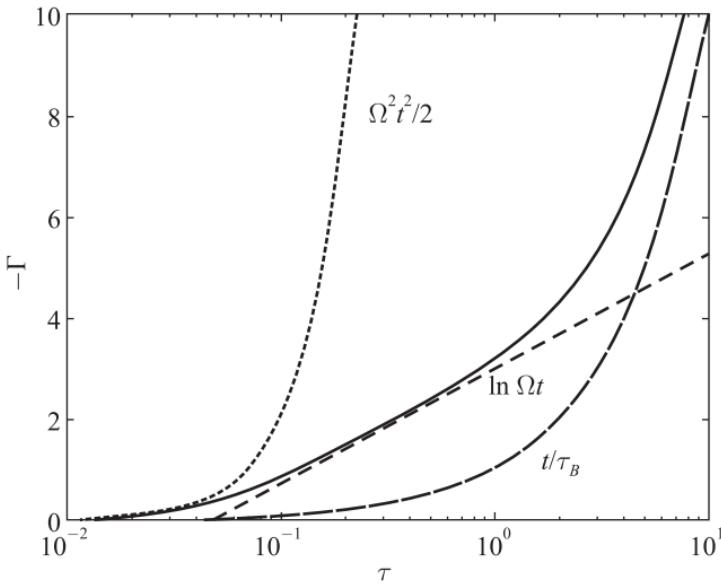


Рис. 4.1. График функции декогерентизации $\Gamma(t)$ в полулогарифмических координатах, соответствующий уравнению (4.59), как функции безразмерной переменной времени $\tau = t/\tau_B$, где $\Omega\tau_B = 20$ (сплошная линия). Три приближения, задаваемые в уравнениях (4.60), (4.61) и (4.62), также указаны (штриховые линии).

мы рассмотрим N кубитов, помеченных индексами j , которые взаимодействуют с резервуаром согласно (4.28). Таким образом, общий гамильтониан выражается как

$$H = \frac{\omega_0}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_3^{(j)} + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_{j=1}^N \sum_k \sigma_3^{(j)} \left(g_{kj} b_k^\dagger + g_{kj}^* b_k \right). \quad (4.63)$$

Здесь мы полагаем, что кубиты не взаимодействуют непосредственно друг с другом. Константа связи g_{kj} описывает связь j -го кубита с модой k . В дальнейшем мы полагаем, что кубиты имеют фиксированные положения $\vec{r}^{(j)}$ в пространстве и что резервуар может быть охарактеризован через определенную корреляционную длину r_c . Тогда мы можем различать две предельные ситуации.

Сначала рассмотрим случай, когда минимальное расстояние между кубитами больше по сравнению с корреляционной длиной r_c резервуара. Тогда можно предположить, что кубиты взаимодействуют с независимыми ре-

резервуарами, по одному для каждого кубита. Обозначая отдельный кубит через $\{m^{(j)}\}$, где $m^{(j)}$ принимает значения 0 или 1, для матричных элементов N -кубитовой матрицы плотности мы имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \{\tilde{m}^{(j)}\} | \rho_S(t) | \{m^{(j)}\} \right\rangle &= \left\langle \{\tilde{m}^{(j)}\} | \rho_S(0) | \{m^{(j)}\} \right\rangle \times \\ &\times \prod_{j=1}^N \left\langle \exp \left[\left(\tilde{m}^{(j)} - m^{(j)} \right) \sum_k \left(\alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k \right) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Тогда функция декогерентизации может быть записана как

$$\Gamma(\tilde{m}^{(j)}, m^{(j)}, t) = \sum_{j=1}^N \left| \tilde{m}^{(j)} - m^{(j)} \right| \Gamma(t), \quad (4.65)$$

где $\Gamma(t)$ — функция декогерентизации для отдельного кубита, задаваемая (4.46). Таким образом, функция декогерентизации является целочисленно кратной функции декогерентизации отдельного кубита. Это свойство исчезает тогда и только тогда, когда $\tilde{m}^{(j)} = m^{(j)}$ для всех кубитов, то есть для диагональных элементов N -кубитовой матрицы плотности. Если два однокубитовых квантовых числа отличны друг от друга, то функция декогерентизации задается выражением для отдельного кубита, в то время как она пропорциональна суммарному количеству кубитов, если квантовые числа всех кубитов различны. В последнем случае мы имеем формулу

$$\Gamma(\tilde{m}^{(j)}, m^{(j)}, t) = N \cdot \Gamma(t), \quad (4.66)$$

соответствующую максимальной декогерентизации.

Рассмотрим теперь случай, когда линейный размер суммарной N -кубитовой системы мал в сравнении с корреляционной длиной r_c . Тогда кубиты с резервуаром взаимодействуют коллективно, мы можем допустить, что для фиксированной моды k все g_{kj} равны друг другу. Тогда система кубитов эффективно взаимодействует с резервуаром через коллективный оператор $\sum_j \sigma_3^{(j)}$. Функция декогерентизации, таким образом, находится как

$$\Gamma(\tilde{m}^{(j)}, m^{(j)}, t) = \left(\widetilde{M} - M \right)^2 \Gamma(t), \quad (4.67)$$

где $M = \sum_j m^{(j)}$ и $\widetilde{M} = \sum_j \tilde{m}^{(j)}$. Это показывает, что функция декогерентизации для N -кубитовой системы пропорциональна квадрату разности сумм M и \widetilde{M} квантовых чисел $\{m^{(j)}\}$ и $\{\tilde{m}^{(j)}\}$.

Когерентные подпространства определяются условием $M = \tilde{M}$, то есть отдельные когерентные подпространства оказываются натянутыми на базисные состояния $|\{m^{(j)}\}\rangle$ с фиксированным значением для суммы $M = \sum_j m^{(j)}$. Например, если $N = 2$, двухкубитовые состояния $|10\rangle$ и $|01\rangle$

формируют нетривиальное двумерное когерентное подпространство.

Формула (4.67) демонстрирует, что колективные взаимодействия могут привести к сильному увеличению декогерентизации. Случай максимальной декогерентизации получается при $\tilde{M} = N$, $M = 0$ или при $\tilde{M} = 0$, $M = N$, что в результате дает

$$\Gamma(\tilde{m}^{(j)}, m^{(j)}, t) = N^2 \cdot \Gamma(t). \quad (4.68)$$

Суммируя, получаем, что в случае независимых взаимодействий с резервом максимальная декогерентизация линейно увеличивается вместе с размером системы N . В случае колективного взаимодействия этот рост пропорционален N^2 — квадрату размера системы.

4.3. Марковские механизмы декогерентизации

Ряд важных физических процессов, приводящих к декогерентизации, может быть проанализирован уже с помощью простых марковских моделей. Здесь мы рассмотрим несколько простых физических механизмов, которые вызывают декогерентизацию координаты центра масс сложного квантового объекта и, таким образом, приводят к локализации в координатном пространстве. Чтобы сделать наше обсуждение по возможности простым, мы ограничим себя пределом, когда эффектами отдачи пренебрежимо малы, и таким образом мы пренебрежем затуханием. Обобщения, а также марковские эффекты будут развиты в следующих разделах.

4.3.1. Интенсивность декогерентизации

Рассмотрим основное уравнение в следующей общей форме:

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -i[H_S, \rho_S(t)] - \Lambda[\vec{x}, [\vec{x}, \rho_S(t)]], \quad (4.69)$$

где

$$H_S = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 \quad (4.70)$$

задает свободную эволюцию координаты центра масс \vec{x} квантового объекта с суммарной массой m . Как будет показано в следующем разделе, угасание недиагональных членов в редуцированной матрице плотности ρ_S часто

проявляется на предельно коротких масштабах времени, намного короче, чем времена, соответствующие затуханию диагоналей и свободной эволюции редуцированной системы. В первом приближении, таким образом, мы можем пренебречь свободной эволюцией и решить основное уравнение, игнорируя часть гамильтониана. Это дает следующий результат:

$$\rho_S(t, \vec{x}, \vec{x}') \approx \exp[-\Lambda(\vec{x} - \vec{x}')^2 t] \rho_S(0, \vec{x}, \vec{x}'), \quad (4.71)$$

показывающий, что недиагональные элементы затухают в соответствии с множителем $\exp[-\Lambda \Delta x^2 t]$, где

$$\Delta x \equiv |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (4.72)$$

показывает отклонение от диагональных элементов матрицы плотности. Величина Λ рассматривается как интенсивность декогерентизации размерности $(время)^{-1} \times (длина)^{-2}$. Введенная в предыдущем разделе функция декогерентизации принимает вид²

$$\Gamma(t) = -\Lambda \Delta x^2 t. \quad (4.73)$$

Это позволяет нам определить соответствующее время декогерентизации как

$$\tau_D = \frac{1}{\Lambda \Delta x^2}. \quad (4.74)$$

В дальнейшем мы обсудим три основных физических механизма, которые могут быть описаны основным уравнением Маркова вида (4.69). Это квантовое броуновское движение в пределе высоких температур, декогерентизация через спонтанные и термически индуцированные переходы внутренних степеней свободы и декогерентизация посредством рассеяния частиц входящего потока. Мы увидим, что во всех случаях интенсивность декогерентизации является произведением характеристической интенсивности и квадрата волнового числа

$$\Lambda \sim (\text{интенсивность}) \times (\text{волновое число})^2. \quad (4.75)$$

Интенсивность характеризует физический процесс, вызывающий декогерентизацию, она равна интенсивности релаксации, перехода или рассеивания. Волновое число определяется термической длиной волны декогерирующего объекта, длиной волны испускаемого излучения или длиной волны де Броиля рассеиваемых частиц.

²Вышеупомянутый аргумент пренебрежения свободной эволюцией будет более строгим в следующих разделах, в частности смотрите (4.234).

4.3.2. Квантовое броуновское движение

В качестве первого примера мы рассматриваем возникновение декогерентизации в ситуациях, в которых движение коллективной степени свободы может быть описано основным квантовым уравнением Кальдейры–Леггетта (3.410). В пределе отсутствия отдачи (см. конец параграфа 3.6.4.5) основное уравнение для коллективной степени свободы \vec{x} сводится к виду (4.69), где интенсивность декогерентизации задается формулой, в которой мы снова учитываем постоянную \hbar :

$$\Lambda = \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2}. \quad (4.76)$$

Введенная термическая длина волны есть

$$\bar{\lambda}_{th} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mk_B T}}, \quad (4.77)$$

а соответствующее волновое число есть $k_{th} = 1/\bar{\lambda}_{th}$. Мы можем подставить интенсивность декогерентизации в общую формулу (4.75),

$$\Lambda = \gamma k_{th}^2. \quad (4.78)$$

Характерная интенсивность здесь — интенсивность релаксации γ , в то время как характеристическое волновое число задается термической длиной волны объекта.

Благодаря пренебрежению свободной эволюцией и эффектами затухания, диагональные элементы матрицы плотности не подвержены воздействию в ходе временной эволюции, тогда как недиагональные элементы сильно затухают. Мы определяем время релаксации τ_R временем затухания квадрата импульса частицы. Согласно уравнению (3.427) импульс свободной броуновской частицы релаксирует как $\exp(-2\gamma t)$, что дает $\tau_R = 1/4\gamma$. Из уравнений (4.74) и (4.78) мы, таким образом, заключаем, что отношение времени декогерентизации ко времени релаксации может быть записано как

$$\frac{\tau_D}{\tau_R} = 4 \left(\frac{\bar{\lambda}_{th}}{\Delta x} \right)^2. \quad (4.79)$$

Так как для макроскопических объектов термическая длина волны предельно мала, эта оценка показывает, что время декогерентизации может

отличаться от времени релаксации на много порядков (Caldeira and Leggett, 1985; Unruh and Zurek, 1989). Например, если мы рассматриваем частицу массы $m = 1 \text{ г}$ при комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$, то, полагая $\Delta x = 1 \text{ см}$, находим, что отношение двух временных масштабов τ_D и τ_R есть величина порядка $\tau_D/\tau_R \sim 10^{-40}$ (Zurek, 1991). Таким образом, даже если мы выбираем τ_R порядка возраста вселенной ($\tau_R \sim 10^{17} \text{ с}$), найденный масштаб времени декогерентизации будет предельно мал $\tau_D \sim 10^{-23} \text{ с}$.

4.3.3. Внутренние степени свободы

Разрушение когерентностей матрицы плотности центра масс может быть вызвано спонтанными или индуцированными переходами, включающими внутренние степени свободы сложного объекта. Снова обозначим координату центра масс объекта через \vec{x} , а координаты двух внутренних энергетических уровней — через $|e\rangle$ (возбужденное состояние) и $|g\rangle$ (основное состояние), разделяющая их частота перехода равна ω_0 . Окружение взято в виде поля теплового излучения при температуре T . Таким образом, мы имеем спонтанное излучение с интенсивностью γ_0 , термически индуцированное излучение и абсорбционные процессы. Основное уравнение Маркова для матрицы плотности $\rho(t)$ объекта, включающее центр масс, также как внутренние степени свободы, принимает вид уравнения Линдблада

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & -i[H_S + \omega_0|e\rangle\langle e|, \rho(t)] + \\ & + \frac{\gamma_0(N+1)}{4\pi} \int \left[A(\vec{k})\rho(t)A^\dagger(\vec{k}) - \frac{1}{2} \left\{ A^\dagger(\vec{k})A(\vec{k}), \rho(t) \right\} \right] d\Omega + \\ & + \frac{\gamma_0 N}{4\pi} \int \left[A^\dagger(\vec{k})\rho(t)A(\vec{k}) - \frac{1}{2} \left\{ A(\vec{k})A^\dagger(\vec{k}), \rho(t) \right\} \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Здесь $N = N(\omega_0)$ есть распределение Планка, а интегрирование выполняется по телесному углу $d\Omega$ в направлении $\vec{k}/|\vec{k}|$ излучения фотонов (излучение для простоты считается изотропным).

Оператор Линдблада $A(\vec{k})$ предусматривает как переход $e \rightarrow g$ внутреннего состояния, так и импульс отдачи, вызванный излучением фотонов с волновым вектором \vec{k} . Импульс отдачи описывается оператором $\exp(-i\vec{k}\vec{x})$, который изменяет импульс объекта на $-\vec{k}$. Здесь мы имеем

$$A(\vec{k}) = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\sigma_-, \quad A^\dagger(\vec{k}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\sigma_+, \quad (4.81)$$

где $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ и $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$. Отметим, что в основном уравнении (4.80) частотные сдвиги вызываются эффектом Доплера, а отдачей пренебрегаем, так как она исчезает в пределе больших суммарных масс m объекта.

Наша цель теперь — вывести эффективное основное уравнение для редуцированной матрицы плотности координаты центра масс

$$\rho_S(t) = \text{tr}_{\text{int}}\{\rho(t)\}, \quad (4.82)$$

где след берется по всем внутренним степеням свободы. При использовании $\rho = \rho_S \otimes \rho_{\text{int}}$ с помощью (4.80) мы сразу же получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= -i[H_S, \rho_S(t)] + \\ &+ \frac{\gamma_0(N+1)}{4\pi} p_e(t) \int [e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rho_S(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \rho_S(t)] d\Omega + \\ &+ \frac{\gamma_0 N}{4\pi} p_g(t) \int [e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rho_S(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \rho_S(t)] d\Omega, \end{aligned} \quad (4.83)$$

где $p_e(t) = \langle e | \rho_{\text{int}}(t) | e \rangle$ и $p_g(t) = 1 - p_e(t)$ — заселенности возбужденного и основного уровней соответственно. Эти заселенности определяются внутренней матрицей плотности $\rho_{\text{int}}(t)$, которая получается из $\rho(t)$ взятием следа по координатам центра масс. Так как динамика внутренних степеней свободы отделяется от движения центра масс, сразу находим

$$\frac{d}{dt}p_e(t) = -\gamma_0(2N+1)p_e(t) + \gamma_0 N. \quad (4.84)$$

Если объект изначально находится в возбужденном состоянии, например, $p_e(0) = 1$, мы получаем решение

$$p_e(t) = \frac{N+1}{2N+1} \exp[-\gamma_0(2N+1)t] + \frac{N}{2N+1}. \quad (4.85)$$

Выполняя интегрирование по углу в (4.83), теперь получаем следующее представление в координатном пространстве для основного уравнения, определяющего матрицу плотности центра масс

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t, \vec{x}, \vec{x}') &= -i\langle \vec{x} | [H_S, \rho_S(t)] | \vec{x}' \rangle - \\ &- \gamma_0(N + p_e(t)) \left[1 - \frac{\sin(k|\vec{x} - \vec{x}'|)}{k|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \rho_S(t, \vec{x}, \vec{x}'). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Это основное уравнение, которое описывает движение координаты центра масс \vec{x} сложного объекта, где $k = |\vec{k}| = \omega_0/c = 1/\bar{\lambda}$ — волновое число испускаемого излучения.

Мы можем различать два важных предельных случая. Во-первых, мы полагаем, что $k\Delta x \gg 1$, то есть $\Delta x \gg \bar{\lambda}$. В этом пределе второй член в (4.86) приблизительно равен

$$-\gamma_0(N + p_e(t))\rho_S(t, \vec{x}, \vec{x}'), \quad (4.87)$$

показывая, что разрушение интенсивности недиагональных элементов становится независимым от Δx . Декогерентизация, таким образом, насыщается на тех отклонениях элементов от диагональных, которые много больше длины волны излучения. Более того, отметим, что интенсивность декогерентизации приблизительно равна сумме интенсивностей спонтанного излучения (вклад $\gamma_0 p_e$), индуцированного излучения (вклад $\gamma_0 N p_e$) и индуцированной абсорбции (вклад $\gamma_0 N p_g$). Интенсивность, задаваемая в (4.87), зависит от времени через внутреннюю динамику, задаваемую (4.84). Однако при малых временах $\gamma_0(2N + 1)t \ll 1$ и начальном условии $p_e(0) = 1$ время декогерентизации находится как

$$\tau_D \approx \frac{1}{\gamma_0(N + 1)}. \quad (4.88)$$

Например, при нулевой температуре, $N = 0$, мы просто получаем $\tau_D = 1/\gamma_0$. Это очевидный результат: если длина волны излучения много меньше расстояния $\Delta x = |\vec{x} - \vec{x}'|$ между двумя наложенными локализованными волновыми пакетами, описывающими координату центра масс, то излучение отдельного фотона уже дает возможность приближения локализованного объекта и, таким образом, приводит к частичному разрушению когерентности суперпозиции. Поэтому при нулевой температуре время декогерентизации должно быть равно среднему времени излучения фотона, то есть обратному значению от интенсивности спонтанного излучения.

Рассмотрим другой предельный случай, определяемый условием $k\Delta x \ll 1$, что означает $\Delta x \ll \bar{\lambda}$. Разложение члена $1 - \sin(k\Delta x)/k\Delta x$ из (4.86) приводит к основному уравнению вида (4.69) со следующим выражением для интенсивности декогерентизации:

$$\Lambda \approx \frac{1}{6}\gamma_0(N + p_e(t))k^2. \quad (4.89)$$

Снова интенсивность декогерентизации зависит от времени. Однако для больших температур, $N \gg 1$, мы получаем коэффициент декогерентизации, независимый от времени,

$$\Lambda \approx \frac{1}{6}\gamma_0 N k^2 \approx \frac{1}{6}\gamma_0 \frac{k_B T}{\hbar\omega_0} k^2. \quad (4.90)$$

Эта интенсивность декогерентизации снова оказывается вида (4.75). Характеристическое волновое число k соответствует тому излучательному переходу, во время которого характеристическая интенсивность обуславливается интенсивностью термически индуцированных процессов.

С другой стороны, при низких температурах и для времен t , удовлетворяющих $\gamma_0 t \ll 1$, интенсивность декогерентизации находится как

$$\Lambda \approx \frac{1}{6} \gamma_0 k^2, \quad (4.91)$$

если система изначально находится в возбужденном состоянии. В качестве примера рассмотрим переход $2p \rightarrow 1s$ в водороде. Для атома водорода мы имеем $\gamma_0 \sim \alpha^3 \omega_0$, где $\alpha = e^2/\hbar c$ есть постоянная тонкой структуры. Это дает простую оценку

$$\Lambda \sim \frac{1}{6} c (\alpha k)^3 \sim 10^{20} \frac{1}{\text{см}^2 \text{с}} \quad (4.92)$$

для интенсивности декогерентизации атомного перехода.

4.3.4. Рассеяние частиц

В заключение рассмотрим разрушение когерентности через рассеяние входящего потока частиц на сложном объекте. Многие типы рассеивающих реакций вносят вклад в декогерентизацию. В случае входящего потока фотонов, например, мы можем иметь рассеяние Томсона, упругое рэлеевское или неупругое рамановское рассеяние. Чтобы вывести основное уравнение для редуцированной матрицы плотности движения центра масс (Gallis, Fleming, 1990; Joos, Zeh, 1985; Joos, 1996), мы будем использовать здесь допущения, что рассеяние упругое и что отскоками можно пренебречь. Это означает, что во время реакции рассеяния изменяются только состояния рассеянных частиц, в то время как состояние локализованного объекта остается неизменным.

Если мы принимаем координату центра масс объекта за положение собственного состояния $|\vec{x}\rangle$, то, таким образом, для реакции рассеяния мы можем написать

$$|\vec{x}\rangle |\phi\rangle \rightarrow S(|\vec{x}\rangle |\phi\rangle) = |\vec{x}\rangle |\phi_{\vec{x}}\rangle, \quad (4.93)$$

где $|\phi\rangle$ — входящая волновая функция, а S — матрица рассеяния. Выходная волновая функция обозначена $|\phi_{\vec{x}}\rangle$. Она представляет собой рассеянную волну для центра рассеяния, локализованного у \vec{x} . Отметим, что здесь предполагается, что время рассеяния τ_{scatt} много меньше характерного масштаба времени систематической эволюции системы. Как результат отдельной

реакции рассеяния, матрица плотности координаты центра масс объекта испытывает переход

$$\rho_S(\vec{x}, \vec{x}') \rightarrow \rho_S(\vec{x}, \vec{x}') \langle \phi_{\vec{x}'} | \phi_{\vec{x}} \rangle. \quad (4.94)$$

Таким образом, матричный элемент $\rho_S(\vec{x}, \vec{x}')$ умножается на перекрытие волн, рассеянных \vec{x} и \vec{x}' .

Чтобы определить перекрытие рассеянных волн, мы используем допущение, что S -матрица коммутирует с суммарным импульсом, то есть с суммарным импульсом объекта \vec{p} и импульсом \vec{q} рассеянной частицы,

$$[S, \vec{p} + \vec{q}] = 0. \quad (4.95)$$

Начальное состояние есть

$$|\vec{x}\rangle |\phi\rangle = \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x}) |\vec{x} = 0\rangle |\phi\rangle = \exp[-i(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{x}] |\vec{x} = 0\rangle \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) |\phi\rangle. \quad (4.96)$$

Таким образом, рассмотрение суммарного импульса дает

$$\begin{aligned} S(|\vec{x}\rangle |\phi\rangle) &= \exp[-i(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{x}] S(|\vec{x} = 0\rangle \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) |\phi\rangle) = \\ &= \exp[-i(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{x}] |\vec{x} = 0\rangle S_0(\exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) |\phi\rangle) = \\ &= |\vec{x}\rangle \exp[-i\vec{q} \cdot \vec{x}] S_0(\exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) |\phi\rangle) \equiv \\ &\equiv |\vec{x}\rangle |\phi_{\vec{x}}\rangle, \end{aligned} \quad (4.97)$$

где S_0 обозначает S -матрицу для рассеяния при $\vec{x} = 0$. Перекрытие рассеивающих волн может быть записано как

$$\langle \phi_{\vec{x}'} | \phi_{\vec{x}} \rangle = \left\langle \phi \left| \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{x}') S_0^\dagger \exp[-i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] S_0 \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) \right| \phi \right\rangle. \quad (4.98)$$

Дальше мы предположим, что состояние частицы $|\phi\rangle$ представляет состояние с определенным импульсом $|\vec{k}\rangle$, который нормирован на 1 в квантованном объеме L^3 . Включение T -матрицы идет через

$$S_0 = I + iT_0 \quad (4.99)$$

и, используя унитарную S -матрицу, легко получить

$$\langle \phi_{\vec{x}'} | \phi_{\vec{x}} \rangle = 1 + \sum_{\vec{k}'} \left(\exp \left[i(\vec{k} - \vec{k}')(\vec{x} - \vec{x}') - 1 \right] \right) |\langle \vec{k}' | T_0 | \vec{k} \rangle|^2. \quad (4.100)$$

Мы переходим к континуальному пределу посредством замены

$$\sum_{\vec{k}'} \rightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \int d^3 k' = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \int k'^2 dk' \int d\Omega' \quad (4.101)$$

и

$$|\delta(k' - k)|^2 \rightarrow \frac{L}{2\pi} \delta(k' - k). \quad (4.102)$$

Амплитуда рассеяния $f(\vec{k}', \vec{k})$ определяется на языке T -матрицы как

$$\langle \vec{k}' | T_0 | \vec{k} \rangle = \frac{i}{2\pi k} f(\vec{k}', \vec{k}) \delta(k' - k), \quad (4.103)$$

так что перекрытие рассеивающих волн можно привести к виду

$$\langle \phi_{\vec{x}'} | \phi_{\vec{x}} \rangle = 1 + \frac{1}{L^2} \int \left(\exp \left[i(\vec{k} - \vec{k}')(\vec{x} - \vec{x}') \right] - 1 \right) |f(\vec{k}', \vec{k})|^2 d\Omega'. \quad (4.104)$$

Это выражение позволяет нам записать изменение $\Delta\rho_S$ матрицы плотности за интервал времени Δt в результате отдельного события рассеяния

$$\frac{\Delta\rho_S}{\Delta t} = \frac{\langle \phi_{\vec{x}'} | \phi_{\vec{x}} \rangle - 1}{\Delta t} \rho_S. \quad (4.105)$$

Предположим, что много реакций рассеяния имеют место в интервале времени Δt , что означает, что интервал времени должен быть выбран таким образом, чтобы быть намного больше времени τ_{scatt} и намного меньше характеристического масштабного времени свободной эволюции системы. Кроме того, мы также полагаем, что входящее состояние может быть описано некогерентной смесью импульсов собственных состояний $|\vec{k}\rangle$ и что соответствующее распределение входящих импульсов изотропно. Чтобы описать входящее состояние, мы определяем $I(k)dk$ как поток входящих импульсов в интервале $[k, k + dk]$, то есть величина $I(k)L^2\Delta t dk$ является числом входящих частиц за временной интервал Δt с импульсами, лежащими в интервале $[k, k + dk]$. Суммарная интенсивность изменения матрицы плотности получается с помощью интеграла по всем импульсам и усреднением по всем направлениям. Тогда мы имеем

$$\frac{d\rho_S}{dt} \approx \int dk \int I(k)L^2\Delta t \frac{\Delta\rho_S}{\Delta t} \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (4.106)$$

Подставляя выражение (4.105) и добавляя свободную эволюцию, мы, таким образом, получаем уравнение для матрицы плотности (Gallis and Fleming, 1990)

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t, \vec{x}, \vec{x}') = i \langle \vec{x} | [H_S, \rho_S(t)] | \vec{x}' \rangle - F(\vec{x} - \vec{x}') \rho_S(t, \vec{x}, \vec{x}'), \quad (4.107)$$

где

$$F(\vec{x} - \vec{x}') = \int I(k) dk \int \left(1 - \exp \left[i(\vec{k} - \vec{k}')(\vec{x} - \vec{x}') \right] \right) |f(\vec{k}', \vec{k})|^2 \frac{d\Omega d\Omega'}{4\pi}. \quad (4.108)$$

Как и в предыдущем подразделе, мы можем различать два важных предельных случая. Во-первых, предположим, что $k_0 \Delta x \gg 1$, где k_0 — обычное волновое число рассеивающихся частиц. Экспоненты в выражении (4.108) после усреднения обращаются в ноль, и мы получаем

$$F \approx \int dk I(k) \int |f(\vec{k}', \vec{k})|^2 \frac{d\Omega d\Omega'}{4\pi} = \int I(k) \sigma(k) dk = \gamma_{\text{scatt}}, \quad (4.109)$$

где $\sigma(k)$ означает итоговое поперечное сечение, а γ_{scatt} — суммарная интенсивность рассеяния. Подобно декогерентизации через переходы между внутренними уровнями, декогерентизация, вызываемая рассеянием, таким образом, насыщается для больших расстояний Δx и проявляется при интенсивности, которая равна сумме интенсивностей рассеяния. Насыщение функции декогерентизации можно понять достаточно легко. При $k_0 \Delta x \gg 1$ длина волны рассеивающихся частиц много меньше расстояния Δx . Таким образом, отдельная реакция рассеяния дает достаточную для локализации объекта информацию. Любое дальнейшее увеличение Δx не даст новой информации.

С другой стороны, для малых расстояний $k_0 \Delta x \ll 1$ мы находим

$$F(\vec{x} - \vec{x}') \approx \int dk I(k) \int \left[(\vec{k} - \vec{k}')(\vec{x} - \vec{x}') \right]^2 |f(\vec{k}', \vec{k})|^2 \frac{d\Omega d\Omega'}{8\pi}. \quad (4.110)$$

Вводя сферические координаты, такие, что $d\Omega = d\cos\theta d\varphi$, $d\Omega' = d\cos\theta' d\varphi'$, мы находим

$$F(\vec{x} - \vec{x}') \approx \int I(k) \sigma_{\text{eff}}(k) k^2 (\vec{x} - \vec{x}')^2 dk, \quad (4.111)$$

где

$$\sigma_{\text{eff}}(k) = \int (\cos\theta - \cos\theta')^2 |f(\vec{k}', \vec{k})|^2 \frac{d\Omega d\Omega'}{8\pi} \quad (4.112)$$

может быть рассмотрено как эффективное поперечное сечение. Например, если дифференциал поперечного эффективного сечения изотропен, то получается

$$\sigma_{\text{eff}}(k) = \frac{1}{3}\sigma(k). \quad (4.113)$$

Эти выражения показывают, что интенсивность декогерентизации, описывающая декогерентизацию через рассеяние объекта может быть записана

$$\Lambda = \int I(k)\sigma_{\text{eff}}(k)k^2 dk \equiv \gamma_{\text{scatt}} k_{\text{av}}^2. \quad (4.114)$$

Это выражение снова соответствует общему виду (4.75). Очевидно, характерное волновое число здесь равно соответствующему среднему k_{av} волнового числа де Броиля рассеянных частиц, а характеристическая интенсивность задается суммарной интенсивностью рассеяния γ_{scatt} .

В качестве специального примера рассмотрим декогерентизацию через рассеяние в фотонном газе при температуре T (Joos, Zeh, 1985). Если термическая длина фотонов в газе много больше радиуса a объекта, то мы можем предположить, что эффективное поперечное сечение рассеяния задается рэлеевским поперечным сечением. Оценка формулы (4.114), использующая усреднение по распределению Планка фотонного газа, дает следующую оценку для интенсивности декогерентизации:

$$\Lambda \sim 10^{20} \left(\frac{T}{K}\right)^9 \left(\frac{a}{\text{см}}\right)^6 \frac{1}{\text{см}^2 \text{с}}. \quad (4.115)$$

Отметим предельно сильную зависимость от размера a объекта и от температуры газа. Интенсивность декогерентизации увеличивается как шестая степень a , что происходит благодаря зависимости от a рэлеевского поперечного рассеяния в пределе больших длин волн. Увеличение Λ как девятой степени от температуры T может быть понято следующим образом. Во-первых, фотонный поток I пропорционален третьей степени T , в силу закона Стефана–Больцмана для излучения абсолютно черного тела. Среднее произведение $\sigma(k)k^2$ увеличивается как шестая степень термического волнового числа $k_{th} = k_B T / \hbar c$, так как рэлеевское поперечное рассеяние увеличивается как четвертая степень волнового числа. Например для объекта размера $a = 10^{-6}$ см, соответствующего большой молекуле, мы получаем $\Lambda = 10^{-12} \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$ при $T = 3$ К (фоновое космическое излучение) и $\Lambda = 10^6 \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$ при $T = 300$ К (комнатная температура). Для маленьких пылинок, скажем, $a = 10^{-5}$ см, соответствующие интенсивности декогерентизаций увеличиваются до $\Lambda = 10^{-6} \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$ ($T = 3$ К) и $\Lambda = 10^{12} \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$ ($T = 300$ К).

Для объектов, чей размер много больше длины волны, поперечное сечение примерно равно геометрическому поперечному сечению. Интенсивность декогерентизации может быть оценена из

$$\Lambda \sim 10^{14} \left(\frac{T}{K} \right)^5 \left(\frac{a}{\text{см}} \right)^2 \frac{1}{\text{см}^2 \text{с}}. \quad (4.116)$$

В этой области Λ увеличивается как вторая степень a и как пятая степень T . Для объекта размера $a = 10^{-1}$ см это дает $\Lambda \sim 10^{24} \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$ при $T = 300$ К. Дальнейшие примеры декогерентизации, вызванные рассеянием, обсуждались Тегмарком (Tegmark, 1993).

4.4. Затухающий гармонический осциллятор

В предыдущем разделе мы рассмотрели простейший случай, а именно: разрушение квантовой когерентности без затухания. В большинстве реалистичных моделей декогерентизация проявляется вместе с истощением заселенностей. Для того чтобы изучить эффекты комбинации обоих явлений, для начала мы исследуем затухающий гармонический осциллятор в квантовом оптическом пределе, задаваемом основным уравнением (3.307).

В качестве начального состояния рассмотрим суперпозицию двух когерентных состояний

$$|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |\beta\rangle). \quad (4.117)$$

Со ссылкой на известный *мысленный* эксперимент Шредингера (Schrödinger, 1935) эта суперпозиция иногда называется состоянием шредингеровского кота. Состояния суперпозиции $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ являются макроскопически различными состояниями с предельно малым перекрытием, представляющими мертвого и живого кота соответственно. Нормировочный множитель есть

$$\mathcal{N} = (2 + 2\Re\langle\alpha|\beta\rangle)^{-1/2}, \quad (4.118)$$

где перекрытие $\langle\alpha|\beta\rangle$ задается (3.321). Таким образом, соответствующая начальная матрица плотности осциллятора есть

$$\rho_S(0) = \mathcal{N}^2(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta| + |\alpha\rangle\langle\beta| + |\beta\rangle\langle\alpha|). \quad (4.119)$$

Нашей целью является определение времени эволюции этого начального состояния и определение функции декогерентизации через поведение члена $|\alpha\rangle\langle\beta| + |\beta\rangle\langle\alpha|$ в этом уравнении. В следующем разделе 4.4.1 мы представляем решение этой проблемы при нулевой температуре. Общий случай ограниченной температуры будет обсуждаться в разделе 4.4.2.

4.4.1. Вакуумная декогерентизация

При нулевой температуре основное уравнение (3.307) может быть записано как

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \left(-i\omega_0 - \frac{\gamma_0}{2}\right)a^\dagger a\rho_S(t) + \left(+i\omega_0 - \frac{\gamma_0}{2}\right)\rho_S(t)a^\dagger a + \gamma_0 a\rho_S(t)a^\dagger \equiv \mathcal{L}\rho_S(t). \quad (4.120)$$

Насколько мы уже знаем, когерентное состояние остается когерентным состоянием согласно временной эволюции, что делает решение задачи очень простым в случае оптического вакуума. Поэтому мы попробуем такой анзац

$$\sigma(t) \equiv \exp[\mathcal{L}t]|\alpha\rangle\langle\beta| = f(t)|\alpha(t)\rangle\langle\beta(t)|, \quad (4.121)$$

где $\alpha(0) \equiv \alpha$ и $\beta(0) \equiv \beta$, а $f(t)$ – есть обычная числовая функция $f(0) = 1$, такая что $\sigma(0) = |\alpha\rangle\langle\beta|$. Путем использования уравнения

$$\frac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle = \left(\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}a^\dagger a - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\alpha(t)|^2\right)|\alpha(t)\rangle, \quad (4.122)$$

а также того факта, что когерентные состояния являются собственными состояниями оператора уничтожения, проверяется, что $\sigma(t)$, задаваемое (4.121), действительно есть решение основного уравнения (4.120), при условии, что удовлетворяются дифференциальные уравнения

$$\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} = \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta(t)} = -i\omega_0 - \frac{\gamma_0}{2}, \quad (4.123)$$

$$\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2) + \gamma_0\beta^*(t)\alpha(t). \quad (4.124)$$

Эти уравнения легко решаются

$$\alpha(t) = \alpha \exp\left(-i\omega_0 t - \frac{\gamma_0 t}{2}\right), \quad (4.125)$$

$$\beta(t) = \beta \exp\left(-i\omega_0 t - \frac{\gamma_0 t}{2}\right), \quad (4.126)$$

$$f(t) = \exp\left[(1 - e^{-\gamma_0 t})\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \beta^*\alpha\right)\right] = \langle\beta|\alpha\rangle^{[1-\exp(-\gamma_0 t)]}. \quad (4.127)$$

Таким образом, решение основного уравнения (4.120), соответствующего начальному состоянию (4.119), принимает следующий вид:

$$\rho_S(t) = \mathcal{N}^2 (|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| + |\beta(t)\rangle\langle\beta(t)| + f(t)|\alpha(t)\rangle\langle\beta(t)| + f^*(t)|\beta(t)\rangle\langle\alpha(t)|). \quad (4.128)$$

Функция декогерентизации $\Gamma(t)$ теперь может быть определена как логарифм модуля множителя $f(t)$, связанного с произведением недиагональных элементов в представлении когерентного состояния

$$\Gamma(t) = \ln |f(t)| = -\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2 (1 - e^{-\gamma_0 t}). \quad (4.129)$$

Видно, что величина $\Gamma(t)$ пропорциональна квадрату расстояния между амплитудами начального когерентного состояния α и β в комплексной плоскости. При $\gamma_0 t \gg 1$ функция декогерентизации стремится к значению $-|\alpha - \beta|^2/2$, то есть $\exp(\Gamma)$ достигает абсолютного значения $|\langle\alpha|\beta\rangle|$ перекрытия начальных состояний. Для сильно разделенных когерентных состояний это перекрытие предельно малое, что означает, что когерентности практически исчезают в пределе больших времен.

С другой стороны, для $\gamma_0 t \ll 1$ функция декогерентизации пропорциональна времени

$$\Gamma(t) \approx -\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2 \gamma_0 t. \quad (4.130)$$

Что позволяет нам определить время декогерентизации τ_D как

$$\frac{\tau_D}{\tau_R} = \frac{2}{|\alpha - \beta|^2}, \quad (4.131)$$

где мы используем время релаксации $\tau_R = \gamma_0^{-1}$. Отметим, что отношение времени декогерентизации к времени релаксации обратно пропорционально квадрату расстояния между начальными состояниями в комплексной плоскости. Уравнение (4.131) является важным соотношением, которое встречается во многих микроскопических моделях декогерентизации. Оно говорит о том, что для сильно разделенных изначальных состояний время декогерентизации, то есть время, за которое разрушаются когерентности через взаимодействие с окружением, намного меньше времени релаксации, характеризуемого временем потери энергии через эффекты диссипации.

Разница между временами релаксации и декогерентизации проиллюстрирована на рис. 4.2 и 4.3, где мы берем начальную суперпозицию (4.117) с $\alpha = \alpha_0 \exp[i\phi]$, $\beta = \alpha_0 \exp[-i\phi]$ и α_0 действительна. Начальные фазовые

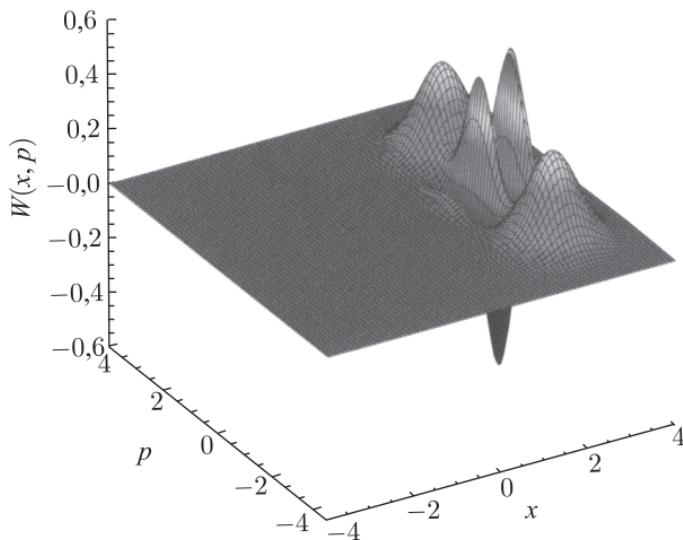


Рис. 4.2. Вигнеровское распределение, соответствующее суперпозиции (4.117) двух когерентных состояний с $\alpha = \alpha_0 \exp[i\phi]$ и $\beta = \alpha_0 \exp[-i\phi]$, где $\alpha_0 = \sqrt{10}$, а $\phi = 0,7$.

компоненты, таким образом, разнесены друг от друга на угол 2ϕ в комплексной плоскости, так что $|\alpha - \beta|^2 = 4\alpha_0^2 \sin^2 \phi$. Рис. 4.2 показывает картину взаимодействия вигнеровского распределения (2.81) этого начального состояния, в то время как рис. 4.3 показывает соответствующее состояние в момент времени $t = 0,15\tau_R$. Время τ_R характеризует масштаб времени, которое необходимо для слияния двух фазовых компонент в начале координат фазовой плоскости. Мы наблюдаем, что когерентности начальных состояний быстро затухают за время, которое намного меньше времени релаксации.

Для физической (Cadeira, Leggett, 1985) интерпретации результата (4.131) для простоты полагаем, что $\beta = 0$, что означает, что одно из состояний суперпозиции является основным состоянием осциллятора. Тогда уравнение (4.131) дает

$$\frac{\tau_D}{\tau_R} = \frac{2}{n}, \quad (4.132)$$

где $|\alpha|^2 = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle \equiv n \gg 1$. В таком случае возникает вопрос: почему время декогерентизации получается n -кратно меньше, чем время релаксации, где n — среднее число квантов в начальном состоянии? Во-первых,

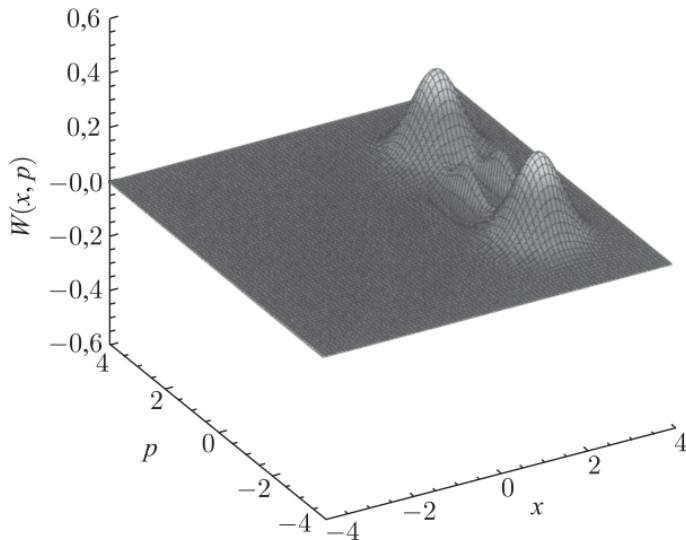


Рис. 4.3. Вигнеровское распределение состояния, которое выводится из начального состояния (4.117), показанного на рис. 4.2 после времени $t = 0,15\gamma_0^{-1}$, согласно основному уравнению (4.120).

отметим, что при нулевой температуре окружение находится в основном вакуумном состоянии, которое будет обозначаться $|0\rangle_B$. Таким образом, следующее начальное состояние составной системы (пренебрегая перекрытием $\langle\alpha|0\rangle$) есть

$$|\Psi_i\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle + |0\rangle) \otimes |0\rangle_B. \quad (4.133)$$

Интенсивность излучения квантовой энергии из начального состояния примерно равно $W = \gamma_0 n/2$. Соответственно, время излучения квантов есть величина порядка $1/W = 2\tau_R/n$. По истечении этого времени начальное состояние переходит в состояние

$$|\Psi_f\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha'\rangle \otimes |1\rangle_B + |0\rangle \otimes |0\rangle_B). \quad (4.134)$$

Здесь $|\alpha'\rangle$ есть состояние $|\alpha\rangle$ после излучения одного кванта, в то время как $|1\rangle_B$ обозначает состояние резервуара, содержащее один квант энергии. Редуцированная матрица плотности осциллятора тогда задается как

$$\rho_S = \text{tr}_B \{ |\Psi_f\rangle \langle \Psi_f| \} \approx \frac{1}{2} (|\alpha'\rangle \langle \alpha'| + |0\rangle \langle 0|), \quad (4.135)$$

так как состояния резервуара $|0\rangle_B$ и $|1\rangle_B$ ортогональны. Это показывает, что когерентности разрушаются уже после излучения одно кванта, то есть уже после времени порядка $2\tau_R/n$, тогда как диссипация энергии при поглощении n квантов соответствует времени порядка τ_R , что и отражено в (4.132).

4.4.2. Тепловой шум

Следует ожидать, что тепловой шум приводит к увеличению декогерентизации. Для определения времени декогерентизации в случае конечных температур мы запишем решение основного уравнения (3.307), соответствующего начальному состоянию (4.119), как

$$\rho_S(t) = \mathcal{N}^2 (\rho_{\alpha\alpha}(t) + \rho_{\beta\beta}(t) + \rho_{\alpha\beta}(t) + \rho_{\beta\alpha}(t)), \quad (4.136)$$

где мы ввели

$$\rho_{\alpha\alpha}(t) = \exp[\mathcal{L}t]|\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (4.137)$$

$$\rho_{\beta\beta}(t) = \exp[\mathcal{L}t]|\beta\rangle\langle\beta|, \quad (4.138)$$

$$\rho_{\alpha\beta}(t) = \rho_{\beta\alpha}^\dagger(t) = \exp[\mathcal{L}t]|\alpha\rangle\langle\beta|. \quad (4.139)$$

Наша стратегия заключается в исследовании плотности вероятности в пространстве координат

$$\begin{aligned} p(x, t) &\equiv \langle x|\rho_S(t)|x\rangle = \\ &= \mathcal{N}^2 [\rho_{\alpha\alpha}(x, t) + \rho_{\beta\beta}(x, t) + \rho_{\alpha\beta}(x, t) + \rho_{\beta\alpha}(x, t)], \end{aligned} \quad (4.140)$$

включающем матричные элементы

$$\rho_{\alpha\alpha}(x, t) = \langle x|\rho_{\alpha\alpha}|x\rangle, \quad \rho_{\beta\beta}(x, t) = \langle x|\rho_{\beta\beta}(t)|x\rangle, \quad (4.141)$$

$$\rho_{\alpha\beta}(x, t) = \langle x|\rho_{\alpha\beta}(t)|x\rangle = \rho_{\beta\alpha}^*(x, t), \quad (4.142)$$

и в определении функции декогерентизации из уменьшения интерференционных членов, встречающихся в выражении для $p(x, t)$. На самом деле, как будет показано, $p(x, t)$ может быть переписано как

$$p(x, t) = \quad (4.143)$$

$$= \mathcal{N}^2 \left[\rho_{\alpha\alpha}(x, t) + \rho_{\beta\beta}(x, t) + 2\sqrt{\rho_{\alpha\alpha}(x, t)\rho_{\beta\beta}(x, t)} \exp[\Gamma(t)] \cos\varphi(x, t) \right].$$

Плотность $p(x, t)$ представляет собой обычную структуру интерференционной картины, показанной на рис. 4.4. Первые два вклада в уравнении (4.143) представляют некогерентную сумму волновых пакетов, в то время как третий член описывает интерференционную картину. Как будет видно, связь с окружением в результате дает временную и температурную зависимость изменения картины, задаваемого фазой $\varphi(x, t)$, а также уменьшением интерференционного контраста (или видности картины), что определяется множителем $\exp(\Gamma(t))$ в уравнении (4.143). Рис. 4.4 показывает график функции $p(x, t)$, где мы используем аналитические выражения для $\Gamma(t)$ и $\varphi(x, t)$, которые будут выведены ниже. Рисунок показывает увеличение интерференционного контраста с увеличением времени, в то время как эффекты затухания еще незначительны на временном интервале, показанном на рисунке.

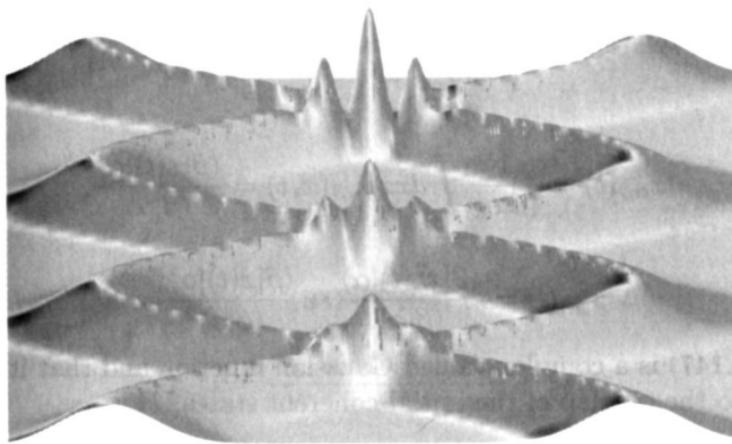


Рис. 4.4. Плотность вероятности $p(x, t)$, соответствующая уравнениям (4.143), (4.160) и (4.161). Координата x увеличивается слева направо, а время увеличивается от задней части к передней. Изображение показывает временную эволюцию через 1,5 периода осциллятора. Начальное расстояние между центрами наложенных волновых пакетов равно $12\sigma_0$. Параметры: $2\pi\gamma_0/\omega_0 = 0,05$ и $N = 0,5$.

Теперь наша задача — вычислить величины, определенные в (4.141) и (4.142). Это, безусловно, может быть сделано нахождением решения основного уравнения (3.307), соответствующего начальному условию (4.119).

Однако мы применяем наиболее прямой метод, который оказывается настолько же полезным при рассмотрении других моделей. Ключевой момент заключается в том, что $\rho_{\alpha\alpha}(x, 0)$, $\rho_{\beta\beta}(x, 0)$ и $\rho_{\alpha\beta}(x, 0)$ являются гауссовыми функциями. Так как система, рассматриваемая здесь, линейна, это свойство гауссиана сохраняется с эволюцией во времени. Таким образом, мы заключаем, что величины, определенные в (4.141) и (4.142), должны принимать вид гауссовых функций от x , а все, что мы должны сделать, — оценить их математическое ожидание и дисперсию. Например, функция $\rho_{\alpha\alpha}(x, t)$ может быть записана как

$$\rho_{\alpha\alpha}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\alpha}^2(t)}} \exp \left[-\frac{(x - x_{\alpha}(t))^2}{2\sigma_{\alpha}^2(t)} \right], \quad (4.144)$$

где

$$x_{\alpha}(t) = \int x \rho_{\alpha\alpha}(x, t) dx = \text{tr}_S \{x \rho_{\alpha\alpha}(t)\} = \langle \alpha | x(t) | \alpha \rangle \quad (4.145)$$

и

$$\sigma_{\alpha}^2(t) = \langle \alpha | x^2(t) | \alpha \rangle - \langle \alpha | x(t) | \alpha \rangle^2. \quad (4.146)$$

Здесь $x(t)$ и $x^2(t)$ — операторы Гейзенберга, которые определены из основного уравнения (см. ниже). Конечно, аналогичные выражения существуют и для $\rho_{\beta\beta}(x, t)$. Отметим, что как $\rho_{\alpha\alpha}(x, t)$, так и $\rho_{\beta\beta}(x, t)$ нормированы на 1. В итоге функция $\rho_{\alpha\beta}(x, t)$ должна быть записана как

$$\rho_{\alpha\beta}(x, t) = \frac{\langle \beta | \alpha \rangle}{\sqrt{2\pi\sigma_{\alpha\beta}^2(t)}} \exp \left[-\frac{(x - x_{\alpha\beta}(t))^2}{2\sigma_{\alpha\beta}^2(t)} \right], \quad (4.147)$$

где

$$x_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{\langle \beta | \alpha \rangle} \int x \rho_{\alpha\beta}(x, t) dx = \frac{\langle \beta | x(t) | \alpha \rangle}{\langle \beta | \alpha \rangle} \quad (4.148)$$

и

$$\sigma_{\alpha\beta}^2(t) = \frac{\langle \beta | x^2(t) | \alpha \rangle}{\langle \beta | \alpha \rangle} - \frac{\langle \beta | x(t) | \alpha \rangle^2}{\langle \beta | \alpha \rangle^2}. \quad (4.149)$$

Отметим, что (4.147) есть комплекснозначная гауссова функция, и что ее следует нормировать на перекрытие начальных когерентных состояний

$$\int \rho_{\alpha\beta}(x, t) dx = \text{tr}_S \{ \rho_{\alpha\beta}(t) \} = \langle \beta | \alpha \rangle. \quad (4.150)$$

Наш следующий шаг — расчет средних значений и дисперсий, введенных в формулах выше. Для этого мы решаем сопряженное основное уравнение с начальным условием, что при $t = 0$ операторы Гейзенберга и Шредингера совпадают. Это дает

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}} (e^{-i\omega_0 t} a + e^{i\omega_0 t} a^\dagger) e^{-\gamma_0 t/2}, \quad (4.151)$$

$$\begin{aligned} x^2(t) &= \frac{1}{2m\omega_0} \left(e^{-2i\omega_0 t} a^2 + e^{2i\omega_0 t} a^{\dagger 2} + 2a^\dagger a \right) e^{-\gamma_0 t} + \\ &\quad + \frac{1}{2m\omega_0} [2N(1 - e^{-\gamma_0 t}) + 1], \end{aligned} \quad (4.152)$$

где a^\dagger и a — операторы Шредингера, а $N = [\exp(\omega_0/k_B T) - 1]^{-1}$. С помощью этих соотношений легко находятся желаемые величины

$$x_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}} (e^{-i\omega_0 t} \alpha + e^{i\omega_0 t} \alpha^*) e^{-\gamma_0 t/2}, \quad (4.153)$$

$$x_\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}} (e^{-i\omega_0 t} \beta + e^{i\omega_0 t} \beta^*) e^{-\gamma_0 t/2}, \quad (4.154)$$

$$x_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}} (e^{-i\omega_0 t} \alpha + e^{i\omega_0 t} \beta^*) e^{-\gamma_0 t/2}, \quad (4.155)$$

$$\sigma^2(t) \equiv \sigma_\alpha^2(t) = \sigma_\beta^2(t) = \sigma_{\alpha\beta}^2(t) = \sigma_0^2 [2N(1 - e^{-\gamma_0 t}) + 1]. \quad (4.156)$$

Мы видим, что введенные дисперсии равны друг другу и что $\sigma^2(0)$ равна начальному значению ширины волновых пакетов

$$\sigma^2(0) = \sigma_0^2 \equiv \frac{1}{2m\omega_0}. \quad (4.157)$$

В заключительном шаге мы подставим выражения, найденные для $\rho_{\alpha\alpha}(x, t)$, $\rho_{\beta\beta}(x, t)$ и $\rho_{\alpha\beta}(x, t)$, в уравнение (4.140). После небольшой перегруппировки мы получаем функцию декогерентизации

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= -\frac{1}{2} |\alpha - \beta|^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2(t)} \Re \left[(x - x_{\alpha\beta}(t))^2 - \frac{1}{2} (x - x_\alpha(t))^2 - \frac{1}{2} (x - x_\beta(t))^2 \right] \end{aligned} \quad (4.158)$$

и фазу

$$\varphi(x, t) = \Im \left[\beta^* \alpha - \frac{1}{2\sigma^2(t)} \left\{ (x - x_{\alpha\beta}(t))^2 - \frac{1}{2} (x - x_\alpha(t))^2 - \frac{1}{2} (x - x_\beta(t))^2 \right\} \right]. \quad (4.159)$$

Если мы подставим сюда соотношения (4.153)–(4.156), то в итоге получим

$$\varphi(x, t) = \frac{\Delta p(t) \cdot x}{2N(1 - e^{-\gamma_0 t}) + 1} + \varphi_0(t) \quad (4.160)$$

и

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{2} |\alpha - \beta|^2 \frac{2N + 1}{2N(1 - e^{-\gamma_0 t}) + 1} (1 - e^{-\gamma_0 t}). \quad (4.161)$$

Величина $\varphi_0(t)$ в уравнении (4.160) является пространственно независимой фазой, задаваемой

$$\varphi_0(t) = \text{Im} \left[\beta^* \alpha - \frac{1}{2} \frac{e^{-\gamma_0 t}}{2N(1 - e^{-\gamma_0 t}) + 1} (e^{-i\omega_0 t} \alpha + e^{i\omega_0 t} \beta^*)^2 \right], \quad (4.162)$$

в то время как

$$\begin{aligned} \Delta p(t) &\equiv \langle \alpha | p(t) | \alpha \rangle - \langle \beta | p(t) | \beta \rangle = \\ &= -i \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}} e^{-\gamma_0 t/2} [(e^{-i\omega_0 t} \alpha - e^{i\omega_0 t} \alpha^*) - (e^{-i\omega_0 t} \beta - e^{i\omega_0 t} \beta^*)] \end{aligned} \quad (4.163)$$

есть разница средних импульсов волновых пакетов в суперпозиции.

Эти уравнения описывают изменение фазы и уменьшение интерференционного контраста через взаимодействие с окружением (Savage, Walls, 1985a). Для $\gamma_0 t \ll 1$ из уравнений (4.160) и (4.162) мы имеем

$$\varphi(x, t) \approx \Delta p(t) \cdot x - \frac{1}{2} \Im [e^{-2i\omega_0 t} \alpha^2 + e^{2i\omega_0 t} \beta^{*2}]. \quad (4.164)$$

Это выражение описывает обычный пример интерференции, появляющийся в случае исчезновения взаимодействия система-окружение. Уравнение (4.161) показывает, что $\Gamma(t)$ сводится к уравнению (4.129) в пределе нулевой температуры ($N = 0$). В пределе большого времени выражение (4.161) достигает температурно-независимого значения, задаваемого пересечением начальных состояний суперпозиции

$$\Gamma(t) \approx -\frac{1}{2} |\alpha - \beta|^2, \quad \gamma_0 t \gg 1. \quad (4.165)$$

Для малых времен $\gamma_0 t \ll 1$ мы находим

$$\Gamma(t) \approx -\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2(2N + 1)\gamma_0 t = -\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2 \operatorname{cth}\left(\frac{\omega_0}{2k_B T}\right) \gamma_0 t. \quad (4.166)$$

Таким образом, отношение времени декогерентизации к времени релаксации оказывается равным

$$\frac{\tau_D}{\tau_R} = \frac{2}{|\alpha - \beta|^2(2N + 1)}. \quad (4.167)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (4.131), мы видим, что в присутствии теплового шума время декогерентизации τ_D уменьшается в соответствии с множителем $1/(2N + 1)$.

Допустим, что α и β действительны. Это означает, что начальные импульсы состояний суперпозиции исчезают и что

$$(\alpha - \beta)^2 = \frac{\Delta x^2}{4\sigma_0^2}, \quad (4.168)$$

где

$$\Delta x \equiv x_\alpha(0) - x_\beta(0) \quad (4.169)$$

представляет начальное расстояние между центрами состояний в суперпозиции. Тогда с помощью уравнения (4.167) мы находим, что в высокотемпературном пределе $k_B T \gg \hbar\omega_0$

$$\frac{\tau_D}{\tau_R} \approx \frac{2}{|\alpha - \beta|^2} \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} = 4 \left(\frac{\bar{\lambda}_{th}}{\Delta x} \right)^2. \quad (4.170)$$

Здесь мы учли множители \hbar и во втором уравнении ввели тепловую длину волны $\bar{\lambda}_{th} = \hbar/\sqrt{2mk_B T}$. Тот же результат может быть получен из уравнения для высокотемпературного броуновского движения (ср. с (4.79)).

4.5. Состояния электромагнитного поля

Обсудив некоторые основные особенности теории, посмотрим на эксперименты по декогерентизации. Современная экспериментальная технология не только способна проводить исследование и контроль явлений декогерентизации, но также вовремя устранять их и проверять результаты теории

на количественном языке. Например, было показано, что для иона Be^+ , хранящегося в ловушке Пауля, для координаты центра масс можно подготовить суперпозицию двух состояний движения. Измерение декогерентизации в такой системе возможно в контролируемом окружении (Myatt et al., 2000; Turchette et al., 2000). Кроме того, об экспериментальных свидетельствах когерентной суперпозиции двух макроскопически различных состояний магнитного потока в сверхпроводящем квантово-интерференционном устройстве было сообщено Фридманом и др. (Friedman et al., 2000).

В другом известном эксперименте, который был выполнен Брюном и др. (Brune et al., 1996), впервые наблюдалась последовательность декогерентизации мезоскопической суперпозиции двух когерентных полевых состояний высокодобротного резонатора. Декогерентизирующее полевое состояние, полученное в эксперименте, было разновидностью состояния шредингеровского кота (4.117). В данном разделе мы хотим обсудить этот эксперимент с некоторыми подробностями. Для нашего обсуждения наиболее важной особенностью эксперимента является его доступность для прямого измерения функции декогерентизации $\Gamma(t)$ и, таким образом, прямое сравнение с теоретическим анализом (Maitre et al., 1997).

4.5.1. Атомы, взаимодействующие с полевой модой полости

Эскиз экспериментальной установки представлен на рис. 4.5. С задержкой времени T два атома A_1 и A_2 проходят через установку, состоящую из двух микроволновых резонаторов R_1 и R_2 и сверхпроводящей микроволновой полости C с частотой ν . Высокий уровень добротности резонатора $Q = 5 \cdot 10^7$ приводит к интенсивности релаксации $\gamma_0 = (160\text{мкс})^{-1}$ в полости. Атомы описываются двумя уровнями Ридберга (с главными квантовыми числами $n = 51$ и $n = 50$), которые будут обозначаться $|e\rangle$ и $|g\rangle$ соответственно. Соответствующая частота перехода ω отличается от частоты полости на значение Δ . Резонаторы R_1 и R_2 подключены к тем же классическим микроволновым источникам частоты ω_R . На выходе состояние атомов анализируется в поле ионизации детекторов D_e и D_g . Схема атомных уровней изображена на рис. 4.6.

Для начала коротко опишем основную идею, лежащую в основе эксперимента. Первый резонатор R_1 служит для подготовки атомов в определенной суперпозиции состояний $|e\rangle$ и $|g\rangle$. Изначально полость C содержит малое когерентное поле $|\alpha\rangle$, как показано на рис. 4.7. Как будет продемонстрировано ниже, взаимодействие атомов с полем в C эффективно включает фазовый сдвиг $\pm\phi$ на полевом состоянии, чей знак устанавливается атомным состоянием. Таким образом, взаимодействие первого атома A_1 с полем

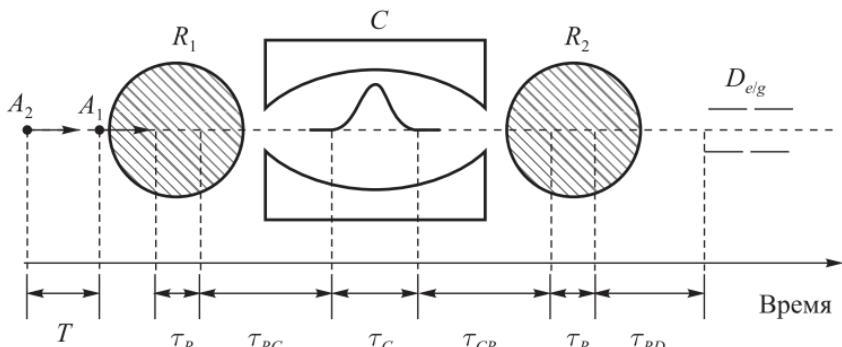


Рис. 4.5. Схематическая экспериментальная установка, выполненная Брюоном и др. Атомы A_1 и A_2 двигаются вдоль штриховой горизонтальной линии с задержкой T по времени и проходят резонатор R_1 , полость C , резонатор R_2 и детекторы D_e и D_g . Время полета между в различных компонентах также указывается.

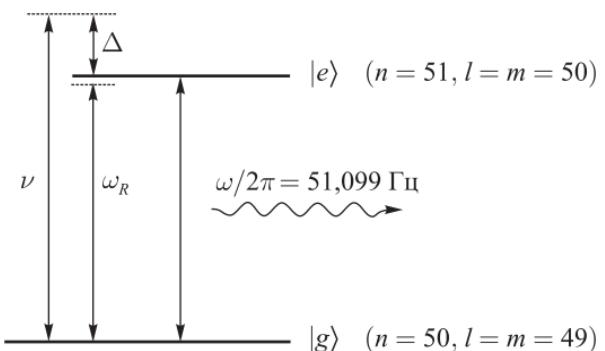


Рис. 4.6. Двухуровневая схема, показывающая частоту атомного перехода ω , частоту ν поля в полости C и частоту ω_R поля в резонаторах R_1 и R_2 .

в C приводит к запутыванию между двумя атомными состояниями и двумя фазовыми компонентами $|\alpha \exp(\pm i\phi)\rangle$. Второй резонатор R_2 инициирует дальнейшее смешивание состояний A_1 , так что заключительное измерение атомных состояний в полевых эмиссионных детекторах D_e и D_g не дает информации о состоянии, в котором A_1 прошел через полость C . Как результат, измерение состояния атома A_1 приводит к тому, что поле в полости C проецируется на суперпозицию состояний типа шредингеровского кота двухфазовых компонент, которые разделены на угол 2ϕ в комплексной плоскости (см. рис. 4.8). Игнорируя угасание поля во времени, нормировочные множители и другие фазовые множители, это состояние, по существу,

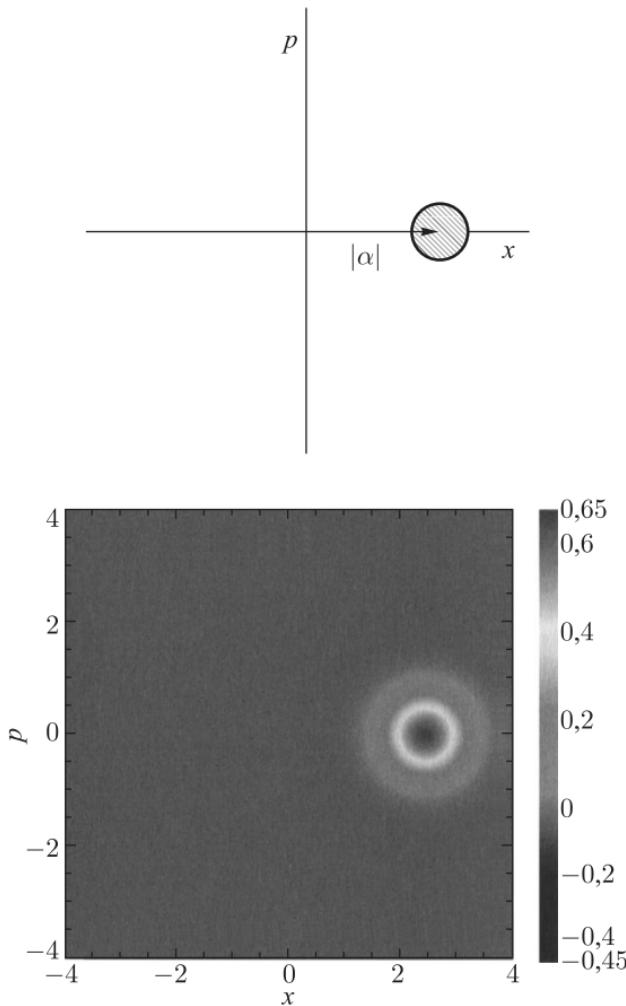


Рис. 4.7. Схематическое представление и вигнеровское распределение начального когерентного поля в центральной полости C для действительного α и $\alpha^2 = 6$. Квадратуры x и p промасштабированы так, что $x = \operatorname{Re} \alpha$ и $p = \operatorname{Im} \alpha$.

принимает форму (более детально смотрите в следующем подразделе)

$$|\alpha e^{-i\phi}\rangle + e^{i(\chi_1+\phi)}|\alpha e^{i\phi}\rangle, \quad (4.171)$$

где $\chi_1 = 0$, если атом A_1 будет находиться в состоянии $|g\rangle$ и $\chi_1 = \pi$, если он будет находиться в состоянии $|e\rangle$.

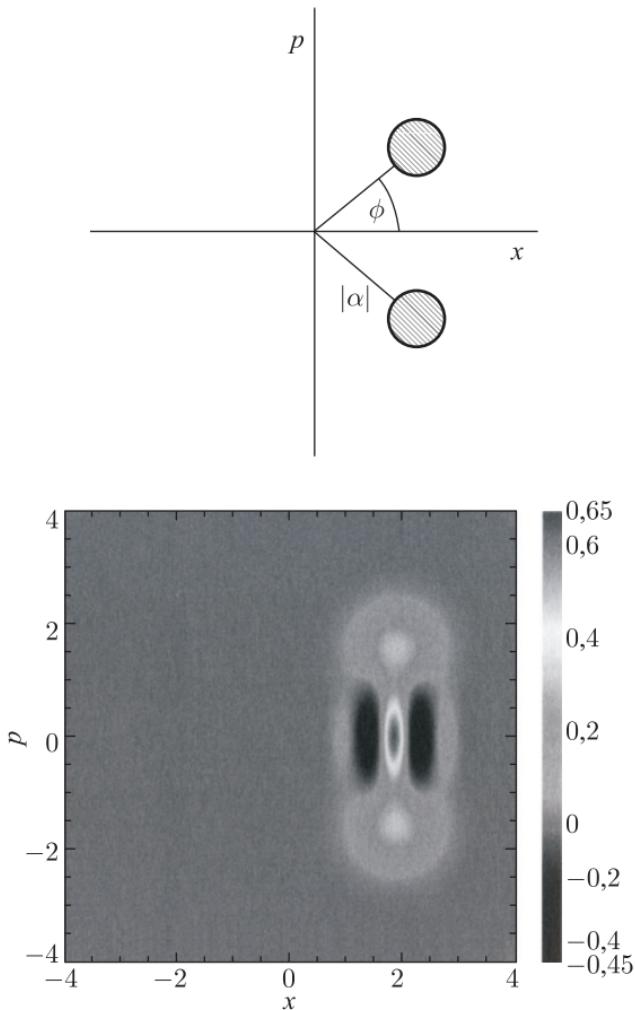


Рис. 4.8. Схематическое представление и вигнеровское распределение суперпозиции когерентных полей в полости C после того, как первый атом пересек C и был продетектирован в основном состоянии. Параметры: $\alpha^2 = 6$, $\phi = 0,7$ и $\varphi_0 = 0$.

Подобное преобразование вызывается взаимодействием второго атома с полем полости. Итоговое состояние поля полости, таким образом, есть

$$|\alpha e^{-2i\phi}\rangle + e^{i(\chi_1+\chi_2+2\phi)}|\alpha e^{2i\phi}\rangle + (e^{i\chi_1} + e^{i\chi_2})e^{i\phi}|\alpha\rangle, \quad (4.172)$$

где χ_2 снова принимает значения 0 или π , зависящие от выходного изме-

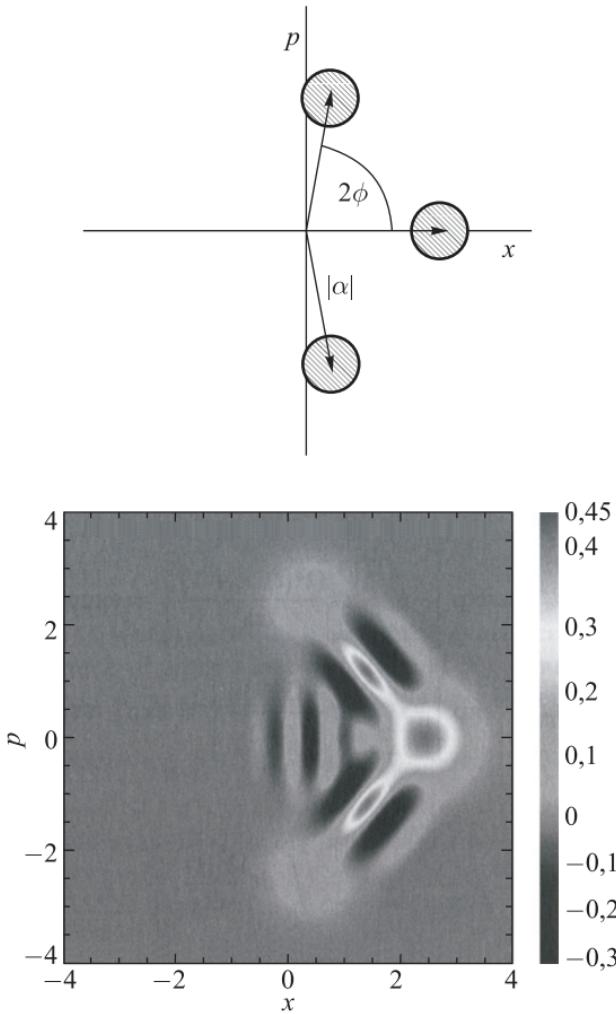


Рис. 4.9. Схематическое представление и вигнеровское распределение суперпозиции когерентных полей в полости C после детектирования второго атома в основном состоянии. Параметры: $\alpha^2 = 6$, $\phi = 0,7$ и $\varphi_0 = 0$.

рения на A_2 . Таким образом, если оба атома найдены в одном и том же состоянии ($\chi_1 = \chi_2$), состояние поля (4.172) становится (см. рис. 4.9)

$$|\alpha e^{-2i\phi}\rangle + e^{2i\phi}|\alpha e^{2i\phi}\rangle \pm 2e^{i\phi}|\alpha\rangle, \quad (4.173)$$

в то время как оно принимает форму

$$|\alpha e^{-2i\phi}\rangle - e^{2i\phi}|\alpha e^{2i\phi}\rangle, \quad (4.174)$$

если атомы находятся в различных состояниях ($\chi_1 \neq \chi_2$). Мы видим, что взаимодействие поля с обоими атомами приводит к некоторого рода конструктивной интерференции фазовой компоненты $|\alpha\rangle$, если оба атома детектируются в одном и том же состоянии. Если же атомы детектируются в различных состояниях, фазовая компонента $|\alpha\rangle$ интерферирует деструктивно и исчезает из итогового состояния.

В эксперименте измеряются условные вероятности $W_{\varepsilon\varepsilon'}$. Они определяются вероятностями нахождения атома A_2 в состоянии $|\varepsilon'\rangle$ при условии, что атом A_1 будет найден в состоянии $|\varepsilon\rangle$, где $\varepsilon, \varepsilon' = e, g$. Детальный анализ показывает, что в отсутствии какого-либо угасания поля вероятность нахождения обоих атомов в одном и том же состоянии (то есть проявление конструктивной интерференции) больше, чем в различных состояниях (деструктивная интерференция). Если принимается во внимание затухание поля и, следовательно, декогерентизация состояния шредингеровского кота (4.171), то указанная разность условных вероятностей спадает к нулю при увеличении времени задержки T . Таким образом, измерением определенной разности условных вероятностей возможно измерить декогерентизацию состояния шредингеровского кота, как функцию задержки времени T между двумя атомами.

Перед представлением детального теоретического анализа эксперимента в следующем подразделе мы исследуем динамику, иницииированную взаимодействием атомов в центральной полости C . Взаимодействие атома с полем в C может быть описано гамильтонианом Джейнса–Каммингса

$$H_{JC}(t) = \frac{1}{2}\omega\sigma_3 + \nu a^\dagger a + \Omega(t)[a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-]. \quad (4.175)$$

Отметим, что частота Раби $\Omega(t)$, обеспечивающая связь полевого режима a с атомными операторами повышения-понижения σ_\pm , зависит от времени. Это происходит благодаря пространственной зависимости формы функции, задаваемой гауссовым пакетом, который описывает форму поля в C . При прохождении через полость атомы чувствуют изменяющуюся со временем связь с формой поля, а гамильтониан $H_{JC}(t)$ параметрически зависит от времени.

Для фиксированного времени, то есть для фиксированного положения атома в пределах полости, собственные значения энергии «одетого» атома

для гамильтониана Джейнса–Каммингса задаются в линейном приближении

$$E_{\pm, n} = \nu \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\Delta}{2} \pm \frac{\Omega^2(t)(n+1)}{\Delta}, \quad (4.176)$$

с соответствующими «одетыми» состояниями (мы рассматриваем случай положительной расстройки $\Delta \equiv \omega - \nu > 0$)

$$|+, n\rangle = |e, n\rangle, \quad |-, n\rangle = |g, n+1\rangle. \quad (4.177)$$

Согласно заданным условиям эксперимента нерезонирующее взаимодействие атома с полем в C преимущественно адиабатическое, что означает, что действительными переходами между «одетыми» атомными состояниями можно пренебречь, и только виртуальные процессы должны приниматься во внимание. Применяя адиабатическую теорему квантовой механики, мы видим, что «одетые» состояния атомов, прошедших в полость, принимают фазовый множитель, который задается интегрированной динамической фазой $\exp[-i \int E_{\pm, n}(t) dt]$. Таким образом, в добавление к вкладу от невозмущенных энергий, взаимодействие атома с полевой модой a приводит к фазовому сдвигу

$$|e, n\rangle \rightarrow \exp(i\varphi_e)|e, n\rangle, \quad |g, n\rangle \rightarrow \exp(i\varphi_g)|g, n\rangle, \quad (4.178)$$

где

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi_e) &= \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega^2(t)(n+1)}{\Delta} dt \right] = \exp[i\phi(n+1)], \\ \exp(i\varphi_g) &= \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\Omega^2(t)n}{\Delta} dt \right] = \exp[-i\phi n] \end{aligned} \quad (4.179)$$

и

$$\phi \equiv - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega^2(t)}{\Delta} dt. \quad (4.180)$$

Соответственно, мы можем написать преобразование состояний $|e\rangle|\alpha\rangle$ и $|g\rangle|\alpha\rangle$ в виде

$$|e\rangle|\alpha\rangle \rightarrow \exp[i\phi(a^\dagger a + 1)]|e\rangle|\alpha\rangle = e^{i\phi}|e\rangle|\alpha e^{i\phi}\rangle, \quad (4.181)$$

$$|g\rangle|\alpha\rangle \rightarrow \exp[-i\phi a^\dagger a]|g\rangle|\alpha\rangle = |g\rangle|\alpha e^{-i\phi}\rangle. \quad (4.182)$$

Этот результат будет использоваться в следующем разделе для описания приготовления суперпозиции состояний поля, чья декогерентизация изучается в этом эксперименте.

4.5.2. Состояния шредингеровского кота

Теперь перейдем к детальному анализу эксперимента. Наше основное намерение — вывести формулу для разности $W_{ee} - W_{ge}$ условных вероятностей, измеренных в эксперименте, и связать ее с функцией декогерентизации, относящейся к шредингеровскому коту. Эксперимент может быть описан как следующая последовательность семи шагов.

4.5.2.1. Начальное состояние A_1 и взаимодействие в R_1 . Во-первых, атом A_1 приготавливается в состоянии $|e\rangle$ и подвергается действию $\pi/2$ -импульса в резонаторе R_1 , в результате чего получается следующее состояние атомно-полевой системы до взаимодействия в C ,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)|\alpha\rangle. \quad (4.183)$$

4.5.2.2. Атомно-полевое взаимодействие в C . Атом A_1 вводится в центральную полость C . Полевая мода в C вызывает фазовый сдвиг, который может быть описан преобразованиями (4.181) и (4.182) так, что состояние (4.183) преобразуется в состояние

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi}|e\rangle|\alpha e^{i\phi}\rangle + |g\rangle|\alpha e^{-i\phi}\rangle). \quad (4.184)$$

4.5.2.3. Взаимодействие в R_2 и измерение на A_1 . Второй $\pi/2$ -импульс в R_2 индуцирует преобразование

$$|e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + e^{i\varphi_0}|g\rangle), \quad |g\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{-i\varphi_0}|e\rangle + |g\rangle) \quad (4.185)$$

состояний атома A_1 , где $\varphi_0 = (\omega_R - \omega)\tau$ — динамическая фазовая разность, приобретенная во время полета τ между R_1 и R_2 . Таким образом, атомно-полевое состояние принимает следующий вид после того, как атом A_1 покинул резонатор R_2 :

$$\frac{1}{2} \left[|g\rangle \left(|\alpha e^{-i\phi}\rangle + e^{i(\phi+\varphi_0)}|\alpha e^{i\phi}\rangle \right) - e^{-i\varphi_0}|e\rangle \left(|\alpha e^{-i\phi}\rangle - e^{i(\phi+\varphi_0)}|\alpha e^{i\phi}\rangle \right) \right]. \quad (4.186)$$

Измерение состояния атома A_1 проецирует состояние поля на состояния

$$\frac{1}{\mathcal{N}(\chi)} \left(|\alpha e^{-i\phi}\rangle + e^{i(\chi+\phi+\varphi_0)} |\alpha e^{i\phi}\rangle \right), \quad (4.187)$$

где измерение $|g\rangle$ означает $\chi = 0$, в то время как измерение $|e\rangle$ означает $\chi = \pi$. Нормировочный множитель задается как

$$\mathcal{N}(\chi) = \sqrt{2 (1 + \exp[-2|\alpha|^2 \sin^2 \phi] \cos[\chi + \varphi_0 + \phi + |\alpha|^2 \sin 2\phi])}. \quad (4.188)$$

4.5.2.4. Полевое затухание в C. Состояние (4.187) соответствует матрице плотности

$$\rho_F(0, \chi) = \frac{1}{\mathcal{N}^2(\chi)} \left[|\alpha e^{-i\phi}\rangle \langle \alpha e^{-i\phi}| + |\alpha e^{i\phi}\rangle \langle \alpha e^{i\phi}| + e^{i\xi} |\alpha e^{i\phi}\rangle \langle \alpha e^{-i\phi}| + \text{э.с.} \right] \quad (4.189)$$

где $\xi = \chi + \varphi_0 + \phi$. Здесь и в дальнейшем э.с. означает добавление эрмитова сопряженного члена. Время задержки между первым и вторым атомами обозначается через T . В эксперименте температура окружения соответствует среднему числу $N = 0,05$ термических фотонов в полевой моде таких, что мы можем использовать основное уравнение для оптического вакуума (4.120). За интервал времени T полевая мода, таким образом, эволюционирует в матрицу плотности

$$\rho_F(T, \chi) = \frac{1}{\mathcal{N}^2(\chi)} \left[|\alpha(T)\rangle \langle \alpha(T)| + |\beta(T)\rangle \langle \beta(T)| + f(T) |\beta(T)\rangle \langle \alpha(T)| + \text{э.с.} \right], \quad (4.190)$$

где (сравнивая с (4.125)–(4.127))

$$\alpha(T) = \alpha \exp(-\gamma_0 T/2 - i\phi), \quad (4.191)$$

$$\beta(T) = \alpha \exp(-\gamma_0 T/2 + i\phi), \quad (4.192)$$

$$\begin{aligned} f(T) &= e^{i\xi} \exp[-|\alpha|^2 (1 - e^{2i\phi}) (1 - e^{-\gamma_0 T})] = \\ &= e^{i\xi} \langle \alpha e^{-i\phi} | \alpha e^{i\phi} \rangle^{(1 - e^{-\gamma_0 T})}. \end{aligned} \quad (4.193)$$

Отметим, что динамические фазовые множители, с которыми мы работали в картине взаимодействия, отсутствуют. Мы видим, что функция декогерентизации задается выражением

$$G(T) = \ln |f(T)| = -2|\alpha|^2 \sin^2 \phi (1 - e^{-\gamma_0 T}), \quad (4.194)$$

что приводит ко времени декогерентизации вида

$$\tau_D = \frac{\tau_R}{2|\alpha|^2 \sin^2 \phi}. \quad (4.195)$$

4.5.2.5. Начальное состояние A_2 и взаимодействие в R_1 . Атом A_2 приготавливается в состоянии $|e\rangle$ и подвергается воздействию $\pi/2$ -импульса в R_1 такому, что состояние A_2 и поля, перед самым моментом введения атома в полость, задается

$$\frac{1}{2} [|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|] \rho_F(T, \chi). \quad (4.196)$$

4.5.2.6. Атом-полевое взаимодействие в C . Взаимодействие атома A_2 с полем в C дает в результате состояние

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[|e\rangle\langle e| e^{i\phi(a^\dagger a + 1)} \rho_F(T, \chi) e^{-i\phi(a^\dagger a + 1)} + |g\rangle\langle g| e^{-i\phi a^\dagger a} \rho_F(T, \chi) e^{i\phi a^\dagger a} + \right. \\ & \left. + |e\rangle\langle g| e^{i\phi(a^\dagger a + 1)} \rho_F(T, \chi) e^{i\phi a^\dagger a} + \text{э.с.} \right]. \end{aligned} \quad (4.197)$$

4.5.2.7. Взаимодействие в R_2 и измерение A_2 . Атом A_2 проходит через резонатор R_2 , который преобразует состояние (4.197) в состояние

$$\begin{aligned} \rho_{AF}(T, \chi) = & \frac{1}{4} (|e\rangle + e^{i\varphi_0}|g\rangle)(\langle e| + e^{-i\varphi_0}\langle g|) e^{i\phi(a^\dagger a + 1)} \rho_F(T, \chi) e^{-i\phi(a^\dagger a + 1)} + \\ & + \frac{1}{4} (|g\rangle - e^{-i\varphi_0}|e\rangle)(\langle g| - e^{i\varphi_0}\langle e|) e^{-i\phi a^\dagger a} \rho_F(T, \chi) e^{i\phi a^\dagger a} + \\ & + \frac{1}{4} (|e\rangle + e^{-i\varphi_0}|g\rangle)(\langle g| - e^{i\varphi_0}\langle e|) e^{i\phi(a^\dagger a + 1)} \rho_F(T, \chi) e^{i\phi a^\dagger a} + \\ & + \frac{1}{4} (|g\rangle - e^{-i\varphi_0}|e\rangle)(\langle e| + e^{-i\varphi_0}\langle g|) e^{-i\phi a^\dagger a} \rho_F(T, \chi) e^{-i\phi(a^\dagger a + 1)}. \end{aligned}$$

На выходе измеряется состояние атома A_2 и определяются условные вероятности W_{ee} и W_{ge} . Здесь $W_{\varepsilon e}$ как вероятность нахождения атома A_2 в состоянии $|\varepsilon\rangle$ при условии, что атом A_1 был обнаружен в состоянии $|\varepsilon\rangle$, где $\varepsilon = e, g$, зависящее от результата измерения над атомом A_1 .

Согласно полученному выражению для ρ_{AF} , мы теперь имеем

$$\begin{aligned} W_{\varepsilon e} = & \text{tr}_{AF}\{|e\rangle\langle e|\rho_{AF}(T, \chi)\} = \\ = & \frac{1}{2} \left[1 - \Re e^{i(\varphi_0 + \phi)} \text{tr}_F \left\{ e^{2i\phi a^\dagger a} \rho_F(T, \chi) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.198)$$

В первом выражении след берется по атому A_2 и полевой моде, в то время как во втором выражении только по полевой моде. Кроме того, мы должны считать, что $\chi = 0$, если $\varepsilon = g$, и $\chi = \pi$, если $\varepsilon = e$. С помощью полевой матрицы плотности (4.190) мы находим

$$\begin{aligned} \text{tr}_F \left\{ e^{2i\phi a^\dagger a} \rho_F(T, \chi) \right\} = \\ = \frac{1}{N^2(\chi)} [\langle \alpha(T) | \alpha(T) \exp(2i\phi) \rangle + \langle \beta(T) | \beta(T) \exp(2i\phi) \rangle + \\ + e^{-i\xi} f^*(T) \langle \beta(T) | \alpha(T) \exp(2i\phi) \rangle + \\ + e^{i\xi} f(T) \langle \alpha(T) | \beta(T) \exp(2i\phi) \rangle], \quad (4.199) \end{aligned}$$

что дает

$$W_{ee} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{2B + C \cos \chi + D \cos \chi}{1 + A \cos \chi} \right], \quad (4.200)$$

где

$$A = \exp [-2|\alpha|^2 \sin^2 \phi] \cos [\varphi_0 + \phi + |\alpha|^2 \sin 2\phi], \quad (4.201)$$

$$B = \exp [-2|\alpha|^2 e^{-\gamma_0 T} \sin^2 \phi] \cos [\varphi_0 + \phi + |\alpha|^2 e^{-\gamma_0 T} \sin 2\phi], \quad (4.202)$$

$$C = \exp [-2|\alpha|^2 (1 - e^{-\gamma_0 T}) \sin^2 \phi] \cos [|\alpha|^2 (1 - e^{-\gamma_0 T}) \sin 2\phi], \quad (4.203)$$

$$\begin{aligned} D = \exp [-2|\alpha|^2 e^{-\gamma_0 T} \sin^2 2\phi - 2|\alpha|^2 (1 - e^{-\gamma_0 T}) \sin^2 \phi] \times \\ \times \cos [2\varphi_0 + 2\phi + |\alpha|^2 e^{-\gamma_0 T} \sin 4\phi + |\alpha|^2 (1 - e^{-\gamma_0 T}) \sin 2\phi]. \quad (4.204) \end{aligned}$$

Член $1 + A \cos \chi$ в уравнении (4.200) возникает из нормировочного множителя полевой матрицы плотности, в то время как величины B , C и D появляются от четырех скалярных произведений, вносящих свой вклад в след в (4.199). Член B возникает благодаря произведению

$$\begin{aligned} \langle \alpha(T) | \alpha(T) \exp(2i\phi) \rangle = \langle \beta(T) | \beta(T) \exp(2i\phi) \rangle = \langle \alpha(T) | \beta(T) \rangle = \\ = \exp [-|\alpha|^2 e^{-\gamma_0 T} (1 - e^{2i\phi})]. \quad (4.205) \end{aligned}$$

Таким образом, B определяется перекрытием двух фазовых компонент исходной суперпозиции, созданной первым атомом. Эти фазовые компоненты разнесены на угол 2ϕ (см. рис. 4.8). Вклад C возникает из произведения

$$\langle \beta(T) | \alpha(T) \exp 2i\phi \rangle = \langle \beta(T) | \beta(T) \rangle = 1, \quad (4.206)$$

тогда как D определяется произведением

$$\langle \alpha(T) | \beta(T) \exp 2i\phi \rangle = \exp [-|\alpha|^2 e^{-\gamma_0 T} (1 - e^{4i\phi})]. \quad (4.207)$$

Член D поэтому определяется перекрытием двух фазовых компонент, которые разнесены на угол 4ϕ , в то время как C получается из перекрытия двух фазовых компонент, соответствующих одному и тому же углу. Член C , таким образом, описывает вклад от рекомбинации фазовых компонент у исходного когерентного состояния поля $|\alpha\rangle$ (см. рис. 4.9).

Из (4.201)–(4.204) видно, что A , B и D экспоненциально малы по $|\alpha|^2$ при $\gamma_0 T \ll 1$, кроме того, пусть представленный угол ϕ не близок к 0 , $\pi/2$ или π . Тогда мы имеем

$$W_{ee} \approx \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2}C \right], \quad W_{ge} \approx \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2}C \right]. \quad (4.208)$$

В эксперименте определяется следующая разность условных вероятностей

$$\eta(T, \varphi_0) = W_{ee} - W_{ge}, \quad (4.209)$$

или усредненная по углу

$$\bar{\eta}(T) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \eta(T, \varphi_0) d\varphi_0. \quad (4.210)$$

С помощью уравнения (4.200) находим

$$\eta(T, \varphi_0) = \frac{1}{2} \frac{C + D - 2AB}{1 - A^2}. \quad (4.211)$$

Так как C представляет собой основной вклад в $\eta(T, \varphi_0)$ и так как она независима от φ_0 , мы находим, что $\eta(T, \varphi_0) \approx \bar{\eta}(T) \approx C/2$. Выражение (4.203) для C показывает, что это есть действительная часть величины $f(T)$ (см. (4.193)), которая увеличивает интерференционный член состояния шредингеровского кота (4.190). Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} \eta(T, \varphi_0) &\approx \bar{\eta}(T) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f(T)) = \\ &= \frac{1}{2} \exp[\Gamma(T)] \cos [|\alpha|^2 (1 - e^{-\gamma_0 T}) \sin 2\phi]. \end{aligned} \quad (4.212)$$

Это и есть желаемое соотношение, которое связывает экспериментально полученную величину $\bar{\eta}(T)$ с функцией декогерентизации $\Gamma(T)$.

На рис. 4.10 мы показываем условные вероятности W_{ge} и W_{ee} и их разницу η как функцию времени задержки T . Для сравнения мы также изображаем усредненные по углам величины, функцию $\exp[-\gamma_0 T]/2$ и

$$W_e^D = \frac{1}{2}(1 - B), \quad (4.213)$$

которая определяется как вероятность детектирования A_2 в возбужденном состоянии при условии полной декогерентизации, то есть при условии, что интерференционные члены полевой матрицы плотности приняты равными нулю.

Согласно (4.212), разница η условных вероятностей прямо связана с соответствующими недиагональными элементами полевой матрицы плотности и, таким образом, с функцией декогерентизации $\Gamma(t)$. Как было продемонстрировано в эксперименте, выполненном Харошем с сотрудниками, она дает возможность прямого наблюдения декогерентизации шредингеровского кота и хорошую количественную проверку теории. Более детальный теоретический анализ экспериментов был дан Бройером, Дорнером и Петруччионе (Breuer, Dorner, Petruccione, 2001).

4.6. Модель Кальдейры–Леггетта

До сих пор мы обсуждали декогерентизацию и рассеяние для марковской динамики, определяемые основным уравнением квантовой оптики или квантового броуновского движения. Использование этих пределов предполагает слабую связь и/или существование высокотемпературного предела. Для того чтобы исследовать эффекты немарковской динамики и сильной связи система-окружение, мы изучим разрушение когерентности, появляющееся в полной модели Кальдейры–Леггетта для затухающего гармонического осциллятора из раздела 3.6 (Caldeira, Leggett, 1985; Unruh, Zurek, 1989).

4.6.1. Основная формула декогерентизации

Для определения функции декогерентизации $\Gamma(T)$, соответствующей суперпозиции двух гауссовых волновых пакетов $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$, мы применяем тот же метод, что и в разделе 4.4. Простое рассмотрение показывает, что (4.158) может быть использовано при точном рассмотрении модели Кальдейры–Леггетта для произвольных спектральных плотностей, температур и связывающих сил. Причиной является тот факт, что решение для

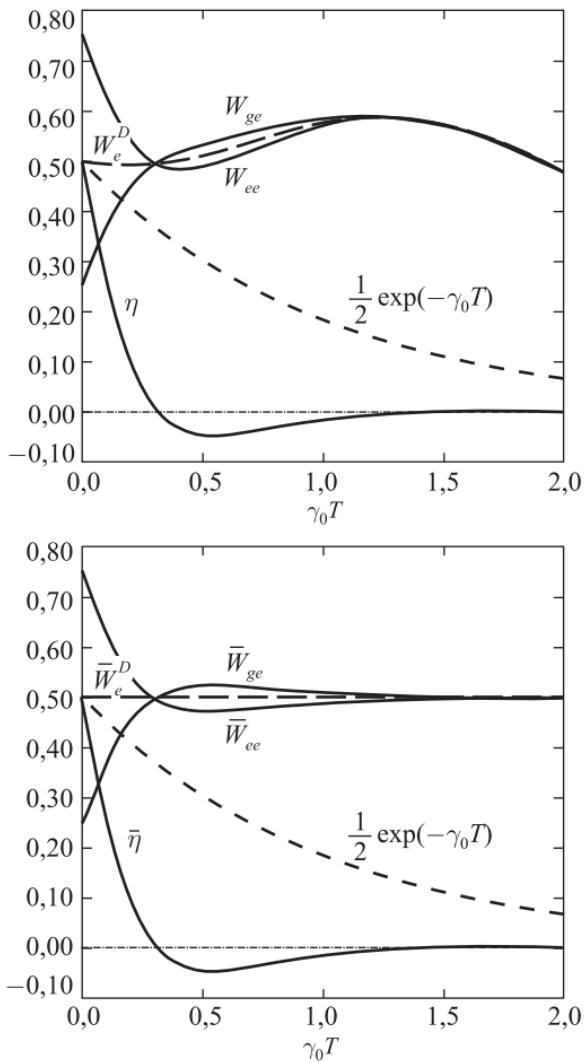


Рис. 4.10. Сверху: условные вероятности W_{ge} и W_{ee} , их разность η и вероятность W_e^D как функция времени задержки T для $\varphi_0 = 0$, $\phi = 0,7$ и $|\alpha|^2 = 6$. Чтобы сделать видимой разницу между декогерентизацией и релаксацией числа фотонов, мы также показываем функцию $0,5 \exp [-\gamma_0 T]$. Внизу: те же величины, усредненные по углу φ_0 .

этого уравнения основывается только на свойстве гауссиана начальных состояний и функции пропагатора. Таким образом, уравнение (4.158) также верно и в общем случае лишь с тем изменением, что величины $x_\alpha(t)$, $x_\beta(t)$, $x_{\alpha\beta}(t)$ и $\sigma^2(t)$ теперь определяются на языке математических ожиданий точной картины Гейзенберга оператора $x(t)$

$$x_\alpha(t) = \text{tr}\{x(t)|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho_B\}, \quad (4.214)$$

$$x_\beta(t) = \text{tr}\{x(t)|\beta\rangle\langle\beta|\rho_B\}, \quad (4.215)$$

$$x_{\alpha\beta}(t) = \frac{\text{tr}\{x(t)|\alpha\rangle\langle\beta|\rho_B\}}{\langle\beta|\alpha\rangle}, \quad (4.216)$$

$$\sigma^2(t) = \text{tr}\{x^2(t)|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho_B\} - [\text{tr}\{x(t)|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho_B\}]^2. \quad (4.217)$$

Здесь след берется по всей системе. Мы также отмечаем, что $\sigma_\alpha^2(t) = \sigma_\beta^2(t) = \sigma_{\alpha\beta}^2(t) \equiv \sigma^2(t)$, как и в случае основного уравнения квантовой оптики. Поэтому мы можем определить дисперсию $\sigma^2(t)$ с помощью состояния $|\alpha\rangle$ например. Для простоты предполагается, что изначально не существует корреляций система-резервуар. Однако подобный метод может быть использован, если корреляции представлены и в начальном состоянии.

Для определения функции декогерентизации мы сначала выразим величину $|\alpha - \beta|^2$, используемую в уравнении (4.158), в терминах начального разделения суперпозиции волновых пакетов в координатном пространстве

$$\Delta x \equiv x_\alpha(0) - x_\beta(0) \quad (4.218)$$

и импульсном пространстве

$$\Delta p \equiv m\dot{x}_\alpha(0) - m\dot{x}_\beta(0). \quad (4.219)$$

Это дает тождество

$$|\alpha - \beta|^2 \equiv \frac{\Delta x^2 + 4\sigma_0^4 \Delta p^2}{4\sigma_0^2}. \quad (4.220)$$

Мы уже знаем, что гейзенберговская картина оператора координаты $x(t)$ и соответствующего оператора импульса $p(t)$ подчиняются уравнениям движения $p(t) = m\dot{x}(t)$ и (3.465). Как и в параграфе 3.6.3.2 мы введем фундаментальные решения $G_1(t)$ и $G_2(t)$ однородной части уравнения (3.465), удовлетворяющие $G_1(0) = \dot{G}_2(0) = 1$ и $\dot{G}_1(0) = G_2(0) = 0$, и запишем

оператор Гейзенберга $x(t)$ как

$$\begin{aligned} x(t) &= G_1(t)x(0) + G_2(t)\dot{x}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t G_2(t-s)B(s)ds \equiv \\ &\equiv x_h(t) + I(t), \end{aligned} \quad (4.221)$$

где $x_h(t)$ обозначает решение однородного уравнения, в то время как $I(t)$ есть решение неоднородного уравнения, удовлетворяющего $I(0) = \dot{I}(0) = 0$.

Теперь с помощью уравнения (4.221) довольно легко оценить требуемые величины. Мы находим, что

$$\begin{aligned} \Re \left[(x - x_{\alpha\beta}(t))^2 - \frac{1}{2}(x - x_\alpha(t))^2 - \frac{1}{2}(x - x_\beta(t))^2 \right] &= \\ = -|\alpha - \beta|^2 \left(\sigma_0^2 G_1^2(t) + \frac{G_2^2(t)}{4m^2\sigma_0^2} \right) & \end{aligned} \quad (4.222)$$

и что дисперсия задается как

$$\sigma^2(t) = \sigma_0^2 G_1^2(t) + \frac{G_2^2(t)}{4m^2\sigma_0^2} + \langle I^2(t) \rangle, \quad (4.223)$$

где

$$\begin{aligned} \langle I^2(t) \rangle &= \frac{1}{2m^2} \int_0^t ds \int_0^t G_2(t-s)G_2(t-s')D_1(s-s')ds' = \\ &= \frac{1}{m^2} \int_0^\infty J(\omega) \operatorname{cth} \left(\frac{\omega}{2k_B T} \right) \left| \int_0^t G_2(s)e^{i\omega s} ds \right|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (4.224)$$

Напомним, что

$$D_1(s-s') = 2 \int_0^\infty J(\omega) \operatorname{cth} \left(\frac{\omega}{2k_B T} \right) \cos \omega(s-s') d\omega \quad (4.225)$$

является ядром шума, выраженным на языке спектральной плотности $J(\omega)$ основной модели.

Подставляя уравнения (4.220), (4.222) и (4.223) в (4.158), приходим к

$$\Gamma(t) = -\frac{\Delta x^2 + 4\sigma_0^4 \Delta p^2}{8\sigma_0^2} \frac{\langle I^2(t) \rangle}{\langle I^2(t) \rangle + \sigma_0^2 G_1^2(t) + G_2^2(t)/4m^2\sigma_0^2}. \quad (4.226)$$

Это уравнение дает основное выражение для функции декогерентизации $\Gamma(t)$. Оно может быть использовано для всех линейных моделей с координат-координатным связыванием, включая начальные состояния гауссiana, произвольные связывающие силы и спектральные плотности. В уравнении (4.226) функция декогерентизации выражается на языке начальной ширины σ_0^2 волновых пакетов. Если σ_0^2 принимается связанный с частотой осциллятора через (4.157), то суперпозиция волновых пакетов представляет когерентные состояния осциллятора. Однако, так как σ_0^2 может быть выбрана произвольно, уравнение (4.226) верно также и для сжатых начальных состояний.

Очевидно, $\Gamma(0) = 0$ и $\Gamma(t)$ стремится к значению, задаваемому начальным перекрытием в пределе большого времени, при условии, что в этом пределе $\langle I^2(t) \rangle \gg \sigma_0^2 G_1^2(t) + G_2^2(t)/4m^2\sigma_0^2$. Более того, у нас есть следующие пределы:

$$\Gamma(t) \approx -\Delta x^2 \frac{\langle I^2(t) \rangle}{2G_2^2(t)/m^2}, \quad \sigma_0^2 \rightarrow 0, \quad (4.227)$$

$$\Gamma(t) \approx -\Delta p^2 \frac{\langle I^2(t) \rangle}{2G_1^2(t)}, \quad \sigma_0^2 \rightarrow \infty. \quad (4.228)$$

Проблема определения функции декогерентизации $\Gamma(t)$, таким образом, сводится к определению фундаментальных решений $G_1(t)$ и $G_2(t)$ однородной части уравнения движения Гейзенберга и накопительного среднего $\langle I^2(t) \rangle$ квадрата неоднородной части.

4.6.2. Омические окружения

Рассмотрим в некоторых деталях случай омической спектральной плотности $J(\omega) = 2m\gamma\omega\theta(\Omega - \omega)/\pi$ с некоторой отсечкой на частоте Ω .

4.6.2.1. Высокотемпературный предел. В высокотемпературном пределе, то есть в случае $2k_B T \gg \Omega \gg \omega_0, \gamma$, мы получаем (см. (3.462) и (3.463))

$$D_1(s - s') \approx 8m\gamma k_B T \delta(s - s'), \quad (4.229)$$

которое, благодаря (4.224), дает

$$\langle I^2(t) \rangle \approx \frac{4\gamma k_B T}{m} \int_0^t G_2^2(s) ds. \quad (4.230)$$

Для примера, мы изучим свободное броуновское движение, для которого у нас есть фундаментальные решения $G_1(t) = 1$ и $G_2(t) = (1 - \exp(-2\gamma t))/2\gamma$. Это приводит к выражению

$$\langle I^2(t) \rangle \approx \frac{k_B T}{m\gamma^2} \left(\gamma t - [1 - \exp(-2\gamma t)] + \frac{1}{4}[1 - \exp(-4\gamma t)] \right). \quad (4.231)$$

Подставляя эти результаты в уравнение (4.226), получаем функцию декогерентизации для высокотемпературного броуновского движения. Исследуем такие времена, что $2\gamma t \ll 1$. Вводя $\Lambda = 2m\gamma k_B T$, мы находим

$$\Gamma(t) = -\frac{\Delta x^2 + 4\sigma_0^4 \Delta p^2}{8\sigma_0^2} \frac{\frac{2\Lambda}{3m^2} t^3}{\frac{2\Lambda}{3m^2} t^3 + \sigma_0^2 + \frac{t^2}{4m^2 \sigma_0^2}}. \quad (4.232)$$

Полученный результат показывает, что поведение функции декогерентизации критически зависит от начальной ширины суперпозиции волновых пакетов. Например, если вклад шума в дисперсию $\sigma^2(t)$ много меньше начальной ширины σ_0^2 волновых пакетов и если свободным распространением $t^2/4m^2 \sigma_0^2$ можно пренебречь, мы получим

$$\Gamma(t) \approx -\frac{\Delta x^2 + 4\sigma_0^4 \Delta p^2}{8\sigma_0^2} \frac{2\Lambda}{3m^2 \sigma_0^2} t^3. \quad (4.233)$$

Полученная формула показывает, что $\Gamma(t)$ увеличивается как третья степень t .

В пределе исчезающей начальной ширины (см. (4.227)) уравнение (4.232) приводит к

$$\Gamma(t) \approx -\frac{1}{3}\Lambda \Delta x^2 t. \quad (4.234)$$

Не считая множителя $\frac{1}{3}$, это соотношение уже было использовано для оценки интенсивности декогерентизации в разделе 4.3.1. С другой стороны, если мы дадим возможность начальной ширине стремиться к бесконечности

(см. (4.228)), то получим

$$\Gamma(t) \approx -\frac{1}{3} \frac{\Lambda}{m^2} \Delta p^2 t^3. \quad (4.235)$$

Снова значение функции декогерентизации растет как третья степень времени. Этот результат соответствует случаю интерференционного устройства, включающего плоские волны, которые обсуждались Саважем и Уоллсом (Savage, Walls, 1985b).

4.6.2.2. Гармонический осциллятор. Из однородной части уравнения движения Гейзенберга

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma \dot{x} = 0 \quad (4.236)$$

легко приходим к фундаментальным решениям

$$G_1(t) = \left[\frac{\gamma}{\nu} \sin \nu t + \cos \nu t \right] e^{-\gamma t}, \quad (4.237)$$

$$G_2(t) = \frac{1}{\nu} \sin \nu t e^{-\gamma t}, \quad (4.238)$$

где

$$\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \gamma < \omega_0, \quad (4.239)$$

есть характеристическая частота в незатухающем случае. В случае сильного затухания ν становится мнимой, и мы тогда запишем

$$\nu = -i\tilde{\nu} = -i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \gamma > \omega_0. \quad (4.240)$$

Так что фундаментальные решения принимают форму

$$G_1(t) = \left[\frac{\gamma}{\tilde{\nu}} \operatorname{sh} \tilde{\nu} t + \operatorname{ch} \tilde{\nu} t \right] e^{-\gamma t}, \quad (4.241)$$

$$G_2(t) = \frac{1}{\tilde{\nu}} \operatorname{sh} \tilde{\nu} t e^{-\gamma t}. \quad (4.242)$$

Мы используем спектральное представление шумового ядра (4.225) и выполняем s -интегрирование в уравнении (4.224), чтобы получить

$$\langle I^2(t) \rangle = \frac{\gamma}{2\pi m|\nu|^2} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \omega \operatorname{cth} \left(\frac{\omega}{2k_B T} \right) h(\omega) d\omega \quad (4.243)$$

с функцией

$$h(\omega) \equiv \frac{1}{2} \left| \frac{e^{-[\gamma+i(\omega-\nu)]t} - 1}{\gamma + i(\omega - \nu)} - \frac{e^{-[\gamma+i(\omega+\nu)]t} - 1}{\gamma + i(\omega + \nu)} \right|^2. \quad (4.244)$$

Эти выражения верны для обоих случаев: сильного и слабого затуханий. Подставляя уравнения (4.243) и (4.237), (4.238) или (4.241), (4.242) в (4.226), в результате получаем функцию декогерентизации для гармонического осциллятора (Caldeira, Leggett, 1985). Полученное выражение верно для произвольных сил связывания и температур. Однако оказывается, что общий анализ частотного интеграла (4.243) очень сложен. В частности, интеграл логарифмически зависит от Ω при большой частоте отсечки. Тем не менее для определенных предельных случаев могут быть получены простые утверждения. Для следующего обсуждения мы установим $\sigma_0^2 = 1/(2m\omega_0)$, соответствующее начальной суперпозиции когерентных состояний.

В пределе слабого затухания мы имеем $\gamma \ll \omega_0$ и $\nu \approx \omega_0$. Функция $h(\omega)$, таким образом, имеет два резких пика при $\omega \approx \pm\omega_0$, и в пределе $\gamma \rightarrow 0$ мы можем провести аппроксимацию

$$\langle I^2(t) \rangle \approx \frac{\gamma(2N+1)}{2\pi m\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) d\omega, \quad (4.245)$$

где мы ввели распределение Планка $N = N(\omega_0)$ через соотношение $2N(\omega_0) + 1 = \text{cth}(\omega_0/2k_B T)$. Оставшийся частотный интеграл может быть вычислен с помощью метода вычетов, который приводит к

$$\langle I^2(t) \rangle \approx \frac{2N+1}{2m\omega_0} [1 - \exp(-2\gamma t)]. \quad (4.246)$$

Подставляем в основную формулу декогерентизации (4.226), получим, что

$$\sigma_0^2 G_1^2(t) + \frac{1}{4m^2\sigma_0^2} G_2^2(t) = \frac{1}{2m\omega_0} \exp(-2\gamma t). \quad (4.247)$$

Как и ожидали, мы видим, что в пределе слабого затухания выражение для функции декогерентизации сводится к (4.161), которое было получено в квантовом оптическом пределе. Отметим, что константы релаксации связаны через $\gamma_0 \equiv 2\gamma$.

Рассмотрим также высокотемпературный предел для произвольного связывания. Применение уравнения (4.230) дает

$$\langle I^2(t) \rangle \approx \frac{k_B T}{m\omega_0^2} \left[1 - e^{-2\gamma t} \left(1 + \frac{\gamma}{\nu} \sin 2\nu t + 2 \frac{\gamma^2}{\nu^2} \sin^2 \nu t \right) \right]. \quad (4.248)$$

Соответствующая высокотемпературная функция декогерентизации $\Gamma(t)$ получается подстановкой этого выражения в основную формулу (4.226). Результат верный для обоих случаев: слабого и сильного затуханий. Поскольку имеет место случай слабого затухания, как и следовало ожидать, точная функция декогерентизации отличается от аналога из квантовой оптики членом порядка γ/ω_0 . Рис. 4.11 и 4.12 показывают $\Gamma(t)$ для двух различных значений γ/ω_0 и сравнение с соответствующим квантовым оптическим результатом (4.161) в пределе высоких температур. Точная функция декогерентизации осциллирует вокруг квантовой оптической функции декогерентизации на коротких временах. С ростом времени эти осцилляции вымирают и $\Gamma(t)$ сходится к квантовому оптическому пределу.

Предел слабого затухания приводит к

$$\Gamma(t) \approx -\frac{\Delta x^2 + 4\sigma_0^4 \Delta p^2}{8\sigma_0^2} \frac{2k_B T}{\omega_0} 2\gamma t \quad (4.249)$$

для времен, удовлетворяющих $2\gamma t \ll 1$ и $(2k_B T)(2\gamma t)/\omega_0 \ll 1$. Соответственно, отношение времени декогерентизации τ_D ко времени релаксации $\tau_R = 1/2\gamma$ есть

$$\frac{\tau_D}{\tau_R} = \frac{8\sigma_0^2}{\Delta x^2 + 4\sigma_0^4 \Delta p^2} \frac{\omega_0}{2k_B T}. \quad (4.250)$$

Сравним этот результат со случаем сильного затухания. Этот случай определяется пределом $\gamma \gg \omega_0$ так, что $\tilde{\nu} \approx \gamma$. Функция декогерентизации определяется подстановкой $\nu = -i\tilde{\nu}$ в уравнении (4.248). Исследуем времена t , удовлетворяющие

$$2(\gamma - \tilde{\nu})t \approx \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \gamma t \ll 1, \quad 2(\gamma + \tilde{\nu})t \approx 4\gamma t \gg 1. \quad (4.251)$$

Тогда функция декогерентизации для случая сильного затухания становится

$$\Gamma(t) \approx -\frac{\Delta x^2 + 4\sigma_0^4 \Delta p^2}{8\sigma_0^2} \frac{2k_B T}{\omega_0} \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2} 2\gamma t. \quad (4.252)$$

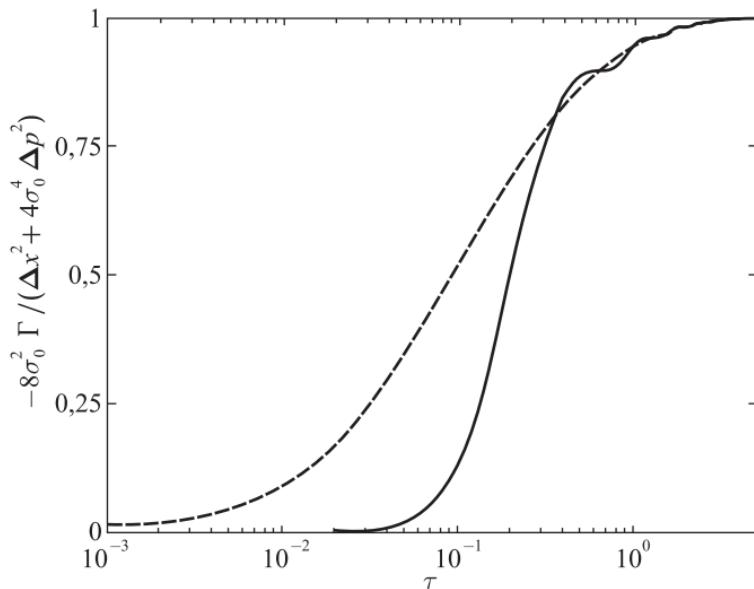


Рис. 4.11. График, в полулогарифмических координатах, слабозатухающей высокотемпературной функции декогерентизации $\Gamma(t)$, задаваемой уравнениями (4.226) и (4.248) (сплошная линия), и соответствующего квантового оптического результата (4.161) (штриховая линия) как функции $\tau = 2\gamma t$. Параметры: $2k_B T/\hbar\omega_0 = 10$, $\gamma/\omega_0 = 0,1$.

Отметим, что это выражение отличается от результата слабого затухания (4.249) множителем $\omega_0^2/2\gamma^2$. Однако должно быть отмечено, что интенсивность релаксации есть $\tau_R = 1/(2\gamma)$ в случае слабого затухания, в то время как

$$\tilde{\tau}_R = \frac{1}{2(\gamma - \tilde{\nu})} \approx \frac{\gamma}{\omega_0^2} = \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2} \tau_R \quad (4.253)$$

в пределе сильного затухания. Отсюда следует, что при сильном затухании время декогерентизации $\tilde{\tau}_D$ удовлетворяет

$$\frac{\tilde{\tau}_D}{\tilde{\tau}_R} = \frac{\tau_D}{\tau_R}. \quad (4.254)$$

Таким образом, мы приходим к замечательному результату, что отношение времени декогерентизации и времени релаксации одно и то же для случаев

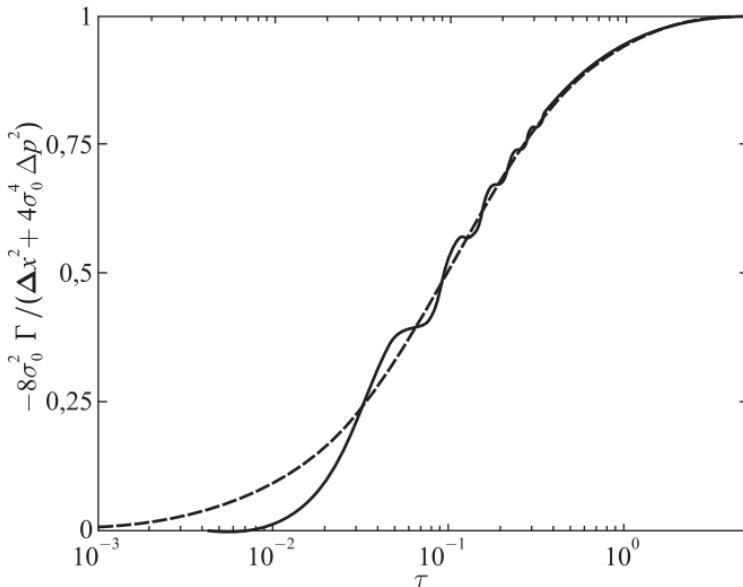


Рис. 4.12. То же, что и на рис. 4.11, но для $\gamma/\omega_0 = 0,01$.

сильного и слабого затуханий и что это совпадает с результатом (4.170), найденным в квантовом оптическом пределе.

4.7. Декогерентизация и квантовое измерение

Квантовая теория измерения предусматривает важное приложение декогерентизации, индуцированной окружением. Разрушение квантовой когерентности через влияние окружения выделяет основной набор состояний, известный как *измерительный базис*, в гильбертовом пространстве некоторого квантового прибора M , который используется для измерения над квантовым объектом S . Так как декогерентизация, как здесь понималось, в конечном счете связана с взятием следа по степеням свободы окружения, то, конечно, проблема измерения решиться не может. Это означает, что декогерентизация не может быть использована для вывода редукции вектора состояния и статистической интерпретации квантовой механики из единой эволюции, задаваемой уравнением Шредингера. Однако в любой реалистичной схеме измерения связывание макроскопического прибора с его окружением, как может быть показано, при вполне общих физических

обстоятельствах, приводит к динамическому выбору *измерительного базиса* и, таким образом, однозначного определения того, что было приборно измерено (Zurek, 1981, 1982).

4.7.1. Динамический выбор измерительного базиса

Мы исследуем квантовую систему S , которая связана с прибором или измерителем M через гамильтониан взаимодействия $H_{SM}(t)$. Степени свободы будут полностью описаны квантово-механически, так что гильбертово пространство составной системы есть тензорное произведение пространств $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$. Дальше мы обозначаем гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия как

$$H_{SM}^I(t) = e^{iH_0 t} H_{SM}(t) e^{-iH_0 t}, \quad (4.255)$$

где $H_0 = H_S + H_M$ есть сумма гамильтонианов самой системы и измерителя. Так, в разделе 4.1 взаимодействие система-измеритель для примера полагается, в идеальном случае, связанным с корреляциями между определенными ортогональными базисными состояниями $|S_n\rangle$ S и измерителя $|M_n\rangle$ так, что за время эволюции через интервал τ состояние принимает вид (см. (4.7) и (4.8))

$$|\psi_{SM}(0)\rangle = \sum_n c_n |S_n\rangle \otimes |M\rangle \rightarrow |\psi_{SM}(\tau)\rangle = \sum_n c_n |S_n\rangle \otimes |M_n\rangle. \quad (4.256)$$

Это конкретный тип динамики, лежащий в основе непрямой, КНИ схемы измерения: система S представляет квантовый объект, в то время как измеритель M представляет квантовый зонд. Начальное состояние зонда $|M\rangle$, а измерение дает

$$\hat{S} = \sum_n a_n |S_n\rangle \langle S_n|, \quad (4.257)$$

или некоторую функцию $f(\hat{S})$. В уравнении (4.256) полагается, что условие, при котором удается избежать обратного воздействия, есть

$$[\hat{S}, H_{SM}^I(t)] = 0. \quad (4.258)$$

Как мы знаем, это гарантирует, что базисные состояния $|S_n\rangle$ не подвержены влиянию взаимодействия система-измеритель. Предположим, что состояния измерителя, по крайней мере, приблизительно ортогональны (см. также

разобранный пример в разделе 4.7.2), так что мы имеем³

$$\langle S_n | S_m \rangle = \delta_{nm}, \quad \langle M_n | M_m \rangle = \delta_{nm}. \quad (4.259)$$

Проекционные измерения определяются оператором

$$\widehat{M} = \sum_n b_n |M_n\rangle\langle M_n|, \quad (4.260)$$

что на выходе дает b_n с вероятностью $|c_n|^2$, при этом волновая функция системы, обусловленная этим событием, соответственно, задается $|S_n\rangle$. В рамках непрямой измерительной схемы мы, таким образом, можем сказать, что измерение, выполненное на измерительной системе, приводит к измерению системной величины $f(\widehat{S})$ и вызывает редукцию системного вектора состояний в соответствии с проекционным постулатом. После измерения редуцированная матрица плотности системы S принимает вид

$$\rho_S(\tau) = \sum_n |c_n|^2 |S_n\rangle\langle S_n|, \quad (4.261)$$

описывающий измерение на неселективном уровне.

Несмотря на строгое предположение о разложении $|\psi_{SM}(\tau)\rangle$ в (4.256), интерпретация, представленная выше, неполна по следующей причине. После взаимодействия система-измеритель составная система находится в запутанном состоянии $|\psi_{SM}(\tau)\rangle$, которое описывает идеальные корреляции между состояниями системы $|S_n\rangle$ и измерителя $|M_n\rangle$. Однако $|\psi_{SM}(\tau)\rangle$ — все еще суперпозиция этих связанных состояний. Последние *существуют* в $|\psi_{SM}(\tau)\rangle$, а без постулата о редукции невозможно объяснить появление состояния $|S_n\rangle \otimes |M_n\rangle$, как единственного физически реального. В самом деле, без принятия определенного решения по проведению измерения наблюдаемой на M , мы можем рассмотреть иной набор базисных состояний

$$|\widetilde{M}_n\rangle = \sum_{n'} |M_{n'}\rangle\langle M_{n'}| \widetilde{|M}_n\rangle. \quad (4.262)$$

Тогда мы можем записать альтернативный вектор состояния составной системы по истечении времени τ

$$|\psi_{SM}(\tau)\rangle = \sum_n \tilde{c}_n |\widetilde{S}_n\rangle \otimes |\widetilde{M}_n\rangle, \quad (4.263)$$

³Для облегчения дальнейшего обсуждения мы полагаем здесь, что взаимодействие не вырождено, то есть, что оно приводит к непрямому измерению наблюдаемой невырожденной системы.

где мы ввели новую систему нормированных состояний

$$\tilde{c}_n |\tilde{S}_n\rangle \equiv \sum_{n'} c_{n'} |S_{n'}\rangle \langle \widetilde{M}_n | M_{n'} \rangle. \quad (4.264)$$

С тем же правом, как и до этого, мы можем потребовать, чтобы измерение прибора задавалось некоторой наблюдаемой, то есть

$$\widehat{\tilde{M}} = \sum_n \tilde{b}_n |\widetilde{M}_n\rangle \langle \widetilde{M}_n|. \quad (4.265)$$

Это приводит к тому, что измерение системы задается наблюдаемой

$$\widehat{\tilde{S}} = \sum_n \tilde{a}_n |\tilde{S}_n\rangle \langle \tilde{S}_n|, \quad (4.266)$$

или некоторой функцией $f(\widehat{\tilde{S}})$. Проблема в том, что, хотя мы и не изменили взаимодействия система-измеритель и несмотря на то, что, очевидно, редуцированные матрицы плотности системы совпадают

$$\rho_S(\tau) = \sum_n |c_n|^2 |S_n\rangle \langle S_n| = \sum_n |\tilde{c}_n|^2 |\tilde{S}_n\rangle \langle \tilde{S}_n| \quad (4.267)$$

(какая из наблюдаемых измеряется неясно), в общем случае величины \widehat{S} и $\widehat{\tilde{S}}$ не коммутируют

$$\left[\widehat{S}, \widehat{\tilde{S}} \right] \neq 0. \quad (4.268)$$

Таким образом, возникает вопрос: что измеряет наше устройство \widehat{S} или $\widehat{\tilde{S}}$?

Базис состояний измерителя $|\widetilde{M}_n\rangle$ задается произвольно. Соответствующие состояния $|\tilde{S}_n\rangle$ в разложении вида (4.263) есть *относительные состояния*. Они в общем случае неортогональны друг другу, но могут быть взяты нормированными с точностью до фазового множителя там, где определены однозначно. Концепция относительных состояний была использована Эвереттом (Everett, 1957) в его многомировой формулировке квантовой механики. Мы можем допустить, что \tilde{c}_n в уравнении (4.264) действительны и неотрицательны, что дает в результате

$$\tilde{c}_n = \sqrt{\sum_{n'} |c_{n'}|^2 |\langle \widetilde{M}_n | M_{n'} \rangle|^2} \quad (4.269)$$

и

$$|\tilde{S}_n\rangle = \frac{1}{\tilde{c}_n} \sum_{n'} c_{n'} |S_{n'}\rangle \langle \tilde{M}_n | M_{n'} \rangle. \quad (4.270)$$

Тогда скалярное произведение относительных состояний $|\tilde{S}_n\rangle$ задается выражением

$$\langle \tilde{S}_m | \tilde{S}_n \rangle = \frac{1}{\tilde{c}_m \tilde{c}_n} \sum_{n'} |c_{n'}|^2 \langle \tilde{M}_n | M_{n'} \rangle \langle M_{n'} | \tilde{M}_m \rangle. \quad (4.271)$$

Отметим, что для неортогональных относительных состояний уравнение (4.266) определяет самосопряженный оператор, в котором, однако, \tilde{a}_n не являются его собственными значениями. Более того, уравнение (4.267) представляет матрицу плотности системы после измерения двумя альтернативными способами, как смеси чистых состояний, где во втором случае эти чистые состояния неортогональны.

Указанная выше проблема становится довольно острой, если все ненулевые коэффициенты c_n , $n = 1, 2, \dots, D$, в суперпозиции начального состояния $|\psi_{SM}(0)\rangle$ имеют одни и те же абсолютные значения, то есть если $|\psi_{SM}(0)\rangle$ максимально запутана. В этом случае $\rho_S(\tau)$ становится пропорциональной единичному оператору в подпространстве, охватываемом соответствующими состояниями $|S_n\rangle$,

$$\rho_S(\tau) = \frac{1}{D} \sum_{n=1}^D |S_n\rangle \langle S_n|. \quad (4.272)$$

Полагая в дальнейшем, что соответствующие базисные состояния $|M_n\rangle$ и $|\tilde{M}_n\rangle$ охватывают то же подпространство, мы с помощью уравнения (4.271) находим, что относительные состояния ортогональны, то есть

$$\langle \tilde{S}_m | \tilde{S}_n \rangle = \delta_{mn} \quad (4.273)$$

для любого выбора базисных состояний измерителя (естественно, с указанными выше ограничениями). Варьируя базис измерителя, мы можем измерять любой базис системы. Таким образом, мы приходим к удивительному заключению, что наше измерительное устройство способно к измерению любой наблюдаемой системы.

Важно понимать, что проблема, озвученная выше, не расходится с общепринятой интерпретацией квантовой механики и поэтому появляется,

только если отказаться от точного определения наблюдаемой и применения постулата редукции. Однако ситуация является неудовлетворительной, так как, согласно опыту, определенное измерительное устройство, которое разрабатывалось для измерения, например, импульса квантовой системы, измерит импульс, но не координату. Неопределенность в измеряемой наблюдаемой очевидна благодаря тому факту, что взаимодействие система-измеритель не фиксирует однозначный базис состояний $|M_n\rangle$ в метрическом гильбертовом пространстве \mathcal{H}_M (или в определенном его подпространстве). Двусмысленности можно избежать, если по некоторым причинам можно выделить указанный базис, то есть если только физическая величина $\widehat{M} = \sum_n b_n |M_n\rangle\langle M_n|$ (или функция от этого аргумента) может быть измерена на M . Наблюдаемая система \widehat{S} , измеряемая данным устройством, определяется соответствующим набором состояний $|S_n\rangle$.

Здесь мы должны принять во внимание, что измеритель M обычно предполагается макроскопической степенью свободы, которая, в свою очередь, связана с огромным (обычно неограниченным) числом остальных степеней свободы. Индуцированная окружением декогерентизация приводит к динамическому выбору особого базиса. Это означает, что метрическое гильбертово пространство \mathcal{H}_M раскладывается на когерентные подпространства (которые здесь предполагаются одномерными) таким образом, что локальный наблюдатель не может наблюдать когерентности между различными подпространствами. Суперпозиции вида (4.262) в таком случае эффективно разрушаются, и появляется единственный базис $\{|M_n\rangle\}$. Этот базис часто называется *измерительным базисом*. Окружение E действует как измерительная аппаратура: в то время как целая система $S + M + E$ развивается едино, конечно, редуцированная система $S + M$ характеризуется, как если бы ее состояния непрерывно сжимались в одно коррелирующее состояние $|S_n\rangle \otimes |M_n\rangle$. Тогда редуцированное состояние $S + M$ относительно локальных измерений характеризуется как некогерентная статистическая смесь состояний $|S_n\rangle \otimes |M_n\rangle$.

Таким образом, мы приходим к рассмотрению измерительной системы, изображенной на рис. 4.13. Суммарный гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия будет иметь вид

$$H_I(t) = H_{SM}^I(t) + H_{ME}^I(t). \quad (4.274)$$

Здесь для простоты мы полагаем, что $H_{SME} = 0$, то есть в гамильтониане нет членов тройного взаимодействия, и что $H_{SE} = 0$, что означает, что прямое взаимодействие между системой и окружением нулевое. Весь из-

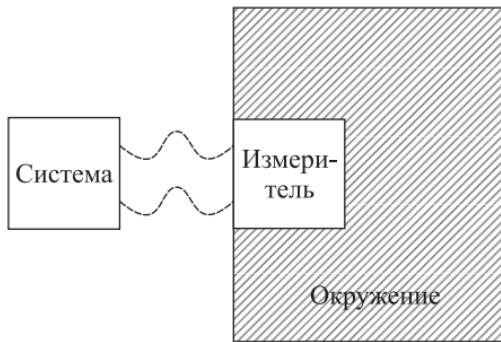


Рис. 4.13. Схематическое изображение измерительной схемы. В добавление к взаимодействию система-измеритель, измеритель запускается с большим окружением, которое динамически выбирает указанный измерительный базис за время декогерентизации.

мерительный процесс может быть разбит на две следующие фазы (Zurek, 1981):

1. Как и прежде, $H_{SM}^I(t)$ действует на всем интервале $[0, \tau]$, на котором $H_{SM}^I(t) \gg H_{ME}^I(t)$. За этот временной интервал желаемые корреляции система-измеритель строятся под влиянием $H_{SM}^I(t)$,

$$\sum_n c_n |S_n\rangle \otimes |M\rangle \otimes |E\rangle \rightarrow \sum_n c_n |S_n\rangle \otimes |M_n\rangle \otimes |E\rangle, \quad (4.275)$$

где $|E\rangle$ — начальное состояние окружения. Как и прежде, условие (4.258), при котором удается избежать обратного воздействия, полагается выполненным, что гарантирует, что состояния системы $|S_n\rangle$ не подвержены влиянию взаимодействия система-измеритель. Эта первая фаза процесса может называться предизмерением.

2. При $t > \tau$ взаимодействие измеритель-окружение доминирует, то есть $H_{ME}^I(t) \gg H_{SM}^I(t)$. В результате это дает динамический выбор измерительного базиса через индуцированную окружением декогерентизацию. Полагая также, что условие, при котором удается избежать обратного воздействия для взаимодействия измеритель-окружение, есть

$$[\widehat{M}, H_{ME}^I(t)] = 0, \quad (4.276)$$

мы можем записать вторую фазу измерительного процесса как

$$\sum_n c_n |S_n\rangle \otimes |M_n\rangle \otimes |E\rangle \rightarrow \sum_n c_n |S_n\rangle \otimes |M_n\rangle \otimes |E_n\rangle. \quad (4.277)$$

Отметим, что наиболее общее решение для условия (4.276) гласит

$$H_{ME}^I(t) = \sum_n |M_n\rangle \langle M_n| \otimes B_n(t), \quad (4.278)$$

где $B_n(t)$ — произвольные операторы окружения. Условие (4.276) гарантирует, что собственный базис \widehat{M} не подвергается влиянию во время второй фазы процесса. Указанные корреляции система-измеритель, созданные за время предизмерения, таким образом, не разрушаются через окружение. Они также представляются в редуцированной матрице плотности системы-измеритель

$$\rho_{SM}(t) = \sum_n |c_n|^2 |S_n\rangle \langle S_n| \otimes |M_n\rangle \langle M_n|. \quad (4.279)$$

Конечно, это лишь схематическое изображение того, что происходит в реальной измерительной схеме. В частности, оказывается, что в более реальном описании идеальное условие, при котором удается избежать обратного воздействия (4.276), обычно не может быть полностью выполненным. Измерительный базис, однако, может быть еще приближенно ортогональным, что очень ощутимо для работы измерительного устройства. Эта точка зрения проиллюстрирована при помощи специальных моделей в следующем разделе.

4.7.2. Динамическая модель для квантового измерения

Мы рассмотрим здесь динамическую модель для квантового измерительного процесса, которая была предложена и исследована Уоллсом, Коллеттом и Милбурном (Walls, Collett, Milburn, 1985). Она состоит из двух связанных осцилляторных мод a и b , где a — измеряемый квантовый объект, b представляет собой измеритель. Взаимодействие система-измеритель берется вида (полное обсуждение будет произведено в представлении взаимодействия, для простоты мы опускаем индекс I)

$$H_{SM} = -\frac{i}{2} a^\dagger a (b\varepsilon^* - b^\dagger \varepsilon). \quad (4.280)$$

Физической предпосылкой для такого типа связывания является взаимодействие четырехволнового смешивания (Walls, Milburn, 1994). Избежать обратного действия можно при условии $[f(a^\dagger, a), H_{SM}] = 0$. Пренебрегая связыванием моды b с окружением, мы получаем следующую предизмерительную эволюцию:

$$|\psi_{SM}(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_S \otimes |0\rangle_M \rightarrow |\psi_{SM}(t)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_S \otimes |n\varepsilon t/2\rangle_M. \quad (4.281)$$

Таким образом, если измерительная мода b изначально находится в вакуумном состоянии $|0\rangle_M$, число заполнения $|n\rangle_S$ моды a становится коррелирующим с когерентными состояниями

$$|M_n\rangle = |n\varepsilon t/2\rangle_M, \quad (4.282)$$

которые будут играть роль состояний измерительного базиса. Отметим, что эти состояния приблизительно ортогональны, так как их перекрытие экспоненциально мало при $|\varepsilon|t \gg 1$,

$$\langle M_m | M_n \rangle = \exp \left[-\frac{|\varepsilon|^2 t^2}{8} (m-n)^2 \right]. \quad (4.283)$$

Окружение представляется набором мод c_j , которые линейно связаны с измерительной модой b ,

$$H_{ME} = b \sum_j \kappa_j^* c_j^\dagger + b^\dagger \sum_j \kappa_j c_j. \quad (4.284)$$

Вычисляя след по степеням свободы окружения и используя приближение Борна–Маркова в квантовом оптическом пределе, мы получаем следующее основное уравнение для матрицы плотности:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{SM}(t) = & -\frac{1}{2} [a^\dagger a (b\varepsilon^* - b^\dagger \varepsilon), \rho_{SM}(t)] + \\ & + \gamma_0 \left(b \rho_{SM}(t) b^\dagger - \frac{1}{2} b^\dagger b \rho_{SM}(t) - \frac{1}{2} \rho_{SM}(t) b^\dagger b \right), \end{aligned} \quad (4.285)$$

с начальным условием

$$\rho_{SM}(0) = |\psi_{SM}(0)\rangle \langle \psi_{SM}(0)| = \sum_{nm} c_m^* c_n (|n\rangle \langle m|)_S \otimes (|0\rangle \langle 0|)_M. \quad (4.286)$$

Отметим, что H_{ME} нарушает условие, при котором удается избежать обратного воздействия (4.276). Однако мы знаем, что основное уравнение (4.285) приводит к быстрому разрушению когерентностей между когерентными состояниями. Таким образом, мы ожидаем, что появится примерно ортогональный измерительный базис, состоящий из когерентных состояний (4.282).

Чтобы решить основное уравнение, мы используем выражение

$$\rho_{SM}(t) = \sum_{nm} f_{nm}(t) (|n\rangle\langle m|)_S \otimes (|\beta_n(t)\rangle\langle\beta_m(t)|)_M, \quad (4.287)$$

где $f_{nm}(t)$ и $\beta_n(t)$ являются обычными числовыми функциями с начальными условиями $f_{nm}(0) = c_m^* c_n$ и $\beta_n(0) = 0$. Подставляя это выражение в основное уравнение (4.285), приходим к дифференциальным уравнениям

$$\dot{\beta}_n = -\frac{\gamma_0}{2}\beta_n + \frac{n\varepsilon}{2}, \quad (4.288)$$

$$\frac{\dot{f}_{nm}}{f_{nm}} = \gamma_0\beta_m^*\beta_n + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\beta_n|^2 + |\beta_m|^2) - \frac{n\varepsilon^*}{2}\beta_n - \frac{m\varepsilon}{2}\beta_m^*, \quad (4.289)$$

которые легко решаются, и в результате получаем

$$\beta_n(t) = \frac{n\varepsilon}{\gamma_0} \left(1 - e^{-\gamma_0 t/2}\right), \quad (4.290)$$

$$f_{nm}(t) = c_m^* c_n \exp \left[\frac{|\varepsilon|^2}{2\gamma_0^2} (n-m)^2 \left\{ 3 - \gamma_0 t - 4e^{-\gamma_0 t/2} + e^{-\gamma_0 t} \right\} \right]. \quad (4.291)$$

Решение основного уравнения, таким образом, может быть записано в следующих альтернативных формах:

$$\begin{aligned} \rho_{SM}(t) &= \sum_{nm} c_m^* c_n \exp \left[\frac{|\varepsilon|^2}{2\gamma_0^2} (n-m)^2 \left\{ 3 - \gamma_0 t - 4e^{-\gamma_0 t/2} + e^{-\gamma_0 t} \right\} \right] \times \\ &\quad \times (|n\rangle\langle m|)_S \otimes (|\beta_n(t)\rangle\langle\beta_m(t)|)_M = \\ &= \sum_{nm} c_m^* c_n \exp \left[\frac{|\varepsilon|^2}{\gamma_0^2} (n-m)^2 \left\{ 1 - \frac{\gamma_0 t}{2} - e^{-\gamma_0 t/2} \right\} \right] \times \\ &\quad \times (|n\rangle\langle m|)_S \otimes \left(\frac{|\beta_n(t)\rangle\langle\beta_m(t)|}{\langle\beta_m(t)|\beta_n(t)\rangle} \right)_M. \end{aligned} \quad (4.292)$$

Для начала рассмотрим предел $\gamma_0 t \ll 1$, то есть предел времен, коротких по сравнению со временем релаксации γ_0^{-1} . Тогда в наименьшем порядке по $\gamma_0 t$

$$\beta_n(t) \approx \frac{n\varepsilon t}{2}, \quad (4.293)$$

$$3 - \gamma_0 t - 4e^{-\gamma_0 t/2} + e^{-\gamma_0 t} \approx -\frac{1}{12}(\gamma_0 t)^3, \quad (4.294)$$

и тогда

$$\begin{aligned} \rho_{SM}(t) &\approx \sum_{nm} c_m^* c_n \exp \left[-\frac{1}{24}(|\varepsilon|t)^2 \gamma_0 t (n-m)^2 \right] \times \\ &\quad \times (|n\rangle\langle m|)_S \otimes (|n\varepsilon t/2\rangle\langle m\varepsilon t/2|)_M. \end{aligned} \quad (4.295)$$

Чем точнее будет измерение, тем меньше будет перекрытие состояний измерительного базиса (4.282). Таким образом, мы приходим к рассмотрению предельного случая

$$|\varepsilon|t \rightarrow \infty, \quad \gamma_0 t \rightarrow 0, \quad (|\varepsilon|t) \cdot (\gamma_0 t) = \text{const.} \quad (4.296)$$

Уравнение (4.295) показывает, что в этом пределе оператор плотности $\rho_{SM}(t)$ становится диагональным в измерительном базисе $|M_n\rangle = |n\varepsilon t/2\rangle$,

$$\rho_{SM}(t) \approx \sum_n |c_n|^2 (|n\rangle\langle n|)_S \otimes |M_n\rangle\langle M_n|. \quad (4.297)$$

Декогерентизирующее влияние окружения, таким образом, выбирает ортогональный измерительный базис состояний. Это происходит на временном масштабе, который при данных условиях мал по сравнению со временем релаксации. Эффекты затухания играют пренебрежимо малую роль, а измерительный базис не зависит от интенсивности релаксации.

В заключение отметим другое интересное свойство модели. Второе уравнение в (4.292) дает следующую редуцированную матрицу плотности для моды a :

$$\rho_S(t) = \sum_{nm} c_m^* c_n \exp \left[\frac{|\varepsilon|^2}{\gamma_0^2} (n-m)^2 \left\{ 1 - \frac{\gamma_0 t}{2} - e^{-\gamma_0 t/2} \right\} \right] (|n\rangle\langle m|)_S. \quad (4.298)$$

При $\gamma_0 t \ll 1$ в наименьшем порядке

$$1 - \frac{\gamma_0 t}{2} - e^{-\gamma_0 t/2} \approx -\frac{1}{8}(\gamma_0 t)^2. \quad (4.299)$$

Отсюда следует, что недиагональные элементы $\rho_S(t)$ в наборе базисных состояний моды a угасают с показателем экспоненты, который пропорционален t^2 , что показывает немарковский характер модели для коротких времен. Для больших времен $\gamma_0 t \gg 1$ мы находим

$$\rho_S(t) = \sum_{nm} c_m^* c_n \exp\left[-\frac{|\varepsilon|^2 t}{2\gamma_0}(n-m)^2\right] (|n\rangle\langle m|)_S. \quad (4.300)$$

При дифферентировании этого уравнения по времени мы, таким образом, получаем

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{|\varepsilon|^2}{2\gamma_0} [a^\dagger a, [a^\dagger a, \rho_S(t)]]. \quad (4.301)$$

Это основное марковское уравнение для редуцированной системы S , то есть основное уравнение в сингулярном связывающем пределе. Рассматриваемая модель, таким образом, показывает переход от немарковского описания для коротких времен к марковской динамике для больших времен.

Библиография

Bouwmeester, D., Ekert, A. and Zeilinger, A. (eds.) (2000). *The Physics of Quantum Information*. Springer-Verlag, Berlin. Имеется перевод: *Физика квантовой информации. Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления*. — М.: Постмаркет, 2002.

Breuer, H. P., Dorner, U. and Petruccione, F. (2001). Preparation and decoherence of superpositions of electromagnetic field states. *Eur. Phys. J.*, **D14**, 377–386.

Brune, M., Hagley, E., Dreyer, J., Maitre, X., Maali, A., Wunderlich, C., Raimond, J. M. and Haroche, S. (1996). Observing the progressive decoherence of the «meter» in a quantum measurement. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4887–4890.

Caldeira, A. O. and Leggett, A. J. (1985). Influence of damping on quantum interference: An exactly soluble model. *Phys. Rev.*, **A31**, 1059–1066.

DiVincenzo, D. P. (1995). Two-bit gates are universal for quantum computation. *Phys. Rev.*, **A51**, 1015–1022.

Everett III, H. (1957). «Relative state» formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 454–462.

Friedman, J. R., Patel, V., Chen, W., Tolpygo, S. K. and Lukens, J. E. (2000). Quantum superposition of distinct macroscopic states. *Nature*, **406**, 43–46.

- Gallis, M. R. and Fleming, G. N. (1990). Environmental and spontaneous localization. *Phys. Rev.*, **A42**, 38–42.
- Joos, E. and Zeh, H. D. (1985). The emergence of classical properties through interaction with the environment. *Z. Phys.*, **B59**, 223–243.
- Joos, E. (1996). Decoherence through interaction with the environment. In *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (eds. Giulini, D., Joos, E., Kiefer, C., Kupsch, J., Stamatescu, I.-O. and Zeh, H. D.), Springer-Verlag, Berlin, pp. 35–136.
- Maitre, X., Hagley, E., Dreyer, J., Maali, A., Wunderlich, C., Brune, M., Raimond, J. M. and Haroche, S. (1997). An experimental study of a Schrödinger cat decoherence with atoms and cavities. *J. Mod. Opt.*, **44**, 2023–2032.
- Myatt, C. J., King, B. E., Turchette, Q. A., Sackett, C. A., Kielpinski, D., Itano, W. M., Monroe, C. and Wineland, D. J. (2000). Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs. *Nature*, **403**, 269–273.
- Palma, G. M., Suominen, K.-A. and Ekert, A. K. (1996). Quantum computers and dissipation. *Proc. R. Soc. bond.*, **A452**, 567–584.
- Savage, C. M. and Walls, D. F. (1985a). Damping of quantum coherence: The master-equation approach. *Phys. Rev.*, **A32**, 2316–2323.
- Savage, C. M. and Walls, D. F. (1985b). Quantum coherence and interference of damped free particles. *Phys. Rev.*, **A32**, 3487–3492.
- Schrödinger, E. (1935). Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, **23**, 807–812, 823–828, 844–849.
- Steane, A. (1998). Quantum computing. *Rep. Prog. Phys.*, **61**, 117–173.
- Tegmark, M. (1993). Apparent wave function collapse caused by scattering. *Found. Phys. Lett.*, **6**, 571–590.
- Turchette, Q. A., Myatt, C. J., King, B. E., Sackett, C. A., Kielpinski, D., Itano, W. M., Monroe, C. and Wineland, D. J. (2000). Decoherence and decay of motional quantum states of a trapped atom coupled to engineered reservoirs. *Phys. Rev.*, **A62**, 053807, 1–22.
- Unruh, W. G. and Zurek, W. H. (1989). Reduction of a wave packet in quantum Brownian motion. *Phys. Rev.*, **D40**, 1071–1094.
- Unruh, W. G. (1995). Maintaining coherence in quantum computers. *Phys. Rev.*, **A51**, 992–997.
- Walls, D. F., Collet, M. J. and Milburn, G. J. (1985). Analysis of a quantum measurement. *Phys. Rev.*, **D32**, 3208–3215.
- Walls, D. F. and Milburn, G. J. (1994). *Quantum Optics*. Springer-Verlag, Berlin.

- Zurek, W. H. (1981). Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? *Phys. Rev.*, **D24**, 1516–1525.
- Zurek, W. H. (1982). Environment-induced superselection rules. *Phys. Rev.*, **D26**, 1862–1880.
- Zurek, W. H. (1991). Decoherence and the transition from quantum to classical. *Phys. Today*, **44**, 36–44.
- Zurek, W. H. (1998). Decoherence, einselection and the existential interpretation (the rough guide). *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A356**, 1793–1821.

Часть III

Стохастические процессы в гильбертовом пространстве

ГЛАВА 5

Вероятностные распределения в гильбертовом пространстве

В разделе 2.1.3 мы видели, что статистические свойства квантово-механического ансамбля полностью описываются на языке матрицы плотности. Однако, если над ансамблем выполняются селективные измерения одной или нескольких наблюдаемых, он расщепится на набор субансамблей. Каждый субансамбль в отдельности формируется на основе результатов измерений. Теоретическое описание набора субансамблей, созданных таким образом, приводит к новому виду квантового статистического ансамбля, отличного от встречавшегося в разделе 2.1.3. Центральным объектом настоящей главы является описание таких новых ансамблей. Это описание будет полезно нам в главе 6 при исследовании динамики с новой точки зрения, связанной со стохастическими процессами в гильбертовом пространстве.

Рассмотрения раздела 5.1 служат для предоставления точной физической интерпретации нового типа ансамблей. Требуемый математический аппарат функционального интегрирования в гильбертовом пространстве будет развит в разделе 5.2. Там мы введем плотности вероятности функционалов в гильбертовом пространстве, которые допускают общую характеристику ансамблей нового вида и допускают построение соответствующих стохастических уравнений временной эволюции для вектора состояний. В качестве дальнейшего обобщения, требуемого в более поздних главах, мы изучим в разделе 5.3 вероятностные распределения в пространстве матриц плотности.

5.1. Вектор состояний как случайная величина в гильбертовом пространстве

В этом разделе мы вводим новый тип квантового статистического ансамбля, который может быть охарактеризован посредством случайного вектора состояний в гильбертовом пространстве. Основная концепция будет также проиллюстрирована с помощью простого примера.

5.1.1. Новый тип квантово-механического ансамбля

В разделе 2.1.3 мы изучили определенный тип ансамблей \mathcal{E} , статистические свойства которого полностью характеризуются посредством матрицы плотности ρ . Для того чтобы отличать такие ансамбли от введенных новых ансамблей, в дальнейшем они будут обозначаться $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\rho$.

Напомним, что ансамбль \mathcal{E}_ρ был построен смещиванием M ансамблей \mathcal{E}_α , $\alpha = 1, 2, \dots, M$, определенной квантово-механической системы с весами $w_\alpha = N_\alpha/N$. Каждый \mathcal{E}_α представляет собой чистый ансамбль, описываемый нормированным вектором состояний ψ_α . Число N_α означает число систем в \mathcal{E}_α ,

$$N = \sum_{\alpha=1}^M N_\alpha \quad (5.1)$$

есть суммарное число систем в \mathcal{E}_ρ . Обозначая $S_\alpha^{(1)}, S_\alpha^{(2)}, \dots, S_\alpha^{(N_\alpha)}$ отдельные системы \mathcal{E}_α , мы можем символично записать результат процесса смещивания как

$$\mathcal{E}_\rho = \left\{ S_1^{(1)}, \dots, S_1^{(N_1)}, \dots, S_\alpha^{(1)}, \dots, S_\alpha^{(N_\alpha)}, \dots, S_M^{(1)}, \dots, S_M^{(N_M)} \right\}. \quad (5.2)$$

Эта запись служит для акцентирования того, что ансамбль \mathcal{E}_ρ есть просто набор N квантовых систем.

Стоит отметить следующий важный пункт: говоря, что статистические свойства \mathcal{E}_ρ полностью описываются матрицей плотности

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^M w_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|, \quad (5.3)$$

предполагается, что N систем $S_\alpha^{(i)}$ делают ансамбль \mathcal{E}_ρ неразличимым в том смысле, что нет доступной информации по подлинному группированию в подмножествах \mathcal{E}_α . Экспериментатор, выполняющий измерения на \mathcal{E}_ρ , знает только, что, выбирая случайного представителя из ансамбля, он может утверждать, что эта отдельная система описывается с помощью вектора состояний ψ_α с вероятностью w_α . Экспериментатор только с этой информацией на руках никоим образом не может предсказать что-то иное, кроме вероятностей и значений математических ожиданий, определяемых при помощи матрицы плотности ρ . По этой причине \mathcal{E}_ρ называется смесью, что есть полностью разупорядоченный набор квантовых систем.

Как обсуждалось в параграфе 2.1.3.2, данная матрица плотности ρ может быть выражена неограниченным количеством способов в виде (5.3), как выпуклая линейная комбинация чистых состояний $|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$, которые не обязаны быть ортогональными. Таким образом, всегда существует неограниченное число ансамблей типа \mathcal{E}_ρ , каждый из которых приводит к одной и той же матрице плотности. Рассмотрим два таких ансамбля \mathcal{E}_ρ и \mathcal{E}'_ρ такие, что

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^M w_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| = \sum_{\beta=1}^{M'} w'_\beta |\psi'_\beta\rangle\langle\psi'_\beta|, \quad (5.4)$$

где w_α, ψ_α — веса и состояния ансамбля \mathcal{E}_ρ , а w'_β, ψ'_β — то же самое для \mathcal{E}'_ρ . Несмотря на то, что оба ансамбля могли бы быть приготовлены полностью различными способами, они описываются одной и той же матрицей плотности ρ . Физически значение этого выражения означает, что для наблюдателя не существует способа различить эти ансамбли посредством каких-либо экспериментальных устройств. Конечно, наблюдатель может разложить оба ансамбля в набор чистых субансамблей, посредством некоторой дискретной невырожденной наблюдаемой R (или, иначе, посредством полного набора коммутирующих переменных). Однако не только вероятности результатов измерений одинаковы для \mathcal{E}_ρ и \mathcal{E}'_ρ , но и наборы созданных таким образом субансамблей. В этом смысле ансамбль типа \mathcal{E}_ρ полностью описывается матрицей плотности ρ .

Как теперь будет продемонстрировано, возможно спроектировать полностью отличный тип ансамбля, статистические свойства которого не полностью описываются матрицей плотности. Мы обозначаем такие ансамбли символом \mathcal{E}_P . Чтобы построить их, мы снова начинаем с ансамблей \mathcal{E}_α , описываемых чистыми состояниями ψ_α . Можно предположить, что каждое из таких состояний приготовлено измерением некоторого полного набора коммутирующих наблюдаемых. Различные ψ_α , тем не менее, не обязаны быть ортогональными. Мы снова комбинируем \mathcal{E}_α с соответствующими весами w_α . Однако на этот раз мы хотели бы сохранить информацию о том, что отдельная квантовая система соответствует определенному ансамблю \mathcal{E}_α . Для этой цели мы рассмотрим N_α одинаково приготовленных копий $\mathcal{E}_\alpha^{(1)}, \mathcal{E}_\alpha^{(2)}, \dots, \mathcal{E}_\alpha^{(N_\alpha)}$ \mathcal{E}_α для каждого α . Новый ансамбль \mathcal{E}_P будет набором таких ансамблей, таким образом получаем ансамбль ансамблей

$$\mathcal{E}_P = \left\{ \mathcal{E}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_1^{(N_1)}, \dots, \mathcal{E}_\alpha^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_\alpha^{(N_\alpha)}, \dots, \mathcal{E}_M^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_M^{(N_M)} \right\}. \quad (5.5)$$

Отметим решающее отличие между (5.2) и (5.5): \mathcal{E}_ρ есть неупорядоченное множество N элементов, каждый из которых представляет индивидуаль-

ную квантовую систему, приготовленную в одном из состояний ψ_α . С другой стороны \mathcal{E}_P есть набор, чьи элементы снова определяются ансамблями $\mathcal{E}_\alpha^{(i)}$. Различие между обоими типами ансамблей проиллюстрировано на рис. 5.1.

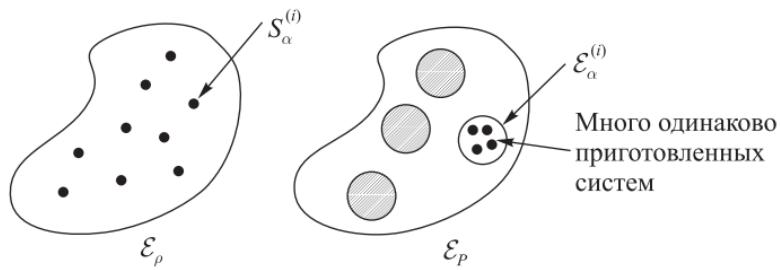


Рис. 5.1. Изображение ансамбля типа \mathcal{E}_ρ (слева) и ансамбля типа \mathcal{E}_P (справа).

Преимущество этой конструкции в том, что \mathcal{E}_P может рассматриваться как выборка, которая была взята из выборочного пространства

$$\Omega = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_\alpha, \dots, \mathcal{E}_M\}, \quad (5.6)$$

снабженного вероятностью измерения

$$\mu(\mathcal{E}_\alpha) = w_\alpha. \quad (5.7)$$

Таким образом, мы сконструировали хорошо определенное классическое вероятностное пространство. Выборочное пространство Ω есть набор ансамблей \mathcal{E}_α , алгебра \mathcal{A} событий задается подмножествами Ω , а вероятность измерения μ связывает вероятности w_α с элементами Ω .

Физическое значение выборочного пространства Ω или иначе, что то же самое, нового типа ансамблей \mathcal{E}_P следующее. Экспериментатор, которому предоставлен ансамбль типа \mathcal{E}_P , всегда соответствующим измерением может обнаружить, какая часть ансамбля \mathcal{E}_α реализована, то есть он может с желаемой точностью определить состояние ψ_α , описывающее \mathcal{E}_α . Кроме того, он может делать так, что ансамбль \mathcal{E}_α вносит лишь незначительное возмущение в измерение. Для достижения этого он просто измеряет состояние субансамбля \mathcal{E}_α , оставляя остальную часть \mathcal{E}_α полностью нетронутой. Таким образом, мы также видим, что элементы Ω могут рассматриваться как классические объекты, такие, что правила для комбинирования различных \mathcal{E}_α есть правила обычной классической логики.

Вероятностное измерение (5.7) связано с каждым \mathcal{E}_α вероятностью w_α . Так как \mathcal{E}_α представлен вектором состояний ψ_α , измерение (5.7)

порождает вероятностное распределение на пространстве векторов состояний. В итоге, вектор состояний становится случайной величиной в гильбертовом пространстве, задаваемой соотношением

$$\mathcal{E}_\alpha \mapsto \psi_\alpha. \quad (5.8)$$

Соответствующее вероятностное распределение задается как

$$P(\psi_\alpha) = w_\alpha. \quad (5.9)$$

Это уравнение дает вероятностное распределение, лежащее в основе гильбертова пространства \mathcal{H} или, что более точно, пространстве лучей в \mathcal{H} .

Имея определение случайного вектора (5.8), характеризуемого распределением (5.9), мы можем интерпретировать соответствующую матрицу плотности (5.3) как ковариационную матрицу случайных величин, то есть мы можем положить

$$\rho = E(|\psi\rangle\langle\psi|), \quad (5.10)$$

где E означает математическое ожидание, определяемое через вероятностное распределение (5.9). Более общее определение будет дано в следующем разделе.

При реализации концепции очень важно, что случайный вектор состояний никоим образом не является скрытой переменной теории. В противоположность, представленная выше конструкция полностью согласуется со статистической интерпретацией квантовой механики. Причина этого в том, что стохастический вектор состояний определяется как отображение на выборочном пространстве Ω , чьи элементы также являются ансамблями. В полном соответствии со статистической интерпретацией квантовой механики, отдельная реализация ψ_α случайного вектора состояний, таким образом, представляет чистый статистический ансамбль \mathcal{E}_α квантовой системы, все обычные квантовые корреляции и интерференционные эффекты включаются в эту отдельную реализацию ψ_α .

Очевидно, что \mathcal{E}_P -ансамбль содержит больше информации, чем соответствующий \mathcal{E}_ρ -ансамбль. Таким образом, для \mathcal{E}_P существуют наблюдаемые величины, которые ненаблюдаются для \mathcal{E}_ρ и которые не могут быть выражены на языке матрицы плотности. Для примера рассмотрим самосопряженный оператор R . На \mathcal{E}_P мы, конечно, можем измерить отклонение

$$\text{Var}(R) = \text{tr}\{R^2\rho\} - [\text{tr}\{R\rho\}]^2 = \sum_\alpha w_\alpha \langle\psi_\alpha|R^2|\psi_\alpha\rangle - \left[\sum_\alpha w_\alpha \langle\psi_\alpha|R|\psi_\alpha\rangle \right]^2 \quad (5.11)$$

R обычным способом. Возьмем достаточно большую выборку из \mathcal{E}_ρ и оценим по ней дисперсию R . Конечно, та же величина может быть измерена также на \mathcal{E}_P . Рассмотрим теперь следующее разложение $\text{Var}(R)$:

$$\text{Var}(R) = \text{Var}_1(R) + \text{Var}_2(R), \quad (5.12)$$

где

$$\text{Var}_1(R) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} [\langle \psi_{\alpha} | R^2 | \psi_{\alpha} \rangle - \langle \psi_{\alpha} | R | \psi_{\alpha} \rangle^2] \quad (5.13)$$

и

$$\text{Var}_2(R) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | R | \psi_{\alpha} \rangle^2 - \left[\sum_{\alpha} w_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | R | \psi_{\alpha} \rangle \right]^2. \quad (5.14)$$

Как $\text{Var}_1(R)$, так и $\text{Var}_2(R)$ представляют неотрицательные величины, а их сумма равна обычному квантовому отклонению (5.11), которое определяется матрицей плотности ρ . Отметим, однако, что $\text{Var}_1(R)$ и $\text{Var}_2(R)$ в общем не могут быть выражены как математические ожидания матриц плотности некоторого самосопряженного оператора, что означает, что эти величины ненаблюдаемы по отдельности для \mathcal{E}_ρ -ансамблей. Но они представляют собой измеримые величины для \mathcal{E}_P -ансамблей.

Для измерения $\text{Var}_1(R)$ и $\text{Var}_2(R)$ на \mathcal{E}_P может быть дана определенная рекомендация. Для этой цели мы возьмем выборку ансамблей $\mathcal{E}_{\alpha}^{(i)}$ из \mathcal{E}_P . Чтобы измерить $\text{Var}_1(R)$, мы, во-первых, определяем дисперсию R как $\langle \psi_{\alpha} | R^2 | \psi_{\alpha} \rangle - \langle \psi_{\alpha} | R | \psi_{\alpha} \rangle^2$ в каждом отдельном ансамбле $\mathcal{E}_{\alpha}^{(i)}$, выполняя достаточно большое количество измерений, создавая $\mathcal{E}_{\alpha}^{(i)}$. Полученные значения для дисперсии R будут, в общем, различны для различных $\mathcal{E}_{\alpha}^{(i)}$. Таким образом, дисперсия есть действительная случайная величина X , классическое статистическое среднее значение которой $\langle X \rangle$ равно $\text{Var}_1(R)$. Для того чтобы получить $\text{Var}_2(R)$, можно, конечно, просто вычесть $\text{Var}_1(R)$ из $\text{Var}(R)$. Но $\text{Var}_2(R)$ также может быть определено непосредственно. Определяется математическое ожидание $\langle \psi_{\alpha} | R | \psi_{\alpha} \rangle$ от R для каждого отдельного ансамбля $\mathcal{E}_{\alpha}^{(i)}$. В общем это математическое ожидание принимает различные значения для различных ансамблей $\mathcal{E}_{\alpha}^{(i)}$. Таким образом, величина $Y = \langle \psi_{\alpha} | R | \psi_{\alpha} \rangle$ представляет действительную случайную величину, чье классическое статистическое отклонение $\text{Var}(Y) = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$ равно $\text{Var}_2(R)$.

Из уравнения (5.13) мы заключаем, что $\text{Var}_1(R)$ исчезает тогда и только тогда, когда дисперсия R исчезает для всех ψ_{α} , которые появляются с ненулевой вероятностью, то есть тогда и только тогда, когда все эти ψ_{α}

являются собственными значениями R . Таким образом, если $\text{Var}_1(R)$ становится равным нулю, мы сразу же заключаем, что \mathcal{E}_P есть ансамбль, который состоит из чистых ансамблей в собственных состояниях R . Отклонение $\text{Var}_1(R)$ поэтому может рассматриваться как мера расстояния от ансамбля \mathcal{E}_P до ансамбля, созданного собственными состояниями R . С другой стороны, определение (5.14) показывает, что $\text{Var}_2(R)$ исчезает тогда и только тогда, когда случайная величина $\langle \psi_\alpha | R | \psi_\alpha \rangle$ четкая, то есть принимает определенное значение. В общем случае $\text{Var}_2(R)$ является дисперсией математического ожидания чистого квантового состояния и представляет меру статистических флуктуаций $\langle \psi_\alpha | R | \psi_\alpha \rangle$ по ансамблю.

Часть квантовой статистической дисперсии $\text{Var}(R)$ подобным же образом (5.12) рассмотрена Вайсманом в контексте непрерывно наблюдаемого лазера (Wiseman, 1993), в то время как дисперсия $\text{Var}_2(R)$ введена Мёлмером, Кастином и Далибардом (Mølmer, Castin, Dalibard, 1993) как мера статистических флуктуаций стохастической волновой функции. Примеры физического значения этих дисперсий для динамики квантовых стохастических процессов будут обсуждаться в разделах 6.7.2 и 8.2.

5.1.2. Эксперимент Штерна–Герлаха

Два \mathcal{E}_ρ -ансамбля, соответствующих одной и той же матрице плотности ρ , нельзя различить какой-либо экспериментальной процедурой. Однако два \mathcal{E}_P -ансамбля могут быть различены, даже если они приводят к одной и той же матрице плотности. Давайте проиллюстрируем это положение с помощью простого примера. Мы рассмотрим двух наблюдателей, называемых A и B , каждый из которых связан с установкой Штерна–Герлаха. Наблюдатель A использует свою установку для приготовления больших последовательностей атомных лучей, состоящих из атомов со спином $\frac{1}{2}$, в то время как B с помощью своей установки анализирует лучи.

Гильбертово пространство, соответствующее внутренней степени свободы атомов со спином $\frac{1}{2}$, есть $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Как мы знаем из раздела 3.4.2, любая матрица плотности ρ в этом пространстве может быть записана как универсальная линейная комбинация единичной матрицы I и спиновых матриц Паули σ_1 , σ_2 и σ_3

$$\rho(\vec{v}) = \frac{1}{2}(I + \vec{v} \cdot \vec{\sigma}), \quad (5.15)$$

где \vec{v} означает блоховский вектор, удовлетворяющий чистому состоянию $|\vec{v}| = 1$. Таким образом, чистое состояние однозначно представляется положением \vec{v} на поверхности сферы Блоха. Соответственно, вероят-

ностное распределение (5.9), описывающее ансамбль типа \mathcal{E}_P , может быть представлено посредством плотности вероятности $P(\vec{v})$, которая сконцентрирована на поверхности сферы Блоха, то есть которая исчезает вне этой поверхности и удовлетворяет условию нормировки

$$\int P(\vec{v}) d^3v = 1. \quad (5.16)$$

Таким образом, блоховский вектор \vec{v} становится случайным единичным вектором, соответствующим распределению $P(\vec{v})$. Отметим, что $P(\vec{v})$ на самом деле есть распределение пространственных лучей на \mathcal{H} . Конечно, можно охарактеризовать распределение более четко как плотность $P = P(\theta, \varphi)$, введя сферические координаты (θ, φ) на поверхности сферы Блоха (Wiseman, Milburn, 1993a, 1993b). Однако мы предпочитаем работать здесь с упомянутым выше более общим представлением.

Давайте проиллюстрируем, как наблюдатель A может генерировать \mathcal{E}_P -ансамбль. Мы полагаем, что A выбирает фиксированный единичный вектор \vec{n} , $|\vec{n}| = 1$. Используя установку Штерна–Герлаха, он может подготовить к измерению $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ большую последовательность атомных лучей. Каждый отдельный луч, состоящий из большого числа атомов, представляет ансамбль в определенном чистом состоянии, которое является собственным состоянием $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ с собственным значением $+1$ или -1 и которое поэтому задается прямо противоположными положениями $\pm \vec{n}$ на сфере Блоха. Кроме того, A гарантирует, что в последовательности лучей он создает оба собственных состояния, попадающиеся с равным весом $\frac{1}{2}$. Результатирующий ансамбль типа \mathcal{E}_P описывается поэтому следующей плотностью вероятности на поверхности сферы Блоха:

$$P(\vec{v}) = \frac{1}{2}\delta(\vec{v} - \vec{n}) + \frac{1}{2}\delta(\vec{v} + \vec{n}). \quad (5.17)$$

Этот ансамбль теперь передается наблюдателю B , который выполняет над ним измерения.

Заметим прежде всего, что \mathcal{E}_P -ансамбль, задаваемый выражением (5.17), приводит к следующей матрице плотности:

$$\rho = \int \rho(\vec{v}) P(\vec{v}) d^3v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

что легко проверяется с помощью (5.15). Эта матрица плотности соответствует неполяризованному атомному лучу и независима от \vec{n} . Таким об-

разом, различные выборы для \vec{n} , очевидно, приводят к различным \mathcal{E}_P -ансамблям, но в то же время к одной и той же матрице плотности ρ . Поэтому возникает вопрос: может ли B с помощью своей собственной установки Штерна–Герлаха определить направление, выбранное A , то есть может ли он определить направление единичного вектора \vec{n} , который, очевидно, не содержится в матрице плотности ρ ? Ответ на вопрос, конечно, положительный.

Выбирая определенный луч из ансамбля, B не знает, какое состояние он должен описывать. Но знает, что каждый луч есть некоторое определенное чистое состояние, а так как каждый определенный луч состоит из множества атомов, он может измерить их статистику. Для определения направления \vec{n} наблюдатель B может действовать так, как описано ниже. Сперва он берет выборку $\{\mathcal{E}_\alpha^{(i)}\}$ атомных лучей, причем каждый элемент $\mathcal{E}_\alpha^{(i)}$ есть атомный луч, описываемый чистым состоянием вида (5.15). Для определения блоховского вектора \vec{v} наблюдатель B поворачивает свой магнит Штерна–Герлаха до тех пор, пока не исчезнет расщепление атомного луча на две части. Направление, определяемое этим условием, есть направление вектора Блоха \vec{v} . Наблюдатель B тогда узнает, что луч в чистом состоянии, задаваемом собственным состоянием $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$, и может выбрать ориентацию \vec{v} таким образом, что собственное значение будет +1. Таким образом, луч определяется состоянием (5.15) с вектором Блоха \vec{v} . Повторяя эту процедуру для своей выборки $\{\mathcal{E}_\alpha^{(i)}\}$ луча, B найдет, что только два вектора Блоха $\vec{v} = \pm \vec{n}$ встречаются в выборке с равными вероятностями $\frac{1}{2}$. Эта информация доступна B для реконструкции вероятностного распределения (5.17), созданного A , а также для выявления направления единичного вектора \vec{n} .

Из этих рассмотрений должно быть ясно, что B подобным образом также может реконструировать с заданной степенью точности любое распределение $P(\vec{v})$. Например, A может создать \mathcal{E}_P -ансамбль, заданный распределением

$$P(\vec{v}) = \frac{1}{4\pi} \delta(|\vec{v}| - 1). \quad (5.19)$$

Чтобы сгенерировать распределение, A готовит атомные лучи в чистом состоянии $\rho(\vec{v})$, где вектор Блоха \vec{v} равномерно распределен на сфере Блоха. Приготовление этого \mathcal{E}_P -ансамбля требует, чтобы A выполнял измерения всех переменных $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$. Отметим, что для различных \vec{v} эти наблюдаемые не коммутируют, в общем случае, и что они измеряются на различных атомных лучах. Также отметим, что условие нормировки (5.16) удовлетворяется и что (5.19) снова в результате дает матрицу плотности (5.18).

неполяризованного луча. Следуя процедуре, описанной выше, с точностью до обычных статистических неопределенностей, вызванных ограничением объема выборки, B найдет, что вектор Блоха равномерно распределен по всему пространству сферы Блоха, и сделает вывод, что распределение задается (5.19).

Тот факт, что \mathcal{E}_P -ансамбль содержит больше информации, чем \mathcal{E}_ρ -ансамбль, можно также увидеть через определение дисперсий $\text{Var}_1(R)$ или $\text{Var}_2(R)$. Выбирая фиксированный единичный вектор \vec{m} , наблюдатель B может взять R равным $R = \vec{m} \cdot \vec{\sigma}$, например. Выражение для $\text{Var}_1(R)$ становится равным

$$\begin{aligned}\text{Var}_1(\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) &= \int P(\vec{v}) \left(\text{tr} \{ (\vec{m} \cdot \vec{\sigma})^2 \rho(\vec{v}) \} - [\text{tr} \{ (\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) \rho(\vec{v}) \}]^2 \right) d^3 v = \\ &= \int P(\vec{v}) (1 - (\vec{m} \cdot \vec{v})^2) d^3 v,\end{aligned}\quad (5.20)$$

которое верно для всех распределений $P(\vec{v})$. Для распределения (5.17) это выражение редуцируется к

$$\text{Var}_1(\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) = \sin^2 \chi, \quad (5.21)$$

где $\chi \in [0, \pi]$ означает угол между направлениями \vec{m} и \vec{n} . Соответственно, мы находим

$$\text{Var}_2(\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) = \cos^2 \chi, \quad (5.22)$$

такое, что разложение (5.12) дисперсии $\text{Var}(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})$ принимает вид

$$\text{Var}(\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) = \sin^2 \chi + \cos^2 \chi = 1. \quad (5.23)$$

Мы видим, что дисперсии $\text{Var}_{1,2}(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})$, которые измеримы на \mathcal{E}_P -ансамблях, зависят от угла между направлениями, выбранными A и B . С другой стороны, так как ρ описывает неполяризованный пучок, все значения которого измеримы на соответствующем \mathcal{E}_ρ -ансамбле, например дисперсия $\text{Var}(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})$, независимы от χ .

Согласно уравнению (5.21) дисперсия $\text{Var}_1(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})$ исчезает, если \vec{m} параллельно или антипараллельно \vec{n} . В этом случае B делает вывод, что \mathcal{E}_P есть ансамбль, который состоит из ансамблей в собственных состояниях $\vec{m} \cdot \vec{\sigma}$. Этот пример является общим свойством $\text{Var}_1(R)$, обсуждаемым в конце предыдущего подраздела, а именно: $\text{Var}_1(R) = 0$ тогда и только тогда, когда \mathcal{E}_P -ансамбль состоит из собственных состояний R .

5.2. Плотность вероятности для функционалов в гильбертовом пространстве

Пример, обсуждаемый в предыдущем разделе, ясно демонстрирует физическое значение ансамблей типа \mathcal{E}_P . Они являются результатом селективной подготовки измерений набора (необязательно коммутирующих) наблюдаемых и порождают определенное вероятностное распределение на проективном гильбертовом пространстве. В этом разделе мы разовьем соответствующий математический каркас, который даст возможность описывать такое распределение. Строгое математическое рассмотрение вероятностных измерений и функционального интегрирования в гильбертовом пространстве может быть найдено у Скорохода (Skorohod, 1974) и Гихмана и Скорохода (Gihman, Skorohod, 1980). Роль вероятностных распределений в гильбертовом пространстве в формулировке квантовой механики была рассмотрена Бахом (Bach, 1979, 1980, 1981) (см. также Bach, Wenning, 1982; Cyranski, 1982). Однако отметим, что развитая выше физическая интерпретация полностью отличается от предложенной Бахом.

5.2.1. Вероятностные измерения на гильбертовом пространстве

Следуя конструкции вероятностного пространства, заданной в разделе 1.1, мы рассмотрим систему \mathcal{A} подмножеств гильбертова пространства \mathcal{H} , играющего роль выборочного пространства¹. Система \mathcal{A} служит для формирования σ -алгебры. Таким образом, каждый элемент $A \in \mathcal{A}$ есть подмножество \mathcal{H} , а система \mathcal{A} подмножеств удовлетворяет условиям σ -алгебры, сформулированным в разделе 1.1.1. Согласно разделу 1.1.2, функциональное множество $\mu = \mu(A)$, определенное для всех $A \in \mathcal{A}$, называется вероятностью измерения, если удовлетворяет аксиомам Колмогорова (1.2), (1.3) и (1.5).

Для примера мы рассмотрим простейшие измерения, а именно: меру Дирака $\mu = \delta_{\psi_0}$. Задавая произвольное фиксированное состояние, вектор ψ_0 , соответствующая мера Дирака δ_{ψ_0} , определяется как

$$\delta_{\psi_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_0 \in A, \\ 0, & \text{если } \psi_0 \notin A, \end{cases} \quad (5.24)$$

для всех $A \in \mathcal{A}$. Легко проверить, это определение в результате приводит к вероятности измерения, удовлетворяющей аксиомам Колмогорова.

¹Выражаясь более точно, выборочное пространство есть проекционное гильбертово пространство, см. раздел 5.2.2.

В физических приложениях она обычно применяется для работы с плотностями. Таким образом, мы вводим функционал плотности вероятности $P = P[\psi]$ вектора состояния ψ и пишем

$$\mu(A) = \int_A P[\psi] D\psi D\psi^* \quad (5.25)$$

для вероятности A . Соответственно, функционал плотности вероятности для меры Дирака δ_{ψ_0} будет обозначаться $P[\psi] = \delta[\psi - \psi_0]$, так что мы имеем соотношение

$$\delta_{\psi_0}(A) = \int_A \delta[\psi - \psi_0] D\psi D\psi^*. \quad (5.26)$$

Интегрирование в этой формуле проводится по всему подмножеству A гильбертова пространства. Таким образом, здесь представлен многомерный или даже бесконечномерный интеграл, то есть функциональный интеграл. Следующей нашей задачей будет задание явной конструкции для соответствующего функционального элемента объема $D\psi D\psi^*$ в гильбертовом пространстве.

Мы возьмем фиксированный ортонормированный базис $\{\phi_n\}$ в \mathcal{H} и напишем разложение $\psi \in \mathcal{H}$ с соответствующими базисными векторами, как показано ниже:

$$\psi = \sum_n z_n \phi_n. \quad (5.27)$$

Функционал плотности распределения $P = P[\psi]$ может рассматриваться как функция $P = P[z_n, z_n^*]$ комплекснозначных переменных z_n, z_n^* . С другой стороны, в качестве P мы можем рассматривать функцию $P = P[a_n, b_n]$ действительных переменных a_n, b_n , определенных как

$$z_n = a_n + i b_n. \quad (5.28)$$

Соответствующее выражение для элемента объема в гильбертовом пространстве есть обычный евклидов элемент объема в действительном пространстве с координатами a_n, b_n , то есть мы полагаем, что

$$D\psi D\psi^* = \prod_n da_n db_n. \quad (5.29)$$

Дифференциалы da_n и db_n записываются как

$$da_n = \frac{1}{2}(dz_n + dz_n^*), \quad (5.30)$$

$$db_n = \frac{1}{2i}(dz_n - dz_n^*), \quad (5.31)$$

мы можем записать элемент объема (5.29) на языке координат z_n и z_n^* :

$$D\psi D\psi^* = \prod_n \frac{i}{2} dz_n dz_n^*. \quad (5.32)$$

Суммируя, мы находим следующие явные формулы для функционального интегрирования в гильбертовом пространстве:

$$\int_A P[\psi] D\psi D\psi^* = \int_A \prod_n P[a_n, b_n] da_n db_n = \int_A \prod_n \frac{i}{2} P[z_n, z_n^*] dz_n dz_n^*. \quad (5.33)$$

Переменные z_n и z_n^* должны приниматься за независимые переменные интегрирования, соответствующие двум независимым действительным переменным a_n и b_n .

Согласно определению (5.29) плотность меры Дирака δ_{ψ_0} , которая соответствует состоянию

$$\psi_0 = \sum_n z_n^0 \phi_n, \quad z_n^0 = a_n^0 + i b_n^0, \quad (5.34)$$

определяется как

$$\delta[\psi - \psi_0] = \prod_n \delta(a_n - a_n^0) \delta(b_n - b_n^0). \quad (5.35)$$

Таким образом, функционал Дирака задается произведением обыкновенных δ -функций.

В координатном представлении, например, можно действовать как показано ниже. Мы рассмотрим ограниченный объем V и разобьем его на ячейки равных объемов ΔV с центрами в x_l , $l = 1, 2, \dots, M$. Непрерывная волновая функция $\psi(x)$, таким образом, аппроксимируется вектором ограниченной размерности

$$|\psi\rangle = \sum_l \psi_l |x_l\rangle, \quad \psi_l = \psi(x_l). \quad (5.36)$$

В этом случае элемент объема принимает вид

$$D\psi D\psi^* = \prod_l \frac{i}{2} d\psi_l d\psi_l^*. \quad (5.37)$$

В континуальном пределе это запишется как

$$D\psi D\psi^* = \prod_x \frac{i}{2} d\psi(x) d\psi^*(x), \quad (5.38)$$

где произведение расширяется на все пространственные координаты.

Дальше мы часто применяем важное свойство функционального элемента объема в гильбертовом пространстве, сконструированном выше, а именно его инвариантность в соответствии с линейными унитарными преобразованиями

$$\psi' = U\psi \quad (5.39)$$

в гильбертовом пространстве. Эта инвариантность может быть выражена формулой

$$D\psi' D\psi'^* = D\psi D\psi^*. \quad (5.40)$$

Для доказательства этой формулы мы рассмотрим U как унитарную матрицу в базисе, введенном в (5.27), и разложим на действительную и мнимую части

$$U = \Re(U) + i\Im(U). \quad (5.41)$$

Унитарность U приводит к соотношениям

$$\Re(U)\Re(U)^T + \Im(U)\Im(U)^T = I, \quad (5.42)$$

$$\Im(U)\Re(U)^T - \Re(U)\Im(U)^T = 0, \quad (5.43)$$

где T означает транспонирование матрицы. В выбранном представлении матрица U описывает унитарное преобразование $z_n \mapsto z'_n$ от коэффициентов z_n в базисе разложения ψ к коэффициентам z'_n в базисе разложения $\psi' = U\psi$. Соответствующее преобразование действительных коэффициентов a_n, b_n , определяемых $z_n = a_n + ib_n$, дается действительной матрицей

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \Re(U) & -\Im(U) \\ \Im(U) & \Re(U) \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Теперь с помощью уравнений (5.42) и (5.43) легко проверить, что \tilde{U} — ортогональная матрица, удовлетворяющая $|\det \tilde{U}| = 1$. Таким образом, как

и ожидалось, унитарное преобразование U гильбертова пространства \mathcal{H} вводит ортогональное преобразование \tilde{U} действительных переменных a_n, b_n , которые были введены для определения элемента объема в гильбертовом пространстве. Теперь мы можем применить формулу преобразования для многомерных интегралов, чтобы заключить, что

$$\prod_n da'_n db'_n = |\det \tilde{U}| \prod_n da_n db_n = \prod_n da_n db_n, \quad (5.45)$$

полученный результат доказывает унитарную инвариантность (5.40) элемента объема.

Важное следствие из этого результата состоит в том, что наше определение (5.29) для элемента объема $D\psi D\psi^*$ не зависит от выбора базиса $\{\phi_n\}$. Более того, из формулы преобразования (5.40) мы сразу же делаем вывод, что функционал плотности Дирака $\delta[\psi]$ является инвариантом относительно унитарных преобразований

$$\delta[U\psi] = \delta[\psi], \quad (5.46)$$

и тогда

$$\delta[\psi - U\psi_0] = \delta[U^{-1}\psi - \psi_0]. \quad (5.47)$$

Эти соотношения полезны для расчетов с функционалами плотности вероятности.

5.2.2. Распределения на проективном гильбертовом пространстве

Мы уже встречались с простейшими примерами вероятностных мер в гильбертовом пространстве, а именно: с мерой Дирака δ_{ψ_0} . Соответствующие функционалы плотности $\delta[\psi - \psi_0]$ удовлетворяют условию

$$\int \delta[\psi - \psi_0] D\psi D\psi^* = 1. \quad (5.48)$$

Общее условие нормировки для плотности вероятности функционала $P[\psi]$ понимается как

$$\int P[\psi] D\psi D\psi^* = 1, \quad (5.49)$$

где интегрирование проводится по всему гильбертовому пространству.

Согласно основным принципам квантовой механики физическое состояние чистого ансамбля однозначно описывается лучом в проективном

гильбертовом пространстве (см. параграф 2.1.3.2). Другими словами, если чистые состояния характеризуются нормированными волновыми функциями, которые отличаются фазовым множителем, то они эквивалентны. Так как мы хотим охарактеризовать квантовые статистические ансамбли типа \mathcal{E}_P с помощью функционала плотности вероятности $P[\psi]$, мы постулируем, что вероятность распределения концентрируется на поверхности единичной сферы в гильбертовом пространстве. То есть мы требуем существование функционала $Q[\psi]$ такого как

$$P[\psi] = \delta(\|\psi\| - 1)Q[\psi]. \quad (5.50)$$

Это означает, что только нормированные волновые функции попадают с ненулевой вероятностью. Эквивалентность волновых функций, которые отличаются фазовым множителем, приводит к требованию, что функционал плотности не зависит от фазы волновой функции, то есть для всех $\chi \in [0, 2\pi]$ мы должны иметь

$$P[\exp(i\chi)\psi] = P[\psi]. \quad (5.51)$$

В силу условий (5.50) и (5.51) функционал $P[\psi]$ может рассматриваться как плотность вероятности на проективном гильбертовом пространстве (Breuer and Petruccione, 1995). На самом деле представление проективного гильбертова пространства получается взятием поверхности единичной сферы в \mathcal{H} , определяемой как $\|\psi\| = 1$, с идентификацией точек на ней, которые отличаются на фазовый множитель. Так как $P[\psi]$ постоянна вдоль лучей в \mathcal{H} , она может быть рассмотрена как функционал на проективном гильбертовом пространстве. Подводя итог, \mathcal{E}_P -ансамбль характеризуется функционалом плотности вероятности $P = P[\psi]$, удовлетворяющим условию нормировки (5.49) и требованиям (5.50) и (5.51) функционала на проективном гильбертовом пространстве.

Простейший пример для функционала плотности на проективном гильбертовом пространстве дается выражением

$$P[\psi] = \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{2\pi} \delta[\psi - e^{i\chi}\psi_0], \quad (5.52)$$

где ψ_0 есть нормированное состояние. Легко видеть, что этот функционал удовлетворяет условию нормировки (5.49), а также постулатам (5.50) и (5.51). В самом деле, так как ψ_0 предполагается нормированной, функционал (5.52) концентрируется на единичной сфере в \mathcal{H} . Более того, $P[\psi]$ является инвариантом относительно преобразований фазы ψ в силу χ -интегрирования в уравнении (5.52).

Другая простая ситуация возникает, если экспериментальное приготовление приводит к ансамблю, который состоит из дискретного набора ансамблей \mathcal{E}_α , помеченных индексом α , каждый \mathcal{E}_α описывается нормированным вектором состояний ψ_α . Эта ситуация была исследована в начале этой главы, а также встречалась в примере с экспериментом Штерна–Герлаха. Снова через w_α мы обозначаем статистический вес ансамбля \mathcal{E}_α такой, что $w_\alpha \geq 0$ и $\sum_\alpha w_\alpha = 1$. Плотность вероятности $P[\psi]$, которая описывает соответствующий ансамбль типа \mathcal{E}_P , состоит из суммы дираковских плотностей, концентрирующихся вокруг различных ψ_α . Каждая дираковская плотность имеет вес с соответствующим множителем w_α . Таким образом, в этом случае мы имеем

$$P[\psi] = \sum_\alpha w_\alpha \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{2\pi} \delta[\psi - e^{i\chi} \psi_\alpha]. \quad (5.53)$$

Снова непосредственно можно проверить, что наши основные требования (5.49), (5.50) и (5.51) выполняются для функционала плотности вероятности.

Все плотности $P[\psi]$, появлявшиеся до сих пор, представимы суммами дираковских измерений. Конечно, также легко можно конструировать непрерывные плотности. В качестве примера в разделе 5.1.2 уже задана такая плотность. Плотность $P(\vec{v})$, заданная в уравнении (5.19), является константой на поверхности сферы Блоха $|\vec{v}| = 1$, которая представляет гильбертово пространство частиц со спином $\frac{1}{2}$. Для обобщения этой идеи рассмотрим произвольное s -мерное линейное подпространство V в \mathcal{H} , которое охвачено ортонормированным множеством ψ_i , $i = 1, 2, \dots, s$,

$$V = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s\}. \quad (5.54)$$

Предположим, что процесс приготовления дает в результате смесь всех нормированных состояний в V с равными весами (von Neumann, 1955). Корректная плотность вероятности, описывающая соответствующий \mathcal{E}_P -ансамбль, принимает вид

$$P[\psi] = \frac{1}{|K|} \int_K \delta[\psi - \phi(\lambda)] d\omega(\lambda). \quad (5.55)$$

Здесь мы ввели поверхность K единичной сферы в V . Эта поверхность представляет многообразие действительной размерности $(2s - 1)$, заданное

как

$$K \equiv \left\{ \phi(\lambda) \in \mathcal{H} \mid \phi(\lambda) = \sum_{i=1}^s \lambda_i \psi_i, \lambda_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^s |\lambda_i|^2 = 1 \right\}. \quad (5.56)$$

Кроме того, $d\omega(\lambda)$ обозначает обычный евклидов поверхностный элемент K и

$$|K| = \int_K d\omega(\lambda) \quad (5.57)$$

есть полный объем K . Тогда мы видим, что уравнение (5.55) дает однозначную плотность вероятности, сконцентрированную на единичной сфере $K \subset V$. Отметим, что интегрирование по сфере K в уравнении (5.55) гарантирует, что функционал плотности вероятности $P[\psi]$ не зависит от специального выбора базисных функций ψ_i . Уравнение (5.55) показывает, что для случая $s = 1$ то же самое. В этом случае K изоморфно единичной окружности и $d\omega(\lambda)$ -интегрирование сводится к интегрированию по фазе χ в уравнении (5.52).

В более общем случае мы можем рассмотреть ансамбль \mathcal{E}_P , который дает результат из комбинации ансамблей вышеупомянутых типов с весами $w_\alpha \geq 0$, удовлетворяющими $\sum_\alpha w_\alpha = 1$. Используя очевидное обобщение написанного выше, приходим к функционалу плотности

$$P[\psi] = \sum_\alpha w_\alpha \frac{1}{|K_\alpha|} \int_{K_\alpha} \delta[\psi - \phi_\alpha(\lambda)] d\omega_\alpha(\lambda). \quad (5.58)$$

Ясно, что этот функционал плотности (5.58) удовлетворяет основным свойствам (5.49), (5.50) и (5.51).

5.2.3. Математические ожидания

С помощью функционала плотности вероятности $P[\psi]$, соответствующего \mathcal{E}_P -ансамблю, мы можем теперь определить математическое ожидание функционала $F[\psi]$ случайного вектора состояний ψ через соотношение

$$E(F[\psi]) \equiv \int P[\psi] F[\psi] D\psi D\psi^*. \quad (5.59)$$

Вводя самосопряженный оператор R , мы можем рассмотреть функционал $F[\psi] = \langle \psi | R | \psi \rangle$ и его математическое ожидание

$$E(\langle \psi | R | \psi \rangle) = \int P[\psi] \langle \psi | R | \psi \rangle D\psi D\psi^*. \quad (5.60)$$

Величина

$$\langle R \rangle = E(\langle \psi | R | \psi \rangle) = \text{tr}\{R\rho\} \quad (5.61)$$

есть математическое ожидание R в \mathcal{E}_ρ -ансамбле, соответствующем \mathcal{E}_P -ансамблю, описанному $P[\psi]$. Это математическое ожидание для измерения R на \mathcal{E}_ρ , полученное усреднением $\langle \psi | R | \psi \rangle$ по всему функционалу плотности вероятности $P[\psi]$. Тогда очевидно, что матрица плотности ρ , описываемая \mathcal{E}_ρ , равна ковариационной матрице

$$\rho = E(|\psi\rangle\langle\psi|) \equiv \int P[\psi]|\psi\rangle\langle\psi|D\psi D\psi^* \quad (5.62)$$

случайного вектора состояний ψ , определенного на языке функционала плотности $P[\psi]$ (ср. с (5.10)). Полученный результат снова показывает, что статистика \mathcal{E}_ρ -ансамбля полностью определяется функционалом плотности вероятности $P[\psi]$. Обратное в общем случае, конечно, неверно, так как функционал плотности вероятности не фиксирован однозначно заданием только его ковариационной матрицы.

Вычислим выражение (5.62) для функционала плотности, заданного в уравнении (5.53). Подставляя выражение для $P[\psi]$, мы получаем

$$\rho = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \int D\psi D\psi^* \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{2\pi} \delta[\psi - e^{i\chi}\psi_{\alpha}] |\psi\rangle\langle\psi| \quad (5.63)$$

и, выполняя функциональное интегрирование с помощью свойств плотности Дирака, приходим к матрице

$$\rho = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \int_0^{2\pi} |\psi_{\alpha}\rangle\langle\psi_{\alpha}| \frac{d\chi}{2\pi} = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle\langle\psi_{\alpha}|, \quad (5.64)$$

которая определяется как матрица плотности соответствующего \mathcal{E}_ρ -ансамбля. В качестве другого примера мы подставим функционал плотности (5.55) в (5.62), что даст в результате

$$\begin{aligned} \rho &= \int \frac{1}{|K|} D\psi D\psi^* \int_K \delta[\psi - \phi(\lambda)] |\psi\rangle\langle\psi| d\omega(\lambda) = \frac{1}{|K|} \int_K |\phi(\lambda)\rangle\langle\phi(\lambda)| d\omega(\lambda) = \\ &= \frac{1}{|K|} \int_K \sum_{i,k=1}^s \lambda_i \lambda_k^* |\psi_i\rangle\langle\psi_j| d\omega(\lambda), \end{aligned} \quad (5.65)$$

где мы снова выполняем функциональное интегрирование по всему гильбертову пространству и используем представление (5.56) для поверхности K единичной сферы. Выполняя в заключение $d\omega(\lambda)$ -интегрирование, находим

$$\rho = \frac{1}{|K|} \int_K \sum_i^s |\lambda_i|^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i| d\omega(\lambda) = \frac{1}{s} \sum_i^s |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \frac{1}{s} I_V. \quad (5.66)$$

Как и ожидалось, соответствующий \mathcal{E}_ρ -ансамбль описывается матрицей плотности ρ , которая пропорциональна единице I_V в подпространстве V , охватываемом ψ_i .

Все измеряемые величины на \mathcal{E}_ρ -ансамбле выражаются на языке матрицы ковариаций $\rho P[\psi]$, которая включает моменты ψ второго порядка. Моменты более высокого порядка случайного вектора состояний ψ представляют величины, которые измеряются только на \mathcal{E}_P . Примерами являются дисперсии $\text{Var}_1(R)$ и $\text{Var}_2(R)$, введенные уже в уравнениях (5.13) и (5.14). С помощью функционала плотности вероятности $P[\psi]$ эти уравнения могут быть записаны как (Breuer, Petruccione, 1996)

$$\text{Var}_1(R) = \int P[\psi] (\langle\psi|R^2|\psi\rangle - \langle\psi|R|\psi\rangle^2) D\psi D\psi^* \quad (5.67)$$

и

$$\text{Var}_2(R) = \int P[\psi] \langle\psi|R|\psi\rangle^2 D\psi D\psi^* - \left[\int P[\psi] \langle\psi|R|\psi\rangle D\psi D\psi^* \right]^2. \quad (5.68)$$

Данные выражения включают моменты четвертого порядка вектора состояний. $\text{Var}_1(R)$ представляет дисперсию R , усредненную по чистым состояниям, содержащимся в ансамбле, и, таким образом, является мерой средних внутренних квантовых флуктуаций. С другой стороны, $\text{Var}_2(R)$ есть дисперсия действительной случайной величины $\langle\psi|R|\psi\rangle$. Таким образом, это мера классических статистических флуктуаций рассматриваемой величины.

5.3. Смешанные ансамбли

Выше мы рассмотрели \mathcal{E}_P как ансамбль различных ансамблей \mathcal{E}_α , которые описываются чистыми квантовыми состояниями ψ_α . Эта идея привела нас к введению функционалов плотности вероятности $P[\psi]$ на проективном

гильбертовом пространстве. Можно рассмотреть даже более общий тип ансамблей, если принять во внимание тот факт, что в результате процесса приготовления, например, различные \mathcal{E}_α могут быть в статистической смеси, описываемой матрицей плотности ρ_α . Эта идея тогда вынуждает нас рассмотреть функционалы плотности вероятности на пространстве $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ матриц плотности.

5.3.1. Функционалы плотности вероятности на пространстве состояний

Мы обозначим функционалы плотности вероятности на пространстве состояний матриц плотности как $P = P[\sigma]$, где $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ есть матрица плотности. Они характеризуют статистические свойства случайной матрицы плотности σ . Для построения соответствующего элемента объема мы продолжим в близкой аналогии со случаем распределения $P[\psi]$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

Беря ортонормированный базис $\{\phi_n\}$ в \mathcal{H} , мы запишем матричное представление оператора σ как

$$\sigma = \sum_{nm} |\phi_n\rangle \sigma_{nm} \langle \phi_m|. \quad (5.69)$$

Теперь мы раскладываем матричные элементы σ_{nm} на действительные и мнимые части

$$\sigma_{nm} = u_{nm} + iv_{nm}. \quad (5.70)$$

Соответствующий объемный элемент теперь может быть определен как

$$D\sigma \equiv \prod_{n,m} du_{nm} dv_{nm}. \quad (5.71)$$

Функционал $F = F[\sigma]$ может рассматриваться как многомерная функция $F[\sigma] = F[u_{nm}, v_{nm}]$ переменных u_{nm} и v_{nm} , и мы определяем функциональное интегрирование посредством

$$\int F[\sigma] D\sigma = \int \prod_{n,m} F[u_{nm}, v_{nm}] du_{nm} dv_{nm}. \quad (5.72)$$

Соответствующая мера Дирака задается как

$$\delta[\sigma] = \prod_{n,m} \delta(u_{nm}) \delta(v_{nm}). \quad (5.73)$$

Функционал плотности вероятности на пространстве матриц плотности является неотрицательным функционалом $P = P[\sigma]$, который исчезает, если нарушается любое из нижеследующих условий:

$$u_{mn} = u_{nm}, \quad v_{mn} = -v_{nm}, \quad (5.74)$$

$$\operatorname{tr} \sigma = \sum_n u_{nn} = 1, \quad (5.75)$$

$$\sigma \geqslant 0. \quad (5.76)$$

Первое условие гарантирует, что только эрмитовы матрицы возникают с ненулевыми вероятностями, и подразумевает, что $v_{nn} = 0$. Второе условие есть условие нормировки для случайной матрицы плотности σ , в то время как третье условие требует, чтобы $P[\sigma]$ была тождественно равной нулю за пределами выпуклой области, определяющей положительность матрицы плотности σ . В результате условие нормировки для функционала плотности вероятности принимает вид

$$\int P[\sigma] D\sigma = 1. \quad (5.77)$$

Как и для элемента объема $D\psi D\psi^*$, можно легко показать, что элемент объема $D\sigma$ есть инвариант относительно унитарных преобразований

$$\sigma' = U\sigma U^\dagger, \quad (5.78)$$

где U есть унитарный оператор в \mathcal{H} , то есть мы имеем

$$D\sigma' = D\sigma. \quad (5.79)$$

В частности, этот инвариант подразумевает, что наше определение (5.71) $D\sigma$ не зависит от выбора базиса $\{\phi_n\}$.

Математическое ожидание некоторого самосопряженного оператора R , который получается при измерении соответствующего ансамбля типа \mathcal{E}_ρ , задается первым моментом $P[\sigma]$,

$$\langle R \rangle = \int P[\sigma] \operatorname{tr}\{R\sigma\} D\sigma. \quad (5.80)$$

Соответственно, матрица плотности, описывающая \mathcal{E}_ρ , принимает вид

$$\rho = E(\sigma) \equiv \int P[\sigma] \sigma D\sigma. \quad (5.81)$$

Конечно, различные типы дисперсий, определяемые в предыдущем разделе, могут быть введены аналогичным путем для функционалов плотности $P[\sigma]$ на пространстве матриц плотности. Более точно, мы снова используем разложение (5.12) дисперсии $\text{Var}(R)$ на 2 дисперсии $\text{Var}_1(R)$ и $\text{Var}_2(R)$, где теперь

$$\text{Var}_1(R) = \int P[\sigma] \left(\text{tr} \{ R^2 \sigma \} - [\text{tr} \{ R \sigma \}]^2 \right) D\sigma \quad (5.82)$$

и

$$\text{Var}_2(R) = \int P[\sigma] [\text{tr} \{ R \sigma \}]^2 D\sigma - \left[\int P[\sigma] \text{tr} \{ R \sigma \} D\sigma \right]^2. \quad (5.83)$$

Физическая интерпретация и измерительная установка для этих величин аналогичны тем, что даны в разделе 5.1.1.

5.3.2. Описание селективных квантовых измерений

В качестве примера использования функционалов плотности вероятности $P[\sigma]$ мы рассмотрим селективное измерение, описываемое эффектами F_m и операциями Φ_m (см. раздел 2.4.2). Выполняя такое измерение на ансамбле \mathcal{E}_P , описываемом плотностью $P[\sigma]$, в результате получаем новый ансамбль \mathcal{E}'_P , который описывается плотностью $P'[\sigma']$, задаваемой

$$P'[\sigma'] = \sum_m \int P[\sigma] \text{tr} \{ F_m \sigma \} \delta \left[\frac{\Phi_m(\sigma)}{\text{tr} \{ \Phi_m(\sigma) \}} - \sigma' \right] D\sigma. \quad (5.84)$$

Очевидно, что новый функционал плотности нормирован посредством условия (2.148)

$$\int P[\sigma'] D\sigma' = \sum_m \int P[\sigma] \text{tr} \{ F_m \sigma \} D\sigma = \int P[\sigma] D\sigma = 1. \quad (5.85)$$

При использовании первого утверждения теоремы квантовой теории измерений (см. (2.157) и (2.158)) мы можем переписать (5.84) как

$$P'[\sigma'] = \sum_m \int P[\sigma] \text{tr} \left\{ \sum_k \Omega_{mk}^\dagger \Omega_{mk} \sigma \right\} \delta \left[\frac{\sum_k \Omega_{mk} \sigma \Omega_{mk}^\dagger}{\text{tr} \left\{ \sum_k \Omega_{mk}^\dagger \Omega_{mk} \sigma \right\}} - \sigma' \right] D\sigma. \quad (5.86)$$

В простейшем случае индекс k в последнем уравнении принимает только единственное значение. Эта ситуация возникает, например, если рассматривается непрямое измерение с квантовым зондом, который изначально находится в чистом состоянии. Последнее уравнение тогда упрощается до

$$P'[\sigma'] = \sum_m \int P[\sigma] \operatorname{tr} \left\{ \Omega_m^\dagger \Omega_m \sigma \right\} \delta \left[\frac{\Omega_m \sigma \Omega_m^\dagger}{\operatorname{tr} \{ \Omega_m^\dagger \Omega_m \sigma \}} - \sigma' \right] D\sigma. \quad (5.87)$$

Из уравнения (5.87) следует, что распределение $P[\psi]$ чистых состояний снова преобразуется в распределение $P'[\psi']$ чистых состояний. Если мы выполним измерение на ансамбле в состоянии ψ , новое состояние, обусловленное исходом m , задается как $\psi' = \Omega_m \psi / \|\Omega_m \psi\|$. Таким образом, мы получаем следующее соотношение между начальным и конечным функционалами плотности в гильбертовом пространстве:

$$P'[\psi'] = \sum_m \int \|\Omega_m \psi\|^2 \delta \left[\frac{\Omega_m \psi}{\|\Omega_m \psi\|} - \psi' \right] P[\psi] D\psi D\psi^*. \quad (5.88)$$

Приведенные выше соотношения описывают изменение функционала плотности вероятности, вызванное селективным измерением на ансамблях типа \mathcal{E}_P . Они составляют отправную точку для нашего вывода квантовых стохастических процессов, которые представлены в следующей главе.

Библиография

- Bach, A. (1979). Quantum mechanics and integration in Hilbert space. *Phys. Lett.*, **A73**, 287–288.
- Bach, A. (1980). A probabilistic formulation of quantum theory. *J. Math. Phys.*, **21**, 789–793.
- Bach, A. (1981). Aspects of a representation of quantum theory in terms of classical probability theory by means of integration in Hilbert space. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **14**, 125–132.
- Bach, A. and Wenning, T. (1982). A probabilistic formulation of quantum theory. II. *J. Math. Phys.*, **23**, 1078–1081.
- Breuer, H. P. and Petruccione, F. (1995). Stochastic dynamics of open quantum systems: Derivation of the differential Chapman–Kolmogorov equation. *Phys. Rev.*, **E51**, 4041–4054.

- Breuer, H. P. and Petruccione, F. (1996). Quantum measurement and the transformation from quantum to classical probabilities. *Phys. Rev.*, **A54**, 1146–1153.
- Cyranski, J. F. (1982). Quantum theory as a probability theory on Hilbert space. *J. Math. Phys.*, **23**, 1074–1077.
- Gihman, I. I. and Skorohod, A. V. (1980). *The Theory of Stochastic Processes I*. Springer-Verlag, Berlin. Имеется издание на русском языке: Гихман И. И., Скороход А. В. *Теория случайных процессов*: В 3 т. — М.: Наука, Т. 1, 1971; Т. 2, 1973; Т. 3, 1975.
- Mølmer, K., Castin, Y., and Dalibard, J. (1993). Monte-Carlo wave function method in quantum optics. *J. Opt. Soc. Am.*, **B10**, 524–538.
- von Neumann, J. (1955). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton. Имеется издание на русском языке: фон Нейман Дж. *Математические основы квантовой механики*. — М.: Наука, 1964.
- Skorohod, A. V. (1974). *Integration in Hilbert Space*. Springer-Verlag, New-York. Имеется издание на русском языке: Скороход А. В. *Интегрирование в гильбертовом пространстве*. — Киев: Наука, 1975.
- Wiseman, H. M. (1993). Stochastic quantum dynamics of a continuously monitored laser. *Phys. Rev.*, **A47**, 5180–5192.
- Wiseman, H. M. and Milburn, G. (1993a). Quantum theory of field-quadrature measurements. *Phys. Rev.*, **A47**, 642–662.
- Wiseman, H. M. and Milburn, G. (1993b). Interpretation of quantum jump and diffusion processes illustrated on the Bloch sphere. *Phys. Rev.*, **A47**, 1652–1666.

ГЛАВА 6

Стохастическая динамика в гильбертовом пространстве

Основное квантовое уравнение описывает динамику открытой квантовой системы посредством ее редуцированной матрицы плотности $\rho_S(t)$. На языке предыдущей главы такая динамика связана с эволюцией \mathcal{E}_ρ -ансамбля. С другой стороны, \mathcal{E}_P -ансамбли характеризуются функционалами матрицы плотности $P[\psi]$ в базовом гильбертовом пространстве. Проводя аналогию с теорией классических стохастических процессов, развитой в главе 1, поставим следующий вопрос. Могут ли развернутые во времени \mathcal{E}_P -ансамбли быть сформулированы на языке соответствующей динамики функционалов плотности $P[\psi, t]$, зависящих от времени. В этой главе будет показано, что такая формулировка действительно возможна. Это приводит к стохастическому процессу $\psi(t)$ в открытой квантовой системе гильбертова пространства, который порождает матрицу плотности через свою ковариантную матрицу, то есть через математическое ожидание $\rho_S(t) = E(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)$.

Данная идея лежит в основе *интерпретации* основного уравнения. Вместо представления динамики открытой квантовой системы основным квантовым уравнением для его матрицы плотности, оно формируется на языке стохастического процесса для волновой функции открытой системы. Структура генераторов Линдблада для квантового марковского процесса приводит к близкой связи между динамическими полугруппами и кусочно-детерминированными процессами в гильбертовом пространстве. Данная глава уделяет серьезное внимание этой связи и ее физической интерпретации и значению. Теория будет проиллюстрирована большим количеством приложений.

Стохастическое представление квантовых марковских процессов появлялось уже в фундаментальной статье Дэвиса (Davies, 1969) и было применено Сринивасом и Дэвисом (Srinivas, Davies, 1981) для вывода формулы для статистики фотонов. Теория первоначально формулировалась на языке стохастического процесса редуцированной матрицы плотности, Барчелли и Белавкин (Barchielli, Belavkin 1991), Далибард, Кастин и Мёльмер

(Dalibard, Castin, Mølmer, 1992) и Дум, Золлер и Ритч (Dum, Zoller, Ritsch, 1992) определили, что она также может быть сформулирована в качестве стохастического процесса вектора состояний в редуцированном гильбертовом пространстве, то есть сведена к эффективным численным алгоритмам моделирования. В то же время Кармихел (Carmichael, 1993) развил идею интерпретации основного уравнения на языке ансамбля квантовых траекторий, которые являются реализациями базовых стохастических процессов.

Физическая основа для эволюции стохастического вектора состояний предоставляет непрерывной теории измерений. Стохастическая динамика \mathcal{E}_P -ансамбля открытой квантовой системы вытекает из непрерывного мониторинга определенных наблюдаемых ее окружения. Процесс $\psi(t)$, таким образом, олицетворяет случайные изменения вектора состояний, основанные на результатах этого мониторинга. Соответственно, различные схемы детектирования приводят к различным стохастическим процессам для соответствующих векторов состояний, как было продемонстрировано Вайсманом и Милбурном (Wiseman, Milburn, 1993a, 1993b). Микроскопические выводы различных стохастических процессов будут даны в этой главе.

6.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ И КДП В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Этот раздел служит для введения, на формальном математическом уровне, связи между динамическими полугруппами и определенным классом кусочно-детерминированных процессов в гильбертовом пространстве. В дальнейшем мы обсудим некоторые важные математические свойства этого класса КДП. Физическое значение стохастического представления, а также его вывод из микроскопических моделей представлены в следующем разделе. Специфические физические примеры исследованы в разделах 6.3–6.7.

6.1.1. ДИНАМИКА РЕДУЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ КАК КДП

6.1.1.1. ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ. Сначала рассмотрим замкнутые системы, динамика которых во временном интервале от t_0 до t описывается оператором эволюции во времени

$$U(t, t_0) = \exp [-iH(t - t_0)], \quad (6.1)$$

где H означает гамильтониан системы. Для того чтобы сконструировать плотность вероятности $P[\psi, t]$ процесса $\psi(t)$, описывающего эволюцию

соответствующего \mathcal{E}_P -ансамбля (см. главу 5), мы должны ввести начальное вероятностное распределение $P_0[\psi]$, которое представляет состояние ансамбля в момент времени t_0 . Плотность вероятности для $\psi(t)$ принять значение ψ в момент времени t задается

$$P[\psi, t] = \int P_0[\psi_0] \delta[\psi - U(t, t_0)\psi_0] D\psi_0 D\psi_0^* = P_0[U^{-1}(t, t_0)\psi]. \quad (6.2)$$

Во втором равенстве мы воспользовались определением (5.35) меры Дирака в гильбертовом пространстве и уравнение (5.47). Представленное выше уравнение просто выражает тот факт, что любая ψ_0 , взятая из начального распределения P_0 , эволюционирует согласно уравнению Шредингера, так что плотность ψ в момент времени t равна соответствующему начальному значению $U^{-1}(t, t_0)\psi$. На языке теории стохастических процессов ψ есть детерминированный марковский процесс (см. раздел 2.4.3), а δ -функция в (6.2) ничто иное, как вероятность перехода процесса.

Уравнение (6.2) может быть записано в дифференциальной форме. Для этого мы вводим функциональные производные $\delta/\delta\psi(x)$ и $\delta/\delta\psi^*(x)$ со свойствами

$$\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\psi(y) = \frac{\delta}{\delta\psi^*(x)}\psi^*(y) = \delta(x - y), \quad (6.3)$$

$$\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\psi^*(y) = \frac{\delta}{\delta\psi^*(x)}\psi(y) = 0. \quad (6.4)$$

Если $F[\psi(t)]$ — любой функционал от зависимой от времени волновой функции, цепное правило может быть выражено на языке функциональных производных как показано ниже:

$$\frac{d}{dt}F[\psi(t)] = \int \left\{ \frac{\delta F}{\delta\psi(x)} \frac{d\psi(x, t)}{dt} + \frac{\delta F}{\delta\psi^*(x)} \frac{d\psi^*(x, t)}{dt} \right\} dx. \quad (6.5)$$

С помощью этих соотношений мы прямо из уравнения (6.2) получим дифференциальную форму

$$\frac{\partial}{\partial t}P[\psi, t] = i \int \left\{ \frac{\delta}{\delta\psi(x)}(H\psi)(x) - \frac{\delta}{\delta\psi^*(x)}(H\psi)^*(x) \right\} P[\psi, t] dx. \quad (6.6)$$

Это всего лишь уравнение Лиувилля, соответствующее потоку, индуцированному уравнением Шредингера $\dot{\psi}(t) = -iH\psi(t)$. Легко проверить, что (6.6) сохраняет основные условия (5.49), (5.50) и (5.51), требуемые для функционала плотности вероятности на проективном гильбертовом пространстве.

6.1.1.2. Интерпретация основного квантового уравнения. Перейдем теперь к открытой системе S . Считается, что динамика матрицы плотности $\rho_S(t)$ системы S описывается квантовой полугруппой, удовлетворяющей основному марковскому уравнению в форме Линдблада (см. раздел 3.2.2)

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H, \rho_S(t)] + \sum_i \gamma_i \left(A_i \rho_S(t) A_i^\dagger - \frac{1}{2} A_i^\dagger A_i \rho_S(t) - \frac{1}{2} \rho_S(t) A_i^\dagger A_i \right). \quad (6.7)$$

Наша цель — продемонстрировать, что динамика, задаваемая этим уравнением, может быть представлена как кусочно-детерминированный процесс $\psi(t)$ в гильбертовом пространстве открытой системы S в следующем смысле. Процесс будет определенным через соответствующее эволюционирующее во времени уравнение для его функционала плотности вероятности $P[\psi, t]$. Функционал плотности в момент времени t связан с функционалом плотности в момент времени t_0 как

$$P[\psi, t] = \int T[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] P[\tilde{\psi}, t_0] D\tilde{\psi} D\tilde{\psi}^*, \quad (6.8)$$

где $T[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0]$ есть условная вероятность перехода процесса. Процесс $\psi(t)$ порождает определенное уравнение движения для матрицы ковариации, которая определена в уравнении (5.62) и будет записываться явно, как показано ниже:

$$\rho_S(x, x', t) \equiv E[\psi(x, t)\psi^*(x', t)] = \int P[\psi, t]\psi(x)\psi^*(x')D\psi D\psi^*. \quad (6.9)$$

Матрица ковариаций устанавливается матрицей плотности $\rho_S(x, x', t)$. Основным требованием является то, что математическое ожидание (6.9) удовлетворяет уравнению Линдблада (6.7). Таким образом, процесс $\psi(t)$ порождает редуцированную матрицу плотности системы через ее ковариационную матрицу, как проиллюстрировано на рис. 6.1. Процесс, который удовлетворяет этому требованию, называется *интерпретацией* основного уравнения (Carmichael, 1993).

6.1.1.3. Основное уравнение Лиувилля. Как обсуждалось в разделе 1.5.1, КДП может быть определен на языке основного уравнения Лиувилля для плотности вероятности (Breuer, Petruccione, 1995a, 1995b). Мы рассмотрим здесь основное уравнение для КДП в гильбертовом пространстве, которое принимает следующую форму, аналогичную уравне-

$$\begin{array}{ccc}
 \rho_S(t_0) & \xrightarrow{V(t, t_0)} & \rho_S(t) \\
 E[|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|] \uparrow & & \uparrow E[|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|] \\
 P[\tilde{\psi}, t_0] & \xrightarrow{T[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0]} & P(\psi, t)
 \end{array}$$

Рис. 6.1. Интерпретация основного квантового уравнения приводит к кумулятивной диаграмме: начиная в точке $P[\tilde{\psi}, t_0]$, можно сформировать любую ковариационную матрицу, чтобы получить $\rho_S(t_0)$ и развивать с помощью супероператора $V(t, t_0)$, который представляет временную эволюцию, соответствующую основному уравнению (6.7). В противном случае, можно сначала распространить процесс, чтобы получить $P[\psi, t]$ и сформировать ковариационную матрицу. Оба пути приводят к одной и той же матрице плотности $\rho_S(t)$.

нию (1.150):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} P[\psi, t] = i \int \left\{ \frac{\delta}{\delta\psi(x)} G(\psi)(x) - \frac{\delta}{\delta\psi^*(x)} G(\psi)^*(x) \right\} P[\psi, t] dx + \\
 + \int \{ W[\psi|\tilde{\psi}]P[\tilde{\psi}, t] - W[\tilde{\psi}|\psi]P[\psi, t] \} D\tilde{\psi} D\tilde{\psi}^*. \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

Первый член правой части дает лиувилльскую часть. Она представляет собой генератор, соответствующий детерминированному уравнению, эволюционирующему во времени,

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -iG(\psi(t)), \tag{6.11}$$

где $G(\psi)$ — нелинейный оператор, определенный формулой

$$G(\psi) = \hat{H}\psi + \frac{i}{2} \sum_i \gamma_i \|A_i\psi\|^2 \psi. \tag{6.12}$$

Линейный оператор \hat{H} задается выражением

$$\hat{H} = H - \frac{i}{2} \sum_i \gamma_i A_i^\dagger A_i. \tag{6.13}$$

Таким образом, \hat{H} состоит из двух частей, а именно: гамильтониана H , который появился в уравнении Линдблада (6.7), и неэрмитовой части, которая определяется на языке операторов Линдблада A_i .

Часть, отвечающая за скачок в уравнении (6.10) (задаваемая вторым членом в правой части), описывает интенсивность изменения $P[\psi, t]$ благодаря дискретным скачкам волновой функции. Усиливающий член представляет суммарную интенсивность для всех переходов из любого состояния $\tilde{\psi}$ в состояние ψ , тогда как ослабевающий член дает суммарную интенсивность для всех переходов из состояния ψ . Соответствующая интенсивность перехода определяется выражением

$$W[\psi|\tilde{\psi}] = \sum_i \gamma_i \|A_i \tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{A_i \tilde{\psi}}{\|A_i \tilde{\psi}\|} - \psi \right]. \quad (6.14)$$

6.1.1.4. Детерминированная эволюция. Периоды детерминированной эволюции процесса задаются уравнением (6.11), которое имеет вид нелинейного уравнения Шредингера. Формальное решение соответствующего нормированного начального значения $\psi(0) = \tilde{\psi}$ может быть записано на языке неэрмитового гамильтониана \hat{H} как

$$\psi(t) \equiv g_t(\tilde{\psi}) = \frac{\exp(-i\hat{H}t)\tilde{\psi}}{\|\exp(-i\hat{H}t)\tilde{\psi}\|}. \quad (6.15)$$

Для доказательства этого уравнения мы продифференцируем его по времени:

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = -i\hat{H}\psi(t) - \frac{1}{2}\psi(t) \|e^{-i\hat{H}t}\tilde{\psi}\|^{-2} \frac{d}{dt} \|e^{-i\hat{H}t}\tilde{\psi}\|^2. \quad (6.16)$$

Производная по времени от нормы оказывается равной

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e^{-i\hat{H}t}\tilde{\psi}\|^2 &= i\langle \tilde{\psi} | e^{i\hat{H}^\dagger t} (\hat{H}^\dagger - \hat{H}) | \tilde{\psi} \rangle = \\ &= - \sum_i \gamma_i \langle \tilde{\psi} | e^{i\hat{H}^\dagger t} A_i^\dagger A_i e^{-i\hat{H}t} | \tilde{\psi} \rangle, \end{aligned} \quad (6.17)$$

и тогда

$$\|e^{-i\hat{H}t}\tilde{\psi}\|^{-2} \frac{d}{dt} \|e^{-i\hat{H}t}\tilde{\psi}\|^2 = - \sum_i \gamma_i \langle \psi(t) | A_i^\dagger A_i | \psi(t) \rangle. \quad (6.18)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (6.16), сразу получаем уравнение (6.11).

Уравнение (6.18) показывает, что эволюция во времени, вызванная \hat{H} , приводит к монотонному уменьшению нормы волновой функции. Нелинейная часть уравнения (6.11) компенсирует это уменьшение, так что полное нелинейное уравнение Шредингера сохраняет норму волновой функции.

6.1.1.5. Скачкообразные процессы и распределение времени ожидания. Согласно уравнению (6.14) суммарная интенсивность переходов из заданного состояния $\tilde{\psi}$ в некоторое другое состояние задается как

$$\Gamma[\tilde{\psi}] = \int W[\psi|\tilde{\psi}]D\psi D\psi^* = \sum_i \gamma_i \|A_i \tilde{\psi}\|^2. \quad (6.19)$$

Предположим, что нормированное состояние $\tilde{\psi}$ было достигнуто скачком в момент времени t . Благодаря непрерывности эволюции во времени между скачками, суммарная интенсивность для следующего скачка зависит от времени τ , прошедшего с момента t . С помощью потока $\psi(\tau) = g_\tau(\tilde{\psi})$, определенного в уравнении (6.15), зависящая от времени суммарная интенсивность перехода может быть записана

$$\Gamma[g_\tau(\tilde{\psi})] = \sum_i \gamma_i \langle \psi(\tau) | A_i^\dagger A_i | \psi(\tau) \rangle = -\frac{d}{d\tau} \ln \| \exp(-i\hat{H}\tau) \tilde{\psi} \|^2, \quad (6.20)$$

где мы используем уравнение (6.18) на втором шаге. Согласно основам теории КДП (см. раздел 1.5) функция распределения для случайного времени ожидания τ задается выражением

$$F[\tilde{\psi}, \tau] = 1 - \exp \left(- \int_0^\tau \Gamma[g_s(\tilde{\psi})] ds \right) = 1 - \| \exp(-i\hat{H}\tau) \tilde{\psi} \|^2. \quad (6.21)$$

Эта величина приводит к вероятности для следующего скачка появиться где-нибудь в интервале $[t, t + \tau]$. Мы видим, что распределение времени ожидания просто определяется уменьшением нормы $\exp(-i\hat{H}\tau)\tilde{\psi}$, то есть уменьшением нормы вектора состояний, который подчиняется линейной части уравнения Шредингера.

Следуя нашему общему обсуждению о функции распределения времени ожидания КДП в разделе 1.5.2, мы сначала отметим, что предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \| \exp(-i\hat{H}\tau) \tilde{\psi} \|^2 \equiv q \quad (6.22)$$

существует и, таким образом, $F[\tilde{\psi}, \infty] = 1 - q$. Число q есть дефект скачка, он удовлетворяет неравенству $0 \leq q \leq 1$. Для исчезающего дефекта следует условие $F[\tilde{\psi}, \infty] = 1$. Это означает, что следующий скачок появляется с вероятностью 1 в некотором ограниченном времени. Однако, если \hat{H}

имеет нулевую моду, то возможно, что $q > 0$. В этом случае дефект q есть вероятность того, что после времени t дальнейших скачков не появится. Физический пример будет дан в разделе 8.2.

Величина $W[\psi|\tilde{\psi}]$ (см. (6.14)) обозначает плотность вероятности в единицу времени для скачка от $\tilde{\psi}$ до ψ . Так как она задается дискретной суммой функциональных δ -функций, у нас есть дискретный набор возможных переходов. Согласно тому условию, что перед скачком состояние задается $\tilde{\psi}$, отдельный скачок

$$\tilde{\psi} \rightarrow \psi = \frac{A_i \tilde{\psi}}{\|A_i \tilde{\psi}\|} \quad (6.23)$$

имеет место с вероятностью

$$p_i = \frac{\gamma_i \|A_i \tilde{\psi}\|^2}{\Gamma[\tilde{\psi}]} \quad (6.24)$$

Отметим, что рассматриваемые вероятности в сумме дают 1, то есть $\sum_i p_i = 1$ в силу уравнения (6.19). Переходы (6.23) назовем квантовыми скачками.

Снова, легко проверить, что основное уравнение Лиувилля (6.10) сохраняет основные условия (5.49), (5.50) и (5.51). В частности, сохранение нормы с вероятностью 1 следует из того факта, что и детерминированная эволюция и скачки сохраняют норму волновой функции. Основное уравнение Лиувилля, таким образом, определяет стохастический процесс в проективном гильбертовом пространстве.

В качестве примера КДП в гильбертовом пространстве на рис. 6.2 мы показываем квадрат $|\psi(x, t)|^2$ отдельной реализации основного уравнения (3.307) для затухающего гармонического осциллятора, обсуждавшегося в разделе 3.4.6. Операторы скачка есть операторы уничтожения и рождения a , a^\dagger , кроме того, мы добавили зависящее от времени воздействие к гамильтоновой части динамики.

6.1.1.6. Стохастическое дифференциальное уравнение. Как мы знаем из раздела 1.5, КДП, определяемый основным уравнением Лиувилля вида (6.10), также может быть сформулирован на языке стохастического дифференциального уравнения. В данном случае последнее задается как (ср. с (1.197))

$$d\psi(t) = -iG(\psi(t))dt + \sum_i \left(\frac{A_i \psi(t)}{\|A_i \psi(t)\|} - \psi(t) \right) dN_i(t), \quad (6.25)$$

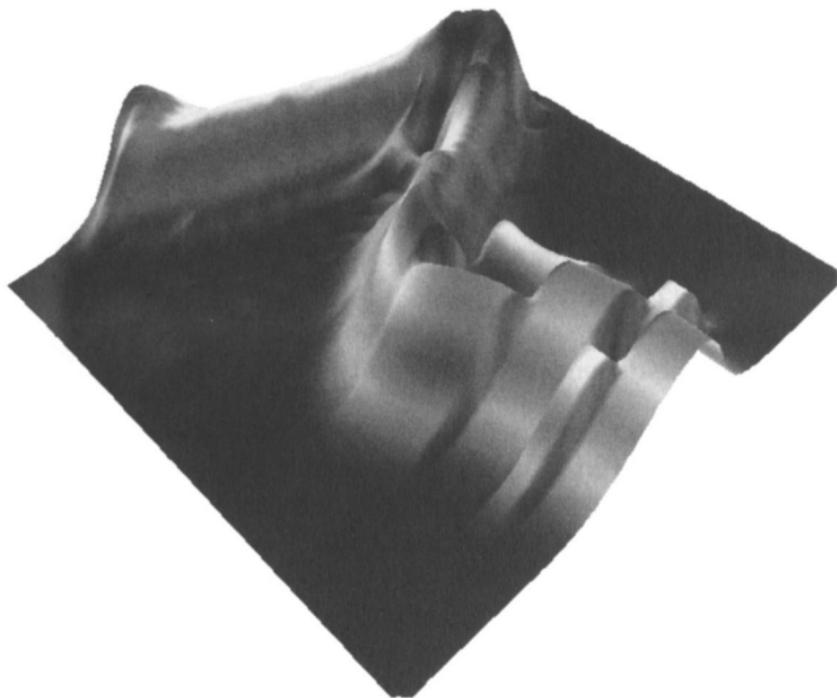


Рис. 6.2. Отдельная реализация КДП для одномерного гармонического осциллятора. Осциллятор связывается с низкотемпературным тепловым термостатом и возбуждается зависимой от времени силой. Рисунок показывает $|\psi(x, t)|^2$ как функцию x и t . Начальное состояние является основным состоянием осциллятора. Дополнительно к гладким периодам эволюции, наблюдается совершение волновой функцией неожиданных дискретных скачков.

где пуассоновские приращения $dN_i(t)$ удовлетворяют условиям

$$dN_i(t)dN_j(t) = \delta_{ij}dN_j(t), \quad (6.26)$$

$$E[dN_i(t)] = \gamma_i \|A_i\psi(t)\|^2 dt. \quad (6.27)$$

Представленный результат показывает, что процесс $N_i(t)$ считает число скачков типа i , то есть число скачков (6.23) с оператором Линдблада A_i . Процессы $N_i(t)$ зависят от времени через зависимый от времени вектор состояния.

6.1.1.7. Основное квантовое уравнение. Чтобы доказать, что КДП, определенный основным уравнением Лиувилля (6.10), на самом деле

предоставляет интерпретацию основного квантового уравнения (6.7), мы должны вывести уравнение движения, управляемое матрицей ковариации (6.9). При дифференцировании (6.9) по времени мы находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S(x, x', t) = \int \frac{\partial}{\partial t} P[\psi, t] \psi(x) \psi^*(x') D\psi D\psi^* \equiv \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_S \right|_L + \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_S \right|_J. \quad (6.28)$$

Здесь мы разложили суммарную интенсивность изменения ρ_S на интенсивность изменения, вызванную детерминированной частью Лиувилля, и интенсивность изменения, вызванную скачковой частью (6.10). Первый вклад получается от первого члена правой части (6.10)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_S \right|_L &= i \int D\psi D\psi^* \int dy \psi(x) \psi^*(x') \times \\ &\times \left\{ \frac{\delta}{\delta \psi(y)} G(\psi)(y) - \frac{\delta}{\delta \psi^*(y)} G(\psi)^*(y) \right\} P[\psi, t] = \\ &= -i \int \{G(\psi)(x) \psi^*(x') - \psi(x) G^*(\psi)(x')\} P[\psi, t] D\psi D\psi^*. \end{aligned} \quad (6.29)$$

На втором шаге мы выполнили функциональное интегрирование по частям и использовали свойства (6.3), (6.4) функциональных производных. При подстановке (6.12) мы, таким образом, получаем

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_S \right|_L = -i \left(\hat{H} \rho_S - \rho_S \hat{H}^\dagger \right) + \sum_i \gamma_i E [\|A_i \psi\|^2 \psi(x) \psi^*(x')]. \quad (6.30)$$

Отметим, что математические ожидания в правой части представляют определенные моменты корреляционных функций ψ четвертого порядка.

С помощью второго члена правой стороны (6.10) вклад скачка в интенсивность изменения ρ_S оказывается равным

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_S \right|_J = \iint \psi(x) \psi^*(x') \left\{ W[\psi|\tilde{\psi}] P[\tilde{\psi}, t] - W[\tilde{\psi}|\psi] P[\psi, t] \right\} D\psi D\psi^* D\tilde{\psi} D\tilde{\psi}^*. \quad (6.31)$$

Теперь мы представим (6.14) и выполним одно из двух функциональных интегрирований по каждому члену. В результате получим

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_S \right|_J = \sum_i \gamma_i A_i \rho_S A_i^\dagger - \sum_i \gamma_i E [\|A_i \psi\|^2 \psi(x) \psi^*(x')]. \quad (6.32)$$

Если теперь мы добавим уравнения (6.30) и (6.32), то увидим, что вклады от корреляционных функций четвертого порядка нейтрализуют друг друга

и мы остаемся с уравнением замыкания для ковариационной матрицы. Последнее легко видеть, принимая во внимание уравнение Линдблада (6.7), что и завершает доказательство.

6.1.2. Интеграл по траектории в гильбертовом пространстве

Для любого КДП пропагатор $T[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0]$ может быть представлен на языке суммы всех возможных реализаций процесса. Непосредственная адаптация формализма, развитого в разделе 1.5.3, показывает, что это приводит к интегралу по траектории, взятому по всем возможным траекториям в гильбертовом пространстве, при этом рассматриваемые траектории соединяют состояние $\tilde{\psi}$ в момент времени t_0 с состоянием ψ в момент времени t . Так как стохастический процесс однороден во времени, мы можем установить в дальнейшем $t_0 \equiv 0$ без ограничения общности.

Сначала мы выпишем прямое уравнение Колмогорова для процесса, как показано ниже (ср. с (1.167)):

$$T[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] = T^{(0)}[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] + \int_0^t ds \int D\psi_1 D\psi_1^* \int T_0[\psi, t|\psi_1, s] W[\psi_1|\psi_2] T[\psi_2, s|\tilde{\psi}, 0] D\psi_2 D\psi_2^*. \quad (6.33)$$

Физическая интерпретация этого уравнения та же, что и в разделе 1.5.3. В частности, величина

$$T^{(0)}[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] = \left(1 - F[\tilde{\psi}, t]\right) \delta[\psi - g_t(\tilde{\psi})] \quad (6.34)$$

есть вклад в пропагатор от траектории без скачка, то есть вклад, который происходит от детерминированной эволюции. В более общем случае мы пишем $T^{(N)}[\psi, t|\tilde{\psi}, 0]$ для вклада в пропагатор, который включает траектории с точно N скачками. Полный пропагатор может быть записан как ряд по числу скачков, как показано ниже:

$$T[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] = \sum_{N=0}^{\infty} T^{(N)}[\psi, t|\tilde{\psi}, 0]. \quad (6.35)$$

N -скакковые вклады удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$T^{(N)}[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] = \int_0^t ds \int D\psi_1 D\psi_1^* \int D\psi_2 D\psi_2^* \times \quad (6.36)$$

$$\times T^{(0)}[\psi, t|\psi_1, s] W[\psi_1|\psi_2] T^{(N-1)}[\psi_2, s|\tilde{\psi}, 0],$$

которое выполняется при $N \geq 1$. Удобно ввести неунитарный оператор эволюции во времени

$$\widehat{U}(t) = \exp(-i\widehat{H}t). \quad (6.37)$$

При использовании уравнения (6.14) и

$$T^{(0)}[\psi, t|\psi_1, s] = \|\widehat{U}(t-s)\psi_1\|^2 \delta \left[\psi - \frac{\widehat{U}(t-s)\psi_1}{\|\widehat{U}(t-s)\psi_1\|} \right] \quad (6.38)$$

и выполнении интегрирования по ψ_1 в уравнении (6.36) мы находим, что рекуррентное соотношение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} T^{(N)}[\psi, t|\widetilde{\psi}, 0] &= \int_0^t ds \int D\phi D\phi^* \sum_i \gamma_i \|\widehat{U}(t-s)A_i\phi\|^2 \times \\ &\quad \times \delta \left[\psi - \frac{\widehat{U}(t-s)A_i\phi}{\|\widehat{U}(t-s)A_i\phi\|} \right] T^{(N-1)}[\phi, s|\widetilde{\psi}, 0]. \end{aligned} \quad (6.39)$$

N -кратная итерация рекуррентного соотношения (6.39) в итоге приводит к

$$\begin{aligned} T^{(N)}[\psi, t|\widetilde{\psi}, 0] &= \int_0^t dt_N \int_0^{t_N} dt_{N-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \sum_{i_N} \sum_{i_{N-1}} \dots \sum_{i_1} \times \\ &\quad \times p_N^t(t_1, i_1; \dots; t_N, i_N) \delta \left[\psi - \frac{\psi_N^t(t_1, i_1; \dots; t_N, i_N)}{\|\psi_N^t(t_1, i_1; \dots; t_N, i_N)\|} \right]. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Это соотношение может быть легко проверено по индукции с помощью рекуррентного соотношения (6.36). Величина

$$\begin{aligned} \psi_N^t(t_1, i_1; \dots; t_N, i_N) &= \\ &= \widehat{U}(t-t_N)A_{i_N}\widehat{U}(t_N-t_{N-1})A_{i_{N-1}}\dots\widehat{U}(t_2-t_1)A_{i_1}\widehat{U}(t_1)\widetilde{\psi} \end{aligned} \quad (6.41)$$

есть вектор состояния в момент времени t при условии следующих событий. Квантовый скачок со скачкообразным оператором A_{i_1} появляется в момент времени t_1 , скачок с оператором A_{i_2} в момент времени t_2, \dots , скачок с оператором A_{i_N} в момент времени t_N , других скачков в интервале $[0, t]$ не существует. Соответствующая плотность вероятности для этого события, известная как многовременная эксклюзивная вероятность, задается выражением

$$p_N^t(t_1, i_1; \dots; t_N, i_N) = \gamma_{i_N} \dots \gamma_{i_1} \|\psi_N^t(t_1, i_1; \dots; t_N, i_N)\|^2. \quad (6.42)$$

Согласно уравнению (6.40) N -скакковый пропагатор находится интегрированием вкладов от ψ_N^t по всем временам скачков t_1, t_2, \dots, t_N и суммированием по всем типам скачков i_1, i_2, \dots, i_N .

Подстановка (6.40) в (6.35) дает интеграл по траектории в гильбертовом пространстве (Breuer, Petruccione, 1996a). Нужно подчеркнуть, что этот интеграл по траектории полностью отличается от интеграла по траектории Фейнмана–Вернона, введенного в параграфе 3.6.4.2. Последний является суммой по всем траекториям в конфигурационном пространстве, каждая траектория обладает комплексным весовым множителем, задаваемым через эффективный функционал действия. В противоположность этому, интеграл по траектории гильбертова пространства является суммой по траекториям $\psi(t)$ в гильбертовом пространстве, где каждая траектория вносит действительный и положительный весовой множитель, который является лишь вероятностью траектории. Рассматриваемый подход дает математическую формулировку идеи Кармихела *квантовых траекторий* (Carmichael, 1993) и метода Монте-Карло для волновой функции (Mølmer, Castin, Dalibard, 1993; Dum et al., 1992; Gardiner, Parkins, Zoller, 1992; Castin, Mølmer, 1995; Mølmer, Castin, 1996).

Если у нас только один оператор скачка A с соответствующей интенсивностью γ_0 , уравнение (6.40) сводится к простой форме

$$T^{(N)}[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] = \int_0^t dt_N \int_0^{t_N} dt_{N-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \times \\ \times p_N^t(t_1, \dots, t_N) \delta \left[\psi - \frac{\psi_N^t(t_1, \dots, t_N)}{\|\psi_N^t(t_1, \dots, t_N)\|} \right], \quad (6.43)$$

где

$$\psi_N^t(t_1, \dots, t_N) = \hat{U}(t-t_N) A \hat{U}(t_N-t_{N-1}) A \dots \hat{U}(t_2-t_1) A \hat{U}(t_1) \tilde{\psi} \quad (6.44)$$

и

$$p_N^t(t_1, \dots, t_N) = \gamma_0^N \|\psi_N^t(t_1, \dots, t_N)\|^2. \quad (6.45)$$

Если мы проинтегрируем $T^{(N)}[\psi, t|\tilde{\psi}, 0]$ по ψ , то получим $p_N(t)$ для точно N квантовых скачков во временном интервале $[0, t]$

$$p_N(t) = \int_0^t dt_N \int_0^{t_N} dt_{N-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 p_N^t(t_1, \dots, t_N). \quad (6.46)$$

Эти выражения будут использованы для примеров в следующих разделах для определения статистики событий скачков.

6.1.3. Приближение диффузии

При определенных условиях существует диффузионный предел основного уравнения Лиувилля (6.10), приводящий к уравнению Фоккера–Планка для функционала плотности вероятности, что, в свою очередь, эквивалентно стохастическому уравнению типа Шредингера. Диффузионный предел КДП, таким образом, обусловливает интерпретацию основного квантового уравнения на языке диффузионного процесса в гильбертовом пространстве.

Для простоты, в дальнейшем мы предполагаем, что у нас есть только один скачкообразный оператор A с соответствующей интенсивностью γ_0 . Согласно основной теории стохастических процессов, диффузионное разложение данного основного уравнения может быть выполнено, если размер переходов вдоль состояний становится произвольно малым и если в то же время число переходов за любой ограниченный интервал времени становится произвольно большим. По мере формулирования этих условий мы вводим малый (безразмерный) параметр ε и записываем соотношение для оператора Линдблада как

$$A = I + \varepsilon C, \quad (6.47)$$

где I означает оператор тождественного преобразования, а оператор C не зависит от ε . Наша цель — исследовать поведение основного уравнения Лиувилля (6.10) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. При использовании уравнения (6.47) мы получим второй порядок по ε

$$\begin{aligned} G(\psi) = H\psi - \frac{i}{2}\gamma_0 & \left\{ I + \varepsilon(C^\dagger + C) + \varepsilon^2 C^\dagger C \right\} \psi + \\ & + \frac{i}{2}\gamma_0 \left\{ 1 + \varepsilon \langle C^\dagger + C \rangle_\psi + \varepsilon^2 \langle C^\dagger C \rangle_\psi \right\} \psi \end{aligned} \quad (6.48)$$

и

$$W[\psi|\tilde{\psi}] = \gamma_0 \left(1 + \varepsilon \langle C^\dagger + C \rangle_{\tilde{\psi}} + \varepsilon^2 \langle C^\dagger C \rangle_{\tilde{\psi}} \right) \delta[\tilde{\psi} - \psi + \varepsilon M(\tilde{\psi}) + \varepsilon^2 N(\tilde{\psi})], \quad (6.49)$$

где мы ввели сокращение

$$\langle O \rangle_\psi \equiv \langle \psi | O | \psi \rangle \quad (6.50)$$

и определили нелинейные операторы

$$M(\psi) \equiv \left\{ C - \frac{1}{2} \langle C^\dagger + C \rangle_\psi \right\} \psi, \quad (6.51)$$

$$N(\psi) \equiv -\frac{1}{2} \left\{ \langle C^\dagger C \rangle_\psi - \frac{3}{4} \langle C^\dagger + C \rangle_\psi^2 + \langle C^\dagger + C \rangle_\psi C \right\} \psi. \quad (6.52)$$

Подставляя эти выражения в основное уравнение Лиувилля, мы приходим во втором порядке по ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P[\psi, t] = & i \int \left\{ \frac{\delta}{\delta \psi(x)} K(\psi)(x) - \frac{\delta}{\delta \psi^*(x)} K(\psi)^*(x) \right\} P[\psi, t] dx + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_0 \varepsilon^2 \int dx \int \left\{ \frac{\delta^2}{\delta \psi(x) \delta \psi(x')} M(\psi)(x) M(\psi)(x') + \right. \\ & + \frac{\delta^2}{\delta \psi^*(x) \delta \psi^*(x')} M(\psi)^*(x) M(\psi)^*(x') + \\ & \left. + 2 \frac{\delta^2}{\delta \psi(x) \delta \psi^*(x')} M(\psi)(x) M(\psi)^*(x') \right\} P[\psi, t] dx'. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Это уравнение Фоккера–Планка для функционала плотности вероятности. Нелинейный оператор сдвига $K(\psi)$ принимает вид

$$\begin{aligned} K(\psi) = & H\psi + \frac{1}{2} \gamma_0 \varepsilon \{C - C^\dagger\} \psi + \\ & + i \gamma_0 \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \langle C^\dagger + C \rangle_\psi C - \frac{1}{8} \langle C^\dagger + C \rangle_\psi^2 - \frac{1}{2} C^\dagger C \right\} \psi. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Как может быть видно из уравнения (6.53), диффузионная часть уравнения Фоккера–Планка, включая функциональные производные второго порядка, масштабируется как $\gamma_0 \varepsilon^2$. Таким образом, для того чтобы получить неисчезающий и ограниченный диффузионный вклад в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, мы полагаем, что ε -зависимость за время релаксации γ_0 определяется как

$$\gamma_0 = \varepsilon^{-2} \bar{\gamma}_0, \quad (6.55)$$

где $\bar{\gamma}_0$ не зависит от ε . С другой стороны, оператор сдвига (6.54) содержит член, который пропорционален $\gamma_0 \varepsilon = \bar{\gamma}_0 \varepsilon^{-1}$. Этот член расходится в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, если мы не наложим условие, что оператор C самосопряженный, то есть $C = C^\dagger$. Используя это условие, для оператора сдвига мы получаем

$$K(\psi) = H\psi + i \bar{\gamma}_0 \left\{ \langle C \rangle_\psi C - \frac{1}{2} \langle C \rangle_\psi^2 - \frac{1}{2} C^2 \right\} \psi, \quad (6.56)$$

в то время как оператор $M(\psi)$ принимает форму

$$M(\psi) = (C - \langle C \rangle_\psi) \psi. \quad (6.57)$$

С этими выражениями уравнение Фоккера–Планка (6.53) эквивалентно следующему стохастическому уравнению Шредингера в форме Ито:

$$d\psi(t) = -iK(\psi(t))dt + \sqrt{\gamma_0}M(\psi(t))dW(t), \quad (6.58)$$

где $dW(t)$ есть приращение действительного винеровского процесса.

Для того чтобы получить хорошо определенный диффузионный предел, выше мы предположили, что оператор скачка самосопряжен. Конечно, возможно сформулировать другие условия и сделать другое разложение основного уравнения Лиувилля. В частности, если у нас есть несколько операторов Линдблада, условия, приводящие к диффузионному пределу, могут быть различны. Физический пример будет обсуждаться в разделе 6.4.2.

6.1.4. Многовременные корреляционные функции

Представление динамики основного марковского квантового уравнения на языке стохастического процесса в гильбертовом пространстве \mathcal{H} может быть также обобщено до стохастической формулировки на языке многовременных корреляционных функций (см. раздел 3.2.4). Здесь мы покажем, что это может быть достигнуто конструированием стохастических процессов в соответствующим образом расширенном гильбертовом пространстве, а именно: в сдвоенном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ (Breuer, Kappler, Petruccione, 1997, 1998).

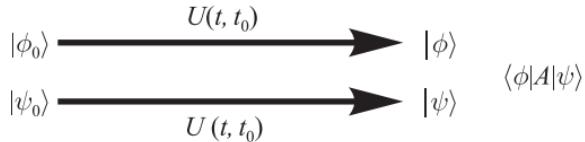
6.1.4.1. Редуцированные операторы представления Гейзенберга.

Согласно разделу 3.2.3, мы можем записать матрицу элементов произвольного редуцированного оператора в представлении Гейзенberга $A(t)$ (мы убираем индекс H) следующим образом:

$$\langle \phi_0 | A(t) | \psi_0 \rangle = \langle \phi_0 | V^\dagger(t, 0) A | \psi_0 \rangle = \text{tr} \{ A V(t, 0) | \psi_0 \rangle \langle \phi_0 | \}, \quad (6.59)$$

где $A(t)$ соответствует оператору представления Шредингера в момент времени $t_0 = 0$, а $V(t, 0)$ есть супероператор, описывающий временную эволюцию согласно основному уравнению (6.7). Уравнение (6.59) может интерпретироваться следующим образом. Для расчета матричного элемента $\langle \phi_0 | A(t) | \psi_0 \rangle$ начинаем с исходной «матрицы плотности» $|\psi_0\rangle \langle \phi_0|$ и распространяем ее действие до времени t . Затем считаем математическое ожидание A относительно эволюционирующей «матрицы плотности». Однако $|\psi_0\rangle \langle \phi_0|$ вообще не является истинной матрицей плотности, она не положительна и не эрмитова. Таким образом, она не может быть охарактеризована как ковариантная матрица $E[|\psi\rangle \langle \psi|]$ распределения в гильбертовом пространстве \mathcal{H} открытой системы. Таким образом, прямое приложение стохастической интерпретации, развитой в предыдущих разделах для расчета операторов в представлении Гейзенберга, невозможно.

а) Унитарная временная эволюция



б) Стохастическая временная эволюция

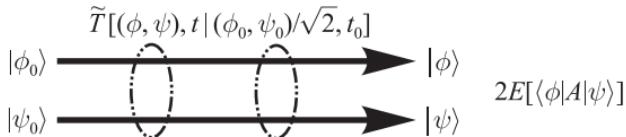


Рис. 6.3. Определение матричных элементов операторов в представлении Гейзенберга для (а) замкнутой системы и (б) открытой системы.

В замкнутой системе, где временная эволюция состояний задается через унитарный оператор эволюции $U(t, 0)$, мы можем вычислить матричный элемент $\langle\phi_0|A(t)|\psi_0\rangle$ следующим образом (см. рис. 6.3): независимо распространить ψ_0 и ϕ_0 для получения $\phi = U(t, 0)\phi_0$ и $\psi = U(t, 0)\psi_0$ и вычислить скалярное произведение $\langle\phi|A|\psi\rangle$. Это предполагает следующий метод для определения матричных элементов (6.59) для открытой системы: вместо независимо распространяемых векторов состояний $\phi_0 \in \mathcal{H}$ и $\psi_0 \in \mathcal{H}$ мы проектируем стохастический процесс $\theta(t)$ в *сдвоенном гильбертовом пространстве*, для прямой суммы

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \quad (6.60)$$

и используем этот процесс для нормированной *пары* векторов состояний

$$\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{H}}. \quad (6.61)$$

Рассматриваемый подход проиллюстрирован на рис. 6.3.

Чтобы сформулировать основную идею, мы введем пропагатор $\tilde{T}[\theta, t | \theta_0, t_0]$ процесса $\theta(t)$ в *сдвоенном гильбертовом пространстве*, в котором мы запишем

$$\theta(t) \equiv \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{H}}. \quad (6.62)$$

Снова предполагается, что процесс нормирован

$$\|\theta(t)\|^2 = \|\phi(t)\|^2 + \|\psi(t)\|^2 \equiv 1. \quad (6.63)$$

Теперь мы можем сформулировать наше основное определение следующим образом. Процесс $\theta(t)$ называют стохастическим представлением для редуцированной картины Гейзенберга, если следующее условие

$$\langle \phi_0 | A(t) | \psi_0 \rangle = 2 \int \langle \phi | A | \psi \rangle \tilde{T}[\theta, t | \theta_0, 0] D\theta D\theta^* \equiv 2E[\langle \phi(t) | A | \psi(t) \rangle] \quad (6.64)$$

выполнимо для всех ϕ_0, ψ_0 и для всех операторов A . Таким образом, сконструировав такой процесс $\theta(t)$, мы можем определить матричный элемент оператора Гейзенберга $A(t)$ с помощью математического ожидания величины $\langle \phi(t) | A | \psi(t) \rangle$.

Теперь возникает вопрос: как мы сконструируем процесс $\theta(t)$, который удовлетворяет уравнению (6.64)? Чтобы ответить на этот вопрос, мы рассмотрим следующее основное уравнение в сдвоенном гильбертовом пространстве:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -i \left[\tilde{H}, \tilde{\rho}(t) \right] + \sum_i \gamma_i \left\{ \tilde{A}_i \tilde{\rho}(t) \tilde{A}_i^\dagger - \frac{1}{2} \tilde{A}_i^\dagger \tilde{A}_i \tilde{\rho}(t) - \frac{1}{2} \tilde{\rho}(t) \tilde{A}_i^\dagger \tilde{A}_i \right\}, \quad (6.65)$$

где гамильтониан и операторы Линдблада в расширенном пространстве определяются как

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i \end{pmatrix}. \quad (6.66)$$

Мы берем $\theta(t)$ для произвольной интерпретации основного уравнения (6.65) в сдвоенном гильбертовом пространстве с начальным условием $\theta(0) = \theta_0$. Так, $\theta(t)$ может быть, например, КДП типа, как обсуждалось в разделе 6.1.1, или, напротив, процессом диффузионного типа, который обсуждался в разделе 6.1.3. Теперь мы можем потребовать, чтобы процесс $\theta(t)$ был стохастическим представлением редуцированной картины Гейзенберга, то есть можем потребовать выполнения условия (6.64). Таким образом, любая интерпретация основного уравнения в сдвоенном гильбертовом пространстве порождает стохастическое представление для матричных элементов операторов Гейзенберга в редуцированном пространстве.

Для доказательства этого требования мы запишем матрицу плотности в \mathcal{H} следующим образом:

$$\tilde{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{11}(t) & \tilde{\rho}_{12}(t) \\ \tilde{\rho}_{21}(t) & \tilde{\rho}_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad (6.67)$$

предполагая, что это есть решение для расширенного основного уравнения (6.65), соответствующее начальному условию

$$\tilde{\rho}(0) = |\theta_0\rangle\langle\theta_0| \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\phi_0\rangle\langle\phi_0| & |\phi_0\rangle\langle\psi_0| \\ |\psi_0\rangle\langle\phi_0| & |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \end{pmatrix}. \quad (6.68)$$

На основании блочнодиагональной структуры операторов (6.66), основное уравнение (6.65) приводится к четырем независимым уравнениям таким, что все компоненты $\tilde{\rho}_{ij}(t)$ входят в решение основного уравнения (6.7) отдельно. В частности, $\tilde{\rho}_{21}(t)$ есть решение этого уравнения с начальным условием

$$\tilde{\rho}_{21}(0) = \frac{1}{2}|\psi_0\rangle\langle\phi_0|. \quad (6.69)$$

Таким образом, мы имеем

$$\tilde{\rho}_{21}(t) = V(t, 0) \left(\frac{1}{2}|\psi_0\rangle\langle\phi_0| \right), \quad (6.70)$$

и тогда в силу (6.59)

$$\langle\phi_0|A(t)|\psi_0\rangle = 2 \operatorname{tr} \{ A \tilde{\rho}_{21}(t) \}. \quad (6.71)$$

С другой стороны, так как $\theta(t)$ является интерпретацией основного уравнения (6.65) с начальным условием $\theta(0) = \theta_0$, мы имеем

$$\tilde{\rho}(t) = \int |\theta\rangle\langle\theta| \tilde{T}[\theta, t|\theta_0, 0] D\theta D\theta^* \quad (6.72)$$

и, соответственно,

$$\tilde{\rho}_{21}(t) = \int |\psi\rangle\langle\phi| \tilde{T}[\theta, t|\theta_0, 0] D\theta D\theta^*. \quad (6.73)$$

Подставляя уравнение (6.73) в уравнение (6.71), мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \langle\phi_0|A(t)|\psi_0\rangle &= 2 \int \operatorname{tr} \{ A|\psi\rangle\langle\phi| \} \tilde{T}[\theta, t|\theta_0, 0] D\theta D\theta^* = \\ &= 2 \int \langle\phi|A|\psi\rangle \tilde{T}[\theta, t|\theta_0, 0] D\theta D\theta^*, \end{aligned} \quad (6.74)$$

что завершает доказательство.

Таким образом, мы показали, что матричные элементы редуцированных операторов представления Гейзенберга считаются правильно, если стохастический процесс в двойном гильбертовом пространстве задает интерпретацию расширенного основного квантового уравнения (6.65). Важно отметить, что приведенное выше доказательство не основывается на какой-либо специфической интерпретации основного квантового уравнения (6.65). Напротив, оно верно для любого стохастического процесса, матрица ковариаций которого управляема уравнением (6.65).

6.1.4.2. Многовременные корреляции. Процесс $\theta(t)$ в сдвоенном гильбертовом пространстве $\tilde{\mathcal{H}}$ теперь используется для конструирования стохастического представления многовременных корреляционных функций. Рассмотрим пример двухвременной корреляционной функции (см. (3.86))

$$g(t, s) = \langle \phi_0 | B(t) C(s) | \phi_0 \rangle, \quad (6.75)$$

где $t > s \geq 0$ и мы можем принять без ограничений общности, что начальное состояние является чистым состоянием. Стохастический процесс, который представляет эту корреляционную функцию, может тогда быть определен согласно нижеследующему алгоритму:

1. Начинаем с состояния ϕ_0 в момент времени $t = 0$ и используем стохастическую временную эволюцию в сдвоенном гильбертовом пространстве $\tilde{\mathcal{H}}$ для получения стохастической волновой функции $\phi(s)$.
2. Распространяем нормированное состояние

$$\theta(s) = \frac{1}{\|(\phi(s), C\phi(s))\|} \begin{pmatrix} \phi(s) \\ C\phi(s) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad (6.76)$$

используя стохастическую временную эволюцию в двойном гильбертовом пространстве $\tilde{\mathcal{H}}$ для получения нормированного векторного состояния

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{H}}. \quad (6.77)$$

3. Представленная выше корреляционная функция получается расчетом математического ожидания

$$g(t, s) = E[\|(\phi(s), C\phi(s))\|^2 \langle \phi(t) | B | \psi(t) \rangle]. \quad (6.78)$$

Эта схема может быть обобщена до рассмотрения произвольных упорядоченных во времени многовременных корреляционных функций вида

(см. (3.87))

$$g(t_1, \dots, t_n; s_1, \dots, s_m) = \langle \phi_0 | B_1(s_1) \dots B_m(s_m) C_n(t_n) \dots C_1(t_1) | \phi_0 \rangle. \quad (6.79)$$

Мы используем те же обозначения, что и в разделе 3.2.4, и определяем операторы Шредингера (ср. это определение с данным в (3.90))

$$\begin{aligned} F_l &= I, \quad G_l = C_i, \text{ если } r_l = t_i \neq s_j \text{ для некоторых } i \text{ и всех } j, \\ F_l &= B_j^\dagger, \quad G_l = I, \text{ если } r_l = s_j \neq t_i \text{ для некоторых } j \text{ и всех } i, \quad (6.80) \\ F_l &= B_j^\dagger, \quad G_l = C_i, \text{ если } r_l = t_i = s_j \text{ для некоторых } i \text{ и } j. \end{aligned}$$

Многовременная корреляционная функция получается следующим путем:

1. Начинаем с состояния ϕ_0 в момент времени $t = 0$ и распространяем это на время r_1 для получения $\phi(r_1)$ с помощью процесса в \mathcal{H} .
2. Используя процесс в сдвоенном гильбертовом пространстве, развиваем состояние

$$\theta(r_1) = \frac{1}{\|(F_1\phi(r_1), G_1\phi(r_1))\|} \begin{pmatrix} F_1\phi(r_1) \\ G_1\phi(r_1) \end{pmatrix}, \quad (6.81)$$

чтобы получить состояние

$$\theta(r_2) = \begin{pmatrix} \phi(r_2) \\ \psi(r_2) \end{pmatrix}. \quad (6.82)$$

Затем совершают скачок в состояние

$$\theta(r_2) = \frac{1}{\|(F_2\phi(r_2), G_2\psi(r_2))\|} \begin{pmatrix} F_2\phi(r_2) \\ G_2\psi(r_2) \end{pmatrix} \quad (6.83)$$

и осуществляют эволюцию до момента времени r_3 и т. д.

3. Наконец, многовременная корреляция находится из соотношения

$$\begin{aligned} g(t_1, \dots, t_n; s_1, \dots, s_m) &= E[\|(F_1\phi(r_1), G_1\phi(r_1))\|^2 \times \\ &\times \|(F_2\phi(r_2), G_2\psi(r_2))\|^2 \dots \|(F_{q-1}\phi(r_{q-1}), G_{q-1}\psi(r_{q-1}))\|^2 \times \\ &\times \langle \phi(r_q) | F_q^\dagger G_q | \psi(r_q) \rangle]. \quad (6.84) \end{aligned}$$

Нужно отметить, что рассмотренный алгоритм делает возможным определение корреляционных функций произвольного порядка с помощью стохастического процесса в сдвоенном гильбертовом пространстве. Пример показан на рис. 6.5.

В заключение отметим, что развитый выше алгоритм связан с методом, предложенным Думом, Золлером и Ричем (Dum, Zoller, Ritsch, 1992) (см. также обсуждение Marte et al., 1993a, 1993b; Mølmer and Castin, 1996). Следующий метод был предложен Даllibардом, Кастином и Мёльмером (Dalibard, Castin, Mølmer, 1992).

6.2. Стохастическое представление непрерывных измерений

Стохастическая интерпретация основного квантового уравнения, рассмотренная в предыдущих разделах, дает интуитивную физическую картину, которая может быть очень полезной для идентификации основного механизма, лежащего в основе динамики редуцированной системы. Это будет проиллюстрировано посредством ряда примеров в этой и следующих двух главах. Рассматриваемый метод также приводит к эффективному инструменту для численного моделирования динамики открытой системы (см. главу 7).

Однако необходимо понимать, что стохастическое представление данного основного квантового уравнения на языке КДП в гильбертовом пространстве не однозначно. Предположим, мы имеем уравнение Линдблада с определенным гамильтонианом H и операторами Линдблада A_i , с соответствующими интенсивностями γ_i . Мы можем тогда перейти к новым H' и A'_i , γ'_i любым преобразованием, задаваемым уравнениями (3.72) и (3.73) без изменения генераторов Линдблада. Однако соответствующий КДП в общем изменяется согласно этим преобразованиям. Поэтому для точной физической интерпретации и для микроскопического вывода однозначного процесса требуются дополнительные входные данные, которых не было при выводе соответствующего основного квантового уравнения.

Таким образом, в этом разделе мы исследуем следующие вопросы. Какова физическая основа для описания динамики редуцированной системы на языке стохастической волновой функции $\psi(t)$, которая может обеспечить микроскопический вывод такой динамики, который находится в согласии с основными принципами квантовой механики? Будет показано, что теория непрерывных измерений обеспечивает соответствующую основу для ответа на эти вопросы, что было продемонстрировано несколькими авто-

рами (Barchielli, Belavkin, 1991; Hegerfeldt, Wilser, 1991; Wiseman, Milburn, 1993a, 1993b; Breuer, Petruccione, 1997) (см. также обзорную статью Пленио и Кнайт (Plenio, Knight, 1998) и ссылки, приведенные там).

6.2.1. Стохастическая временная эволюция \mathcal{E}_P -ансамблей

Физическая ситуация, изучаемая здесь, подобна схеме непрямых измерений, что уже было изучено в разделе 2.4.6. Здесь квантовый объект, живущий в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H}_S , представляет открытую систему, чью эволюцию мы хотим описать на языке стохастической волновой функции $\psi(t)$. Квантовый объект связан с другой квантово-механической системой, окружением, чье гильбертово пространство обозначается как \mathcal{H}_B . Окружение постоянно контролируемо некоторым измерительным устройством. Состояние окружения, таким образом, действует как квантовый зонд. Непрерывный мониторинг зонда дает определенную информацию об изучаемой системе, которая может быть получена из корреляций между объектом и зондом.

В главе 3 динамика редуцированной матрицы плотности ρ_S изучаемой системы S была получена из матрицы плотности ρ совместной системы взятием частичного следа по степеням свободы окружения B . Фиксируя ортонормированный базис из векторов состояний φ_α в \mathcal{H}_B , мы можем записать редуцированную матрицу плотности как

$$\rho_S = \text{tr}_B \rho = \sum_{\alpha} \langle \varphi_{\alpha} | \rho | \varphi_{\alpha} \rangle. \quad (6.85)$$

След по степеням свободы окружения может, таким образом, рассматриваться как неселективное измерение наблюдаемой окружения с собственными векторами φ_α . В неселективном измерении информация о результатах измерений отбрасывается, а субансамбли, обусловленные результатами измерений, перемешиваются во время эволюции. Как результат, редуцированная матрица плотности ρ_S не зависит от базиса φ_α , то есть не зависит от выбора способа измерения наблюдаемой окружения. Следовательно, временная эволюция ρ_S описывает то, что происходит с ансамблем типа \mathcal{E}_P .

Однако для ансамблей (типа \mathcal{E}_P) временная эволюция возникает, когда мы описываем процесс на селективном уровне, то есть если мы сохраняем информацию, полученную регистрацией измерений, и если принимаем во внимание расщепление на различные субансамбли, обусловленные этими измерениями. Это приводит к стохастической динамике для волновой функции $\psi(t)$ объекта. Таким образом, динамика стохастической волновой функции описывает эволюцию на уровне непрямого селективного измерения, которое выполняется в окружении и которое приводит к стохастичес-

кому обратному действию на вектор состояния изучаемой системы. Это обратное действие уже обсуждалось в связи с основной схемой непрямого измерения. Принимая во внимание эту картину, должно быть ожидаемым, что усреднение по реализации процесса $\psi(t)$ приводит к динамике неселективного уровня, то есть к соответствующему уравнению движения для $\rho_S(t)$.

6.2.2. Поведение пропагатора на коротких временах

Чтобы сформулировать эти идеи на языке математики, мы возьмем некоторое начальное время t_0 и некоторое более позднее время $t \equiv t_0 + \tau$, где $\tau > 0$. Условная вероятность перехода $T[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0]$ процесса $\psi(t)$ определяется уравнением (6.8). Предположим, что за время t выполнено идеальное квантовое измерение невырожденной наблюдаемой окружении с собственными векторами φ_α . Соответствующая операция задается операторами (ср. с (2.211))

$$\Omega_\alpha \equiv \langle \varphi_\alpha | U(t, t_0) | \phi_0 \rangle, \quad (6.86)$$

где принимается, что окружение находится в чистом состоянии, задаваемом вектором ϕ_0 , а $U(t, t_0)$ есть оператор временной эволюции составной системы.

Ситуация, которую мы здесь изучаем, та же, что рассматривалась в предыдущей главе. В самом деле, при сравнении уравнения (5.88) с определением (6.8) мы видим, что условная вероятность перехода задается следующим точным выражением:

$$T[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] = \sum_\alpha \|\Omega_\alpha \tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{\Omega_\alpha \tilde{\psi}}{\|\Omega_\alpha \tilde{\psi}\|} - \psi \right]. \quad (6.87)$$

Это есть вероятность нахождения редуцированной системы в состоянии ψ , после полного ортогонального измерения окружения в момент времени t , при условии, что в момент времени t_0 было задано состояние $\tilde{\psi}$. Согласно уравнению (6.8), функционал плотности вероятности $P[\psi, t]$ описывает ансамбль типа \mathcal{E}_P , который возникает в результате полного измерения окружения в момент времени t . Роль операторов Ω_α заключается в описании операции, соответствующей обратному действию на систему S , вызванному измерением. Отметим, что T является условной вероятностью перехода в проективном гильбертовом пространстве. А именно: если $P[\tilde{\psi}, t_0]$ — фазово-инвариантный функционал плотности, то функционал плотности $P[\psi, t]$, соответствующий (6.8), автоматически также фазово-инвариантен для пропагатора вида (6.87). Это легко проверить с помощью свойств инвариантности меры Дирака. Также из уравнений (6.8)

и (6.87) следует, что суммарная вероятность для нахождения в одном из возможных состояний в момент времени t равна 1, а именно

$$\int T[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] D\psi D\psi^* = 1, \quad (6.88)$$

а также то, что при $t \rightarrow t_0$ от нуля отличается только вероятность нахождения в заданном начальном состоянии, то есть

$$\lim_{t \rightarrow t_0} T[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] = \delta[\tilde{\psi} - \psi]. \quad (6.89)$$

Для того чтобы вывести КДП, описывающий непрерывные измерения, необходимо осуществить марковское приближение. Для достаточно малого интервала времени τ (но все же такого, что $\tau \gg \tau_B$) поведение условной вероятности имеет форму, характерную для КДП, а именно

$$T[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] = (1 - \tau\Gamma[\tilde{\psi}])\delta[\tilde{\psi} - i\tau G(\tilde{\psi}) - \psi] + \tau W[\psi|\tilde{\psi}]. \quad (6.90)$$

Стратегия вывода КДП, таким образом, проста: сначала рассматривается поведение условной вероятности перехода на малых временах в соответствии с уравнением (6.87) с использованием марковского приближения. Сравнение со структурой общего вида (6.90) тогда дает интенсивность перехода $W[\psi|\tilde{\psi}]$ для квантовых скачков, а также генератор $G(\psi)$ для детерминированных участков процесса.

Мы завершаем этот раздел небольшими замечаниями. Уравнение (6.87) для условной вероятности перехода является точным выражением, поскольку включает в себя переменные окружения и точный оператор временной эволюции $U(t, t_0)$. Однако в большинстве интересных физических приложений окружение представляет собой систему с большим (практически неограниченным) числом степеней свободы с квазинепрерывным спектром частот (например, континuum мод электромагнитного поля). В таких случаях, конечно, на практике невозможно спроектировать измерительную схему, которая соответствует полному ортогональному разложению единицы. Однако, как будет видно из следующих примеров, марковское приближение дает возможность разложить условную вероятность перехода на небольшое число членов, которые могут быть интерпретированы как различные альтернативные результаты *неполной* схемы измерения. Последнее легко реализуется физически, так как соответствует разложению единицы на языке проективных операторов, в подпространствах \mathcal{H}_B высокой размерности.

Процесс, определяемый поведением условной вероятности перехода (6.90) на малых временах, интерпретируется как результат *непрерывного* измерения окружения согласно схеме измерения, определенной операторами Ω_α . Такая интерпретация необходима, так как каждое приложение инфинитезимального генератора вызывает редукцию состояния, которая фик-

сируется измерительной схемой. Кроме того, ясно, что термин *непрерывный* должен пониматься в смысле крупной зернистости во времени, что дает возможность марковского приближения динамики (ср. с обсуждением квантового эффекта Зенона в разделе 3.5.1). Также должно быть ясно, что каждый раз используется допущение (приближенной) статистической независимости системы и окружения. Другими словами, допускается, что зонд лишь слабо возмущается изучаемой системой и что после каждого временного интервала порядка τ снова может быть принято приближение кратких времен (6.90) для пропагатора. Должно быть понятно, что это допущение слабого возмущения может иметь силу, только если состояние окружения ϕ_0 лишь слабо подвержено влиянию со стороны измерительного процесса. Это условие удовлетворяется, например, если в базисе φ_α , который задает схему измерений при редукции, содержится состояние термостата. Примеры, рассмотренные ниже, определенно относятся к этому типу.

Выше мы предположили, что марковский процесс однороден во времени, так как это существенно для рассмотрения примеров, которые будут даны ниже. Неоднородный марковский процесс может получаться, если, например, редуцированная система связана со время-зависимыми внешними полями или если состояние окружения зависит от времени через временную эволюцию, сгенерированную гамильтонианом термостата H_B . Для такого неоднородного марковского процесса генератор G , а также интенсивность перехода W могут зависеть от времени явно. Ниже, в примерах, мы рассмотрим случай зависимых от времени внешних полей. Однако, так как гамильтониан будет еще независим от времени в картине взаимодействия, марковские процессы в этой картине будут однородны. Существенные модификации возникают в случае *сильных* внешних полей (см. раздел 8.4).

6.3. Прямое фотодетектирование

В качестве нашего первого примера в этом разделе мы изучим возбуждаемый двухуровневый атом, рассмотренный в разделе 3.4.5. При нулевой температуре уравнение (3.271) дает основное оптическое уравнение в вакууме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) = & \frac{i\Omega}{2}[\sigma_+ + \sigma_-, \rho_S(t)] + \\ & + \gamma_0 \left(\sigma_- \rho_S(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho_S(t) - \frac{1}{2} \rho_S(t) \sigma_+ \sigma_- \right) \end{aligned} \quad (6.91)$$

для атомной матрицы плотности $\rho_S(t)$.

Измерительная схема, лежащая в основе вывода КДП, есть прямое, непрерывное детектирование флуоресцентных фотонов, излучаемых двухуровневым источником. Таким образом, окружение, представленное излучательными модами и вакуумным электромагнитным полем, действует как состояние зонда. Непрерывный мониторинг излучаемых фотонов порождает стохастический процесс для атомного вектора состояний.

6.3.1. Вывод КДП

Мы запишем гамильтониан поля излучения в виде

$$H_B = \sum_j \omega_j b_j^\dagger b_j, \quad (6.92)$$

где b_j^\dagger , b_j — операторы рождения и уничтожения полевой моды с индексом j . Частота моды j обозначается ω_j . В представлении взаимодействия гамильтониан $H_I(t)$ принимает вид

$$H_I(t) = e^{i\omega_0 t} \sigma_+ B(t) + e^{-i\omega_0 t} \sigma_- B^\dagger(t) + H_L. \quad (6.93)$$

Первые два члена описывают связь атомного дипольного момента с полем излучения, где

$$B(t) = \sum_j \kappa_j e^{-i\omega_j t} b_j, \quad (6.94)$$

а κ_j есть константы связи. Третий член получается в результате взаимодействия с резонансным полем возбуждения

$$H_L = -\frac{\Omega}{2} (\sigma_- + \sigma_+). \quad (6.95)$$

Предположим, что фотоны мод b_j , излучаемые атомным источником, наблюдаются через прямое детектирование фотосчетчика. Это означает, что базисные векторы φ_α должны быть взяты в состояниях Фока, создаваемых операторами b_j^\dagger из вакуумного поля

$$\varphi_\alpha \equiv |\{N_j\}\rangle. \quad (6.96)$$

Здесь индекс α соответствует полному набору $\{N_j\}$ чисел заполнения мод b_j . В частности, мы определяем вакуум электромагнитного поля

$$\varphi_0 \equiv |0\rangle \quad (6.97)$$

и однофотонные состояния

$$\varphi_j \equiv |j\rangle \equiv b_j^\dagger |0\rangle. \quad (6.98)$$

Двухуровневый атом составляет квантовый объект, в то время как электромагнитное поле играет роль квантового зонда. Чистое состояние зонда будем считать вакуумным состоянием, то есть $\phi_0 = \varphi_0 \equiv |0\rangle$. Этот выбор удовлетворяет требованию слабости возмущения, так как разрушающее измерение поля квантов возвращает электромагнитное поле обратно в вакуумное состояние.

Наша задача теперь — вывести операторы Ω_α , которые описывают операцию детектирования фотонов. Используя теорию возмущений второго порядка, мы имеем

$$U_I(t, t_0) \approx I - i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} H_I(t') H_I(t'') dt'' dt'. \quad (6.99)$$

И тогда уравнение (6.86) приводит к

$$\Omega_\alpha = \delta_{\alpha, 0} + f_\alpha + g_\alpha, \quad (6.100)$$

$$\|\Omega_\alpha \tilde{\psi}\|^2 = \delta_{\alpha, 0} \left\{ 1 - \sum_{\alpha'} \langle f_{\alpha'}^\dagger f_{\alpha'} \rangle_{\tilde{\psi}} \right\} + \langle f_\alpha^\dagger f_\alpha \rangle_{\tilde{\psi}}, \quad (6.101)$$

где мы ввели операторы

$$f_\alpha \equiv -i \int_{t_0}^t \langle \varphi_\alpha | H_I(t') | 0 \rangle dt', \quad (6.102)$$

$$g_\alpha \equiv - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \langle \varphi_\alpha | H_I(t') H_I(t'') | 0 \rangle dt'' dt'. \quad (6.103)$$

Для $\varphi_\alpha = |0\rangle$ (вакуумное состояние) это дает

$$f_0 = -i\tau H_L \quad (6.104)$$

и для $\varphi_\alpha = |j\rangle$ (однофотонное состояние) мы получаем

$$f_j = -i\kappa_j^* \int_{t_0}^t e^{i(\omega_j - \omega_0)t'} \sigma_- dt' \equiv \tilde{f}_j \sigma_-. \quad (6.105)$$

Отметим, что $f_\alpha = 0$, если φ_α — любое N -фотонное состояние с $N \geq 2$. Таким образом, во втором порядке теории возмущений мы должны сохранить только члены первого порядка по Ω_j , которые соответствуют проекции на

однофотонный сектор, и члены второго порядка по Ω_0 , которые соответствуют проекции на поле вакуума. В результате при использовании (6.100), (6.101), (6.104) и (6.105) это дает

$$\Omega_j = \tilde{f}_j \sigma_-, \quad (6.106)$$

$$\|\Omega_j \tilde{\psi}\|^2 = |\tilde{f}_j|^2 \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}} \quad (6.107)$$

и

$$\Omega_0 = I - i\tau H_L + g_0, \quad (6.108)$$

$$\|\Omega_0 \tilde{\psi}\|^2 = 1 - \sum_j |\tilde{f}_j|^2 \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}}. \quad (6.109)$$

Уравнение (6.106) показывает, что Ω_j есть произведение двух множителей: первый \tilde{f}_j есть просто амплитуда вероятности для наблюдения фотона в mode j ; второй множитель есть атомный понижающий оператор σ_- , который представляет обратное действие на изучаемую систему, обусловленное наблюдением.

Собирая представленные результаты, мы видим, что условная вероятность перехода может быть расщеплена на две части

$$T[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] = T_0[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] + T_1[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0], \quad (6.110)$$

где

$$T_0[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] = \|\Omega_0 \tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{\Omega_0 \tilde{\psi}}{\|\Omega_0 \tilde{\psi}\|} - \psi \right] \quad (6.111)$$

и

$$T_1[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] = \sum_j \|\Omega_j \tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{\tilde{f}_j}{|\tilde{f}_j|} \frac{\sigma_- \tilde{\psi}}{\|\sigma_- \tilde{\psi}\|} - \psi \right]. \quad (6.112)$$

Множитель $\tilde{f}_j / |\tilde{f}_j|$ в аргументе δ -функции есть чисто фазовый множитель. Вспоминая, что пропагатор представляет вероятностный переход в проективном гильбертовом пространстве, мы видим, что этот множитель выпадает, если пропагатор сворачивается с любым фазово-инвариантным функционалом плотности. Таким образом, мы можем записать

$$T_1[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] = \left(\sum_j \|\Omega_j \tilde{\psi}\|^2 \right) \delta \left[\frac{\sigma_- \tilde{\psi}}{\|\sigma_- \tilde{\psi}\|} - \psi \right]. \quad (6.113)$$

Это выражение показывает, что операция, обусловленная измерением фотона, не зависит от моды j . Причина этого факта, очевидно, в том, что Ω_j зависит от j лишь через скалярный множитель. Физически это означает, что обратное действие на квантовый объект одно и то же для всех мод j .

Разложение (6.110) условной вероятности перехода соответствует двум непересекающимся классическим альтернативам. T_1 описывает детектирование строго одного фотона. Множитель перед δ -функционалом в (6.113) есть вероятность детектирования фотона, тогда как аргумент δ -функционала показывает, что состояние

$$\psi = \frac{\sigma_- \tilde{\psi}}{\|\sigma_- \tilde{\psi}\|} = (\text{фазовый множитель}) \times |g\rangle \quad (6.114)$$

есть новое состояние атома, обусловленное результатом измерения. Отметим, что это состояние представляет собой, как раз, основное состояние $|g\rangle$ двухуровневой системы, то есть детектирование системы переводит атом в основное состояние.

С другой стороны, T_0 дает вклад при отсутствии фотодетектирования. Вероятность этого события задается уравнением (6.109), а состояние редуцируемой системы есть

$$\psi = \frac{\Omega_0 \tilde{\psi}}{\|\Omega_0 \tilde{\psi}\|}. \quad (6.115)$$

Теперь осуществим приближение Маркова. Согласно допущению, что электромагнитное поле может быть приближено континуумом полевых мод, мы получаем для $\tau \gg 1/\omega_0$ из уравнений (6.105) и (6.103)

$$\sum_j |\tilde{f}_j|^2 \approx \tau \gamma_0, \quad (6.116)$$

$$g_0 \approx -\frac{1}{2} \tau \gamma_0 \sigma_+ \sigma_-, \quad (6.117)$$

где мы пренебрегли сдвигом Лэмба и ввели параметр

$$\gamma_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} \langle 0 | B(t) B^\dagger(0) | 0 \rangle dt = 2\pi D(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2, \quad (6.118)$$

который представляет собой атомную интенсивность затухания, а $D(\omega)$ есть плотность полевых мод.

Таким образом, из уравнений (6.116) и (6.107) мы получаем

$$\sum_j \|\Omega_j \tilde{\psi}\|^2 \approx \tau \gamma_0 \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}}, \quad (6.119)$$

а из уравнений (6.116) и (6.109)

$$\|\Omega_0 \tilde{\psi}\|^2 \approx 1 - \tau \gamma_0 \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}}, \quad (6.120)$$

и тогда, подставляя (6.119) в (6.113), находим

$$T_1[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] \approx \tau \gamma_0 \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}} \delta \left[\frac{\sigma_- \tilde{\psi}}{\|\sigma_- \tilde{\psi}\|} - \psi \right]. \quad (6.121)$$

Из уравнения (6.117) и уравнения (6.100) мы получаем

$$\Omega_0 = I + f_0 + g_0 \approx I - i\tau H_L - \frac{1}{2} \tau \gamma_0 \sigma_+ \sigma_-, \quad (6.122)$$

откуда, согласно (6.120), следует, что

$$\frac{\Omega_0 \tilde{\psi}}{\|\Omega_0 \tilde{\psi}\|} \approx \left\{ I - i\tau H_L - \frac{1}{2} \tau \gamma_0 \left(\sigma_+ \sigma_- - \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}} \right) \right\} \tilde{\psi}. \quad (6.123)$$

В результате, подставляя (6.120) и (6.123) в (6.111), мы находим вклад T_0 , связанный с отсутствием фотодетектирования,

$$\begin{aligned} T_0[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] &\approx \left\{ 1 - \tau \gamma_0 \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}} \right\} \times \\ &\times \delta \left[\left\{ I - i\tau H_L - \frac{1}{2} \tau \gamma_0 \left(\sigma_+ \sigma_- - \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}} \right) \right\} \tilde{\psi} - \psi \right]. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Если, наконец, мы сложим уравнения (6.124) и (6.121), то получим описание условной вероятности перехода $T[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0]$ на малых временах. Эта величина оказывается в точном соответствии с общей формой (6.90) для КДП в гильбертовом пространстве. В самом деле, из сравнения с (6.90) мы делаем вывод, что генератор детерминированных периодов эволюции есть

$$G(\psi) = \hat{H}\psi + \frac{i\gamma_0}{2} \|\sigma_- \psi\|^2 \psi, \quad (6.125)$$

с неэрмитовым гамильтонианом

$$\hat{H} = H_L - \frac{i\gamma_0}{2}\sigma_+\sigma_- . \quad (6.126)$$

Переходный функционал принимает вид

$$W[\psi|\tilde{\psi}] = \gamma_0 \|\sigma_-\tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{\sigma_-\tilde{\psi}}{\|\sigma_-\tilde{\psi}\|} - \psi \right] . \quad (6.127)$$

Следовательно, соответствующее основное уравнение Лиувилля (6.10) описывает КДП с единственным типом квантового скачка

$$\tilde{\psi} \rightarrow \psi = \frac{\sigma_-\tilde{\psi}}{\|\sigma_-\tilde{\psi}\|}, \quad (6.128)$$

который происходит с интенсивностью, то есть вероятностью в единицу времени, которая задается как $\gamma_0 \|\sigma_-\tilde{\psi}\|^2$. Эти скачки представляют обратное действие на изучаемую систему. Они обусловливаются детектированием фотона и переводят атом в основное состояние.

В результате, эквивалентное стохастическое дифференциальное уравнение (см. (6.25)) теперь записывается явно

$$d\psi(t) = -i \left(H_L - \frac{i\gamma_0}{2} [\sigma_+\sigma_- - \|\sigma_-\psi(t)\|^2] \right) \psi(t) dt + \\ + \left(\frac{\sigma_-\psi(t)}{\|\sigma_-\psi(t)\|} - \psi(t) \right) dN(t), \quad (6.129)$$

где, как обычно, $dN(t)^2 = dN(t)$ и $E[dN(t)] = \gamma_0 \|\sigma_-\psi(t)\|^2 dt$.

Следуя рассуждениям раздела 6.1.1, мы заключаем, что КДП, сконструированный выше, приводит к матрице ковариаций

$$\rho_S(t) = E(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|), \quad (6.130)$$

которая удовлетворяет уравнению Блоха (6.91) для матрицы плотности. В качестве примера на рис. 6.4 мы представили результаты для стохастической величины $\langle g|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|e\rangle$. Рисунок показывает среднее этой величины, взятое по выборкам из многих реализаций КДП. Среднее дает статистическую оценку для недиагонального элемента $\langle g|\rho_S(t)|e\rangle = \langle\sigma_+(t)\rangle$ матрицы плотности, что демонстрируется сравнением с решением уравнения Блоха.

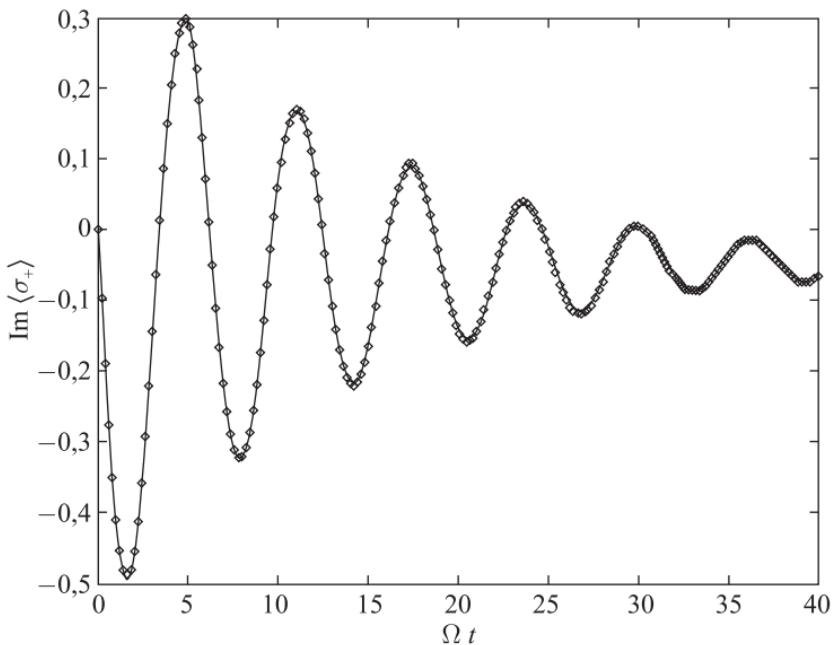


Рис. 6.4. Моделирование КДП для прямого фотодетектирования возбуждаемой двухуровневой системы, взаимодействующей с полем вакуума. Сплошная линия представляет мнимую часть элементов матрицы плотности $\langle g | \rho_S(t) | e \rangle = \langle \sigma_+(t) \rangle$, получены из аналитического решения основного квантового уравнения (см. (3.289)) для $\gamma_0/\Omega = 0,1$. Представлено среднее, взятое по ансамблю из 10^4 реализаций КДП.

В качестве следующего примера на рис. 6.5 мы показываем результаты численного моделирования стационарной четырехточечной корреляционной функции $\langle \sigma_+ \sigma_+(\tau) \sigma_-(\tau) \sigma_- \rangle$. Эта корреляция оценена из моделирования соответствующего стохастического процесса $\theta(t)$ в сдвоенном гильбертовом пространстве $\tilde{\mathcal{H}}$, как объяснено в разделе 6.1.4.

6.3.2. Решение в виде интеграла по траекториям

Основное уравнение Лиувилля для КДП прямого фотодетектирования может быть решено посредством метода интегралов по траекториям из раздела 6.1.2.

Сконцентрируемся на следующем случае слабого затухания, когда $\Omega > \gamma_0/2$, и рассмотрим специальное начальное условие $\psi(0) = |g\rangle$.

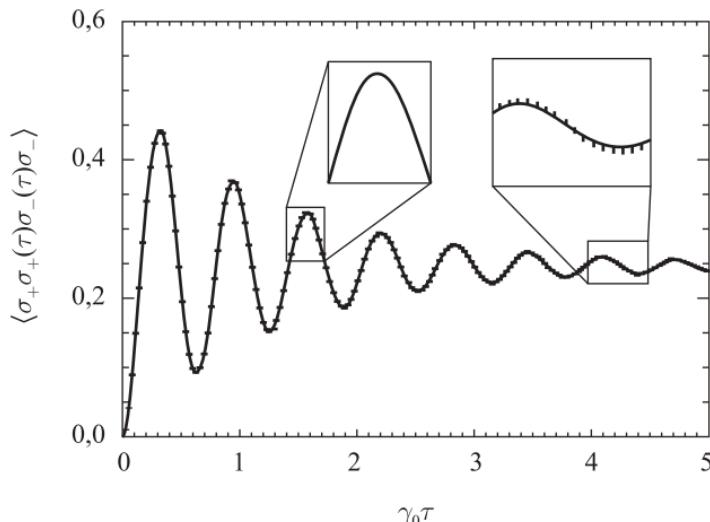


Рис. 6.5. Корреляционная функция $\langle \sigma_+ \sigma_+(\tau) \sigma_- (\tau) \sigma_- \rangle$ для возбуждаемой двухуровневой атомной системы при резонансе с частотой Раби $\Omega = 10\gamma_0$. Рисунок показывает результаты моделирования для выборки из 10^5 реализаций КДП в сдвоенном гильбертовом пространстве (тонкая линия с указанием уровня ошибок) и аналитическое решение (толстая линия).

Используя уравнение (6.126) в определении (6.37), мы находим

$$\widehat{U}(t) = e^{-\gamma_0 t/4} \begin{pmatrix} \cos \mu t - \frac{\gamma_0}{4\mu} \sin \mu t & i \frac{\Omega}{2\mu} \sin \mu t \\ i \frac{\Omega}{2\mu} \sin \mu t & \cos \mu t + \frac{\gamma_0}{4\mu} \sin \mu t \end{pmatrix}, \quad (6.131)$$

где мы ввели параметр μ , который определяется как

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma_0}{2} \right)^2}. \quad (6.132)$$

С помощью уравнений (6.21) и (6.131) легко находится функция распределения для времени ожидания

$$\begin{aligned} F[|g\rangle, t] &= 1 - \|\widehat{U}|g\rangle\|^2 = \\ &= 1 - e^{-\gamma_0 t/2} \left(1 + \frac{\gamma_0^2}{8\mu^2} \sin^2 \mu t + \frac{\gamma_0}{2\mu} \sin \mu t \cos \mu t \right). \end{aligned} \quad (6.133)$$

Соответствующая плотность $f(t)$ задается формулой

$$f(t) \equiv \frac{d}{dt} F[|g\rangle, t] = \gamma_0 \|\sigma_- \hat{U}(t)|g\rangle\|^2 = \frac{\gamma_0 \Omega^2}{4\mu^2} e^{-\gamma_0 t/2} \sin^2 \mu t. \quad (6.134)$$

Таковы выражения для распределения времени ожидания при прямом фотодетектировании резонансной флуоресценции (Carmichael et al., 1989). Отметим осцилляционное поведение плотности $f(t)$, как показано на рис. 6.6 и 6.7. Сравнение с соответствующим экспоненциальным распределением показывает, что вероятность малых времен ожидания сильно обрезана. Это, очевидно, обусловлено тем фактом, что мгновенно, после квантового скачка, атом оказывается в основном состоянии. Поэтому требуется некоторое время для повторного возбуждения с заметной вероятностью, чтобы быть в состоянии излучить другой фотон.

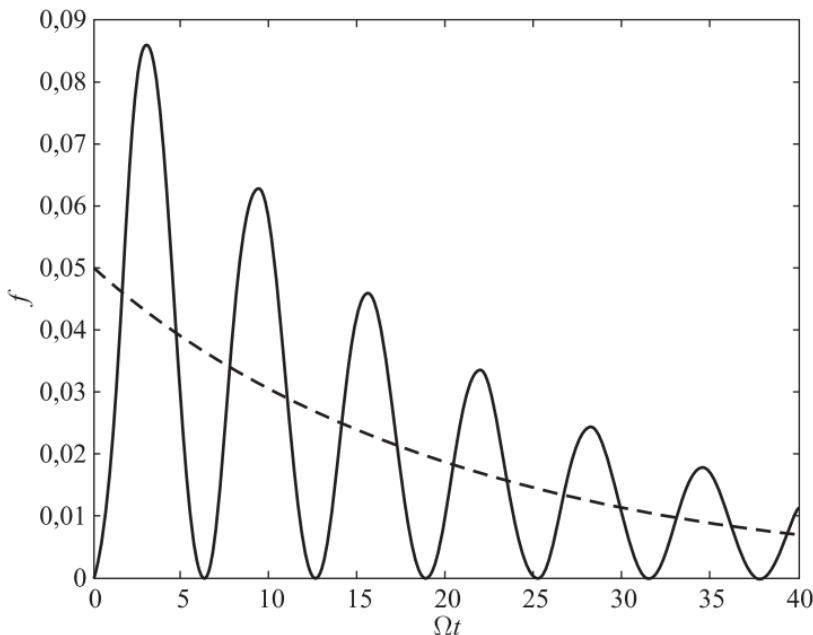


Рис. 6.6. Графики плотности $f(t)$ распределения времени ожидания, согласно уравнению (6.134) с $\gamma_0/\Omega = 0,1$ (сплошная кривая), и соответствующая плотность для экспоненциального времени ожидания с тем же средним значением (штриховая кривая).

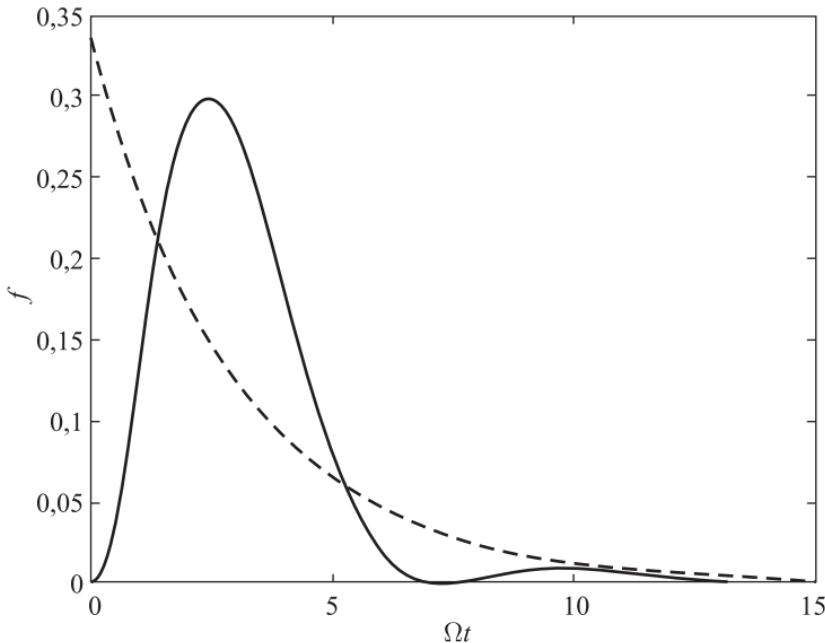


Рис. 6.7. То же самое, что и на рис. 6.6, но при $\gamma_0/\Omega = 1$.

Исследуем представление интеграла по траекториям (6.43) для N -скакового вклада в пропагатор. Во-первых, из (6.44) мы заключаем, что

$$\frac{\psi_N^t(t_1, \dots, t_N)}{\|\psi_N^t(t_1, \dots, t_N)\|} = \frac{\hat{U}(t - t_N)|g\rangle}{\|\hat{U}(t - t_N)|g\rangle\|}, \quad (6.135)$$

где отброшен несущественный фазовый множитель. Кроме того, уравнение (6.45) дает многовременные вероятности

$$p_N^t(t_1, t_2, \dots, t_N) = p_0(t - t_N)f(t_N - t_{N-1}) \dots f(t_2 - t_1)f(t_1), \quad (6.136)$$

где $f(t)$ задается уравнением (6.134) и

$$p_0(t) = 1 - F[|g\rangle, t] = \|\hat{U}(t)|g\rangle\|^2 \quad (6.137)$$

обозначает вероятность отсутствия скачка, то есть вероятность, что никаких отсчетов за временной интервал $[0, t]$ наблюдаваться не будет. Таким образом,

с помощью уравнения (6.43) мы находим следующую компактную форму для полного пропагатора:

$$\begin{aligned} T[\psi, t\|g], 0] &= p_0(t)\delta \left[\psi - \frac{\widehat{U}(t)|g\rangle}{\|\widehat{U}(t)|g\rangle\|} \right] + \\ &+ \sum_{N=1}^{\infty} \int_0^t dt_N \int_0^{t_N} dt_{N-1} \cdots \int_0^{t_2} p_N^t(t_1, \dots, t_N) \delta \left[\psi - \frac{\widehat{U}(t-t_N)|g\rangle}{\|\widehat{U}(t-t_N)|g\rangle\|} \right] dt_1. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Из этой формулы ясно, что полная статистика отсчетов событий может реконструироваться из отдельных вероятностей $p^t(t_1, t_2, \dots, t_N)$. В частности, вероятность N отсчетов на интервале $[0, t]$ может быть найдена из уравнения (6.46). Если мы введем преобразования Лапласа

$$\widehat{p}_N(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) p_N(t) dt \quad (6.139)$$

и

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) f(t) dt, \quad (6.140)$$

то уравнение (6.46) вместе с (6.136) даст

$$\widehat{p}_N(\lambda) = \frac{1 - \widehat{f}(\lambda)}{\lambda} \left[\widehat{f}(\lambda) \right]^N, \quad (6.141)$$

где мы использовали тот факт, что преобразование Лапласа от вероятности, связанной с отсутствием отсчетов (см. (6.137)), есть

$$\widehat{p}_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \widehat{f}(\lambda) \right). \quad (6.142)$$

Преобразование Лапласа матрицы f может быть найдено с помощью уравнения (6.134)

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{\frac{1}{2}\gamma_0\Omega^2}{\bar{\lambda}(\bar{\lambda}^2 + (2\mu)^2)}, \quad (6.143)$$

где мы ввели обозначение $\bar{\lambda} = \lambda + \gamma_0/2$. Таким образом, преобразование Лапласа вероятности $p_N(t)$ может быть записано как

$$\hat{p}_N(\lambda) = \frac{\left(\frac{1}{2}\gamma_0\Omega^2\right)^N \left[\bar{\lambda}^2 + \frac{1}{2}\gamma_0\bar{\lambda} + \Omega^2\right]}{\left[\bar{\lambda}(\bar{\lambda}^2 + (2\mu)^2)\right]^{N+1}}. \quad (6.144)$$

Это есть формула для фотоотсчетов при прямом фотодетектировании флуоресцентного излучения, полученная Моллоу (Mollow, 1968, 1969, 1975).

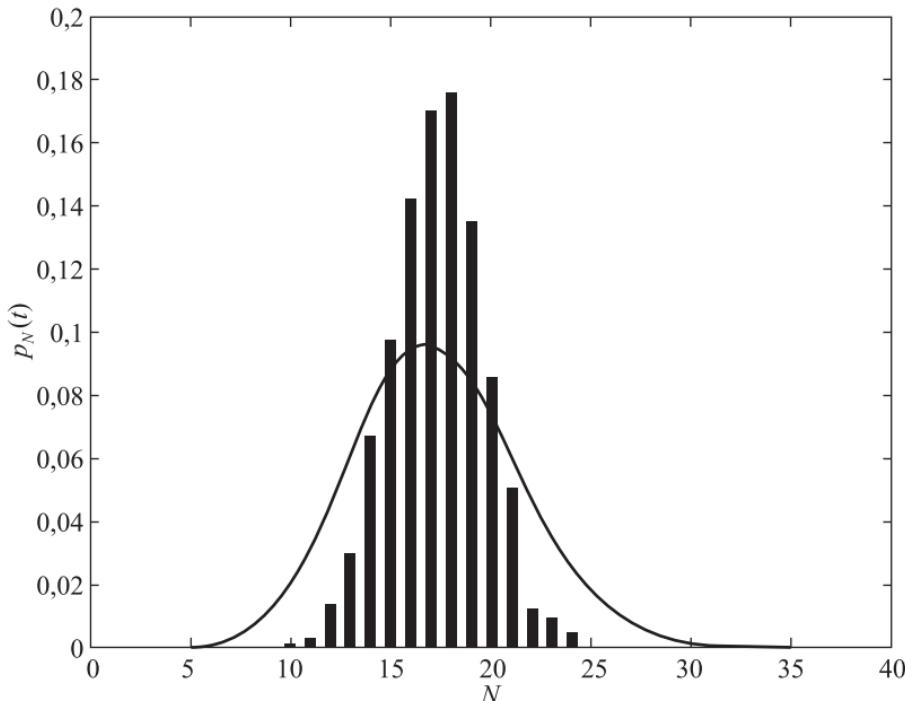


Рис. 6.8. Вероятность $p_N(t)$ для N фотонов, посчитанных за интервал времени $[0, t]$ для возбуждаемой двухуровневой системы. Рисунок показывает моделирование результатов, полученных из ансамбля 10^3 реализаций КДП при прямом фотодетектировании (гистограмма). Сплошная линия показывает распределение Пуассона с тем же средним значением, как и $p_N(t)$. Параметры: $\gamma_0/\Omega = 1$ и $\Omega t = 50$.

Рис. 6.8 показывает вероятность для фотоотсчетов $p_N(t)$ для фиксированного времени t как функцию N . Рисунок получен путем численного моделирования КДП подсчетом числа квантовых скачков в выборке реали-

заций процесса. Рисунок также показывает соответствующее распределение Пуассона с тем же математическим ожиданием. Ясно виден субпуассоновский характер распределения $p_N(t)$. Субпуассоновость может быть охарактеризована с помощью манделевского параметра Q , определяемого как

$$Q = \frac{\text{Var}(N(t))}{\langle N(t) \rangle} - 1. \quad (6.145)$$

Для пуассоновского распределения мы имеем $Q = 0$, в то время как $Q < 0$ характеризует субпуассоновское распределение. Для моделирования, показанного на рисунке, был найден манделевский Q параметр ($Q \approx -0,69$), что находится в хорошем согласии с аналитическим результатом (Mandel, Wolf, 1995).

Субпуассоновский характер может быть понят из распределения времени ожидания, показанного на рис. 6.7 для тех же параметров. Плотность $f(t)$ для КДП демонстрирует выпуклость, такую что дисперсия случайного времени ожидания меньше, чем для соответствующего экспоненциального распределения. В частности, события, связанные с излучением, демонстрируют сильный эффект антигруппировки. Распределение $p_N(t)$ фотонных импульсов поэтому более резкое, чем соответствующее распределение Пуассона, которое получается из экспоненциального распределения времени ожидания.

6.4. Гомодинное фотодетектирование

В качестве второго примера в этом разделе мы рассмотрим возбуждаемый двухуровневый атом, чей излучаемый свет детектируется синхронным фотодетектированием (Walls, Milburn, 1994; Wiseman, Milburn, 1993a, 1993b). Схематично вид установки показан на рис. 6.9.

6.4.1. Вывод КДП для гомодинного детектирования

Гамильтониан H_B окружения имеет вид

$$H_B = \sum_j \omega_j b_j^\dagger b_j + \sum_j \omega_j c_j^\dagger c_j. \quad (6.146)$$

Здесь b_j — есть излучательные моды, которые прямо связаны с атомом. Кроме того, мы добавили член, который содержит моды c_j локального осциллятора, чей свет интерферирует с излучением, испускаемым атомом. Мы

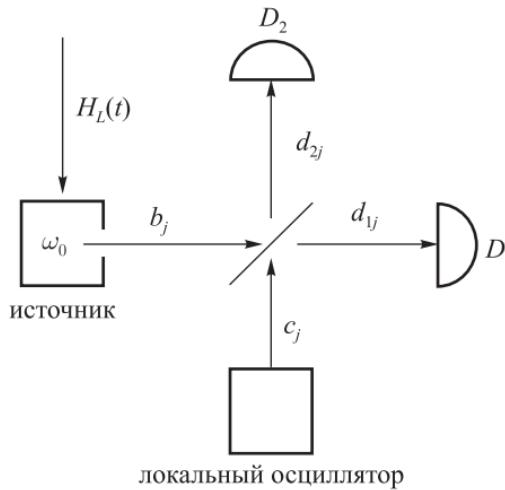


Рис. 6.9. Экспериментальная установка синхронного фотодетектирования. Источником является двухуровневый атом с частотой ω_0 , который возбуждается внешним взаимодействием $H_L(t)$. Свет, излучаемый источником (моды b_j), проходит свето-делитель и детектируется на детекторах D_1 и D_2 . Излучаемый свет интерферирует со светом из другого локального осциллятора (моды c_j). Детекторы регистрируют кванты мод $d_{1,j}$ и $d_{2,j}$, определенных в тексте.

принимаем во внимание наличие локального осциллятора с когерентным возбуждением c_j -мод. Представление взаимодействия для гамильтониана теперь принимает следующий вид:

$$H_I(t) = e^{-i\omega_0 t} \sigma_- B^\dagger(t) + e^{i\omega_0 t} \sigma_+ B(t) + \beta e^{-i\omega_0 t} C^\dagger(t) + \beta^* e^{i\omega_0 t} C(t) + H_L, \quad (6.147)$$

где H_L определено в (6.95), а $B(t)$ задан (6.94). Величина β представляет амплитуду локального осцилляторного поля, а

$$C(t) = \sum_j \kappa_j e^{-i\omega_j t} c_j. \quad (6.148)$$

Что касается прямого фотодетектирования, то электромагнитное поле служит здесь в качестве квантового зонда. Чистое состояние зонда — это поле вакуума $\phi_0 = |0\rangle$.

Ключевой точкой вывода стохастического процесса при гомодинном фотодетектировании является верный выбор базиса φ_α в редуцированной формуле. То, что измеряется детекторами D_1 и D_2 (см. рис. 6.9), есть суперпозиция света, испущенного атомом, и света от локального осциллятора.

Согласно допущению, что пучковый делитель имеет удельный коэффициент пропускания $\frac{1}{2}$ и фазовый сдвиг $\pi/2$, кванты поля, которые детектируются на D_1 и D_2 , определяются, соответственно, операторами уничтожения

$$d_{1,j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_j + i c_j), \quad (6.149)$$

$$d_{2,j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_j - i c_j). \quad (6.150)$$

Отметим, что эти операторы удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям для бозонов

$$[d_{k,j}, d_{k',j'}^\dagger] = \delta_{kk'}\delta_{jj'}, \quad (6.151)$$

где индекс $k = 1, 2$ означает два детектора D_1 и D_2 . Таким образом, $d_{k,j}^\dagger$ может быть интерпретирован как оператор рождения фотона в моде j на детекторе D_k . Соответственно, мы берем за базис φ_α фоковский базис, который сгенерирован операторами $d_{k,j}^\dagger$ из вакуумного поля, то есть пишем

$$\varphi_\alpha = |\{N_j^{(1)}\}; \{N_j^{(2)}\}\rangle. \quad (6.152)$$

Индекс α теперь представляет два набора чисел заполнения, то есть $\{N_j^{(k)}\}$ есть набор чисел заполнения $d_{k,j}$ -мод, где $k = 1, 2$. В частности, два типа однофотонных состояний задаются формулами

$$\varphi_{k,j} \equiv |k, j\rangle = d_{k,j}^\dagger |0\rangle, \quad k = 1, 2. \quad (6.153)$$

Далее можно продолжить рассуждения почти по аналогии с разделом 6.3. Первый шаг есть определение операторов Ω_α , который приводит к операции, соответствующей измерительной схеме. Эти операторы задаются уравнением (6.86), где для состояний φ_α должно быть использовано выражение (6.152). Мы будем использовать снова определения (6.102) и (6.103) для операторов f_α и g_α . Затем мы находим, что для вакуумного состояния $f_0 = -i\tau H_L$. Для однофотонного состояния $\varphi_\alpha = |k, j\rangle$, однако, мы имеем

$$f_{k,j} = -i \int_{t_0}^t e^{-i\omega_0 t'} \left\{ \langle k, j | B^\dagger(t') | 0 \rangle \sigma_- + \langle k, j | C^\dagger(t') | 0 \rangle \beta \right\} dt'. \quad (6.154)$$

Матричные элементы в уравнении, представленном выше, легко считаются

$$\langle k, j | B^\dagger(t') | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_j^* e^{i\omega_j t'}, \quad (6.155)$$

и

$$\langle k, j | C^\dagger(t') | 0 \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_j^* e^{i\omega_j t'}, \quad (6.156)$$

где мы используем соглашение, что верхний знак соответствует $k = 1$, а нижний знак $-k = 2$. Тогда получаем

$$f_{k,j} = \tilde{f}_j(\sigma_- \pm i\beta), \quad (6.157)$$

где

$$\tilde{f}_j \equiv \frac{-i}{\sqrt{2}} \kappa_j^* \int_{t_0}^t e^{i(\omega_j - \omega_0)t'} dt'. \quad (6.158)$$

При использовании этих результатов мы можем разложить условную вероятность перехода на три части, как показано ниже:

$$T[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] = T_0[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] + T_1[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] + T_2[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0], \quad (6.159)$$

где

$$T_0[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] = \|\Omega_0 \tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{\Omega_0 \tilde{\psi}}{\|\Omega_0 \tilde{\psi}\|} - \psi \right], \quad (6.160)$$

$$T_1[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] = \left(\sum_j \|\Omega_{1,j} \tilde{\psi}\|^2 \right) \delta \left[\frac{(\sigma_- + i\beta) \tilde{\psi}}{\|(\sigma_- + i\beta) \tilde{\psi}\|} - \psi \right], \quad (6.161)$$

$$T_2[\psi, t|\tilde{\psi}, t_0] = \left(\sum_j \|\Omega_{2,j} \tilde{\psi}\|^2 \right) \delta \left[\frac{(\sigma_- - i\beta) \tilde{\psi}}{\|(\sigma_- - i\beta) \tilde{\psi}\|} - \psi \right]. \quad (6.162)$$

Множители перед δ -функциями задаются формулами

$$\|\Omega_0 \tilde{\psi}\|^2 = 1 - \sum_{k,j} \|\Omega_{k,j} \tilde{\psi}\|^2, \quad (6.163)$$

$$\sum_j \|\Omega_{1,j} \tilde{\psi}\|^2 = \sum_j \langle f_{1,j}^\dagger f_{1,j} \rangle_{\tilde{\psi}} = \sum_j |\tilde{f}_j|^2 \langle (\sigma_- + i\beta)^\dagger (\sigma_- + i\beta) \rangle_{\tilde{\psi}}, \quad (6.164)$$

$$\sum_j \|\Omega_{2,j} \tilde{\psi}\|^2 = \sum_j \langle f_{2,j}^\dagger f_{2,j} \rangle_{\tilde{\psi}} = \sum_j |\tilde{f}_j|^2 \langle (\sigma_- - i\beta)^\dagger (\sigma_- - i\beta) \rangle_{\tilde{\psi}}. \quad (6.165)$$

Представленное выше разложение T на три члена выражает три классически непересекающихся альтернативы. Либо детектируется отсутствие фотона (вклад T_0), либо фотон детектируется на D_1 (вклад T_1), либо фотон детектируется на D_2 (вклад T_2).

В марковском приближении мы тем же способом, что и в предыдущем разделе, находим, что

$$\sum_j |\tilde{f}_j|^2 \approx \frac{1}{2} \tau \gamma_0 \quad (6.166)$$

и поэтому

$$\sum_j \|\Omega_{k,j} \tilde{\psi}\|^2 \approx \frac{1}{2} \tau \gamma_0 \langle (\sigma_- \pm i\beta)^\dagger (\sigma_- \pm i\beta) \rangle_{\tilde{\psi}}, \quad (6.167)$$

$$\|\Omega_0 \tilde{\psi}\|^2 \approx 1 - \tau \gamma_0 \left\{ \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}} + |\beta|^2 \right\}. \quad (6.168)$$

Кроме того, мы имеем

$$g_0 \approx -\frac{1}{2} \tau \gamma_0 \left\{ \sigma_+ \sigma_- + |\beta|^2 \right\}. \quad (6.169)$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\Omega_0 \tilde{\psi}}{\|\Omega_0 \tilde{\psi}\|} \approx \left\{ I - i\tau H_L - \frac{1}{2} \tau \gamma_0 \left(\sigma_+ \sigma_- - \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}} \right) \right\} \tilde{\psi}. \quad (6.170)$$

Отметим, что члены, включающие $|\beta|^2$, гасят друг друга и что мы поэтому находим то же выражение (6.123), как в предыдущем разделе. Подводя итоги, получаем

$$T_0[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] = \left\{ 1 - \tau \gamma_0 \left[\|\sigma_- \tilde{\psi}\|^2 + |\beta|^2 \right] \right\} \times \quad (6.171)$$

$$\times \delta \left[\left\{ I - i\tau H_L - \frac{1}{2} \tau \gamma_0 \left(\sigma_+ \sigma_- - \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{\tilde{\psi}} \right) \right\} \tilde{\psi} - \psi \right],$$

$$T_1[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] = \frac{1}{2} \tau \gamma_0 \|(\sigma_- + i\beta) \tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{(\sigma_- + i\beta) \tilde{\psi}}{\|(\sigma_- + i\beta) \tilde{\psi}\|} - \psi \right], \quad (6.172)$$

$$T_2[\psi, t | \tilde{\psi}, t_0] = \frac{1}{2} \tau \gamma_0 \|(\sigma_- - i\beta) \tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{(\sigma_- - i\beta) \tilde{\psi}}{\|(\sigma_- - i\beta) \tilde{\psi}\|} - \psi \right]. \quad (6.173)$$

Мы складываем эти три вклада, чтобы получить описание пропагатора на малых временах и сравниваем с общей формулой (6.90). Сравнение показывает, что генератор $G(\psi)$ для детерминированных эволюционных периодов КДП оказывается той же формы, как и в уравнении (6.125). Однако функционал перехода теперь задается формулой

$$W[\psi|\tilde{\psi}] = \frac{1}{2}\gamma_0\|(\sigma_- + i\beta)\tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{(\sigma_- + i\beta)\tilde{\psi}}{\|(\sigma_- + i\beta)\tilde{\psi}\|} - \psi \right] + \\ + \frac{1}{2}\gamma_0\|(\sigma_- - i\beta)\tilde{\psi}\|^2 \delta \left[\frac{(\sigma_- - i\beta)\tilde{\psi}}{\|(\sigma_- - i\beta)\tilde{\psi}\|} - \psi \right]. \quad (6.174)$$

Таким образом, основное уравнение Лиувилля описывает кусочно-детерминированный процесс с двумя типами квантовых скачков, соответствующих детектированию фотонов на D_1 и D_2

$$\tilde{\psi} \rightarrow \psi = \frac{(\sigma_- \pm i\beta)\tilde{\psi}}{\|(\sigma_- \pm i\beta)\tilde{\psi}\|}, \quad \text{интенсивность} = \frac{1}{2}\gamma_0\|(\sigma_- \pm i\beta)\tilde{\psi}\|^2. \quad (6.175)$$

Детерминированные части КДП получаются из того же дифференциального уравнения, что и для прямого фотодетектирования.

Эквивалентное стохастическое детерминированное уравнение для КДП описания гомодинного детектирования принимает вид

$$d\psi(t) = -i \left(\hat{H} + \frac{i\gamma_0}{2} \|\sigma_- \psi(t)\|^2 \right) \psi(t) dt + \\ + \left(\frac{(\sigma_- + i\beta)\psi(t)}{\|(\sigma_- + i\beta)\psi(t)\|} - \psi(t) \right) dN_1(t) + \left(\frac{(\sigma_- - i\beta)\psi(t)}{\|(\sigma_- - i\beta)\psi(t)\|} - \psi(t) \right) dN_2(t). \quad (6.176)$$

Процессы $N_k(t)$ считают события на детекторе D_k и удовлетворяют соотношениям

$$dN_k(t)dN_{k'}(t) = \delta_{kk'} dN_k(t) \quad (6.177)$$

и

$$E[dN_1(t)] = \frac{\gamma_0}{2} \|(\sigma_- + i\beta)\psi(t)\|^2 dt, \quad E[dN_2(t)] = \frac{\gamma_0}{2} \|(\sigma_- - i\beta)\psi(t)\|^2 dt. \quad (6.178)$$

6.4.2. Стохастическое уравнение Шредингера

КДП для гомодинного фотодетектирования дает в диффузионном пределе определенное стохастическое уравнение Шредингера. Чтобы вывести его, мы положим

$$\beta = i|\beta|e^{i\theta} \quad (6.179)$$

и исследуем предел $\varepsilon \equiv 1/|\beta| \rightarrow 0$ сильно возбужденного локально осциллятора. Это легко может быть сделано, если воспользоваться результатами раздела 6.1.3 по диффузионному пределу основного уравнения Лиувилля. Во-первых, мы видим, что вместо $\sigma_- \pm i\beta$ мы можем использовать два скачкообразных оператора

$$I \pm \varepsilon C \equiv I \pm \varepsilon e^{-i\theta} \sigma_-, \quad (6.180)$$

если мы масштабируем константу затухания множителем $|\beta|^2$, то есть если мы заменим $\gamma_0 \rightarrow \gamma_0 |\beta|^2$. Тогда мы имеем ситуацию, которая подобна обсуждаемой в разделе 6.1.3, где мы теперь имеем два скачковых оператора. Так как $C \equiv \exp(-i\theta)\sigma_-$ появляется с положительным и отрицательным знаками, линейная часть (в первом порядке ε) для генератора дрейфа (6.54) уравнения Фоккера–Планка выпадает и хорошо определенный диффузионный предел получается без ограничения на C .

Результирующее стохастическое уравнение Шредингера для гомодинирования, впервые выведенное Вайсманом и Милбурном (Wiseman, Milburn, 1993a, 1993b) и Кармихелом (Carmichael, 1993), может быть записано как

$$d\psi(t) = -iK(\psi(t))dt + \sqrt{\gamma_0}M(\psi(t))dW(t), \quad (6.181)$$

где $dW(t)$ есть действительный винеровский инкремент. Оператор дрейфа $K(\psi)$ есть

$$K(\psi) = H_L\psi + \frac{i\gamma_0}{2} \left\{ \langle C + C^\dagger \rangle_\psi C - C^\dagger C - \frac{1}{4} \langle C + C^\dagger \rangle_\psi^2 \right\} \psi, \quad (6.182)$$

в то время как шумовой член задается как

$$M(\psi) = \left\{ C - \frac{1}{2} \langle C + C^\dagger \rangle_\psi \right\} \psi. \quad (6.183)$$

По своему построению стохастическое уравнение Шредингера (6.181) строго сохраняет норму волновой функции. Это приводит к стохастическому дифференциальному уравнению для случайного вектора Блоха

$$\vec{v}(t) = \langle \psi(t) | \vec{\sigma} | \psi(t) \rangle, \quad (6.184)$$

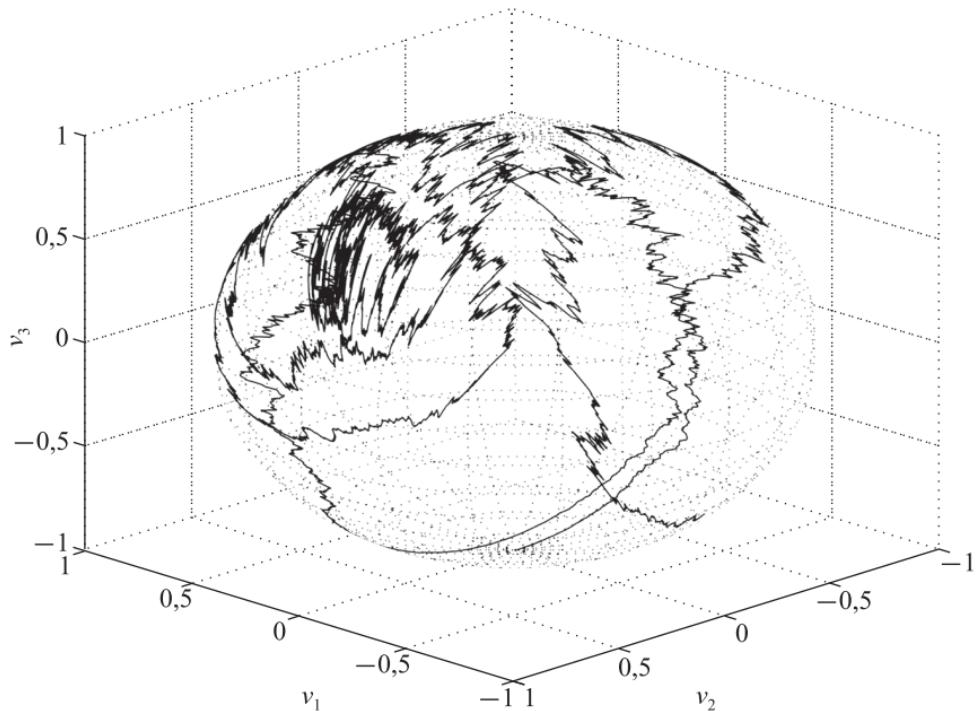


Рис. 6.10. Диффузия на поверхности сферы Блоха. Изображение показывает отдельную реализацию случайного вектора Блоха $\vec{v}(t) = \langle \psi(t) | \vec{\sigma} | \psi(t) \rangle$ для процесса $\psi(t)$, задаваемого стохастическим уравнением Шредингера (6.181). Параметры: $\gamma_0/\Omega = 0,1$ и $\theta = 0$.

описывающему диффузионный процесс на поверхности блоховской сферы. Отдельная реализация этого процесса изображена на рис. 6.10. Мы видим, что шум вызывается гомодинной измерительной схемой, вытесняющей блоховский вектор из плоскости, определенной условием $v_1 = 0$. Математическое ожидание $\vec{v}(t)$, удовлетворяющее уравнению Блоха, однако остается в этой плоскости, как проиллюстрировано на рис. 6.11, который показывает эволюцию ансамбля представителей.

6.5. Гетеродинное фотодетектирование

Измерительная схема для гетеродинного фотодетектирования та же, что и для гомодинного детектирования, различие лишь в том, что частота

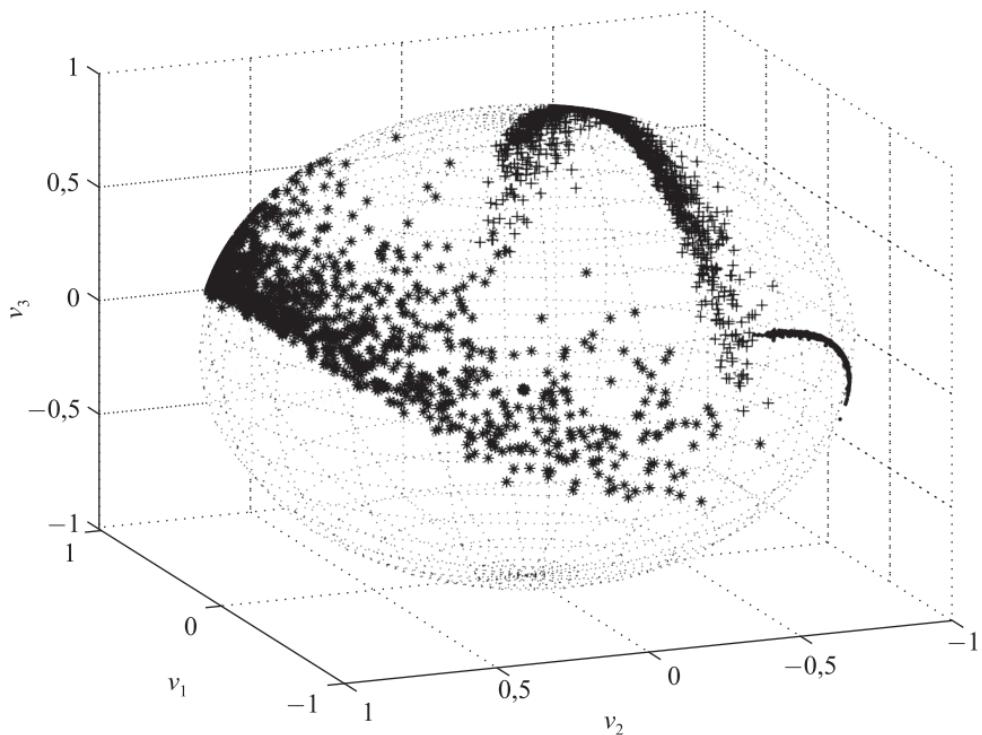


Рис. 6.11. 10^3 реализаций случайных векторов Блоха $\vec{v}(t) = \langle \psi(t) | \vec{\sigma} | \psi(t) \rangle$, построенные при трех фиксированных временах, задаваемых $\Omega t = 1,5$ (точки), $\Omega t = 3,0$ (крестики) и $\Omega t = 4,5$ (звездочки). Все траектории выходят из южного полюса сферы. Параметры: $\gamma_0/\Omega = 0,1$ и $\theta = 0$.

локального осциллятора расстроена по отношению к частоте системы ω_0 . В представлении предыдущего раздела это означает, что мы должны заменить амплитуду локального осциллятора β на

$$\beta_t = \beta \exp(-i\Omega t), \quad (6.185)$$

где Ω — некоторая расстройка локального осциллятора (не путать с Раби-частотой).

6.5.1. Стохастическое уравнение Шредингера

Мы выполним замену прямо в стохастическом уравнении Шредингера (6.181) для гомодинного детектирования, что в результате дает оператор

дрейфа

$$K(\psi) = H_L \psi - i \frac{\gamma_0}{2} \left\{ \sigma_- \sigma_+ - \langle e^{-2i(\theta-\Omega t)} \sigma_- + \sigma_+ \rangle_\psi \sigma_- + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [\langle \sigma_- \rangle_\psi^2 e^{-2i(\theta-\Omega t)} + \langle \sigma_+ \rangle_\psi^2 e^{2i(\theta-\Omega t)} + 2 \langle \sigma_- \rangle_\psi \langle \sigma_+ \rangle_\psi] \right\} \psi, \quad (6.186)$$

в то время как шумовой член становится равным

$$M(\psi) = \left\{ e^{-i(\theta-\Omega t)} \sigma_- - \frac{1}{2} \langle e^{-i(\theta-\Omega t)} \sigma_- + e^{i(\theta-\Omega t)} \sigma_+ \rangle_\psi \right\} \psi. \quad (6.187)$$

Следуя Вайсману и Милбурну, мы полагаем, что расстройка намного больше, чем характерная интенсивность затухания системы, которая оказывается того же порядка, что и сила взаимодействия с полем возбуждения, то есть мы полагаем

$$\Omega \gg \gamma_0 \sim H_L. \quad (6.188)$$

Тогда мы можем рассмотреть интервал времени Δt такой, что $\Omega \Delta t \gg 1$, но $\gamma_0 \Delta t \ll 1$. Теперь мы проинтегрируем уравнение (6.181) с (6.186) и (6.187) по интервалу Δt и пренебрежем членами второго порядка в $\gamma_0 \Delta t$. Мы рассматриваем дрейфовый и диффузионный члены отдельно. Интегрирование дрейфового члена приводит к

$$\int_t^{t+\Delta t} K(\psi) ds = \\ = H_L \psi \Delta t - i \frac{\gamma_0}{2} \left\{ \sigma_+ \sigma_- \Delta t - \int_t^{t+\Delta t} \langle e^{-2i(\theta-\Omega s)} \sigma_- \rangle_\psi \sigma_- ds - \int_t^{t+\Delta t} \langle \sigma_+ \rangle_\psi \sigma_- ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \int_t^{t+\Delta t} [\langle \sigma_- \rangle_\psi^2 e^{-2i(\theta-\Omega s)} + \langle \sigma_+ \rangle_\psi^2 e^{2i(\theta-\Omega s)}] ds + \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \langle \sigma_- \rangle_\psi \langle \sigma_+ \rangle_\psi ds \right\} \psi. \quad (6.189)$$

Так как первый и третий временные интегралы в этом выражении порядка γ_0/Ω , они могут быть опущены в силу предположения $\Omega \gg \gamma_0$. Таким образом, мы остаемся с

$$\int_t^{t+\Delta t} K(\psi) ds = \left[H_L \psi - i \frac{\gamma_0}{2} \left(\sigma_+ \sigma_- - \langle \sigma_+ \rangle_\psi \sigma_- + \frac{1}{2} \langle \sigma_- \rangle_\psi \langle \sigma_+ \rangle_\psi \right) \psi \right] \Delta t. \quad (6.190)$$

Соответственно, интегрирование шумового члена приводит к выражению

$$\int_t^{t+\Delta t} M(\psi) dW(s) = \int_t^{t+\Delta t} e^{-i(\theta-\Omega s)} \sigma_- \psi dW(s) - \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \langle e^{-i(\theta-\Omega s)} \sigma_- + e^{i(\theta-\Omega s)} \sigma_+ \rangle_\psi \psi dW(s). \quad (6.191)$$

Вводя две квадратуры

$$X_\theta \equiv \frac{1}{2}(e^{-i\theta} \sigma_- + e^{i\theta} \sigma_+), \quad (6.192)$$

$$Y_\theta \equiv \frac{i}{2}(e^{i\theta} \sigma_+ - e^{-i\theta} \sigma_-), \quad (6.193)$$

мы можем записать

$$\int_t^{t+\Delta t} M(\psi) dW(s) = \int_t^{t+\Delta t} \cos(\Omega s) \{e^{-i\theta} \sigma_- - \langle X_\theta \rangle_\psi\} \psi dW(s) - \int_t^{t+\Delta t} \sin(\Omega s) \{-ie^{-i\theta} \sigma_- - \langle Y_\theta \rangle_\psi\} \psi dW(s). \quad (6.194)$$

Интегралы, появившиеся в уравнении выше, предполагают, что мы определяем две гауссовых переменных

$$\delta W_x(t) \equiv \sqrt{2} \int_t^{t+\Delta t} \cos(\Omega s) dW(s), \quad (6.195)$$

$$\delta W_y(t) \equiv -\sqrt{2} \int_t^{t+\Delta t} \sin(\Omega s) dW(s). \quad (6.196)$$

Легко показать, что в нулевом порядке по Ω^{-1} , δW_x и δW_y имеют нулевое среднее значение и удовлетворяют условию (Wiseman, 1994)

$$E[\delta W_q(t)\delta W_{q'}(t')] = \delta_{q,q'}(\Delta t - |t - t'|)\theta(\Delta t - |t - t'|), \quad (6.197)$$

где q и q' введены для x и y , а θ обозначает ступенчатую функцию Хевисайда. Когда берется непрерывный предел $\gamma_0/\Omega \rightarrow 0$, величина Δt становится бесконечно малой на временном масштабе системы, то есть $\Delta t \rightarrow dt$, таким образом, $\delta W_q(t)$ может рассматриваться как инфинитезимальное винеровское приращение $dW_q(t)$, удовлетворяющее условию

$$dW_q(t)dW_{q'}(t') = \delta_{q,q'}dt. \quad (6.198)$$

Таким образом, для усредненного шумового вклада (6.194) мы можем сделать замену

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} M(\psi)dW(s) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{-i\theta} \sigma_- - \langle X_\theta \rangle_\psi \right\} \psi dW_x(t) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -ie^{-i\theta} \sigma_- - \langle Y_\theta \rangle_\psi \right\} \psi dW_y(t). \end{aligned} \quad (6.199)$$

Суммируя полученные результаты, можно записать уравнение Шредингера для гетеродинного детектирования как

$$\begin{aligned} d\psi(t) = &-iH_L\psi dt - \frac{\gamma_0}{2} \left(\sigma_+ \sigma_- - \langle \sigma_+ \rangle_\psi \sigma_- + \frac{1}{2} \langle \sigma_- \rangle_\psi \langle \sigma_+ \rangle_\psi \right) \psi dt + \\ &+ \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} (e^{-i\theta} \sigma_- - \langle X_\theta \rangle_\psi) \psi dW_x(t) - \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} (ie^{-i\theta} \sigma_- + \langle Y_\theta \rangle_\psi) \psi dW_y(t). \end{aligned} \quad (6.200)$$

Легко проверить, что это уравнение сохраняет нормировку. Непосредственно проверяется, что оно эквивалентно следующему стохастическому уравнению для ненормированной волновой функции $\tilde{\psi}$

$$d\tilde{\psi} = \left\{ -iH_L - \frac{\gamma_0}{2} \sigma_+ \sigma_- + \gamma_0 \langle \sigma_+ \rangle_\psi \sigma_- \right\} \psi dt + \sqrt{\gamma_0} \sigma_- \psi dW(t), \quad (6.201)$$

где $d\tilde{\psi}$ — приращение ненормированной волновой функции, а $dW(t)$ — дифференциал комплексного винеровского процесса

$$dW(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (dW_x(t) - idW_y(t)). \quad (6.202)$$

Отметим, что правая сторона уравнения (6.201) включает нормированную волновую функцию $\psi(t)$.

Примеры, рассмотренные в настоящем и предыдущих разделах, четко иллюстрируют общую концепцию для стохастического представления непрерывных измерений. Как уже обсуждалось, стохастический вектор состояний описывает динамику ансамбля типа \mathcal{E}_P для наблюдаемой системы, а именно атомного источника. Выходное поле света наблюдается различными схемами детектирования, которые, соответственно, дают различные стохастические процессы для атомной волновой функции. Информация от квантового объекта извлекается различными путями мониторинга окружения и, таким образом, обратное действие на объект также оказывается различным. С другой стороны, эволюция, соответствующая ансамблю типа \mathcal{E}_P , во всех случаях, рассмотренных выше, задается одним и тем же уравнением для матрицы плотности, то есть основным вакуумным оптическим уравнением (6.91). Это отражает тот факт, что во всех случаях мы имеем одинаковое локальное связывание между атомом и излучаемым полем.

6.5.2. Стохастические модели коллапса

Важно отметить здесь, что стохастические уравнения Шредингера типа уравнений (6.181) и (6.200) были предложены в совершенно другом физическом контексте Пирлем (Pearle, 1976, 1989), Джирарди, Римини и Вебером (Ghirardi, Rimini, Weber, 1986), Джирарди, Пирлем и Римини (Ghirardi, Pearle, Rimini, 1990), Жизином (Gisin, 1984, 1989) и Жизином и Персивалем (Gisin, Percival, 1992, 1993). Эти авторы предложили модификацию уравнения Шредингера на фундаментальном уровне, путем добавления нелинейных стохастических членов. Были предложены различные модели, такие как непрерывная модель спонтанной локализации (см. (6.181)) и диффузионная модель квантовых состояний. Целью было объяснение нереальности суперпозиции определенных макроскопически различных состояний. Случайные члены в уравнении Шредингера приводят к динамическому разрушению таких суперпозиций, так что макроскопические объекты практически всегда находятся в определенных локализованных состояниях. В этих теориях разрушение суперпозиций является реальным процессом, идущим в физических пространстве и времени. Это не есть декогерентизация, вызванная окружением в результате взятия следа по степеням свободы внешнего мира, который оказывается открытой квантовой системой. Таким образом, фундаментальные изменения квантовой механики, основанные на случайных уравнениях шредингеровского типа, дают динамические коллапсирующие модели. В этих моделях стохастический вектор состояний описывает отдельную квантовую систему и дает возможность некоторого рода макрореалистической интерпретации.

Стохастические разрушающие теории такого рода не являются интерпретациями, которым мы следуем в настоящем изложении. Как обсуждалось в главе 5, стохастические уравнения Шредингера, выведенные выше, допускают ясную интерпретацию в рамках эволюции \mathcal{E}_P -ансамбля. Все-таки, может быть поучительно показать, что стохастическое уравнение шредингеровского типа, предложенное в диффузионной модели квантового состояния, которое было развито Жизином и Персивалем (Percival, 1998), может быть выведено из уравнения (6.200) соответствующим фазовым преобразованием.

Мы начнем с того, что уравнение (6.200) может быть переписано с помощью комплексного винеровского дифференциала как

$$\begin{aligned} d\psi(t) = & -iH_L\psi dt - \frac{\gamma_0}{2} \left(C^\dagger C - \langle C^\dagger \rangle_\psi C + \frac{1}{2} \langle C \rangle_\psi \langle C^\dagger \rangle_\psi \right) \psi dt + \\ & + \sqrt{\gamma_0} (C - \langle C \rangle_\psi) \psi dW(t) + \\ & + \frac{\sqrt{\gamma_0}}{2} (\langle C \rangle_\psi dW(t) - \langle C^\dagger \rangle_\psi dW^*(t)) \psi, \end{aligned} \quad (6.203)$$

где мы снова используем $C \equiv \exp(-i\theta)\sigma_-$. Первый шумовой член в этом выражении уже имеет нужный вид шумового члена стохастического уравнения Шредингера, предложенного в рамках модели диффузии квантового состояния (см. ниже). Поэтому мы будем теперь пытаться исключить второй шумовой член с помощью соответствующего фазового преобразования. С этой целью мы попробуем применить следующий анзап:

$$\tilde{\psi}(t) = \exp[i\varphi(t)]\psi(t) \quad (6.204)$$

со стохастической фазой

$$\varphi(t) = \frac{i}{2}\sqrt{\gamma_0} \int_0^t [\langle C \rangle_{\psi(t')} dW(t') - \langle C^\dagger \rangle_{\psi(t')} dW^*(t')] . \quad (6.205)$$

Так как фаза является действительным случайным числом, то фазовое преобразование сохраняет норму волновой функции и оставляет неизменным выражение для матрицы плотности. Теперь мы определим стохастическое уравнение Шредингера, управляющее динамикой $\hat{\psi}$, используя правило Ито-вычислений.

Следуя нашим предыдущим обсуждениям, дифференциал фазы есть

$$d\varphi(t) = \frac{i}{2}\sqrt{\gamma_0} \left(\langle C \rangle_{\psi(t)} dW(t) - \langle C^\dagger \rangle_{\psi(t)} dW^*(t) \right) . \quad (6.206)$$

Соответственно, дифференциал преобразованной волновой функции $\hat{\psi}$ задается выражением

$$\begin{aligned} d\hat{\psi}(t) &= \exp[i\varphi(t+dt)]\psi(t+dt) - \exp[i\varphi(t)]\psi(t) = \\ &= \exp[i(\varphi(t) + d\varphi(t))](\psi(t) + d\psi(t)) - \exp[i\varphi(t)]\psi(t) = \\ &= \exp[i\varphi(t)]\{\exp[id\varphi(t)](\psi(t) + d\psi(t)) - \psi(t)\} \end{aligned} \quad (6.207)$$

и тогда

$$d\hat{\psi}(t) = \exp[i\varphi(t)]\{(\exp[id\varphi(t)] - 1)\psi(t) + \exp[id\varphi(t)]d\psi(t)\}. \quad (6.208)$$

Так как дифференциал $d\varphi$ порядка \sqrt{dt} , мы должны разложить $(\exp[id\varphi] - 1)$ до второго порядка. Напротив, так как $d\psi$ уже содержит члены порядка \sqrt{dt} , то для разложения экспоненциальной функции $\exp[id\varphi]d\psi$ достаточно членов первого порядка. Тогда уравнение (6.208) приобретает вид

$$d\hat{\psi} = \left(id\varphi - \frac{1}{2}(d\varphi)^2\right)\hat{\psi} + \exp[i\varphi](1 + id\varphi)d\psi. \quad (6.209)$$

При подстановке уравнения (6.203) в представленное выше уравнение мы получаем

$$\begin{aligned} d\hat{\psi} &= \left(id\varphi - \frac{1}{2}(d\varphi)^2\right)\hat{\psi} - iH_L\hat{\psi} dt - \\ &- \frac{\gamma_0}{2}\left(C^\dagger C - \langle C^\dagger \rangle_{\hat{\psi}}C + \frac{1}{2}\langle C \rangle_{\hat{\psi}}\langle C^\dagger \rangle_{\hat{\psi}}\right)\hat{\psi} dt + \sqrt{\gamma_0}(C - \langle C \rangle_{\hat{\psi}})\hat{\psi} dW(t) + \\ &+ \frac{\sqrt{\gamma_0}}{2}(\langle C \rangle_{\hat{\psi}} dW - \langle C^\dagger \rangle_{\hat{\psi}} dW^*)\hat{\psi} + e^{i\varphi}i d\varphi d\psi. \end{aligned} \quad (6.210)$$

Члены, появившиеся в уравнении, легко вычисляются. Как следует из (6.206),

$$id\varphi\hat{\psi} = -\frac{\sqrt{\gamma_0}}{2}\left(\langle C \rangle_{\hat{\psi}} dW - \langle C^\dagger \rangle_{\hat{\psi}} dW^*\right)\hat{\psi}, \quad (6.211)$$

и, как видно, этот член компенсирует второй и третий шумовые члены в уравнении (6.210). Уравнение (6.206) приводит к

$$-\frac{1}{2}(d\varphi)^2\hat{\psi} = -\frac{\gamma_0}{4}\langle C^\dagger \rangle_{\hat{\psi}}\langle C \rangle_{\hat{\psi}}\hat{\psi} dt \quad (6.212)$$

благодаря свойствам комплексного винеровского приращения. Кроме того, мы находим

$$\exp[i\varphi]i d\varphi d\psi = \frac{\gamma_0}{2}\langle C^\dagger \rangle_{\hat{\psi}}C\hat{\psi} dt. \quad (6.213)$$

Подставляя уравнения (6.211), (6.212) и (6.213) в уравнение (6.210), мы в итоге получим уравнение

$$d\hat{\psi} = -iH_L\hat{\psi} dt + \gamma_0 \left(\langle C^\dagger \rangle_{\hat{\psi}} C - \frac{1}{2} C^\dagger C - \frac{1}{2} \langle C^\dagger \rangle_{\hat{\psi}} \langle C \rangle_{\hat{\psi}} \right) \hat{\psi} dt + \sqrt{\gamma_0} (C - \langle C \rangle_{\psi}) \hat{\psi} dW, \quad (6.214)$$

которое является стохастическим дифференциальным уравнением диффузионной модели квантового состояния, включающим единственный оператор Линдблада C . Таким образом, мы заключаем, что стохастическое уравнение Шредингера для диффузии квантового состояния, которое предложено изначально как модель, описывающая динамическую локализацию вектора состояния, появляется здесь в качестве уравнения, которое представляет стохастическую динамику гетеродинного процесса фотодетектирования в диффузионном пределе.

6.6. Стохастические уравнения для матрицы плотности

Стохастические процессы, рассмотренные до сих пор, описывают динамику \mathcal{E}_P -ансамблей чистых состояний $\psi(t)$. Полностью аналогичным способом мы также можем вывести процессы для соответствующих смесей ансамблей. Это приведет нас к уравнениям движения для зависимых от времени распределений $P[\sigma, t]$ на пространстве матриц плотности σ или, что эквивалентно, к стохастическим уравнениям для матриц плотности.

Распределения вероятностей на пространстве матриц плотности уже были введены в разделе 5.3. Мы также обсуждали там описание селективных измерений. Нашей отправной точкой будет уравнение (5.84), которое, в рассматриваемом случае, приводит к новому распределению $P[\sigma, t_0 + \tau]$ изучаемой системы в момент времени $t = t_0 + \tau$ в результате измерения на пробной системе после взаимодействия между объектом и зондом за интервал времени τ . Таким образом, уравнение (5.84) приводит к

$$P[\sigma, t_0 + \tau] = \int \sum_m \text{tr}\{\Phi_m(\tilde{\sigma})\} \delta \left[\frac{\Phi_m(\tilde{\sigma})}{\text{tr}\{\Phi_m(\tilde{\sigma})\}} - \sigma \right] P[\tilde{\sigma}, t_0] D\tilde{\sigma}. \quad (6.215)$$

Принимая во внимание это соотношение, для того чтобы матрица плотности в момент времени $t_0 + \tau$ была σ при условии, что матрица плотности в момент времени t_0 есть $\tilde{\sigma}$, условная вероятность принимает форму

$$T[\sigma, t_0 + \tau | \tilde{\sigma}, t_0] = \sum_m \text{tr}\{\Phi_m(\tilde{\sigma})\} \delta \left[\frac{\Phi_m(\tilde{\sigma})}{\text{tr}\{\Phi_m(\tilde{\sigma})\}} - \sigma \right]. \quad (6.216)$$

Следующим шагом снова будет определение операции Φ_m относительно измерительной схемы. В качестве примера рассмотрим прямое фотодетектирование. Как, например, в разделе 6.3, мы должны различать два случая, то есть индекс m принимает два значения $m = 0, 1$. Операция

$$\Phi_0(\tilde{\sigma}) = \text{tr}_B \{ \pi_0 U_I(t, t_0) (\tilde{\sigma} \otimes |0\rangle\langle 0|) U_I^\dagger(t, t_0) \pi_0 \} = \Omega_0 \tilde{\sigma} \Omega_0^\dagger \quad (6.217)$$

соответствует случаю, при котором фотон не детектируется, где $\pi_0 = |0\rangle\langle 0|$ есть проекция на вакуумное состояние, которое служит в качестве состояния зонда. Другой случай — случай детектирования фотона (отметим, что во втором порядке теории возмущений не существует вкладов от секторов с большим количеством фотонов). Соответствующая операция есть

$$\Phi_1(\tilde{\sigma}) = \text{tr}_B \{ \pi_1 U_I(t, t_0) (\tilde{\sigma} \otimes |0\rangle\langle 0|) U_I^\dagger(t, t_0) \pi_1 \} = \sum_j \Omega_j \tilde{\sigma} \Omega_j^\dagger, \quad (6.218)$$

где $\pi_1 = \sum_j |j\rangle\langle j|$ означает проектор на однофотонное подпространство.

Тем же способом, как и до этого (см. (6.106), (6.116) и (6.122)), мы находим, что в приближении Борна–Маркова¹

$$\Omega_0 \approx I - i\tau H_L - \frac{1}{2}\tau\gamma_0 A^\dagger A, \quad (6.219)$$

$$\Omega_j \approx \tilde{f}_j A, \quad \text{где} \quad \sum_j |\tilde{f}_j|^2 \approx \tau\gamma_0. \quad (6.220)$$

Второе уравнение показывает, что операция для измерения фотона может быть записана как

$$\Phi_1(\tilde{\sigma}) \approx \sum_j |\tilde{f}_j|^2 A \tilde{\sigma} A^\dagger \approx \tau\gamma_0 A \tilde{\sigma} A^\dagger. \quad (6.221)$$

Тогда мы находим, что пропагатор (6.216) снова есть сумма двух членов $T = T_0 + T_1$, выражающая отдельные классические альтернативы: T_0 соответствует отсутствию детектирования фотона, а T_1 событию детектирования фотона. Эти вклады задаются

$$\begin{aligned} T_0[\sigma, t_0 + \tau|\tilde{\sigma}, t_0] &= \text{tr} \left\{ \Omega_0^\dagger \Omega_0 \tilde{\sigma} \right\} \delta \left[\frac{\Omega_0 \tilde{\sigma} \Omega_0^\dagger}{\text{tr} \left\{ \Omega_0^\dagger \Omega_0 \tilde{\sigma} \right\}} - \sigma \right] \approx \\ &\approx (1 - \tau\gamma_0 \text{tr} \{ A^\dagger A \tilde{\sigma} \}) \delta[\tilde{\sigma} - i\tau\mathcal{G}(\tilde{\sigma}) - \sigma] \end{aligned} \quad (6.222)$$

¹ Для избежания путаницы со случайной матрицей плотности σ мы пишем здесь A для σ_- и A^\dagger для σ_+ .

и

$$\begin{aligned} T_1[\sigma, t_0 + \tau | \tilde{\sigma}, t_1] &= \text{tr} \{ \Phi_1(\tilde{\sigma}) \} \delta \left[\frac{\Phi_1(\tilde{\sigma})}{\text{tr} \{ \Phi_1(\tilde{\sigma}) \}} - \sigma \right] \approx \\ &\approx \tau \gamma_0 \text{tr} \{ A^\dagger A \tilde{\sigma} \} \delta \left[\frac{A \tilde{\sigma} A^\dagger}{\text{tr} \{ A^\dagger A \tilde{\sigma} \}} - \sigma \right]. \end{aligned} \quad (6.223)$$

Здесь мы ввели нелинейный супероператор

$$\mathcal{G}(\sigma) \equiv \hat{H}\sigma - \sigma \hat{H}^\dagger + i\gamma_0 \text{tr} \{ A^\dagger A \sigma \} \sigma, \quad (6.224)$$

где (см. (6.126))

$$\hat{H} = H_L - i \frac{\gamma_0}{2} A^\dagger A. \quad (6.225)$$

Ясно, что приведенный выше вид пропагатора дает КДП для стохастической матрицы плотности $\sigma(t)$, где $\mathcal{G}(\sigma)$ генерирует детерминированные части эволюции. Эквивалентное стохастическое дифференциальное уравнение для КДП задается как

$$d\sigma(t) = -i\mathcal{G}(\sigma(t))dt + \left[\frac{A\sigma(t)A^\dagger}{\text{tr} \{ A^\dagger A \sigma(t) \}} - \sigma(t) \right] dN(t), \quad (6.226)$$

где пуассоновские инкременты обладают свойствами

$$dN(t)^2 = dN(t), \quad E[dN(t)] = \gamma_0 \text{tr} \{ A^\dagger A \sigma(t) \} dt. \quad (6.227)$$

Легко видеть, что стохастический процесс $\sigma(t)$ имеет следующие свойства. Если мы предположим, что мы имеем чистое состояние $\sigma(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ в некоторый момент времени t , то во время стохастической эволюции чистота сохраняется. Для этого случая КДП, таким образом, описывает стохастический вектор состояний, который точно выводится в разделе 6.3, а именно: задается уравнением (6.129). Это свойство стохастического уравнения матрицы плотности существует благодаря тому факту, что мы имеем оператор Линдблада и, таким образом, операция Φ_1 , соответствующая детектированию фотона, преобразует чистые состояния в чистые состояния, как это можно видеть прямо из уравнения (6.221).

Приведенное выше сохранение чистоты мы должны с осторожностью отличать от необратимой природы процесса на уровне соответствующего ансамбля типа \mathcal{E}_ρ . А именно среднее значение матрицы плотности

$$\rho_S(t) \equiv \int P[\sigma, t] \sigma D\sigma \quad (6.228)$$

подчиняется необратимой динамике, задаваемой основным оптическим квантовым уравнением (6.91), что легко проверяется усреднением уравнения (6.226).

6.7. Фотодетектирование на полевой моде

6.7.1. Формула фотодетектирования

В качестве нашего последнего примера, в этом разделе мы рассмотрим квантовое измерение фотонов в моде a электромагнитного поля фотонным детектором. Будет предполагаться, что операция описания обратного действия в полевой моде пропорциональна оператору уничтожения моды, то есть мы имеем единственный оператор скачка, задаваемый $A = a$. Если мы обозначим константу затухания моды через γ_0 , мы, таким образом, получим КДП, который определяется неэрмитовым генератором

$$\hat{H} = -\frac{i\gamma_0}{2}a^\dagger a \quad (6.229)$$

с соответствующим оператором эволюции

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t) = \exp\left[-\frac{\gamma_0 t}{2}a^\dagger a\right], \quad (6.230)$$

и функционал перехода

$$W[\psi|\tilde{\psi}] = \gamma_0 \|a\tilde{\psi}\|^2 \delta\left[\frac{a\tilde{\psi}}{\|a\tilde{\psi}\|} - \psi\right]. \quad (6.231)$$

Для этого процесса представление интеграла по траектории, развитое в разделе 6.1.2, может быть сразу выписано, как показано ниже. Сначала отметим, что

$$\hat{U}(t)a = \exp(\gamma_0 t/2)a\hat{U}(t). \quad (6.232)$$

Это соотношение может быть использовано в уравнении (6.44), чтобы перенести все операторы скачков влево, что дает

$$\psi_N^t(t_1, \dots, t_N) = \exp[N\gamma_0 t/2 - \gamma_0(t_1 + \dots + t_N)/2]a^N\hat{U}(t)\tilde{\psi}. \quad (6.233)$$

Полный пропагатор $T[\psi, t|\tilde{\psi}, 0]$ поэтому может быть записан как показано ниже:

$$T[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] = \sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) \delta\left[\psi - \frac{a^N \hat{U}(t)\tilde{\psi}}{\|a^N \hat{U}(t)\tilde{\psi}\|}\right]. \quad (6.234)$$

Вероятность $p_N(t)$ для N детектирований на $[0, t]$ находится из уравнения (6.46) с помощью многовременных вероятностей

$$\begin{aligned} p_N^t(t_1, \dots, t_N) &= \gamma_0^N \|\psi_N^t(t_1, \dots, t_N)\|^2 = \\ &= \gamma_0^N \exp[N\gamma_0 t - \gamma_0(t_1 + \dots + t_N)] \|a^N \hat{U}(t) \tilde{\psi}\|^2. \end{aligned} \quad (6.235)$$

Выполнение интегрирования по времени приводит к

$$p_N(t) = \frac{[\mu(t)]^N}{N!} \exp(N\gamma_0 t) \|a^N \hat{U}(t) \tilde{\psi}\|^2. \quad (6.236)$$

Здесь мы ввели квантовую эффективность

$$\mu(t) \equiv 1 - \exp(-\gamma_0 t). \quad (6.237)$$

Эта величина есть вероятность регистрации фотона в интервале времени $[0, t]$ из однофотонного состояния $\tilde{\psi} = a^\dagger |0\rangle$. В самом деле, для однофотонного состояния мы, очевидно, имеем $p_1(t) = \mu(t)$, $p_0(t) = 1 - \mu(t)$ и $p_N(t) = 0$ для $N \geq 2$.

Данное выше представление процесса было получено для изначально чистого состояния $\tilde{\psi}$. Если полевая мода изначально находится в смешанном состоянии, задаваемом $\tilde{\rho}$, мы должны усреднить (6.236) по соответствующему начальному распределению $P[\tilde{\psi}, t = 0]$, что приводит к

$$p_N(t) = \frac{[\mu(t)]^N}{N!} \exp(N\gamma_0 t) \text{tr} \left\{ \hat{U}^\dagger(t) (a^\dagger)^N a^N \hat{U}(t) \tilde{\rho} \right\}. \quad (6.238)$$

Легко показать, что результат, приведенный выше, эквивалентен формуле подсчета фотонов, полученной Моллоу (Mollow, 1968), Скалли и Лэмбом (Scully, Lamb, 1969) и Селлони и др. (Selloni et al., 1978), которая обычно записывается в виде

$$p_N(t) = \text{tr} \left\{ : \frac{[\mu(t)a^\dagger a]^N}{N!} \exp[-\mu(t)a^\dagger a] : \tilde{\rho} \right\}, \quad (6.239)$$

где $: f(a^\dagger, a) :$ означает нормально упорядоченное выражение некоторой функции f от операторов рождения и уничтожения. В оставшейся части этого подраздела мы проанализируем приведенное выше уравнение для пропагатора (6.234) для различных начальных векторов состояний $\tilde{\psi}$.

6.7.1.1. Состояния Фока. Возьмем начальное фоковское состояние, то есть $\tilde{\psi} = |n\rangle$. Тогда мы имеем тривиальные соотношения

$$\frac{a^N \hat{U}(t)|n\rangle}{\|a^N \hat{U}(t)|n\rangle\|} = |n - N\rangle \quad (6.240)$$

и

$$\|a^N \hat{U}(t)|n\rangle\|^2 = \exp(-n\gamma_0 t) \frac{n!}{(n - N)!}, \quad (6.241)$$

которые дают

$$T[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] = \sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) \delta[\psi - |n - N\rangle]. \quad (6.242)$$

В силу (6.236) находим, что вероятность для числа отсчетов представима биноминальным распределением

$$p_N(t) = \binom{n}{N} [\mu(t)]^N [1 - \mu(t)]^{n-N}. \quad (6.243)$$

Если начальное состояние является смешанным состоянием $\tilde{\rho}$, мы имеем

$$p_N(t) = \sum_{n=N}^{\infty} \langle n | \tilde{\rho} | n \rangle \binom{n}{N} [\mu(t)]^N [1 - \mu(t)]^{n-N}, \quad (6.244)$$

что соответствует выражению, данному Сринивасом и Дэвисем (Srinivas, Davies, 1981).

6.7.1.2. Когерентное состояние. Для начального когерентного состояния $\tilde{\psi} = |\alpha\rangle$ мы имеем (пренебрегая несущественным фазовым множителем)

$$\frac{a^N \hat{U}(t)|\alpha\rangle}{\|a^N \hat{U}(t)|\alpha\rangle\|} = |\alpha \exp(-\gamma_0 t/2)\rangle \quad (6.245)$$

и

$$\|a^N \hat{U}(t)|\alpha\rangle\|^2 = |\alpha|^{2N} \exp(-N\gamma_0 t) \exp[-|\alpha|^2 \mu(t)]. \quad (6.246)$$

Это приводит к пропагатору

$$T[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] = \sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) \delta[\psi - |\alpha \exp(-\gamma_0 t/2)\rangle] = \delta[\psi - |\alpha \exp(-\gamma_0 t/2)\rangle], \quad (6.247)$$

который показывает, что чистое когерентное состояние остается чистым когерентным состоянием в течение временной эволюции, при этом в результате затухания когерентное состояние непрерывно стягивается в вакуумное состояние. Вероятность для числа отсчетов теперь представляет пуассоновское распределение

$$p_N(t) = \frac{\langle N(t) \rangle^N}{N!} \exp[-\langle N(t) \rangle] \quad (6.248)$$

со средним значением $\langle N(t) \rangle = |\alpha|^2 \mu(t)$.

6.7.1.3. Начальные состояния типа шредингеровского кота. Теперь рассмотрим начальное состояние типа шредингеровского кота (Garraway, Knight, 1994; Goetsch, Graham, Haake, 1995), заданное симметричной суперпозицией двух когерентных состояний

$$\tilde{\psi} = |\alpha, +\rangle \equiv \frac{1}{N_+(\alpha)}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle). \quad (6.249)$$

Соответствующая антисимметричная суперпозиция записывается как

$$|\alpha, -\rangle \equiv \frac{1}{N_-(\alpha)}(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle). \quad (6.250)$$

Нормировочные константы есть

$$N_+(\alpha) = 2e^{-|\alpha|^2/2} \sqrt{\operatorname{ch}|\alpha|^2}, \quad (6.251)$$

$$N_-(\alpha) = 2e^{-|\alpha|^2/2} \sqrt{\operatorname{sh}|\alpha|^2}. \quad (6.252)$$

С помощью соотношения

$$\begin{aligned} a^N \hat{U}(t) |\alpha, +\rangle &= \frac{1}{N_+(\alpha)} \alpha^N \exp(-N\gamma_0 t/2) \exp(-|\alpha|^2 \mu(t)/2) \times \\ &\times \{ |\alpha \exp(-\gamma_0 t/2)\rangle + (-1)^N |-\alpha \exp(-\gamma_0 t/2)\rangle \} \end{aligned} \quad (6.253)$$

легко показать, что для четного N мы имеем

$$\|a^N \hat{U}(t) |\alpha, +\rangle\|^2 = |\alpha|^{2N} \exp(-N\gamma_0 t) \frac{\operatorname{ch}(|\alpha|^2 e^{-\gamma_0 t})}{\operatorname{ch}|\alpha|^2} \quad (6.254)$$

и

$$\frac{a^N \hat{U}(t) |\alpha, +\rangle}{\|a^N \hat{U}(t) |\alpha, +\rangle\|} = |\alpha \exp(-\gamma_0 t/2), +\rangle, \quad (6.255)$$

в то время как для нечетного N мы имеем

$$\|a^N \hat{U}(t)|\alpha, +\rangle\|^2 = |\alpha|^{2N} \exp(-N\gamma_0 t) \frac{\operatorname{sh}(|\alpha|^2 e^{-\gamma_0 t})}{\operatorname{ch} |\alpha|^2} \quad (6.256)$$

и

$$\frac{a^N \hat{U}(t)|\alpha, +\rangle}{\|a^N \hat{U}(t)|\alpha, +\rangle\|} = |\alpha \exp(-\gamma_0 t/2), -\rangle. \quad (6.257)$$

Это приводит к формуле для числа отсчетов

$$p_N(t) = \frac{[|\alpha|^2 \mu(t)]^N}{N!} \frac{\operatorname{ch}(|\alpha|^2 e^{-\gamma_0 t})}{\operatorname{ch} |\alpha|^2} \quad (6.258)$$

для четных N и

$$p_N(t) = \frac{[|\alpha|^2 \mu(t)]^N}{N!} \frac{\operatorname{sh}(|\alpha|^2 e^{-\gamma_0 t})}{\operatorname{ch} |\alpha|^2} \quad (6.259)$$

для нечетных N . Суммируя отдельно по четным и нечетным значениям N , мы получаем следующее выражение для пропагатора:

$$T[\psi, t|\tilde{\psi}, 0] = p^{\text{четн.}}(t) \delta[\psi - |\alpha \exp(-\gamma_0 t/2), +\rangle] + p^{\text{нечетн.}}(t) \delta[\psi - |\alpha \exp(-\gamma_0 t/2), -\rangle], \quad (6.260)$$

где вероятности для четных и нечетных значений есть

$$p^{\text{четн.}}(t) = \sum_{N \text{ четн.}} p_N(t) = \frac{\operatorname{ch}(|\alpha|^2 \mu(t)) \operatorname{ch}(|\alpha|^2 [1 - \mu(t)])}{\operatorname{ch} |\alpha|^2} \quad (6.261)$$

и

$$p^{\text{нечетн.}}(t) = \sum_{N \text{ нечетн.}} p_N(t) = \frac{\operatorname{sh}(|\alpha|^2 \mu(t)) \operatorname{sh}(|\alpha|^2 [1 - \mu(t)])}{\operatorname{ch} |\alpha|^2}. \quad (6.262)$$

Из уравнения (6.260) ясно, что начальное состояние шредингеровского кота остается шредингеровским котом. Эффект квантовых скачков сводится к переключению с четной суперпозиции на нечетную суперпозицию. В результате затухания оба кота двигаются к вакуумному состоянию, в то время как когерентность суперпозиции полностью сохраняется. Однако требуется, чтобы детектирование фотонов было полным. Как можно было видеть в разделе 4.4.1, когерентность может быть разрушена отдельным фотоном, который проходит непротедектированным.

6.7.2. Квантовое неразрушающее измерение полевой моды

В разделе 4.7 мы проанализировали специфическую модель для квантового измерительного процесса, развитую Уоллсом, Коллетом и Милбурном (Walls, Collet, Milburn, 1985). Эта модель включает в себя полевую моду a (измеряемой системы) и полевую моду b (измерителя), которые связаны между собой посредством четырехвольнового смешивания. Мера измерителя b связана посредством амплитудной связи с окружением, имеющим нулевую температуру.

Полагая, что окружение действует как совершенный фотоэлектронный счетчик, мы исследуем здесь модель с точки зрения непрерывного мониторинга фотонов в моде измерителя b . Соответствующее раскрытие основного уравнения (4.285) порождает КДП для вектора состояния ψ_{SM} системы плюс измеритель. Мы определяем фотонную статистику для измерительной схемы и демонстрируем, что квантовое разрушающее измерение фотонов моды b приводит к КНИ измерению определенной наблюдаемой системы, а именно: квадрату $(a^\dagger a)^2$ числа фотонов в моде a .

Для представленной модели КДП определяется через оператор скачка b с соответствующей интенсивностью γ_0 , описывающей разрушающее измерение квантов моды измерителя, а неунитарный квантовый оператор временной эволюции

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}_{SM}t) = \exp\left[-\frac{t}{2}a^\dagger a(b\varepsilon^* - b^\dagger\varepsilon) - \frac{\gamma_0 t}{2}b^\dagger b\right], \quad (6.263)$$

соответствующий генератору

$$\hat{H}_{SM} = H_{SM} - \frac{i\gamma_0}{2}b^\dagger b, \quad (6.264)$$

где H_{SM} задается (4.280). В уравнении (4.281) мы исследуем начальное состояние вида

$$\tilde{\psi}_{SM} = \sum_n c_n |n\rangle_S \otimes |0\rangle_M. \quad (6.265)$$

Сконструируем пропагатор процесса. Для этого отметим, что

$$b\hat{U}(t) = \hat{U}(t) \left[e^{-\gamma_0 t/2} b - \frac{\varepsilon}{\gamma_0} \left(e^{-\gamma_0 t/2} - 1 \right) a^\dagger a \right]. \quad (6.266)$$

Это соотношение может быть использовано в уравнении (6.44) для переноса всех \hat{U} влево. Так как мода b изначально находится в основном состоянии

нии, мы остаемся с выражением

$$\psi_N^t(t_1, \dots, t_N) = \left(\frac{-\varepsilon}{\gamma_0} \right)^N \left(e^{-\gamma_0 t_N/2} - 1 \right) \times \\ \times \left(e^{-\gamma_0 t_{N-1}/2} - 1 \right) \dots \left(e^{-\gamma_0 t_1/2} - 1 \right) \widehat{U}(t)(a^\dagger a)^N \tilde{\psi}_{SM}. \quad (6.267)$$

Из этого мы заключаем, что полный пропагатор процесса есть

$$T[\psi_{SM}, t | \tilde{\psi}_{SM}, 0] = \sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) \delta \left[\psi_{SM} - \frac{\widehat{U}(t)(a^\dagger a)^N \tilde{\psi}_{SM}}{\|\widehat{U}(t)(a^\dagger a)^N \tilde{\psi}_{SM}\|} \right], \quad (6.268)$$

где вероятность $p_N(t)$ для числа N отсчетов находится из уравнений (6.45) и (6.46). Выполнения интегрирования по времени мы получаем в результате

$$p_N(t) = \frac{1}{N!} \lambda(t)^N \|\widehat{U}(t)(a^\dagger a)^N \tilde{\psi}_{SM}\|^2 \quad (6.269)$$

с

$$\lambda(t) \equiv \frac{|\varepsilon|^2}{\gamma_0^2} \left(\gamma_0 t + 4e^{-\gamma_0 t/2} - e^{-\gamma_0 t} - 3 \right). \quad (6.270)$$

С помощью соотношения

$$\widehat{U}(t)(a^\dagger a)^N \tilde{\psi}_{SM} = \sum_n c_n e^{-\lambda(t)n^2/2} n^N |n\rangle_S \otimes |\beta_n(t)\rangle_M, \quad (6.271)$$

где $\beta_n(t)$ определяется в уравнении (4.290), мы можем определить норму в выражении для $p_N(t)$, что в итоге дает

$$p_N(t) = \sum_n |c_n|^2 \frac{1}{N!} [\mu_n(t)]^N e^{-\mu_n(t)}. \quad (6.272)$$

Мы видим, что распределение $p_N(t)$ для числа событий представляет взвешенную сумму пуассоновского распределения со средними значениями

$$\mu_n(t) \equiv \lambda(t)n^2. \quad (6.273)$$

В пределе $\gamma_0 t \rightarrow \infty$, при фиксированном $|\varepsilon|$, также как в пределе (4.296), величина $\lambda(t)$ становится произвольно большой. Пуассоновские распределения в сумме (6.272), таким образом, имеют острые всплески вблизи

средних значений $\mu_n(t)$, относительные ширины будут $1/\sqrt{\mu_n(t)} \rightarrow 0$. Так как пуссоновское распределение со средним значением $\mu_n(t)$ появляется с относительным весом $|c_n|^2$, мы заключаем, что измерение числа N фотонных отсчетов практически всегда дает одно из значений вблизи $N = \mu_n(t)$ с относительными вероятностями $|c_n|^2$. Для заданного выходного N мы заключаем из уравнения (6.273), что

$$n^2 = \frac{N}{\lambda(t)}, \quad (6.274)$$

то есть мы подразумеваем измерение значения наблюдаемой

$$A = (a^\dagger a)^2. \quad (6.275)$$

Это измерение квадрата числа фотонов в моде a через измерение квантов в b обеспечивает КНИ измерение, как это можно видеть из уравнения (6.271). Функция

$$f(n) = e^{-\lambda(t)n^2/2} n^N \quad (6.276)$$

имеет резкий максимум вблизи значения n , заданного уравнением (6.274). Результат измерения N , таким образом, дает условный вектор состояний

$$\frac{\hat{U}(t)(a^\dagger a)^N \tilde{\psi}_{SM}}{\|\hat{U}(t)(a^\dagger a)^N \tilde{\psi}_{SM}\|} \approx |n\rangle_S \otimes |\beta_n(t)\rangle_M, \quad (6.277)$$

где n связано с результатом N уравнением (6.274). Суммируя в пределах, заданных выше, получаем, что пропагатор процесса обращается в

$$T[\psi_{SM}, t | \tilde{\psi}_{SM}, 0] \rightarrow \sum_n |c_n|^2 \delta[\psi_{SM} - |n\rangle_S \otimes |\beta_n\rangle_M]. \quad (6.278)$$

Уравнение (6.278) выражает преобразование из квантово-механической амплитуды в классическую во время измерительного процесса. Начальное чистое состояние $\tilde{\psi}_{SM}$ преобразуется в классическую смесь, состоящую из определенных состояний $|n\rangle_S \otimes |\beta_n\rangle_M$. Эта смесь является ансамблем типа \mathcal{E}_P , где различные указанные состояния $|n\rangle_S \otimes |\beta\rangle_M$ представляют классические альтернативы.

Переход (6.278) может быть проиллюстрирован дальше с помощью дисперсий $\text{Var}_1(A)$ и $\text{Var}_2(A)$, введенных в уравнениях (5.67) и (5.68). Так как A коммутирует с H_{SM} , квантово-механическая дисперсия

$$\text{Var}(A) = \text{Var}_1(A) + \text{Var}_2(A) \quad (6.279)$$

остается константой. Так как следующее начальное состояние чистое, то дальше прослеживается, что

$$\text{Var}_2(A(0)) = 0, \quad \text{Var}_1(A(0)) = \text{Var}(A). \quad (6.280)$$

В пределе большого времени $\gamma_0 t \rightarrow \infty$, если параметр $|\varepsilon|$ фиксирован, $\text{Var}_1(A(t))$ уменьшается до нуля, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_1(A(t)) = 0, \quad (6.281)$$

показывая, что итоговый ансамбль есть ансамбль собственных состояний A . Это может быть показано непосредственно с помощью основного уравнения Лиувилля, относительно процесса $\psi_{SM}(t)$. В самом деле, оказывается, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Var}_1(A(t)) = -\gamma_0 E(Q[\psi_{SM}]^2) \leq 0, \quad (6.282)$$

где мы ввели функционал

$$Q[\psi_{SM}] = \frac{1}{\|b\psi_{SM}\|} (\langle b\psi_{SM}|A|b\psi_{SM} \rangle - \|b\psi_{SM}\|^2 \langle \psi_{SM}|A|\psi_{SM} \rangle). \quad (6.283)$$

Так как математическое ожидание с правой стороны в (6.282) берется по неотрицательному функционалу Q^2 , мы видим, что $\text{Var}_1(A(t))$ уменьшается монотонно и, поэтому, достигает определенного значения в пределе $t \rightarrow 0$. С другой стороны, легко показать, что функционал $Q[\psi_{SM}]$ исчезает тогда и только тогда, когда ψ_{SM} — одно из коррелирующих состояний $|n\rangle_S \otimes |\beta_n\rangle_M$. Эти состояния являются собственными состояниями A , и, таким образом, уравнение (6.281) является следствием приведенных рассуждений.

Таким образом, мы видим, что состояния $|n\rangle_S \otimes |\beta_n\rangle_M$ являются стабильными состояниями процесса $\psi_{SM}(t)$. Стохастическая динамика преобразует начальное состояние (6.265) с вероятностью $|c_n|^2$ в состояние $|n\rangle_S \otimes |\beta_n\rangle_M$. С другой стороны, дисперсия $\text{Var}_2(A(t))$ достигает $\text{Var}(A)$, демонстрируя, что статистические флуктуации случайной переменной $\langle \psi_{SM}|A|\psi_{SM} \rangle$, будучи нулевыми изначально, монотонно увеличиваются до тех пор, пока они не становятся равными квантовым флуктуациям, задаваемым $\text{Var}(A)$. Такое динамическое поведение дисперсий выражает тот факт, что потенциальные результаты измерения, содержащиеся в амплитудах начальных состояний, становятся объективными во время процесса измерения. Эти особенности проиллюстрированы на рис. 6.12, где мы показываем временную зависимость дисперсий, полученную из численного моделирования КДП (Breuer, Petruccione, 1996b).

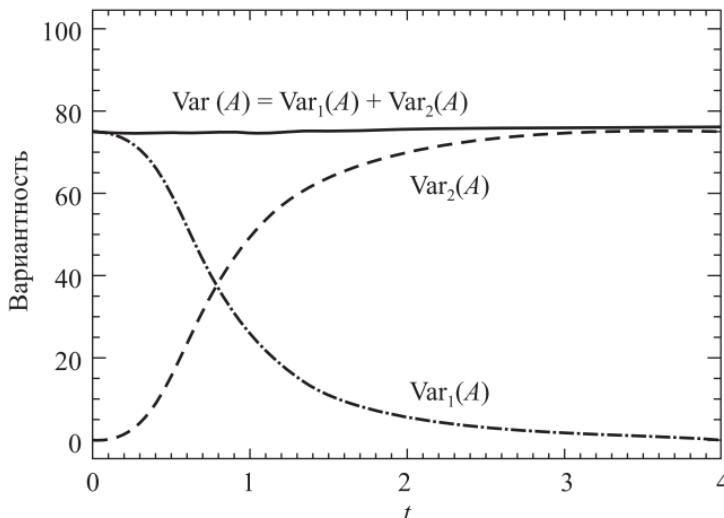


Рис. 6.12. Дисперсии $\text{Var}_1(A)$, $\text{Var}_2(A)$ и $\text{Var}(A)$ для наблюдаемой $A = (a^\dagger a)^2$. Мы изобразили результаты моделирования для 10^4 реализаций КДП, описывающего мониторинг моды измерения b . Моделирование было выполнено с $\gamma_0 = 1$ и $\varepsilon = 2$ и начальным состоянием $\tilde{\psi}_{SM}$ в виде суперпозиции состояний $n = 1, 2, 3, 4, 5$ с равными амплитудами.

Библиография

Barchielli, A. and Belavkin, V.P. (1991). Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**, 1495–1514.

Breuer, H.P. and Petruccione, F. (1995a). Reduced system dynamics as a stochastic process in Hilbert space. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 3788–3791.

Breuer, H.P. and Petruccione, F. (1995b). Stochastic dynamics of quantum jumps. *Phys. Rev.*, **E52**, 428–441.

Breuer, H.P. and Petruccione, F. (1996a). Hilbert space path integral representation for the reduced dynamics of matter in thermal radiation fields. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**, 7837–7853.

Breuer, H.P. and Petruccione, F. (1996b). Quantum measurement and the transformation from quantum to classical probabilities. *Phys. Rev.*, **A54**, 1146–1153.

Breuer, H.P. and Petruccione, F. (1997). Stochastic dynamics of reduced wave functions and continuous measurement in quantum optics. *Fortschr. Phys.*, **45**, 39–78.

Breuer, H. P., Kappler, B. and Petruccione, F. (1997). Stochastic wavefunction approach to the calculation of multitime correlation functions of open quantum systems. *Phys. Rev.*, **A56**, 2334–2351.

Breuer, H. P., Kappler, B. and Petruccione, F. (1998). Heisenberg picture operators in the stochastic wave function approach to open quantum systems. *Eur. Phys. J.*, **D1**, 9–13.

Carmichael, H. (1993). *An Open Systems Approach to Quantum Optics, Volume m18 of Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin.

Carmichael, H. J., Singh, S., Vyas, R. and Rice, P. R. (1989). Photoelectron waiting times and atomic state reduction in resonance fluorescence. *Phys. Rev.*, **A39**, 1200–1218.

Castin, Y. and Mølmer, K. (1995). Monte Carlo wave-function analysis of 3D optical molasses. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 3772–3775.

Dalibard, J., Castin, Y. and Mølmer, K. (1992). Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 580–583.

Davies, E. B. (1969). Quantum stochastic processes. *Commun. Math. Phys.*, **15**, 277–304.

Dum, R., Parkins, A. S., Zoller, P. and Gardiner, C. W. (1992). Monte Carlo simulation of master equations in quantum optics for vacuum, thermal, and squeezed reservoirs. *Phys. Rev.*, **A46**, 4382–4396.

Dum, R., Zoller, P. and Ritsch, H. (1992). Monte Carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission. *Phys. Rev.*, **A45**, 4879–4887.

Gardiner, C. W., Parkins, A. S. and Zoller, P. (1992). Wave-function quantum stochastic differential equations and quantum-jump simulation methods. *Phys. Rev.*, **A46**, 4363–4381.

Garraway, B. M. and Knight, P. L. (1994). Evolution of quantum superpositions in open environments: Quantum trajectories, jumps, and localization in phase space. *Phys. Rev.*, **A50**, 2548–2563.

Ghirardi, G. C., Rimini, A. and Weber, T. (1986). Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. *Phys. Rev.*, **D34**, 470–491.

Ghirardi, G. C., Pearle, P. and Rimini, A. (1990). Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles. *Phys. Rev.*, **A42**, 78–89.

Gisin, N. (1984). Quantum measurements and stochastic processes. *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1657–1660.

Gisin, N. (1989). Stochastic quantum dynamics and relativity. *Helv. Phys. Acta*, **62**, 363–371.

- Gisin, N. and Percival, I. C. (1992). The quantum-state diffusion model applied to open systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25**, 5677–5691.
- Gisin, N. and Percival, I. C. (1993). Quantum state diffusion, localization and quantum dispersion entropy. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**, 2233–2243.
- Goetsch, P., Graham, R. and Haake, F. (1995) Schrödinger cat states and single runs for the damped harmonic oscillator. *Phys. Rev.*, **A51**, 136–142.
- Hegerfeldt, G. C. and Wilser, T. S. (1991). Ensemble or individual system, collapse or no collapse: A description of a single radiating atom. In *Classical and Quantum Systems: Foundations and Symmetries*, (eds. Doeblner, H. D., Scheerer, W. and Schroeck, F., Jr.), World Scientific, Singapore, p. 104–115.
- Mandel, L. and Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge. Имеется перевод: Мандель Л., Вольф Э. *Оптическая когерентность и квантовая оптика*. — М.: Физматлит, 2000.
- Marte, P., Dum, R., Taieb, R., Lett, P. D. and Zoller, P. (1993a). Quantum wave function simulation of the resonance fluorescence spectrum from one-dimensional optical molasses. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1335–1338.
- Marte, P., Dum, R., Taieb, R. and Zoller, P. (1993b). Resonance fluorescence from quantized one-dimensional molasses. *Phys. Rev.*, **A47**, 1378–1390.
- Mollow, B. R. (1968). Quantum theory of field attenuation. *Phys. Rev.*, **168**, 1896–1919.
- Mollow, B. R. (1969). Power spectrum of light scattered by two-level systems. *Phys. Rev.*, **188**, 1969–1975.
- Mollow, B. R. (1975). Pure-state analysis of resonant light scattering: Radiative damping, saturation, and multiphoton effects. *Phys. Rev.*, **A12**, 1919–1943.
- Mølmer, K. and Castin, Y. (1996). Monte Carlo wavefunctions in quantum optics. *Quantum Semiclass. Opt.*, **8**, 49–72.
- Mølmer, K., Castin, Y. and Dalibard, J. (1993). Monte Carlo wave function method in quantum optics. *J. Opt. Soc. Am.*, **B10**, 524–538.
- Pearle, P. (1976). Reduction of the state vector by a nonlinear Schrodinger equation. *Phys. Rev.*, **D13**, 857–868.
- Pearle, P. (1989). Combining stochastic dynamical state-vector reduction with spontaneous localization. *Phys. Rev.*, **A39**, 2277–2289.
- Percival, I. C. (1998). *Quantum State Diffusion*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Plenio, M. B. and Knight, P. L. (1998). The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics. *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 101–144.

- Scully, M. O. and Lamb, W. E., Jr. (1969). Quantum theory of an optical maser. III. Theory of photoelectron counting statistics. *Phys. Rev.*, **179**, 368–374.
- Selloni, A., Schwendimann, P., Quattropani, A. and Baltes, H. P. (1978). Open-system theory of photodetection: Dynamics of field and atomic moments. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **11**, 1427–1438.
- Srinivas, M. D. and Davies, E. B. (1981). Photon counting probabilities in quantum optics. *Opt. Acta*, **28**, 981–996.
- Walls, D. F., Collet, M. J. and Milburn, G. J. (1985). Analysis of a quantum measurement. *Phys. Rev.*, **D32**, 3208–3215.
- Walls, D. F. and Milburn, G. J. (1994). *Quantum Optics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Wiseman, H. M. (1994). *Quantum Trajectories and Feedback*. PhD Thesis. Department of Physics, University of Queensland.
- Wiseman, H. M. and Milburn, G. J. (1993a). Quantum theory of field-quadrature measurements. *Phys. Rev.*, **A47**, 642–662.
- Wiseman, H. M. and Milburn, G. J. (1993b). Interpretation of quantum jump and diffusion processes illustrated on the Bloch sphere. *Phys. Rev.*, **A47**, 1652–1666.

ГЛАВА 7

Стохастический метод моделирования

Наиболее часто встречающиеся стохастические процессы в науке не могут быть изучены аналитическими методами. Поэтому нужно полагаться на численные методы для прогнозирования на основе заданной стохастической динамики. Численные алгоритмы могут быть использованы для решения уравнения движения, управляющего вероятностным распределением стохастической величины, основного уравнения или уравнения Фоккера – Планка, например. Другой подход заключается в приведении системы детерминированных дифференциальных уравнений для моментов процесса и решении их численным интегрированием. Однако эти методы часто не осуществимы на практике из-за высокой степени сложности, лежащей в основе задачи. Вероятностное распределение может быть представлено плотностью в многомерном (даже бесконечномерном) пространстве, в то время как динамика моментов может привести к неограниченной иерархии связанных нелинейных уравнений. В обоих случаях численное интегрирование детерминированными алгоритмами предельно сложно.

Альтернативным и очень мощным инструментом в численном анализе стохастических процессов представляются так называемые методы Монте-Карло или стохастические методы моделирования. Основная идея этих методов заключается в использовании алгоритмов численного генерирования независимых реализаций стохастического процесса и оценке всех математических ожиданий таких реализаций с помощью статистических средних. Стохастическое моделирование, таким образом, эквивалентно выполненным на компьютере экспериментам. Это приводит к результатам для отдельных испытаний с соответствующими вероятностями и дает, в дополнение к средним значениям, оценки для статистических ошибок интересующих величин.

В настоящей главе мы в некоторых деталях рассматриваем приложение методов Монте-Карло к стохастическим процессам в гильбертовом пространстве, которые были получены в главе 6. Независимо от того, является ли стохастический процесс кусочно-детерминированным или диффузионным процессом в гильбертовом пространстве, соответствующие отдельные реализации состоят из интервалов детерминированных эволюционных пе-

риодов, прерываемых внезапными скачками или нигде не дифференцируемыми траекториями. Соответствующие методы моделирования обоих типов процессов будут описаны в разделах 7.1 и 7.2 и проиллюстрированы в специальных примерах в разделе 7.3.

Чтобы численно определить матрицу плотности для открытой квантовой системы, можно непосредственно проинтегрировать уравнение для матрицы плотности или, иначе, промоделировать процесс для стохастической волновой функции и оценить матрицу ковариации. В общем, уравнение для матрицы плотности приводит к системе линейных уравнений, включающих N^2 комплексных переменных, N обозначает эффективную размерность гильбертова пространства. В противоположность этому, стохастическое моделирование требует лишь рассмотрения N комплексных переменных, характеризующих вектор состояний. Для большого N , то есть для высокой размерности гильбертова пространства, таким образом, ожидается, что моделирования методами Монте-Карло более эффективны, чем интегрирование уравнения для матрицы плотности, поскольку обеспечивают требуемый объем представителей, который не слишком быстро растет с N . Эта особенность будет проиллюстрирована в разделе 7.4, который дает детальное сравнение численной реализации метода стохастической волновой функции и интегрирования соответствующей матрицы плотности.

7.1. Численные алгоритмы моделирования КДП

В нескольких местах в главе 6 мы уже показали результаты, полученные при численном моделировании КДП в гильбертовом пространстве. Здесь мы обсудим детально методы моделирования и частные особенности соответствующих численных методов. Основная масса применений методов Монте-Карло в статистической физике и физике конденсированного состояния может быть найдена в сборнике под редакцией Биндера (Binder, 1995) и книге Ландау и Биндера (Landau, Binder, 2000).

7.1.1. Оценка математических ожиданий

Стохастический алгоритм моделирования служит для генерации выборки независимых реализаций стохастического процесса $\psi(t)$ для волновой функции. Обозначим эти реализации $\psi^r(t)$, $r = 1, 2, \dots, R$, где R есть число реализаций в выборке. Цель моделирования заключается в оценке математических ожиданий

$$M_t \equiv E(F[\psi, t]) = \int P[\psi, t]F[\psi, t]D\psi D\psi^* \quad (7.1)$$

или действительных функционалов $F[\psi, t]$ случайного вектора состояния, который может зависеть от времени явно. Объективная и последовательная оценка для математического ожидания M_t дается выборочным средним

$$\widehat{M}_t = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R F[\psi^r(t), t]. \quad (7.2)$$

Здесь и дальше крышка используется для обозначения оценки. Особенный интерес представляют математические ожидания

$$M_t \equiv E(\langle \psi(t) | B | \psi(t) \rangle) = \int P[\psi, t] \langle \psi | B | \psi \rangle D\psi D\psi^* \quad (7.3)$$

наблюдаемых B открытой системы, для которой оценка принимает вид

$$\widehat{M}_t = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \langle \psi^r(t) | B | \psi^r(t) \rangle. \quad (7.4)$$

Ясно, что оценка математического ожидания подвержена статическим ошибкам. Естественная мера для статистических флуктуаций случайной величины $F[\psi, t]$ есть дисперсия

$$\sigma_t^2 = E(F[\psi, t]^2) - \{E(F[\psi, t])\}^2. \quad (7.5)$$

В случае $F = \langle \psi | B | \psi \rangle$ (7.5) как раз задает дисперсию

$$\sigma_t^2 = \text{Var}_2(B), \quad (7.6)$$

которая уже включена в уравнения (5.14) и (5.68). Соответствующая оценка для статистических ошибок в определении M_t из ограниченной выборки объема R задается формулой

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{R(R-1)} \sum_{r=1}^R \left(F[\psi^r(t), t] - \widehat{M}_t \right)^2. \quad (7.7)$$

Величина $\widehat{\sigma}_t$ известна как стандартная ошибка среднего значения M_t . Для оценки среднего значения наблюдаемой B она задается как

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{R(R-1)} \sum_{r=1}^R \left(\langle \psi^r(t) | B | \psi^r(t) \rangle - \widehat{M}_t \right)^2. \quad (7.8)$$

Если реализации в выборке статистически независимы, стандартная ошибка $\hat{\sigma}_t$ как квадратный корень из объема выборки R

$$\hat{\sigma}_t \sim \frac{1}{\sqrt{R}}. \quad (7.9)$$

Это есть соотношение между стандартной ошибкой среднего значения и количеством реализаций выборки.

7.1.2. Генерирование реализаций процесса

Рассмотрим КДП в гильбертовом пространстве вида, изученного в разделе 6.1.1, который может быть представлен через стохастическое дифференциальное уравнение (см. (6.25))

$$d\psi(t) = -i \left(\hat{H} + \frac{i}{2} \sum_i \gamma_i \|A_i \psi(t)\|^2 \right) \psi(t) dt + \sum_i \left(\frac{A_i \psi(t)}{\|A_i \psi(t)\|} - \psi(t) \right) dN_i(t). \quad (7.10)$$

Пуассоновские инкременты $dN_i(t)$ удовлетворяют уравнениям (6.26) и (6.27), в то время как неэрмитовых гамильтониан \hat{H} задается уравнением (см. (6.13))

$$\hat{H} = H - \frac{i}{2} \sum_i \gamma_i A_i^\dagger A_i. \quad (7.11)$$

Также из раздела 6.1.1 известно, что кумулятивное распределение времени ожидания (6.21) для квантовых скачков задается

$$F[\tilde{\psi}, \tau] = 1 - \|\exp(-i\hat{H}\tau)\tilde{\psi}\|^2, \quad (7.12)$$

где τ представляет случайное время ожидания между двумя успешными скачками.

Из обсуждения в разделах 1.5.2 и 6.1.1 мы сразу видим, что тот же пример реализаций $\psi^r(t)$ процесса, определяемый уравнением (7.10) в интервале времени $[0, t_f]$, может быть сгенерирован посредством следующего алгоритма:

1. Полагаем, что нормированное состояние $\psi^r(t)$ было достигнуто через скачок в момент времени t , и устанавливаем $\psi^r(t) = \tilde{\psi}$. Если t – начальное время ($t = 0$), $\tilde{\psi}$ есть начальное состояние процесса, который должен быть отобран из начального распределения $P[\tilde{\psi}, t = 0]$.

2. Определяем случайное время ожидания τ согласно функции распределения (7.12). Это может быть сделано, например, выборкой случайного числа η , которое равномерно распределено на интервале $[0, 1]$ и определяемое через τ из уравнения

$$\eta = 1 - F[\tilde{\psi}, \tau] = \|\exp(-i\hat{H}\tau)\tilde{\psi}\|^2. \quad (7.13)$$

Для $\eta > q$ существует однозначное решение, q — дефект распределения времени ожидания, определяемый в уравнении (6.22). Для $\eta \leq q$ мы устанавливаем $\tau = \infty$, это означает, что дальнейших скачков не будет. В пределах временного интервала $[t, t + \tau]$ реализация в соответствии с временной эволюцией, задаваемой (6.15):

$$\psi^r(t + s) = \frac{\exp(-i\hat{H}s)\tilde{\psi}}{\|\exp(-i\hat{H}s)\tilde{\psi}\|}, \quad 0 \leq s \leq \tau. \quad (7.14)$$

3. В момент времени $t + \tau$ (если τ определено и $t + \tau < t_f$) происходит один из возможных скачков, обозначенных индексом i в уравнении (7.10). Выбираем определенный тип скачка i с вероятностью

$$p_i = \frac{\gamma_i \|A_i \psi^r(t + \tau)\|^2}{\sum_i \gamma_i \|A_i \psi^r(t + \tau)\|^2} \quad (7.15)$$

и заменяем

$$\psi^r(t + \tau) \rightarrow \frac{A_i \psi^r(t + \tau)}{\|A_i \psi^r(t + \tau)\|}. \quad (7.16)$$

4. Повторяем шаги с 1 по 3 до тех пор, пока не достигается желаемое время t_f , которое приводит к реализации $\psi^r(t)$ на всем временном интервале $[0, t_f]$.
5. Результатом является сгенерированная выборка реализаций $\psi^r(t)$, $r = 1, 2, \dots, R$, согласно этому алгоритму. Любая статистическая величина может быть оценена через соответствующее среднее ансамбля, как описано в предыдущем разделе.

Разберем отдельные части алгоритма более подробно.

7.1.3. Определение времени ожидания

Специфичной частью алгоритма моделирования является определение случайного времени ожидания.

7.1.3.1. Экспоненциальные распределения времени ожидания. Рассмотрим простейший случай, представленный экспоненциальным распределением времени ожидания

$$F[\tilde{\psi}, \tau] = 1 - \exp(-\Gamma\tau). \quad (7.17)$$

Такое распределение времени ожидания всегда появляется, когда суммарная интенсивность скачка не зависит от времени, то есть $\Gamma[\tilde{\psi}, \tau] = \Gamma = \text{const} > 0$. Если η равномерно распределенная случайная величина на интервале $[0, 1]$, время ожидания τ легко определяется с помощью уравнения (7.13), которое дает

$$\tau = -\frac{1}{\Gamma} \ln \eta. \quad (7.18)$$

Реализация соответствующих генераторов случайных чисел обсуждается, например, Прессом, Фланери, Текколским и Веттерлигом (Press, Flannery, Teukolsky, Vetterling, 1992) и Кнутом (Knuth, 1981).

7.1.3.2. Мультиэкспоненциальные распределения времени ожидания. Распределение времени ожидания, которое является суммой экспоненциальных функций, возникает, если операторы скачка A_i — собственные операторы гамильтониана H , что приводит к (см. (3.125))

$$\left[H, \sum_i \gamma_i A_i^\dagger A_i \right] = 0. \quad (7.19)$$

Этот случай был, например, в слабосвязанном основном уравнении (3.140) без внешних полей возбуждения. Отсюда следует, что H и положительный оператор $\sum_i \gamma_i A_i^\dagger A_i$ имеют общий собственный базис $\{|\alpha\rangle\}$, то есть

$$H|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle \quad (7.20)$$

и

$$\left(\sum_i \gamma_i A_i^\dagger A_i \right) |\alpha\rangle = \Gamma_\alpha |\alpha\rangle \quad (7.21)$$

с действительными собственными значениями E_α и $\Gamma_\alpha \geq 0$. Однако \hat{H} также диагонален в этом базисе и мы можем записать

$$\hat{H}|\alpha\rangle = \left(E_\alpha - \frac{i}{2}\Gamma_\alpha \right) |\alpha\rangle. \quad (7.22)$$

Отсюда следует, что распределение времени ожидания есть сумма экспоненциальных функций, чьи экспоненты задаются мнимыми частями собственных значений \widehat{H} . Соответственно, время ожидания τ определяется уравнением

$$\eta = \|\exp(-i\widehat{H}\tau)\tilde{\psi}\|^2 = \sum_{\alpha} |\langle \alpha | \tilde{\psi} \rangle|^2 \exp(-\Gamma_{\alpha}\tau). \quad (7.23)$$

Если $\tilde{\psi}$ пропорциональна одному из $|\alpha\rangle$, мы восстанавливаем экспоненциальное время ожидания (7.17). В общем уравнение (7.23) не решается аналитически относительно τ . Однако оно может быть решено численно при условии, что $|\alpha\rangle$ и соответствующие собственные значения Γ_{α} известны. Уравнение (7.23) также показывает, что мы имеем дефект, если $\Gamma_{\alpha} = 0$ для некоторого α с $\langle \alpha | \tilde{\psi} \rangle \neq 0$.

7.1.3.3. Основные распределения для времени ожидания. Второй шаг алгоритма моделирования, описанный в разделе 7.1.2, основывается на предположении, что распределение времени ожидания $F[\tilde{\psi}, t]$ известно явно, так что уравнение (7.13) можно решить относительно τ как аналитически, так и численно. Если $F[\tilde{\psi}, t]$ известно, описанный алгоритм обычно более эффективен, в частности, если случайный шаг времени τ становится большим и если аналитическое выражение для $\exp(-i\widehat{H}\tau)$ также известно.

Однако в общем случае ни детерминированная эволюция, ни распределение времени ожидания не известны явно. Время ожидания τ должно быть определенным вместе с численным решением детерминированной динамики. Для достижения этого, начинаем из нормированного начального состояния $\tilde{\psi}$ и решаем численно уравнение

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = -i\widehat{H}\psi(t), \quad (7.24)$$

которое дает ненормированный вектор состояний $\psi(t) = \exp(-i\widehat{H}t)\tilde{\psi}$, норма которого монотонно уменьшается. Согласно уравнению (7.13) время ожидания τ может быть определено проверкой после каждого шага интегрирования квадрата нормы, уменьшающегося до значения η . Таким образом, второй шаг алгоритма, заданного в разделе 7.1.2, может быть заменен следующей процедурой:

2. Возьмем случайную величину η , равномерно распределенную на интервале $[0, 1]$, и определим ненормированное решение $\psi(t)$ для линейного уравнения Шредингера (7.24), соответствующее начальному значению $\psi(0) = \tilde{\psi}$. Время ожидания τ тогда определяется условием

$$\|\psi(\tau)\|^2 = \eta. \quad (7.25)$$

Детерминированная эволюция между скачками принимает вид

$$\psi^r(t+s) = \frac{\psi(s)}{\|\psi(s)\|}, \quad 0 \leq s \leq \tau. \quad (7.26)$$

Такая форма алгоритма может быть предпочтительна при выполнении моделирования в общем случае. Для численного решения уравнения (7.24) между скачками часто удобно разложить волновую функцию по собственному базису гамильтониана H и привести (7.24) к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент ψ . Интегрирование может быть выполнено с использованием стандартных численных процедур, соответствующих детерминированным дифференциальным уравнениям. В заключение отметим, что приведенный выше алгоритм, в частности, условие (7.25) и уравнение (7.26), также применимы, конечно, если генератор в уравнении (7.24) зависит от времени, то есть если $\hat{H} = \hat{H}(t)$.

7.1.4. Выбор скачков

Согласно шагу 3 алгоритма, описанного в разделе 7.1.2, мы должны выбрать указанный квантовый скачок типа i с вероятностью p_i , задаваемой уравнением (7.15), и выполнить соответствующий переход (7.16). Индекс i , указывающий скачок, есть случайная величина со значениями в некотором индикаторном множестве $I = \{1, 2, \dots, K\}$, соответствующем распределению p_i .

По существу, есть 2 способа численно представить выбор скачков. Если индикаторное множество I мало, то i может быть извлечен с помощью метода линейного поиска (Gillespie, 1976, 1992). Для этого интервал $[0, 1]$ делится на K подинтервалов J_i длины p_i и извлекается равномерная случайная величина $x \in [0, 1]$. Индекс i тогда находится поиском интервала J_i , который содержит x . Важно отметить, что вероятности p_i должны быть больше, чем разрешающая способность генератора случайных чисел при применении этого алгоритма (Hanusse, Blanché, 1981).

Если значения вероятностей p_i приблизительно равны друг другу, то может быть более эффективным использование следующего метода отбора (Press, Flannery, Teukolsky, Vetterling, 1992). Возьмем 2 независимых случайных величины x и y в $[0, 1]$. Первая случайная величина обычно используется для выбора индекса $i = \text{int}(Kx) + 1$ из индикаторного множества I . Если вторая случайная величина удовлетворяет $y < p_i/p_{\max}$, этот индекс принимается, где p_{\max} обозначает максимум p_i . В противном случае i отклоняется и процедура повторяется.

Преимуществом метода отбора над линейным поиском является то, что первый является численно более эффективным, даже если число K элементов в индикаторном множестве становится большим. Соответствующее условие заключается в том, что произведение p_{\max} и K не должно быть больше, чем 1.

Линейный поиск и метод отбора неэффективны, если индексное множество I очень большое и если распределение p_i очень неоднородно. В этих случаях может быть полезным сгруппировать возможные скачки в логарифмические классы (Fricke, Schnakenberg, 1991) или использовать дерево поиска (Maksym, 1988; Blue, Beichl, Sullivan, 1995). Однако время, которое сохраняется благодаря улучшенному алгоритму поиска, может быть снова потеряно при актуализации структур данных (Breuer, Huber, Petruccione, 1996).

7.2. Алгоритмы для стохастических уравнений Шредингера

В этом разделе мы разовьем численные алгоритмы моделирования стохастических уравнений Шредингера (СУШ) диффузионного типа. Такие уравнения встречались в разделе 6.1.3 как диффузионные приближения соответствующих КДП в гильбертовом пространстве. Они также появляются в контексте фундаментальных моделей динамического коллапса (см. раздел 6.5.2).

Ниже мы обсудим четыре различных алгоритма решения СУШ, а именно: хорошо известную схему Эйлера, адаптированные для СУШ схемы Хьюна и Рунге–Кутта и схему второго порядка малости для дифференциальных уравнений, предложенных Платеном (Kloeden, Platen, 1992). Особый акцент делается на порядке сходимости этих схем, используемых как пример стохастического уравнения шредингеровского типа, встречающегося в разделе 6.4.2 (Breuer, Dorner, Petruccione, 2000). Методы, рассмотренные здесь, конечно, могут быть применены для других видов СУШ. В частности, они могут легко быть обобщены для моделирования СУШ, подразумевая комплексные инкременты вместо действительных винеровских.

7.2.1. Основные замечания по сходимости

Рассмотрим стохастическое уравнение Шредингера следующего общего Ито-вида

$$d\psi(t) = D_1(\psi(t))dt + D_2(\psi(t))dW(t) \quad (7.27)$$

с дрейфовым слагаемым

$$D_1(\psi) = -iH\psi + \frac{\gamma}{2} \left(\langle A + A^\dagger \rangle_\psi A - A^\dagger A - \frac{1}{4} \langle A + A^\dagger \rangle_\psi^2 \right) \psi \quad (7.28)$$

и диффузионным слагаемым

$$D_2(\psi) = \sqrt{\gamma} \left(A - \frac{1}{2} \langle A + A^\dagger \rangle_\psi \right) \psi, \quad (7.29)$$

где мы используем условное обозначение

$$\langle A \rangle_\psi \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad (7.30)$$

где $dW(t)$ есть действительный инкремент. Уравнение вида (7.27) было получено в разделе 6.4.2 взятием диффузионного предела для гомодинного фотодетектирования (см. уравнение (6.181)). Для простоты мы рассмотрим случай единственного оператора Линдблада A . Соответствующая матрица плотности задается уравнением

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H, \rho(t)] + \gamma \left(A\rho(t)A^\dagger - \frac{1}{2}A^\dagger A\rho - \frac{1}{2}\rho A^\dagger A \right) \equiv \mathcal{L}\rho(t). \quad (7.31)$$

Отметим, что уравнение (7.27) есть стохастическое дифференциальное уравнение с увеличивающимся шумом, что означает, что диффузионный член $D_2(\psi(t))$, который увеличивает винеровский инкремент, зависит от стохастической переменной $\psi(t)$. Шум называется аддитивным, если диффузионный член не зависит от стохастической переменной.

Нужно подчеркнуть, что $\psi(t)$ есть процесс в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_S открытой квантовой системы. Он, таким образом, в общем представляет процесс в бесконечномерном векторном пространстве. Однако во многих интересующих случаях диссипативное поведение уравнений движения гарантирует, что динамика ограничивается конечномерным подпространством \mathcal{H}_S . Это обосновывается физически необходимостью ограничиться конечномерными пространствами, то есть мы можем рассматривать уравнение (7.27) как процесс в эффективном конечномерном пространстве.

Рассмотрим теперь численную схему для интегрирования уравнения (7.27) на интервале времени $[t_0, t_0 + T]$. Такая схема приводит к дискретному приближению по времени ψ_k для точного процесса $\psi_k(t)$ при временах $t_k \equiv t_0 + k\Delta t$, где $k = 0, \dots, n = T/\Delta t$. Дискретизация не обязана быть эквидистантной, но для упрощения представления здесь это будет

предположено. В этом разделе ψ_k обозначает точный процесс, определенный уравнением (7.27). Аналогично, мы обозначаем

$$\rho_k = E[|\psi_k\rangle\langle\psi_k|] \quad (7.32)$$

дискретно-временную аппроксимацию матрицы плотности, тогда как

$$\rho(t) = E[|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|] \quad (7.33)$$

есть точная матрица плотности, удовлетворяющая уравнению Линдбла-да (7.31).

Для того чтобы охарактеризовать поведение сходимости численных схем, обсуждаемых ниже, мы сравним дискретное приближение ρ_k с разложением в ряд Тейлора точной матрицы плотности $\rho(t)$, которое дается выражением

$$\rho(t + \Delta t) = \rho(t) + \mathcal{L}\rho(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathcal{L}^2\rho(t)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (7.34)$$

Без потери общности мы всегда будем полагать, что задано детерминированное (то есть четкое) начальное состояние $\psi_0 \equiv \psi(t_0)$. Одношаговая ошибка численной схемы может быть выражена через разницу

$$\rho_1 - \rho(t_1) = \mathcal{O}(\Delta t^{\beta'}), \quad (7.35)$$

что означает, что схема воспроизводит разложение в ряд Тейлора $\rho(t)$, включая члены порядка $\beta' - 1$ по Δt .

Довольно просто доказать, что интегрирование по ограниченному интервалу времени $[t_0, t_0 + T]$ уменьшает порядок сходимости на единицу, так как нам нужно $n = T/\Delta t$ временных шагов для вычисления плотности в момент времени $t_0 + T = t_n$, то есть

$$\rho_n - \rho(t_n) = \mathcal{O}(\Delta t^\beta) \quad (7.36)$$

с $\beta = \beta' - 1$. Если это уравнение удовлетворяет численной схеме, то будем говорить, что рассматривается схема порядка β .

Уравнение (7.36) является специальным случаем *слабой* сходимости порядка β . Степень приближения стохастического дифференциального уравнения может быть также охарактеризована понятиями *сильной* сходимости (Kloeden, Platen, 1992). Если численный алгоритм приводит к аппроксимации ψ_n для $\psi(t_n)$, удовлетворяющей

$$E[\|\psi_n - \psi(t_n)\|] \leq \mathcal{O}(\Delta t^\beta) \quad (7.37)$$

для достаточно малого Δt , то говорится, что схема сходится сильно в порядке β . Это определение налагает условие на близость случайных величин ψ_n и $\psi(t_n)$ в конце интервала интегрирования. В противоположность этому, слабая сходимость требует только то, что вероятностные распределения ψ_n и $\psi(t_n)$ близки друг к другу, что является наиболее слабым критерием. На практике часто интересуются только этим слабым видом сходимости, например, при рассмотрении приближения функционалов для стохастической величины.

7.2.2. Схема Эйлера

Схема Эйлера, вероятно, является простейшим рекурсивным алгоритмом для получения приближения вектора состояний. Она имеет вид

$$\psi_{k+1} = \psi_k + D_1(\psi_k)\Delta t + D_2(\psi_k)\Delta W_k. \quad (7.38)$$

Винеровские инкременты ΔW_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, есть независимые случайные гауссовые величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Δt , индекс k показывает различные реализации на каждом шаге. Таким образом, мы можем записать

$$\Delta W_k = \sqrt{\Delta t}\xi_k, \quad (7.39)$$

где ξ_k есть случайная величина гауссова типа с математическим ожиданием ноль и *единичной* дисперсией, то есть случайная величина, подчиняющаяся стандартному нормальному распределению. Следовало бы упомянуть, что использование случайных величин гауссова типа не является необходимым, если речь идет о сходимости уравнения в смысле (7.36). Могут быть использованы другие случайные величины, которые совпадают только в первом и втором моментах со стандартным нормальным распределением.

Легко показать, что уравнение (7.36) удовлетворяется при $\beta = 1$. Схема Эйлера, таким образом, дает слабую схему порядка 1. Несмотря на низкий уровень сходимости, алгоритм Эйлера полезен, так как он очень легок для численного представления и часто дает результаты разумной степени приближения. В общем случае, схема не сохраняет норму вектора состояния, в противоположность СУШ (7.27). Вектор состояния поэтому должен нормироваться после каждой итерации.

7.2.3. Схема Хьюна

Следующий метод, который мы будем называть схемой Хьюна, есть обобщение метода Хьюна, известного из численного интегрирования де-

терминированных дифференциальных уравнений. Она определяется рекурсивным соотношением

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{1}{2} \left\{ D_1(\psi_k) + D_1(\tilde{\psi}_k) \right\} \Delta t + D_2(\psi_k) \Delta W_k \quad (7.40)$$

с

$$\tilde{\psi}_k = \psi_k + D_1(\psi_k) \Delta t + D_2(\psi_k) \Delta W_k. \quad (7.41)$$

ΔW_k снова принимает вид уравнения (7.39). При исчезновении диффузии метод Хьюна становится методом для детерминированных дифференциальных уравнений. Это, в свою очередь, означает, что алгоритм Хьюна приводит к соотношению (7.36) с $\beta = 1$. Такая схема порядка 1 подобна методу Эйлера. Это контрастирует с СУШ с аддитивным шумом, где метод Хьюна действительно обеспечивает второй порядок сходимости.

7.2.4. Схема Рунге–Кутта четвертого порядка

Для детерминированных дифференциальных уравнений существует большое разнообразие численных методов, и легко ошибиться при эвристическом изменении этих методов с целью интегрирования СУШ. Следующий пример показывает, что осторожность действительно разумна.

Хорошо известная численная схема для детерминированных дифференциальных уравнений есть метод Рунге–Кутта четвертого порядка. Эвристическая модификация для приближенного решения СУШ получается, если на каждом шаге по времени интегрировать дрейф методом Рунге–Кутта, а диффузионное слагаемое СУШ по схеме Эйлера. Это приводит к следующей схеме:

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{1}{6} \left\{ \psi_k^1 + 2\psi_k^2 + 2\psi_k^3 + \psi_k^4 \right\} \Delta t + D_2(\psi_k) \Delta W_k \quad (7.42)$$

с

$$\psi_k^1 = D_1(\psi_k), \quad (7.43)$$

$$\psi_k^2 = D_1 \left(\psi_k + \frac{1}{2} \Delta t \psi_k^1 \right), \quad (7.44)$$

$$\psi_k^3 = D_1 \left(\psi_k + \frac{1}{2} \Delta t \psi_k^2 \right), \quad (7.45)$$

$$\psi_k^4 = D_1(\psi_k + \Delta t \psi_k^3). \quad (7.46)$$

Порядок сходимости снова может быть определен расчетом разницы в уравнении (7.36). Удивительным результатом является то, что схема является

порядка $\beta = 1$. Стохастическое обобщение метода Рунге–Кутта сходится с порядком 1 в противоположность методу Рунге–Кутта, используемого для детерминированных волновых уравнений, где порядок сходимости 4.

Из этого примера можно видеть, что общие простые эвристические обобщения схем Рунге–Кутта высокого порядка неизбежно приводят к методам высокого порядка для СУШ. Приведенный выше метод, конечно, сходится, но в общем случае он не будет обладать преимуществом перед методом Эйлера, например.

7.2.5. Схема второго порядка малости

Заключительный алгоритм, который мы рассмотрим, предложен Платеном (Kloeden, Platen, 1992). В нашей форме записи эта схема представлена рекурсивным соотношением

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} = & \psi_k + \frac{1}{2} \left(D_1(\tilde{\psi}_k) + D_1(\psi_k) \right) \Delta t + \\ & + \frac{1}{4} \left(D_2(\psi_k^+) + D_2(\psi_k^-) + 2D_2(\psi_k) \right) \Delta W_k + \\ & + \frac{1}{4} \left(D_2(\psi_k^+) - D_2(\psi_k^-) \right) \{(\Delta W_k)^2 - \Delta t\} \Delta t^{-1/2}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

где

$$\tilde{\psi}_k = \psi_k + D_1(\psi_k) \Delta t + D_2(\psi_k) \Delta W_k, \quad (7.48)$$

$$\psi_k^\pm = \psi_k + D_1(\psi_k) \Delta t \pm D_2(\psi_k) \sqrt{\Delta t}. \quad (7.49)$$

Здесь, инкременты ΔW_k должны удовлетворять определенным условиям. Условия удовлетворены, если удовлетворяется уравнение (7.39). Для случая исчезновения шума схема сводится к схеме Хьюна для детерминированных дифференциальных уравнений.

Снова выполняя анализ ошибок, находим, что платеновская схема имеет порядок сходимости $\beta = 2$. Таким образом, в противоположность алгоритмам, ранее изученным, платеновская схема действительно есть схема более высокого порядка в определенном выше смысле. Это проиллюстрировано в приведенных ниже примерах.

7.3. Примеры

В этом разделе мы применим алгоритмы моделирования для КДП и стохастических уравнений Шредингера к некоторым указанным примерам.

7.3.1. Затухающий гармонический осциллятор

7.3.1.1. Моделирование КДП. Мы изучаем следующий процесс для затухающего гармонического осциллятора (см. раздел 6.7)

$$d\psi(t) = -\frac{\gamma}{2}(a^\dagger a - \langle\psi(t)|a^\dagger a|\psi(t)\rangle)\psi(t)dt + \left(\frac{a\psi(t)}{\|a\psi(t)\|} - \psi(t)\right)dN(t). \quad (7.50)$$

Промоделируем это уравнение для простейшего начального условия, то есть для состояния с заданным числом частиц $\psi(0) = |n\rangle$. В этом случае детерминированные эволюционные периоды процесса тривиальны, так как

$$\exp(-i\hat{H}t)|n\rangle = \exp(-\gamma nt/2)|n\rangle. \quad (7.51)$$

Также скачки тривиально задаются условием

$$|n\rangle \rightarrow \frac{a|n\rangle}{\|a|n\rangle\|} = |n-1\rangle. \quad (7.52)$$

Так как распределение времени ожидания есть

$$F[|n\rangle, \tau] = 1 - \|\exp(-i\hat{H}\tau)|n\rangle\|^2 = 1 - \exp(-\gamma n\tau), \quad (7.53)$$

мы находим, что случайное время ожидания может быть получено из уравнения

$$\tau = -\frac{1}{\gamma n} \ln \eta, \quad (7.54)$$

где η есть равномерно распределенная случайная величина на интервале $[0, 1]$.

Рис. 7.1 показывает реализацию процесса для начального состояния $\psi(0) = |n_0\rangle = |9\rangle$. В качестве примера расчета математических ожиданий мы также показываем на рис. 7.2 среднее оператора числа частиц, определенное из выборки из $R = 100$ реализаций как (см. (7.3))

$$\widehat{M}_t = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \langle \psi^r(t) | a^\dagger a | \psi^r(t) \rangle. \quad (7.55)$$

Аналитическое выражение для этой величины есть, конечно, следующее:

$$\langle a^\dagger a(t) \rangle = n_0 \exp(-\gamma t). \quad (7.56)$$

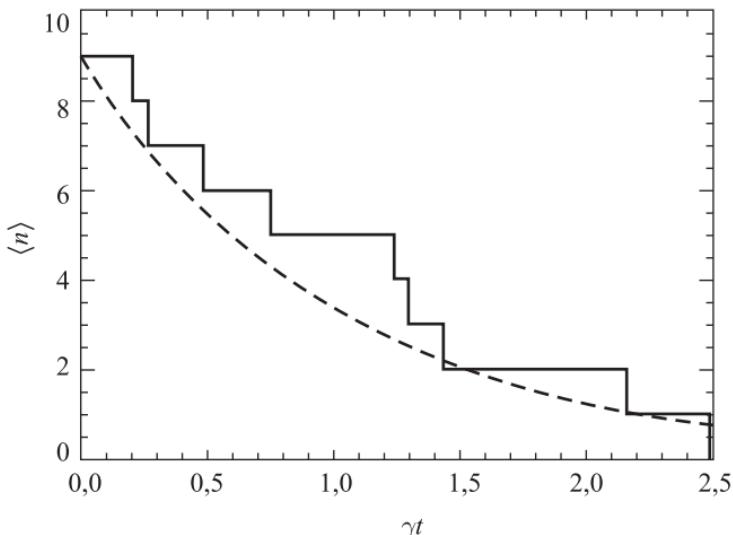


Рис. 7.1. Одна реализация процесса (7.50) для затухающего гармонического осциллятора с начальным условием $|n_0\rangle = |9\rangle$ (непрерывная линия). Штриховая линия представляет аналитическое выражение (7.56) для математического ожидания оператора числа частиц.

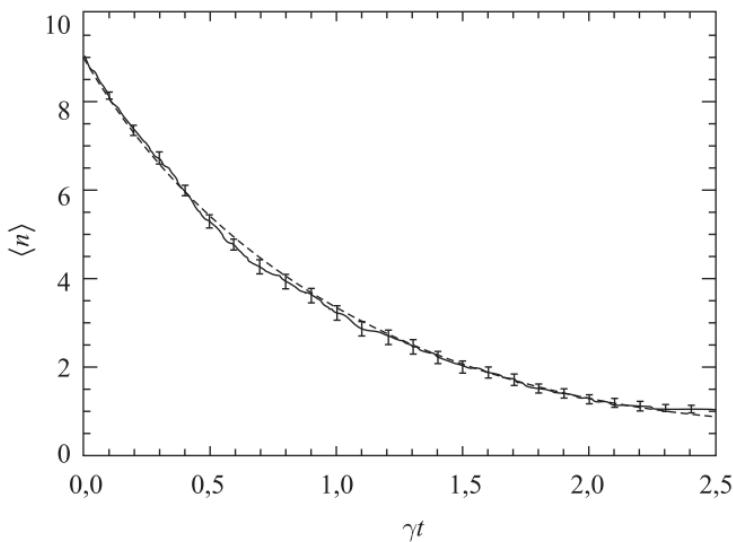


Рис. 7.2. Усреднение по 100 реализациям затухающего гармонического осциллятора. Начальное условие $|n_0\rangle = |9\rangle$. Пунктирная линия дает аналитический результат.

Согласно уравнению (7.4) стандартная ошибка для этого среднего значения представляется выражением

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{R(R-1)} \sum_{r=1}^R \left(\langle \psi^r(t) | a^\dagger a | \psi^r(t) \rangle - \widehat{M}_t \right)^2. \quad (7.57)$$

Значения для стандартной ошибки указываются на рис. 7.2 коридорами ошибок.

7.3.1.2. Моделирование СУШ. Стохастическое уравнение Шредингера (7.27) для затухающего гармонического осциллятора есть

$$\begin{aligned} d\psi(t) = & \frac{\gamma}{2} \left(\langle a + a^\dagger \rangle_{\psi(t)} a - a^\dagger a - \frac{1}{4} \langle a + a^\dagger \rangle_{\psi(t)}^2 \right) \psi(t) dt + \\ & + \sqrt{\gamma} \left(a - \frac{1}{2} \langle a + a^\dagger \rangle_{\psi(t)} \right) \psi(t) dW(t). \end{aligned} \quad (7.58)$$

В численном моделировании вектор состояния представляется в фоковском базисе состояний $|n\rangle$. Снова начальное состояние берется $\psi(0) = |n_0 = 9\rangle$, а гильбертово пространство обрезается до $n_{\max} = 12$, то есть моделирование было выполнено в подпространстве размерности $N = 13$.

Отдельная реализация процесса изображена на рис. 7.3. Сплошная линия показывает аналитическую кривую (7.56). Тонкая линия показывает решение, посчитанное с учетом второго порядка малости в схеме Платена, а жирная линия есть решения, посчитанные другими методами, которые не различимы в этом примере. Величина шага по времени есть $\Delta t = 0,01$. Отметим, что одна и та же последовательность псевдослучайных чисел использовалась для каждого пробега, чтобы подчеркнуть различия или сходства между методами.

Для того чтобы изучить характер сходимости, мы рассчитаем среднее значение (7.55) оператора числа частиц при фиксированном времени T для $R = 10^5$ реализаций и для различных шагов Δt . Результаты показаны на рис. 7.4. Коридоры ошибок не нарисованы на этом рисунке, так как они были бы приблизительно размером с графические символы. Очевидно, платеновская схема второго порядка малости сходится очень хорошо уже для вполне больших размеров шага в сравнении с другими схемами. Эвристический метод Рунге–Кутта показывает наихудшую характеристику сходимости.

Основываясь на знании порядка сходимости, можно подобрать линейные функции (в случае методов Эйлера, Хьюна, Рунге–Кутта) или квадра-

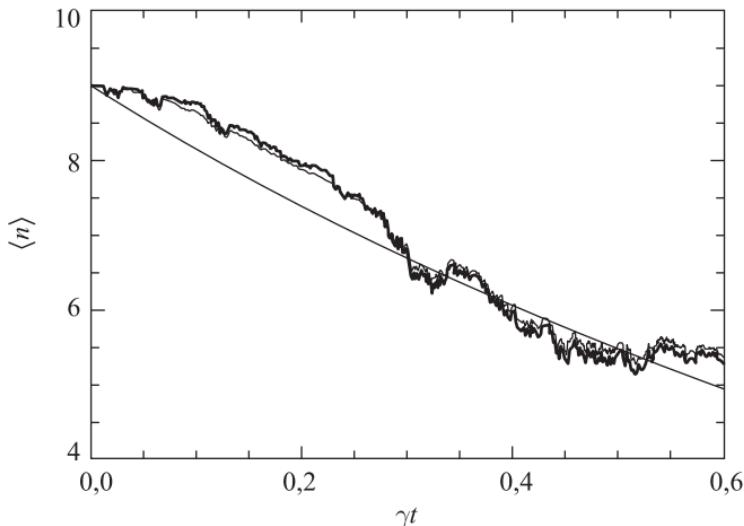


Рис. 7.3. Отдельная реализация среднего для оператора числа частиц для затухающего гармонического осциллятора. Тонкая линия соответствует слабой схеме второго порядка, толстая линия схемам Эйлера, Хьюна и Рунге – Кутта (не различимы на масштабе графика). Гладкая линия представляет аналитический результат (7.56).

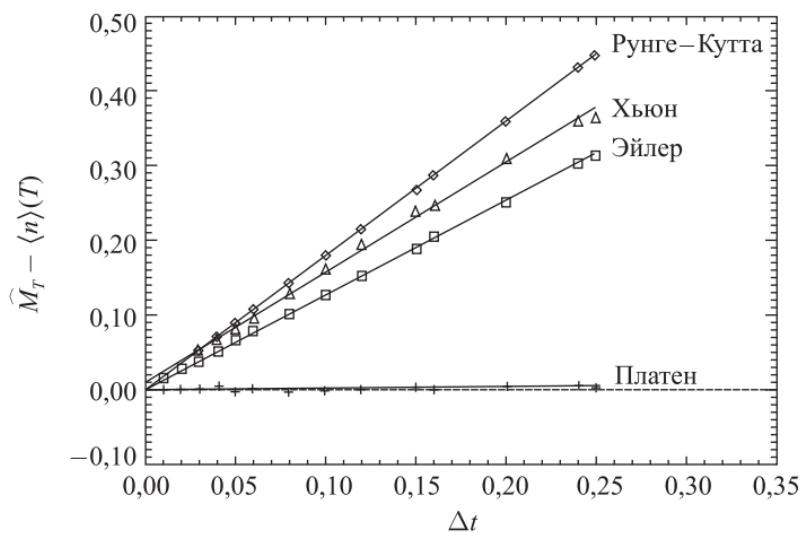


Рис. 7.4. График среднего числа фотонов \widehat{M}_T относительно аналитически вычисленного значения $\langle n(T) \rangle$ при $\gamma T = 1,2$ в зависимости от размера шага Δt для различных методов. Сплошные линии соответствуют линейной и квадратичной подгонке.

тические функции (в случае платеновских методов) для точек данных. Соответствующие объекты (также показаны на рис. 7.4) находятся в хорошем согласии с точками данных и подтверждают результаты, полученные в разделе 7.2.1.

Другим критерием оценки численных алгоритмов является, конечно, требуемое для достижения нужной точности результатов время ЦП. Рис. 7.5 показывает время ЦП (нормированное на единицу) в сравнении с ошибками для данных, показанных на рис. 7.4. Мы видим, что схема Платена демонстрирует наилучшие показатели, за ней следует схема Эйлера.

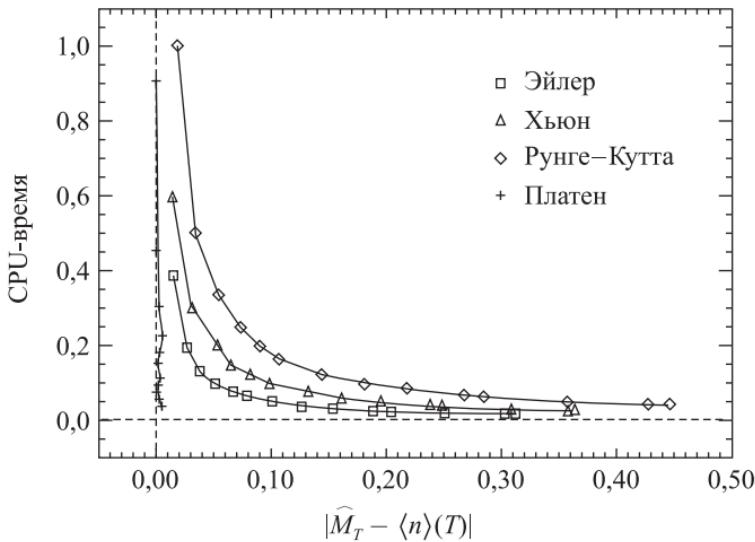


Рис. 7.5. Время ЦПУ (нормированное на единицу) в зависимости от абсолютной ошибки для данных рис. 7.4.

7.3.2. Возбуждаемая двухуровневая система

В качестве второго примера мы рассмотрим КДП, задаваемый уравнением

$$d\psi(t) = -i \left(\hat{H} + \frac{i\gamma}{2} \|\sigma_- \psi(t)\|^2 \right) \psi(t) dt + \left(\frac{\sigma_- \psi(t)}{\|\sigma_- \psi(t)\|} - \psi(t) \right) dN(t). \quad (7.59)$$

Как показано в разделе 6.3, это уравнение описывает прямое фотодетектирование управляемой возбуждаемой системы (см. (6.129)), в то время как стохастическое уравнение Шредингера

$$\begin{aligned} d\psi(t) = & -iH_L\psi(t)dt + \\ & + \frac{\gamma}{2} \left(\langle \sigma_- + \sigma_+ \rangle_\psi \sigma_- - \sigma_+ \sigma_- - \frac{1}{4} \langle \sigma_- + \sigma_+ \rangle_\psi^2 \right) \psi(t)dt + \\ & + \sqrt{\gamma} \left(\sigma_- - \frac{1}{2} \langle \sigma_- + \sigma_+ \rangle_\psi \right) \psi(t)dW(t) \end{aligned} \quad (7.60)$$

соответствует гомодинному фотодетектированию (см. раздел 6.4). В численном моделировании мы начинаем с атома в основном состоянии $|g\rangle$ и считаем вероятность

$$\rho_{11}(t) = \langle e | \rho(t) | e \rangle \quad (7.61)$$

нахождения атома в возбужденном состоянии $|e\rangle$. Из выборки реализаций этой вероятности оценивается детерминированное среднее

$$\widehat{M}_t = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R |\langle e | \psi^r(t) \rangle|^2, \quad (7.62)$$

в то время как соответствующая стандартная ошибка $\widehat{\sigma}_t$ задается как

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{R(R-1)} \sum_{r=1}^R \left(|\langle e | \psi^r(t) \rangle|^2 - \widehat{M}_t \right)^2. \quad (7.63)$$

Обсуждение алгоритма для генерации реализаций кусочно-детерминированного процесса можно оставить кратким, так как мы уже собрали все относящиеся к делу формулы для распределения времени ожидания и скачков в разделе 6.3. Согласно уравнениям (7.13) и (6.133) случайное время ожидания τ может быть определено уравнением

$$\eta = \exp(-\gamma\tau/2) \left(1 + \frac{\gamma^2}{8\mu^2} \sin^2 \mu\tau + \frac{\gamma}{2\mu} \sin \mu\tau \cos \mu\tau \right) \quad (7.64)$$

для τ . Мы использовали обычную численную процедуру при нахождении корня этого уравнения. На рис. 7.6 мы показываем $|\langle e | \psi(t) \rangle|^2$ для одной реализации КДП. Соответствующее среднее по ансамблю из 1000 реализаций можно видеть на рис. 7.7, который ясно показывает сходимость алгоритма.

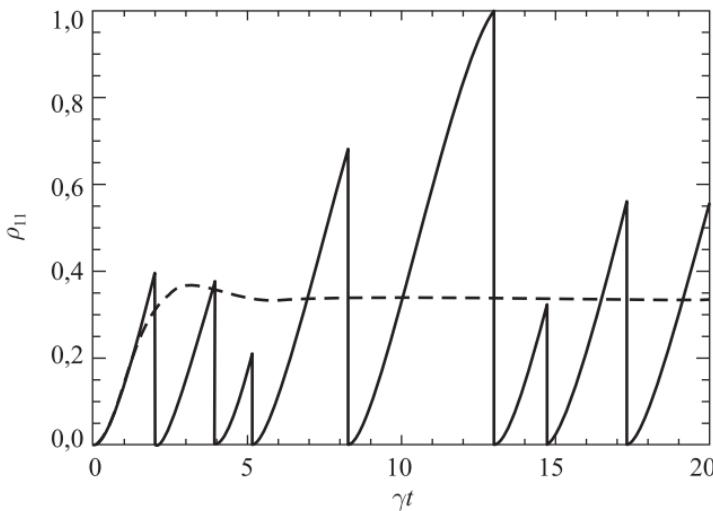


Рис. 7.6. Одна реализация КДП (7.59) для возбуждаемого двухуровневого атома. Непрерывная линия показывает ρ_{11} , посчитанное из реализации. Штриховая линия представляет аналитическое решение для ρ_{11} , согласно уравнению (3.289). Параметры: $\Omega = \gamma = 0,4$.

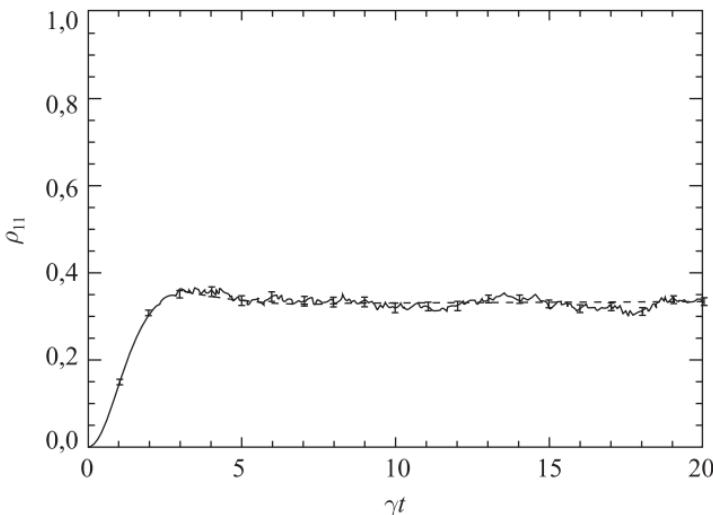


Рис. 7.7. Усреднение по 1000 реализациям КДП (7.59) для возбуждаемого двухуровневого атома. Непрерывная линия показывает ρ_{11} , посчитанные из усреднения по реализациям. Штриховая линия представляет аналитическое решение для ρ_{11} , соответствующее уравнению (3.289). Стандартная ошибка среднего указывается областями ошибок. Параметры те же, что и для рис. 7.6.

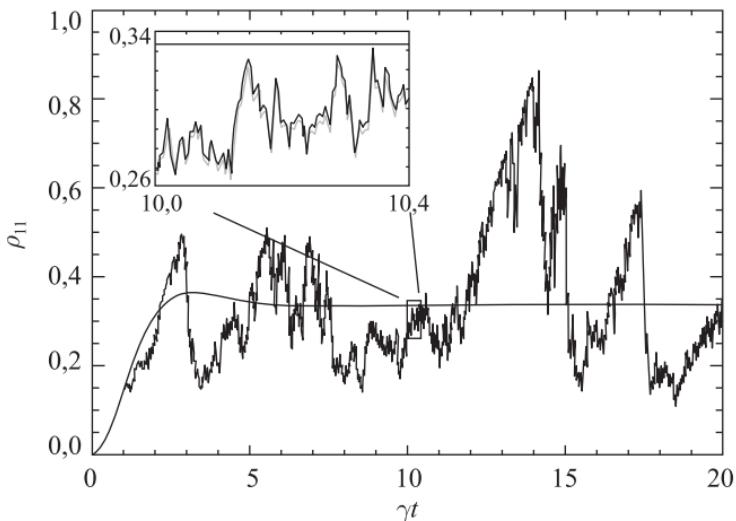


Рис. 7.8. Отдельная реализация для ρ_{11} , подсчитанная из уравнения (7.60), согласно другим численным схемам раздела 7.2 с шагом $\Delta t = 0,01$. Результаты не различаются в масштабе рисунка. Гладкая линия дает аналитическое решение (3.289). Вкладка показывает увеличение малой части рисунка (тонкая линия — схема Платена; толстая линия — схемы Эйлера, Хьюна и Рунге–Кутта). Параметры: $\Omega = \gamma = 0,4$.

Теперь обратим внимание на моделирование стохастического уравнения Шредингера (7.60). Отдельные реализации, рассчитанные различными численными методами, введенными в разделе 7.2, показаны на рис. 7.8. На вставке, показанной на увеличенной части картинки, видно, что слабая схема порядка 2 отличается от других схем, которые еще с трудом отличимы на увеличенном масштабе.

Результаты моделирования с различными размерами шага для $R = 5 \times 10^5$ реализаций на точку показаны на рис. 7.9. Для ясности мы показываем интервалы ошибок только в тех точках, которые не очень близки к другим точкам. Они посчитаны согласно уравнению (7.63). Пренебрегаемые интервалы ошибок того же размера. В любом из четырех случаев численные результаты находятся в хорошем согласии с аналитическими предсказаниями. Метод Рунге–Кутта кажется лучше по сходимости, чем схемы Эйлера или Хьюна для больших размеров шага. Однако, если принять во внимание соответствующее времена ЦП, как это сделано на рис. 7.10, становится очевидно, что эти методы обладают более-менее равным соотношением скорость–точность. Каким бы то ни было образом, платеновская схема

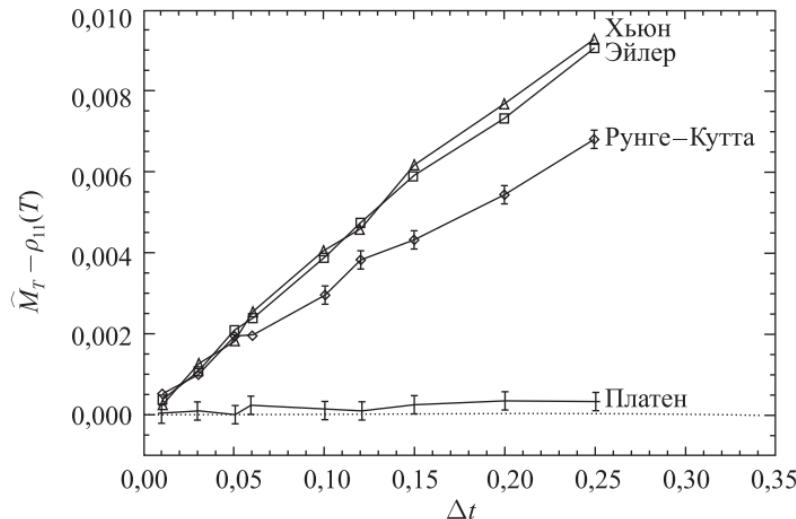


Рис. 7.9. Разность между оценкой среднего $|\langle e | \psi^r(T) \rangle|^2$ и точными значениями для различных величин шага и методов. Параметры: $\Omega = 0,4$, $\gamma = 0,4$ и $\gamma T = 8,4$.

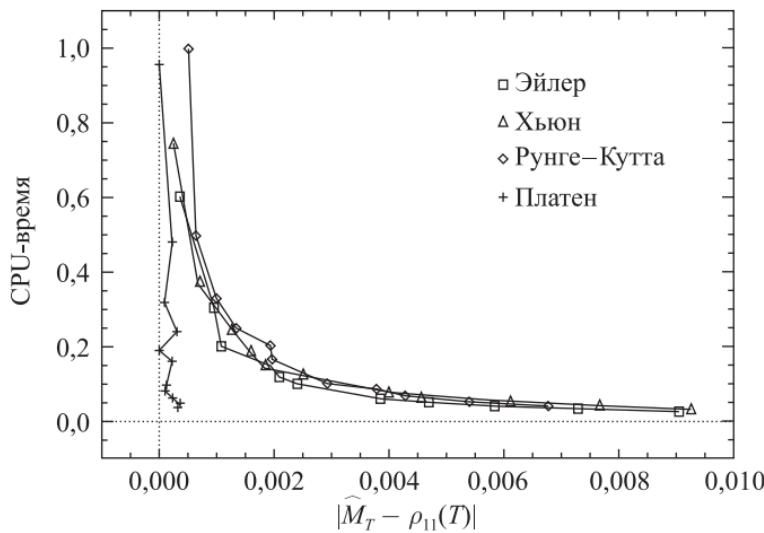


Рис. 7.10. Время ЦПУ (нормированное на единицу) в зависимости от абсолютной ошибки для данных точек рис. 7.9.

снова показывает наилучшее поведение. Ситуация меняется, если выбираются параметры такие, что $\gamma \ll \Omega$, то есть если детерминированная часть СУШ преобладает над шумовой частью. Метод Рунге–Кутта показывает лучшую характеристику, в то время как платеновская схема характеризуется как метод Хьюна. Конечно, как и ожидалось для $\gamma \ll \Omega$, детерминированная часть уравнения движения доминирует и, поэтому, метод Рунге–Кутта четвертого порядка становится более эффективным.

7.4. Исследование численной реализации

Алгоритмы Монте-Карло часто являются способом изучения систем высокой размерности, для которых детерминированные расчеты, основанные на численном интегрировании уравнений движения, находятся далеко за пределами возможностей любого компьютера. С другой стороны, детерминированные методы могут быть предпочтительнее для низкоразмерных систем. В этом разделе мы хотим представить систематический анализ численной эффективности метода волновых функций Монте-Карло и сравнить его с интегрированием соответствующего уравнения для матрицы плотности. Наибольший интерес представляет зависимость времени решения задачи от размерности системы N . Будет показано, что время потребления ЦП для обоих подходов может быть выражено по языке простых степенных законов.

7.4.1. Численная эффективность и законы масштабирования

Результаты моделирования методом Монте-Карло всегда несут в себе статистические ошибки. Эти ошибки, в свою очередь, связаны с числом реализаций, которые генерируются в моделировании. Однако суммарное время ЦП, требуемое моделированием Монте-Карло, критично зависит от желаемой точности. Типичной задачей численного исследования может быть, например, «оценка математического ожидания энергии с относительной ошибкой 1 %», или «расчет матрицы плотности с точностью лучше, чем 10^{-4} в каждом из ее элементов». Тогда непременно возникает вопрос, требующий ответа: при каких обстоятельствах стохастическое моделирование предпочтительно?

Критическая величина для относительной характеристики точности есть число реализаций R . Зависимость ошибок моделирования от размера задачи заслуживает более детального обсуждения. Для этого давайте обозначим N число комплексных переменных, которые использованы для численного представления волновой функции, то есть число базисных сос-

точний. Соответственно, число комплексных переменных, которые необходимы для представления матрицы плотности, тогда есть $N^2/2$. Соотношение (7.9) позволяет нам написать следующее уравнение:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\lambda_B(N)}{R}, \quad (7.65)$$

в котором множитель $\lambda_B(N)$ принимает во внимание зависимость статистической ошибки от наблюдаемой B и от размера системы N , но не зависит от размера выборки R . При использовании достаточно большой выборки реализаций $\lambda_B(N)$ может быть определено соответствующим уравнением (7.65) для моделируемых данных. Тогда уравнение (7.65) может быть решено для R

$$R \equiv R(N) = \frac{\lambda_B(N)}{\hat{\sigma}_t^2}. \quad (7.66)$$

Это число реализаций, которое необходимо для достижения данной точности $\hat{\sigma}_t$ для наблюдаемой B и размерности системы N . Если $\lambda_B(N)$ изменяется как степенная функция от размерности системы $\lambda_B(N) \sim N^{-x}$, то может быть принята следующая классификация (Ferrenberg, Landau, Binder, 1991):

1. Если $x = 1$, наблюдаемая B сильно самоусредняема.
2. Если $0 < x < 1$, наблюдаемая B самоусредняема.
3. Если $x = 0$, наблюдаемая B не самоусредняема.

В рамках такого подхода мы можем исследовать характеристику масштабирования времени ЦП, требуемого детерминированным и стохастическим подходом для численной оценки математических ожиданий с установленной точностью.

В случае подхода на основе уравнения для матрицы плотности часть команд численного интегрирования, которые доминируют при потреблении времени ЦП, есть расчет генератора $\mathcal{L}\rho$ уравнения Линнблада. Одно такое вычисление для достаточно большого N требует количество времени ЦП, пропорциональное степени N , а ЦП время, необходимое для интегрирования матрицы плотности на заданном физическом интервале времени, в основном порядке по N есть

$$T_{DME} = k_1 s_1(N) N^\beta. \quad (7.67)$$

Здесь $s_1(N)$ — число раз, которое должна вычисляться величина $\mathcal{L}\rho$. k_1 и β зависят от типа указанной задачи, но не от N . Кроме того, k_1 , в частности, зависит от формы представления данных в компьютере.

Аналогично, во многих примерах с жестко ограниченной по времени частью стохастического моделирования является расчет генератора $\hat{H}\psi$, а требуемое время ЦП для моделирования есть

$$T_{StS} = k_2 R(N) s_2(N) N^\alpha. \quad (7.68)$$

$R(N)$ есть число реализаций процесса, которое генерируется для обработки системы размера N , $s_2(N)$ есть число вычислений $\hat{H}\psi$ для реализации и k_2 аналогично k_1 .

Во многих ситуациях $s_1(N)$ и $s_2(N)$ будут приблизительно равны. При условии, что используется процедура подобного численного интегрирования, это случай, когда наименьший масштаб времени для динамики волновой функции примерно равен такому же масштабу для матрицы плотности. Так как мы хотим отделить эффекты размерности системы от динамических явлений, это один из наиболее интересных для нас случаев, а пример, представленный в разделе 7.4.2, иллюстрирует этот случай.

Коротко отметим, что существуют также ситуации, в которых $s_1(N)$ и $s_2(N)$ весьма различны. В общем их отношение может зависеть от N , а они неизбежно растут с физическим временем тем же образом, как в изучаемой нами системе. Рассмотрим случай, где масштаб времени динамики *отдельной* реализации стохастического процесса варьируется в течение его временной эволюции в широких пределах, как, например, в лазерном охлаждении (см. раздел 8.3). Моделирование одной реализации будет содержать сетки с очень длинными шагами времени, прерываемые фазами с более быстрым развитием и короткими шагами времени. С другой стороны, интегратор уравнения матрицы плотности, который описывает динамику целого ансамбля, должен всегда адаптироваться к масштабу малого времени. Ясно, что в таких случаях метод стохастической волновой функции предпочтительнее.

Число операций с плавающей запятой для вычисления $\mathcal{L}\rho$ и вычисления $\hat{H}\psi$ отличается множителем N и, как ожидается,

$$\beta \approx \alpha + 1. \quad (7.69)$$

Это соотношение будет проверено в примере ниже. Делая вывод из этих рассмотрений, мы можем записать уравнения (7.67) и (7.68) в более краткой форме

$$T_{DME} = k_1 N^{\alpha+1}, \quad (7.70)$$

$$T_{StS} = k_2 N^{\alpha-x}. \quad (7.71)$$

Здесь мы получаем, что число шагов s_1 и s_2 приблизительно равно и может быть включено в константы α , k_1 и k_2 . Представление метода стохастической волновой функции в сравнении с интегрированием матрицы плотности может быть измерено разницей между показателями степени, которая есть 1 в случае, когда нет самоусреднения ($x = 0$), и 2 в сильном самоусреднении (случае ($x = 1$)).

7.4.2. Затухающий возбужденный осциллятор Морзе

Проиллюстрируем законы масштабирования (7.70) и (7.71) для временных затрат ЦП. Для этого мы рассмотрим нетривиальный пример, а именно: затухающий осциллятор Морзе, который возбуждается зависящей от времени силой. Будет видно, что законы масштабирования очень хорошо выполняются в этой нелинейной проблеме.

7.4.2.1. Описание модели. Гамильтоновское описание когерентной части динамики принимает вид

$$H_S(t) = H_M + H_L(t), \quad (7.72)$$

где

$$H_M = \frac{1}{2m}p^2 + V(q) \quad (7.73)$$

и

$$V(q) = D[1 - \exp(-bq)]^2 \quad (7.74)$$

есть потенциал Морзе. Гамильтониан Морзе (7.73) может быть использован для модели, например, молекулярной степени свободы в пределах отдельной электронной поверхности потенциальной энергии. При соответствующем выборе параметров в результате получается прозрачное реалистичное описание, например, вибрационной динамики локальной О-Н связи в молекуле воды. Внешнее возбуждение описывается членом взаимодействия

$$H_L(t) = \mu q F_0 s(t) \sin \omega_L t. \quad (7.75)$$

Здесь μq есть соответствующая компонента молекулярного дипольного момента, F_0 — максимальная сила поля, а $s(t)$ есть огибающая импульса возбуждения. Для определенности мы принимаем

$$s(t) = \sin^2 \left(\frac{\pi t}{t_p} \right), \quad (7.76)$$

где t_p представляет длительность импульса. Физические предпосылки этой модели можно увидеть в сборнике статей под редакцией Манза и Вёсте (Manz, Wöste, 1995).

Гамильтониан Морзе H_M имеет ограниченное число N связанных состояний, которое зависит от параметров потенциала Морзе $V(q)$. Наше исследование будет ограничено случаем, когда динамика хорошо определяется ограниченным вектором состояний осциллятора Морзе. Моделирование, поэтому, будет выполнено в собственном энергетическом базисе $|j\rangle$, $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, для H_M с соответствующими собственными значениями энергии E_j , которые известны аналитически.

Скачкообразные операторы есть

$$A_{jk} = |j\rangle\langle k|, \quad j, k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (7.77)$$

с соответствующими интенсивностями γ_{jk} . Эти интенсивности принимаются заданными для слабо связанного основного уравнения, описывающего диссипативную динамику в термическом резервуаре. Операторы A_{jk} есть собственные операторы H_M , соответствующие собственным значениям $(E_j - E_k)$. Эффект оператора скачка A_{jk} на волновой функции системы может, таким образом, интерпретироваться как описание излучательного перехода или аборбции колебательной квантовой энергии $|E_j - E_k|$. В энергетическом представлении основное марковское уравнение для матричных элементов $\rho_{jk} = \langle j|\rho_S|k\rangle$ поэтому запишется как

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{jk}}{dt} = & -i(E_j - E_k)\rho_{jk} - if(t) \sum_l (Q_{jl}\rho_{lk} - Q_{lk}\rho_{jl}) + \\ & + \delta_{jk} \left(\sum_l \gamma_{jl}\rho_{ll} \right) - \frac{1}{2}(\Gamma_j + \Gamma_k)\rho_{jk}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Соответствующий КДП управляется нижеследующим уравнением для компонентов $\psi_j = \langle j|\psi\rangle$ нормированного вектора состояний ψ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi_j = & -i \left(E_j\psi_j + f(t) \sum_k Q_{jk}\psi_k \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_k \gamma_{kj} - \sum_{kl} \gamma_{kl}|\psi_l|^2 \right) \psi_j + \\ & + \sum_{kl} (\delta_{kj} - \psi_j)dN_{kl}(t). \end{aligned} \quad (7.79)$$

В этих уравнениях $f(t)$ есть не зависящая от времени внешняя сила (ср. с (7.75))

$$f(t) = \mu F_0 s(t) \sin(\omega_L t), \quad (7.80)$$

а $Q_{jk} = \langle j|q|k\rangle$ есть матричные элементы дипольного оператора. Матрица (Q_{jk}) действительна и симметрична. Γ_j является суммарной интенсивностью всех скачков из $|j\rangle$

$$\Gamma_j = \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_{mj}. \quad (7.81)$$

Наконец, пуассоновские инкременты удовлетворяют условиям

$$dN_{kl}(t)dN_{k'l'}(t) = \delta_{kk'}\delta_{ll'} dN_{kl}(t), \quad (7.82)$$

$$E[dN_{kl}(t)] = \gamma_{kl}|\psi_l|^2 dt. \quad (7.83)$$

7.4.2.2. Результаты моделирования. Далее мы решаем уравнения (7.78) и (7.79) и сравниваем численные характеристики для обоих уравнений. За начальное состояние всегда принимается основное состояние осциллятора Морзе. Для того чтобы изучить влияние размерности системы на потребление времени численных программ, исследуется ряд подобных осцилляторов с различным числом N связанных состояний. Размерность системы N изменялся в пределах $N = 12, \dots, 78$. Для того чтобы заведомо не разрушить число необходимых состояний фактической динамикой, всегда находящейся в пределах того же числа состояний, соответственно, также необходимо промасштабировать поле возбуждения. В дальнейшем изучении работают две комбинации параметров: одна, соответствующая слабому затуханию, другая — сильному. Мы также отмечаем, что для интегрирования уравнения для матрицы плотности и для детерминированных кусков КДП используется та же схема Рунге–Кутта. Детали используемых физических параметров и численное представление описаны Брейером, Хьюбером и Петруччионе (Breuer, Huber, Petruccione, 1997).

Сначала обратим внимание на показатели α и β , которые введены в уравнениях (7.67) и (7.68). Рис. 7.11 показывает время ЦП на один шаг времени численного интегратора, как функции размерности системы N . Измерение наклона линий дает

$$\beta = 3,0 \pm 0,1, \quad \alpha = 2,0 \pm 0,1, \quad (7.84)$$

что подтверждает уравнение (7.69). Эти значения могут быть легко поняты: в случае стохастического моделирования наибольшая часть, потребляющая время, есть перемножение ψ с дипольной матрицей Q (ср. с (7.79)), которое требует $\mathcal{O}(N^2)$ операций с плавающей запятой. Аналогично, для интегрирования матрицы плотности расчет правой части уравнения (7.78) для всех j и k включает $\mathcal{O}(N^3)$ операций с плавающей запятой.

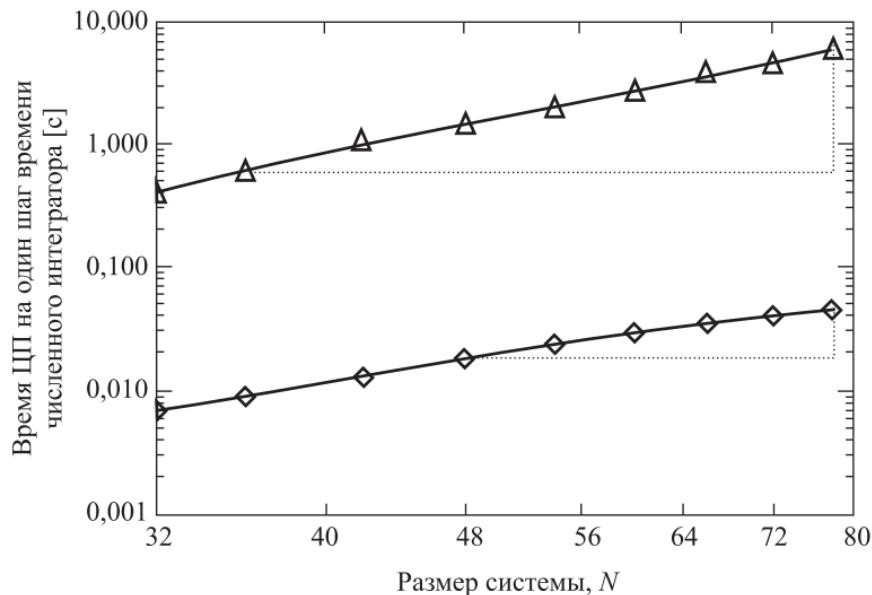


Рис. 7.11. Время ЦПУ на один шаг при интегрировании уравнения для матрицы плотности (Δ) и при распространении волнового вектора ψ (\diamond). Пунктирные линии задают показатели степени α и β , которые были посчитаны из углового коэффициента; непрерывные линии просто соединяют точки данных.

Рис. 7.12 показывает количество шагов интегрирования s_1 и s_2 , которые необходимы для подсчета всего импульса. Как мы можем видеть, s_1 и s_2 увеличиваются с N , но остаются примерно равными. Их увеличение происходит благодаря частным свойствам представленного примера. Обе системы дифференциальных уравнений, которые должны быть решены для расчета матрицы плотности и для стохастического моделирования, становятся более устойчивыми с увеличением N .

Для того чтобы исследовать характеристику $R(N)$, числа реализаций Монте-Карло, которые должны быть сгенерированы для рассмотрения системы размерности N , необходимо рассмотреть стандартную ошибку наблюдаемых системы. Рассмотрим, например, энергию H_M осциллятора Морзе, стандартная ошибка которой будет обозначаться $\hat{\sigma}_H$. Согласно уравнению (7.66) мы имеем

$$R(N) = \frac{\lambda_H(N)}{\hat{\sigma}_H^2}. \quad (7.85)$$

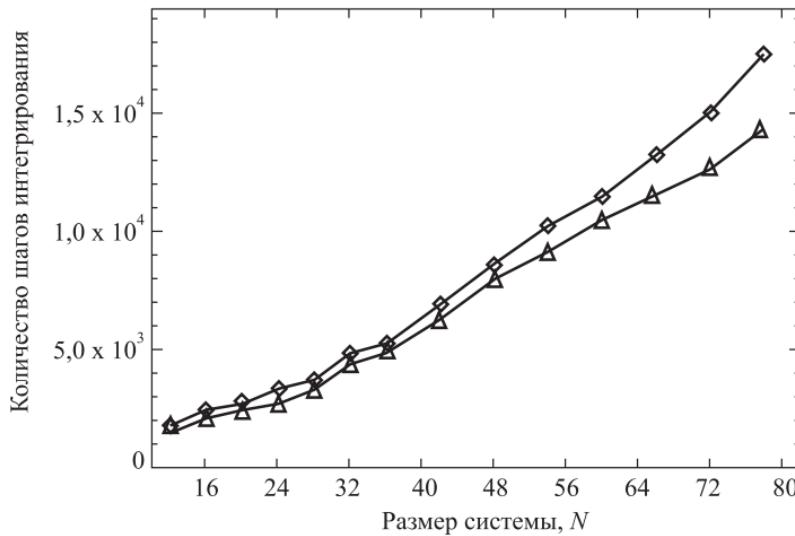


Рис. 7.12. Треугольники (Δ) показывают s_1 , число шагов интегратора для расчета одного импульса, используя уравнение для матрицы плотности. Ромбы (\diamond) показывают s_2 , среднее значение шагов для расчета одной реализации случайного процесса.

Рис. 7.13 показывает поведение функции $\lambda_H(N)$ для двух различных наборов параметров окружения. С точностью до статистических флуктуаций, $\lambda(N)$ и, поэтому, $R(N)$ есть невозрастающие функции от N . Подобные результаты получаются для других наблюдаемых и для матричных элементов ρ . Это означает, что, для того чтобы достигнуть постоянной статистической ошибки в результатах моделирования, когда размерность системы N увеличивается, число реализаций не должно увеличиваться. Отсюда следует, что в конечном счете стохастическое моделирование для систем большой размерности будет быстрее, чем решение уравнения для матрицы плотности.

Этот результат иллюстрируется примером на рис. 7.14. Графики показывают необходимые времена ЦП для интегрирования уравнения для матрицы плотности и для генерирования такого количества реализаций стохастического процесса, сколько необходимо для получения стандартной ошибки $\hat{\sigma}_H = 4 \cdot 10^{-3}$ для средней энергии осциллятора. Число R реализаций было подсчитано с помощью уравнения (7.85). Согласно рис. 7.13, мы выбираем $\lambda_H(N) = 10^{-3}$ независимо от N . Кривые следуют различным степенным зависимостям и пересекаются в некоторой точке N_0 . В пред-

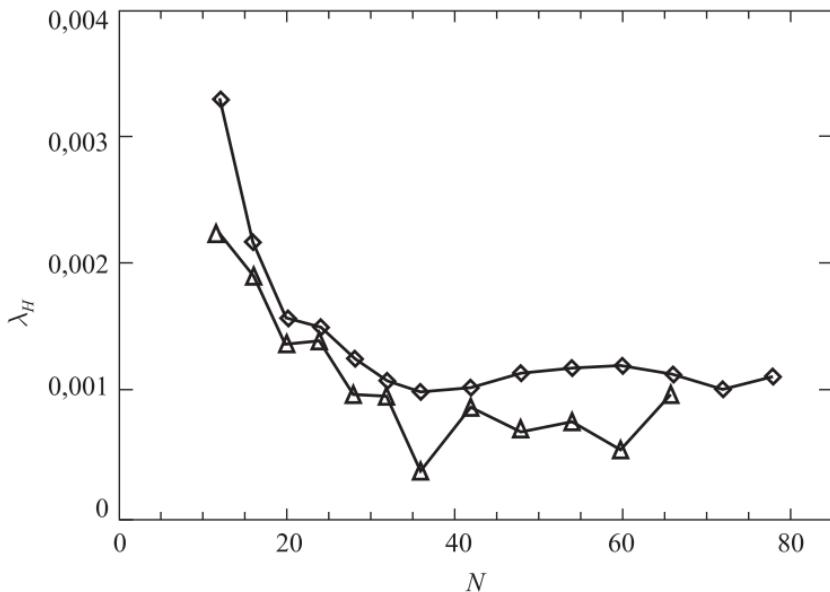


Рис. 7.13. Функция $\lambda_H(N)$ измеряет свойство самоусреднения средней энергии осциллятора Морзе H_M (ср. с (7.65)). Треугольники Δ соответствуют слабой диссипации, ромбы \diamond — сильной диссипации.

ставленном примере $N_0 \approx 35$ для случая слабой диссипации и $N_0 \approx 55$ для случая сильной диссипации. При большем N_0 стохастическое моделирование идет быстрее.

Основным результатом численного исследования является то, что время ЦП для интегрирования матрицы плотности T_{DME} и время для стохастического моделирования волновой функции T_{StS} масштабируется с размерностью системы N как

$$T_{DME} \sim N^3, \quad (7.86)$$

$$T_{StS} \sim N^2. \quad (7.87)$$

Хотя численное исследование было выполнено на частном примере, результаты раздела 7.4.1 значительно более общие. В частности, тогда как абсолютные значения показателей в уравнениях (7.86) и (7.87) зависят от конкретных свойств изучаемой системы, их разность имеет более общее значение. При довольно общих условиях показатель в выражении для T_{DME} превышает аналогичное значение показателя T_{StS} на величину, лежащую в интервале от 1 до 2.

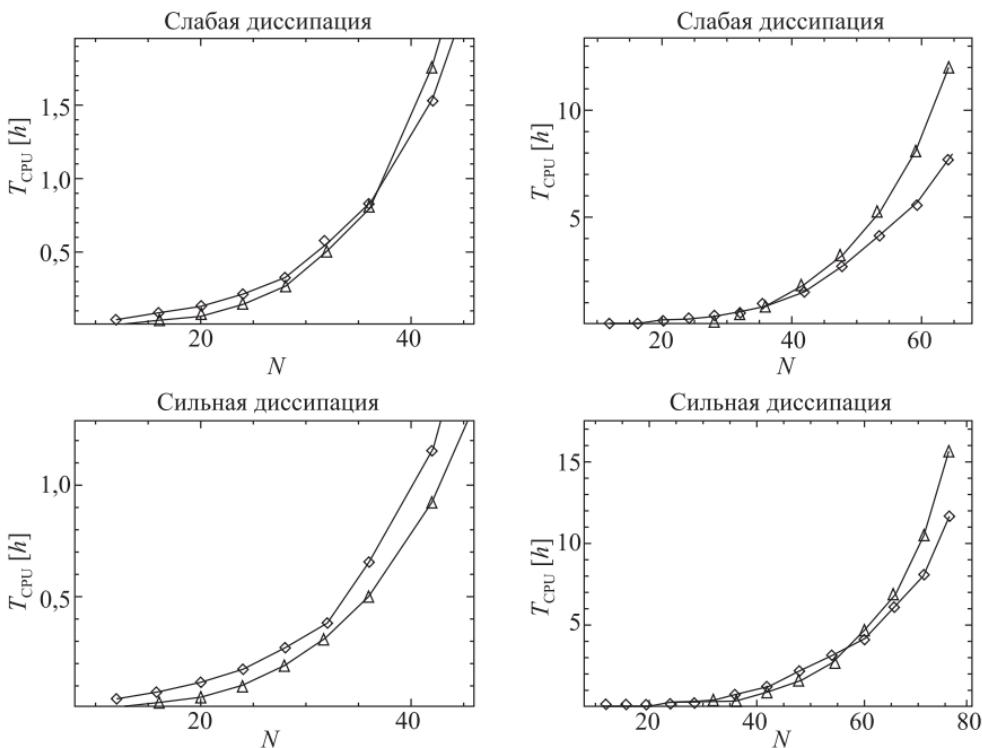


Рис. 7.14. ЦПУ времена, необходимые для интегрирования уравнения матрицы плотности (Δ) и для генерирования такого количества реализаций стохастического процесса (\diamond), которое необходимо для получения стандартной ошибки $\hat{\sigma}_H = 4 \cdot 10^{-3}$ среднего значения энергии осциллятора. Графики с правой стороны охватывают полное варьирование размерности системы, в то время как графики слева дают увеличенное изображение при меньшем N .

Величины T_{DME} и T_{StS} , которые исследованы выше, представляют время, в течение которого программы работают на отдельном процессоре. При сравнении эффективности численных кодов, которые разработаны для обработки на параллельных компьютерах с большим количеством процессоров, есть другие важные критерии: ускорение и масштабируемость. Ускорение определяется как отношение между временами, необходимыми для выполнения работы на отдельном процессоре и на параллельном компьютере. Под масштабируемостью имеется в виду, что в широком диапазоне количества процессоров ускорение близко числу процессоров параллель-

ной машины. Здесь подразумевается, что времена, потраченные на взаимодействие между процессорами, и накладки синхронизации малы. Заметим, что эффективное масштабируемое распараллеливание процедуры интегрирования матрицы плотности является сложной задачей. В то же время, метод стохастических волновых функций является по своей природе параллельным и очень хорошо масштабируемым алгоритмом. Так как отдельные реализации выборки генерируются независимо, взаимосвязь требуется только для итогового усреднения или архивирования и для контроля параметров. Методы Монте-Карло, таким образом, являются идеально подходящими для параллельной обработки.

Библиография

- Binder, K. (ed.) (1995). *The Monte Carlo Method in Condensed Matter Physics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Blue, J. L., Beichl, I. and Sullivan, F. (1995). Faster Monte Carlo simulations. *Phys. Rev.*, **E51**, R867–R868.
- Breuer, H. P., Huber, W. and Petruccione, F. (1996). Fast Monte Carlo algorithm for nonequilibrium systems. *Phys. Rev.*, **E53**, 4232–4235.
- Breuer, H. P., Huber, W. and Petruccione, F. (1997). Stochastic wavefunction method versus density matrix: a numerical comparison. *Comp. Phys. Commun.*, **104**, 46–58.
- Breuer, H. P., Dorner, U. and Petruccione, F. (2000). Numerical integration methods for stochastic wave function equations. *Comp. Phys. Commun.*, **132**, 30–43.
- Ferrenberg, A. M., Landau, D. P. and Binder, K. (1991). Statistical and systematic errors in Monte Carlo sampling. *J. Stat. Phys.*, **63**, 867–882.
- Fricke, T. and Schnakenberg, J. (1991). Monte Carlo simulation of an inhomogeneous reaction-diffusion system in the biophysics of receptor cells. *Z. Phys.*, **83**, 277–284.
- Gillespie, D. T. (1976). A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions. *J. Comp. Phys.*, **22**, 403–434.
- Gillespie, D. T. (1992). *Markov Processes*. Academic Press, Boston.
- Hanusse, P. and Blanché, A. (1981). A Monte Carlo method for large reaction-diffusion systems. *J. Chem. Phys.*, **74**, 6148–6153.
- Kloeden, P. E. and Platen, E. (1992). *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin.

- Knuth, D. E. (1981). *Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Landau, D. P. and Binder, K. (2000). *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Maksym, P. A. (1988). Fast Monte Carlo simulation of mbe growth. *Semiconductor Science and Technology*, **3**, 594–596.
- Manz, J. and Wöste, L. (eds.) (1995). *Femtosecond Chemistry*. VCH, Weinheim, New York.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T. (1992). *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge.

ГЛАВА 8

Приложения к квантовым оптическим системам

Глава 6 представляла набор простых примеров для стохастических процессов в гильбертовом пространстве, а также их развитие в рамках теории непрерывного измерения. Настоящая глава посвящена обсуждению теории на основе микроскопических уравнений квантовой электродинамики (КЭД). Акцент делается на происхождении произвольных квантовых операций и соответствующих стохастических процессах для различных схем детектирования, которые следуют прямо из гамильтониана, который описывает взаимодействие степеней свободы вещества с квантованным электромагнитным полем. Во всех случаях эта глава будет рассматривать степени свободы вещества нерелятивистским образом, подразумевая приложения к квантовой оптике.

После краткого обзора квантования электромагнитного поля мы начнем с вывода основного выражения для КЭД-операции, которая описывает обратное действие на степени свободы вещества, индуцированное измерением полевых переменных. Из основного выражения мы установим стохастическое представление для мультипольного излучения данного вещества. Стохастическая динамика будет формулироваться на языке стохастического уравнения движения для редуцированной матрицы плотности источника. В случае полного измерения квантовых чисел, излученных фотонов, получается стохастическая эволюция для вектора состояния источника. Мы будем также обсуждать неполные измерения. Они приводят к раскрытию динамики в виде стохастического уравнения для матрицы плотности, которое не сохраняет чистоту квантовых состояний.

Глава включает детальное обсуждение некоторых важных физических задач, для которых взаимосвязь когерентной квантовой эволюции и диссипативных процессов играет важную роль. Сначала мы исследуем возникновение темных состояний при взаимодействии атомов с когерентными лазерными полями. Кроме того, исследуем механизм когерентного захвата при охлаждении атомов в режиме субтадчи в лазерных полях. Выводится

соответствующий кусочно-детерминированный процесс для квантованного движения атомов. Это дает интересный пример возникновения распределений Леви с большим размахом, получающихся из-за эффекта квантовой интерференции. Наконец, мы исследуем диссипативные явления в динамике систем в сильных периодических полях возбуждения. Соответствующая стохастическая динамика волновой функции может быть выведена с использованием представления вектора состояния редуцированной системы в базисе, состоящем из состояний Флоке.

8.1. Непрерывные измерения в КЭД

8.1.1. Конструирование микроскопического гамильтониана

Во-первых, мы кратко напомним квантование свободного поля излучения (см., например, Bjorken, Drell, 1965), которое может быть представлено свободным полевым оператором $\vec{A}(\vec{x}, t)$ для векторного потенциала. Налагая условия калибровки Кулона

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) = 0, \quad (8.1)$$

электрические и магнитные операторы поля задаются как¹

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{x}, t), \quad (8.2)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t). \quad (8.3)$$

Полевые операторы есть операторы гейзенберговского представления, удовлетворяющие волновому уравнению

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A}(\vec{x}, t) = 0. \quad (8.4)$$

Для дальнейшего обсуждения будет полезным разложить поле излучения в полном наборе функций $\vec{U}_\lambda(\vec{x})$, помеченных некоторым индексом λ . Они удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\left(\Delta + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \right) \vec{U}_\lambda(\vec{x}) = 0 \quad (8.5)$$

¹ В этой главе мы явно записываем все физические константы такие, как постоянная Планка \hbar , скорость света c , заряд электрона e и масса m . В дальнейшем мы используем гауссову системы единиц, так что постоянная тонкой структуры задается как $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$.

с подходящими граничными условиями и условием нормировки, таким что

$$\int \vec{U}_\lambda^*(\vec{x}) \cdot \vec{U}_{\lambda'}(\vec{x}) d^3x = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (8.6)$$

Величина ω_λ означает частоту моды λ . В дальнейшем мы наложим условие, что моды поперечны

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U}_\lambda(\vec{x}) = 0, \quad (8.7)$$

такие, что соотношение полноты для мод принимает вид

$$\sum_\lambda U_\lambda^i(\vec{x}) U_\lambda^{j*}(\vec{x}') = \delta_T^{ij}(\vec{x}, \vec{x}') \equiv \left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\Delta} \right) \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (8.8)$$

Здесь $\delta_T^{ij}(\vec{x}, \vec{x}')$ есть поперечная δ -функция, которая при приложении к любому векторному полю проецирует на поперечную компоненту поля.

При использовании модовых функций мы можем представить векторный потенциал как

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_\lambda}} \left(\vec{U}_\lambda(\vec{x}) e^{-i\omega_\lambda t} b_\lambda + \vec{U}_\lambda^*(\vec{x}) e^{i\omega_\lambda t} b_\lambda^\dagger \right), \quad (8.9)$$

в то время как оператор электрического поля принимает вид

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = i \sum_\lambda \sqrt{2\pi\hbar\omega_\lambda} (\vec{U}_\lambda(\vec{x}) e^{-i\omega_\lambda t} b_\lambda - \vec{U}_\lambda^*(\vec{x}) e^{i\omega_\lambda t} b_\lambda^\dagger). \quad (8.10)$$

Операторы b_λ^\dagger и b_λ есть операторы рождения и уничтожения для фотонов моды λ , удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[b_\lambda, b_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (8.11)$$

$$[b_\lambda, b_{\lambda'}] = [b_\lambda^\dagger, b_{\lambda'}^\dagger] = 0. \quad (8.12)$$

В частности, мы обозначаем

$$|\lambda\rangle = b_\lambda^\dagger |0\rangle \quad (8.13)$$

однофотонные состояния, где $|0\rangle$ есть вакуумное состояние поля. Используя эти коммутационные соотношения, получаем одновременные коммутационные соотношения для операторов поля, например

$$[E^i(\vec{x}, t), A^j(\vec{x}', t)] = 4\pi i \hbar c \delta_T^{ij}(\vec{x}, \vec{x}'). \quad (8.14)$$

Проекция на поперечную компоненту, встроенную в поперечную δ -функцию с правой стороны этого уравнения, гарантирует, что коммутационные

соотношения совместимы с законом Гаусса $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ для свободного поля. В результате, в радиационной калибровке свободный гамильтониан для поперечных степеней свободы поля может быть записан как

$$\begin{aligned} H_B &= \frac{1}{8\pi} \int [\vec{E}^2 + \vec{B}^2] d^3x = \frac{1}{8\pi} \int [\vec{E}^2 + \vec{A}(-\Delta) \vec{A}] d^3x = \\ &= \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\lambda} \left(b_{\lambda}^{\dagger} b_{\lambda} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Степени свободы электромагнитного поля излучения связаны с электронными степенями свободы квантовой системы. Например, со степенями свободы атома, чей собственный гамильтониан обозначается как H_S . Гамильтониан H_I , описывающий взаимодействие между электронами системы и полем излучения, может быть записан как

$$H_I(t) = - \int \left\{ \frac{e}{c} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + \frac{e}{mc} \vec{s}(\vec{x}, t) \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) \right\} d^3x. \quad (8.16)$$

Мы рассматриваем существенные степени свободы в нерелятивистском приближении и пренебрегаем диамагнитным членом, который пропорционален квадрату векторного потенциала. Величина $\vec{j}(\vec{x}, t)$ есть парамагнитная электронная плотность тока

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m} \{ \vec{p}^{(\alpha)}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}(t)) + \delta(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}(t)) \vec{p}^{(\alpha)}(t) \}, \quad (8.17)$$

тогда как $\vec{s}(\vec{x}, t)$ есть электронная спиновая плотность

$$\vec{s}(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}(t)) \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}^{(\alpha)}(t). \quad (8.18)$$

Позже мы также используем выражения для электронной плотности

$$\varrho(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}(t)), \quad (8.19)$$

а для плотности орбитального момента импульса

$$\begin{aligned} \vec{l}(\vec{x}, t) &= m \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}, t) = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \{ \vec{L}^{(\alpha)}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}(t)) + \delta(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}(t)) \vec{L}^{(\alpha)}(t) \}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

В этой формулировке индекс α пробегает по электронам системы, а $\vec{x}^{(\alpha)}(t)$, $\vec{p}^{(\alpha)}(t)$, $\vec{L}^{(\alpha)}(t)$ и $\hbar \vec{\sigma}^{(\alpha)}(t)/2$ означают, соответственно, операторы координаты, импульса, орбитального момента импульса и оператор спина частицы

в представлении взаимодействия. Уравнение (8.16), таким образом, описывает взаимодействие электромагнитного поля с парамагнитной электронной плотностью тока j и плотностью магнитного момента, ассоциируемого с электронной спиновой плотностью. Отметим, что гамильтониан взаимодействия $H_I(t)$, как он представлен в (8.16), включает операторы для степеней свободы поля и вещества в представлении взаимодействия, так что сам оператор $H_I(t)$ есть гамильтониан в представлении взаимодействия.

8.1.2. Определение КЭД-операции

Выведем основное выражение операции, относящейся к непрерывному наблюдению переменных электромагнитного поля. Для этого мы, во-первых, возьмем идеальный случай и предположим, что мы можем выполнять полное ортогональное измерение однофотонных состояний $|\lambda\rangle$. Это означает, что мы предполагаем некоторое измерительное устройство, которое в состоянии обнаруживать кванты, излученные источником вместе с измерением полного набора квантовых чисел λ фотона.

Следуя нашей дискуссии в разделах 6.2 и 6.3, мы рассмотрим снова поле вакуума $|0\rangle$, действующего как пробное состояние. В соответствие с нашим предыдущим обсуждением, мы обозначаем τ соответствующий временному интервал взаимодействия между объектом и пробной системой, то есть между источником и полем излучения. Произвольно выбранное начальное время обозначим t_0 , так что $t = t_0 + \tau$ есть конечное время, при котором выполняется измерение на поле излучения. Начальную матрицу плотности источника в момент времени t_0 обозначим как $\tilde{\sigma}$.

Используя теорию возмущений второго порядка, с помощью выражения (8.16) для гамильтониана взаимодействия мы находим, что соответствующая операция задается

$$\Phi_{\lambda}^{(1)}(\tilde{\sigma}) = \Omega_{\lambda} \tilde{\sigma} \Omega_{\lambda}^{\dagger}, \quad (8.21)$$

где оператор Ω_{λ} принимает вид (см. (6.86))

$$\begin{aligned} \Omega_{\lambda} &= \frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle \lambda | H_I(t') | 0 \rangle dt' = i \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\hbar \omega_{\lambda}}} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{\lambda} t'} dt' \times \\ &\times \int \left\{ \frac{e}{c} \vec{j}(\vec{x}, t') \cdot \vec{U}_{\lambda}^*(\vec{x}) + \frac{e}{mc} \vec{s}(\vec{x}, t') \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{U}_{\lambda}^*(\vec{x})] \right\} d^3x. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Операция для того события, что фотон не будет обнаружен за временной интервал τ , может быть записана как

$$\Phi^{(0)}(\tilde{\sigma}) = \Omega_0 \tilde{\sigma} \Omega_0^{\dagger}, \quad (8.23)$$

где

$$\Omega_0 = I - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \langle 0 | H_I(t') H_I(t'') | 0 \rangle dt'' dt'. \quad (8.24)$$

Подставляя полный набор состояний, который здесь может быть ограничен однофотонным сектором, мы получаем эквивалентное выражение

$$\Omega_0 = I - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} \sum_{\lambda} \langle \lambda | H_I(t') | 0 \rangle^\dagger \langle \lambda | H_I(t'') | 0 \rangle dt''. \quad (8.25)$$

Эти соотношения будут использованы ниже, чтобы определить операцию для схемы детектирования.

Для того чтобы рассмотреть интегрирование по времени, включенное в операции (8.22) и (8.25), мы разложим различные плотности по собственным операторам гамильтониана H_S источника. Эти собственные операторы определяются соотношением (ср. с (3.120))

$$\vec{j}(\vec{x}, \omega) = \sum_{E' - E = \hbar\omega} \Pi(E) \vec{j}(\vec{x}, 0) \Pi(E') \quad (8.26)$$

с аналогичными соотношениями для плотности частицы ϱ , спиновой плотности \vec{s} и плотности орбитального момента \vec{l} . Эти операторы $\vec{j}(\vec{x}, 0)$, $\varrho(\vec{x}, 0)$, $\vec{s}(\vec{x}, 0)$ и $\vec{l}(\vec{x}, 0)$ задают соответствующую картину операторов, взятую при фиксированном времени $t = 0$. Кроме того, $\Pi(E)$ означает проектор на собственное пространство H_S , соответствующее собственному значению энергии E , а суммы подразумеваются по всем значениям тех энергий E и E' , которые соответствуют фиксированной разности энергий $\hbar\omega$. Мы полагаем, что H_S описывает связанную систему, такую что плотности в представлении взаимодействия задаются суммами, взятыми по набору частот ω системы

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \vec{j}(\vec{x}, \omega) + \text{э.с.}, \quad (8.27)$$

$$\varrho(\vec{x}, t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \varrho(\vec{x}, \omega) + \text{э.с.}, \quad (8.28)$$

$$\vec{s}(\vec{x}, t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \vec{s}(\vec{x}, \omega) + \text{э.с.}, \quad (8.29)$$

$$\vec{l}(\vec{x}, t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \vec{l}(\vec{x}, \omega) + \text{э.с.} \quad (8.30)$$

При использовании разложений по собственным операторам мы можем записать оператор Ω_λ , который определяет операцию для события, когда детектируется фотон с квантовыми числами λ , как показано ниже

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda = & \sum_{\omega} \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\hbar\omega_\lambda}} \exp[i(\omega_\lambda - \omega)t_0] \frac{\exp[i(\omega_\lambda - \omega)\tau] - 1}{\omega_\lambda - \omega} \times \\ & \times \int \left\{ \frac{e}{c} \vec{j}(\vec{x}, \omega) \cdot \vec{U}_\lambda^*(\vec{x}) + \frac{e}{mc} \vec{s}(\vec{x}, \omega) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{U}_\lambda^*(\vec{x})] \right\} d^3x. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Поскольку частоты мод ω_λ положительны, то сумма по частотам системы ω может быть ограничена проходом только по положительным частотам, что и будет предполагаться в дальнейшем.

Из уравнения (8.31) мы видим, что операция, определенная как Ω_λ , в общем случае приводит к сложному поведению изучаемой системы на малых временах. В дальнейшем мы полагаем, что дискретные частоты системы ω хорошо разделены так, что минимальное расстояние между уровнями остается большим по сравнению с величиной $\Delta \sim 1/\tau$, которая задает неопределенность энергии, связанную с конечным временем взаимодействия τ . Физически это означает, что на временах взаимодействия порядка τ мы можем различить частоты, излучаемые системой, и однозначно определить то, что соответствует переходу для изучаемой системы. Другими словами, мы рассматриваем спектральное детектирование изучаемой системы с ограниченным разрешением, которое мало в сравнении с ширинами переходов, но велико в сравнении с расстоянием между частотами.

Согласно этому предположению, мы видим, что для полевых мод, задаваемых частотами ω_λ , есть точно один член, который доминирует в сумме по ω в уравнении (8.31). Этот член удовлетворяет условию

$$\omega_\lambda \in I_\omega \equiv [\omega - \Delta, \omega + \Delta]. \quad (8.32)$$

Таким образом, сохранив только секулярный член в операции, мы получаем для КЭД-операции (пренебрегая несущественными в данном случае фазовыми множителями)

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda = & \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\hbar\omega_\lambda}} \frac{\exp[i(\omega_\lambda - \omega)\tau] - 1}{\omega_\lambda - \omega} \times \\ & \times \int \left\{ \frac{e}{c} \vec{j}(\vec{x}, \omega) \cdot \vec{U}_\lambda^*(\vec{x}) + \frac{e}{mc} \vec{s}(\vec{x}, \omega) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{U}_\lambda^*(\vec{x})] \right\} d^3x, \end{aligned} \quad (8.33)$$

где частота системы ω определяется условием (8.32).

8.1.3. Стохастическая динамика мультипольного излучения

В качестве примера давайте обсудим случай измерения спектра и измерения момента импульса испущенных фотонов. Полный набор квантовых чисел λ , измеренных устройством, содержит частоту фотонов, квадрат полного момента импульса, проекцию момента импульса на фиксированное направление \vec{e}_z и квантовое число, характеризующее четность. Индекс λ задается набором квантовых чисел

$$\lambda = (k, J, M, \pi), \quad (8.34)$$

где $J = 1, 2, 3, \dots$, $M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$ и $\pi = 0, 1$. Однофотонные состояния $|\lambda\rangle$, таким образом, описывают свободные фотоны с определенной частотой $\omega_\lambda \equiv \omega_k = ck$. Они являются собственными состояниями квадрата полного момента импульса поля, проекции на ось z момента импульса и оператора четности с соответствующими собственными значениями $\hbar^2 J(J+1)$, $\hbar M$ и $(-1)^{J-\pi}$. Наша цель — вывести стохастическое дифференциальное уравнение для матрицы плотности $\sigma(t)$ источника, соответствующего этой измерительной схеме.

Хорошо известно, что модовые функции $\vec{U}_\lambda(\vec{x})$ представляет электрические мультипольные поля при $\pi = 1$ и магнитные мультипольные поля при $\pi = 0$ (Akhiezer, Berestetskii, 1965). Связывание орбитального момента импульса и спина фотонов может выражать модовые функции на языке суперпозиций произведений векторных шаровых гармоник и функций Бесселя, соответствующих угловой и радиальной части соответственно. Они формируют полный набор и могут быть выбраны, чтобы удовлетворять условию нормировки

$$\int \vec{U}_\lambda^*(\vec{x}) \cdot \vec{U}_{\lambda'}(\vec{x}) d^3x = \delta(k - k') \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\pi\pi'}. \quad (8.35)$$

Здесь нам не нужны явные выражения для модовых функций; они могут быть найдены, например, у Шора (Shore, 1990). В области оптических частот мы можем использовать приближение $kd \ll 1$, то есть мы полагаем, что длина волны велика в сравнении с линейным размером d источника. Соответственно, поведение мод важно только вблизи источника. Подставляя явные выражения в (8.33), для операции, соответствующей детектированию фотонов, получаем для квантовых чисел $\lambda = (k, J, M, \pi)$,

$$\Omega_{kJM\pi} = \sqrt{\frac{\omega_k}{\pi\hbar}} \frac{k^J}{(2J-1)!!} \sqrt{\frac{J+1}{J(2J+1)}} \frac{\exp[i(\omega_k - \omega)\tau] - 1}{\omega_k - \omega} Q_{JM\pi}(\omega). \quad (8.36)$$

Здесь мы ввели частотные компоненты электрических 2^J -польных моментов

$$Q_{JM, \pi=1}(\omega) = \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}} \int e\varrho(\vec{x}, \omega) r^J Y_{JM}^*(\vec{x}) d^3x \quad (8.37)$$

и магнитные 2^J -польные моменты

$$Q_{JM, \pi=0}(\omega) = \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}} \int \frac{e}{mc} \left[\frac{1}{J+1} \vec{l}(\vec{x}, \omega) + \vec{s}(\vec{x}, \omega) \right] \cdot \vec{\nabla} [r^J Y_{JM}^*(\vec{x})] d^3x. \quad (8.38)$$

В этой формуле $Y_{JM}(\vec{x})$ обозначает обычную сферическую гармонику, $r \equiv |\vec{x}|$, а $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n$ для нечетных n .

Из уравнения (8.36) следует, что спектральное измерение момента импульса излученных фотонов приходит к КДП с квантовыми скачками

$$\tilde{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{Q_{JM\pi}(\omega) \tilde{\sigma} Q_{JM\pi}^\dagger(\omega)}{\text{tr}_S \left\{ Q_{JM\pi}^\dagger(\omega) Q_{JM\pi}(\omega) \tilde{\sigma} \right\}}. \quad (8.39)$$

Для каждого отдельного набора квантовых чисел (ω, J, M, π) мы, таким образом, имеем определенный скачок, который задается приложением соответствующей компоненты $Q_{JM\pi}(\omega)$ частотного перехода 2^J -польного момента.

Интенсивность, соответствующая скачку (8.39), задается в марковском приближении и приближении вращающейся волны выражением

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\infty \text{tr}_S \left\{ \Omega_{kJM\pi}^\dagger \Omega_{kJM\pi} \tilde{\sigma} \right\} dk \approx \gamma_J(\omega) \text{tr}_S \left\{ Q_{JM\pi}^\dagger(\omega) Q_{JM\pi}(\omega) \tilde{\sigma} \right\}, \quad (8.40)$$

где

$$\gamma_J(\omega) \equiv \frac{2(J+1)}{J(2J+1)[(2J-1)!!]^2} \frac{k^{2J+1}}{\hbar}. \quad (8.41)$$

Это хорошо известные выражения для интенсивностей перехода электрического и магнитного мультипольных излучений.

Наконец, мы должны вывести выражения для события, заключающегося в отсутствии фотодетектирования. Вновь, применяя марковское приближение и приближение вращающейся волны, уравнение (8.25) приводит к выражению

$$\Omega_0 \approx I - \tau \frac{1}{2} \sum_{\omega JM\pi} \gamma_J(\omega) Q_{JM\pi}^\dagger(\omega) Q_{JM\pi}(\omega), \quad (8.42)$$

где мы пренебрегли лэмбовским сдвигом, который вносит вклад в гамильтониан источника. В результате мы получаем следующее выражение для операции события, заключающегося в детектировании нулевого количества фотонов:

$$\frac{\Omega_0 \tilde{\sigma} \Omega_0^\dagger}{\text{tr}_S \left\{ \Omega_0^\dagger \Omega_0 \tilde{\sigma} \right\}} \approx I - \frac{i}{\hbar} \mathcal{G}(\tilde{\sigma}) d\tau, \quad (8.43)$$

где супероператор

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\sigma) = & -\frac{i\hbar}{2} \sum_{\omega JM\pi} \gamma_J(\omega) \left(Q_{JM\pi}^\dagger(\omega) Q_{JM\pi}(\omega) \sigma + \sigma Q_{JM\pi}^\dagger(\omega) Q_{JM\pi}(\omega) \right) + \\ & + i\hbar \sum_{\omega JM\pi} \gamma_J(\omega) \text{tr}_S \left\{ Q_{JM\pi}^\dagger(\omega) Q_{JM\pi}(\omega) \sigma \right\} \sigma \end{aligned} \quad (8.44)$$

представляет генератор для детерминированных частей КДП.

Резюмируя эти результаты, мы находим, что наблюдение спектра и момента импульса источника дает в результате КДП, который удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению для матрицы плотности $\sigma(t)$ в картине взаимодействия:

$$\begin{aligned} d\sigma(t) = & -\frac{i}{\hbar} \mathcal{G}(\sigma(t)) dt + \\ & + \sum_{\omega JM\pi} \left[\frac{Q_{JM\pi}(\omega) \sigma(t) Q_{JM\pi}^\dagger(\omega)}{\text{tr}_S \left\{ Q_{JM\pi}^\dagger(\omega) Q_{JM\pi}(\omega) \sigma(t) \right\}} - \sigma(t) \right] dN_{\omega JM\pi}(t). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Полная скачковая статистика КДП заключена в пуассоновских инкрементах, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$dN_{\omega JM\pi}(t) dN_{\omega' J' M' \pi'}(t) = \delta_{\omega\omega'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\pi\pi'} dN_{\omega JM\pi}(t), \quad (8.46)$$

$$E[dN_{\omega JM\pi}(t)] = \gamma_J(\omega) \text{tr}_S \left\{ Q_{JM\pi}^\dagger(\omega) Q_{JM\pi}(\omega) \sigma(t) \right\} dt. \quad (8.47)$$

Сразу становится ясно, что уравнение (8.45) приводит к стохастическому процессу для чистых состояний. Как уже обсуждалось в главе 6, это непосредственно связано с тем фактом, что мы выполнили измерение полной системы наблюдаемых фотона. А также потому, что обратное действие, вызываемое этими измерениями, зависит от частоты фотона ω_k только через частоту ω перехода источника.

8.1.4. Представление для неполных измерений

Рассмотрим характерный случай электрического дипольного излучения ($J = 1, \pi = 1$). Скачкообразные операторы могут быть записаны как

$$Q_{1M, \pi=1}(\omega) \equiv \vec{e}_M^* \cdot \vec{A}(\omega), \quad M = 0, \pm 1, \quad (8.48)$$

где

$$\vec{e}_0 = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y] \quad (8.49)$$

и

$$\vec{A}(\omega) = \int e\varrho(\vec{x}, \omega) \vec{x} d^3x \quad (8.50)$$

есть собственный оператор полного дипольного момента

$$\vec{D}(t) = \int e\varrho(\vec{x}, t) \vec{x} d^3x = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \vec{A}(\omega) + \text{э.с.} \quad (8.51)$$

соответствующий частоте перехода ω .

Полное измерение для электрического дипольного излучения, таким образом, охватывает детектирование частоты перехода ω и проекции момента импульса $\hbar M$ фотона на фиксированное направление \vec{e}_z . Уравнение стохастической эволюции (8.45) тогда приводит к следующему стохастическому уравнению для чистых состояний:

$$d\psi(t) = -\frac{i}{\hbar} G(\psi(t)) dt + \sum_{\omega} \sum_{M=0, \pm} \left[\frac{\vec{e}_M^* \cdot \vec{A}(\omega) \psi(t)}{\|\vec{e}_M^* \cdot \vec{A}(\omega) \psi(t)\|} - \psi(t) \right] dN_{\omega, M}(t), \quad (8.52)$$

где генератор детерминированной части КДП есть

$$\begin{aligned} G(\psi) &= -\frac{i\hbar}{2} \sum_{\omega} \gamma(\omega) \left(\vec{A}^\dagger(\omega) \cdot \vec{A}(\omega) - \langle \vec{A}^\dagger(\omega) \cdot \vec{A}(\omega) \rangle_{\psi} \right) \psi \equiv \\ &\equiv \hat{H}\psi + \frac{i\hbar}{2} \sum_{\omega} \gamma(\omega) \langle \vec{A}^\dagger(\omega) \cdot \vec{A}(\omega) \rangle_{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Математические ожидания пуассоновских инкрементов $dN_{\omega, M}(t)$ задаются

$$E[dN_{\omega, M}(t)] = \gamma(\omega) \|\vec{e}_M^* \cdot \vec{A}(\omega) \psi(t)\|^2 dt, \quad (8.54)$$

где

$$\gamma(\omega) = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3}, \quad (8.55)$$

что дает хорошо известную интенсивность перехода для излучения электрического диполя.

Теперь мы полагаем, что измерение спиновой компоненты $\hbar M$ фотона выполняется на неселективном уровне, то есть информация о проекции момента импульса фотона на \vec{e}_z отбрасывается. Тогда стохастический процесс теряет свойство преобразования чистых состояний в чистые состояния в условиях временной эволюции. Теперь динамика должна быть описана на языке стохастической эволюции уравнения для матрицы плотности $\sigma(t)$, которое принимает вид

$$d\sigma(t) = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{G}(\sigma(t)) dt + \\ + \sum_{\omega} \left[\frac{\vec{A}(\omega)\sigma(t)\vec{A}^\dagger(\omega)}{\text{tr}_S \{ \vec{A}^\dagger(\omega) \cdot \vec{A}(\omega)\sigma(t) \}} - \sigma(t) \right] dN_{\omega}(t). \quad (8.56)$$

Как можно видеть, операция, соответствующая детектированию фотона с частотой ω , теперь включает некогерентную сумму по компонентам момента импульса

$$\vec{A}(\omega)\sigma\vec{A}^\dagger(\omega) = \sum_{M=0, \pm} (\vec{e}_M^* \cdot \vec{A}(\omega))\sigma(\vec{e}_M^* \cdot \vec{A}(\omega))^\dagger. \quad (8.57)$$

Это выражает факт отсутствия информации о проекции момента импульса фотонов во время наблюдения поля. Как результат, статистика пуассоновского распределения зависит только от средней интенсивности перехода, полученной усреднением по проекциям момента импульса,

$$E[dN_{\omega}(t)] = \gamma(\omega) \text{tr}_S \{ \vec{A}^\dagger(\omega) \cdot \vec{A}(\omega)\sigma(t) \} dt. \quad (8.58)$$

Легко представить ситуацию, в которой отбрасывается даже информация о частотах фотонов. В этом случае мы, очевидно, имеем только один тип скачка. Эти скачки подсчитываются отдельным пуассоновским инкрементом $dN(t)$, который удовлетворяет

$$E[dN(t)] = \sum_{\omega} \gamma(\omega) \text{tr}_S \{ \vec{A}^\dagger(\omega) \cdot \vec{A}(\omega)\sigma(t) \} dt. \quad (8.59)$$

Стохастическое дифференциальное уравнение для результирующего КДП, таким образом, есть

$$d\sigma(t) = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{G}(\sigma(t))dt + \\ + \left[\frac{\sum_{\omega} \gamma(\omega) \vec{A}(\omega) \sigma(t) \vec{A}^{\dagger}(\omega)}{\text{tr}_S \left\{ \sum_{\omega} \gamma(\omega) \vec{A}^{\dagger}(\omega) \cdot \vec{A}(\omega) \sigma(t) \right\}} - \sigma(t) \right] dN(t). \quad (8.60)$$

Мы видим, что при последовательном уменьшении числа наблюдаемых, селективно измеряемых в схеме детектирования, получаются различные стохастические уравнения эволюции. Эти уравнения включают различные скачкообразные супероператоры, которые содержат растущее число слагаемых. Это следует из меньшего количества информации, извлеченной из системы: грубое гранулирование схемы детектирования приводит к обратному действию на изучаемую систему, что задает более сильное возрастание энтропии.

С другой стороны, как можно видеть из уравнений, выведенных выше, генератор \mathcal{G} для детерминированных частей КДП всегда один и тот же. Это происходит из-за того, что детерминированная часть процесса соответствует событию детектирования нулевого количества фотонов и, таким образом, не зависит от характерной формы схемы детектирования. Это может быть выведено непосредственно из уравнения (8.25), которое показывает, что операция для события детектирования нулевого количества фотонов зависит только от однофотонного подпространства, но не от специфического базиса выбранных однофотонных состояний. Та же ситуация уже возникала в случае гомодинного фотодетектирования (см. раздел 6.4).

8.2. Темные резонансные состояния

Для того чтобы проиллюстрировать вышеприведенное обсуждение, в этом разделе мы исследуем переход между двумя многообразиями моментов импульса (Mølmer, Castin, Dalibard, 1993). Этот пример соответствует случаю определенного захваченного состояния, известного как темное состояние, которое будет играть важную роль в следующем разделе.

8.2.1. Распределение времени ожидания и захваченное состояние

Мы рассмотрим двухуровневый атом с частотой перехода ω_0 . Оба уровня являются трехкратно вырожденными, формирующими группы

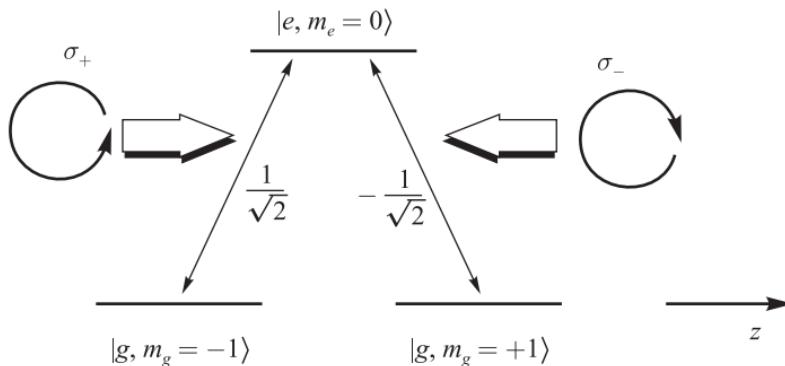


Рис. 8.1. Схема уровней, приводящая к резонансу темного состояния из-за квантового интерференционного эффекта. Рисунок показывает связь между двумя $J_e = J_g = 1$, угловой момент увеличивается посредством двух встречных лазерных пучков с различными спиральностями σ_{\pm} .

с суммарным моментом импульса $J_e = 1$ (возбужденный уровень) и $J_g = 1$ (основной уровень). Схема уровней изображена на рис. 8.1. Мы вводим энергию собственных состояний $|g, m_g\rangle$ и $|e, m_e\rangle$, которые одновременно являются собственными состояниями проекции на ось z оператора атомного момента импульса с собственными значениями $\hbar m_g$ и $\hbar m_e$ соответственно. Частотная компонента $\vec{A}(\omega_0) \equiv \vec{A}$ оператора атомного диполя \vec{D} может быть записана как

$$\vec{A} = \sum_{m_g, m_e=0, \pm 1} |g, m_g\rangle \langle g, m_g| \vec{D} |e, m_e\rangle \langle e, m_e|. \quad (8.61)$$

Так как \vec{D} – векторный оператор, \vec{A} может быть легко выражена на языке редуцированного матричного элемента дипольного оператора, который будет обозначаться d , и коэффициентов Клебша–Гордона $\langle 1m_e 1M | 1m_g \rangle$, которые описывают связывание атомного и фотонного моментов импульса с компонентами $M = 0, \pm \hbar$.

В добавление к связыванию с вакуумным полем излучения атом, линейно поляризованный в y -направлении, связывается с полем резонансного лазера с частотой $\omega_L = \omega_0$. Можно видеть, что переход $m_e = 0 \leftrightarrow m_g = 0$ запрещен, так как соответствующий коэффициент Клебша–Гордона $\langle 1010 | 10 \rangle$ равен нулю. Если мы возьмем некоторое начальное состояние в многообразии, охваченном состояниями $|g, m_g = \pm 1\rangle$, тогда увидим,

что динамика ограничена подпространством, охваченным базисными состояниями

$$|e, m_e = 0\rangle, |g, m_g = +1\rangle, |g, m_g = -1\rangle. \quad (8.62)$$

Представление для частотной компоненты дипольного оператора в этом подпространстве находится как

$$A_x = \frac{d}{2}(|g, +1\rangle\langle e, 0| + |g, -1\rangle\langle e, 0|), \quad (8.63)$$

$$A_y = -\frac{id}{2}(|g, +1\rangle\langle e, 0| - |g, -1\rangle\langle e, 0|), \quad (8.64)$$

$$A_z = 0. \quad (8.65)$$

При использовании условия резонанса гамильтониан, описывающий линейно поляризованное лазерное поле, может быть записан в картине взаимодействия как

$$H_L = -E_0(A_y + A_y^\dagger) = -\frac{i\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.66)$$

где $\Omega = dE_0/\hbar$ означает частоту Раби, а E_0 — амплитуду лазерного поля. Второе уравнение задает матричное представление в базисе (8.62). Если мы заметим далее, что

$$\vec{A}^\dagger \cdot \vec{A} = A_x^\dagger A_x + A_y^\dagger A_y = |d|^2 |e, 0\rangle\langle e, 0|, \quad (8.67)$$

то можем записать неэрмитов гамильтониан \hat{H} в уравнении (8.53) в виде

$$\hat{H} = H_L - \frac{i\hbar\gamma}{2} |e, 0\rangle\langle e, 0| = -\frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} \gamma & \Omega & -\Omega \\ -\Omega & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.68)$$

где к \hat{H} было добавлено взаимодействие атом-лазер. Отметим, что мы включили квадрат элемента редуцированной матрицы плотности в γ , который, таким образом, имеет размерность, обратную времени.

С использованием этих результатов легко написать дальнейшие аналитические выражения для неэрмитовой эволюции и кумулятивного распределения $F[\psi, t]$ случайного времени ожидания t для КДП, определяемого основным уравнением (8.52). Так как после любого скачка состояние всегда остается в заданном подпространстве, охваченном состояниями $|g, \pm 1\rangle$,

этого достаточно, чтобы определить такие величины для состояний, лежащих в данном подпространстве, то есть для состояний вида

$$\varphi = \varphi_+|g, +1\rangle + \varphi_-|g, -1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}. \quad (8.69)$$

При диагонализации \hat{H} легко найти, что для этих состояний

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(\varphi_+ - \varphi_-)g(t) \\ \varphi_+(1 - h(t)) + \varphi_-(1 + h(t)) \\ \varphi_+(1 + h(t)) + \varphi_-(1 - h(t)) \end{pmatrix}, \quad (8.70)$$

тогда как распределение времени ожидания задается формулой

$$\begin{aligned} F[\varphi, t] &= 1 - \|\exp(-i\hat{H}t/\hbar)\varphi\|^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1 + h^2(t) + 2g^2(t)) - \Re(\varphi_+^*\varphi_-)(1 - h^2(t) - 2g^2(t)). \end{aligned} \quad (8.71)$$

Здесь мы ввели некоторые сокращения

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{\Omega}{\mu}e^{-\gamma t/4} \sin\left(\frac{\mu t}{4}\right), \\ h(t) &= -e^{-\gamma t/4} \left[\cos\left(\frac{\mu t}{2}\right) + \frac{\gamma}{2\mu} \sin\left(\frac{\mu t}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

с

$$\mu \equiv \sqrt{2\Omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (8.72)$$

В дальнейшем эта величина предполагается действительной и положительной.

Важное свойство этого примера в том, что неэрмитов гамильтониан (8.68) имеет нулевую моду, которая задается состоянием

$$\psi_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, +1\rangle + |g, -1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.73)$$

то есть мы имеем

$$\hat{H}\psi_{nc} = 0. \quad (8.74)$$

Отсюда следует, что $F[\psi_{nc,t}] \equiv 0$. Состояние ψ_{nc} поэтому является стабильным состоянием процесса для любой измерительной схемы, что означает, что по достижении этого состояния других скачков не будет, а вектор состояния становится независящим от времени. Более того, так как другие собственные значения \hat{H} имеют отрицательные мнимые части, состояние ψ_{nc} является центром притяжения в условиях детерминированной эволюции и, поэтому, может быть названо ловушечным состоянием процесса.

С физической точки зрения случай ловушечного состояния есть результат интерференционного эффекта, как это легко может быть увидено при анализе вида неэрмитова гамильтониана. Линейно поляризованное лазерное поле может быть представлено суперпозицией двух встречных полей в z -направлении (см. рис. 8.1). Одна компонента поляризована по кругу вправо, другая — влево. Правополяризованная компонента вызывает переходы $|g, -1\rangle \rightarrow |e, 0\rangle$, в то время как левополяризованная компонента приводит к переходам $|g, +1\rangle \rightarrow |e, 0\rangle$. Как это может быть видно из \hat{H} , амplitуды для этих переходов интерфеcируют деструктивно и точно сводятся на нет для линейной комбинации, задаваемой ловушечным состоянием (8.73). Поэтому ψ_{nc} не связано с внешним лазерным полем, представляя, таким образом, *темное состояние*.

8.2.2. Измерительные схемы и стохастическая эволюция

Следуя Мёльмеру, Кастину и Далибарду (Mølmer, Castin, Dalibard, 1993), давайте обсудим две различных измерительных схем, а именно: измерение проекций момента импульса фотона на ось z и ось y . Для измерения проекции z из уравнений (8.63)–(8.65) находим два неисчезающих скачкообразных оператора

$$\vec{e}_\pm^* \cdot \vec{A} = \mp \frac{d}{\sqrt{2}} |g, \mp 1\rangle \langle e, 0|, \quad (8.75)$$

где мы взяли вектора поляризации $\vec{e}_0 = \vec{e}_z$ и $\vec{e}_\pm = \mp(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)/\sqrt{2}$. Скачкообразный оператор $\vec{e}_\pm^* \cdot \vec{A}$ подразумевает, что фотон забирает проекцию момента импульса $\pm\hbar$ на ось z , так что атомный переход включает изменение проекции z полного момента импульса, задаваемое $\mp\hbar$. Мы видим, что ловушка в состоянии ψ_{nc} получается из-за неунитарной эволюции, генерируемой \hat{H} . Это проиллюстрировано на рис. 8.2, где мы отобразили заселенность

$$\pi(t) \equiv |\langle \psi_{nc} | \psi(t) \rangle|^2 \quad (8.76)$$

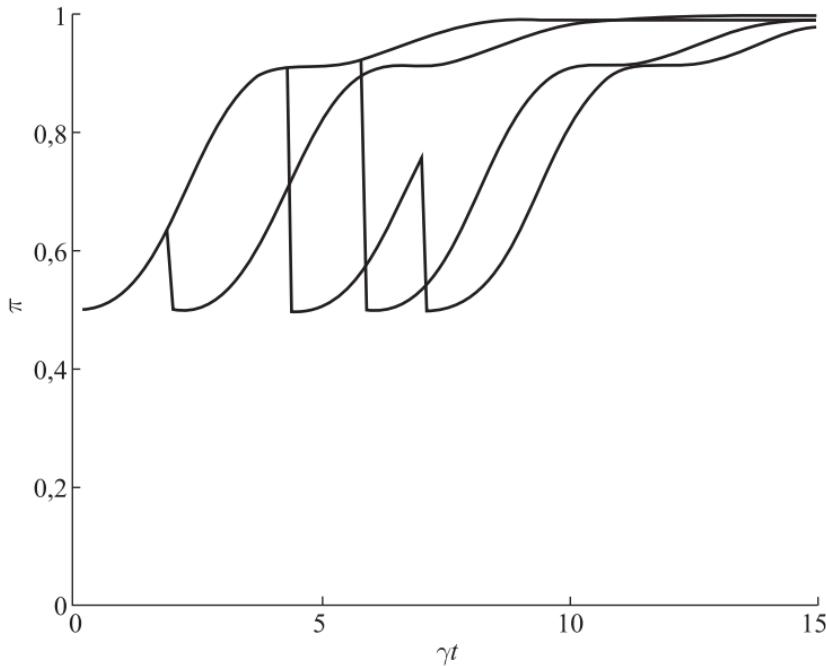


Рис. 8.2. Четыре реализации КДП для двухуровневой системы, возбуждаемой резонансным лазерным полем, поляризованным в y -направлении. Для каждой реализации $\psi(t)$ рисунок показывает заселенность $\pi(t) = |\langle \psi_{nc} | \psi(t) \rangle|^2$ ловушечного состояния ψ_{nc} . Стохастический процесс соответствует измерению углового момента фотонов на ось z . Начальное состояние $\psi(0) = |g, -1\rangle$ и $\Omega = \gamma$.

ловушечного состояния для четырех реализаций процесса, соответствующего этой измерительной схеме. Как можно видеть, квантовые скачки переводят вектор состояния либо в $|g, +1\rangle$ либо в $|g, -1\rangle$ при $\pi(t) = \frac{1}{2}$. Одна из реализаций, показанных на рисунке, непрерывно переходит в темное состояние ψ_{nc} . Для начального состояния $\psi(0) = |g, -1\rangle$, выбранного на рисунке, такая реализация появляется с конечной вероятностью, которая задается соответствующим дефектом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F[|g, -1\rangle, t] = \frac{1}{2} \quad (8.77)$$

распределения времени ожидания. Рис. 8.3 показывает график кумулятивной функции распределения $F[|g, -1\rangle, t]$ и соответствующую ей плотность.

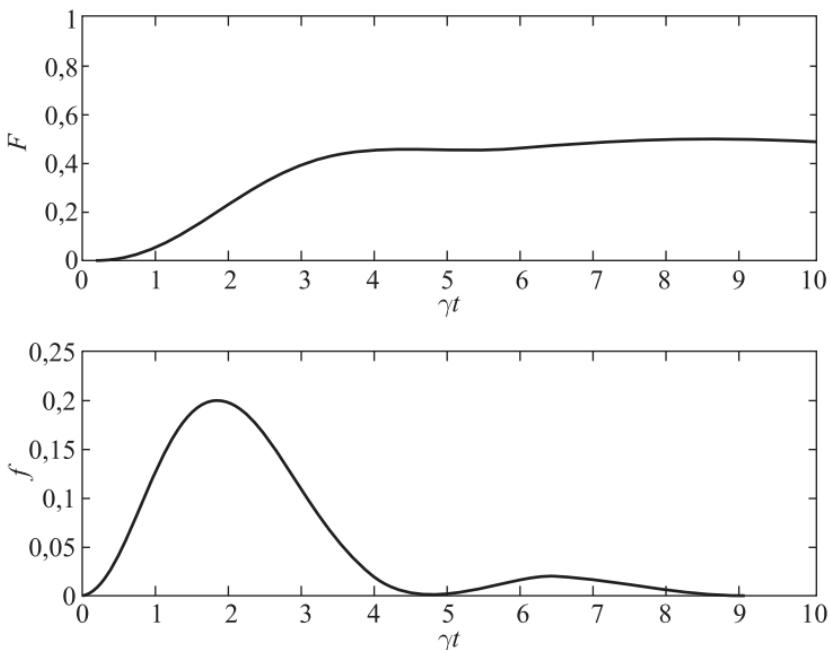


Рис. 8.3. Функция распределения времени ожидания $F[|g, -1\rangle, t]$ и соответствующая плотность $f(t) = dF[|g, -1\rangle, t]/dt$ для двухуровневой системы с темным состоянием и $\Omega = \gamma$.

Ситуация заметно отличается, если мы наблюдаем проекцию y момента импульса. В этом случае мы берем векторы поляризации $\vec{e}_0 = \vec{e}_y$ и $\vec{e}_{\pm} = \mp(\vec{e}_z \pm i\vec{e}_x)/\sqrt{2}$ для получения операторов скачка

$$\vec{e}_0^* \cdot \vec{A} = -\frac{id}{\sqrt{2}} |\psi_c\rangle \langle e, 0|, \quad (8.78)$$

$$\vec{e}_{\pm}^* \cdot \vec{A} = +\frac{id}{2} |\psi_{nc}\rangle \langle e, 0|, \quad (8.79)$$

где мы ввели состояние

$$\psi_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, +1\rangle - |g, -1\rangle), \quad (8.80)$$

которое ортогонально ловушечному состоянию. Оператор скачка $\vec{e}_0^* \cdot \vec{A}$ представляет обратное действие в случае, если проекция на y момента импульса фотона обращается в ноль. Это соответствует переводу атома в состояние ψ_c . В противоположность этому, выражение для $\vec{e}_{\pm}^* \cdot \vec{A}$ показывает,

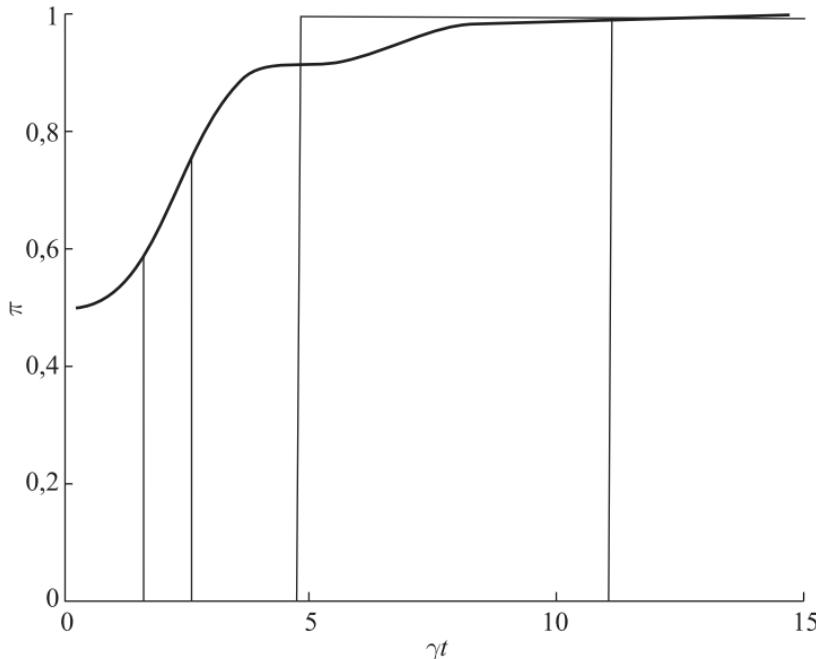


Рис. 8.4. То же, что и на рис. 8.2, но теперь угловой момент фотона измеряется на направление y . Квантовые скачки определяют вектор состояния либо прямо в ловушечное состояние, в случае которого $\pi = 1$, либо в состояние, ортогональное этому, такое что $\pi = 0$.

что результаты обоих измерений $\pm \hbar$ для момента импульса переводят атом в состояние ловушки ψ_{nc} . Таким образом, ловушечное состояние может быть достигнуто непосредственно через квантовый скачок, который проиллюстрирован на рис. 8.4.

Обе рассматриваемые измерительные схемы приводят, конечно, к одному и тому же уравнению для матрицы плотности и не могут быть различимы, если смотреть только на соответствие ансамбля типу \mathcal{E}_ρ . Как широко обсуждалось в главе 5, две измерительные схемы на самом деле могут быть различены, если измерения выполняются на селективном уровне, то есть если мы исследуем соответствующие ансамбли типа \mathcal{E}_P . Чтобы продемонстрировать это, мы строим на рис. 8.5 и 8.6 график дисперсий, введенных в уравнениях (5.12), (5.13) и (5.14), относительно наблюдаемой

$$R = |\psi_{nc}\rangle\langle\psi_{nc}|, \quad (8.81)$$

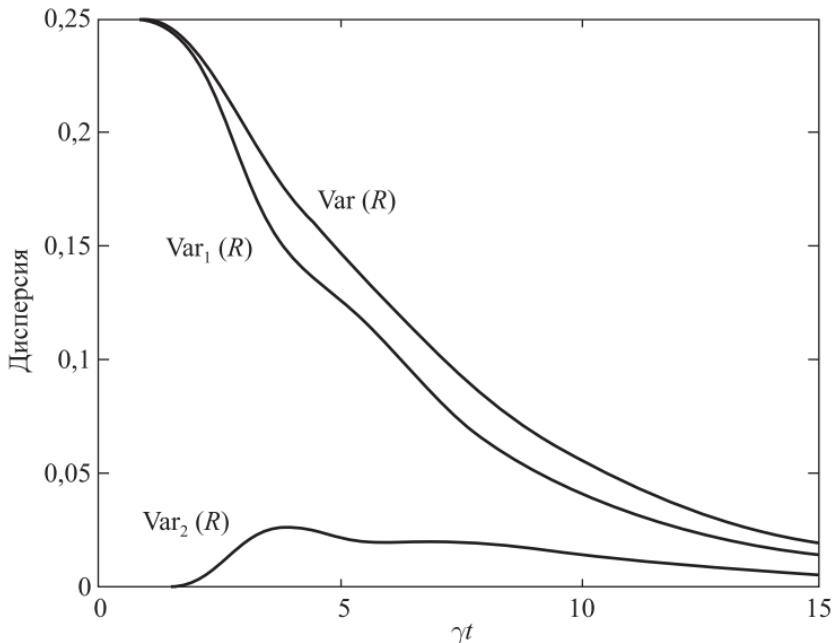


Рис. 8.5. Различные дисперсии наблюдаемой $R = |\psi_{nc}\rangle\langle\psi_{nc}|$ как функции времени. Измерительная схема регистрирует угловой момент фотона на ось z . $Var(R)$ определяется из решения уравнения для матрицы плотности, в то время как $Var_1(R)$ и $Var_2(R)$ оцениваются из выборки 10^4 реализаций.

которая является проектором на ловушечное состояние. Заселенность $\pi(t)$, определяемая в уравнении (8.76), является случайной величиной, которая может быть записана как

$$\pi(t) = \langle\psi(t)|R|\psi(t)\rangle. \quad (8.82)$$

Таким образом, мы имеем

$$Var_1(R) = E[\pi(t)] - E[\pi^2(t)], \quad (8.83)$$

$$Var_2(R) = E[\pi^2(t)] - (E[\pi(t)])^2, \quad (8.84)$$

$$Var(R) = E[\pi(t)] - (E[\pi(t)])^2. \quad (8.85)$$

Очевидно, сумма $Var_1(R)$ и $Var_2(R)$ равна $Var(R)$ и независима от измерительной схемы. Графики явно показывают, что после некоторого времени $Var_1(R)$ при измерениях проекции на ось y становится существенно

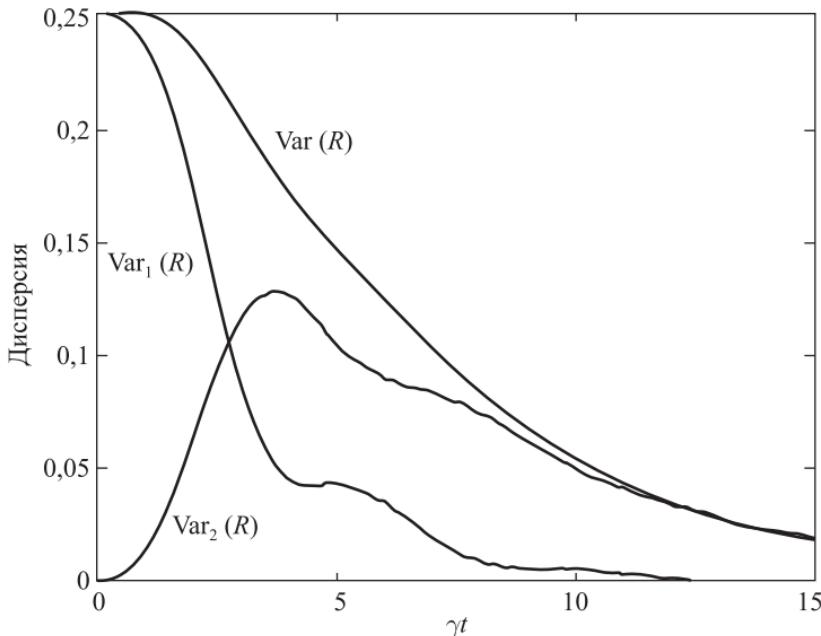


Рис. 8.6. То же, что и на рис. 8.5, но с измерительной схемой, регистрирующей угловой момент на ось y .

меньше, чем при измерении проекции на ось z . Это легко понять в контексте квантовой теории измерения. Как было видно выше, измерения проекции на ось y помещают вектор состояния в ловушечное состояние ψ_{nc} или, в противном случае, в ортогональное ему состояние ψ_c . Такая измерительная схема соответствует измерению R , то есть схема стремится к генерации базиса, в котором R диагональна. После того, как все реализации выполняют свой первый скачок, измерительная схема порождает ансамбль \mathcal{E}_P , состоящий из собственных состояний R , такой что $\text{Var}_1(R) = 0$. С другой стороны, измерение проекции момента импульса на ось z проецирует вектор состояния на состояния $|g, \pm 1\rangle$, для которых $\text{Var}_1(R) = \frac{1}{4}$. Поэтому в этом случае требуется намного больше времени для уменьшения $\text{Var}_1(R)$ до нуля.

Дисперсия $\text{Var}_2(R)$ есть мера разброса $\pi(t)$ по ансамблю \mathcal{E}_P , который при моделировании графиков брался состоящим из 10^4 реализаций. Так как $\text{Var}_1(R)$ больше при измерении проекции на ось z , $\text{Var}_2(R)$ меньше при такой измерительной схеме. Можно сделать вывод, что для миними-

зирования статистических флюктуаций $\pi(t) = \langle \psi(t)|R|\psi(t)\rangle$ необходимо попытаться получить так мало информации о квантовой наблюдаемой R , насколько это возможно. Если интересен только численный эффективный метод моделирования, то необходимо использовать измерительную схему для направления z , чтобы получить лучшую статистику.

8.3. Лазерное охлаждение и процессы Леви

Динамика, связанная с охлаждением поступательного движения атомов посредством надлежащим образом разработанных лазерных полей, дает важные и интересные примеры стохастических процессов в гильбертовом пространстве. На самом деле, это один из первых примеров, для которого стохастическая динамика волновой функции была использована с большим успехом (Cohen-Tannoudji, Bardou, Aspect, 1992; Castin, Mølmer, 1995). Оказывается, что стохастический метод позволяет рассматривать ряд задач в глубоком квантовом режиме (Cohen-Tannoudji, 1992a), который включает в себя большой разброс временных масштабов и оказывается сложным при рассмотрении на основе оптических блоховских уравнений.

Рассмотрим, например, так называемое доплеровское охлаждение, которое использует доплеровский сдвиг частоты лазера, который возникает при рассмотрении из системы покоя движущегося атома. Основной физический принцип, лежащий в основе этого механизма (Cohen-Tannoudji, 1992b), следующий. Мы берем два встречных лазерных пучка вдоль оси z . Частота лазера ω_L обоих пучков настраивается ниже собственной частоты перехода ω двухуровневого атома в лазерном поле, так что расстройка $\delta \equiv \omega_L - \omega$ становится отрицательной. Если атом движется в положительном z -направлении, например, он регистрирует близкое к резонансу фиолетовое смещение частоты лазерного поля, распространяющегося в отрицательном z -направлении. Атом возбуждается резонансным поглощением фотонов из этого луча и из-за сохранения линейного импульса испытывает давление излучения в направлении лазерного луча. Однако последующая спонтанная эмиссия флуоресцентного излучения, по существу, изотропна в пространстве, что эффективно приводит к диссипации энергии и общей силе трения, действующей на атом. Эта сила трения имеет то же направление, что и лазерные лучи. Таким образом, два направленных навстречу друг другу луча дают в результате затухающую z -компоненту $p = p_z$ атомного импульса.

Диссипация атомного импульса сопровождается флюктуационными силами, которые существуют благодаря случайным импульсам отдачи поряд-

ка $\hbar k = \hbar\omega/c$, спонтанно вызываемым излучаемыми фотонами. Таким образом, получается, что дисперсия Δp^2 импульса атома не может быть меньше фундаментального предела, который задается на языке энергии отдачи

$$E_R \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = \frac{1}{2}k_B T_R \quad (8.86)$$

соотношением

$$\Delta p^2 > 2ME_R, \quad (8.87)$$

где M обозначает атомную массу. Энергия отдачи может быть связана с определенной температурой, известной как температура отдачи

$$T_R = \frac{\hbar^2 k^2}{Mk_B}. \quad (8.88)$$

В качестве примера, для перехода $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ гелия находим, что $T_R \approx \approx 4\mu K$.

Этот предел отдельного фотона отдачи, задаваемый температурой отдачи T_R , представляется фундаментальным пределом для какого-либо механизма охлаждения, который включает спонтанную эмиссию фотонов. Для того чтобы преодолеть этот предел, некоторым образом прерываются эмиссионные процессы. Как мы видели в предыдущем разделе, это на самом деле возможно, если атомная волновая функция введена в темное состояние, которое не связано с лазерными полями, как результат эффекта квантовой интерференции. На этом основана схема охлаждения малой отдачи, которая будет обсуждаться в этом разделе (Cohen-Tannoudji, 1992a, 1992b; Bardou et al., 1994). С использованием вариантов этой схемы или воздействием тщательно спланированных импульсов в ряде красивых экспериментов было продемонстрировано, что температуры охлаждения могут достигать нанокельвинов (Kasevich, Chu, 1992; Lawall et al., 1994; Reichel et al., 1995; Lawall et al., 1995).

Как будет обсуждаться ниже, механизм охлаждения посредством слабой отдачи приводит к нескольким интересным свойствам статистики квантовых скачков. Деструктивная интерференция амплитуд перехода для взаимодействия атом-лазер является причиной распределений с длинным хвостом для времени ожидания, которые асимптотически характеризуются как определенные стабильные распределения Леви. В добавление к важным практическим применением, схема охлаждения на основе малой отдачи, таким образом, дает хороший пример случая Леви-статистики, как результата квантовой интерференции (Bardou, Bouchaud, Aspect, Cohen-Tannoudji, 2001).

8.3.1. Динамика атомной волновой функции

До сих пор мы полностью пренебрегали трансляционными степенями свободы. Это означает, что центр масс \vec{R} атома зафиксирован в начале системы координат, где, используя дипольное приближение, вычисляется электрическое поле.

Для того чтобы получить стохастическую динамику вектора состояний для системы охлаждения, мы должны принять во внимание движение центра масс атомов (Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc, Grynberg, 1998). Трансляционные степени свободы будут рассмотрены полностью квантово-механически, при этом связанные переменные \vec{R} и атомный импульс \vec{P} рассматриваются как операторы, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям

$$[P_i, Q_j] = -i\hbar\delta_{ij}. \quad (8.89)$$

Гамильтониан H_S , описывающий свободный атом, теперь состоит из двух частей, а именно: кинетической энергии движения центра масс и внутренней энергетической степени степеней свободы. Для простоты мы рассмотрим двухуровневый атом и обозначим через Π_e и Π_g проекторы на подпространства возбужденного и основного уровней соответственно. Тогда мы имеем

$$H_S = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \hbar\omega\Pi_e, \quad (8.90)$$

где ω есть частота перехода атома. Основное состояние энергии принимается за ноль.

Атом подвергается двум взаимодействиям: во-первых, взаимодействие с когерентным лазерным полем, которое будет описано классическим числовым полем $\vec{E}_L(\vec{x}, t)$, и, во-вторых, взаимодействие с квантованным полем излучения, чье представление Шредингера для оператора электрического поля будет обозначаться $\vec{E}(\vec{x})$. Определив дипольное приближение, мы можем, таким образом, написать взаимодействие атом-лазер как

$$H_L(t) = -\vec{D} \cdot \vec{E}_L(\vec{R}, t), \quad (8.91)$$

в то время как взаимодействие атома с полем излучения принимает вид

$$H_I = -\vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{R}). \quad (8.92)$$

Величина \vec{D} есть дипольный оператор атома. Отметим, что оба электрических поля определяются в центре масс атома. Суммарный гамильтониан для

атомного взаимодействия с когерентным лазерным и квантованным полем излучения можно записать как

$$H(t) = H_S + H_L(t) + H_I. \quad (8.93)$$

Для определенности рассмотрим следующую схему охлаждения, набросанную в начале этого раздела, а именно: электрическое поле $\vec{E}_L(\vec{R}, t)$ описывает два встречных лазерных пучка вдоль направления z (см. рис. 8.1). Пучок, распространяющийся в положительном направлении z , является поляризованным по кругу вправо, пучок, распространяющийся в отрицательном направлении z , поляризован по кругу влево. Вводя соответствующие векторы поляризации

$$\vec{e}_{\pm} = \mp \frac{1}{2}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y), \quad (8.94)$$

мы можем записать

$$\vec{E}_L(\vec{R}, t) = \frac{E_0}{2}(\vec{e}_+ \exp\{+ik_L z\} + \vec{e}_- \exp\{-ik_L z\})e^{-i\omega_L t} + \text{c.c.}, \quad (8.95)$$

где E_0 есть амплитуда поля. В равной степени, как и в разделе 8.2, мы рассматриваем случай перехода $J_e = 1 \leftrightarrow J_g = 1$. Понижающая часть \vec{A} атомного дипольного оператора, таким образом, задается уравнениями (8.63)–(8.65). С использованием этих выражений мы находим для взаимодействия атом-лазер в приближении врачающейся волны

$$H_L(t) = \frac{\hbar\Omega}{2\sqrt{2}} \left(|e, 0\rangle\langle g, +1| e^{-i(\omega_L t + k_L z)} - |e, 0\rangle\langle g, -1| e^{-i(\omega_L t - k_L z)} \right) + \text{c.c.}, \quad (8.96)$$

где $\Omega = E_0 d / \hbar$ есть частота Раби.

Так как координата центра масс \vec{R} канонически связана с импульсом атома \vec{P} , экспонента $\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{R})$ действует как сдвиг в импульсном пространстве, то есть

$$\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{R}) = \int |\vec{p}\rangle\langle\vec{p} + \hbar\vec{k}| d^3 p, \quad (8.97)$$

где состояния $|\vec{p}\rangle$ являются собственными импульсными состояниями движения центра масс, которые нормируются как

$$\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (8.98)$$

Тогда мы находим

$$H_L(t) = \frac{\hbar\Omega}{2\sqrt{2}} \int |e, 0, \vec{p}\rangle (\langle g, +1, \vec{p} + \hbar\vec{k}_L| - \langle g, -1, \vec{p} - \hbar\vec{k}_L|) e^{-i\omega_L t} d^3 p + \text{э.с.}, \quad (8.99)$$

где $\vec{k}_L \equiv k_L \vec{e}_z$ и мы ввели произведение состояний

$$|g, \pm 1, \vec{p}\rangle \equiv |g, \pm 1\rangle \otimes |\vec{p}\rangle, \quad |e, 0, \vec{p}\rangle \equiv |e, 0\rangle \otimes |\vec{p}\rangle. \quad (8.100)$$

Они являются одновременно собственными состояниями кинетической энергии движения центра масс и гамильтониана внутренних степеней свободы.

Уравнение (8.99), очевидно, интерпретируется так: взаимодействие атом-лазер вызывает многообразие переходов из основного состояния в различные возбужденные. С сохранением импульса в переходе $|g, -1\rangle \rightarrow |e, 0\rangle$ атом поглощает поляризованный вправо по кругу фотон из пучка, распространяющегося в положительном направлении z . Сохранение линейного импульса, таким образом, подразумевает, что атомный импульс изменяется на величину $+\hbar\vec{k}_L$. Подобным же образом в переходе $|g, +1\rangle \rightarrow |e, 0\rangle$ поглощается поляризованный по кругу влево фотон из пучка, распространяющегося в отрицательном направлении z так, что импульс атома изменяется на $-\hbar\vec{k}_L$.

Вид (8.99) для лазерного взаимодействия подразумевает введение, по аналогии с процедурой в предыдущем разделе (см. (8.73) и (8.80)), состояний

$$|\psi_{nc}(\vec{p})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|g, +1, \vec{p} + \hbar\vec{k}_L\rangle + |g, -1, \vec{p} - \hbar\vec{k}_L\rangle \right), \quad (8.101)$$

$$|\psi_c(\vec{p})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|g, +1, \vec{p} + \hbar\vec{k}_L\rangle - |g, -1, \vec{p} - \hbar\vec{k}_L\rangle \right), \quad (8.102)$$

которые удовлетворяют условиям нормировки

$$\langle \psi_j(\vec{p}) | \psi_{j'}(\vec{p}') \rangle = \delta_{jj'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (8.103)$$

где j и j' берутся для «*nc*» и «*c*». На языке этих состояний мы можем записать гамильтониан взаимодействия атом-лазер как

$$H_L(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} \int |e, 0, \vec{p}\rangle \langle \psi_c(\vec{p}) | e^{-i\omega_L t} d^3 p + \text{э.с.} \quad (8.104)$$

Эта форма непосредственно показывает, что лазерное поле связывается только с состоянием $|\psi_c(\vec{p})\rangle$, в то время как $|\psi_{nc}(\vec{p})\rangle$ есть нулевая мода этого взаимодействия

$$H_L(t)|\psi_c(\vec{p})\rangle = \frac{\hbar\Omega}{2}|e, 0, \vec{p}\rangle e^{-i\omega_L t}, \quad (8.105)$$

$$H_L(t)|\psi_{nc}(\vec{p})\rangle = 0. \quad (8.106)$$

Обратимся к взаимодействию атома с квантованным радиационным полем. Используя плосковолновые полевые моды, нормированные в объеме V с периодическими граничными условиями

$$U_\lambda(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\vec{e}_M(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (8.107)$$

мы можем записать оператор электрического поля, вычисленного в зависимости от координаты \vec{R} центра масс, как

$$\vec{E}(\vec{R}) = i \sum_{\vec{k}, M=\pm 1} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \left(\vec{e}_M(\vec{k}) \exp \left[-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{R}) \right] b_M(\vec{k}) - \vec{e}_M^*(\vec{k}) \exp \left[+i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{R}) \right] b_M^\dagger(\vec{k}) \right). \quad (8.108)$$

Здесь $\hbar\vec{k}$ есть импульс фотона, $\omega_k = ck$ есть частота, а векторы $\vec{e}_M(\vec{k})$ обозначают соответствующие векторы поляризации. Мы принимаем здесь $M = \pm 1$, где $M = +1$ соответствует правой поляризации фотона, а $M = -1$ — левой поляризации фотона (спиральность +1 и -1 соответственно).

Операторы $b_M(\vec{k})$ и $b_M^\dagger(\vec{k})$ обозначают операторы уничтожения и рождения для фотонов с волновым числом \vec{k} и поляризацией M . Операция, описывающая измерение такого фотона на всем временном интервале $\tau = t - t_0$, есть

$$\begin{aligned} \Omega_{\vec{k}, M} &= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle \vec{k}, M | H_I(t') | 0 \rangle dt' = \\ &= -i \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{\hbar V}} e^{i(\omega_k - \omega)t_0} \frac{e^{i(\omega_k - \omega)\tau} - 1}{\omega_k - \omega} \vec{e}_M^*(\vec{k}) \cdot \vec{A} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}. \end{aligned} \quad (8.109)$$

Таким образом, мы можем вывести обратное действие для измерения фотона, задаваемого (пренебрегая не относящимся к делу фазовым множителем) как

$$\frac{\Omega_{\vec{k}, M}\psi}{\|\Omega_{\vec{k}, M}\psi\|} = \frac{\vec{e}_M^*(\vec{k}) \cdot \vec{A} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \psi}{\|\vec{e}_M^*(\vec{k}) \cdot \vec{A} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \psi\|}. \quad (8.110)$$

Мы видим, что операция $\Omega_{\vec{k}, M}$, действующая на атомную волновую функцию ψ , включает оператор $\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{R})$, который вызывает сдвиг импульса атома на $-\hbar\vec{k}$ (см. (8.97)). Этот сдвиг описывает отдачу импульса атома, вызванную эмиссией фотонов с импульсом $+\hbar\vec{k}$.

Таким образом, мы видим, что измерение линейного импульса фотона равносильно непрямому измерению импульса отдачи центра масс атома. Это также видно прямо из явной формы обратного действия, которая получается при использовании уравнений (8.97) и (8.63). Мы находим, что

$$\begin{aligned} \vec{e}_M^*(\vec{k}) \cdot \vec{A} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} &= \frac{-Md}{2\sqrt{2}} \int \left(e^{-i\varphi} (\cos\theta - M) |g, +1, \vec{p} - \hbar\vec{k}\rangle \langle e, 0, \vec{p}| + \right. \\ &\quad \left. + e^{+i\varphi} (\cos\theta + M) |g, -1, \vec{p} - \hbar\vec{k}\rangle \langle e, 0, \vec{p}| \right) d^3p. \end{aligned} \quad (8.111)$$

Это уравнение показывает, что возбужденное состояние затухает спонтанно в линейной суперпозиции основных состояний атомов посредством изменения импульса атома на $-\hbar\vec{k}$. Амплитуды основных состояний зависят от направления импульса фотона $\hbar\vec{k}$ через полевые координаты (θ, φ) для \vec{k} .

С помощью уравнения (8.111) для интенсивности $d\Gamma$ излучения фотонов в телесном угле $d\Omega(\vec{k})$ с поляризацией M мы получаем

$$d\Gamma(\vec{k}, M) = \frac{1}{\tau} \sum_{\vec{k}' \in d\Omega(\vec{k})} \|\Omega_{\vec{k}', M}\psi\|^2 = \quad (8.112)$$

$$= \frac{3}{32\pi} \gamma (1 + \cos^2\theta) \langle \psi | \Pi_e | \psi \rangle d\Omega(\vec{k}), \quad (8.113)$$

где $\gamma = 4\omega^3|d|^2/3\hbar c^3$. Уравнение (8.113) показывает, что интенсивность спонтанного излучения не зависит от M и полярного угла φ . Она зависит только от z -компоненты

$$u \equiv \hbar k_z = \hbar k \cos\theta \quad (8.114)$$

импульса фотона. Согласно уравнению (8.113) случайная переменная u подчиняется распределению

$$q(u) = \frac{3}{8} \frac{1}{\hbar k} \left[1 + \left(\frac{u}{\hbar k} \right)^2 \right], \quad (8.115)$$

которое нормируется как

$$\int_{-\hbar k}^{+\hbar k} q(u) du = 1. \quad (8.116)$$

Приведенные выше результаты дают полную трехмерную структуру процесса. Эффективное одномерное описание получается при усреднении по ненаблюдаемым x и y компонентам атомного импульса и по полярному углу φ , и поляризации M . Это означает, что теперь мы описываем процесс на неселективном уровне с рассмотрением этих степеней свободы. Скачкообразные операторы, описывающие обратное действие атома, тогда зависят только от z компоненты u импульса фотона и любой проекции на $|g, +1\rangle$ или на $|g, -1\rangle$, то есть мы имеем следующие два типа скачкообразных операторов:

$$J_+(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int |g, +1, p-u\rangle \langle e, 0, p| dp, \quad (8.117)$$

$$J_-(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int |g, -1, p-u\rangle \langle e, 0, p| dp, \quad (8.118)$$

где $p \equiv p_z$ обозначает z -компоненты импульса атома.

Обобщая наши результаты, мы получаем следующее стохастическое уравнение для КДП, описывающее динамику внутренней степени свободы и z -компоненты трансляционного движения атома:

$$d\psi(t) = -\frac{i}{\hbar} G(\psi) dt + \int_{-\hbar k}^{+\hbar k} \sum_{s=\pm} \left[\frac{J_s(u)\psi}{\|J_s(u)\psi\|} - \psi \right] du dN_{u,s}(t), \quad (8.119)$$

где пуассоновские инкременты удовлетворяют условиям

$$E[dN_{u,s}(t)] = \gamma \|J_s(u)\psi(t)\|^2 q(u) dt, \quad (8.120)$$

$$dN_{u,s}(t)dN_{u',s'}(t) = \delta_{ss'}\delta(u-u')dN_{u,s}(t). \quad (8.121)$$

Нужно отметить, что $dN_{u,s}$ есть поле пуассоновских инкрементов (см. раздел 1.5.4), индексированных непрерывной величиной u для величины скачка. Генератор $G(\psi)$ детерминированного движения задается

$$G(\psi) = \hat{H}\psi + \frac{i\hbar\gamma}{2}\langle\psi|\Pi_e|\psi\rangle\psi, \quad (8.122)$$

а неэрмитовый гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2M} + \hbar\left(-\delta - \frac{i\gamma}{2}\right)\Pi_e + H_L. \quad (8.123)$$

Величина $\delta = \omega_L - \omega$ есть расстройка между частотой атомного перехода ω и частотой лазера ω_L , которая принимается равной нулю в дальнейшем, то есть $\delta = 0$. Здесь мы также выполнили каноническое преобразование с унитарным оператором $\exp(-i\omega_L\Pi_e t)$ для того, чтобы удалить явную времененную зависимость гамильтониана, так что взаимодействие атом-лазер теперь запишется как

$$H_L = \frac{\hbar\Omega}{2} \int |e, 0, p\rangle\langle\psi_c(p)|dp + \text{э.с.} \quad (8.124)$$

Эти уравнения описывают КДП для механизма охлаждения.

8.3.2. Когерентная заселенность ловушек

Для того чтобы понять важные особенности стохастической динамики механизма охлаждения, мы введем семейство подпространства

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p) &= \text{span}\{|e, 0, p\rangle, |g, +1, p + \hbar k_L\rangle, |g, -1, p - \hbar k_L\rangle\} = \\ &= \text{span}\{|e, 0, p\rangle, |\psi_{nc}(p)\rangle, |\psi_c(p)\rangle\}, \end{aligned} \quad (8.125)$$

которое промарковано импульсом p . Мы обозначаем через $\Pi(p)$ ортогональную проекцию на подпространство $\mathcal{M}(p)$. Легко проверить, что этот проектор коммутирует с гамильтонианом \hat{H} , то есть

$$[\hat{H}, \Pi(p)] = 0. \quad (8.126)$$

Этот факт связан с сохранением суммарного линейного импульса системы атом-лазер и подразумевает, что подпространство $\mathcal{M}(p)$ является инвариантом при условии детерминированной эволюции процесса, что означает, что вектор состояния, однажды достигнув $\mathcal{M}(p)$ скачком, остается в $\mathcal{M}(p)$

до возникновения следующего скачка. Если мы перепишем оператор скачка как

$$J_{\pm}(u) = \frac{1}{2} \int (|\psi_{nc}(p - u \mp \hbar k_L)\rangle \pm |\psi_c(p - u \mp \hbar k_L)\rangle) \langle e, 0, p | dp, \quad (8.127)$$

то увидим, что скачок с $J_{\pm}(u)$ приводит к изменению подпространства, согласно преобразованию

$$\mathcal{M}(p) \rightarrow \mathcal{M}(p - u \mp \hbar k_L). \quad (8.128)$$

Напомним, что u есть случайная величина из интервала $[-\hbar k, +\hbar k]$, которая распределена с плотностью $q(u)$, задаваемой уравнением (8.115). Физически u есть случайная отдача из-за спонтанного излучения.

Возьмем состояния $|e, 0, p\rangle$, $|\psi_{nc}(p)\rangle$, $|\psi_c(p)\rangle$ как основные состояния определенного подпространства $\mathcal{M}(p)$. Неэрмитов гамильтониан $\hat{H}(p)$, который генерирует детерминированные эволюционные периоды в $\mathcal{M}(p)$, может быть записан как

$$\hat{H}(p) = \left(\frac{p^2}{2M} + E_R \right) I + \hat{V}(p), \quad (8.129)$$

где I обозначает единичную матрицу 3×3 , E_R есть энергия отдачи (8.86), и мы ввели неэрмитову матрицу 3×3

$$\hat{V}(p) = \begin{pmatrix} -E_R - i\hbar\gamma/2 & 0 & \hbar\Omega/2 \\ 0 & 0 & \hbar kp/M \\ \hbar\Omega/2 & \hbar kp/M & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.130)$$

Отметим, что недиагональные элементы описывают различные связи, а именно взаимодействие атом-лазер

$$\langle e, 0, p' | \hat{H} | \psi_c(p) \rangle = \langle e, 0, p' | H_L | \psi_c(p) \rangle = \frac{\hbar\Omega}{2} \delta(p - p'), \quad (8.131)$$

и связь между уровнями основного состояния

$$\langle \psi_c(p') | \hat{H} | \psi_{nc}(p) \rangle = \langle \psi_c(p') | P^2 / 2M | \psi_{nc}(p) \rangle = \frac{\hbar kp}{M} \delta(p - p'), \quad (8.132)$$

приводящую к доплеровской энергии $\hbar kp/M$. Последний член дает связь между внутренней степенью свободы и трансляционным движением.

Для простоты в дальнейшем положим $\hbar = 1$. В качестве специального примера ниже мы исследуем лазерное охлаждение на переходе $2^3 S_1 \leftrightarrow 2^3 P_1$ гелия, для которого мы имеем $2\pi/k = 1,083$ мкм, $\gamma/2\pi = 1,6$ МГц и $E_R/\hbar\gamma = 0,027$. Частота Раби выбиралась $\Omega = 0,3\gamma$. Это была первая система, для которой описанный механизм охлаждения продемонстрирован экспериментально. Все численные значения и моделирование (дано ниже) относятся к этому примеру.

Ключевым пунктом процесса охлаждения в режиме малой отдачи является спектр сложных собственных значений неэрмитового гамильтониона на $\widehat{V}(p)$ и результирующая структура распределения времени ожидания

$$F[\psi, \tau] = 1 - \|\exp(-i\widehat{V}(p)\tau)\psi\|^2. \quad (8.133)$$

Если $p = 0$, мы прямо из уравнения (8.130) выводим, что $|\psi_{nc}(0)\rangle$ есть нулевая мода $\widehat{V}(0)$. Она определенно является темным состоянием, которое уже встречалось в разделе 8.2. Благодаря взаимодействию атом-лазер и динамическому охлаждению, все три уровня постепенно приобретают конечную ширину для ненулевого импульса p . Эти ширины определяются как удвоенные отрицательные мнимые части комплексных собственных значений $\varepsilon_e(p)$, $\varepsilon_{nc}(p)$ и $\varepsilon_c(p)$ от $\widehat{V}(p)$

$$\Gamma_e(p) = -2\Im\varepsilon_e(p), \quad (8.134)$$

$$\Gamma_{nc}(p) = -2\Im\varepsilon_{nc}(p), \quad (8.135)$$

$$\Gamma_c(p) = -2\Im\varepsilon_c(p). \quad (8.136)$$

Соответствующие точные собственные векторы неэрмитова гамильтониона на $\widehat{V}(p)$ будут обозначаться $|\Phi_e(p)\rangle$, $|\Phi_{nc}(p)\rangle$ и $|\Phi_c(p)\rangle$. Здесь мы обозначили собственные состояния так, что их непрерывно связанные состояния при $p = 0$ имеют наибольший вес в состояниях $|\psi_e(0)\rangle$, $|\psi_{nc}(0)\rangle$ и $|\psi_c(0)\rangle$ соответственно. В частности, $\Gamma_{nc}(p) \rightarrow 0$ и $|\Psi_{nc}(p)\rangle \rightarrow |\psi_{nc}(0)\rangle$ при $p \rightarrow 0$. В самом деле, с помощью характеристического уравнения для собственного значения легко найти, что для малого p $\Gamma_{nc}(p)$ задается выражением

$$\Gamma_{nc}(p) = \gamma \left(\frac{4E_R}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{p}{k} \right)^2 + \mathcal{O}(p^4). \quad (8.137)$$

Ширина состояния $|\Phi_{nc}(p)\rangle$, которая имеет большой вклад от состояния $|\psi_{nc}(p)\rangle$, таким образом, исчезает как p^2 . Это проиллюстрировано на рис. 8.7, который показывает график $\Gamma_{nc}(p)$ и $\Gamma_c(p)$ как функцию импульса p . Третья ширина $\Gamma_e(p)$ может быть найдена из условия, что сумма ширин однозначно равна γ . Мы наблюдаем провал на кривой $\Gamma_{nc}(p)$ и пик ширины $\Gamma_c(p)$ у $p = 0$. Для больших значений импульса обе ширины того же порядка, к тому же они уменьшаются в силу доплеровского сдвига.

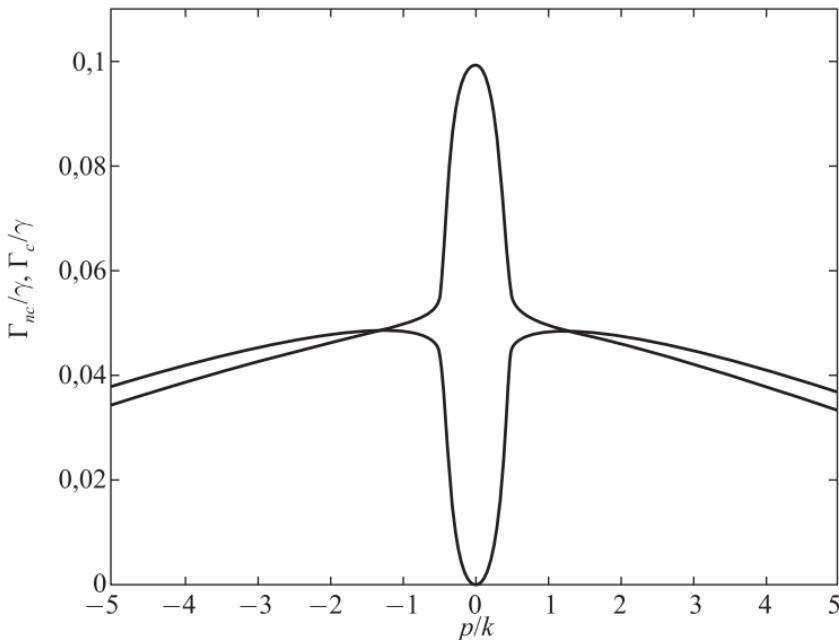


Рис. 8.7. График ширин $\Gamma_{nc}(p)$ и $\Gamma_c(p)$ основного состояния как функции атомного импульса p . Выбранные параметры соответствуют переходу $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ гелия.

График распада интенсивностей показывает, что для нулевого импульса $\Gamma_{nc}(p)$ и $\Gamma_c(p)$ отличаются по порядку величины. Этот факт оказывает глубокое влияние на свойства распределения времени ожидания (8.133). Как мы видели, вектор атомного состояния вводит некоторое подпространство $\mathcal{M}(p)$ (см. (8.125)), связанное со скачком. Если импульс p точно равен нулю, то с вероятностью $1/2$ атом остается захваченным навсегда в подпространстве $\mathcal{M}(p=0)$. Это происходит благодаря тому, что в обоих состояниях $|g, \pm 1, \pm k\rangle$ амплитуда нахождения в несвязанном состоянии $|\psi_{nc}(p=0)\rangle$, которое является точной нулевой модой $\hat{V}(p=0)$, равна $1/\sqrt{2}$. Мы иллюстрируем это на рис. 8.8 и 8.9, которые показывают распределение времени ожидания (8.133) для начальных состояний $|g, +1, p+k\rangle$ и $|\psi_{nc}(p)\rangle$ как функции времени ожидания τ и импульса p .

Для ненулевых малых импульсов p вектор атомного состояния, несомненно, покидает подпространство $\mathcal{M}(p)$. Однако время ожидания τ для следующего скачка может быть предельно большим: оба состояния $|g, \pm 1, p \pm k\rangle$ вносят одинаковый вклад (примерно 50 %) из сос-

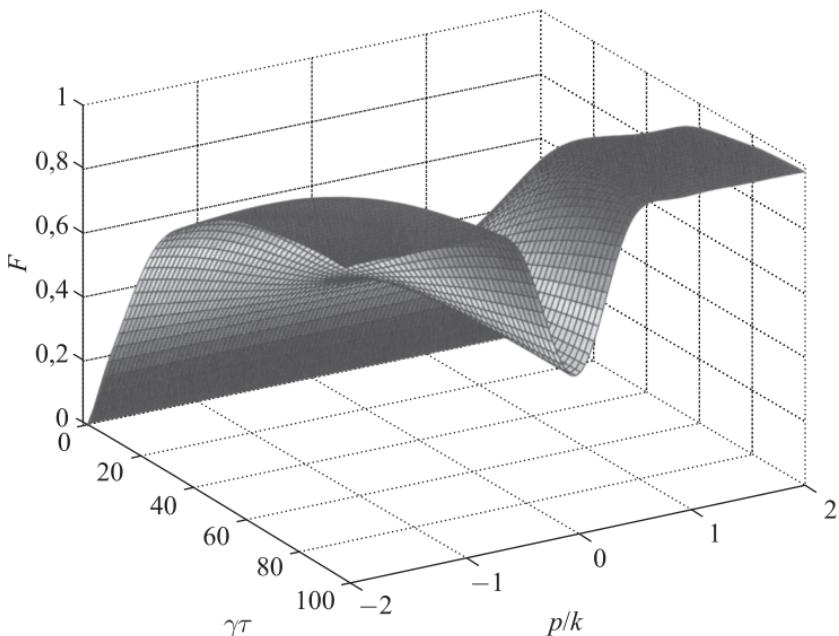


Рис. 8.8. Распределение времени ожидания $F[|g, +1, p+k\rangle, \tau]$ как функции времени ожидания τ и импульса p . В результате квантовой интерференции в лазерном возбуждении с вероятностью $\frac{1}{2}$ атом, изначально находящийся в состоянии $|g, +1, k\rangle$, не покидает коллектор $\mathcal{M}(0)$.

тояния $|\Phi_{nc}(p)\rangle$, которое является определенным собственным состоянием $\widehat{V}(p)$ с предельно малой шириной $\Gamma_{nc}(p)$. Происходит то, что во время периода детерминированной эволюции, следующей за скачком в $\mathcal{M}(p)$, атомный вектор состояния быстро переводится в состояние $|\Phi_{nc}(p)\rangle$, где остается на долгое время. Достижение состояния $|\Phi_{nc}(p)\rangle$ происходит очень быстро, так как ширины $\Gamma_c(p)$ и $\Gamma_e(p)$ по порядку величины больше, чем ширина $\Gamma_{nc}(p)$.

Представленная выше картина подтверждается численным моделированием процесса, определенного стохастическим дифференциальным уравнением (8.119). На рис. 8.10 мы показываем отдельную реализацию КДП, описывающего процесс охлаждения. Реализация включает в себя суммарное число 10^4 квантовых скачков. Картина показывает примечательный факт, который, однако, типичен для выборочных траекторий процесса. А именно: в суммарном времени эволюции доминирует время ожидания τ

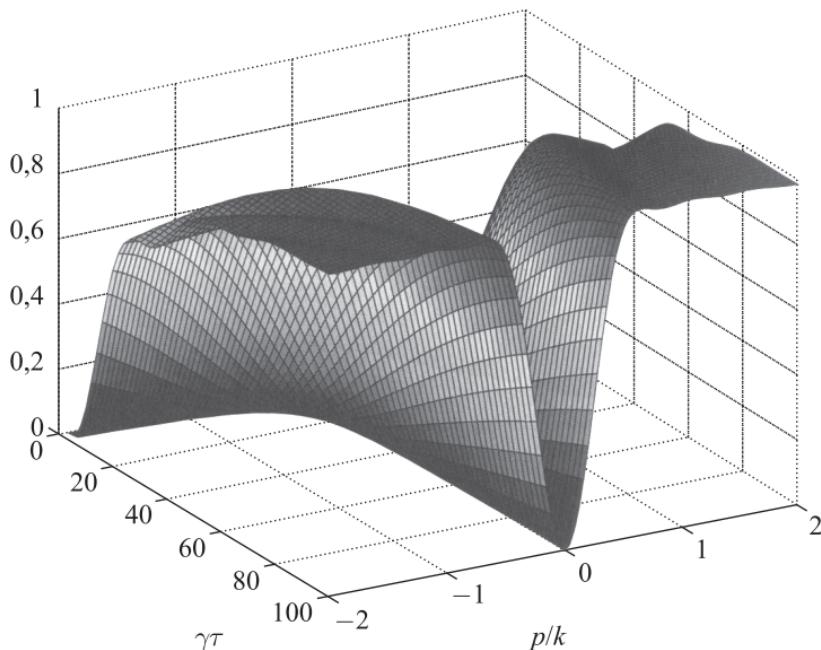


Рис. 8.9. Распределение времени ожидания $F[|\psi_{nc}(p)\rangle, \tau]$ для начального состояния $|\psi_{nc}(p)\rangle$. Благодаря квантовой интерференции в лазерном возбуждении, вероятность скачка из состояния $|\psi_{nc}(p)\rangle$ сильно гасится для малых импульсов p .

для отдельного квантового скачка, примерно $\gamma\tau = 5 \cdot 10^7$. Отметим, что импульс между скачками является константой. Как будет продемонстрировано в следующем подразделе, статистика времен ожидания управляет распределением с длинным хвостом, подобно стабильному распределению Леви.

Также из графика очевидно, что долгие времена ожидания прерываются сериями очень коротких. Это проиллюстрировано на рис. 8.11 и 8.12, где мы изобразили увеличенными некоторые участки рис. 8.10. Быстрая смена существенно различных временных масштабов делает динамику очень сложной для рассмотрения, основанном на оптических уравнениях Блоха. Однако в стохастическом моделировании рассмотрение широкого распределения времени ожидания не вызывает каких-либо проблем. При использовании метода обращения, например, даже наибольший период времени ожидания может быть сосчитан за один шаг. Таким образом, нет необходимости адаптировать численный шаг по времени для наименьшего времен-

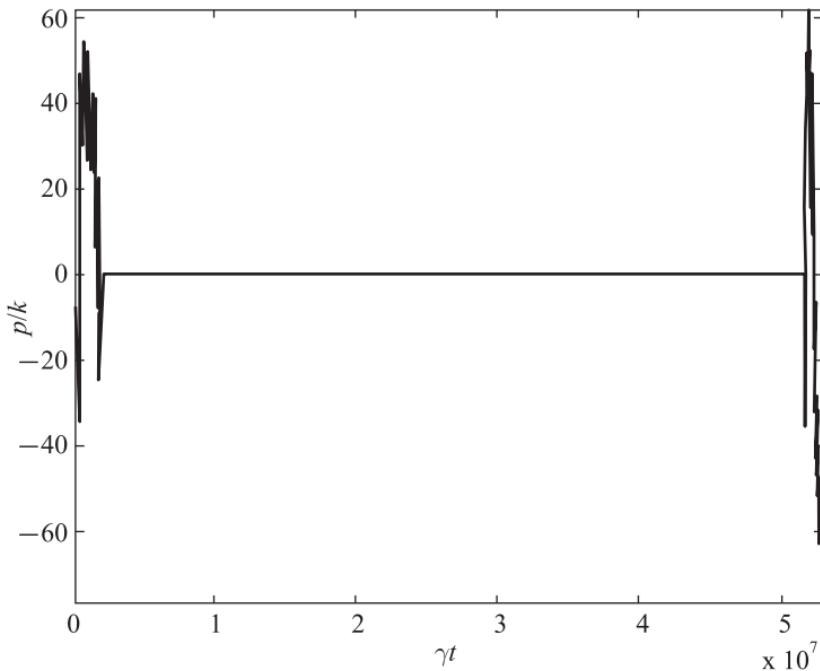


Рис. 8.10. Стохастическое моделирование суботдачи для лазерного охлаждения. График показывает импульс $p(t)$ для отдельной реализации стохастического процесса, определяемого дифференциальным уравнением (8.119), включающего 10^4 квантовых скачков.

ного масштаба задачи; алгоритм стохастического моделирования выбирает соответствующий шаг по времени автоматически.

Так как $|\Phi_{nc}(p)\rangle$ очень близка к $|\psi_{nc}(p)\rangle$ при малых p , мы можем сказать, что атомы, которые попадают в малую область вблизи $p = 0$, с высокой вероятностью оказываются захвачены на большой период времени и что большая часть этих атомов с определенностью находится в состоянии $|\psi_{nc}(t)\rangle$. Для того чтобы действительно иметь процесс охлаждения, нам нужен дальнейший механизм, который переносит, по меньшей мере, часть атомов в область вблизи $p = 0$. Такой механизм предоставляется диффузионным импульсом благодаря толчкам, вызываемым спонтанными диффузионными процессами. Таким образом, мы видим, что охлаждение атомных импульсов есть следствие взаимодействия между двумя основными процессами, а именно: процесса диффузии импульсов, возникающего благодаря спонтанной эмиссии, и процесса когерентного захвата, который

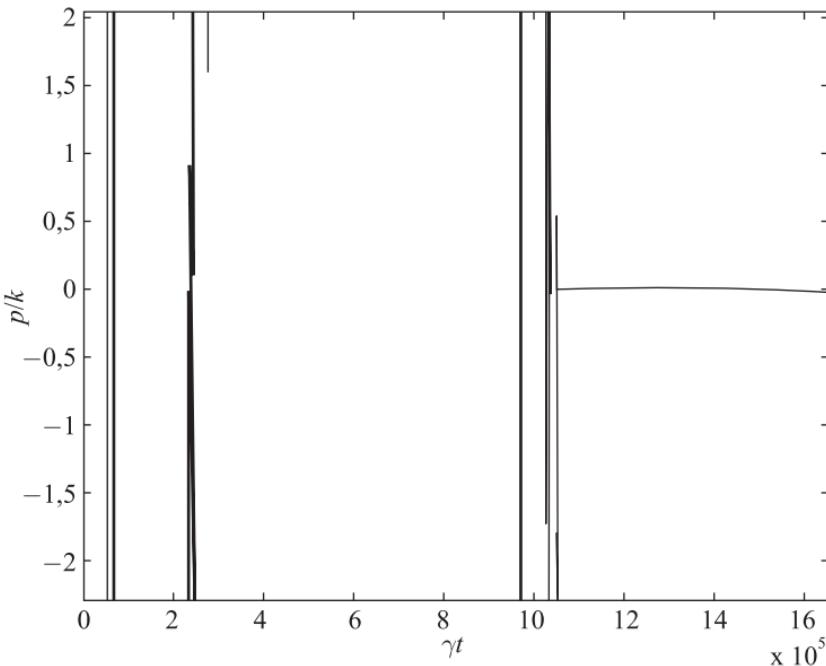


Рис. 8.11. Расширенный участок рис. 8.10, показывающий последовательность большого числа скачков с малыми временами ожидания. Эти скачки в итоге приводят атом в почти нулевой импульс, где он остается пойманым на долгое время.

происходит из-за квантового интерференционного эффекта. Это можно интерпретировать, сказав, что квантовый интерференционный эффект вызывает диффузию в импульсном пространстве, с коэффициентом диффузии, который строго зависит от импульса. В противоположность обычной схеме охлаждения Доплера, основным физическим механизмом является не эффективная сила трения, а скорее скорость селективного когерентного захвата.

8.3.3. Времена ожидания и импульсные распределения

Для дальнейшего понимания статистики случайных распределений времен мы зафиксируем область $|p| < p_t$ импульса, меньшего, чем некоторый импульс захвата p_t . Здесь полагается, что p_t выбирается таким маленьким, что интенсивность $\Gamma_{nc}(p)$ ухода из состояния $|\Phi_{nc}(p)\rangle$ хорошо аппроксимируется как p^2 при $|p| < p_t$ (см. (8.137)), предположим так-

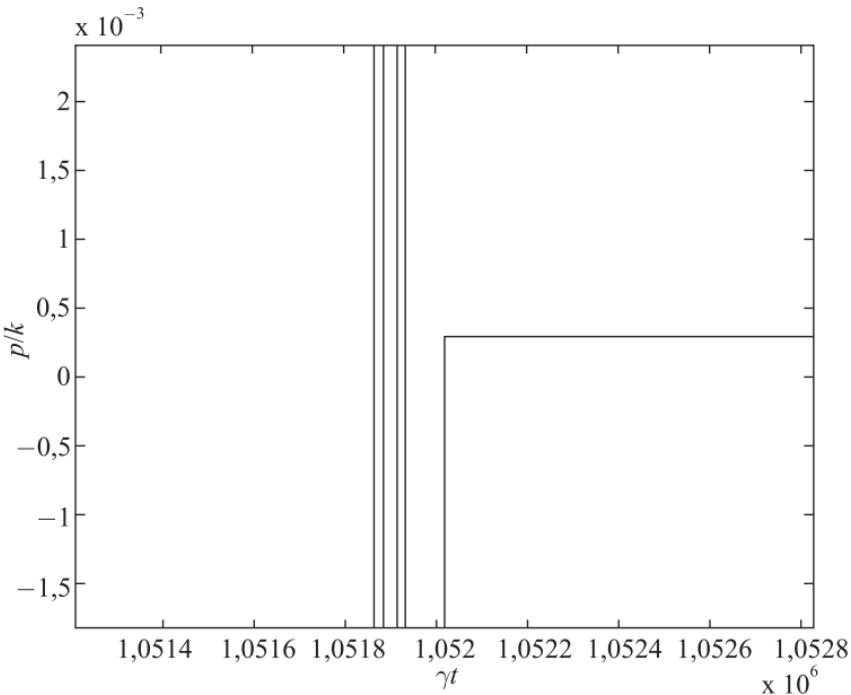


Рис. 8.12. Увеличенная часть рис. 8.11, показывающая, что атом попадает в ловушечную область с очень малым импульсом, меньшим, чем $0,5 \cdot 10^{-3} k$.

же, что $p_t \ll k$. Полагаем, что атом захватывается в эту область через квантовый скачок, из вне ловушечной зоны с импульсом $|p| > p_t$. Так как размеры скачков порядка k , в дальнейшем может быть предположено, что атомы высаживаются в ловушечной зоне с равномерным распределением импульса.

Как уже обсуждалось в предыдущем подразделе, с высокой вероятностью состояние атома после скачка почти немедленно переходит в состояние $\Phi_{nc}(p)$, из которого может выйти с интенсивностью $\Gamma_{nc}(p)$. Плотность распределения для времени ожидания следующего скачка, при условии заданности характерного импульса p , приблизительно есть

$$f(p, \tau) = \Gamma_{nc}(p) \exp(-\Gamma_{nc}(p)\tau). \quad (8.138)$$

Если мы объединим это с приведенным выше допущением равномерности импульсного распределения, получим следующее выражение для безуслов-

ной плотности вероятности времен ожидания:

$$s(\tau) = \frac{1}{2p_t} \int_{-p_t}^{+p_t} f(p, \tau) dp = \frac{1}{2\Gamma_{nc}(p_t)^{1/2}\tau^{3/2}} \int_0^{\Gamma_{nc}(p_t)\tau} \sqrt{u} e^{-u} du. \quad (8.139)$$

При $\Gamma_{nc}(p_t)\tau \gg 1$ интеграл сходится к $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, что приводит к асимптотическому выражению

$$s(\tau) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\tau_t} \left(\frac{\tau_t}{\tau} \right)^{3/2}, \quad (8.140)$$

где мы определили характеристическое время захвата, связанное с p_t как

$$\tau_t = [\Gamma_{nc}(p_t)]^{-1}. \quad (8.141)$$

В силу уравнения (8.137) получаем

$$\gamma \tau_t \approx \left(\frac{\Omega}{4E_R} \right)^2 \left(\frac{k}{p_t} \right)^2. \quad (8.142)$$

Распределение (8.140) времени ожидания демонстрирует степенной закон медленного распада вида $s(\tau) \sim \tau^{-3/2}$, который характеризует стабильное распределение Леви с показателем масштабирования $\alpha = \frac{1}{2}$. При соответствующем выборе параметра масштабирования мы находим, что распределение Леви

$$s_L(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\tau_t} \left(\frac{\tau_t}{\tau} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\pi^2}{16} \frac{\tau_t}{\tau} \right) \quad (8.143)$$

имеет то же асимптотическое поведение, что и распределение времени ожидания $s(\tau)$. Распределение (8.143) уже встречалось в уравнении (1.264) в качестве примера стабильного распределения Леви, чье явное аналитическое выражение известно. Таким образом, мы нашли, что эффект квантовой интерференции, который приводит к обнулению ширины, не связанного состояния $|\psi_{nc}(p=0)\rangle$, порождает широкое распределение времени ожидания (Bardou et al., 1994).

Степенной закон распада для распределения времени ожидания является асимптотической характеристикой случайной величины, которая асимптотически следует стабильному распределению Леви. Рис. 8.13 показывает результат численного моделирования распределения времени ожидания

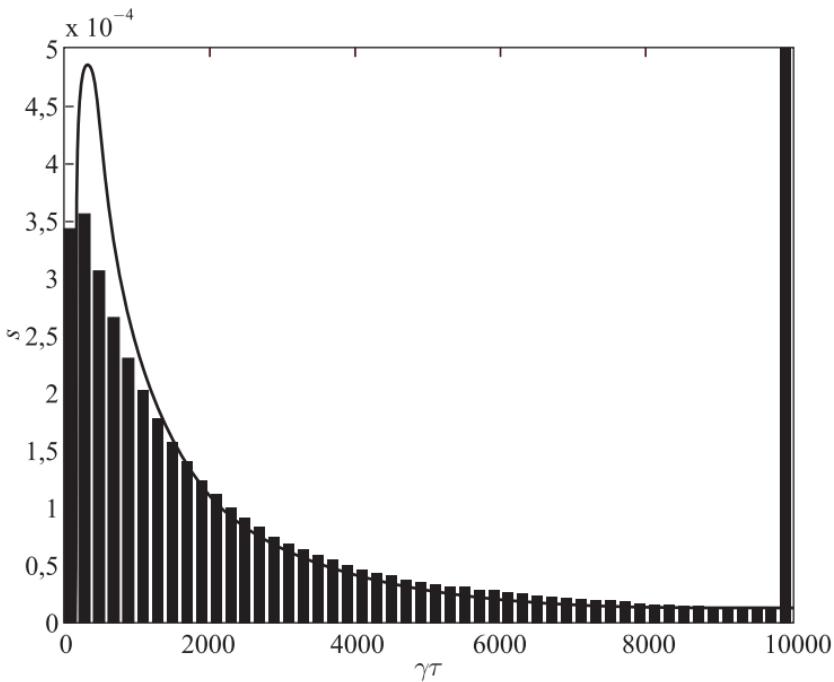


Рис. 8.13. Распределение $s(\tau)$ времен ожидания τ для начальных состояний с импульсом внутри области $|p| < p_t$. Рисунок показывает гистограмму моделирования с 10^6 реализациями с $p_t = 0,1k$, соответствующую времени захвата примерно $\gamma\tau_t = 771$. Для сравнения, рисунок также показывает стабильное распределение Леви с масштабным параметром $\alpha = \frac{1}{2}$ (сплошная линия). Последний столбец гистограммы содержит все времена ожидания, большие показанных.

и сравнивает его с распределением (8.143). Ясно виден медленный спад распределения. При моделировании мы использовали $p_t = 0,1k$, соответствующее времени захвата примерно $\gamma\tau_t = 771$ в силу уравнения (8.143). Как и ожидалось, данные моделирования оказались в хорошей согласованности с распределением (8.143) для времен много больших, чем время захвата τ_t .

Как объяснялось в разделе 1.6.3, распределение (8.143) безгранично делимно и стабильно с показателем масштабирования $\alpha = \frac{1}{2}$. Следовательно, случайная величина τ вслед за $s_L(\tau)$ обладает следующим свойством. Мы берем N независимых копий $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ параметра τ и определяем

масштабируемую сумму

$$\bar{\tau} \equiv \frac{1}{N^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^N \tau_i = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \tau_i. \quad (8.144)$$

Новая случайная величина $\bar{\tau}$ снова распределена согласно распределению Леви (8.143). Отметим, что множитель масштабирования есть $1/N^2$, а не $1/N$, как это было бы в случаях, где могла бы быть применена цент-

ральная предельная теорема. Величина $\sum_{i=1}^N \tau_i / N$ масштабируется как $N\bar{\tau}$,

что показывает, что обычное математическое ожидание большого числа N копий τ с высокой вероятностью больше, чем любой член суммы. Это демонстрирует резкий уход статистики времени ожидания от обычного поведения, описываемого центральной предельной теоремой, которая неприменима здесь, так как моменты τ расходятся.

Приведенные выше соотношения масштабирования точно верны только для распределения Леви $s_L(\tau)$ и неверны для истинных распределений времен ожидания $s(\tau)$. Однако мы можем использовать свойство стабильности распределения Леви, чтобы вывести универсальные соотношения масштабирования. Для этого мы рассмотрим бесконечную последовательность τ_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, копий случайной величины нижеупомянутого распределения $s(\tau)$ и зафиксируем N . Уравнение (8.144) может быть рассмотрено как определяющее преобразование

$$\mathcal{F}_N : \{\tau_i\} \mapsto \{\bar{\tau}_j\} \quad (8.145)$$

в новую последовательность $\bar{\tau}_j$, $j = 1, 2, 3, \dots$, случайных величин, задаваемых явно

$$\bar{\tau}_j = \frac{1}{N^{1/\alpha}} \sum_{k=1+N(j-1)}^{N_j} \tau_k. \quad (8.146)$$

Отображение \mathcal{F}_N может быть рассмотрено как перенормировка преобразования. Последовательность τ_i группируется в наборы из N элементов каждый, элементы каждого набора суммируются, а суммы масштабируются множителем $N^{-1/\alpha}$. Это дает в результате новую *крупномодульную* последовательность случайных величин $\bar{\tau}_j$.

Может быть показано, что согласно последовательному приложению перенормировочного преобразования \mathcal{F}_N распределения крупномодульных последовательностей сходятся к соответствующему α -распределению Леви, которое, в данном случае, есть (8.143). Перенормировочное преобра-

зование, таким образом, приводит распределение времени ожидания $s(\tau)$ в $\frac{1}{2}$ -стабильное распределение Леви (8.143).

Математическая причина такого поведения в том, что притягивающие стационарные точки для перенормировочного преобразования \mathcal{F}_N , рассматриваемые как отображение в пространство вероятностных распределений, задаются α -стабильными распределениями. В этом контексте центральная предельная теорема может быть представлена в качестве частного случая, отвечающего фиксированной точке, для которой $\alpha = 2$. Распределение времени ожидания $s(\tau)$, обнаруженное выше, соответствует области притяжения к соответствующей точке, характеризуемой $\alpha = 1/2$. Таков источник универсального поведения в статистике времен ожидания. Перенормировочное преобразование проиллюстрировано на рис. 8.14 для случая $N = 5$.

В заключение рассмотрим результирующие распределения атомных импульсов (Aspect et al., 1989). Такое распределение может быть определено как

$$w(p) = \langle p | \text{tr}_{\text{вн.}}(\rho) | p \rangle, \quad (8.147)$$

где $\rho = E[|\psi\rangle\langle\psi|]$ есть атомная матрица плотности, а $\text{tr}_{\text{вн.}}$ обозначает след по всем внутренним степеням свободы атома. Эта нормированная плотность описывает распределение импульса p , как это будет показано, в случае измерения импульса на исследуемых атомах. Так как в ловушечной области допустимая величина суммарного количества атомов, будущих в состояниях $|\psi_{nc}(p')\rangle$ с p' , мала и так как $\langle p|\psi_{nc}(p')\rangle$ состоит из двух δ -образных пиков при $p = p' \pm k$, то мы ожидаем, что распределение $w(p)$ содержит два пика при $p = \pm k$ на общем фоне.

Для грубой оценки ширины δp этих пиков мы зафиксируем некоторое время взаимодействия t и введем требование для диапазона импульсов $|p| < \delta p$ такое, что атомы остаются пойманными со значительной вероятностью в течение времени t . Ясно, что этот диапазон импульсов находится из соотношения $\Gamma_{nc}(\delta p)t \sim 1$, которое с использованием (8.137) дает

$$\frac{\delta p}{k} \sim \frac{\Omega}{4E_R} \frac{1}{\sqrt{\gamma t}}. \quad (8.148)$$

Эта оценка показывает, что δp масштабируется как Ω/\sqrt{t} . Подразумевается, что не существует, по крайней мере в принципе, нижнего предела ширины распределения импульсов. При значительно больших временах взаимодействия ширина δp становится меньше, чем импульс отдачи k . Соответствующее охлаждение происходит до температуры T_c , определяемой как

$$\frac{1}{2}k_B T_c = \frac{\delta p^2}{2M}, \quad (8.149)$$

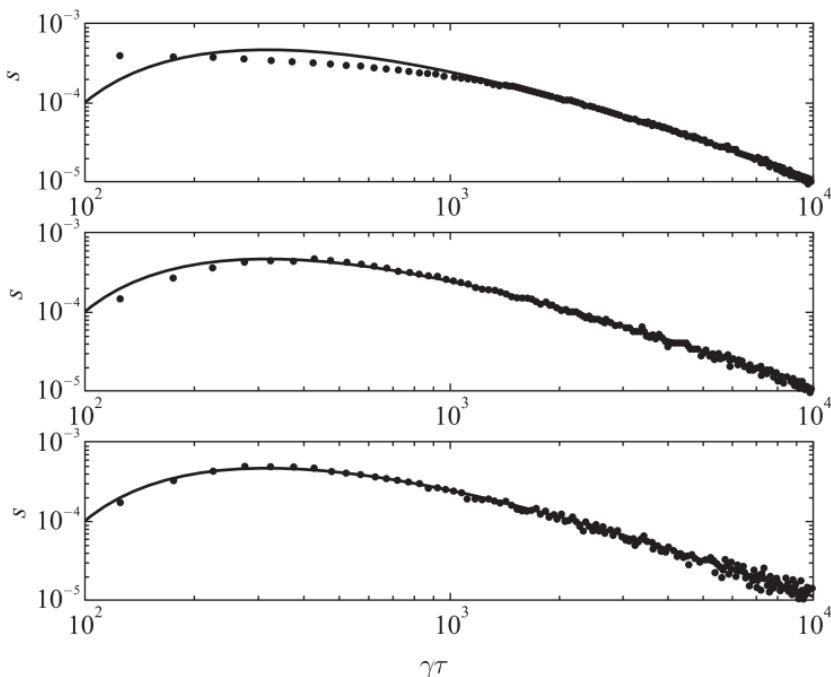


Рис. 8.14. Иллюстрация преобразования перенормировки (8.145) случайного времени ожидания в лазерном охлаждении при $N = 5$. На рисунке представлены графики моделирования с суммарным числом 10^6 реализаций с $p_t = 0,1k$ (значки) и соответствующее распределение Леви (сплошная линия) в логарифмическом масштабе. Сверху: исходные данные, в центре: первое приложение \mathcal{F}_5 , внизу: второе приложение \mathcal{F}_5 .

что намного меньше, чем температуры отдачи T_R . Это проиллюстрировано на рис. 8.15, который показывает распределение $w(p)$ атомных импульсов в момент времени $\gamma t = 10^4$, полученное из стохастического моделирования 10^4 реализаций.

Другое импульсное распределение может быть определено как

$$v(p) = \langle \psi_{nc}(p) | \rho | \psi_{nc}(p) \rangle, \quad (8.150)$$

что в итоге дает долю атомов, которые будут обнаружены в состоянии $|\psi_{nc}(p)\rangle$ при измерении. Здесь мы ожидаем отдельный пик при $p = 0$, который ясно виден на рис. 8.16.

В заключение нужно подчеркнуть, что не следует придавать особый смысл определению температуры охлаждения в терминах кинетичес-

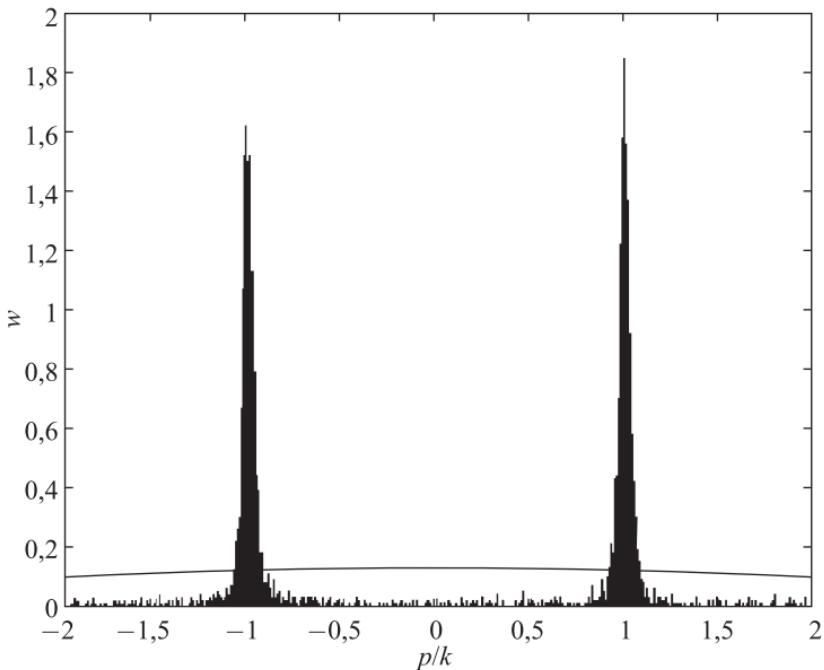


Рис. 8.15. Распределение $w(p)$ атомного импульса в момент времени $\gamma t = 10^4$, полученное из моделирования с 10^4 реализациями. Распределение демонстрирует два резких пика при $p = \pm k$ с шириной δp , которая намного меньше, чем импульс отдачи k . Начальные импульсы отбираются из гауссова распределения со стандартным отклонением $3k$ (сплошная линия).

кой энергии атомов. Причина выбора определения (8.149) для T_c в том, что пойманные атомы с высокой вероятностью находятся в состояниях $|\psi_{nc}(p)\rangle$, которые представляют суперпозиции собственных импульсных состояний. Определение T_c , таким образом, принимает во внимание квантовые корреляции между внутренними и трансляционными степенями свободы атомов.

8.4. Взаимодействие с сильным полем и картина Флоке

Ситуация, возникшая в предыдущих разделах, оказалась той же самой, что и для ограниченной квантовой системы, которая связана с окружением, состоящим из непрерывных мод электромагнитного поля и когерентного

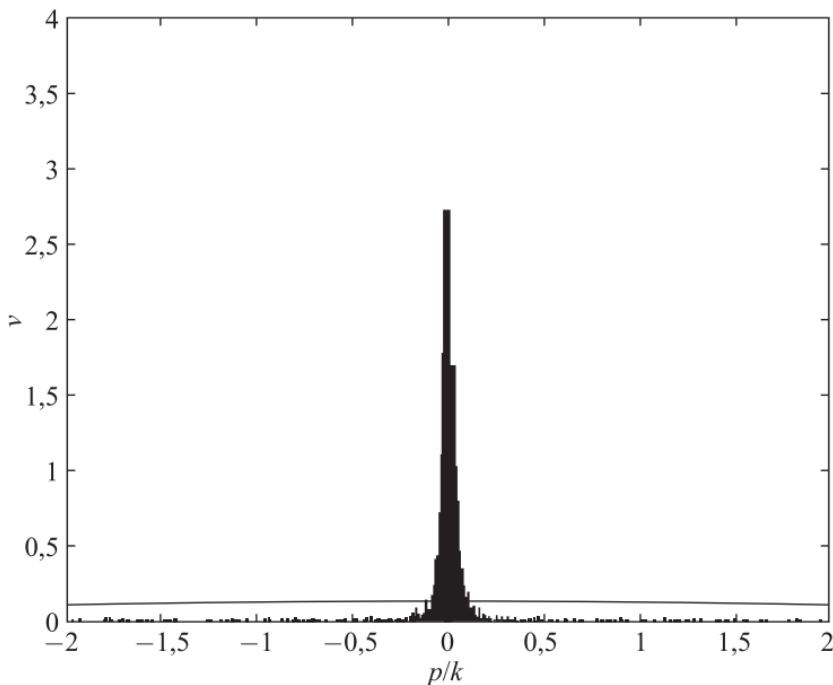


Рис. 8.16. Распределение $v(p)$ (см. (8.150)) в момент времени $\gamma t = 10^4$, полученное из моделирования с 10^4 реализациями. Распределение демонстрирует отдельный пик при $p = 0$ с шириной, намного меньшей, чем импульс отдачи k . Начальные импульсы берутся из распределения Гаусса со стандартным отклонением $3k$ (сплошная линия).

внешнего поля возбуждения. Процедура рассмотрения этой ситуации была проста и состояла в том, чтобы добавить гамильтониан, описывающий внешнее возбуждение для когерентной части уравнения движения. Однако следующий за этим вывод основного квантового оптического уравнения показывает, что эта процедура оправдывается только в том случае, если внешнее возбуждающее поле представляет малое возмущение и может быть рассмотрено на равном основании со связью между редуцированной системой и окружением. Добавление гамильтониана внешнего поля к когерентной части динамики без такого же изменения диссипативной части динамики имеет смысл в рамках приближения врачающейся волны для взаимодействия между системой и полем возбуждения. Очевидно, что эти условия нарушаются, если внешнее поле сильное.

Подходящая стратегия для описания сильных периодических возбуждающих полей заключается в том, чтобы рассмотреть взаимодействие между открытой квантовой системой и полем возбуждения точно в рамках базиса Флоке, а не посредством стационарных собственных состояний невозмущенного гамильтониана. Эта идея приводит к марковскому основному квантовому уравнению для редуцированной матрицы плотности, которая оказывается в форме Линдблада при записи в базисе Флоке. Такой подход был применен в описании ридберговских атомов в сильных микроволновых полях при влиянии внешнего шума (Blümel et al., 1991) и для параметрически возбужденного гармонического осциллятора (Kohler, Dittrich, Hänggi, 1997).

В данном разделе мы соединим идею рассмотрения диссипативных квантовых систем в сильных возбуждающих полях в картине Флоке со стохастическим представлением непрерывного наблюдения окружения. Мы выводим КДП, описывающий спектральное детектирование в присутствии сильного внешнего возбуждения. Как будет показано, скачки КДП появляются между подпространствами, охваченными состояниями Флоке системы, отражая обратное действие как результат испущенного излучения. Наблюдаемые частоты излучаемого спектра соответствуют разностям собственных значений Флоке. Мы также обсудим простой пример, который служит для демонстрации связи теории Флоке с картиной резонансной флуоресценции «одетого» атома.

8.4.1. Теория Флоке

Свободная эволюция редуцированной квантовой системы генерируется некоторым независимым от времени гамильтонианом H_S^0 . Связь с возбуждающим полем представлена гамильтонианом $H_L(t)$, который принимается периодическим во времени, то есть

$$H_L(t + T_L) = H_L(t), \quad (8.151)$$

где $T_L \equiv 2\pi/\omega_L$, а ω_L обозначает частоту возбуждения. Таким образом, гамильтониан, который описывает редуцированную систему без ее взаимодействия с окружением, задается T_L -периодическим оператором

$$H_S(t) = H_S^0 + H_L(t). \quad (8.152)$$

Дальнейшая стратегия заключается в том, чтобы рассмотреть точно ту часть динамики, которая описывается гамильтонианом системы $H_S(t)$. В этой процедуре избегается приближение врачающейся волны для взаимодействия между системой и внешним возбуждением, а также любое рассмотрение возмущений для этой части динамики. Для этого мы используем

теорию Флоке квантово-механических систем с периодическим во времени гамильтонианом (Shirley, 1965; Zeldovich, 1967). Уравнение Шредингера

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -\frac{i}{\hbar}H_S(t)\psi(t) \quad (8.153)$$

есть дифференциальное уравнение с периодическими во времени коэффициентами. Согласно теореме Флоке существует полный набор решений $\psi_r(t)$ уравнения (8.153), промаркованных индексом r , который может быть записан в виде

$$\psi_r(t) = u_r(t) \exp\{-i\varepsilon_r t/\hbar\}. \quad (8.154)$$

Вид этих решений вполне подобен аналогичным стационарным состояниям системы с гамильтонианом, не зависящим от времени. Величины ε_r , появляющиеся в фазовых множителях $\exp(-i\varepsilon_r t/\hbar)$, не зависят от времени и называются квазиэнергиями или индексами Флоке. Векторы состояний $u_r(t)$ зависят периодически от времени

$$u_r(t + T_L) = u_r(t) \quad (8.155)$$

и называются состояниями Флоке. Полнота решений Флоке выражается соотношением

$$\sum_r |u_r(t)\rangle\langle u_r(t)| = I, \quad (8.156)$$

которое показывает, что в каждое фиксированное время t векторы состояний $u_r(t)$ формируют полный набор базисных состояний. Более того, эти состояния могут быть выбраны ортогональными

$$\langle u_r(t)|u_{r'}(t)\rangle = \delta_{rr'}. \quad (8.157)$$

Таким образом, состояния Флоке формируют независимый от времени базис в гильбертовом пространстве системы. Отсюда следует, что любое решение $\psi(t)$ стационарного уравнения Шредингера (8.153) может быть разложено как

$$\psi(t) = \sum_r a_r u_r(t) \exp\{-i\varepsilon_r t/\hbar\}. \quad (8.158)$$

Важно отметить, что, согласно теореме Флоке, амплитуды a_r независимы от времени.

Подставляя уравнение (8.154) в стационарное уравнение Шредингера, мы видим, что волновые функции Флоке $u_r(t)$ могут быть получены из

уравнения для собственных значений

$$\mathbf{H}u_r(t) \equiv \{H_S(t) - i\hbar\partial_t\}u_r(t) = \varepsilon_r u_r(t) \quad (8.159)$$

наложением периодических граничных условий вида (8.155). Оператор \mathbf{H} в уравнении (8.159) есть оператор Флоке, который должен быть рассмотрен как оператор в расширенном гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{T_L}, \quad (8.160)$$

где \mathcal{H}_S есть гильбертово пространство открытой системы, а \mathcal{H}_{T_L} обозначает квадратично-интегрируемые T_L -периодические функции. Скалярное произведение в расширенном гильбертовом пространстве задается как

$$\langle\langle u|v \rangle\rangle \equiv \int_0^{T_L} \frac{dt}{T_L} \langle u(t)|v(t) \rangle, \quad (8.161)$$

так что выражение $-i\hbar\partial_t$ в уравнении для собственных значений (8.159) становится оператором Гамильтона в \mathcal{H}_F .

Важно отметить следующий факт. Рассмотрим некоторое заданное решение $u_r(t)$ характеристического уравнения Флоке (8.159) с квазиэнергией ε_r , тогда для любого целого n функция

$$u_{r,n}(t) \equiv u_r(t) \exp\{i\omega_L n t\} \quad (8.162)$$

есть решение с квазиэнергией

$$\varepsilon_{r,n} \equiv \varepsilon_r + \hbar\omega_L n. \quad (8.163)$$

С другой стороны, для всех целых n состояния (8.162) приводят к тому же решению стационарного уравнения Шредингера, так как

$$u_{r,n}(t) \exp\{-i\varepsilon_{r,n} t/\hbar\} = u_r(t) \exp\{-i\varepsilon_r t/\hbar\}. \quad (8.164)$$

Классы состояний (8.162), соответствующие фиксированному r и различным целым n , следовательно, физически эквивалентны.

Оператор временной эволюции $U_S(t, t')$, соответствующий уравнению Шредингера (8.153), подчиняется условиям

$$\frac{\partial}{\partial t} U_S(t, t') = -\frac{i}{\hbar} H_S(t) U_S(t, t'), \quad U_S(t', t') = I. \quad (8.165)$$

В силу представления Флоке (8.158) оператор эволюции принимает вид

$$U_S(t, t') = \sum_r |u_r(t)\rangle\langle u_r(t')| \exp\{-i\varepsilon_r(t - t')/\hbar\}, \quad (8.166)$$

что легко проверить с помощью уравнения (8.159) и соотношения полноты (8.156).

8.4.2. Стохастическая динамика в картине Флоке

Для того чтобы вывести стохастический процесс для динамики редуцированной системы, связанной с непрерывными модами излучения, мы рассмотрим дипольный оператор

$$\vec{D}(t) = U_S^\dagger(t, 0) \vec{D} U_S(t, 0). \quad (8.167)$$

Это точное представление Гейзенберга для оператора диполя системы с внешним полем возбуждения. Мы ищем разложение $\vec{D}(t)$ на частотные компоненты $\vec{A}(\omega)$, такие что

$$\vec{D}(t) = \sum_{\omega} \exp\{-i\omega t\} \vec{A}(\omega) + \text{э.с.}, \quad (8.168)$$

где суммирование происходит по всем определенным наборам положительных частот ω . Используя разложение Флоке (8.166) оператора временной эволюции $U_S(t, 0)$, находим, что

$$\vec{D}(t) = \sum_{r, r'} |u_r(0)\rangle\langle u_r(t)| \vec{D} |u_{r'}(t)\rangle\langle u_{r'}(0)| \exp\{-i(\varepsilon_{r'} - \varepsilon_r)t/\hbar\}. \quad (8.169)$$

Здесь дипольный матричный элемент зависит периодически от времени, и мы можем использовать разложение Фурье, чтобы получить

$$\langle u_r(t) | \vec{D} | u_{r'}(t) \rangle = \sum_n \langle \langle u_{r,n} | \vec{D} | u_{r'} \rangle \rangle \exp\{i\omega_L n t\}, \quad (8.170)$$

где мы использовали состояния (8.162) и скалярное произведение (8.161) в расширенном гильбертовом пространстве. Таким образом, мы можем записать оператор диполя как

$$\vec{D}(t) = \sum_{r, r', n} |u_r(0)\rangle\langle \langle u_{r,n} | \vec{D} | u_{r'} \rangle \rangle \langle u_{r'}(0)| \exp\{-i(\varepsilon_{r'} - \varepsilon_r - \hbar\omega_L n)t/\hbar\}, \quad (8.171)$$

что в итоге приводит к

$$\vec{A}(\omega) = \sum_{r, r', n} |u_r(0)\rangle \langle \langle u_{r, n} | \vec{D} | u_{r'} \rangle \rangle \langle u_{r'}(0)|. \quad (8.172)$$

Суммирование в этом выражении проходит по всем наборам (r, r', n) квантовых чисел, которые удовлетворяют условию

$$\varepsilon_{r'} - \varepsilon_r - \hbar\omega_L n = \hbar\omega > 0. \quad (8.173)$$

Для заданной частоты ω существует несколько наборов (r, r', n), которые удовлетворяют этому ограничению. Частотная компонента $\vec{A}(\omega)$ оператора диполя отличается от нуля, если, по меньшей мере, один из соответствующих матричных элементов отличается от нуля, то есть если

$$\langle \langle u_{r, n} | \vec{D} | u_{r'} \rangle \rangle \equiv \int_0^{T_L} e^{-i\omega_L nt} \langle u_r(t) | \vec{D} | u_{r'}(t) \rangle \frac{dt}{T_L} \neq 0. \quad (8.174)$$

Это означает, что n -я компонента Фурье осциллирующего матричного элемента оператора диполя в базисе Флоке должна быть ненулевой. Обозначим Ω_{rad} набор положительных частот ω , задаваемых уравнением (8.173) и дополнительным правилом отбора (8.174). Набор Ω_{rad} определяет положения пиков в спектре излучения, индуцируемого системой.

На этой стадии мы можем продолжить подобным же образом, как в разделе 8.1, посредством частотного разложения (8.51) картины взаимодействия. Оператор диполя заменяется разложением (8.168) оператора диполя в представлении Гейзенберга. Для того чтобы можно было применить приближение вращающейся волны для связи система-окружение, должно быть удовлетворено условие

$$|\omega - \omega'| \gg \gamma(\omega) |\langle \langle u_{r, n} | \vec{D} | u_{r'} \rangle \rangle|^2 \quad (8.175)$$

для различных частот излучательного спектра. В результате спектральное детектирование приводит к КДП для вектора состояния источника, которое задается (Breuer, Petruccione, 1997; Breuer, Huber, Petruccione, 2000)

$$d\psi(t) = -\frac{i}{\hbar} G(\psi(t)) dt + \sum_{\omega} \sum_{M=0, \pm} \left[\frac{\vec{e}_M^* \cdot \vec{A}(\omega) \psi(t)}{\| \vec{e}_M^* \cdot \vec{A}(\omega) \psi(t) \|} - \psi(t) \right] dN_{\omega, M}(t). \quad (8.176)$$

Выражения для генератора $G(\psi)$ и математических ожиданий пуассоновских инкрементов $dN_{\omega, M}(t)$ формально идентичны выведенным в разделе 8.1 (см. (8.53) и (8.54)). Однако новая особенность состоит в том, что оператор скачков $\vec{A}(\omega)$ определяется на языке представления Флоке, включая точную временную эволюцию под действием периодической внешней силы. Согласно уравнению (8.172) $\vec{A}(\omega)$ есть понижающие операторы, соответствующие положительным частотам перехода $\omega \in \Omega_{\text{rad}}$ источника; они описывают квантовые скачки между многообразиями, охватываемыми состояниями Флоке.

Резюмируя, мы находим, что положения пиков флуоресцентного спектра определяются разницами квазиэнергий, модулями целых произведений $\hbar \omega_L$. Заданная частота ω появляется в излучательном спектре, если матричные элементы $\langle \langle u_{r,n} | \vec{D} | u_{r'} \rangle \rangle$ не исчезают, так как в противном случае соответствующий оператор скачка будет равен нулю согласно правилу отбора (8.174). Кроме обычных правил отбора для этих матричных элементов, обусловленных симметрией, важны те правила отбора, которые появляются из Фурье-разложения состояний Флоке. Например, условие для генерации высокой гармоники излучения (L'Huillier, Schafer, Kulander, 1991), то есть большого n в уравнении (8.173), заключается в том, что высокие моды Фурье состояний Флоке значительно возбуждены. Это условие удовлетворяется, в частности, около близких к вырождениям или освобожденным переходам в квазиэнергетическом спектре, построенном как функция амплитуды поля возбуждения (Breuer, Dietz, Holthaus, 1988).

Уравнение движения для редуцированной матрицы плотности источника легко получается определением уравнения движения для ковариации КДП, полученного выше. Делая обратное преобразование в представление Шредингера, мы получаем основное уравнение

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S(t), \rho_S(t)] + \mathcal{D}_t(\rho_S(t)), \quad (8.177)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t(\rho_S) \equiv & \sum_{\omega} \gamma(\omega) \left(\vec{A}(\omega, t) \rho_S \vec{A}^{\dagger}(\omega, t) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \vec{A}^{\dagger}(\omega, t) \cdot \vec{A}(\omega, t) \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S \vec{A}^{\dagger}(\omega, t) \cdot \vec{A}(\omega, t) \right) \end{aligned} \quad (8.178)$$

есть диссипатор энергии, включающий независимые от времени операторы

$$\vec{A}(\omega, t) = \sum_{r, r', n} |u_{r,n}(t)\rangle \langle \langle u_{r,n} | \vec{D} | u_{r'} \rangle \rangle \langle u_{r'}(t)|. \quad (8.179)$$

Снова предполагаем суммирование по всем тем наборам (r, r', n) , которые соответствуют заданной частоте ω излучательного спектра. Для каждого фиксированного t диссипатор энергии D_t представлен в форме Линдблада. Однако, в противоположность случаю основного оптического квантового уравнения, он явно зависит от времени. Физическую причину этого легко понять. Внешнее возбуждение приводит к сильному искажению дипольного момента. Так как система связывается с окружением через дипольный момент, поле возбуждения также сильно влияет на механизм диссипации.

8.4.3. Спектральное детектирование и описание «одетых» атомов

Давайте рассмотрим двухуровневый атом, который сильно возбужден резонансным полем возбуждения. Допуская приближение врачающейся волны, мы можем записать гамильтониан системы как

$$H_S(t) = \omega_0 \sigma_+ \sigma_- + \frac{\Omega}{2} (\sigma_+ e^{-i\omega_L t} + \sigma_- e^{i\omega_L t}), \quad (8.180)$$

где ω_0 обозначает разность уровней, Ω есть частота Раби и мы положим $\hbar = 1$. При резонансе, то есть при $\omega_L = \omega_0$, базис состояний Флоке задается

$$u_{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm e^{-i\omega_L t} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.181)$$

с соответствующими квазиэнергиями

$$\varepsilon_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \Omega. \quad (8.182)$$

Отметим, что состояния Флоке были выбраны такими, чтобы их соответствующая квазиэнергетическая разность была равной частоте Раби Ω . Представление Шредингера оператора диполя задается как

$$D = \sigma_+ + \sigma_-. \quad (8.183)$$

Таким образом, в случае слабого возбуждения мы имеем только один оператор скачка, который задается понижающим оператором σ_- . Итоговый КДП, определяемый посредством этого оператора скачка, является точным процессом, который использовался при моделирования квантового оптического уравнения Блоха в разделе 6.3.

Для того чтобы определить операторы скачка в случае сильного возбуждения, мы используем представление Флоке (8.166) оператора временен-

ной эволюции для получения дипольного оператора в представлении Гейзенберга

$$\begin{aligned} D(t) = U_S^\dagger(t, 0) D U_S(t, 0) = & |u_+(0)\rangle\langle u_+(t)|D|u_+(t)\rangle\langle u_+(0)| + \quad (8.184) \\ & + |u_-(0)\rangle\langle u_-(t)|D|u_-(t)\rangle\langle u_-(0)| + \\ & + |u_+(0)\rangle\langle u_+(t)|D|u_-(t)\rangle\langle u_-(0)|e^{i(\varepsilon_+-\varepsilon_-)t} + \\ & + |u_-(0)\rangle\langle u_-(t)|D|u_+(t)\rangle\langle u_+(0)|e^{i(\varepsilon_--\varepsilon_+)t}. \end{aligned}$$

Так как

$$\langle u_\pm(t)|D|u_\pm(t)\rangle = \pm \frac{1}{2}(e^{i\omega_L t} + e^{-i\omega_L t}), \quad (8.185)$$

$$\langle u_+(t)|D|u_-(t)\rangle = \frac{1}{2}(e^{i\omega_L t} - e^{-i\omega_L t}), \quad (8.186)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} D(t) = & \frac{1}{2}(e^{i\omega_L t} + e^{-i\omega_L t})(|u_+(0)\rangle\langle u_+(0)| - |u_-(0)\rangle\langle u_-(0)|) + \\ & + \frac{1}{2}(e^{i(\omega_L+\Omega)t} - e^{-i(\omega_L-\Omega)t})|u_+(0)\rangle\langle u_-(0)| - \quad (8.187) \\ & - \frac{1}{2}(e^{i(\omega_L-\Omega)t} - e^{-i(\omega_L+\Omega)t})|u_-(0)\rangle\langle u_+(0)|. \end{aligned}$$

Из этого соотношения мы непосредственно заключаем, что имеем три оператора скачка, соответствующих положительным частотам ω_L и $\omega_L \pm \Omega$, а именно

$$A(\omega_L) = \frac{1}{2}(|u_+(0)\rangle\langle u_+(0)| - |u_-(0)\rangle\langle u_-(0)|), \quad (8.188)$$

$$A(\omega_L + \Omega) = \frac{1}{2}|u_-(0)\rangle\langle u_+(0)|, \quad (8.189)$$

$$A(\omega_L - \Omega) = -\frac{1}{2}|u_+(0)\rangle\langle u_-(0)|. \quad (8.190)$$

Таким образом, вместо одного оператора скачка σ_- мы получаем три оператора скачка в случае сильного возбуждения. Условие для случая сильного возбуждения дается (8.175), что здесь приводит к условию $\Omega \gg \gamma$.

Чтобы написать соответствующий КДП, определяемый уравнением (8.176) более явно, мы раскладываем вектор состояния по базису Флоке как показано ниже:

$$\psi(t) = \phi_+(t)|u_+(0)\rangle + \phi_-(t)|u_-(0)\rangle \quad (8.191)$$

и представляем его через двухкомпонентный вектор

$$\psi(t) \leftrightarrow \phi(t) \equiv \begin{pmatrix} \phi_+(t) \\ \phi_-(t) \end{pmatrix}. \quad (8.192)$$

Скачкообразные операторы, задаваемые в уравнении (8.188), представляются матрицами Паули

$$A(\omega_L) \leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma_3, \quad A(\omega_L \pm \Omega) \leftrightarrow \pm \frac{1}{2}\sigma_{\mp}. \quad (8.193)$$

Уравнение (8.176) ведет к стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\phi(t) = \left[\frac{\sigma_3\phi(t)}{\|\sigma_3\phi(t)\|} - \phi(t) \right] dN_3(t) + \sum_{q=\pm} \left[\frac{\sigma_q\phi(t)}{\|\sigma_q\phi(t)\|} - \phi(t) \right] dN_q(t). \quad (8.194)$$

Мы видим, что генератор детерминированных эволюционных периодов КДП исчезает, так что процесс становится чистым скачковым процессом. Статистика этих скачков определяется пуассоновскими инкрементами, которые удовлетворяют условиям

$$E[dN_3(t)] = \frac{\gamma}{4}dt, \quad E[dN_{\pm}(t)] = \frac{\gamma}{4}|\phi_{\mp}(t)|^2 dt. \quad (8.195)$$

Из относительного веса скачковых интенсивностей следует, что если известно, что система совершил скачок в некоторый момент времени t , то скачки с σ_{\pm} появятся с вероятностями $\frac{1}{2}|\phi_{\mp}(t)|^2$, в то время как скачок с σ_3 будет происходить с вероятностью $\frac{1}{2}$.

Физическое значение КДП может быть объяснено проведением соответствия между картиной Флоке и полной квантовой трактовкой моды возбуждения (Shirley, 1965). Это соответствие приводит прямо к интерпретации процесса на языке представления «одетого» атома (Cohen-Tannoudji, Reynaud, 1977, 1979). Согласно записи, используемой в уравнении (8.162), мы определяем

$$u_{\pm,n}(t) = u_{\pm}(t)e^{in\omega_L t}. \quad (8.196)$$

Эти состояния Флоке обладают квазиэнергиями

$$\varepsilon_{\pm,n} = \pm \frac{1}{2}\Omega + n\omega_L. \quad (8.197)$$

Для сильно возбужденных полей состояния Флоке соответствуют «одетым» состояниям атома, то есть стационарным собственным состояниям комбинированной системы, состоящей из атома и квантованной моды возбуждения. Для большого количества фотонов N собственные энергии $E_{\pm, N}$ «одетых» состояний $|\pm, N\rangle$ атома приблизительно задаются

$$E_{\pm, N} \approx \pm \frac{1}{2}\Omega + N\omega_L. \quad (8.198)$$

Сравнивая это выражение с квазиэнергиями (8.197) состояний Флоке (8.196), мы видим, что имеется следующее соответствие:

$$u_{\pm, n}(t) \leftrightarrow |\pm, N+n\rangle \quad (8.199)$$

между состояниями Флоке и «одетыми» состояниями. При использовании этого соответствия мы находим, что переход с оператором скачка $A(\omega_L + \Omega)$ соответствует переходу

$$|+, N+1\rangle \rightarrow |-, N\rangle, \quad (8.200)$$

тогда как оператор скачка $A(\omega_L - \Omega)$ соответствует переходу

$$|-, N+1\rangle \rightarrow |+, N\rangle \quad (8.201)$$

между «одетыми» атомными состояниями. Подобным образом переход, индуцированный оператором скачка $A(\omega_L)$, может интерпретироваться как переход

$$\alpha|+, N+1\rangle + \beta|-, N+1\rangle \rightarrow \alpha|+, N\rangle - \beta|-, N\rangle. \quad (8.202)$$

Таким образом, мы заключаем, что представление Флоке дает простой скачковый процесс, описывающий квантовые скачки между «одетыми» атомными состояниями. Также очевидно, что три типа квантовых скачков соответствуют трем пикам сильновозбужденного спектра Моллоу (3.306). Мы имеем центральный пик при частоте ω_L и два боковых при частотах $\omega_L \pm \Omega$. Так как в стационарном случае оба состояния Флоке находятся с вероятностью $\frac{1}{2}$, из (8.195) следует, что интегральные интенсивности двух боковых пиков совпадают и равны $\frac{1}{2}$ от интегральной интенсивности центрального пика.

Библиография

- Akhiezer, A. I. and Berestetskii, V. B. (1965). *Quantum Electrodynamics*. Interscience Publishers, John Wiley, New York. Оригинал: Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. *Квантовая электродинамика*. Издание 4-е, перераб. — М.: Наука, 1981.
- Aspect, A., Arimondo, E., Kaiser, R., Vansteenkiste, N. and Cohen-Tannoudji, C. (1989). Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping: Theoretical analysis. *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**, 2112–2124.
- Bardou, F., Bouchaud, J.-P., Emile, O., Aspect, A. and Cohen-Tannoudji, C. (1994). Subrecoil laser cooling and Levy flights. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 203–206.
- Bardou, F., Bouchaud, J.-P., Aspect, A. and Cohen-Tannoudji, C. (2001). *Lévy Statistics and Laser Cooling*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Bjorken, J. D. and Drell, S. D. (1965). *Relativistic Quantum Fields*. McGraw-Hill, New York. Имеется перевод: Бъёркен Дж., Дрелл С. *Релятивистская квантовая теория*. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1978.
- Blümel, R., Buchleitner, A., Graham, R., Sirko, L., Smilansky, U. and Walther, H. (1991). Dynamical localization in the microwave interaction of Rydberg atoms: The influence of noise. *Phys. Rev.*, **A44**, 4521–4540.
- Breuer, H. P., Dietz, K. and Holthaus, M. (1988). Strong laser fields interacting with matter I. *Z. Phys.*, **D10**, 13–26.
- Breuer, H. P., Huber, W. and Petruccione, F. (2000). Quasi-stationary distributions of dissipative nonlinear quantum oscillators in strong periodic driving fields. *Phys. Rev.*, **E61**, 4883–4889.
- Breuer, H. P. and Petruccione, F. (1997). Dissipative quantum systems in strong laser fields: Stochastic wave-function method and Floquet theory. *Phys. Rev.*, **A55**, 3101–3116.
- Castin, Y. and Mølmer, K. (1995). Monte Carlo wave-function analysis of 3d optical molasses. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 3772–3775.
- Cohen-Tannoudji, C., Bardou, F. and Aspect, A. (1992). Review on fundamental processes in laser cooling. In *Proceedings of Laser Spectroscopy X* (eds. Ducloy, M., Giacobino, E. and Camy, G.), p. 3–14. World Scientific, Singapore.
- Cohen-Tannoudji, C. and Reynaud, S. (1977). Dressed-atom description of resonance fluorescence and absorption spectra of a multi-level atom in an intense laser beam. *J. Phys.*, **B10**, 345–363.

- Cohen-Tannoudji, C. and Reynaud, S. (1979). Atoms in strong light-fields: Photon antibunching in single atom fluorescence. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A293**, 223–237.
- Cohen-Tannoudji, C. (1992a). Laser cooling and trapping of neutral atoms: Theory. *Phys. Rep.*, **219**, 153–164.
- Cohen-Tannoudji, C. (1992b). *Atomic Motion in Laser Light*, Les Houches Session LIII on *Fundamental Systems in Quantum Optics*, p. 1–164. North-Holland, Elsevier, Amsterdam.
- Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J. and Grynberg, G. (1998). *Atom-Photon Interactions*. John Wiley, New York.
- Kasevich, M. and Chu, S. (1992). Laser cooling below a photon recoil with three-level atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1741–1744.
- Kohler, S., Dittrich, T. and Hänggi, P. (1997). Floquet–Markovian description of the parametrically driven, dissipative harmonic oscillator. *Phys. Rev.*, **E55**, 300–313.
- Lawall, J., Bardou, F., Saubamea, B., Shimizu, K., Leduc, M., Aspect, A. and Cohen-Tannoudji, C. (1994). Two-dimensional subrecoil laser cooling. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 1915–1918.
- Lawall, J., Kulin, S., Saubamea, B., Bigelow, N., Leduc, M. and Cohen-Tannoudji, C. (1995). Three-dimensional laser cooling of helium beyond the single-photon recoil limit. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4194–4197.
- L’Huillier, A., Schafer, K. J. and Kulander, K. C. (1991). Theoretical aspects of intense field harmonic generation. *J. Phys.*, **B24**, 3315–3341.
- Mølmer, K., Castin, Y. and Dalibard, J. (1993). Monte Carlo wave-function method in quantum optics. *J. Opt. Soc. Am.*, **B10**, 524–538.
- Reichel, J., Bardou, F., Ben Dahan, M., Peik, E., Rand, S., Salomon, C. and Cohen-Tannoudji, C. (1995). Raman cooling of cesium below 3 nK: New approach inspired by Levy flight statistics. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4575–4578.
- Shirley, J. H. (1965). Solution of the Schrödinger equation with a Hamiltonian periodic in time. *Phys. Rev.*, **138B**, 979–987.
- Shore, B. W. (1990). *The Theory of Coherent Atomic Excitation. Volume 2. Multilevel Atoms and Incoherence*. John Wiley, New York.
- Zeldovich, Ya. B. (1967). The quasienergy of a quantum-mechanical system subjected to a periodic action. *Sov. Phys. JETP*, **24**, 1006–1008. Русский оригинал: Зельдович Я. Б. Квазиэнергия квантовой системы, подвергающейся периодическому воздействию. *ЖЭТФ*, 1966, **51**, с. 1492–1495.

Часть IV

Немарковские квантовые процессы

ГЛАВА 9

Проекционные операторные методы

Как обсуждалось в главе 3, законы, описывающие динамику открытых квантовых систем, могут быть выведены из унитарной динамики общей системы. В общем случае, уменьшение степеней свободы в эффективном описании открытой системы дает в результате немарковское поведение. Цель этой главы заключается во введении в некоторые мощные методы, которые позволяют дать систематическое описание немарковских особенностей квантовой динамики открытых систем.

Общий каркас для вывода уравнений движения для открытых квантовых системдается проекционными операторными методами. Эти методы были введены Накажимой (Nakajima, 1958) и Цванцигом (Zwanzig, 1960) и независимо брюссельской школой (Prigogine, 1962). Они широко использовались в неравновесной статистической механике (Haake, 1973; Balescu, 1975; Grabert, 1982; Kubo, Toda, Hashitsume, 1985).

Основная идея, лежащая в основе приложения проекционных операторных методов к открытым квантовым системам, есть принятие во внимание операции взятия следа по окружению, как формального проецирования $\rho \mapsto \mathcal{P}\rho$ в пространство состояний полной системы. Супероператор \mathcal{P} обладает свойством проекционного оператора, то есть $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, а матрица плотности $\mathcal{P}\rho$ считается *релевантной* (относящейся к изучаемой системе) частью плотности ρ целой системы. Соответственно, определяется проецирование $\rho \mapsto \mathcal{Q}\rho$ на *нерелевантную* часть $\mathcal{Q}\rho$, где $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ есть тождественное отображение. Целью, в таком случае, является вывод законченного уравнения движения для релевантной части $\mathcal{P}\rho$.

Мы обсудим в этой главе два варианта проекционных операторных методов: метод Накажими – Цванцига и метод вычета временной свертки. Оба метода приводят к точному уравнению для релевантной части $\mathcal{P}\rho$. В случае метода Накажими – Цванцига это интегродифференциальное уравнение, включающее запаздывающее временное интегрирование по всей истории редуцированной системы, в то время как уравнение движения за вычетом временной свертки дает дифференциальное уравнение первого порядка, которое локально во времени.

Техника проекционных операторов, направленная на вычет временной свертки, приводит к локальному во времени расширению уравнения движения с учетом связи система-окружение. Таким образом, поддерживаются немарковские эффекты вне приближения Борна. В каждом порядке по силе связи уравнение движения включает зависимый от времени, но локальный генератор. Будут развиты правила для разложения в ряд по теории возмущения для генератора, обеспечивающего вычет свертки. Главным образом, мы соприкоснемся в этой главе с выводом наиболее важных общих результатов; в следующей главе будут изучены специальные физические приложения.

9.1. Проекционный операторный метод Накажимы–Цванцига

Мы рассмотрим общую физическую ситуацию открытой системы S , связанную с окружением B . Динамика матрицы плотности $\rho(t)$ совместной системы определяется некоторым микроскопическим гамильтонианом вида

$$H = H_0 + \alpha H_I, \quad (9.1)$$

где H_0 генерирует несвязанную временную эволюцию системы и окружения. H_I описывает их взаимодействие, а α обозначает безразмерный параметр разложения. При работе в представлении взаимодействия уравнение движения для матрицы плотности есть

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -i\alpha[H_I(t), \rho(t)] \equiv \alpha\mathcal{L}(t)\rho(t), \quad (9.2)$$

где мы приняли $\hbar = 1$ и учли, что представление взаимодействия гамильтониана взаимодействия определяется

$$H_I(t) = \exp(iH_0t)H_I\exp(-iH_0t). \quad (9.3)$$

$\mathcal{L}(t)$ обозначает соответствующий супероператор.

9.1.1. Проекционные операторы

Для того чтобы вывести точное уравнение движения для редуцированной матрицы плотности ρ_S открытой системы, удобно определить супероператор \mathcal{P} согласно

$$\rho \mapsto \mathcal{P}\rho = \text{tr}_B\{\rho\} \otimes \rho_B \equiv \rho_S \otimes \rho_B, \quad (9.4)$$

где ρ_B есть некоторое фиксированное состояние окружения. Этот супероператор проецируется на релевантную часть матрицы плотности ρ в смысле,

что $\mathcal{P}\rho$ дает полную информацию, требуемую для реконструкции редуцированной матрицы плотности ρ_S открытой системы. Соответственно, может быть введен дополняющий супероператор \mathcal{Q}

$$\mathcal{Q}\rho = \rho - \mathcal{P}\rho, \quad (9.5)$$

который проецируется на нерелевантную часть матрицы плотности. Супероператоры \mathcal{P} и \mathcal{Q} есть отображения в пространство состояний комбинированной системы, то есть в пространство матриц плотностей совместного пространства $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$. Они, очевидно, имеют свойства

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I, \quad (9.6)$$

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \quad (9.7)$$

$$\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}, \quad (9.8)$$

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{P} = 0, \quad (9.9)$$

которые можно легко проверить, используя определения (9.4) и (9.5) и считая ρ_B нормированным согласно условию $\text{tr}_B \rho_B = 1$.

Матрица плотности ρ_B , используемая в определении (9.4), есть оператор в \mathcal{H}_B . Эта матрица плотности может представлять вполне произвольное, но известное состояние окружения, называемое поэтому реперным состоянием. Выбор ρ_B сильно зависит от конкретного подразумеваемого приложения. В дальнейшем мы будем полагать, что состояние не зависит от времени. Обычно для окружения принимается состояние Гиббса. Во многих случаях может быть принято, что нечетные моменты гамильтониана взаимодействия относительно реперного состояния исчезают

$$\text{tr}_B \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_{2n+1}) \rho_B \} = 0, \quad (9.10)$$

что приводит к соотношению

$$\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2) \dots \mathcal{L}(t_{2n+1})\mathcal{P} = 0 \quad (9.11)$$

при $n = 0, 1, 2, \dots$ Это техническое допущение не обязательно для вывода уравнения движения. Однако оно будет использовано далее для того, чтобы упростить выражения для теории возмущений. Важно отметить, что мы здесь не требуем какой-либо частной формы для начальных состояний. В частности, мы не предполагаем факторизации начальных условий.

9.1.2. Уравнение Накажими–Цванцига

Нашей целью теперь является вывод замкнутого уравнения для релевантной части $\mathcal{P}\rho(t)$, то есть для матрицы плотности $\rho_S(t) = \text{tr}_B \rho(t)$

открытой системы. Применением проекционных операторов \mathcal{P} и \mathcal{Q} к уравнению Лиувилля–фон Неймана (9.2) и введением независимого от времени реперного состояния получается следующий набор связанных дифференциальных уравнений для релевантной и нерелевантной частей матрицы плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\rho(t) = \mathcal{P} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = \alpha \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\rho(t), \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q}\rho(t) = \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = \alpha \mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\rho(t). \quad (9.13)$$

При подстановке тождества $I = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$ между оператором Лиувилля и матрицей плотности ρ их можно переписать

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\rho(t) = \alpha \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{P}\rho(t) + \alpha \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{Q}\rho(t), \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q}\rho(t) = \alpha \mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\mathcal{P}\rho(t) + \alpha \mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\mathcal{Q}\rho(t). \quad (9.15)$$

Для того чтобы получить замкнутое уравнение для релевантной части матрицы плотности, мы решаем уравнение (9.15) и подставляем решение в уравнение (9.14). Формальное решение уравнения (9.15), соответствующее заданному $\rho(t_0)$ при некотором начальном времени t_0 , может быть выражено как

$$\mathcal{Q}\rho(t) = \mathcal{G}(t, t_0)\mathcal{Q}\rho(t_0) + \alpha \int_{t_0}^t \mathcal{G}(t, s)\mathcal{Q}\mathcal{L}(s)\mathcal{P}\rho(s)ds, \quad (9.16)$$

где мы ввели пропагатор

$$\mathcal{G}(t, s) \equiv T_{\leftarrow} \exp \left[\alpha \int_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}(s')ds' \right]. \quad (9.17)$$

Как обычно, пропагатор T_{\leftarrow} описывает хронологическое упорядочение по времени: любое произведение супероператоров таково, что аргументы времени увеличиваются справа налево. Пропагатор $\mathcal{G}(t, s)$, таким образом, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(t, s) = \alpha \mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\mathcal{G}(t, s) \quad (9.18)$$

с начальным условием

$$\mathcal{G}(s, s) = I. \quad (9.19)$$

Подставляя выражение (9.16) для нерелевантной части матрицы плотности в уравнение движения (9.14) для релевантной части, мы получаем искомое уравнение для эволюции во времени релевантной части матрицы плотности

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\rho(t) = & \alpha \mathcal{PL}(t)\mathcal{G}(t, t_0)\mathcal{Q}\rho(t_0) + \alpha \mathcal{PL}(t)\mathcal{P}\rho(t) + \\ & + \alpha^2 \int_{t_0}^t \mathcal{PL}(t)\mathcal{G}(t, s)\mathcal{QL}(s)\mathcal{P}\rho(s)ds. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Это уравнение известно как уравнение Накажимы–Цванцига. Это точное уравнение для релевантных степеней свободы редуцированной системы. Правая часть включает неоднородный член $\mathcal{PL}(t)\mathcal{G}(t, t_0)\mathcal{Q}\rho(t_0)$, зависящий от начального условия в момент времени t_0 , а интегрирование проводится по всей истории системы в интервале времени $[t_0, t]$. Таким образом, оно описывает немарковские эффекты памяти редуцированной динамики. Если условие (9.11) удовлетворяется при $n = 0$, второй член в уравнении Накажимы–Цванцига исчезает, и мы можем привести его к компактной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\rho(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{K}(t, s)\mathcal{P}\rho(s)ds + \alpha \mathcal{PL}(t)\mathcal{G}(t, t_0)\mathcal{Q}\rho(t_0). \quad (9.21)$$

Свертка или ядро, учитывающее память,

$$\mathcal{K}(t, s) = \alpha^2 \mathcal{PL}(t)\mathcal{G}(t, s)\mathcal{QL}(s)\mathcal{P} \quad (9.22)$$

представляет супероператор в релевантном подпространстве.

Это интегродифференциальное уравнение (9.21) точное и имеет силу для всех начальных условий и почти для произвольных систем и взаимодействий. К сожалению, уравнение Накажимы–Цванцига обычно так же сложно для решения, как, например, уравнение Лиувилля, описывающее динамику всей системы. Это означает, что разложения по возмущениям необходимы для того, чтобы обсудить релевантную динамику, в некотором отношении доступную аналитическим и численным вычислениям. Очевидно, уравнение может быть разложено в ряд по степеням константы связи α , то есть по степеням взаимодействия гамильтониана H_I . Кроме того, оно может быть разложено вблизи t по степеням времени памяти, то есть для ядра $\mathcal{K}(t, s)$ конечной ширины, при этом, конечно, для $\mathcal{K}(t, s) \approx \delta(t - s)$ в отсутствии эффектов памяти мы получаем марковское описание. Иногда это может быть удобным при выполнении разложения по возмущениям для преобразования Лапласа $\rho_S(t)$ в представлении Шредингера.

Для факторизуемого начального условия $\rho(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B$ мы имеем $\mathcal{P}\rho(t_0) = \rho(t_0)$ и поэтому $\mathcal{Q}\rho(t_0) = 0$. Тогда неоднородный член уравнения Накажимы–Цванцига (9.21) исчезает, а точное уравнение для релевантной части матрицы плотности сводится к

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\rho(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{K}(t, s) \mathcal{P}\rho(s) ds. \quad (9.23)$$

Для второго порядка силы связывания α мы получаем

$$\mathcal{K}(t, s) = \alpha^2 \mathcal{P}\mathcal{L}(t) \mathcal{Q}\mathcal{L}(s) \mathcal{P} + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad (9.24)$$

что приводит к уравнению движения второго порядка для $\mathcal{P}\rho(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\rho(t) = \alpha^2 \int_{t_0}^t \mathcal{P}\mathcal{L}(t) \mathcal{L}(s) \mathcal{P}\rho(s) ds, \quad (9.25)$$

где мы снова используем условие $\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{P} = 0$. Если теперь мы введем явные выражения для проекционного оператора \mathcal{P} и для генератора $\mathcal{L}(t)$, мы получаем приближение Борна для основного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S(t) = -\alpha^2 \int_{t_0}^t \text{tr}_B [H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]] ds, \quad (9.26)$$

которое уже встречалось нам в уравнении (3.116).

Рассматриваемый подход к немарковской динамике открытых квантовых систем имеет некоторые недостатки. Приближение теории возмущений для ядра памяти упрощает вывод уравнений движения, но, к сожалению, не их структуру. Приближенное уравнение движения снова является интегродифференциальным уравнением, чье численное решение может быть весьма сложным.

9.2. Техника проекционных операторов, направленная на устранение временной свертки

На практике свертка по времени для ядра, учитывающего память, уравнения Накажимы–Цванцига сложна для обработки. В этом разделе мы покажем как удалить свертку по времени в основном уравнении. Это достигается методом, который известен как метод проекционных операторов для вычета временной свертки. Этот метод был развит Шибатой и др. (Shibata, Takahashi, Hashitsume, 1977; Chaturvedi, Shibata, 1979; Shibata, Arimitsu, 1980). Мы применим его здесь для микроскопической теории открытой

квантовой системы, которая связана с окружением. Метод приводит к систематическому разложению динамики рассматриваемой системы в ряд по степеням силы связывания. В частности, мы будем развивать выражения для основного квантового уравнения вплоть до четвертого порядка по силе связи для факторизуемых и нефакторизуемых начальных условий.

9.2.1. Локально во времени основное квантовое уравнение

Целью рассматриваемой техники проекционных операторов является устранение зависимости будущей эволюции от истории системы в основном уравнении Накажимы–Цванцига и вывод точного основного квантового уравнения открытой квантовой системы, которое локально во времени. Для того чтобы достигнуть этой цели, мы поступим следующим образом. Матрицу плотности $\rho(s)$ с правой стороны уравнения (9.16) заменим выражением

$$\rho(s) = G(t, s)(\mathcal{P} + \mathcal{Q})\rho(t), \quad (9.27)$$

где $G(t, s)$ есть обратный пропагатор сложной системы, то есть инверсия унитарной эволюции во времени всей системы. Формально мы можем записать

$$G(t, s) = T_{\rightarrow} \exp \left[-\alpha \int_s^t \mathcal{L}(s') ds' \right], \quad (9.28)$$

где T_{\rightarrow} обозначает антихронологическое упорядочение во времени.

С помощью соотношения (9.27) уравнение (9.16) для релевантной части матрицы плотности может теперь быть записано как

$$\mathcal{Q}\rho(t) = \mathcal{G}(t, t_0)\mathcal{Q}\rho(t_0) + \alpha \int_{t_0}^t \mathcal{G}(t, s)\mathcal{Q}\mathcal{L}(s)\mathcal{P}G(t, s)(\mathcal{P} + \mathcal{Q})\rho(t)ds. \quad (9.29)$$

Вводя супероператор

$$\Sigma(t) = \alpha \int_{t_0}^t \mathcal{G}(t, s)\mathcal{Q}\mathcal{L}(s)\mathcal{P}G(t, s)ds, \quad (9.30)$$

мы можем выразить нерелевантную часть матрицы плотности через

$$[1 - \Sigma(t)]\mathcal{Q}\rho(t) = \mathcal{G}(t, t_0)\mathcal{Q}\rho(t_0) + \Sigma(t)\mathcal{P}\rho(t). \quad (9.31)$$

Отметим, что супероператор $\Sigma(t)$ содержит оба пропагатора \mathcal{G} и G , таким образом, не указывается хорошо определенный хронологический порядок. $\Sigma(t)$, очевидно, обладает свойствами $\Sigma(t_0) = 0$ и $\Sigma(t)|_{\alpha=0} = 0$.

Тогда $1 - \Sigma(t)$ может быть инвертировано для не слишком больших связей и в любом случае для малых $t - t_0$. Таким образом, мы получаем

$$\mathcal{Q}\rho(t) = [1 - \Sigma(t)]^{-1} \Sigma(t) \mathcal{P}\rho(t) + [1 - \Sigma(t)]^{-1} \mathcal{G}(t, t_0) \mathcal{Q}\rho(t_0). \quad (9.32)$$

Это уравнение утверждает, что нерелевантная часть $\mathcal{Q}\rho(t)$ матрицы плотности в принципе может быть определена из знания релевантной части $\mathcal{P}\rho(t)$ в момент времени t и из начального условия $\mathcal{Q}\rho(t_0)$. Зависимость от истории релевантной части, которая появляется в уравнении Накажимы–Цванцига, удаляется введением точного обратного пропагатора $G(t, s)$. Однако должно быть отмечено, что для сильных связываний и/или больших временных интервалов $t - t_0$ может случиться, что уравнение (9.31) не может быть однозначно решено для $\mathcal{Q}\rho(t)$, так что инверсия $1 - \Sigma(t)$ не существует. Мы приведем пример этой ситуации в разделе 10.1.2.

Для того чтобы завершить вывод основного уравнения за вычетом временной свертки, мы подставляем уравнение (9.32) в уравнение движения для релевантной части (9.14) и получаем следующую точную форму устранения временной свертки (УВС) основного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\rho(t) = \mathcal{K}(t) \mathcal{P}\rho(t) + \mathcal{I}(t) \mathcal{Q}\rho(t_0) \quad (9.33)$$

с генератором, локальным во времени, называемым УВС-генератором:

$$\mathcal{K}(t) = \alpha \mathcal{P}\mathcal{L}(t) [1 - \Sigma(t)]^{-1} \mathcal{P}, \quad (9.34)$$

а неоднородность

$$\mathcal{I}(t) = \alpha \mathcal{P}\mathcal{L}(t) [1 - \Sigma(t)]^{-1} \mathcal{G}(t, t_0) \mathcal{Q}. \quad (9.35)$$

Уравнение движения (9.33) является точным и локальным по времени. Несмотря на то, что супероператоры $\mathcal{K}(t)$ и $\mathcal{I}(t)$ являются, в общем, прецельно сложными объектами, уравнение (9.33) может быть использовано как стартовая точка систематического метода приближения путем разложения $\mathcal{K}(t)$ и $\mathcal{I}(t)$ по степеням силы связывания α . Это будет показано в следующих подразделах.

9.2.2. Ряд теории возмущений для УВС-генератора

Конечно, супероператор $\mathcal{K}(t)$ существует, только когда возможно инвертировать оператор $[1 - \Sigma(t)]$. Допустим, что оператор $\Sigma(t)$ может быть разложен в геометрический ряд

$$[1 - \Sigma(t)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [\Sigma(t)]^n. \quad (9.36)$$

При подстановке в выражение (9.34) получаем

$$\mathcal{K}(t) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P} \mathcal{L}(t) [\Sigma(t)]^n \mathcal{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \mathcal{K}_n(t). \quad (9.37)$$

Чтобы определить вклад $\mathcal{K}_n(t)$ n -го порядка в α для УВС-генератора $\mathcal{K}(t)$, мы также разложим $\Sigma(t)$ про степеням α :

$$\Sigma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \Sigma_n(t), \quad (9.38)$$

подставим результат в уравнение (9.37) и упорядочим по степеням α . Например, для четвертого порядка имеем

$$\mathcal{K}_1(t) = \mathcal{P} \mathcal{L}(t) \mathcal{P}, \quad (9.39)$$

$$\mathcal{K}_2(t) = \mathcal{P} \mathcal{L}(t) \Sigma_1(t) \mathcal{P}, \quad (9.40)$$

$$\mathcal{K}_3(t) = \mathcal{P} \mathcal{L}(t) \{[\Sigma_1(t)]^2 + \Sigma_2(t)\} \mathcal{P}, \quad (9.41)$$

$$\mathcal{K}_4(t) = \mathcal{P} \mathcal{L}(t) \{[\Sigma_1(t)]^3 + \Sigma_1(t) \Sigma_2(t) + \Sigma_2(t) \Sigma_1(t) + \Sigma_3(t)\} \mathcal{P}. \quad (9.42)$$

Таким образом, вклады $\Sigma_n(t)$ находятся с помощью уравнений (9.30) и (9.38) разложением пропагаторов $\mathcal{G}(t, s)$ и $G(t, s)$, определяемых в уравнениях (9.17) и (9.28), по степеням α .

Определим первые четыре члена разложения более явно. Чтобы упростить выражения, мы используем условие (9.11) и принимаем $t_0 = 0$. Уравнение (9.39) немедленно дает

$$\mathcal{K}_1(t) = \mathcal{P} \mathcal{L}(t) \mathcal{P} = 0. \quad (9.43)$$

Член первого порядка $\Sigma_1(t)$ задается соотношением

$$\Sigma_1(t) = \int_0^t \mathcal{Q} \mathcal{L}(t_1) \mathcal{P} dt_1, \quad (9.44)$$

которое дает

$$\mathcal{K}_2(t) = \int_0^t \mathcal{P} \mathcal{L}(t) \mathcal{L}(t_1) \mathcal{P} dt_1. \quad (9.45)$$

Член второго порядка $\Sigma_2(t)$ находится из соотношения

$$\Sigma_2(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} [\mathcal{Q}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{Q}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)] dt_2. \quad (9.46)$$

Так как $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$, из уравнения (9.44) мы заключаем, что $[\Sigma_1(t)]^2 = 0$, и поэтому

$$\mathcal{K}_3(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\Sigma_2(t)\mathcal{P} = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P} dt_2 = 0, \quad (9.47)$$

где мы использовали условие (9.11) для $n = 0$ и $n = 1$. Чтобы найти $\mathcal{K}_4(t)$, мы сперва заметим, что $[\Sigma_1(t)]^3 = \Sigma_1(t)\Sigma_2(t) = 0$, так как $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$. Таким образом, из уравнения (9.42) мы имеем

$$\mathcal{K}_4(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}(t)[\Sigma_2(t)\Sigma_1(t) + \Sigma_3(t)]\mathcal{P}. \quad (9.48)$$

С использованием на (9.44) и (9.46), первый член находится как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\Sigma_2(t)\Sigma_1(t)\mathcal{P} &= - \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \times \\ &\times \mathcal{P}\mathcal{L}(t)[\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} + \mathcal{L}(t_3)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{P} + \mathcal{L}(t_3)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}]. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Отметим, что, для того чтобы получить это выражение, тройной интеграл по времени представляется в упорядоченном виде $t \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq 0$. Подобно этому находится интеграл

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\Sigma_3(t)\mathcal{P} &= \\ &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} \mathcal{P}\mathcal{L}(t)[\mathcal{L}(t_1)\mathcal{Q}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} + \mathcal{L}(t_3)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{P}] dt_3. \end{aligned} \quad (9.50)$$

В результате вклад четвертого порядка для УВС-генератора принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_4(t) &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} (\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \\ &- \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}) dt_3. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Генератор второго порядка $\mathcal{K}_2(t)$ основного уравнения УВС приводит к следующему уравнению для редуцированной матрицы плотности $\rho_S(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S(t) = -\alpha^2 \int_0^t \text{tr}_B [H_I(t), [H_I(s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]] ds, \quad (9.52)$$

которое следует сравнить с соответствующим приближением второго порядка (9.26) уравнения Накажимы–Цванцига: оба уравнения второго порядка и поэтому можно ожидать, что они аппроксимируют точную динамику с одной и той же точностью. Это будет проиллюстрировано в разделе 10.1.2 с помощью простого примера. На практике УВС-вид предпочтителен, так как он включает генератор локального времени вместо ядра свертки.

Выражения (9.45) и (9.51) могут быть более явными, если записать гамильтониан взаимодействия как сумму произведений эрмитовых операторов F_k и Q_k , которые действуют в гильбертовых пространствах системы и окружения соответственно:

$$H_I = \sum_k F_k \otimes Q_k. \quad (9.53)$$

Такое разложение взаимодействия на эрмитовы операторы всегда возможно. Это тождественная форма для физически заданного взаимодействия система–окружение.

Предположим, что реальное состояние ρ_B окружения есть гауссово состояние. Это означает, что все моменты H_I относительно ρ_B могут быть выражены на языке моментов второго порядка. Таким образом, мы определяем корреляционные функции

$$\nu_{ij}(t_1, t_2) = \Re \text{tr}_B \{Q_i(t_1)Q_j(t_2)\rho_B\}, \quad (9.54)$$

$$\eta_{ij}(t_1, t_2) = \Im \text{tr}_B \{Q_i(t_1)Q_j(t_2)\rho_B\}, \quad (9.55)$$

где \Re и \Im означают действительную и мнимую части соответственно. Будет удобно ввести следующее сокращение:

$$\hat{0} = F_{i_0}(t), \quad \hat{1} = F_{i_1}(t_1), \quad \hat{2} = F_{i_2}(t_2), \dots \quad (9.56)$$

и

$$\nu_{01} = \nu_{i_0 i_1}(t, t_1), \quad \nu_{12} = \nu_{i_1 i_2}(t_1, t_2), \dots, \quad (9.57)$$

$$\eta_{01} = \eta_{i_0 i_1}(t, t_1), \quad \eta_{12} = \eta_{i_1 i_2}(t_1, t_2), \dots \quad (9.58)$$

С этими определениями любой момент H_I может быть выражен на языке системных операторов F_i и корреляционных функций ν_{ij} и η_{ij} простым способом. Например, для моментов второго порядка мы имеем

$$\text{tr}_B\{H_I(t)H_I(t_1)\rho_S \otimes \rho_B\} = \sum_{i_0, i_1} (\nu_{01} + i\eta_{01})\widehat{0}\widehat{1}\rho_S, \quad (9.59)$$

а в силу свойств гауссiana для моментов четвертого порядка получаем

$$\begin{aligned} & \text{tr}_B\{H_I(t)H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\rho_S \otimes \rho_B\} = \\ &= \sum_{i_0, i_1, i_2, i_3} [(\nu_{01} + i\eta_{01})(\nu_{23} + i\eta_{23}) + (\nu_{02} + i\eta_{02})(\nu_{13} + i\eta_{13}) + \\ &+ (\nu_{03} + i\eta_{03})(\nu_{12} + i\eta_{12})]\widehat{0}\widehat{1}\widehat{2}\widehat{3}\rho_S. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Ссылаясь на упомянутое выше сокращение, мы можем записать вклад второго порядка (9.45) в УВС-генератор как показано ниже:

$$\mathcal{K}_2(t)\rho_S \otimes \rho_B = - \sum_{i_0, i_1} \int_0^t \left(\nu_{01} \left[\widehat{0}, \left[\widehat{1}, \rho_S \right] \right] + i\eta_{01} \left[\widehat{0}, \left\{ \widehat{1}, \rho_S \right\} \right] \right) \otimes \rho_B dt_1, \quad (9.61)$$

в то время как вклад четвертого порядка (9.51) становится равным

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_4(t)\rho_S \otimes \rho_B = \sum_{i_0, i_1, i_2, i_3} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \times \\ & \times \left(\nu_{02}\nu_{13} \left[\widehat{0}, \left[\left[\widehat{1}, \widehat{2} \right], \left[\widehat{3}, \rho_S \right] \right] \right] + i\nu_{02}\eta_{13} \left[\widehat{0}, \left[\left[\widehat{1}, \widehat{2} \right], \left\{ \widehat{3}, \rho_S \right\} \right] \right] \right. \\ & + i\eta_{02}\nu_{13} \left[\widehat{0}, \left\{ \left[\widehat{1}, \widehat{2} \right], \left[\widehat{3}, \rho_S \right] \right\} \right] - \eta_{02}\eta_{13} \left[\widehat{0}, \left\{ \left[\widehat{1}, \widehat{2} \right], \left\{ \widehat{3}, \rho_S \right\} \right\} \right] + \\ & + \nu_{03}\nu_{12} \left[\widehat{0}, \left[\left[\widehat{1}, \widehat{3} \right], \left[\widehat{2}, \rho_S \right] \right] \right] + i\nu_{03}\eta_{12} \left[\widehat{0}, \left[\left[\widehat{1}, \widehat{3} \right], \left\{ \widehat{2}, \rho_S \right\} \right] \right] + \\ & + i\eta_{03}\nu_{12} \left[\widehat{0}, \left\{ \left[\widehat{1}, \widehat{3} \right], \left[\widehat{2}, \rho_S \right] \right\} \right] - \eta_{03}\eta_{12} \left[\widehat{0}, \left\{ \left[\widehat{1}, \widehat{3} \right], \left\{ \widehat{2}, \rho_S \right\} \right\} \right] + \\ & + (\nu_{03}\nu_{12} - \eta_{03}\eta_{12}) \left[\widehat{0}, \left[\widehat{1}, \left[\left[\widehat{2}, \widehat{3} \right], \rho_S \right] \right] \right] + \\ & \left. + i(\nu_{03}\eta_{12} + \eta_{03}\nu_{12}) \left[\widehat{0}, \left[\widehat{1}, \left\{ \left[\widehat{2}, \widehat{3} \right], \rho_S \right\} \right] \right] \right) \otimes \rho_B. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Эти формулы будут использованы в главе 10 для вывода УВС-генераторов основных квантовых уравнений для характерных микроскопических моделей.

9.2.3. Разложение по кумулянтам

Общая формула для вклада n -го порядка $\mathcal{K}_n(t)$ в генератор УВС основного уравнения может быть выведена с использованием метода, который был изначально разработан ван Кампеном (van Kampen, 1974a, 1974b) для разложений по малым параметрам стохастических дифференциальных уравнений. Ограничимся однородным случаем $\mathcal{P}\rho(0) = \rho(0)$ и введем обозначение

$$\langle \mathcal{X} \rangle \equiv \mathcal{P} \mathcal{X} \mathcal{P} \quad (9.63)$$

для любого супероператора \mathcal{X} . Формальное решение уравнения Лиувилля – фон Неймана (9.2) тогда приводит к представлению

$$\mathcal{P}\rho(t) = \left\langle T_{\leftarrow} \exp \left[\alpha \int_0^t \mathcal{L}(s) ds \right] \right\rangle \mathcal{P}\rho(0) \quad (9.64)$$

для релевантной части матрицы плотности. Конечно, это лишь краткое обозначение для

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\rho(t) = & \left[1 + \alpha \int_0^t \langle \mathcal{L}(t_1) \rangle dt_1 + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \langle \mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_2) \rangle dt_2 + \right. \\ & \left. + \alpha^3 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \langle \mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_2) \mathcal{L}(t_3) \rangle + \dots \right] \mathcal{P}\rho(0). \end{aligned} \quad (9.65)$$

Дифференцируя это уравнение по времени, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\rho(t) = & \left[\alpha \langle \mathcal{L}(t) \rangle + \alpha^2 \int_0^t \langle \mathcal{L}(t) \mathcal{L}(t_1) \rangle dt_1 + \right. \\ & \left. + \alpha^3 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \mathcal{L}(t) \mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_2) \rangle + \dots \right] \mathcal{P}\rho(0). \end{aligned} \quad (9.66)$$

Весь фокус теперь в том, чтобы обратить правую часть уравнения (9.65), чтобы выразить $\mathcal{P}\rho(0)$ через $\mathcal{P}\rho(t)$ и подставить результат в уравнение (9.66). Как было показано ван Кампеном, эта процедура может применяться систематически для выполнения разложения по степеням α для уравнения движения. Сравнивая это разложение с основным уравнением

на основе УВС, приходим к следующему результату для вклада n -го порядка для генератора $\mathcal{K}(t)$:

$$\mathcal{K}_n(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \langle \mathcal{L}(t) \mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_2) \dots \mathcal{L}(t_{n-1}) \rangle_{\text{oc}}, \quad (9.67)$$

где величины

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{L}(t) \mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_2) \dots \mathcal{L}(t_{n-1}) \rangle_{\text{oc}} \equiv \\ & \equiv \sum (-1)^q \mathcal{P} \mathcal{L}(t) \dots L(t_i) \mathcal{P} \mathcal{L}(t_j) \dots \mathcal{L}(t_k) \mathcal{P} \mathcal{L}(t_l) \dots \mathcal{L}(t_m) \mathcal{P} \dots \mathcal{P} \end{aligned} \quad (9.68)$$

называются *упорядоченными кумулянтами*. Они определяются следующими правилами.

Во-первых, пишется строка вида $\mathcal{P} \mathcal{L} \dots \mathcal{L} \mathcal{P}$ с n множителями \mathcal{L} между двумя \mathcal{P} . Затем вставляется произвольное число q множителей \mathcal{P} между \mathcal{L} так, что, по крайней мере, один \mathcal{L} находится между двумя последовательными \mathcal{P} множителями. Результирующее выражение умножается на $(-1)^q$, а все \mathcal{L} даются с аргументами времени: первый всегда $\mathcal{L}(t)$. Оставшиеся \mathcal{L} относятся к любому возмущению временных аргументов t_1, t_2, \dots, t_{n-1} с только лишь тем ограничением, что временные аргументы между двумя соседними \mathcal{P} должны быть упорядочены хронологически. В уравнении (9.68) мы, таким образом, имеем $t \geq \dots \geq t_i, t_j \geq \dots \geq t_k, t_l \geq \dots \geq t_m$, и т. д. В итоге упорядоченные семиинварианты получаются суммированием по всем возможным подстановкам \mathcal{P} множителей и всем разрешенным распределениям аргументов времени.

Для коммутирующих \mathcal{L} упорядоченные кумулянты сводятся к обычным кумулянтам. Читатель может проверить, что согласно условию (9.11) все нечетные вклады $\mathcal{K}_{2n+1}(t)$ исчезают и что эти правила в результате сразу дают выражения (9.45) и (9.51) для вкладов второго и четвертого порядков для УВС-генератора.

9.2.4. Разложение по малым параметрам неоднородности

Как и в случае уравнения Накажимы–Цванцига, неоднородность $\mathcal{I}(t)\mathcal{Q}\rho(0)$ во временной свертке основного квантового уравнения (9.33) зависит от матрицы плотности $\rho(0)$ в начальный момент времени $t_0 = 0$. Для факторизованных начальных условий $\mathcal{Q}\rho(0)$ исчезает, а результирующее точное уравнение движения является однородным. В этом разделе мы обсуждаем эффект нефакторизованных начальных условий вида

$$\rho(0) = \sum_k O_k \rho_{\text{eq}} P_k \equiv \mathcal{A} \rho_{\text{eq}}, \quad (9.69)$$

где операторы O_k и P_k действуют в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_S открытой системы, а ρ_{eq} обозначает равновесную матрицу плотности комбинированной системы. Этот тип начального состояния появляется, например, в определении равновесных корреляционных функций наблюдаемых системы. Это может быть также использовано для описания приготовления системы через квантовые измерения, так как супероператор \mathcal{A} , определенный в уравнении (9.69), принимает вид квантовой операции, если выбрано $P_k = O_k^\dagger$ (см. раздел 2.4.2).

Разложение по малому параметру неоднородности $\mathcal{I}(t)\mathcal{Q}\rho(0)$ может быть выполнено за два шага. Сначала по степеням силы связи α раскладывается супероператор $\mathcal{I}(t)$, задаваемый уравнением (9.35). Затем определяется $\mathcal{Q}\rho(0)$. Разложение $\mathcal{I}(t)$

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \mathcal{I}_n(t) \quad (9.70)$$

подобно разложению генератора $\mathcal{K}(t)$ и принимает вид (Chang, Skinner, 1993)

$$\mathcal{I}_1(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{Q}, \quad (9.71)$$

$$\mathcal{I}_2(t) = \int_0^t \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{Q} dt_1, \quad (9.72)$$

$$\mathcal{I}_3(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} [\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{Q}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{Q}] dt_2, \quad (9.73)$$

где мы снова использовали условие (9.11).

Следующий шаг состоит в определении $\mathcal{Q}\rho(0) = \mathcal{Q}\rho_{\text{eq}}$. Так как супероператоры \mathcal{A} и \mathcal{Q} коммутируют, это эквивалентно вычислению $\mathcal{Q}\rho_{\text{eq}}$, что может быть достигнуто одним из указанных ниже методов (Breuer, Kappler, Petruccione, 2001). Для любого фиксированного $\tau > 0$ мы определяем матрицу плотности $\rho_\tau(t)$ матрицей плотности системы, которая была подготовлена таким образом, что состояние $\rho_\tau(-\tau)$ в момент $t = -\tau$ есть некоторое факторизованное состояние. Таким образом, мы имеем $\mathcal{P}\rho_\tau(-\tau) = \rho_\tau(-\tau)$ и $\mathcal{Q}\rho_\tau(-\tau) = 0$. Принимая, что вся система эргодическая, мы получаем

$$\rho_{\text{eq}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho_\tau(0). \quad (9.74)$$

Что позволяет выразить $\mathcal{Q}\rho_{\text{eq}}$ как

$$\mathcal{Q}\rho_{\text{eq}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{Q}\rho_\tau(0). \quad (9.75)$$

С другой стороны, уравнение (9.32) дает связь между релевантной частью $\mathcal{P}\rho_\tau(0)$ и нерелевантной частью $\mathcal{Q}\rho_\tau(0)$. Используя это соотношение при $t_0 = -\tau$, мы получаем

$$\mathcal{Q}\rho_\tau(0) = [1 - \Sigma_\tau(0)]^{-1} \Sigma_\tau(0) \mathcal{P}\rho_\tau(0), \quad (9.76)$$

где

$$\Sigma_\tau(0) = \alpha \int_{-\tau}^0 \mathcal{G}(0, s) \mathcal{Q}\mathcal{L}(s) \mathcal{P}G(0, s) ds. \quad (9.77)$$

Комбинируя уравнения (9.75) и (9.76), мы получаем

$$\mathcal{Q}\rho_{\text{eq}} = \mathcal{R}\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}, \quad (9.78)$$

где оператор \mathcal{R} определяется как

$$\mathcal{R} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [1 - \Sigma_\tau(0)]^{-1} \Sigma_\tau(0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Sigma_\tau(0))^n. \quad (9.79)$$

Релевантная часть $\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}$ равновесной матрицы плотности и нерелевантная часть $\mathcal{Q}\rho_{\text{eq}}$ связаны точным уравнением (9.78).

Оператор \mathcal{R} также может быть разложен по степеням α , а именно

$$\mathcal{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \mathcal{R}_n. \quad (9.80)$$

Снова это разложение выполняется путем разложения $\Sigma_\tau(0)$ по степеням α , которое дает

$$\mathcal{R}_1 = \int_{-\infty}^0 \mathcal{L}(t_1) \mathcal{P} dt_1, \quad (9.81)$$

$$\mathcal{R}_2 = \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_2) \mathcal{P} dt_2, \quad (9.82)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3 = & \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} [\mathcal{L}(t_1) \mathcal{Q}\mathcal{L}(t_2) \mathcal{L}(t_3) - \\ & - \mathcal{L}(t_2) \mathcal{P}\mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_3) - \mathcal{L}(t_3) \mathcal{P}\mathcal{L}(t_1) \mathcal{L}(t_2)] \mathcal{P} dt_3. \end{aligned} \quad (9.83)$$

Последний шаг, который завершает разложение неоднородности, является комбинацией разложений для операторов $\mathcal{I}(t)$ и \mathcal{R} , что в итоге приводит к

$$\mathcal{I}(t)\mathcal{Q}\rho(0) = \mathcal{I}(t)\mathcal{A}\mathcal{R}\mathcal{P}\rho_{\text{eq}} \equiv \mathcal{J}(t)\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}. \quad (9.84)$$

Явно, вклады второго и четвертого порядков в супероператор $\mathcal{J}(t)$ задаются как

$$\mathcal{J}_2(t) = \mathcal{I}_1(t)\mathcal{A}\mathcal{R}_1 = \int_{-\infty}^0 \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{A}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{P} dt_1 \quad (9.85)$$

и

$$\mathcal{J}_4(t) = \mathcal{I}_1(t)\mathcal{A}\mathcal{R}_3 + \mathcal{I}_2(t)\mathcal{A}\mathcal{R}_2 + \mathcal{I}_3(t)\mathcal{A}\mathcal{R}_1 \quad (9.86)$$

с

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(t)\mathcal{A}\mathcal{R}_3 &= \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} [\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{A}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{Q}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \\ &\quad - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{A}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{A}\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}] dt_3, \\ \mathcal{I}_2(t)\mathcal{A}\mathcal{R}_2 &= \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^0 dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} dt_3, \\ \mathcal{I}_3(t)\mathcal{A}\mathcal{R}_1 &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^0 [\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{Q}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{A}\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \\ &\quad - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{A}\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P}] dt_3. \end{aligned} \quad (9.87)$$

Используя форму (9.53) для гамильтониана взаимодействия и используя сокращенное обозначение, введенное в разделе 9.2.2, мы получаем вклад для второго порядка

$$\mathcal{J}_2(t)\rho_S \otimes \rho_B = - \sum_{i_0, i_1} \int_{-\infty}^0 (\nu_{01}[\hat{0}, \mathcal{A}[\hat{1}, \rho_S]] + i\eta_{01}[\hat{0}, \mathcal{A}\{\hat{1}, \rho_S\}]) \otimes \rho_B dt_1, \quad (9.88)$$

что подобно выражению для $\mathcal{K}_2(t)$ (ср. с (9.61)). Раздел 10.2.4 дает пример приложения приведенного выше метода к расчету равновесных корреляционных функций.

9.2.5. Анализ точности

Разложение по малому параметру генератора $\mathcal{K}(t)$ и неоднородности $\mathcal{J}(t)$ в различных порядках по константе связи α может быть использовано для получения вычисляемой оценки точности для заданного приближения. Для этого мы рассмотрим относительную ошибку

$$e_r^{(2n)} = \frac{\left\| \mathcal{K}(t) - \sum_{k=1}^n \alpha^{2k} \mathcal{K}_{2k}(t) \right\|}{\|\mathcal{K}(t)\|} \quad (9.89)$$

приближения порядка $2n$, где $\|\mathcal{K}\|$ обозначает любую подходящую норму для супероператора \mathcal{K} . Для выражения порядка через α можно записать

$$e_r^{(2n)} = \alpha^{2n} \frac{\|\mathcal{K}_{2n+2}(t)\|}{\|\mathcal{K}_2(t)\|}. \quad (9.90)$$

Таким образом, ошибка приближения второго порядка может быть связана с четвертым порядком приближения как

$$e_r^{(2)} \sim \alpha^2 \frac{\|\mathcal{K}_4(t)\|}{\|\mathcal{K}_2(t)\|}. \quad (9.91)$$

Если мы допускаем, что коэффициенты \mathcal{K}_2 и \mathcal{K}_4 имеют тот же порядок величины, то это соотношение может быть использовано для оценки формального разложения по малому параметру α посредством известной относительной ошибки, то есть

$$\alpha^2 \sim e_r^{(2)}. \quad (9.92)$$

Используя снова тот же аргумент, мы находим для ошибки четвертого порядка приближение

$$e_r^{(4)} \sim \alpha^4 \frac{\|\mathcal{K}_6(t)\|}{\|\mathcal{K}_2(t)\|}. \quad (9.93)$$

Однако, если приближение шестого порядка неизвестно, мы не можем вычислить $e_r^{(4)}$ непосредственно. Для построения вычисляемой оценки ошибки мы, используя допущение, что порядки величин \mathcal{K}_2 , \mathcal{K}_4 и \mathcal{K}_6 являются теми же, получаем

$$e_r^{(4)} \sim \alpha^4 \approx \left(e^{(2)} \right)^2. \quad (9.94)$$

Таким образом, относительная ошибка приближения четвертого порядка может быть оценена вычислением квадрата относительной ошибки приближения второго порядка. Эта процедура приводит к определенному порядку приближения для грубой оценки ошибки, которая легко считается, так как она основана на фактическом приближении, а не на вычислении членов более высокого порядка. Набор примеров будет изучен в следующей главе.

Конечно, те же аргументы также применяются к матричным элементам супероператора $\mathcal{K}(t)$ и неоднородности $\mathcal{J}(t)$, давая в результате хорошо вычисляемые оценки ошибок для этих величин.

9.3. Стохастическая интерпретация в сдвоенном гильбертовом пространстве

Наиболее общее основное уравнение для редуцированной матрицы плотности $\rho_S(t)$, которое получается из устраниния временной свертки техникой проекционных операторов, принимает следующий вид в однородном случае:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S(t) = A(t)\rho_S(t) + \rho_S(t)B^\dagger(t) + \sum_i C_i(t)\rho_S(t)D_i^\dagger(t) \quad (9.95)$$

с некоторыми зависимыми от времени линейными операторами $A(t)$, $B(t)$, $C_i(t)$ и $D_i(t)$. Это уравнение линейно по $\rho_S(t)$ и локально по времени, но не обязано быть в виде Линдблада. Несмотря на это, оно может быть представлено определенным стохастическим процессом для волновых функций редуцированной системы (Breuer, Kappler, Petruccione, 1999).

Для того чтобы сконструировать интерпретацию уравнения (9.95), мы последуем стратегии, которая уже была применена для вычисления многовременных корреляционных функций в разделе 6.1.4. А именно мы описываем состояние открытой системы парой стохастических волновых функций

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad (9.96)$$

так что $\theta(t)$ становится стохастическим процессом в сдвоенном гильбертовом пространстве $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$. Обозначая соответствующий функционал плотности вероятности $\tilde{P}[\theta, t]$, мы можем определить редуцированную матрицу плотности как

$$\rho_S(t) = \int \tilde{P}[\theta, t] |\phi\rangle\langle\psi| D\theta D\theta^*. \quad (9.97)$$

Рассмотрим теперь следующее стохастическое дифференциальное уравнение для процесса $\theta(t)$ в сдвоенном гильбертовом пространстве:

$$d\theta(t) = -iG(\theta, t)dt + \sum_i \left(\frac{\|\theta(t)\|}{\|J_i(t)\theta(t)\|} J_i(t)\theta(t) - \theta(t) \right) dN_i(t), \quad (9.98)$$

где пуассоновские приращения $dN_i(t)$ удовлетворяют условиям

$$E[dN_i(t)] = \frac{\|J_i(t)\theta(t)\|^2}{\|\theta(t)\|^2} dt, \quad (9.99)$$

$$dN_i(t)dN_j(t) = \delta_{ij} dN_i(t), \quad (9.100)$$

а нелинейный оператор $G(\theta, t)$ определяется как

$$G(\theta, t) = i \left(F(t) + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\|J_i(t)\theta(t)\|^2}{\|\theta(t)\|^2} \right) \theta(t) \quad (9.101)$$

с зависимыми от времени операторами

$$F(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & B(t) \end{pmatrix}, \quad J_i(t) = \begin{pmatrix} C_i(t) & 0 \\ 0 & D_i(t) \end{pmatrix}. \quad (9.102)$$

Уравнение (9.98) описывает КДП, чьи кусочно-детерминированные решения дифференциального уравнения

$$i \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = G(\theta, t) \quad (9.103)$$

и чьи скачки принимают вид

$$\theta(t) \rightarrow \frac{\|\theta(t)\|}{\|J_i\theta(t)\|} J_i(t)\theta(t) = \frac{\|\theta(t)\|}{\|J_i\theta(t)\|} \begin{pmatrix} C_i(t)\phi(t) \\ D_i(t)\psi(t) \end{pmatrix}. \quad (9.104)$$

Используя правила вычисления для КДП, легко продемонстрировать, что ковариационная матрица

$$\tilde{\rho}(t) = \int \tilde{P}[\theta, t] |\theta\rangle\langle\theta| D\theta D\theta^* \quad (9.105)$$

процесса $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = F(t)\tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}(t)F^\dagger(t) + \sum_i J_i(t)\tilde{\rho}(t)J_i^\dagger(t). \quad (9.106)$$

Отметим, что в общем случае это уравнение также не в форме Линдблада. Важно, однако, что компонент (9.97) $\tilde{\rho}(t)$ подчиняется уравнению (9.95), как это легко проверяется, используя блочную структуру операторов $F(t)$ и $J_i(t)$. Это дает искомую интерпретацию уравнения (9.95) на языке процесса в сдвоенном гильбертовом пространстве. Конкретный пример будет изучен в разделе 10.1.3.

Библиография

- Balescu, R. (1975). *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*. John Wiley, New York. Имеется перевод: Балеску Р. *Равновесная и неравновесная статистическая механика*. В 2 т. — М.: Мир, 1978.
- Breuer, H. P., Kappler, B. and Petruccione, F. (1999). Stochastic wave-function method for non-Markovian quantum master equations. *Phys. Rev.*, **A59**, 1633–1643.
- Breuer, H. P., Kappler, B. and Petruccione, F. (2001). The time-convolutionless projection operator technique in the quantum theory of dissipation and decoherence. *Ann. Phys. (N.Y.)* **291**, 36–70.
- Chang, T.-M. and Skinner, J. L. (1993). Non-Markovian population and phase relaxation and absorption lineshape for a two-level system strongly coupled to a harmonic quantum bath. *Physica*, **A193**, 483–539.
- Chaturvedi, S. and Shibata, F. (1979). Time-convolutionless projection operator formalism for elimination of fast variables. Application to Brownian motion. *Z. Phys.*, **B35**, 297–308.
- Grabert, H. (1982). *Projection Operator Techniques in Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Volume 95 of *Springer Tracts in Modern Physics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Haake, F. (1973). *Statistical treatment of open systems by generalized master equations*. Springer Tracts in Modern Physics, **66**, 98–168.
- Kubo, R., Toda, M. and Hashitsume, N. (1985). *Statistical Physics II. Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Nakajima, S. (1958). On quantum theory of transport phenomena. *Progr. Theor. Phys.*, **20**, 948–959.
- Prigogine, I. (1962). *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. Interscience Publishers, New York. Имеется перевод: Пригожин И. *Неравновесная статистическая механика*. — М.: Мир, 1964.
- Shibata, F. and Arimitsu, T. (1980). Expansion formulas in nonequilibrium statistical mechanics. *J. Phys. Soc. Jap.*, **49**, 891–897.

Shibata, F., Takahashi, Y. and Hashitsume, N. (1977). A generalized stochastic Liouville equation. Non-Markovian versus memoryless master equations. *J. Stat. Phys.*, **17**, 171–187.

van Kampen, N.G. (1974a). A cumulant expansion for stochastic linear differential equations. I. *Physica*, **74**, 215–238.

van Kampen, N.G. (1974b). A cumulant expansion for stochastic linear differential equations. II. *Physica*, **74**, 239–247.

Zwanzig, R. (1960). Ensemble method in the theory of irreversibility. *J. Chem. Phys.*, **33**, 1338–1341.

ГЛАВА 10

Немарковская динамика в физических процессах

В этой главе мы применим проекционный операторный метод удаления свертки по времени, развитый в предыдущей главе, для некоторых типичных примеров. Первый пример — описание спонтанного распада двухуровневой системы в резервуаре с произвольной спектральной плотностью. Для этой простой задачи (УВС) разложение может быть выполнено для всех порядков по константе связи система-резервуар. Поэтому модель служит для проверки быстродействия УВС-метода.

В качестве характерного примера мы рассмотрим модель Джейнса–Каммингса с затуханием и спонтанный распад в фотонной энергетической щели. Модель Джейнса–Каммингса с затуханием в резонансе также обычно приводится как пример анализа УВС-разложения в случае сильной связи. В нерезонансном случае модель приводит к УВС-генератору в форме отличной от формы Линдблада и включает зависимость от времени для интенсивности распада, которая может принимать отрицательные значения. Соответствующее объяснение через стохастический процесс в сдвоенном гильбертовом пространстве, развитое в разделе 9.3, будет проиллюстрировано численными моделями моделированиями.

Последние два раздела посвящены квантованному броуновскому движению, где немарковские эффекты играют важную роль при определенных параметрах. Первым примером является затухающий гармонический осциллятор, вторым — спин-бозонная модель.

Цель этой главы — проиллюстрировать, что УВС проекционный операторный метод имеет ряд преимуществ в практическом применении. Хотя метод основан на теории возмущений, он не опирается на разложение заданной физической величины, а скорее базируется на разложении уравнения движения для редуцированной матрицы плотности, которое затем может быть исследовано аналитически или численно. Во многих случаях область справедливости такой процедуры намного шире по сравнению с прямым разложением того же порядка.

УВС-метод применим к большому классу физических систем. Он не разработан специально под какой-то определенный вид взаимодействия, начального состояния совместной системы или спектральной плотности окружения, не ограничен использованием определенной симметрии или свойств масштабирования. Более того, разложение методом теории возмущений УВС-генератора представляет систематизированный путь для преодоления марковского приближения. Для многих систем, которые появляются в теории открытых квантовых систем, анализ марковского приближения относительно легок для реализации и часто дает первую качественную картину для долговременной динамики. Метод разложения тогда предлагает возможность изучения немарковских явлений систематическим образом и возможность судить о необходимости немарковского рассмотрения.

10.1. Спонтанный распад двухуровневой системы

Первым примером приложения УВС проекционного операторного метода является точно решаемая модель двухуровневой системы, которая спонтанно разрушается в поле вакуума. Эта система уже была изучена в разделе 3.4.2, используя приближение Борна–Маркова, которое привело к уравнению движения для редуцированной матрицы плотности в виде Линдблада. Здесь мы рассматриваем модель в приближении вращающейся волны для всех порядков по связи между системой и резервуаром. Точное решение для различных видов спектральной плотности мы сравним с результатами основного уравнения с удалением временной свертки, полученного в разделе 9.2.1, и соответствующим разложением по теории возмущений УВС-генератора $\mathcal{K}(t)$, развитым в разделах 9.2.2 и 9.2.3.

Гамильтониан всей системы задается как

$$H = H_S + H_B + H_I = H_0 + H_I, \quad (10.1)$$

где

$$H_0 = \omega_0 \sigma_+ \sigma_- + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k, \quad (10.2)$$

$$H_I = \sigma_+ \otimes B + \sigma_- \otimes B^\dagger \text{ при } B = \sum_k g_k b_k. \quad (10.3)$$

Частота перехода двухуровневой системы обозначается ω_0 , а σ_\pm есть повышающий и понижающий операторы. Индекс k обозначает различные полевые моды резервуара с частотами ω_k , операторы рождения и уничтожения b_k^\dagger , b_k и константа связи g_k .

10.1.1. Точное основное уравнение и УВС-генератор

Введем состояния (Garraway, 1997)

$$\psi_0 = |0\rangle_S \otimes |0\rangle_B, \quad (10.4)$$

$$\psi_1 = |1\rangle_S \otimes |0\rangle_B, \quad (10.5)$$

$$\psi_k = |0\rangle_S \otimes |k\rangle_B, \quad (10.6)$$

где $|0\rangle_S = \sigma_-|1\rangle_S$ и $|1\rangle_S = \sigma_+|0\rangle_S$ обозначают основное и возбужденное состояния системы соответственно. Состояние $|0\rangle_B$ означает вакуумное состояние резервуара, а $|k\rangle_B = b_k^\dagger|0\rangle_B$ означает состояние отдельного фотона в моде k . В картине взаимодействия состояние $\phi(t)$ целой системы подчиняется уравнению Шредингера

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = -iH_I(t)\phi(t), \quad (10.7)$$

где

$$H_I(t) = \sigma_+(t)B(t) + \sigma_-(t)B^\dagger(t) \quad (10.8)$$

есть оператор Гамильтона в представлении взаимодействия

$$\sigma_\pm(t) = \sigma_\pm \exp(\pm i\omega_0 t) \quad (10.9)$$

и

$$B(t) = \sum_k g_k b_k \exp(-i\omega_k t). \quad (10.10)$$

Легко проверить, что суммарный гамильтониан (10.1) коммутирует с оператором «числа частицы»

$$N = \sigma_+\sigma_- + \sum_k b_k^\dagger b_k, \quad (10.11)$$

то есть мы имеем

$$[H, N] = 0. \quad (10.12)$$

Таким образом, N является сохраняющейся величиной. Отсюда следует, что любое начальное состояние вида

$$\phi(0) = c_0\psi_0 + c_1(0)\psi_1 + \sum_k c_k(0)\psi_k \quad (10.13)$$

по истечении времени t переходит в состояние

$$\phi(t) = c_0\psi_0 + c_1(t)\psi_1 + \sum_k c_k(t)\psi_k. \quad (10.14)$$

Амплитуда c_0 постоянна, так как $H_I(t)\psi_0 = 0$, в то время как амплитуды $c_1(t)$ и $c_k(t)$ зависят от времени. Эволюция этих амплитуд во времени управляется системой дифференциальных уравнений, которая легко выводится из уравнения Шредингера (10.7):

$$\dot{c}_1(t) = -i \sum_k g_k \exp[i(\omega_0 - \omega_k)t] c_k(t), \quad (10.15)$$

$$\dot{c}_k(t) = -ig_k^* \exp[-i(\omega_0 - \omega_k)t] c_1(t). \quad (10.16)$$

Полагая, что $c_k(0) = 0$, то есть в начальном состоянии не существует фотонов, мы решаем второе уравнение, подставляя решение в первое, чтобы получить замкнутое уравнение для $c_1(t)$

$$\dot{c}_1(t) = - \int_0^t f(t-t_1) c_1(t_1) dt_1. \quad (10.17)$$

Эта процедура использовалась уже в классической статье Вайскопфа и Вигнера (Weisskopf, Wigner, 1930) при определении естественной ширины линии излучения. Ядро $f(t-t_1)$ есть

$$f(t-t_1) = \text{tr}_B \{ B(t) B^\dagger(t_1) \rho_B \} \exp[i\omega_0(t-t_1)], \quad (10.18)$$

где $\rho_B = (|0\rangle\langle 0|)_B$ есть вакуумное состояние резервуара. Как обычно, это ядро может быть выражено на языке спектральной плотности $J(\omega)$ резервуара, как показано ниже:

$$f(t-t_1) = \int J(\omega) \exp[i(\omega_0 - \omega)(t-t_1)] d\omega. \quad (10.19)$$

Это точное уравнение (10.17) может теперь быть решено посредством преобразования Лапласа. В последующих разделах мы представим решения для различных видов спектральной плотности.

С помощью амплитуд вероятностей c_0 , $c_1(t)$ и $c_k(t)$ мы можем теперь выразить редуцированную матрицу плотности $\rho_S(t)$ системы с двумя состояниями как

$$\rho_S(t) = \text{tr}_B \{ |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| \} = \begin{pmatrix} |c_1(t)|^2 & c_0^* c_1(t) \\ c_0 c_1^*(t) & 1 - |c_1(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (10.20)$$

Дифференцируя это выражение по времени и принимая, что $\dot{c}_0 = 0$, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} |c_1(t)|^2 & c_0^* \dot{c}_1(t) \\ c_0 \dot{c}_1^*(t) & -\frac{d}{dt} |c_1(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (10.21)$$

Вводя следующие величины:

$$S(t) = -2\Im \left\{ \frac{\dot{c}_1(t)}{c_1(t)} \right\}, \quad (10.22)$$

$$\gamma(t) = -2\Re \left\{ \frac{\dot{c}_1(t)}{c_1(t)} \right\}, \quad (10.23)$$

мы можем переписать уравнение (10.21) как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) = & -\frac{i}{2} S(t) [\sigma_+ \sigma_-, \rho_S(t)] + \\ & + \gamma(t) \left\{ \sigma_- \rho_S(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho_S(t) - \frac{1}{2} \rho_S(t) \sigma_+ \sigma_- \right\}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Это точное уравнение движения для динамики редуцированной системы. Очевидно, $S(t)$ играет роль зависящего от времени лэмбовского сдвига, а $\gamma(t)$ та же самая зависящая от времени интенсивность распада.

Замечательное свойство основного уравнения (10.24) в том, что оно уже имеет вид основного уравнения с удаленной временной сверткой

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \mathcal{K}_S(t) \rho_S(t), \quad (10.25)$$

где генератор $\mathcal{K}(t)$ связан с УВС-генератором $\mathcal{K}(t)$ посредством соотношения

$$\mathcal{K}_S(t) \rho_S(t) = \text{tr}_B \{ \mathcal{K}(t) \rho_S(t) \otimes \rho_B \}. \quad (10.26)$$

Мы видим, что структура $\mathcal{K}(t)$ подобна генератору Линдблада. Однако, благодаря зависимости от времени коэффициентов $S(t)$ и $\gamma(t)$, уравнение (10.24) не дает, в общем, квантовую динамическую полугруппу. Мы также увидим ниже, что зависящая от времени интенсивность $\gamma(t)$ может стать даже отрицательной, что нарушает полную положительность генератора.

В разделах 9.2.2 и 9.2.3 было развито разложение по возмущениям для УВС-генератора с использованием константы связи α . Продемонстрируем, что это разложение верно для всех порядков основного уравнения

вида (10.24) и что оно генерирует разложение в ряд коэффициентов $\gamma(t)$ и $S(t)$ в основном уравнении, которое принимает вид

$$\gamma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{2n} \gamma_{2n}(t), \quad (10.27)$$

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{2n} S_{2n}(t). \quad (10.28)$$

Для получения этого разложения мы вводим параметр разложения α заменой корреляционной функции $f(t)$ на $\alpha^2 f(t)$, так как спектральная плотность рассматривается в качестве величины второго порядка по константе связи.

Сначала отметим, что $\sigma_+ = (|1\rangle\langle 0|)_S$ является собственным оператором генератора $\mathcal{K}_S(t)$, то есть мы имеем

$$\mathcal{K}_S(t)\sigma_+ = -\frac{1}{2}[\gamma(t) + iS(t)]\sigma_+. \quad (10.29)$$

С другой стороны, с помощью (10.26) основная формула (9.68) для разложения УВС-генератора по кумулянтам приводит к

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_S(t)\sigma_+ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{2n} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n-1} \times \\ &\quad \times \text{tr}_B \{ \langle \mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1) \dots \mathcal{L}(t_{2n-1}) \rangle_{oc} \sigma_+ \otimes \rho_B \}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Отметим, что в этом разложении появляются только четные порядки α , потому что здесь удовлетворяется соотношение (9.11). Используя $\mathcal{L}(t)\rho = -i[H_I(t), \rho]$, легко проверить, что $\sigma_+ \otimes \rho_B$ есть собственный оператор супероператора $\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)$, соответствующий собственному значению $-f(t - t_1)$, то есть

$$\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\sigma_+ \otimes \rho_B = -f(t - t_1)\sigma_+ \otimes \rho_B. \quad (10.31)$$

Так как $\mathcal{P}\sigma_+ \otimes \rho_B = \sigma_+ \otimes \rho_B$, то ряд (10.30) может быть переформулирован как

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_S(t)\sigma_+ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{2n} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n-1} \times \\ &\quad \times (-1)^n \langle f(t - t_1)f(t_2 - t_3) \dots f(t_{2n-2} - t_{2n-1}) \rangle_{oc} \sigma_+. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Сравнивая последнее выражение с уравнением (10.29), мы немедленно получаем УБС-ряд для коэффициентов точного основного квантового уравнения

$$\gamma_{2n}(t) + iS_{2n}(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{2n-2}} dt_{2n-1} \times \\ \times 2(-1)^{n+1} \langle f(t - t_1) f(t_2 - t_3) \dots f(t_{2n-2} - t_{2n-1}) \rangle_{\text{oc}}. \quad (10.33)$$

Правила для построения величины $\langle f(t - t_1) \dots f(t_{2n-2} - t_{2n-1}) \rangle_{\text{oc}}$ могут быть сформулированы следующим образом: написать соответствующее выражение для упорядоченного семиинварианта порядка $2n$, согласно правилам, задаваемым уравнением (9.68). Пренебрегаем всеми множителями \mathcal{P} и заменяем пары $\mathcal{L}(t_i)\mathcal{L}(t_j)$ последующих \mathcal{L} -сомножителей функцией корреляции $f(t_i - t_j)$.

Следуя этим правилам, уравнение (9.45) сразу же дает вклад второго порядка для коэффициентов основного уравнения

$$\gamma_2(t) + iS_2(t) = 2 \int_0^t f(t - t_1) dt_1, \quad (10.34)$$

в то время как (9.51) приводит к вкладу четвертого порядка

$$\gamma_4(t) + iS_4(t) = 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} [f(t - t_2)f(t_1 - t_3) + f(t - t_3)f(t_1 - t_2)] dt_3. \quad (10.35)$$

Удобно объединить действительные функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ в виде комплексной комбинации

$$2f(t) = \Phi(t) + i\Psi(t). \quad (10.36)$$

На языке этих функций вклады второго порядка в интенсивность распада $\gamma(t)$ и в энергетический сдвиг $S(t)$, определяемый приближением Борна, есть

$$\gamma_2(t) = \int_0^t \Phi(t - t_1) dt_1 \quad (10.37)$$

$$S_2(t) = \int_0^t \Psi(t - t_1) dt_1, \quad (10.38)$$

и тогда марковская интенсивность распада γ_M и марковский лэмбовский сдвиг S_M находятся расширением предела интегрирования до бесконечности

$$\gamma_M = \int_0^\infty \Phi(s)ds, \quad (10.39)$$

$$S_M = \int_0^\infty \Psi(s)ds. \quad (10.40)$$

Вклады четвертого порядка УВС для интенсивности распада и энергетического сдвига могут быть выражены как

$$\gamma_4(t) = \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} [\Phi(t - t_2)\Phi(t_1 - t_3) + \Phi(t - t_3)\Phi(t_1 - t_2) - \Psi(t - t_2)\Psi(t_1 - t_3) - \Psi(t - t_3)\Psi(t_1 - t_2)] dt_3 \quad (10.41)$$

и

$$S_4(t) = \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} [\Psi(t - t_2)\Phi(t_1 - t_3) + \Phi(t - t_2)\Psi(t_1 - t_3) + \Psi(t - t_3)\Phi(t_1 - t_2) + \Phi(t - t_3)\Psi(t_1 - t_2)] dt_3. \quad (10.42)$$

Таким образом, мы видим, что вид точного основного уравнения (10.24) сохраняется во всех порядках по константе связи и что УВС-разложение равнозначно разложению коэффициентов $S(t)$ и $\gamma(t)$. В следующем подразделе мы изучаем немарковское поведение некоторых определенных моделей, включающих различные спектральные плотности (Breuer, Kappler, Petruccione, 1999).

10.1.2. Модель Джейнса – Каммингса в условиях резонанса

Модель Джейнса – Каммингса с затуханием описывает связь двухуровневого атома с отдельной модой резонатора, которая связывается с резервуарной составляющей гармонических осцилляторов в вакуумном состоянии. Схематическое представление модели Джейнса – Каммингса изображено на рис. 10.1. Если мы ограничимся случаем отдельного возбуждения в системе

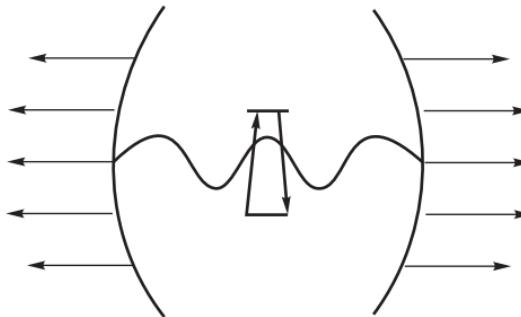


Рис. 10.1. Схематическое представление модели Джейнса – Каммингса с затуханием.

атом-резонатор, мода полости может быть сведена к эффективной спектральной плотности вида

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2}, \quad (10.43)$$

где ω_0 является частотой перехода двухуровневой системы. Параметр λ определяет спектральную ширину, которая связана со временем корреляции резервуара τ_B соотношением $\tau_B = \lambda^{-1}$, а масштаб времени τ_R , на котором изменяется состояние системы, задается $\tau_R = \gamma_0^{-1}$.

Для расчета точной амплитуды вероятности $c_1(t)$ мы определяем корреляционную функцию с резервуаром $f(t)$, используя спектральную плотность (10.43),

$$f(t) = \frac{1}{2} \gamma_0 \lambda \exp(-\lambda|t|). \quad (10.44)$$

Для этой функции $f(t)$ дифференциальное уравнение (10.17) для амплитуды вероятности $c_1(t)$ может быть решено точно

$$c_1(t) = c_1(0) e^{-\lambda t/2} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{dt}{2} \right) + \frac{\lambda}{d} \operatorname{sh} \left(\frac{dt}{2} \right) \right], \quad (10.45)$$

где $d = \sqrt{\lambda^2 - 2\gamma_0\lambda}$. Это в результате дает для зависимости от времени заселенности возбужденного состояния

$$\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0) e^{-\lambda t} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{dt}{2} \right) + \frac{\lambda}{d} \operatorname{sh} \left(\frac{dt}{2} \right) \right]^2. \quad (10.46)$$

Используя уравнения (10.22) и (10.23), мы получаем исчезновение лэмбовского сдвига $S(t) \equiv 0$, а зависимая от времени интенсивность есть

$$\gamma(t) = \frac{2\gamma_0\lambda \operatorname{sh}(dt/2)}{d \operatorname{ch}(dt/2) + \lambda \operatorname{sh}(dt/2)}. \quad (10.47)$$

На рис. 10.2(а) мы показываем эту зависимость от времени для интенсивности распада $\gamma(t)$ («exact») вместе с марковской интенсивностью распада $\gamma_M = \gamma_0$ («Markov») при $\tau_R = 5\tau_B$. Для коротких времен, то есть для времен порядка τ_B точная интенсивность распада растет линейно с t , что приводит к правильному квантово-механическому поведению вероятности перехода на малых временах. В пределе больших времен интенсивность распада насыщается при значении больше марковской интенсивности распада, которое представляет поправки к золотому правилу. Заселенность возбужденного состояния изображена на рис. 10.2(б): для коротких времен точная заселенность уменьшается квадратично и является большей, чем марковская заселенность, которая просто задается $\rho_{11}(0) \exp(-\gamma_0 t)$, тогда как в пределе больших времен точная заселенность слегка меньше, чем марковская заселенность.

Дальше мы определяем решение обобщенного основного квантового уравнения (9.26) в приближении Борна. Для этого мы подставляем спектральную плотность силы связи (10.43) в уравнение (10.36), чтобы получить $\Psi(t) \equiv 0$, а также

$$\Phi(t) = \gamma_0 \lambda \exp(-\lambda t). \quad (10.48)$$

Это приводит к следующему виду основного обобщенного уравнения:

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \gamma_0 \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left[\sigma_- \rho_S(s) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho_S(s) - \frac{1}{2} \rho_S(s) \sigma_+ \sigma_- \right] ds. \quad (10.49)$$

Мы дифференцируем это выражение по t и получаем

$$\ddot{\rho}_S(t) = -\lambda \dot{\rho}_S(t) + \gamma_0 \lambda \left[\sigma_- \rho_S(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho_S(t) - \frac{1}{2} \rho_S(t) \sigma_+ \sigma_- \right]. \quad (10.50)$$

Благодаря экспоненциальной памяти ядра это уравнение движения является обыкновенным дифференциальным уравнением, которое локально во времени и содержит только $\rho_S(t)$, $\dot{\rho}_S(t)$ и $\ddot{\rho}_S(t)$. Решение приводит к следующей эволюции заселенности верхнего уровня во времени:

$$\tilde{\rho}_{11}(t) = \tilde{\rho}_{11}(0) e^{-\lambda t/2} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{d't}{2} \right) + \frac{\lambda}{d'} \operatorname{sh} \left(\frac{d't}{2} \right) \right], \quad (10.51)$$

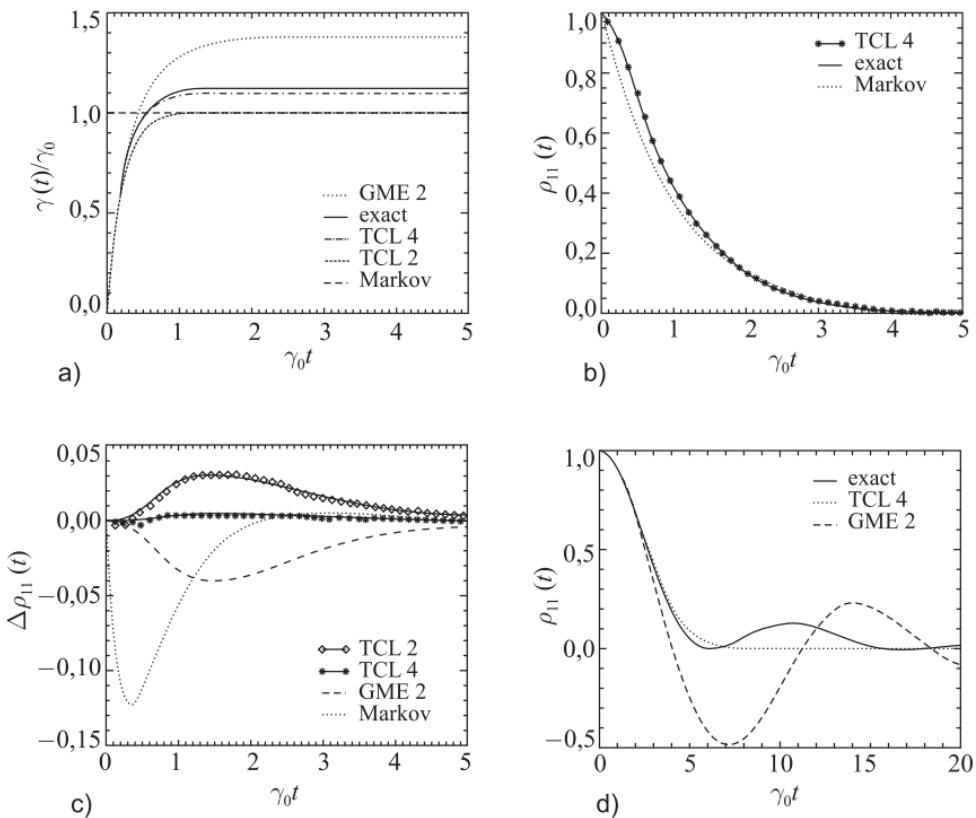


Рис. 10.2. Модель Джейнса–Каммингса с затуханием в условиях резонанса. Точное решение (exact), основное уравнение за вычетом временной свертки до второго (TCL 2) и четвертого (TCL 4) порядков, обобщенное основное уравнение до второго порядка (GME 2) и основное марковское квантовое уравнение (Markov): (а) Интенсивность разрушения заселенности основного состояния, (б) заселенность возбужденного состояния и (с) отклонение приближенных решений от точного результата при $\tau_R = 5\tau_B$ (умеренное связывание). Символы показывают результаты стохастического моделирования основного квантового уравнения за вычетом временной свертки, используя 10^5 реализаций, (д) заселенность возбужденного состояния при $\tau_R = 0,2\tau_B$ (сильное связывание). TCL – time-convolutionless (устранение временной свертки), GME – generalized master equation (обобщенное основное уравнение).

где $d' = \sqrt{\lambda^2 - 4\gamma_0\lambda}$. Из этого выражения мы можем определить зависящую от времени интенсивность распада

$$\tilde{\gamma}(t) = -\frac{\dot{\tilde{\rho}}_{11}(t)}{\tilde{\rho}_{11}(t)} = \frac{2\gamma_0\lambda \operatorname{sh}(d't/2)}{d' \operatorname{ch}(d't/2) + \lambda \operatorname{sh}(d't/2)}, \quad (10.52)$$

структурой которой подобна точной интенсивности распада (10.47). Отметим, однако, что существует различие между параметрами d и d' , которые можно также увидеть на рис. 10.2(а), где мы также построили интенсивность распада $\tilde{\gamma}(t)$ («GME 2»): для коротких времен интенсивность распада $\tilde{\gamma}(t)$ хорошо согласуется с $\gamma(t)$, но в пределе большого времени $\tilde{\gamma}(t)$ слишком большая.

В итоге вычет временной свертки интенсивности распада может быть определен из уравнения (10.41). Вклады второго и четвертого порядков задаются

$$\gamma_2(t) = \gamma_0(1 - e^{-\lambda t}) \quad (10.53)$$

и

$$\gamma_4(t) = \frac{\gamma_0^2}{\lambda} [\operatorname{sh}(\lambda t) - \lambda t] e^{-\lambda t}. \quad (10.54)$$

Это соответствует ряду Тейлора для точной интенсивности распада $\gamma(t)$ по степеням параметра разложения $\alpha^2 = \gamma_0/\lambda = \tau_B/\tau_R$. Таким образом, мы видим, что УВС-разложение приводит к ряду по степеням отношения времени корреляции резервуара τ_B к времени релаксации системы τ_R . Рис. 10.2(а) ясно показывает, что вклад второго порядка $\gamma_2(t)$ в УВС-разложение, а также вклад вплоть до четвертого порядка $\gamma^{(4)} = \gamma_2(t) + \gamma_4(t)$ очень хорошо аппроксимируют точную интенсивность распада для коротких времен. Более того, видно, что вклад четвертого порядка $\gamma^{(4)}$ также является хорошим приближением в пределе большого времени.

Эволюция заселенности возбужденного состояния во времени может быть получена интегрированием интенсивности $\gamma^{(4)}(t)$ по t . Это дает

$$\rho_{11}^{(4)}(t) = \rho_{11}(0) \exp \left(- \int_0^t \gamma^{(4)}(s) ds \right). \quad (10.55)$$

Для того чтобы сравнить качество различных схем приближения, мы показываем разность между приближенными заселеностями и точной заселенностью на рис. 10.2(с). Дополнительно к аналитическим решениям обобщенного основного уравнения и основного уравнения с удаленной временен-

ной сверткой мы также выполнили стохастическое моделирование основных квантовых уравнений с удаленной временной сверткой с 10^5 реализациями. Так как зависящие от времени интенсивности $\gamma_2(t)$ и $\gamma^{(4)}(t)$ положительны для всех t , соответствующие генераторы принимают вид Линдблада, и мы можем использовать стохастическую интерпретацию, развитую в разделе 6.1.1. Рис. 10.2(с) показывает, что стохастическое моделирование очень хорошо согласуется с соответствующими аналитическими решениями. Более того, мы видим, что различие между решением основного уравнения с удаленной временной сверткой до четвертого порядка и точного основного уравнения мало (см. также рис. 10.2(б)), тогда как ошибки обобщенного основного уравнения и основного уравнения с удаленной временной сверткой до второго порядка больше или одного порядка величины. На самом деле марковское приближение приводит даже к слегка улучшенной точности в сравнении с приближением Борна, что удивительно, если мы рассматриваем эвристический вывод основного квантового уравнения.

Схемы приближения, используемые здесь, являются схемами с малыми параметрами и поэтому основываются на предположении, что связь не очень сильная. Но что случится, если система достигнет режима сильной связи? Мы исследуем этот вопрос посредством модели Джейнса–Каммингса с затуханием в условиях резонанса, где известны явные выражения интересующих величин.

Сначала мы обратим внимание на точное выражение для заселенности возбужденного состояния (10.46): в режиме сильной связи, то есть для $\gamma_0 > \lambda/2$ или $\tau_R < 2\tau_B$, параметр d чисто мнимый. Определяя $\hat{d} = -id$, мы можем записать точную заселенность как

$$\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0)e^{-\lambda t} \left[\cos\left(\frac{\hat{d}t}{2}\right) + \frac{\lambda}{\hat{d}} \sin\left(\frac{\hat{d}t}{2}\right) \right]^2, \quad (10.56)$$

которая является осциллирующей функцией, имеющей дискретные нули при

$$t = \frac{2}{\hat{d}} \left(n\pi - \operatorname{arctg} \frac{\hat{d}}{\lambda} \right), \quad (10.57)$$

где $n = 1, 2, \dots$. Тогда интенсивность $\gamma(t)$ расходится в этих точках (см. (10.23)). Очевидно, $\gamma(t)$ может быть только аналитической функцией для $t \in [0, t_0]$, где t_0 есть наименьший положительный ноль $\rho_{11}(t)$.

С другой стороны, как мы только что видели, основное квантовое уравнение без временной свертки соответствует, в основном, разложению $\gamma(t)$

в ряд Тейлора по степеням γ_0 , а радиус сходимости этого ряда задается областью аналитичности $\gamma(t)$. Для $\gamma_0 < \lambda/2$ это вся положительная действительная ось, но для $\gamma_0 > \lambda/2$ разложение по малым параметрам сходится только при $t < t_0$. Эта характеристика может быть отчетливо видна на рис. 10.2(d), где мы изобразили $\rho_{11}(t)$ и $\rho_{11}^{(4)}(t)$ при $\tau_R = \tau_B/5$, то есть для сильной связи. Разложение по малым параметрам сходится к $\rho_{11}(t)$ при $t \lesssim t_0 \approx 6,3/\gamma_0$, но расходится при $t > t_0$.

Решение обобщенного основного уравнения до второго порядка демонстрирует вполне определенное поведение, но также имеет недостаток в режиме сильной связи. Для $\gamma_0 > \lambda/4$ заселенность $\rho_{11}(t)$ начинает осциллировать и даже принимает отрицательные значения, которые не являются физичными (см. рис. 10.2(d)).

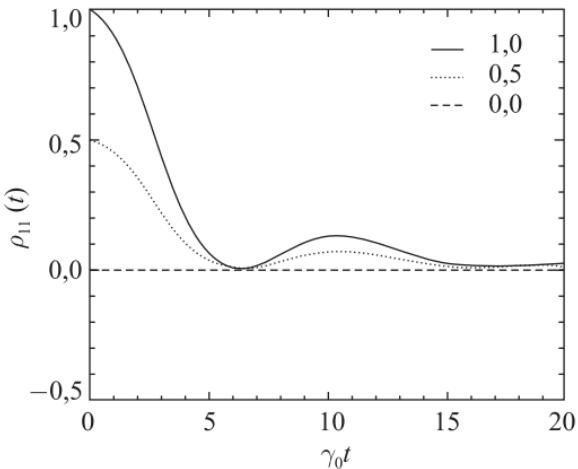


Рис. 10.3. Модель Джейнса – Каммингса с затуханием в условиях резонанса. Точная заселенность для трех различных начальных условий $\rho_{11}(0) = 1,0; 0,5; 0,0$ в режиме сильной связи ($\tau_R = 0,2\tau_B$).

«Недостаток» основного уравнения без временной свертки при $t = t_0$ может также быть понят со стороны более интуитивной точки зрения. Уравнения движения состояний без временной свертки, чья эволюция редуцированной матрицы плотности зависит только от фактического значения $\rho_S(t)$ и УВС-генератора. Однако при $t = t_0$ временная эволюция также зависит от начального значения матрицы плотности. Этот факт проиллюстрирован на рис. 10.3, где мы построили заселенность $\rho_{11}(t)$ для трех различных

начальных условий, а именно: $\rho_{11}(0) = 1,0; 0,5; 0,0$. При $t = t_0$ соответствующие матрицы плотности совпадают, несмотря на начальное условие. Однако будущее эволюции во времени для $t > t_0$ различно для этих траекторий. Поэтому интуитивно ясно, что удаление временной свертки из уравнения движения, которое локально по времени, перестает существовать при $t > t_0$. Формальная причина этого факта в том, что при $t = t_0$ оператор $1 - \Sigma(t)$ (см. раздел 9.2.1) необратимый и тогда генератор $\mathcal{K}(t)$ в этой точке не существует.

10.1.3. Модель Джейнса–Каммингса с расстройкой

В этом разделе мы рассмотрим модель Джейнса–Каммингса с затуханием в условиях расстройки от резонанса, то есть ту же установку, что и в предыдущем примере, но центральная частота резонатора расстраивается на величину Δ от атомной частоты перехода ω_0 . В этом случае спектральная плотность принимает вид

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_0 - \Delta - \omega)^2 + \lambda^2}, \quad (10.58)$$

и, таким образом, функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ задаются

$$\Phi(t) = \gamma_0 \lambda e^{-\lambda t} \cos(\Delta t), \quad (10.59)$$

$$\Psi(t) = \gamma_0 \lambda e^{-\lambda t} \sin(\Delta t). \quad (10.60)$$

С этими функциями зависимый от времени лэмбовский сдвиг $S^{(4)}(t) = S_2(t) + S_4(t)$, а интенсивность распада $\gamma^{(4)}(t) = \gamma_2(t) + \gamma_4(t)$ до четвертого порядка связи могут быть посчитаны, используя уравнения (10.42) и (10.41). Интегралы могут быть вычислены точно и приведены к выражениям

$$\begin{aligned} S^{(4)}(t) = & \frac{\gamma_0 \lambda \Delta}{\lambda^2 + \Delta^2} \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(\Delta t) + \frac{\lambda}{\Delta} \sin(\Delta t) \right) \right] - \\ & - \frac{\gamma_0^2 \lambda^2 \Delta^3 e^{-\lambda t}}{2(\lambda^2 + \Delta^2)^3} \left\{ \left[1 - 3 \left(\frac{\lambda}{\Delta} \right)^2 \right] (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(2\Delta t)) - \right. \\ & - 2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\Delta} \right)^4 \right] \Delta t \sin(\Delta t) + 4 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\Delta} \right)^2 \right] \lambda t \cos(\Delta t) - \\ & \left. - \frac{\lambda}{\Delta} \left[3 - \left(\frac{\lambda}{\Delta} \right)^2 \right] e^{-\lambda t} \sin(2\Delta t) \right\} \end{aligned} \quad (10.61)$$

и

$$\begin{aligned} \gamma^{(4)}(t) = & \frac{\gamma_0 \lambda^2}{\lambda^2 + \Delta^2} \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(\Delta t) - \frac{\Delta}{\lambda} \sin(\Delta t) \right) \right] + \\ & + \frac{\gamma_0^2 \lambda^5 e^{-\lambda t}}{2(\lambda^2 + \Delta^2)^3} \left\{ \left[1 - 3 \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \right] (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t} \cos(2\Delta t)) - \right. \\ & - 2 \left[1 - \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^4 \right] \lambda t \cos(\Delta t) + 4 \left[1 + \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \right] \Delta t \sin(\Delta t) + \\ & \left. + \frac{\Delta}{\lambda} \left[3 - \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \right] e^{-\lambda t} \sin(2\Delta t) \right\}. \quad (10.62) \end{aligned}$$

На рис. 10.4(a) мы изобразили $\gamma^{(4)}(t)$ вместе с точной интенсивностью распада, которая может быть вычислена решением дифференциального уравнения для амплитуды вероятности $c_1(t)$ при $\Delta = 8\lambda$ и $\lambda = 0,3\gamma_0$. Отметим, что спонтанная интенсивность распада сильно подавлена по сравнению со спонтанным распадом при резонансе. Это может быть также видно при моделировании марковской интенсивности распада γ_M , которая задается

$$\gamma_M = \frac{\gamma_0 \lambda^2}{\lambda^2 + \Delta^2} \approx 0,015\gamma_0. \quad (10.63)$$

Однако это сильное подавление наиболее эффективно в пределе большого времени. При коротких временах $\gamma(t)$ осциллирует с большой амплитудой и может даже принимать отрицательные значения, которые приводят к увеличению заселенности. Это происходит благодаря фотонам, которые излучаются атомом, а позже перепоглощаются. Тогда точное основное квантовое уравнение, а также приближение, связанное с удалением временной свертки, оказываются не в форме Линдблада, но сохраняют положительность редуцированной матрицы плотности. Это, конечно, не есть опровержение теоремы Линдблада, так как основное предположение этой теоремы в том, что динамика редуцированной системы составляет динамическую полугруппу. Это допущение здесь, очевидно, нарушается.

Несмотря на то, что основное уравнение за вычетом временной свертки не является линдбладовской формой и включает отрицательные интенсивности, оно может быть представлено через соответствующий стохастический процесс, как это было показано в разделе 9.3. Динамика стохастической волновой функции $\theta(t)$, которая является элементом сдвоенно-

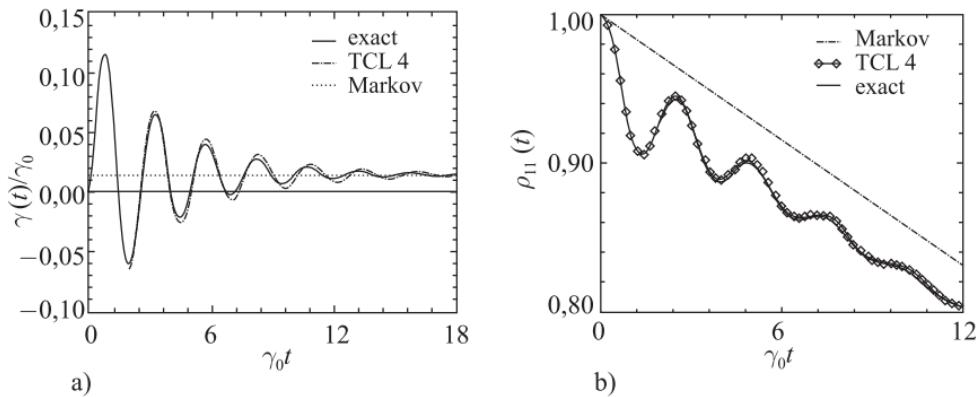


Рис. 10.4. Модель Джейнса–Каммингса с затуханием в условиях расстройки от резонанса. Точное решение (exact), основное уравнение до четвертого порядка (TCL4) за вычетом временной свертки и основное марковское квантовое уравнение (Markov): (a) Интенсивность разрушения заселенности возбужденного состояния и (b) заселенность возбужденного состояния, включающая стохастическое моделирование основного квантового уравнения за вычетом временной свертки с 10^5 реализациями (значки) при $\lambda = 0,3\gamma_0$ и $\Delta = 8\lambda$.

го гильбертова пространства $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$, управляемся стохастическим дифференциальным уравнением (9.98), где оператор $F(t)$ задается

$$F(t) = -\frac{1}{2}\gamma^{(4)}(t) \begin{pmatrix} \sigma_+ \sigma_- & 0 \\ 0 & \sigma_+ \sigma_- \end{pmatrix}, \quad (10.64)$$

и мы имеем отдельный оператор скачка

$$J(t) = \begin{pmatrix} \gamma^{(4)}(t)\sigma_- & 0 \\ 0 & \sigma_- \end{pmatrix}. \quad (10.65)$$

Эти скачки вызывают переходы вида

$$\theta(t) \rightarrow \frac{\|\theta(t)\|}{\|J\theta(t)\|} J\theta(t) \sim \begin{pmatrix} \gamma^{(4)}(t)|0\rangle_S \\ |0\rangle_S \end{pmatrix}. \quad (10.66)$$

Если интенсивность $\gamma^{(4)}(t)$ положительна, эти переходы приводят к положительному вкладу в заселенность основного состояния $\rho_{00}(t)$, тогда как отрицательная интенсивность вызывает уменьшение $\rho_{00}(t)$.

На рис. 10.4(b) мы показываем результаты стохастического моделирования для 10^5 реализаций вместе с аналитическим решением основного квантового уравнения без временной свертки и решением точного уравнения. Очевидно, совпадение всех трех кривых хорошее, а стохастические алгоритмы моделирования работают отлично даже для отрицательных интенсивностей распада. Дополнительно мы также показываем решение марковского квантового уравнения, которое явно недооценивает распад для коротких времен и не показывает осцилляции.

10.1.4. Спонтанный фотонный распад в запрещенной зоне

В качестве нашего заключительного примера мы рассмотрим модель спонтанного разрушения двухуровневой системы в фотонной запрещенной зоне, которая предложена Гаррэвэем (Garraway, 1997). Для этого мы рассмотрим спектральную плотность вида

$$J(\omega) = \frac{\Omega_0^2}{2\pi} \left(\frac{W_1 \Gamma_1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma_1/2)^2} - \frac{W_2 \Gamma_2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma_2/2)^2} \right), \quad (10.67)$$

где Ω_0^2 описывает полную силу связи, Γ_1 — ширина полосы частот «плоского» фонового континуума, Γ_2 — ширина щели, а W_1 и W_2 — относительные силы фона и щели соответственно. На рис. 10.5 мы показываем интенсивность распада $\gamma(t)$ возбужденного состояния для параметров $\Gamma_1/\Omega_0 = 10$, $\Gamma_2/\Omega_0 = 1$, $W_1 = 1,1$ и $W_2 = 0,1$. Для коротких времен $\gamma(t)$ увеличивается линейно на временном масштабе Γ_1^{-1} и затем достигает максимального значения. Эта фаза динамики возникает из переходов в «плоский» фоновый континуум. Для больших времен, то есть для $t \gg \Gamma_2^{-1}$ система разрешает структуру спектральной плотности, а переходы являются сильно подавленными благодаря присутствию щели. Интенсивность распада поэтому уменьшается до тех пор, пока не достигнет своего конечного значения. Таким образом, заселенность возбужденного состояния быстро уменьшается для времен порядка Γ_2^{-1} и медленно для предела больших времен (см. рис. 10.5).

Зависимые от времени лэмбовский сдвиг $S^{(4)}(t)$ и интенсивность распада $\gamma^{(4)}(t)$ без временной свертки для основного квантового уравнения до четвертого порядка могут быть посчитаны подстановкой спектральной плотности силы связи $J(\omega)$ в уравнение (10.36). Это приводит к $\Psi(t) \equiv 0$ и

$$\Phi(t) = 2\Omega_0^2 \left(W_1 e^{-\Gamma_1 t/2} - W_2 e^{-\Gamma_2 t/2} \right), \quad (10.68)$$

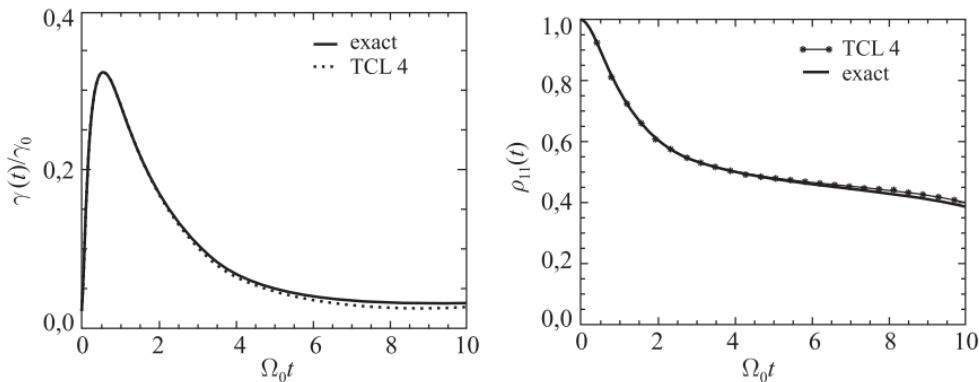


Рис. 10.5. Спонтанное разрушение в фотонной запрещенной зоне. Точное решение (exact), основное уравнение до четвертого порядка (TCL 4). Слева: Интенсивность разрушения заселенности возбужденного состояния. Справа: Заселенность возбужденного состояния, включающая стохастическое моделирование основного квантового уравнения с 10^5 реализациями (значки) при $W_1 = 1,1$; $W_2 = 0,1$; $\Gamma_1/\Omega_0 = 10$ и $\Gamma_2/\Omega_0 = 1$.

что может быть подставлено в уравнения (10.42) и (10.41). Так как $\Psi(t) \equiv 0$, лэмбовский сдвиг $S^{(4)}(t)$ исчезает; зависимая от времени интенсивность распада $\gamma^{(4)}(t)$ может быть вычислена явно и хорошо согласуется с точной интенсивностью распада для нашего выбора параметров (см. рис. 10.5).

10.2. Затухающий гармонический осциллятор

Затухающий гармонический осциллятор уже был изучен в различных частях главы 3, где мы обсуждали основное уравнение (3.307) в пределе квантовой оптики и основное уравнение высокотемпературного броуновского движения (3.410). Это дает одну из нескольких открытых систем, которые могут быть решены аналитически — например, решением точного уравнения движения Гейзенберга (раздел 3.6.3) или посредством метода интегралов по траекториям Фейнмана–Вернона (раздел 3.6.4). Затухающий гармонический осциллятор является особенно подходящим для исследования параметрического режима, где разложение по малым параметрам основного уравнения без временной свертки в итоге дает надежные результаты вне предела Борна–Маркова. Мы покажем, что рассмотрение малых параметров находится в хорошем согласии с точным решением для существенно высоких температур при любой силе связи и для низких температур при слабой или умеренной связи.

10.2.1. Модель и частотная перенормировка

Мы рассмотрим модель Кальдейры–Леггетта для гармонического осциллятора, линейно связанного с термостатом гармонических осцилляторов (см. главу 3.6). Гамильтониан сложной системы, таким образом, принимает вид

$$H = H_S + H_B + H_I, \quad (10.69)$$

где

$$H_S = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega_b^2 X^2, \quad (10.70)$$

$$H_B = \sum_n \left(\frac{1}{2m_n} p_n^2 + \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 x_n^2 \right), \quad (10.71)$$

$$H_I = -X \sum_n \kappa_n x_n = -X \otimes B. \quad (10.72)$$

Гамильтонианы H_S и H_B генерируют свободную эволюцию во времени системы и термостата соответственно, а H_I обозначает их взаимодействие. Отметим, что мы выбрали такую систему единиц, что $\hbar = 1$, и мы изменили масштаб координаты и импульса согласно $x \rightarrow X/\sqrt{m}$ и $p \rightarrow P\sqrt{m}$ таким образом, что масса осциллятора принята за единицу в последующих выражениях.

Частота ω_b , которая вводит определение гамильтониана системы (10.70), не является физически наблюдаемой частотой осциллятора, но является «голой» частотой, так как связь с окружением вызывает частотный сдвиг, который зависит от граничной частоты Ω (см. параграф 3.6.2.1). «Голая» частота связана с перенормировкой частоты ω_0 соотношением

$$\omega_b^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2 \quad (10.73)$$

с

$$\omega_c^2 = \sum_n \frac{\kappa_n^2}{m_n \omega_n^2} \simeq 2 \int_0^\infty \frac{J(\omega)}{\omega} d\omega = 2\gamma\Omega, \quad (10.74)$$

где $J(\omega)$ обозначает омическую спектральную плотность с функцией обрезания Лоренца–Друде (см. (3.392)).

Частота ω_c^2 зависит от силы связи и определяется вторым порядком α^2 по связи. Тогда «голая» частота ω_b является функцией, содержащей члены порядка α^2 . С другой стороны, генератор $\mathcal{K}(t) = \mathcal{K}(t; \omega_b)$ и неоднородность $\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}(t; \omega_b)$ (см. (9.84)) среди остальных параметров зависят от

«голой» частоты ω_b . Для того чтобы получить совместное разложение по членам силы связи, мы, таким образом, принимаем во внимание потенциальную перенормировку. Для второго порядка это дает

$$\mathcal{K}_2(t) = \mathcal{K}_2(t; \omega_0) \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_2(t) = \mathcal{J}_2(t; \omega_0), \quad (10.75)$$

в то время как комбинации четвертого порядка есть

$$\mathcal{K}_4(t) = \mathcal{K}_4(t; \omega_0) + \frac{\omega_c^2}{2\omega_0} \frac{\partial \mathcal{K}_2(t; \omega_0)}{\partial \omega_0}, \quad (10.76)$$

$$\mathcal{J}_4(t) = \mathcal{J}_4(t; \omega_0) + \frac{\omega_c^2}{2\omega_0} \frac{\partial \mathcal{J}_2(t; \omega_0)}{\partial \omega_0}, \quad (10.77)$$

где выражения $\mathcal{K}_n(t)$ и $\mathcal{J}_n(t)$ обозначают n -й порядок вкладов в генератор и неоднородность, как получено в разделах 9.2.2 и 9.2.4.

Таким образом, для вычисления вклада второго порядка мы просто используем перенормировку частоты ω_0 вместо «голой» частоты ω_b . Для четвертого порядка мы рассмотрим два члена: первый член снова получается заменой «голой» частоты перенормированной частотой в обычных выражениях для \mathcal{K}_4 и \mathcal{J}_4 . Второй член задается дифференцированием \mathcal{K}_2 и \mathcal{J}_2 по перенормированной частоте.

10.2.2. Факторизованные начальные условия

В этом разделе мы исследуем релаксацию изначально факторизованного состояния в состояние равновесия. Для этого мы определяем генератор $\mathcal{K}(t)$ для четвертого порядка, используя уравнения (9.61) и (9.62). После некоторых алгебраических преобразований в представлении Шредингера мы получаем следующее основное квантовое уравнение с зависимыми от времени коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) = & -i[H_S, \rho_S(t)] - \frac{i}{2}\Delta(t)[X^2, \rho_S(t)] - \\ & - i\lambda(t)[X, \{P, \rho_S(t)\}] - D_{PP}(t)[X, [X, \rho_S(t)]] + \\ & + 2D_{PX}(t)[X, [P, \rho_S(t)]]. \end{aligned} \quad (10.78)$$

Это уравнение имеет точно такую же структуру, как точное основное квантовое уравнение (Haake, Reibold, 1985; Hu, Paz, Zhang, 1992; Karrlein, Grabert, 1997) и может быть показано, что оно не является формой Линдблада (см., например, Sandulescu, Scutaru, 1987).

Коэффициент $\Delta(t)$ приводит к зависимости от времени энергетическому сдвигу, $\lambda(t)$ есть классический затухающий член, а $D_{PP}(t)$ и $D_{PX}(t)$

являются диффузионными членами. Физически наблюдаемая частота осциллятора задается

$$\omega_p^2(t) = \omega_b^2 + \Delta(t) = \omega_0^2 + \omega_c^2 + \Delta(t). \quad (10.79)$$

Как мы сможем увидеть ниже, в пределе большого времени ω_c^2 и $\Delta(t)$ имеют тенденцию к компенсации друг друга, так что наблюдаемая частота $\omega_p(t)$ близка к перенормированной частоте ω_0 .

Для второго порядка по силе связи входящие коэффициенты основного уравнения есть

$$\Delta^{(2)}(t) = - \int_0^t D(s) \cos(\omega_0 s) ds, \quad (10.80)$$

$$\lambda^{(2)}(t) = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t D(s) \sin(\omega_0 s) ds, \quad (10.81)$$

$$D_{PX}^{(2)}(t) = \frac{1}{4\omega_0} \int_0^t D_1(s) \sin(\omega_0 s) ds, \quad (10.82)$$

$$D_{PP}^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t D_1(s) \cos(\omega_0 s) ds, \quad (10.83)$$

что согласуется с результатами, полученными Ху, Пазом и Жангом. Мы напоминаем, что ядра диссипации и шума $D(s)$ и $D_1(s)$ были введены в уравнениях (3.393) и (3.394) соответственно. Марковский предел получается в пределе $t \rightarrow \infty$ для омической диссипации

$$\Delta^M = - \frac{2\gamma\Omega^3}{\Omega^2 + \omega_0^2}, \quad (10.84)$$

$$\lambda^M = \frac{\gamma\Omega^2}{\Omega^2 + \omega_0^2}, \quad (10.85)$$

$$D_{PX}^M = \frac{\gamma k_B T \Omega^2}{\Omega^2 + \omega_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0^2 - \Omega|\nu_n|}{(\nu_n^2 + \omega_0^2)(|\nu_n| + \Omega)}, \quad (10.86)$$

$$D_{PP}^M = \frac{\gamma\omega_0\Omega^2}{\Omega^2 + \omega_0^2} \operatorname{cth} \left(\frac{\omega_0}{2k_B T} \right). \quad (10.87)$$

В высокотемпературном пределе $k_B T \gg \Omega \gg \omega_0$ это дает коэффициенты хорошо известного основного уравнения Кальдейры–Леггетта (3.410),

а именно

$$\Delta^{CL} = -2\gamma\Omega, \quad (10.88)$$

$$\lambda^{CL} = \gamma, \quad (10.89)$$

$$D_{PX}^{CL} = \frac{\gamma k_B T}{\Omega}, \quad (10.90)$$

$$D_{PP}^{CL} = 2\gamma k_B T. \quad (10.91)$$

Отметим, что коэффициент D_{PX}^{CL} мал в сравнении с другими коэффициентами и может, таким образом, быть положен равным нулю. Явное выражение для коэффициентов до четвертого порядка может быть найдено в (Breuer, Kappler, Petruccione, 2001). Энергетический сдвиг $\Delta(t)$ и коэффициент затухания $\lambda(t)$ зависят только от ядра диссипации $D(t)$. Эти величины независимы от температуры резервуара. На рис. 10.6 мы показываем временную зависимость физически наблюдаемой частоты $\omega_p(t)$ и коэффициента $\lambda(t)$ для умеренного связывания ($\gamma = \omega_0$, $\Omega = 20\omega_0$). Обе функции затухают на временном масштабе, который порядка величины обратной частоты обрезания Ω^{-1} и за большое время достигают постоянного значения. В пределе $\Omega \rightarrow \infty$ вклад четвертого порядка становится незначительным и постоянные задаются марковскими пределами: $\omega_p \rightarrow \omega_0$ и $\lambda(t) \rightarrow \lambda^{CL}$.

Временная зависимость температурно-зависимых коэффициентов $D_{PP}(t)$ и $D_{PX}(t)$ до четвертого порядка изображены на рис. 10.7 для трех различных температурных режимов. Для высоких температур, то есть $k_B T \gg \Omega$, диффузионные коэффициенты варьируются на масштабе порядка обратной частоты перехода (сверху). Для средних температур, то есть $\Omega \gg k_B T \gg \omega_0$, коэффициенты варьируются на масштабе порядка температурных корреляций времени $1/k_B T$ (в центре) и для низких температур временная зависимость диффузионных коэффициентов управляема обратной частотой системы ω_0^{-1} (внизу). Из этой характеристики мы ожидаем, что приближение по малым параметрам будет хорошо согласовываться с точным решением для высоких температур, если $\gamma \ll \Omega$ для средних температур в случае $\gamma \ll k_B T$ и для низких температур в случае $\gamma \ll \omega_0$. Эта точка зрения будет обсуждаться более детально в разделе 10.2.3, где мы считаем стационарную матрицу плотности редуцированной системы.

Теперь рассмотрим относительную ошибку коэффициентов для основного квантового уравнения, которую мы определяем для $\lambda(t)$ как

$$e_r^{(2n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda^{(2n)}(t) - \lambda(t)}{\lambda(t)} \right|, \quad (10.92)$$

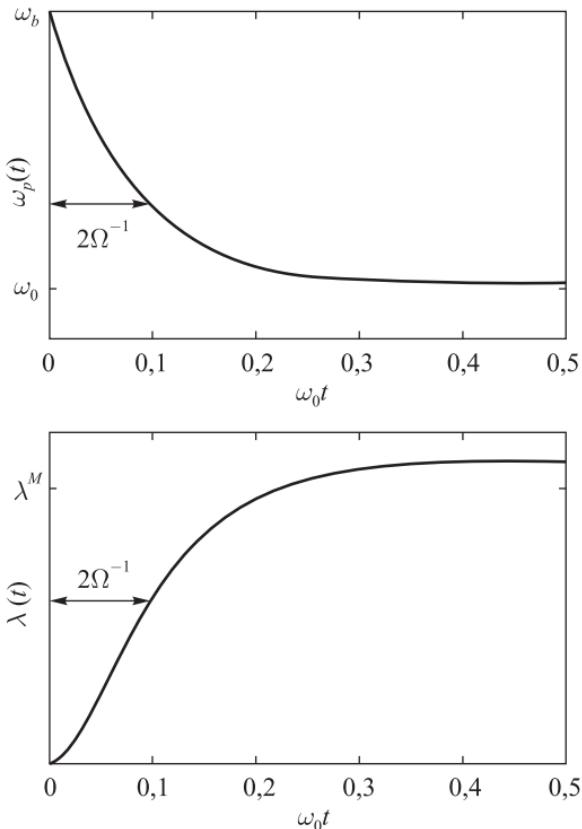


Рис. 10.6. Временная зависимость физически наблюдаемой частоты $\omega_p(t)$ и коэффициента затухания $\lambda(t)$ гармонического осциллятора до четвертого порядка в условиях сильной связи. Параметры: $\gamma = \omega_0$, $\Omega = 20\omega_0$.

и подобным же образом для других коэффициентов. Этот тип ошибки обсуждался в разделе 9.2.5. При использовании коэффициентов до четвертого порядка мы получаем следующие оценки для этих ошибок:

$$\hat{e}_r^{(2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda^{(4)}(t) - \lambda^{(2)}(t)}{\lambda^{(2)}(t)} \right|, \quad \hat{e}_r^{(4)} = \left(\hat{e}_r^{(2)} \right)^2, \quad (10.93)$$

подобные же выражения могут быть определены для других коэффициентов. Эти оценки сравниваются с фактическими ошибками на рис. 10.8. Рисунок показывает, что $\hat{e}_r^{(2)}$ дает очень хорошую оценку фактической ошибки $e_r^{(2)}$ разложения по малым параметрам. Это не удивительно, так как

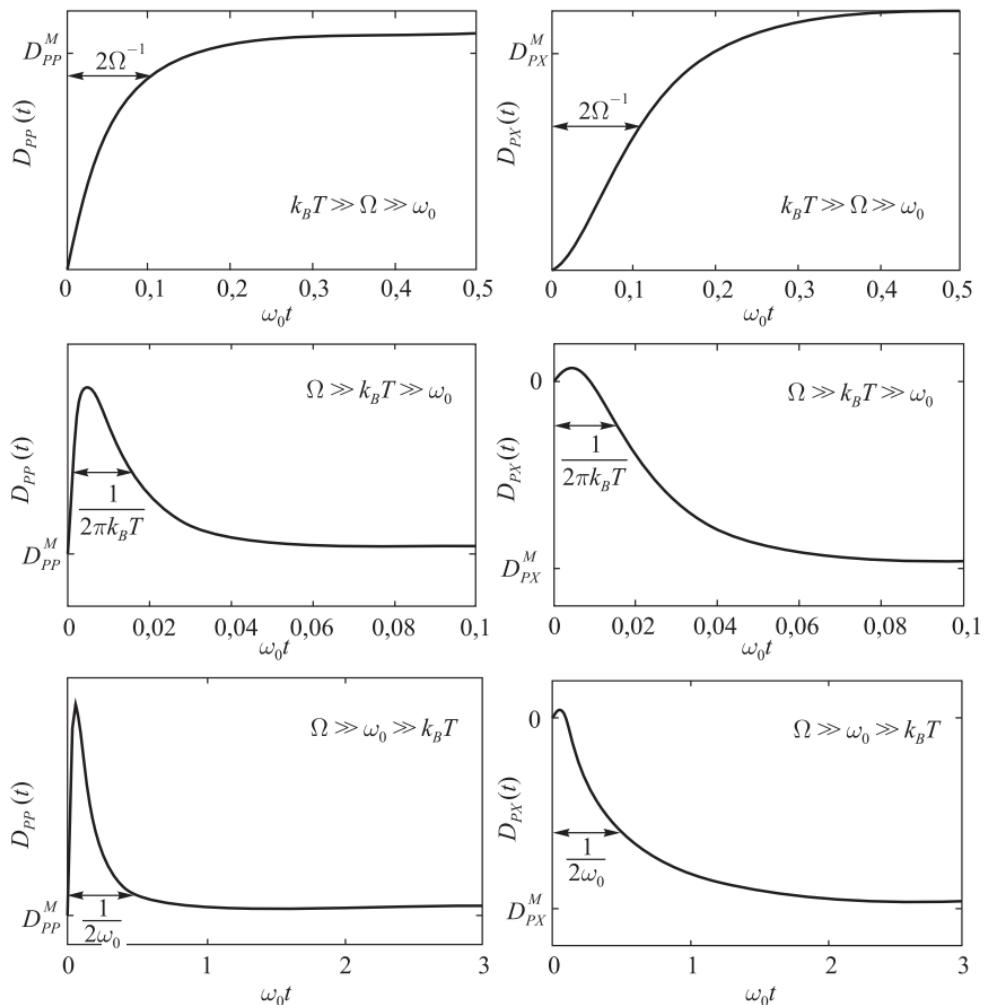


Рис. 10.7. Временная зависимость членов $D_{PP}(t)$ и $D_{PX}(t)$ до четвертого порядка в условиях сильной связи. Мы различаем три параметрических режима. Высокотемпературное среднее связывание (сверху): $\gamma = \omega_0$, $\Omega = 20\omega_0$, $k_B T = 1000\omega_0$. Среднетемпературное среднее связывание (центр): $\gamma = \omega_0$, $\Omega = 200\omega_0$, $k_B T = 10\omega_0$. Низкотемпературное слабое связывание (снизу): $\gamma = 0,1\omega_0$, $\Omega = 20\omega_0$, $k_B T = 0,01\omega_0$.

оценка основана на вкладе четвертого порядка. С другой стороны, оценка $\hat{e}_r^{(4)}$ не включает члены более высокого порядка, а только полагается на вклады второго и четвертого порядков. Тем не менее это дает хорошие значения для порядка величины фактической ошибки, что достаточно для большинства приложений. Таким образом, для второго порядка ошибка разложения по малым параметрам может быть надежно оценена без вычисления членов разложения более высокого порядка.

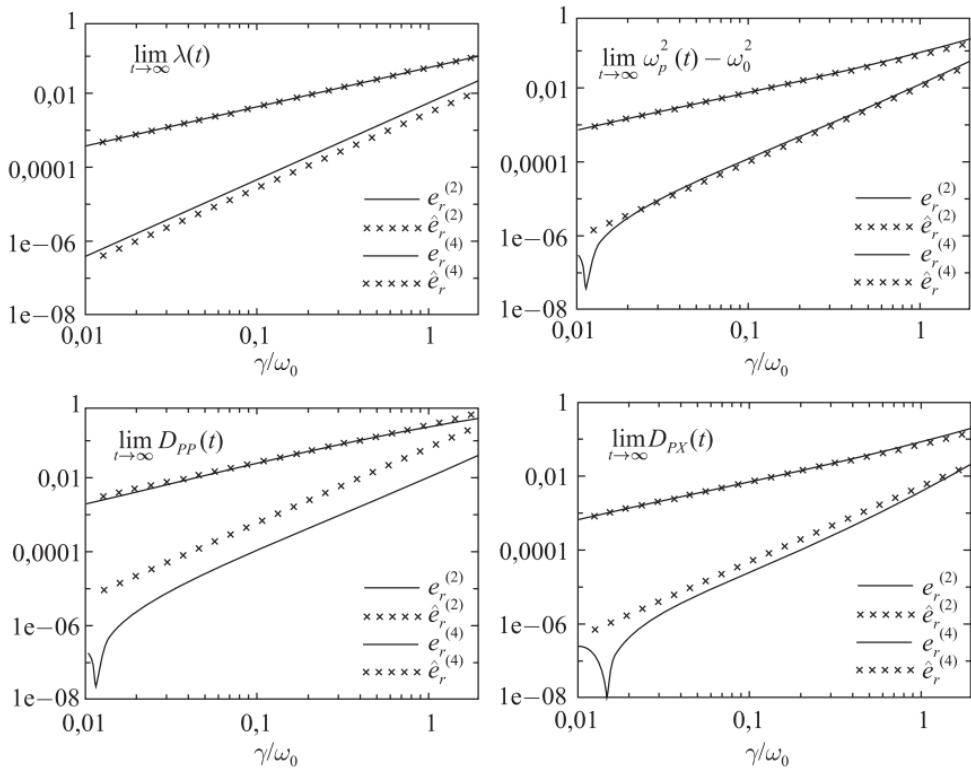


Рис. 10.8. Точные относительные ошибки $e_r^{(2)}$ и $e_r^{(4)}$ и их оценки $\hat{e}_r^{(2)}$ и $\hat{e}_r^{(4)}$ до второго и четвертого порядков при коэффициентах $\lambda(t)$, $\omega_p(t)^2 - \omega_0^2$, $D_{PP}(t)$ и $D_{PX}(t)$.

10.2.3. Стационарное состояние

В этом разделе мы исследуем стационарное состояние основного уравнения без временной свертки для того, чтобы найти параметрический ре-

жим, в котором разложение в ряд по малому параметру дает надежные численные результаты. Так как стационарное состояние гармонического осциллятора гауссово, оно полностью определяется первым и вторым моментами наблюдаемых X и P . Динамика этих моментов управляет сопряженным основным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\mathcal{O}\rangle_t &= i\langle[H_S, \mathcal{O}]\rangle_t + \frac{i}{2}\Delta(t)\langle[X^2, \mathcal{O}]\rangle_t + \\ &+ i\lambda(t)\langle\{P, [X, \mathcal{O}]\}\rangle_t - D_{PP}(t)\langle[X, [X, \mathcal{O}]]\rangle_t + \\ &+ 2D_{PX}(t)\langle[X, [P, \mathcal{O}]]\rangle_t, \end{aligned} \quad (10.94)$$

где \mathcal{O} есть некоторый произвольный оператор системы, а $\langle\mathcal{O}\rangle_t$ обозначает независимое от времени математическое ожидание $\text{tr}_S\{\mathcal{O}\rho_S(t)\}$ наблюдаемой \mathcal{O} относительно редуцированной матрицы плотности $\rho_S(t)$.

Для наблюдаемых X и P уравнение (10.94) дает в результате классические уравнения движения затухающего гармонического осциллятора, а именно

$$\frac{d}{dt}\langle X\rangle_t = \langle P\rangle_t, \quad (10.95)$$

$$\frac{d}{dt}\langle P\rangle_t = -\omega_p^2(t)\langle X\rangle_t - 2\lambda(t)\langle P\rangle_t, \quad (10.96)$$

а для вторых моментов мы получаем

$$\frac{d}{dt}\langle X^2\rangle_t = \langle\{X, P\}\rangle_t, \quad (10.97)$$

$$\frac{d}{dt}\langle P^2\rangle_t = -\omega_p^2(t)\langle\{X, P\}\rangle_t - 4\lambda(t)\langle P^2\rangle_t + 2D_{PP}(t), \quad (10.98)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\{X, P\}\rangle_t &= -2\omega_p^2(t)\langle X^2\rangle_t + 2\langle P^2\rangle_t - \\ &- 2\lambda(t)\langle\{X, P\}\rangle_t + 4D_{PX}(t). \end{aligned} \quad (10.99)$$

Стационарное решение этих уравнений движения выражается (Sandulescu, Scutaru, 1987)

$$\langle X\rangle = \langle P\rangle = \langle\{X, P\}\rangle = 0, \quad (10.100)$$

$$\langle X^2\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega_p^2(t)} \left[\frac{D_{PP}(t)}{\lambda(t)} + 4D_{PX}(t) \right], \quad (10.101)$$

$$\langle P^2\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D_{PP}(t)}{2\lambda(t)}. \quad (10.102)$$

В пределе слабой связи, то есть в пределе $\gamma \rightarrow 0$, стационарное состояние может быть вычислено подстановкой марковских коэффициентов, определенных в уравнениях (10.84)–(10.87), что приводит к выражениям

$$\langle X^2 \rangle = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{cth} \left(\frac{\omega_0}{2k_B T} \right), \quad (10.103)$$

$$\langle P^2 \rangle = \frac{\omega_0}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\omega_0}{2k_B T} \right). \quad (10.104)$$

Дисперсии ΔX^2 и ΔP^2 (вплоть до множителя масштабирования ω_0) идентичны и поэтому состояние гармонического осциллятора не сжато. В высокотемпературном режиме дисперсии пропорциональны температуре, то есть осцилляторная характеристика похожа на классическую. С другой стороны, в низкотемпературном режиме дисперсии ограничиваются соотношением неопределенности Гейзенберга и осциллятор характеризуется квантово-механически.

При $\gamma > 0$ мы можем аппроксимировать стационарное решение, используя выражения для коэффициентов основного уравнения четвертого порядка. Это в результате дает поправки для вторых моментов $\langle X^2 \rangle$ и $\langle P^2 \rangle$, которые линейны по γ . На рис. 10.9 мы сравниваем аппроксимированные дисперсии с точными при $\gamma = 0,25\omega_0$ и $\gamma = 0,5\omega_0$ в низкотемпературном режиме. Оба решения показывают качественно одну и ту же характеристику: дисперсия координаты уменьшается, в то время как дисперсия импульса увеличивается для увеличивающихся температур — состояние осциллятора является сжатым состоянием в этом параметрическом режиме. Рис. 10.9 также показывает, что приближение основного уравнения до четвертого порядка дает в результате надежные численные результаты для $\gamma \lesssim \omega_0/2$.

Более детальный количественный анализ ошибки приближения изображен на рис. 10.10. Для фиксированного значения частоты отсечки Ω этот рисунок показывает области в параметрическом пространстве, где относительная ошибка в дисперсии импульса меньше чем 5 % и 1 % соответственно. Очевидно, разложение по малым параметрам хорошо согласуется с точными результатами при $\gamma \lesssim k_B T/2$ в высокотемпературном режиме и при $\gamma \lesssim \omega_0/2$ в пределе $T \rightarrow 0$. Численные исследования показывают, что при $\gamma \lesssim \Omega/2$ эта характеристика может быть просуммирована при условии

$$\frac{2\omega_0\gamma}{\omega_0^2 + (k_B T)^2} \leq c_n(\Omega, e_r), \quad (10.105)$$

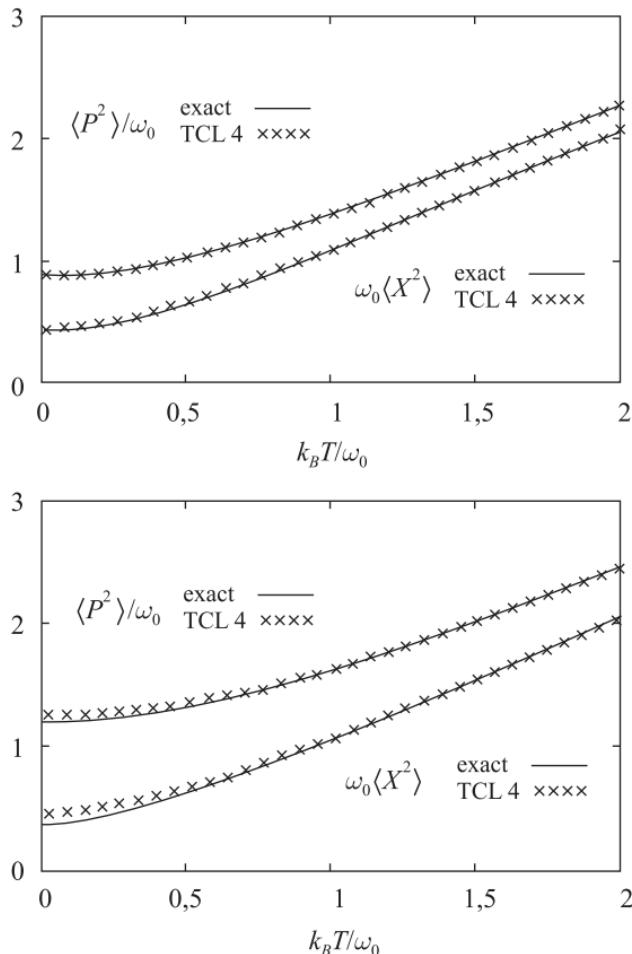


Рис. 10.9. Низкотемпературная характеристика стационарных дисперсий $\langle X^2 \rangle$ и $\langle P^2 \rangle$ при $\gamma = 0,25\omega_0$ (сверху) и при $\gamma = 0,5\omega_0$ (снизу). TCL 4 обозначает решение основного квантового уравнения до четвертого порядка, а «exact» — решение, данное в (Grabert, Schramm, Ingold, 1988). Частота обрезания выбрана $\Omega = 20\omega_0$.

где постоянная c_n зависит от частоты отсечки Ω , желаемой точности e_r и порядка приближения n , но не зависит от температуры. При $\Omega = 20\omega_0$ и $e_r = 5\%$ мы имеем, например: $c_2 = 0,042$ и $c_4 = 0,84$, в то время как при $e_r = 1\%$ получается $c_2 = 0,0068$ и $c_4 = 0,25$. На рис. 10.10 мы также отметили границу параметрического режима, для которого урав-

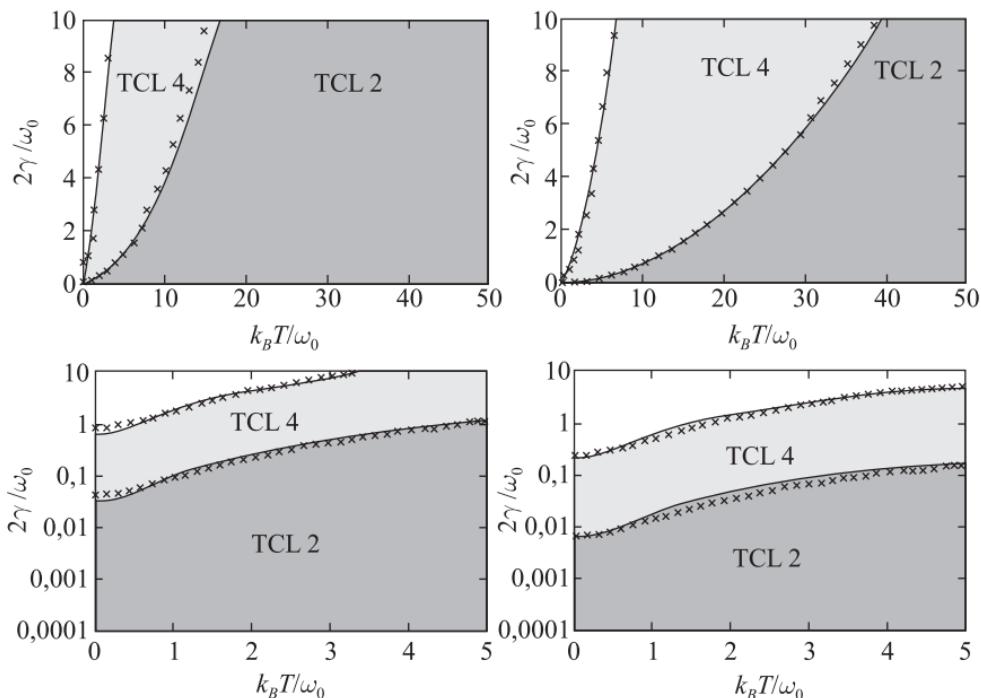


Рис. 10.10. Области параметрического пространства, где относительная ошибка стационарного значения $\langle P^2 \rangle$ меньше, чем 5 % (слева), и меньше 1 % (справа). TCL 2 (TCL 4) обозначают решение основного уравнения без временной свертки до второго (четвертого) порядка. Крестики обозначают границы областей, где уравнение (10.105) выполняется. Снизу показывается увеличенная область низкотемпературного и слабосвязанного режима. Частота обрезания выбирается $\Omega = 20\omega_0$.

нение (10.105), хорошо согласующееся с областью, где существует относительная ошибка, обладает, на самом деле, меньшим значением e_r , чем предписываемое.

Тот факт, что разложение по малому параметру также дает численно надежные результаты в низкотемпературном режиме, кажется, противоречит тому факту, что термическая корреляция во времени $\tau_B \sim 1/k_B T$ становится бесконечной в пределе $T \rightarrow 0$. С другой стороны, как обсуждалось в разделе 10.2.2, зависимость от времени температурно-зависимых диффузионных коэффициентов преобладает на временном масштабе ω_0^{-1} . Таким образом, время памяти низкотемпературного режима является обратной системной частотой, а не термическим корреляционным временем.

В самом деле, как мы видели в разделе 3.4, рассмотрение по возмущениям предельно точно и в квантовом оптическом режиме даже в пределе $T \rightarrow 0$. Это объясняет, почему марковское основное уравнение очень полезно в этом режиме и почему оно дает приближение, которое однозначно по T и выполняется даже в случае оптического вакуума ($T = 0$).

10.2.4. Нефакторизованные начальные условия

В этом разделе мы хотим определить равновесное значение автокорреляционной функции $\langle X(t)X \rangle$, которое определяется как

$$\langle X(t)X \rangle \equiv \text{tr}\{e^{iHt} X e^{-iHt} X \rho_{\text{eq}}\}, \quad (10.106)$$

где след берется по системе и резервуару. Это определение может быть преобразовано в картину взаимодействия

$$\langle X(t)X \rangle = \text{tr}\{X(t)V(t)\}, \quad (10.107)$$

где $X(t) = \exp(iH_{St})X \exp(-iH_{St})$ есть представление взаимодействия для оператора координаты. Оператор $V(t)$, введенный выше, является решением уравнения движения

$$\frac{d}{dt}V(t) = -i[H_I(t), V(t)] \equiv \mathcal{L}(t)V(t), \quad (10.108)$$

соответствующим начальному условию

$$V(0) = X\rho_{\text{eq}} \equiv \mathcal{A}\rho_{\text{eq}}, \quad (10.109)$$

В общем случае это начальное значение не дает истинную матрицу плотности, а также не представляет факторизованное состояние. Однако оно соответствует классу начальных условий (9.69), обсуждаемых в разделе 9.2.4.

Так как оператор X действует только в гильбертовом пространстве открытой системы, он коммутирует с проекцией оператора \mathcal{P} , и мы можем написать координату автокорреляционной функции, как показано ниже:

$$\langle X(t)X \rangle = \text{tr}\{X(t)\mathcal{P}V(t)\}. \quad (10.110)$$

Уравнение движения для корреляционной функции теперь получается дифференцированием обеих сторон этого уравнения по t и использованием уравнений (9.33) и (9.84),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle X(t)X \rangle &= i \text{tr}\{[H_S, X(t)]\mathcal{P}V(t)\} + \\ &+ \text{tr}\{X(t)\mathcal{K}(t)\mathcal{P}V(t)\} + \text{tr}\{X(t)\mathcal{J}(t)\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}\}. \end{aligned} \quad (10.111)$$

Подобным же образом мы можем вывести уравнение движения для импульсно-координатной корреляционной функции, а именно

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P(t)X \rangle &= i \operatorname{tr}\{[H_S, P(t)]\mathcal{P}V(t)\} + \\ &+ \operatorname{tr}\{P(t)\mathcal{K}(t)\mathcal{P}V(t)\} + \operatorname{tr}\{P(t)\mathcal{J}(t)\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}\}. \end{aligned} \quad (10.112)$$

Подставляя выражение для $\mathcal{K}(t)$ для гармонического осциллятора, полученное в разделе 10.2.2, мы получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений для $\langle X(t)X \rangle$ и $\langle P(t)X \rangle$:

$$\frac{d}{dt} \langle X(t)X \rangle = \langle P(t)X \rangle + I_{XX}(t), \quad (10.113)$$

$$\frac{d}{dt} \langle P(t)X \rangle = -\omega_p^2(t) \langle X(t)X \rangle - 2\lambda(t) \langle P(t)X \rangle + I_{PX}(t), \quad (10.114)$$

где неоднородные члены определяются как

$$I_{XX}(t) = \operatorname{tr}\{X(t)\mathcal{J}(t)\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}\}, \quad (10.115)$$

$$I_{PX}(t) = \operatorname{tr}\{P(t)\mathcal{J}(t)\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}\}. \quad (10.116)$$

Уравнение движения для функции корреляции $\langle P(t)X \rangle$, если отвлечься от неоднородного члена, идентично уравнению движения для наблюдаемых X и P (см. (10.96)). Это основное утверждение квантовой регрессионной теоремы. Таким образом, в пределе слабой связи, где эффектом неоднородности можно пренебречь, квантовая регрессионная теорема обладает тем же уровнем точности, как и основное уравнение. Для сильной связи уравнение движения должно быть дополнено неоднородным членом. Важно отметить, что этот результат не отменяет известного недостатка квантовой регрессионной теоремы (Grabert, 1982; Talkner, 1995; Ford, O'Connell, 1996), так как описание редуцированной динамики посредством уравнения движения свертки *не* составляет квантового марковского процесса, обладающего свойством полугруппы.

С использованием определения супероператора $\mathcal{J}(t)$ (см. (9.35)) можно показать, что неоднородный член $I_{XX}(t)$ исчезает для всех порядков по силе связи. Это можно показать прямо из точного уравнения движения Гейзенберга $\dot{X}_H(t) = P_H(t)$, которое приводит к $I_{XX}(t) \equiv 0$ в уравнении (10.113). Член $I_{PX}(t)$ вычисляется с использованием разложения по малым параметрам супероператора $\mathcal{J}(t)$, задаваемого в разделе 9.2.4. Для второго порядка по силе связи мы находим

$$I_{PX}^{(2)} = \langle X^2 \rangle \int_{-\infty}^0 D(t-s) \cos(\omega_0 s) ds - \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\infty}^0 D_1(t-s) \sin(\omega_0 s) ds. \quad (10.117)$$

Вклад четвертого порядка $I_{PX}^{(4)}$ вычислен Бройером, Каплером и Петруччионе (Breuer, Kappler, Petruccione, 2001).

Зависимость от времени $I_{PX}(t)$ изображена на рис. 10.11. В низкотемпературном режиме существуют два различных вклада в $I_{PX}(t)$: для малых времен, то есть для времен порядка обратной частоты перехода, $I_{PX}(t)$ принимает большие положительные значения. Для средних времен, то есть для времен порядка обратной частоты системы, $I_{PX}(t)$ отрицательна. В пределе $t \rightarrow \infty$ неоднородный член $I_{PX}(t)$ исчезает, а основное уравнение становится однородным. В противоположность этой характеристике, $I_{PX}(t)$ просто распадается экспоненциально на временном масштабе Ω^{-1} в высокотемпературном режиме.

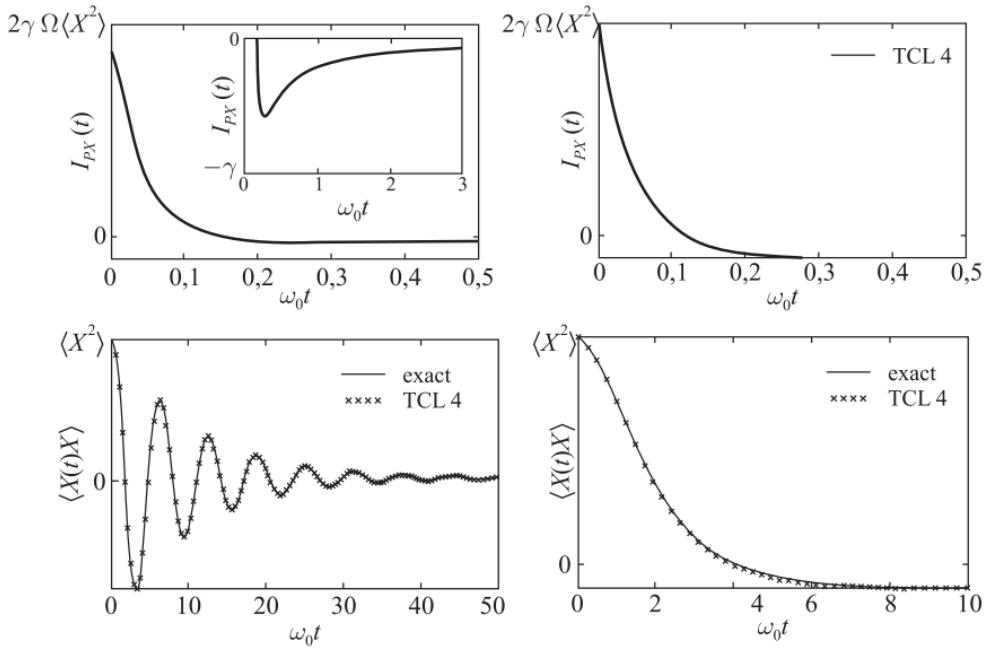


Рис. 10.11. Временная зависимость неоднородного члена $I_{PX}(t)$ (сверху) и действительная часть координаты автокорреляционной функции $\langle X(t)X \rangle$ (снизу) для низких температур и слабой связи, когда $k_B T = 0,01\omega_0$ и $\gamma = 0,1\omega_0$ (слева), и для высоких температур и средней связи, когда $k_B T = 1000\omega_0$ и $\gamma = \omega_0$ (справа). Обрезание выбирается при $\Omega = 20\omega_0$. Вклад показывает поведение на большом времени $I_{PX}(t)$ для низких температур после разрушения начального всплеска (отметим различие масштабов величин на графиках).

Такое поведение имеет важное следствие для временной эволюции координаты автокорреляционной функции. Чтобы увидеть это, мы рассмотрим уравнение движения для $\langle P(t)X \rangle$, следуя (10.114). Первый член $-\omega_p^2(t)\langle X(t)X \rangle$ приводит к большому отрицательному вкладу в поведение при малых временах, благодаря начальным биениям на физически наблюдаемой частоте $\omega_p(t)$ (см. рис. 10.6), которые могли бы привести к быстрому разрушению $\langle P(t)X \rangle$ на временном масштабе Ω^{-1} . Однако этот вклад компенсируется неоднородным членом $I_{PX}(t)$, который принимает большие положительные значения при всех температурах. Таким образом, некоторые начальные биения, которые вызываются поведением генератора $\mathcal{K}(t)$ при малых временах, компенсируются неоднородностью $\mathcal{J}(t)$.

Рис. 10.11 также показывает действительную часть автокорреляционной функции $\langle X(t)X \rangle$ в слабозатухающем и сильнозатухающем режимах. Линии соответствуют точным решениям согласно Граберту, Шрамму и Ингольду (Grabert, Schramm, Ingold 1988), а символы обозначают решение из разложения по малому параметру уравнения движения (10.114). Соответствие обоих уравнений очень хорошее для рассматриваемых параметров. Систематическое исследование диапазона законности разложения по малому параметру второго и четвертого порядков изображено на рис. 10.12. Эти рисунки показывают области в параметрическом пространстве, где относительная ошибка

$$e_r = \frac{\max_{t>0} \{|C_{\text{ex}}(t) - C_n(t)|\}}{\langle X^2 \rangle} \quad (10.118)$$

для определенного порядка приближения n меньше, чем 5 % и 1 % соответственно. Функция $C_{\text{ex}}(t)$ обозначает точную автокорреляционную функцию, а $C_n(t)$ — ее n -й порядок приближения. На этом рисунке мы также включили границы области, где уравнение (10.105) берется для $c_2 = 0,0055$; $c_4 = 0,3$ ($e_r = 5\%$) и $c_2 = 0,0013$; $c_4 = 0,15$ ($e_r = 1\%$). Как и в случае стационарной дисперсии $\langle P^2 \rangle$, это дает хорошую оценку ошибки разложения по малому параметру. Отметим, однако, что качество оценки также зависит от соотношения силы связи γ с частотой перехода Ω , так как приближение физически наблюдаемой частоты $\omega_p(t)$ и классического коэффициента затухания $\lambda(t)$ зависят от этого коэффициента.

10.2.5. Игнорирование неоднородности

Явные расчеты неоднородности $\mathcal{J}(t)$ для нефакторизованных начальных условий могут стать более утомительными, так как там содержится

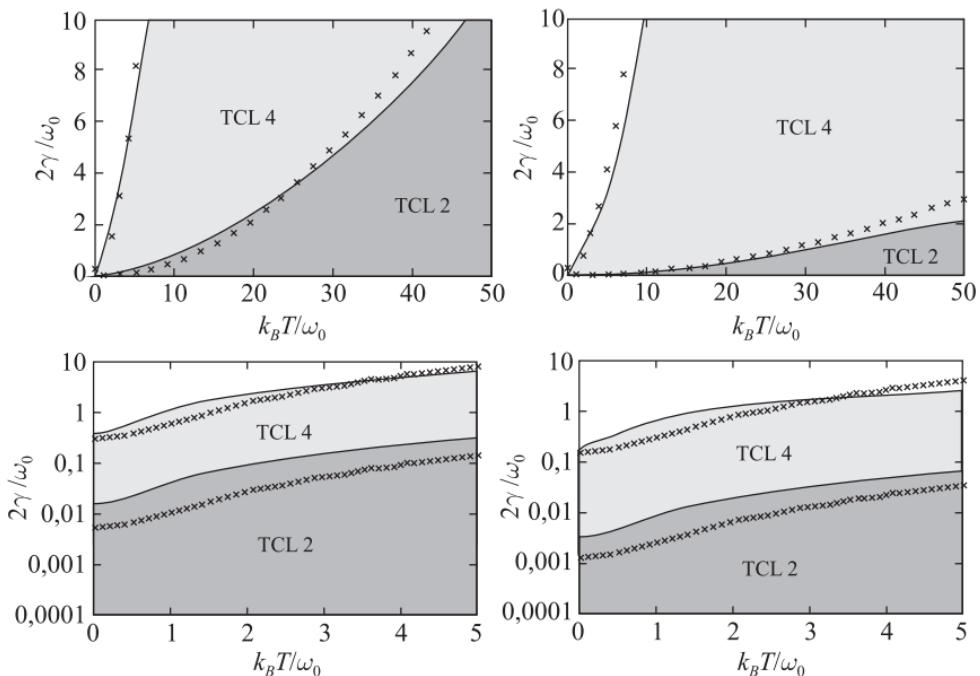


Рис. 10.12. Области в параметрическом пространстве, где относительная ошибка координаты автокорреляционной функции $\langle X(t)X \rangle$ меньше, чем 5 % (слева), и меньше, чем 1 % (справа). TCL 2 (TCL 4) обозначает решение основного уравнения за вычетом временной свертки до второго (четвертого) порядка. Крестики обозначают границы областей, где уравнение (10.105) выполняется. Частота обрезания выбирается при $\Omega = 200\omega_0$.

больше членов, чем в генераторе $\mathcal{K}(t)$. Таким образом, естественно возникает вопрос, действительно ли необходимы эти затраты или возможно пре-небречь неоднородностью. В этом разделе мы кратко обсудим два различных предложения, которые дают правильные результаты в пределе слабой связи, и покажем их недостатки для определенных параметров.

Первая возможность, которую мы хотим исследовать, представляет собой простое игнорирование корреляций между системой и окружением и допущение факторизованного начального состояния. Таким образом, уравнение движения для корреляционной функции $\langle P(t)X \rangle$ примет вид

$$\frac{d}{dt} \langle P(t)X \rangle = -\omega_p^2(t) \langle X(t)X \rangle - 2\lambda(t) \langle P(t)X \rangle. \quad (10.119)$$

Однако, как мы обсуждали в разделе 10.2.4, динамика на малом времени физически наблюдаемой частоты ω_p обладает большим начальным биением, которое приводит к усилению разрушения автокорреляционной функции. Эта характеристика изображена на рис. 10.13 (Prop1).

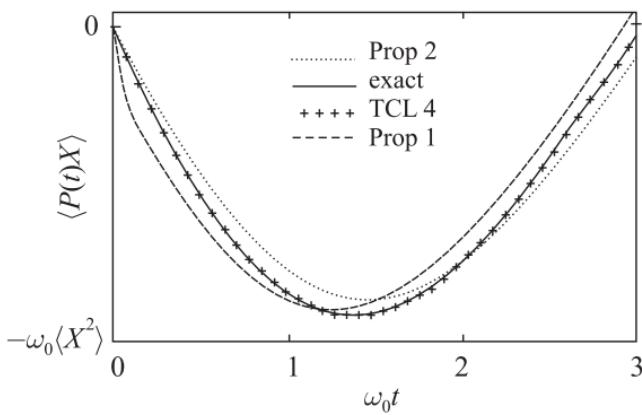


Рис. 10.13. Приближение корреляционной функции $\langle P(t)X \rangle$ определяется пренебрежением неоднородностью (см. текст для подробностей). Параметры: $k_B T / \omega_0 = 0,01$; $\gamma / \omega_0 = 0,1$ и $\Omega = 20\omega_0$.

Во втором предложении мы хотим обсудить, как избежать этой сложности. В этом подходе мы также игнорируем начальные корреляции, но, в противоположность первому подходу, временная эволюция для основного уравнения генерируется стационарным значением $\mathcal{K}(t)$. Таким образом, уравнение движения для $\langle P(t)X \rangle$ примет вид

$$\frac{d}{dt} \langle P(T)X \rangle = -\tilde{\omega}_p^2 \langle X(t)X \rangle - 2\tilde{\lambda} \langle P(t)X \rangle, \quad (10.120)$$

где

$$\tilde{\omega}_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_p(t), \quad \tilde{\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t). \quad (10.121)$$

Как показано на рис. 10.13 (см. Prop2) этот подход также приводит к значительным отклонениям от вычислений, которые принимают во внимание неоднородность. Эти выводы существуют благодаря отрицательному вкладу в $I_{PX}(t)$ (см. вставку рис. 10.11).

Таким образом, в общем случае нужно обязательно включать неоднородность в случае нефакторизованных начальных состояний. Попытка

аппроксимировать начальное состояние факторизованным может привести к дополнительным ошибкам, которые возникают при разложении генератора в более высоком порядке теории возмущений.

10.3. Спин-бозонная система

Исследование спин-бозонной системы, то есть двухуровневой системы, взаимодействующей с термостатом гармонических осцилляторов, представляет особенный интерес в теории открытых квантовых систем. Прежде всего, многие физически интересные системы могут быть аппроксимированы двухуровневой системой в низкотемпературном пределе, если пренебречь более высокими возбуждениями. Эта точка зрения детально обсуждалась Леггеттом и другими (Leggett et al., 1987) в контексте проблемы туннелирования между двумя потенциальными ямами. Другая причина широкого интереса к спин-бозонной системе заключается в том, что она представляет собой отличную модель для исследования определенных методов приближения.

10.3.1. Микроскопическая модель

Спин-бозонная система описывает двухуровневую систему, которая линейно связана с термостатом гармонических осцилляторов. Существенным отличием от модели, рассматриваемой в разделе 10.1, является то, что связывание система-резервуар не рассматривается в пределах приближения вращающейся волны. Гамильтониан сложной системы, таким образом, принимает вид

$$H = H_S + H_B + H_I, \quad (10.122)$$

$$H_S = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z, \quad (10.123)$$

$$H_B = \sum_n \left(\frac{1}{2m_n} p_n^2 + \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 x_n^2 \right), \quad (10.124)$$

$$H_I = -\frac{1}{2}\sigma_x \otimes B, \quad B = \sum_n \kappa_n x_n, \quad (10.125)$$

где H_S и H_B генерируют свободную эволюцию во времени системы и термостата соответственно, а H_I обозначает их взаимодействие. Как и в случае гармонического осциллятора (см. раздел 10.2), динамика редуцированной системы характеризуется ядром рассеяния $D(t) = i[B(t), B]$ и шумовым

ядром $D_1(t) = \langle \{B(t), B\} \rangle$ (см. (3.385) и (3.386) соответственно). Спектральная плотность $J(\omega)$ модели снова принимает вид Лоренца–Друде

$$J(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \omega^2}. \quad (10.126)$$

При таком определении константы затухания γ , размерности $D(t)$ и $D_1(t)$ равны квадрату энергии, как это должно быть для гамильтониана взаимодействия вида (10.125).

10.3.2. Релаксация начального факторизованного состояния

В этом разделе мы вычислим разложение по малому параметру генератора основного квантового уравнения для спин-бозонной системы и определим его стационарное решение. Основное квантовое уравнение для редуцированной матрицы плотности наиболее удобно записать на языке блоковского вектора $\langle \vec{\sigma}(t) \rangle$ (см. (3.223)), как показано ниже:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\sigma}(t) \rangle = A(t) \langle \vec{\sigma}(t) \rangle + 2\vec{b}(t), \quad (10.127)$$

где $A(t)$ есть зависимая от времени 3×3 матрица, а неоднородный член $\vec{b}(t)$ есть 3-вектор. Эти величины могут быть посчитаны с использованием выражений для генератора $\mathcal{K}(t)$, заданного в разделе 9.2.2. В представлении Шредингера разложение по малым параметрам $A(t)$ и $\vec{b}(t)$ принимает вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 + a_{yx}(t) & a_{yy}(t) & 0 \\ 0 & 0 & a_{zz}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_z(t) \end{pmatrix}. \quad (10.128)$$

Для второго порядка по силе связи мы получаем

$$a_{yx}^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t D_1(s) \sin(\omega_0 s) ds, \quad (10.129)$$

$$a_{yy}^{(2)}(t) = a_{zz}^{(2)}(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t D_1(s) \cos(\omega_0 s) ds, \quad (10.130)$$

$$b_z^{(2)}(t) = -\frac{1}{4} \int_0^t D(s) \sin(\omega_0 s) ds, \quad (10.131)$$

что подобно коэффициентам основного уравнения гармонического осциллятора (см. раздел 10.2.2). Отметим, однако, что член $\Delta(t)$, который приводит к существенной зависимости частотного сдвига, не представлен в модели. В этом случае нет необходимости в процедуре для явной частотной перенормировки. Вклады четвертого порядка могут быть найдены в (Breuer, Kappler, Petruccione, 2001).

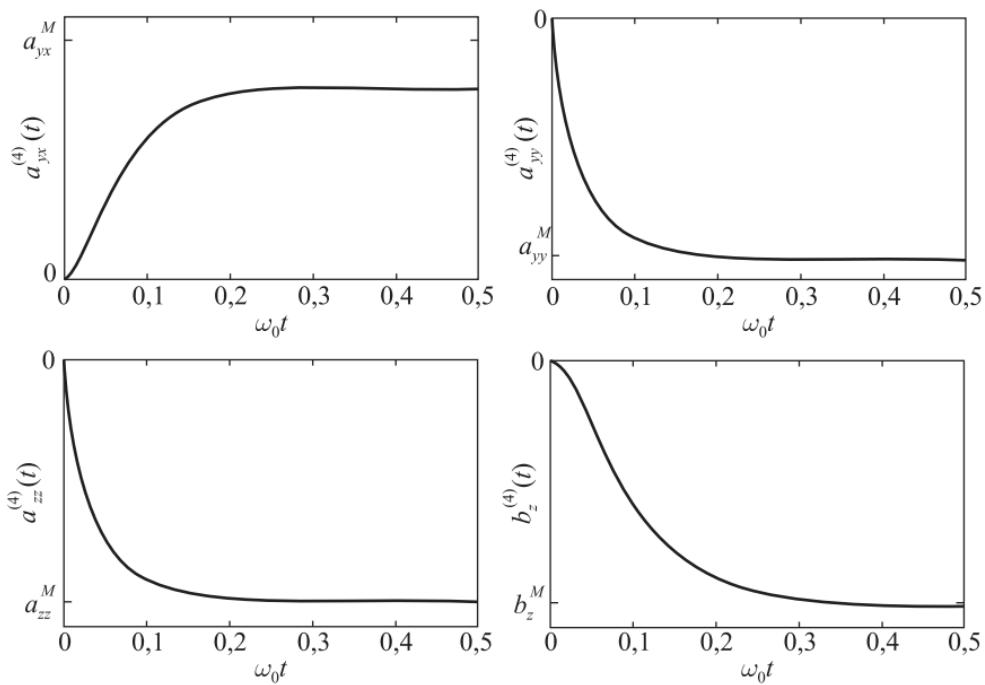


Рис. 10.14. Временная зависимость дефазировки коэффициентов $a_{yx}(t)$ и $a_{yy}(t)$ и коэффициентов релаксации $a_{zz}(t)$ и $b_z(t)$ до четвертого порядка по силе связи в режиме средней связи, когда $\gamma = 0,3\omega_0$; $\Omega = 20\omega_0$; $k_B T = 10\omega_0$.

Коэффициенты $a_{yx}(t)$ и $a_{yy}(t)$ ответственны за дефазировку двухуровневой системы, а коэффициенты $a_{zz}(t)$ и $b_z(t)$ описывают релаксацию к состоянию равновесия. Зависимость от времени этих коэффициентов до четвертого порядка связи описывается на рис. 10.14 для средней степени связывания. Отметим, что стационарные значения $a_{yx}(t)$ и $b_z(t)$ показывают значительное отклонение от марковского предела, в то время как приближение $a_{yy}(t)$ и $a_{zz}(t)$ до второго порядка достаточно точно.

В марковском режиме и в высокотемпературном пределе $k_B T \gg \Omega \gg \omega_0$ матрица A и неоднородность \vec{b} могут быть аппроксимированы

$$A^M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 + \frac{\gamma k_B T}{\Omega} & -\frac{\gamma k_B T}{\omega_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma k_B T}{\omega_0} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}^M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\gamma}{4} \end{pmatrix}. \quad (10.132)$$

Важно отметить, что в этом пределе интенсивность релаксации, а также интенсивность дефазировки пропорциональны температуре, в противоположность гармоническому осциллятору, где температура окружения создает лишь эффект диффузионного поведения системы, но не рассеяние.

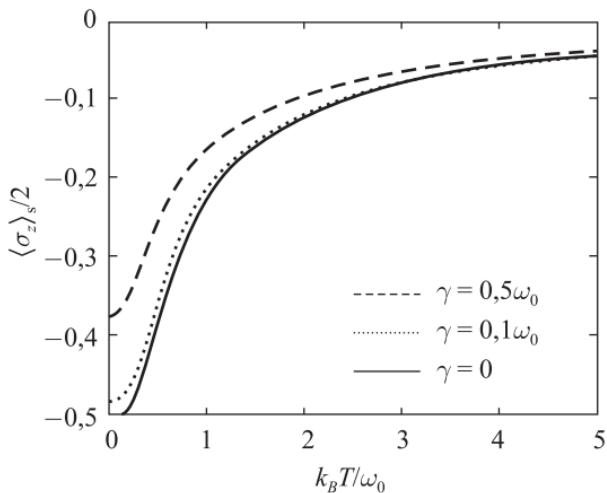


Рис. 10.15. Температурная зависимость стационарного значения $\langle \sigma_z \rangle_s$ при различных силах связи. Заселенность возбужденного состояния $\rho_{11} = (1 + \langle \sigma_z \rangle_s)/2$.

Стационарное состояние двухуровневой системы быстро получается с использованием уравнений (10.127) и (10.128)

$$\langle \sigma_x \rangle_s = \langle \sigma_y \rangle_s = 0, \quad \langle \sigma_z \rangle_s = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2b_z(t)}{a_{zz}(t)}. \quad (10.133)$$

Температурная зависимость $\langle \sigma_z \rangle_s$ изображена на рис. 10.15. При $\gamma = 0$ мы получим термодинамический предел, в котором редуцированная матрица плотности определяется распределением Больцмана. При $\gamma > 0$ мы находим отклонения от большинственного распределения. В частности, заселен-

нность возбужденного состояния не исчезает в пределе $T \rightarrow 0$, в противоположность предсказаниям для вычисления второго порядка. Эти результаты качественно подобны результатам, полученным Б. Де Раедтом и Х. Де Раедтом (De Raedt, De Raedt, 1984).

Для того чтобы амплитуда относительной ошибки стационарного состояния могла быть определена оцениванием относительной ошибки коэффициентов a_{zz} и b_z , используется процедура, намеченная в разделе 9.2.5. Таким образом, относительная ошибка для второго и четвертого порядков может быть оценена как

$$\tilde{e}_r^{(2)} \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{a_{zz}^{(4)}(t) - a_{zz}^{(2)}(t)}{a_{zz}^{(2)}(t)} \right| + \left| \frac{b_z^{(4)}(t) - b_z^{(2)}(t)}{b_z^{(2)}(t)} \right| \right), \quad (10.134)$$

$$\tilde{e}_r^{(4)} \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{a_{zz}^{(4)}(t) - a_{zz}^{(2)}(t)}{a_{zz}^{(2)}(t)} \right|^2 + \left| \frac{b_z^{(4)}(t) - b_z^{(2)}(t)}{b_z^{(2)}(t)} \right|^2 \right). \quad (10.135)$$

Как и в случае гармонического осциллятора, мы ожидаем, что оценка относительной ошибки для второго порядка дает качественно верный результат, в то время как оценка ошибки для четвертого порядка приводит лишь к результату правильного порядка для амплитуды.

На рис. 10.16 мы показываем области в параметрическом пространстве, где оценки ошибок ниже 5 % и 1 % соответственно. Для низких и средних температур характеристика оценки ошибок по существу такая же, как и для гармонического осциллятора. Однако в высокотемпературном пределе $k_B T \gg \Omega$ сила максимального связывания пропорциональна $1/T$. Это происходит благодаря тому факту, что коэффициент релаксации $a_{zz}(t)$ и коэффициент дефазировки $a_{yy}(t)$ пропорциональны температуре в этом пределе. Таким образом, когда мы рассматриваем высокотемпературный предел, мы должны зафиксировать произведение γT для того, чтобы получить значимые результаты (Chang, Skinner, 1993). Такое поведение сильно отличается от случая гармонического осциллятора, где температура имеет влияние только на диффузию, но не на затухание.

10.3.3. Равновесные корреляционные функции

В этом разделе мы посчитаем равновесную корреляционную функцию $\langle \sigma_x(t) \sigma_x \rangle$. Для этого мы рассмотрим уравнения движения для корреляционных функций $\langle \sigma_x(t) \sigma_x \rangle$ и $\langle \sigma_y(t) \sigma_x \rangle$, которые могут быть выведены из сопряженного основного уравнения. Следуя правилу, описанному в раз-

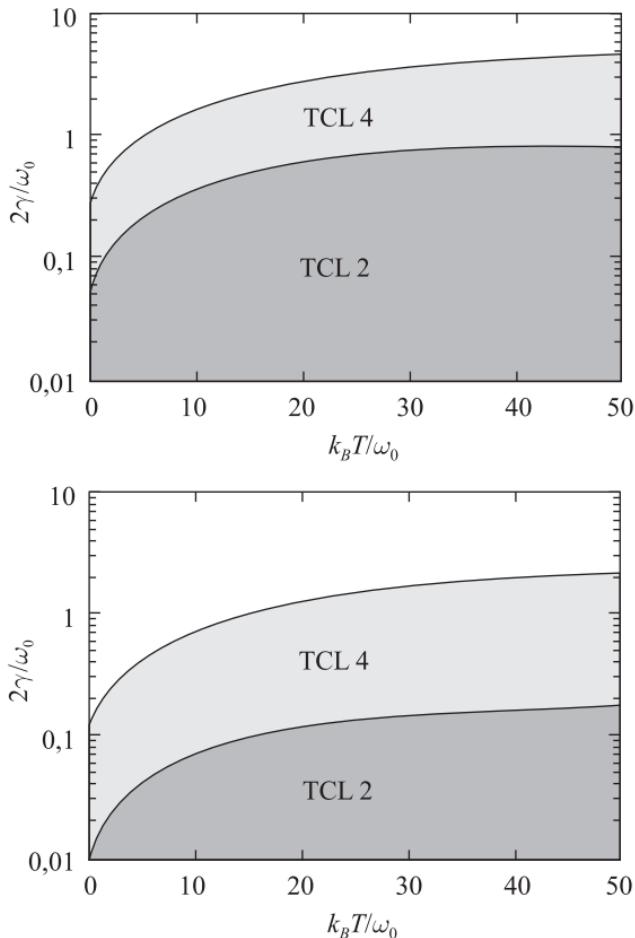


Рис. 10.16. Области параметрического пространства, где оцененные относительные ошибки $\hat{e}_r^{(2)}$ и $\hat{e}_r^{(4)}$ стационарного значения $\langle \sigma_z \rangle_s$ меньше 5 % (сверху) и меньше 1 % (снизу). Обрезание задается при $\Omega = 20\omega_0$.

деле 10.2.4, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_x(t) \sigma_x \rangle = -\omega_0 \langle \sigma_y(t) \sigma_x \rangle + I_{XX}(t), \quad (10.136)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_y(t) \sigma_x \rangle = [\omega_0 + a_{yx}(t)] \langle \sigma_x(t) \sigma_x \rangle + a_{yy}(t) \langle \sigma_y(t) \sigma_x \rangle + I_{YX}(t), \quad (10.137)$$

где неоднородности определяются как

$$I_{XX}(t) = \text{tr}\{\sigma_x(t)\mathcal{J}(t)\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}\}, \quad (10.138)$$

$$I_{YX}(t) = \text{tr}\{\sigma_y(t)\mathcal{J}(t)\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}\}. \quad (10.139)$$

Используя соответствующее разложение для $\mathcal{J}(t)\mathcal{P}\rho_{\text{eq}}$ (см. раздел 9.2.4), мы получаем $I_{XX}(t) \equiv 0$ для всех порядков силы связи. Это, конечно, прямое следствие точного уравнения движения Гейзенberга $\dot{\sigma}_x = -\omega_0\sigma_y$. Вклад второго порядка в неоднородность $I_{YX}(t)$ находится как

$$I_{YX}^{(2)} = \frac{i}{2}\langle\sigma_z\rangle_s \int_{-\infty}^0 D_1(t-s) \cos(\omega_0 s) ds - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^0 D(t-s) \sin(\omega_0 s) ds. \quad (10.140)$$

Вклад четвертого порядка I_{YX} может быть найден согласно (Breuer, Kappeler, Petruccione, 2001).

Рис. 10.17 показывает временную зависимость корреляционной функции $\langle\sigma_x(t)\sigma_x\rangle$ в низко- и высокотемпературных режимах. Марковское приближение дает качественно хорошие результаты для действительной части корреляционных функций, в то время как вклад четвертого порядка вносит значительные коррекции в мнимую часть. Отметим, что в низкотемпературном режиме параметры выбираются таким способом, что система находится в условиях слабого затухания, в то время как в высокотемпературном режиме мы выбираем силу связывания для системы, которая находится в условиях сильного затухания. В последнем случае в марковском приближении находим, что динамика корреляционной функции является биэкспоненциальной, где быстрые и медленные интенсивности распада могут аппроксимироваться как

$$r_{\text{быстр.}} = \frac{\gamma k_B T}{\omega_0}, \quad r_{\text{медл.}} = \frac{\omega_0^3}{\gamma k_B T}. \quad (10.141)$$

10.3.4. Переход от когерентного к некогерентному движению

Особенно в контексте макроскопической квантовой когерентности переход из когерентного в некогерентное движение очень важен: квантовая когерентность может наблюдаться лишь для силы связи, которая значительно ниже критического затухания γ_c , которое определяет существование перехода.

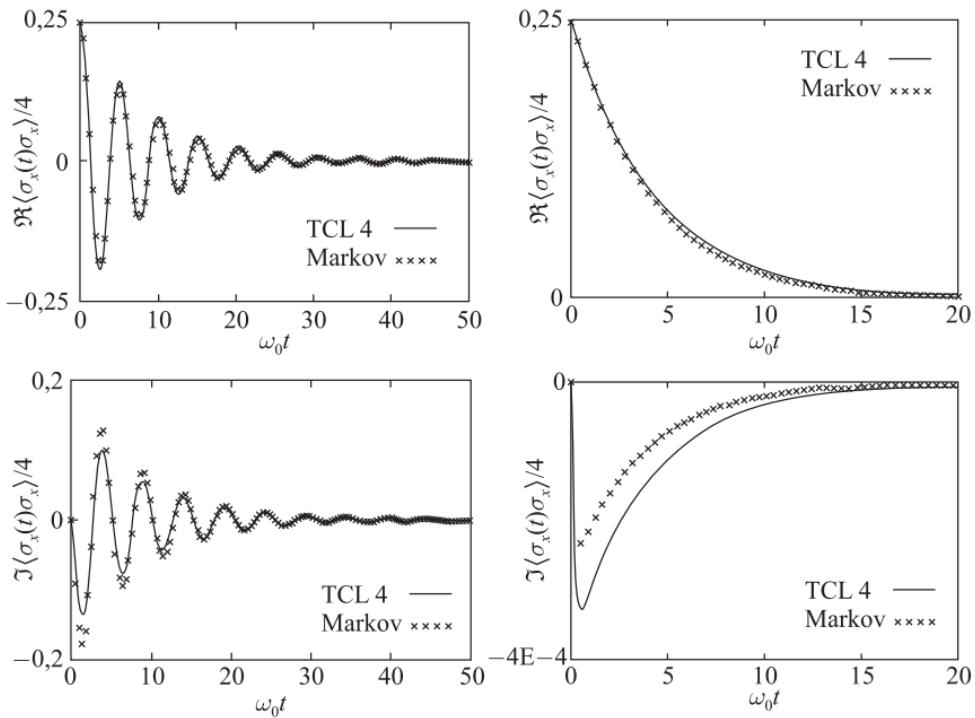


Рис. 10.17. Действительная и мнимая части корреляционной функции $\langle \sigma_x(t) \sigma_x \rangle$ в низкотемпературном режиме, когда $k_B T / \omega_0 = 0,1; \gamma = 0,5\omega_0$ (слева), и в высокотемпературном режиме, когда $k_B T / \omega_0 = 50; \gamma = 0,2\omega_0$ (справа). Обрезание выбирается при $\Omega = 20\omega_0$.

Как отмечено Эггером, Грабертом и Вайсом (Egger, Grabert, Weiss, 1997), критическая сила затухания γ_c зависит от используемого критерия для определения когерентного движения. Так как мы интересуемся лишь порядком амплитуды критической силы связи, мы берем простой критерий, который не зависит от начального приготовления, который справедлив для математического ожидания $\langle \sigma_x(t) \rangle$, а также для корреляционной функции $\langle \sigma_x(t) \sigma_x(0) \rangle$. Этот критерий основан на собственных значениях матрицы

$$\tilde{A} = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 + a_{yx}(t) & a_{yy}(t) \end{pmatrix}, \quad (10.142)$$

которая определяет динамику $\langle \sigma_x(t) \rangle$ и $\langle \sigma_x(t) \sigma_x(0) \rangle$ (см. (10.127) и (10.136)). Если оба собственных значения действительны, то величины, согласно рас-

смотрению, затухают экспоненциально в пределе большого времени, в то время как они осциллируют, если оба значения комплексные. Таким образом, мы определяем критическое затухание γ_c условием

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [a_{yy}^2(t) - 4\omega_0(\omega_0 + a_{yx}(t))] = 0. \quad (10.143)$$

Рис. 10.18 показывает критическую силу затухания для аппроксимации второго и четвертого порядков, как функцию температуры. В пределе $T \rightarrow 0$ оцениваемая относительная ошибка $a_{yx}^{(4)}$ меньше, чем 1 %, в то время как оцениваемая ошибка $a_{yy}^{(4)}(t)$ равна 18 %. Относительная ошибка γ_c ожидается того же порядка величины.

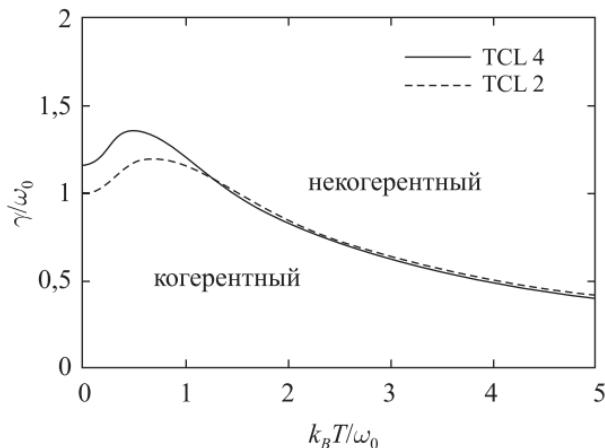


Рис. 10.18. Переход из когерентного движения в некогерентное для приближения по малым параметрам до второго и четвертого порядков. Обрезание выбирается при $\Omega = 20\omega_0$.

Библиография

- Breuer, H. P., Kappler, B. and Petruccione, F. (1999). Stochastic wave-function method for non-Markovian quantum master equations. *Phys. Rev.*, **A59**, 1633–1643.
- Breuer, H. P., Kappler, B. and Petruccione, F. (2001). The time-convolutionless projection operator technique in the quantum theory of dissipation and decoherence. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **291**, 36–70.

- Chang, T.-M. and Skinner, J.L. (1993). Non-Markovian population and phase relaxation and absorption lineshape for a two-level system strongly coupled to a harmonic quantum bath. *Physica A*, **193**, 483–539.
- De Raedt, B. and De Raedt, H. (1984). Thermodynamics of a two-level system coupled to bosons. *Phys. Rev.*, **B29**, 5325–5336.
- Egger, R., Grabert, H. and Weiss, U. (1997). Crossover from coherent to incoherent dynamics in damped quantum systems. *Phys. Rev.*, **E55**, R3809–R3812.
- Ford, G. W. and O'Connell, R. F. (1996). There is no quantum regression theorem. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 798–801.
- Garraway, B. M. (1997). Nonperturbative decay of an atomic system in a cavity. *Phys. Rev.*, **A55**, 2290–2303.
- Grabert, H. (1982). Nonlinear relaxation and fluctuations of damped quantum systems. *Z. Phys.*, **B49**, 161–172.
- Grabert, H., Schramm, P. and Ingold, G.-L. (1988). Quantum Brownian motion: The functional integral approach. *Phys. Rep.*, **168**, 115–207.
- Haake, F. and Reibold, R. (1985). Strong damping and low-temperature anomalies for the harmonic oscillator. *Phys. Rev.*, **A32**, 2462–2475.
- Hu, B. L., Paz, J. P. and Zhang, Y. (1992). Quantum Brownian motion in a general environment: Exact master equation with nonlocal dissipation and colored noise. *Phys. Rev.*, **D45**, 2843–2861.
- Karrlein, R. and Grabert, H. (1997). Exact time evolution and master equations for the damped harmonic oscillator. *Phys. Rev.*, **E55**, 153–164.
- Leggett, A. J., Chakravarty, S., Dorsey, A. T., Fisher, M. P. A., Garg, A. and Zwerger, W. (1987). Dynamics of the dissipative two-state system. *Rev. Mod. Phys.*, **59**, 1–85.
- Sandulescu, A. and Scutaru, H. (1987). Open quantum systems and the damping of collective modes in deep inelastic collisions. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **173**, 277–317.
- Talkner, P. (1995). The failure of the quantum regression hypothesis. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **167**, 390–436.
- Weisskopf, V. and Wigner, E. (1930). Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie. *Z. Phys.*, **63**, 54–73.

Часть V

Релятивистские квантовые процессы

ГЛАВА 11

Измерения в релятивистской квантовой механике

В релятивистской области квантовая теория измерений представляет несколько новых интересных особенностей, которые не встречаются в нерелятивистской теории (Landau, Peierls, 1931; Bohr, Rosenfeld, 1933; Bloch, 1967). Настоящая глава посвящена систематическому изучению измерения и редукции состояния в релятивистской квантовой механике. Элементарное введение в проблему может быть найдено в (Breuer, Petruccione, 1999).

Основная идея, лежащая в основе этой главы, — это рассмотрение состояния квантовой системы как функционала на множестве пространственнонподобных гиперповерхностей в пространстве Минковского. Эта идея была развита в релятивистской теории Дираком, Швингером и Томонагой с целью дать ясную ковариантную формулировку уравнения для эволюционирующего во времени вектора состояния, известного как уравнение Швингера–Томонаги. То же правило оказывается очень полезным в систематическом рассмотрении измерения и редукции состояния в релятивистской квантовой механике, как было показано в ряде статей Аароновым и Альбертом (Aharonov, Albert, 1980, 1981, 1984a, 1984b). В самом деле ковариантная формулировка постулата редукции получается, если принимается во внимание состояние редукции, как имеющее место среди таких пространственнонподобных гиперповерхностей, которые пересекаются с классическим случайным событием, задаваемым данными локального измерения. Как это продемонстрировано в настоящей главе, данная концепция приводит к последовательной формулировке для эволюционирующего состояния квантовой системы, что обусловлено одним или многими локальными измерениями, произвольно распределенными в пространстве-времени, и к соответствующим совместным вероятностным распределениям, содержащим произвольные локальные и нелокальные квантовые корреляции. Мы также развили в этом контексте релятивистскую формулировку непрерывных измерений на языке ковариантного КДП для вектора состояния.

Важно обратить внимание на то, что релятивистская квантовая теория измерения имеет дело с вероятностью нелокальных измерений. Это было показано Аароновым, Альбертом и Вайдманом (Aharonov, Albert, Vaidman, 1986). Оказывается, что можно провести измерение определенных нелокальных величин без измерения локальных свойств системы. Такие измерения выполняются как непрямые измерения, вызываемые запутанными квантовыми зондами. Здесь мы детально разберем измерение нелокальных наблюдаемых и верификацию нелокальных запутанных квантовых состояний.

Как будет видно, возможность измерения нелокальных величин сильно ограничена принципом причинности. Эти ограничения могут быть сформулированы с помощью теоремы Попеску и Вайдмана (Popescu, Vaidman, 1994), которая, по существу, устанавливает, что нелокальные измерения непременно должны стирать локальную информацию для того, чтобы быть совместимыми с принципом причинности. Настоящая глава содержит доказательство этой теоремы и детальное обсуждение ее физических следствий. В частности, можно установить, что только определенный класс нелокальных операторов разрешает неразрушающее измерение, которое согласуется с постулатом Неймана – Лёдерса.

Квантовая теория измерения, таким образом, приводит к важным следствиям для представлений, наблюдаемых и состояний, если они комбинируются с требованиями специальной теории относительности. Будет представлено несколько примеров приложения общей теории. Кроме того, будет рассматриваться приготовление состояний, идея обменных измерений и передача когерентного квантового состояния, известная как квантовая телепортация.

11.1. Уравнение Швингера – Томонаги

В дальнейшем мы используем запись $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ для пространственно-временных координат точки x в пространстве Минковского \mathbb{R}^4 , где μ пробегает от 0 до 3. Первая компонента $x^0 = t$ есть координата времени, а $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ обозначает пространственные координаты. Мы выбираем единицы так, что $\hbar = c = 1$, где c – скорость света. Инвариант Лоренца скалярного произведения двух 4-векторных x и y определяется как

$$xy = x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad (11.1)$$

где $g_{\mu\nu}$ обозначает метрический тензор, а по повторяющимся индексам производится суммирование.

В представлении взаимодействия эволюция во времени вектора состояния $|\Psi(t)\rangle$ управляется уравнением Шредингера

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = -iH_I(t)|\Psi(t)\rangle, \quad (11.2)$$

где

$$H_I(t) = \int \mathcal{H}(t, \vec{x}) d^3x \quad (11.3)$$

есть представление взаимодействия для гамильтониана, а $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(t, \vec{x})$ обозначает плотность гамильтониана. Для простоты мы исследуем здесь теории, в которых нет связей, содержащих производные, кроме того, плотность гамильтониана полагается преобразующейся, как скаляр при преобразованиях Лоренца.

11.1.1. Состояния как функционал пространственноподобных гиперповерхностей

В заданной фиксированной системе координат $|\Psi(t)\rangle$ характеризует состояние квантово-механической системы при фиксированном времени $x^0 = t$ и, таким образом, позволяет провести вычисление математических ожиданий для всех наблюдаемых, которые локализованы на трехмерной гиперповерхности, задаваемой $x^0 = t = \text{const}$. Релятивистское инвариантное обобщение этой концепции заключается в том, что вектор состояния ассоциируется с общей трехмерной пространственноподобной гиперповерхностью σ . Такая гиперповерхность определяется трехмерным многообразием в пространстве Минковского, которое расширяется до бесконечности во всех пространственноподобных направлениях и которое в каждой точке $x \in \sigma$ имеет единичный времеподобный нормальный вектор $n^\mu(x)$, удовлетворяющий

$$n_\mu(x)n^\mu(x) = 1, \quad n^0(x) \geq 1. \quad (11.4)$$

Вектор состояния становится функционалом

$$|\Psi\rangle = |\Psi(\sigma)\rangle \quad (11.5)$$

на пространстве таких гиперповерхностей. То же справедливо для матрицы плотности системы, которая тоже сводится к функционалу

$$\rho = \rho(\sigma) \quad (11.6)$$

на множестве пространственноподобных гиперповерхностей.

Соответствующее обобщение уравнения (11.2) есть уравнение Швингера–Томонаги для вектора состояния (Tomonaga, 1946, 1947; Schwinger, 1948; Schweber, 1961)

$$\frac{\delta|\Psi(\sigma)\rangle}{\delta\sigma(x)} = -i\mathcal{H}(x)|\Psi(\sigma)\rangle, \quad (11.7)$$

и аналогично для матрицы плотности

$$\frac{\delta\rho(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = -i[\mathcal{H}(x), \rho(\sigma)]. \quad (11.8)$$

Уравнение Швингера–Томонаги является функциональным дифференциальным уравнением. Оно может быть рассмотрено как дифференциальное уравнение в континуальном семействе переменных времени. Каждая точка $x \in \sigma$ может быть представлена в специальной системе координат как $x^\mu = (x^0(\vec{x}), \vec{x})$ так, что каждая точка пространства \vec{x} имеет собственную переменную времени $x^0 = x^0(\vec{x})$. Уравнения (11.7) и (11.8) включают отклонение $\delta\sigma$ гиперповерхности σ , в которой эти переменные времени изменяются независимо, с тем лишь ограничением, что $\sigma + \delta\sigma$ снова есть пространственноподобная гиперповерхность.

Формально функциональная производная $\delta/\delta\sigma(x)$ в уравнениях (11.7) и (11.8) определяется как показано ниже (см. рис. 11.1). Рассмотрим некоторую точку $x \in \sigma$ и бесконечно малое отклонение $\sigma \rightarrow \sigma + \delta\sigma$ гиперповерхности вблизи x . Объем четырехмерной пространственно-временной области, расположенной между σ и $\sigma + \delta\sigma$, будет обозначаться $\Omega(x)$. Тогда мы определяем для любого функционала $F(\sigma)$

$$\frac{\delta F(\sigma)}{\delta\sigma(x)} \equiv \lim_{\Omega(x) \rightarrow 0} \frac{F(\sigma + \delta\sigma) - F(\sigma)}{\Omega(x)}. \quad (11.9)$$

Для того чтобы дать явный пример такого рода производной, мы рассмотрим некоторое векторное поле $\Gamma_\mu(x)$ и определим функционал

$$F(\sigma) \equiv \int_{\sigma} n^\mu(x)\Gamma_\mu(x)d\sigma(x). \quad (11.10)$$

Здесь интегрирование выполняется по гиперповерхности σ с помощью лоренцевского инварианта элемента поверхности $d\sigma(x)$ на σ , который порождается лоренцевской метрикой. Явно

$$d\sigma(x) = \frac{d^3x}{n^0(x)}, \quad (11.11)$$

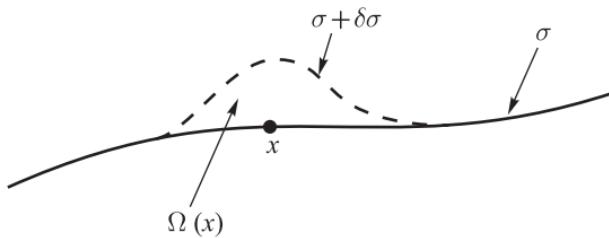


Рис. 11.1. Иллюстрация определения (11.9) функциональной производной $\delta/\delta\sigma(x)$. Рисунок показывает некоторую малую вариацию $\delta\sigma$ пространственноподобной поверхности σ вблизи точки x так, что σ и $\sigma + \delta\sigma$ включают в себя четырехмерный пространственно-временной объем $\Omega(x)$.

где $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$, а $n^0(x)$ есть компонента времени нормального единичного вектора $n^\mu(x)$ в точке x на σ . Таким образом, $F(\sigma)$ есть поток векторного поля $\Gamma_\mu(x)$ через гиперповерхность σ . Используя определение (11.9), мы находим функциональную производную

$$\begin{aligned} \frac{\delta F(\sigma)}{\delta\sigma(x)} &= \lim_{\Omega(x) \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega(x)} \left[\int_{\sigma+\delta\sigma} n^\mu(x') \Gamma_\mu(x') d\sigma(x') - \int_{\sigma} n^\mu(x') \Gamma_\mu(x') d\sigma(x') \right] = \\ &= \lim_{\Omega(x) \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega(x)} \int_{\Omega(x)} \partial^\mu \Gamma_\mu(x') d^4x' = \partial^\mu \Gamma_\mu(x), \end{aligned} \quad (11.12)$$

где мы использовали теорему Гаусса на втором шаге. Четырехмерный пространственно-временной интеграл расширяется на всю область, окружающую гиперповерхностями σ и $\sigma + \delta\sigma$. Этот очевидный результат утверждает, что изменение в потоке через σ , который является следствием бесконечно малого изменения σ вблизи x , задается дивергенцией поля в x . Для векторного поля, удовлетворяющего $\partial^\mu \Gamma_\mu(x) = 0$, это означает, что соответствующий поток $F(\sigma)$ не зависит от σ .

Уравнение Швингера–Томонаги (11.7) или (11.8), очевидно, ковариантно, так как и плотность гамильтониана и $\mathcal{H}(x)$ и функциональная производная $\delta/\delta\sigma(x)$ преобразуются как скаляры при преобразованиях Лоренца. Будучи уравнением в семействе континуальных переменных, уравнение Швингера–Томонаги должно удовлетворять определенному интегральному условию для того, чтобы существовало решение (Schweber, 1961). В прямой аналогии со случаем дифференциального уравнения в частных производных ограниченной размерности необходимое условие интегрируемости



Рис. 11.2. Набросок вариации второго порядка, включенной в условие интегрируемости (11.13). Находясь на той же гиперповерхности σ , точки x и y разделены пространственноподобным расстоянием. Для того чтобы уравнение Швингера–Томонаги было интегрируемым, порядок вариаций вблизи x и y не должен быть важен, что обеспечивается микропричинностью.

для уравнения Швингера–Томонаги принимает вид

$$\frac{\delta^2 \rho(\sigma)}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y)} - \frac{\delta^2 \rho(\sigma)}{\delta \sigma(y) \delta \sigma(x)} = 0, \quad (11.13)$$

где точки x и y расположены на той же гиперповерхности σ и, таким образом, отделены пространственноподобным интервалом (см. рис. 11.2). Условия интегрируемости являются прямым следствием требования микропричинности для плотности гамильтониана, которое устанавливает, что $\mathcal{H}(x)$ и $\mathcal{H}(y)$ коммутируют для пространственноподобных интервалов (Weinberg, 1995)

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)] = 0 \quad \text{при } (x - y)^2 < 0. \quad (11.14)$$

Действительно, используя тождество Якоби, мы непосредственно получаем из условия микропричинности, что

$$\frac{\delta^2 \rho(\sigma)}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y)} - \frac{\delta^2 \rho(\sigma)}{\delta \sigma(y) \delta \sigma(x)} = [[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)], \rho(\sigma)] = 0. \quad (11.15)$$

Условие интегрируемости гарантирует, что уравнение Швингера–Томонаги имеет однозначное решение $\rho(\sigma)$, вместе с тем соответствующая начальная матрица плотности $\rho(\sigma_0)$ определена на начальной гиперповерхности σ_0 . Формально это решение может быть записано как

$$\rho(\sigma) = U(\sigma, \sigma_0) \rho(\sigma_0) U^\dagger(\sigma, \sigma_0), \quad (11.16)$$

где мы ввели унитарный оператор эволюции

$$U(\sigma, \sigma_0) = T_{\leftarrow} \exp \left[-i \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathcal{H}(x) d^4 x \right]. \quad (11.17)$$

Как обычно, T_{\leftarrow} обозначает хронологически упорядочивающий во времени оператор.

11.1.2. Расслоения пространства-времени

Расслоение пространства Минковского определяется гладким однопараметрическим семейством

$$\mathcal{F} = \{\sigma(\tau)\} \quad (11.18)$$

пространственноподобных гиперповерхностей $\sigma(\tau)$ с тем свойством, что каждая координата пространства-времени x находится точно на одной гиперповерхности семейства. Если мы обозначим последнюю σ_x , это значит, что мы имеем $\sigma_x = \sigma(\tau)$ для точно одного параметрического значения.

Заданное расслоение $\sigma(\tau)$ порождает семейство векторов-состояний

$$|\Psi(\tau)\rangle = |\Psi(\sigma(\tau))\rangle. \quad (11.19)$$

Уравнение Швингера–Томонаги может быть сформулировано как интегральное уравнение

$$|\Psi(\tau)\rangle = |\Psi(0)\rangle - i \int_{\sigma_0}^{\sigma(\tau)} \mathcal{H}(x) |\Psi(\sigma_x)\rangle d^4x. \quad (11.20)$$

Четырехмерное интегрирование расширяется на область, окруженную начальной гиперповерхностью $\sigma_0 = \sigma(\tau = 0)$ и гиперповерхностью $\sigma(\tau)$ семейства, которое всецело лежит в будущем σ_0 .

Гиперповерхности $\sigma(\tau)$ расслоения могут быть без труда определены с помощью неявного выражения вида

$$f(x, \tau) = 0, \quad (11.21)$$

где $f(x, \tau)$ есть гладкая скалярная функция. С соответствующей нормировкой f мы можем допустить, что единичный нормальный вектор $n_\mu(x)$ в точке $x \in \sigma(\tau)$ задается как

$$n_\mu(x) = \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x^\mu}. \quad (11.22)$$

Из уравнений (11.20), (11.21) и (11.22) следует, что $|\Psi(\tau)\rangle$ подчиняется уравнению движения

$$\frac{d}{d\tau} |\Psi(\tau)\rangle = -i \int_{\sigma(\tau)} \left| \frac{\partial f}{\partial \tau} \right| \mathcal{H}(x) |\Psi(\tau)\rangle d\sigma(x) \equiv -i H(\tau) |\Psi(\tau)\rangle, \quad (11.23)$$

где интегрирование выполняется по гиперповерхности $\sigma(\tau)$ расслоения. Это очевидная ковариантная форма уравнения Шредингера (11.2). Для того чтобы доказать это, мы сначала отметим, что для двух гиперповерхностей расслоения, соответствующих двум бесконечно мало разделенным параметрическим значениям τ и $\tau + d\tau$, уравнение (11.20) дает

$$d|\Psi(\tau)\rangle = |\Psi(\tau + d\tau)\rangle - |\Psi(\tau)\rangle = -i \int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(\tau+d\tau)} \mathcal{H}(x)|\Psi(\tau)\rangle d^4x. \quad (11.24)$$

При использовании $d^4x = d\sigma(x)|n_0 \partial x_0 / \partial \tau|d\tau = d\sigma(x)|\partial f / \partial \tau|d\tau$ непосредственно приходим к уравнению (11.23).

В качестве примера рассмотрим расслоение посредством семейства параллельных гиперповерхностей $\sigma(\tau)$, задаваемых через уравнение

$$f(x, \tau) \equiv nx - \tau = 0, \quad (11.25)$$

с постоянным нормальным единичным вектором n^μ . Такое расслоение может быть связано с наблюдателем O ,двигающимся вдоль прямой мировой линии $y(\tau) = n\tau$ с постоянной скоростью \vec{v} такой, что

$$n = \frac{dy}{d\tau} = (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (11.26)$$

есть 4-скорость наблюдателя O , где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2}}. \quad (11.27)$$

Параметр τ обозначает собственное время наблюдателя, то есть время, связанное с системой O . В каждый фиксированный момент времени τ ось времени в системе покоя наблюдателя задается единичным вектором n , в то время как мгновенное 3-пространство задается плоской, пространственноподобной гиперповерхностью $\sigma(\tau)$, которая ортогональна n и содержит точку $y(\tau)$, то есть которая определяется уравнением

$$n(x - y(\tau)) \equiv nx - \tau = 0. \quad (11.28)$$

Гиперповерхность $\sigma(\tau)$ поэтому является набором тех пространственно-временных точек x , которые наблюдатель O связывает с одной и той же координатой времени τ . Мы имеем $|\partial f / \partial \tau| = 1$ и тогда уравнение (11.23) принимает вид (Jauch, Rohrlich, 1980)

$$\frac{d}{d\tau}|\Psi(\tau)\rangle = -i \int_{\sigma(\tau)} \mathcal{H}(x)|\Psi(\tau)\rangle d\sigma(x) \equiv -iH(\tau)|\Psi(\tau)\rangle. \quad (11.29)$$

В частности, в указанной системе координат, в которой единичный нормальный вектор n совпадает с осью времени $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, это уравнение становится идентичным уравнению Шредингера (11.2). Аналогичное уравнение, конечно же, выполняется для матрицы плотности $\rho(\sigma)$.

11.2. Измерение локальных переменных

Этот раздел посвящен измерению локальных величин. Мы начинаем наше рассмотрение конструированием операции непрямого измерения отдельной точки (или отдельной локализованной пространственно-временной области) и формулируем соответствующий постулат редукции релятивистского состояния. Требования релятивистской ковариантности приводят к утверждению, что редукция состояния должна выполняться на всех пространственно-временных гиперповерхностях, которые передают классическое событие, задаваемое результатом измерения.

Это утверждение для редукции вектора состояния приводит к результату, что амплитуда вероятности становится многомерной функцией на пространственно-временном континууме. Таким образом, в релятивистской области вектор состояния (или матрица плотности), в общем, должны быть рассмотрены как функционалы на множестве пространственноподобных гиперповерхностей. Эта концепция уже была использована в предыдущем разделе при формулировке уравнения Швингера–Томонаги.

Обсудив отдельные измерения, мы обращаемся к описанию множественных измерений, выполняемых на множестве точек, которые могут быть произвольно распределены в пространстве и времени. Эволюция вектора состояния, обусловленная считыванием различных измерений, будет сформулирована на языке релятивистского ковариантного стохастического процесса. В дальнейшем показывается, что результаты измерения могут быть описаны согласованным семейством Лоренц-инвариантных совместных вероятностных распределений. Последнее содержит все локальные и нелокальные квантовые корреляции. В качестве примера мы кратко рассмотрим корреляции ЭПР-типа, которые реализуются на нелокальных запутанных квантовых состояниях. Ниже мы обсудим формулировку КДП, описывающих непрерывные измерения.

11.2.1. Операция для нелокального измерения

Мы рассмотрим некоторую наблюдаемую $A(\sigma_m)$, которая связана с пространственноподобными поверхностями σ_m и которая задается на

языке интеграла по некоторому локальному эрмитову полю $\varphi(x)$

$$A(\sigma_m) = \int_{\sigma_m} G(x)\varphi(x)d\sigma(x). \quad (11.30)$$

Здесь $G(x)$ обозначает некоторую гладкую функцию с компактным носителем вокруг некоторой точки x_m , расположенной на σ_m . Дальше мы опишем локальное измерение $A(\sigma_m)$ как непрямое измерение. Более детально, по аналогии с процедурой из раздела 2.4.6 мы полагаем, что квантовое поле $\varphi(x)$ линейно связано с обобщенным импульсом P некоторой пробной системы. Взаимодействие между полем и квантовым зондом в дальнейшем полагается локализованным в некоторой малой пространственно-временной области, содержащей носитель $G(x)$ (см. рис. 11.3). После взаимодействия обобщенная координата Q , канонически связанная с P , измеряется пробной системой. Соответствующее считывание q измерения Q и начального пробного состояния $|\phi\rangle$ тогда приводит, в общем случае, к приближенному измерению $A(\sigma_m)$.

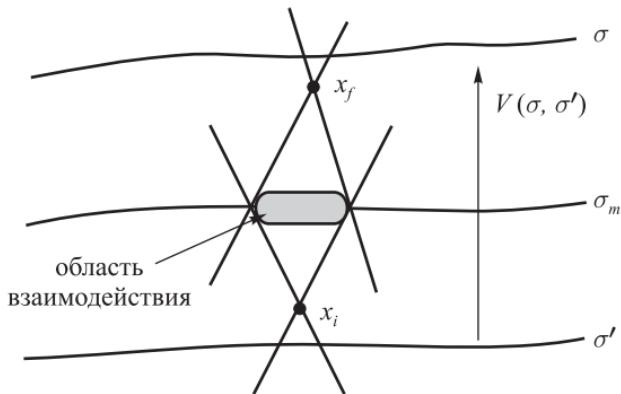


Рис. 11.3. Схематическое измерение наблюдаемой $A(\sigma_m)$ с компактным носителем на гиперповерхности σ_m . Прямой, направленный в будущее, световой конус x_i и обратный, направленный в прошлое, световой конус x_f являются касательными к области взаимодействия, как показано. Унитарный оператор $V(\sigma, \sigma')$ отображает вектор состояния на σ' в вектор состояния на σ .

Мы рассмотрим две гиперповерхности σ и σ' , которые отделены от области взаимодействия, как показано на рис. 11.3. Наше основное допущение будет в том, что локально любые наблюдаемые могут быть измерены

с помощью такой непрямой измерительной схемы, и в том, что, по меньшей мере в принципе, время взаимодействия может быть принято произвольно малым, таким, что свободной эволюцией как поля, так и квантового измерителя можно будет пренебречь. Тогда мы получим следующее выражение для унитарного оператора эволюции, который преобразует состояние всей системы (объект плюс квантовый измеритель) от гиперповерхности σ' до гиперповерхности σ

$$V(\sigma, \sigma') = \exp[-iA(\sigma_m)P]. \quad (11.31)$$

Как отмечено на рис. 11.3, гиперповерхность σ' имеет пересечение с обратным световым конусом $V_-(x_i)$, основанном в точке x_i , который определяется как

$$V_-(x_i) = \{x \in \mathbb{R}^4 | (x - x_i)^2 > 0, x^0 < x_i^0\}, \quad (11.32)$$

в то время как σ пересекается прямым световым конусом $V_+(x_f)$, основанным на x_f ,

$$V_+(x_f) = \{x \in \mathbb{R}^4 | (x - x_f)^2 > 0, x^0 > x_f^0\}. \quad (11.33)$$

Точки x_i и x_f выбираются так, что эти световые конусы касательны к области пересечения. Ясно, что σ' и σ не пересекаются с областью взаимодействия. Измерения Q выполняются на поверхностях, таких как σ , которые пересекают направленный в будущее световой конус, в вершине которого находится точка x_f .

Подобным же образом, начальное состояние поля и измерителя должны быть заданы на такой поверхности, как σ' , которая пересекает направленный в прошлое световой конус, основанный в точке x_i . Это состояние задается произведением состояний $|\Psi(\sigma')\rangle \otimes |\phi\rangle$, где $|\Psi(\sigma')\rangle$ обозначает состояние квантового поля. Итоговое состояние после взаимодействия между квантовым полем и измерителем и последующее измерение Q с результатом $Q = q$ тогда принимает вид

$$|q\rangle\langle q|V(\sigma, \sigma')(|\Psi(\sigma')\rangle \otimes |\phi\rangle) \equiv |q\rangle\Omega(q)|\Psi(\sigma')\rangle. \quad (11.34)$$

Здесь мы применили постулат проектирования состояний к идеальному Q измерению, которое проецирует вектор состояния на собственное состояние $|q\rangle$ наблюдаемой Q , соответствующее собственному значению q . Выражение, приведенное выше, подразумевает, что непрямое измерительное устройство описывается операцией

$$\Omega(q) = \langle q| \exp[-iA(\sigma_m)P] |\phi\rangle = \phi(q - A(\sigma_m)), \quad (11.35)$$

которая действует на состояния квантового поля. Здесь мы ввели волновую функцию $\phi(q) = \langle q|\phi\rangle$ начального состояния измерителя в Q представлении.

В качестве примера мы берем начальную волновую функцию измерителя в Q представлении в виде гауссовой функции (Diòsi, 1991) с дисперсией η^2 :

$$\phi(q) = (2\pi\eta^2)^{-1/4} \exp\left[-\frac{q^2}{4\eta^2}\right]. \quad (11.36)$$

Эта операция тогда находится как

$$\Omega(q) = (2\pi\eta^2)^{-1/4} \exp\left[-\frac{(q - A(\sigma_m))^2}{4\eta^2}\right]. \quad (11.37)$$

Результат показывает, что измеритель, который подготавливается изначально в гауссовом состоянии с дисперсией η^2 , делает возможным аппроксимацию измерения наблюданной $A(\sigma_m)$ с ошибкой порядка η . Мы также видим, что считывание q приводит к подразумеваемому значению для наблюданной $A(\sigma_m)$, которое задается $q = a$. Это происходит благодаря тому факту, что приведенный выше гауссиан имеет нулевое математическое ожидание и поэтому $q = a$ есть несмешенная оценка наблюданной. В дальнейшем мы всегда будем допускать, что среднее значение состояний измерителя есть ноль (что, конечно, всегда достигается вычитанием сдвига) и идентифицируется считыванием q с подразумеваемым значением a .

11.2.2. Релятивистская редукция состояния

Ситуация, рассматриваемая до сих пор, может быть идеализирована сокращением итоговой области взаимодействия до отдельной точки x_m , как показано на рис. 11.4. Устройство тогда действует как непрямое измерение локальной наблюданной $A(x_m)$. Все гиперповерхности, пересекающие прямой (обратный) световой конус, основанные на x_m , унитарно эквивалентны. Мы, таким образом, пришли к следующему постулату редукции состояний для локальных измерений. Рассмотрим некоторое раслоение $\mathcal{F} = \{\sigma(\tau)\}$ пространства-времени. Тогда редукция состояния

$$|\Psi(\sigma_m)\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}(a)}} \Omega(a) |\Psi(\sigma_m)\rangle \quad (11.38)$$

проявляется вдоль гиперповерхности σ_m расслоения, которая проходит через точку x_m . Операция локального измерения x_m теперь принимает вид

$$\Omega(a) = \phi(a - A(x_m)). \quad (11.39)$$

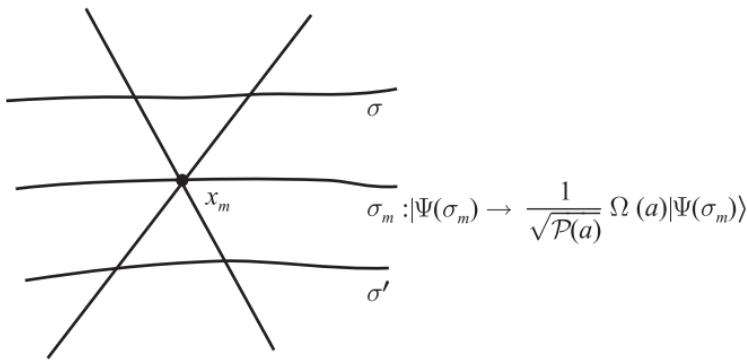


Рис. 11.4. Идеализированная картина для измерения в отдельной точке x_m пространства-времени. Гиперповерхность σ_m выбирается проходящей через x_m , в то время как σ' проходит через обратный световой конус x_m и σ — ее прямой световой конус. Операция $\Omega(a)$ описывает редукцию вектора состояния, обусловленную результатами непрямого измерения.

Редукция состояния (11.38) обусловлена считыванием $q = a$, которое распределяется согласно плотности вероятности

$$\mathcal{P}(a) = \|\Omega(a)|\Psi(\sigma_m)\rangle\|^2 = \langle\Psi(\sigma_m)|\Omega^\dagger(a)\Omega(a)|\Psi(\sigma_m)\rangle. \quad (11.40)$$

Напомним, что $\Omega^\dagger(a)\Omega(a)$ является эрмитовым и положительным оператором

$$\Omega^\dagger(a)\Omega(a) = |\phi(a - A(x_m))|^2 \geq 0, \quad (11.41)$$

который удовлетворяет условию

$$\int \Omega^\dagger(a)\Omega(a)da = \int |\phi(a - A(x_m))|^2 dq = I, \quad (11.42)$$

так что плотность $\mathcal{P}(a)$ нормируется как

$$\int \mathcal{P}(a)da = \int \langle\Psi(\sigma_m)|\Omega^\dagger(a)\Omega(a)|\Psi(\sigma_m)\rangle da = \langle\Psi(\sigma_m)|\Psi(\sigma_m)\rangle = 1. \quad (11.43)$$

Конечно, аналогичные соотношения справедливы и для смешанных состояний $\rho(\sigma_m)$.

Для различных расслоений соответствующие поверхности, которые проходят через точку x_m , конечно, могут быть различны. Представленный

выше, таким образом, постулат редукции состояний сводится к рецепту, согласно которому редукция вектора состояния возникает вдоль всех пространственноподобных гиперповерхностей, которые проходят через точку x_m , и в которой выполняется локальное измерение. Такой постулат редукции состояний впервые был сформулирован Аароновым и Альбертом (Aharonov, Albert, 1984b). Динамическая модель этого релятивистского постулата редукции разработана Брейером и Петруччионе (Breuer, Petruccione, 1998). Для расширенной области, задаваемой $G(x)$, мы можем сказать, что редукция состояния имеет место вдоль всех пространственноподобных гиперповерхностей, которые совпадают в области носителя $G(x)$ (см. рис. 11.5 и 11.6).

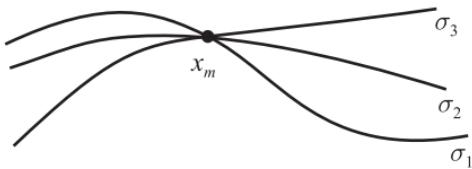


Рис. 11.5. Иллюстрация постулата редукции вектора состояния. Различные расслоения приводят к различным гиперповерхностям, проходящим через точку x_m . Редукция состояния, таким образом, происходит во *всех* пространственноподобных гиперповерхностях, проходящих через x_m .

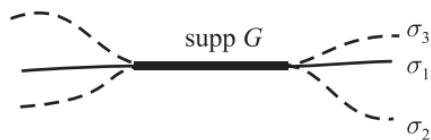


Рис. 11.6. При измерении локальной наблюдаемой с компактным носителем на некоторой гиперповерхности редукция состояния имеет место на *всех* пространственноподобных гиперповерхностях, которые совпадают на носителе измеряемой величины.

Представленный выше постулат редукции состояний, очевидно ковариантен, так как он сформулирован без ссылки на какую-либо определенную систему координат. Кроме того, вероятностное распределение $\mathcal{P}(a)$ при считывании a , также как и для операции $\Omega(a)$, примененное к вектору состояния, не зависит от определенной поверхности σ , также как и прохож-

дение через точку x_m . Будучи локально наблюдаемой, $A(x_m)$ коммутирует с плотностью гамильтониана $\mathcal{H}(x)$ для пространственноподобных интервалов, тогда $\mathcal{H}(x)$ коммутирует с операцией:

$$[\mathcal{H}(x), \Omega(a)] = 0, \quad \text{при } (x - x_m)^2 < 0. \quad (11.44)$$

Это есть условие микропричинности для операции. Рассматривая тогда некоторую гиперповерхность, которая проходит через x_m и изменяет эту поверхность вблизи любой точки x на ней, сохраняя фиксированной x_m , с помощью уравнений (11.40) и (11.44) мы получаем

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \mathcal{P}(a) = i\langle\Psi(\sigma)| [\mathcal{H}(x), \Omega^\dagger(a)\Omega(a)] |\Psi(\sigma)\rangle = 0. \quad (11.45)$$

Это доказывает, что $\mathcal{P}(a)$ на самом деле не зависит от σ , до тех пор пока σ проходит через x . То же заключение выполняется и для расширенной области, задаваемой носителем $G(x)$, с тем ограничением, конечно, что вариации оставляют инвариантным общий носитель $G(x)$.

Принимая во внимание постулат редукции вектора состояния, заданное расслоение $\mathcal{F} = \{\sigma(\tau)\}$ вызывает соответствующий стохастический процесс $|\Psi(\sigma(\tau))\rangle$ вектора состояния. Начиная с состояния $|\Psi(\sigma_0)\rangle$ на начальной гиперповерхности $\sigma_0 = \sigma(\tau = 0)$, вектор состояния непрерывно эволюционирует в соответствии с уравнением Швингера–Томонаги до тех пор, пока не достигает однозначно определяемой гиперповерхности σ_m , проходящей через x_m . Затем, в соответствии с условием, задаваемым считыванием a , происходит редукция вектора состояния (11.38) вдоль σ_m и вектор состояния начинает снова эволюционировать непрерывно. Если $\sigma(\tau)$ пересекает будущий световой конус x_m , вектор состояния на $\sigma(\tau)$, получающийся из считывания a , может быть записан как

$$|\Psi(\sigma(\tau))\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}(a)}} T_- \left(\Omega(a) \exp \left[-i \int_{\sigma_0}^{\sigma(\tau)} \mathcal{H}(x) d^4x \right] \right) |\Psi(\sigma_0)\rangle. \quad (11.46)$$

Здесь оператор хронологического упорядочения по времени T_- действует на возведенную в экспоненциальную степень локальную плотность гамильтониана $\mathcal{H}(x)$, а также на операцию $\Omega(a)$, которая содержит локальную наблюдаемую $A(x_m)$.

Стохастическая эволюция вектора состояния, сформулированная выше, очевидно, является марковской. Отметим также, что различные расслоения приводят к различным векторам состояния. Однако при одинаковых считываниях вектор состояния (11.46) зависит только от начальной

поверхности σ_0 и конечной поверхности $\sigma(\tau)$. Процесс является интегрируемым в том же смысле, что и унитарная эволюция, согласно уравнению Шингера–Томонаги. Возьмем два различных расслоения $\mathcal{F}_1 = \{\sigma_1(\tau_1)\}$ и $\mathcal{F}_2 = \{\sigma_2(\tau_2)\}$ с общими начальными и конечными гиперповерхностями σ_0 и σ соответственно. Эти расслоения в результате дают векторы состояний $|\Psi_1(\sigma_1(\tau_1))\rangle$ и $|\Psi_2(\sigma_2(\tau_2))\rangle$. Тогда интегрируемость означает, что оба расслоения приведут в результате к одному и тому же вектору состояния на общей поверхности σ , то есть

$$|\Psi_1(\sigma)\rangle = |\Psi_2(\sigma)\rangle, \quad (11.47)$$

что предполагает, что мы начинаем с того же самого начального вектора на σ_0 и что у нас одинаковые данные a . Интегрируемость процесса является прямым следствием свойства микропричинности. Это означает, что вектор состояния на самом деле является функционалом на множестве пространственноподобных гиперповерхностей.

Важно представлять себе, что история вектора состояния, как задано в уравнении (11.46), обусловлена результатом a измерения в x_m . Таким образом, это зависит от классического события, состоящего в том, что наблюдаемая Q принимает значение a . Предположим, что измерение Q выполняется непосредственно после взаимодействия между полем и квантовым измерителем и что результат сообщается через классический световой сигнал. Снятые данные a тогда доступны везде в прямом световом конусе, основанном на x_m . Последний определяется как множество точек x , удовлетворяющих $(x - x_m)^2 > 0$ и $x^0 > x_m^0$, и будет обозначаться $V_+(x_m)$ (см. (11.33)). Рассмотрим наблюдателя O , движущегося вдоль мировой линии $y = y(\tau)$, где τ обозначает собственное время. Если эта мировая линия входит в $V_+(x_m)$ за время τ_1 , то говорят, что наблюдатель знает результат измерения a измерителем и может установить историю вектора состояния (11.46), зависящую от a . Ясно, что редукция состояний (11.38) имеет место в прошлом наблюдателя, то есть при $\tau_m < \tau_1$. Это означает, что она появляется, возможно, задолго до того, как наблюдатель получает информацию об измерении.

11.2.3. Многозначные пространственно-временные амплитуды

Как мы видели, редукция вектора состояния, выражаемая уравнением (11.38), дает ковариантную историю (11.46) стохастического вектора состояния, связанную с каждым расслоением пространства-времени. Этот факт, как было продемонстрировано, является простым следствием принципа причинности. Однако нужно отметить, что постулат редукции состоя-

ния приводит к важному заключению, что амплитуды вероятности, которые определяются функционалом $|\Psi(\sigma)\rangle$, не обязательно представляют однозначные функции в пространстве Минковского (Aharonov, Albert, 1984b).

Мы проиллюстрируем это положение с помощью примера. Для этого сначала сконструируем простое устройство для эффективного измерения координаты, осуществляемое на одноэлектронном состоянии. Рассмотрим наблюдаемую

$$A = \int G(\vec{x})\psi^\dagger(x)\psi(x)d^3x, \quad x = (t_m, \vec{x}), \quad (11.48)$$

где $\psi_\alpha^\dagger(x)$ и $\psi_\alpha(x)$ обозначают полевые операторы электронного поля, α является спинорным индексом. Они рождают и уничтожают, соответственно, электрон в x и удовлетворяют антисимметрическим соотношениям для фермионов

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta(t, \vec{x}')\} = \{\psi_\alpha^\dagger(t, \vec{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \vec{x}')\} = 0, \quad (11.49)$$

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \vec{x}')\} = \delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{\alpha\beta}. \quad (11.50)$$

Кроме того, $G(\vec{x})$ является гладкой функцией с компактным носителем. Мы полагаем, что $G(\vec{x})$ равен 1 в малой области \mathcal{G} пространства вблизи x_m и быстро спадает к нулю вне \mathcal{G} .

Принимая $|\Psi(\sigma_m)\rangle$ одноэлектронным состоянием, мы рассмотрим амплитуду

$$\chi(x) = \langle 0 | \psi(x) | \Psi(\sigma_m) \rangle \quad (11.51)$$

для электрона в точке x пространства-времени, где $|0\rangle$ обозначает основное вакуумное состояние электронного поля. Нашей целью является определение того, как операция $\Omega(q)$ относительно измерения A действует на эту амплитуду $\chi(x)$. Мы находим

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \Omega(q) | \Psi(\sigma_m) \rangle &= \langle q | \langle 0 | \psi(x) e^{-iAP} | \Psi(\sigma_m) \rangle | \phi \rangle = \\ &= \langle q | \langle 0 | e^{iAP} \psi(x) e^{-iAP} | \Psi(\sigma_m) \rangle | \phi \rangle, \end{aligned} \quad (11.52)$$

где мы использовали условие $A|0\rangle = 0$ на втором шаге. Антисимметрическое соотношение в результате дает

$$[A, \psi(x)] = -G(\vec{x})\psi(x), \quad (11.53)$$

откуда следует, что

$$e^{iAP}\psi(x)e^{-iAP} = e^{-iG(\vec{x})P}\psi(x). \quad (11.54)$$

Поэтому мы получаем

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi(x) \Omega(q) | \Psi(\sigma_m) \rangle &= \langle q | \langle 0 | e^{-iG(\vec{x})P} \psi(x) | \Psi(\sigma_m) \rangle | \phi \rangle = \\ &= \phi(q - G(\vec{x})) \chi(x).\end{aligned}\quad (11.55)$$

Это показывает, что операция действует как следствие одноэлектронной амплитуды

$$\chi(x) \rightarrow \phi(q - G(\vec{x})) \chi(x) \quad (11.56)$$

и что плотность вероятности для зарегистрированных данных q есть

$$\mathcal{P}(q) = \int |\phi(q - G(\vec{x}))|^2 |\chi(x)|^2 d^3x. \quad (11.57)$$

Для того чтобы сделать возможным достаточно точное измерение, пробная волновая функция $\phi(q)$ должна быть функцией, которая имеет резкий максимум при $q = 0$ с шириной много меньшей 1. Уравнение (11.57) ясно показывает, что наше устройство позволяет аппроксимировать измерение случайной величины $q = G(\vec{x})$.

Предположим теперь, что амплитуда $\chi(x)$ состоит из двух локализованных волновых пакетов $\chi^{(1)}(x)$ и $\chi^{(2)}(x)$, таких, что носитель $\chi^{(1)}(x)$ содержится в области \mathcal{G} , где $G(\vec{x})$ равно 1. Носители $\chi^{(2)}(x)$ и $G(\vec{x})$ полагаются непересекающимися. Тогда мы имеем

$$\mathcal{P}(q) = |\phi(q - 1)|^2 \int |\chi^{(1)}(x)|^2 d^3x + |\phi(q)|^2 \int |\chi^{(2)}(x)|^2 d^3x. \quad (11.58)$$

Это означает, что мы получаем показание $q \approx 1$ с вероятностью $\int |\chi^{(1)}(x)|^2 d^3x$, показывающей, что частица находится в \mathcal{G} и показание $q \approx 0$ с вероятностью $\int |\chi^{(2)}(x)|^2 d^3x$, показывающей, что частица находится вне области \mathcal{G} . Как может быть заключено из уравнения (11.56), в первом случае операция проецирует амплитуду $\chi(x)$ на $\chi^{(1)}(x)$, во втором случае на $\chi^{(2)}(x)$,

$$\chi(x) \rightarrow \chi^{(1)}(x) / \|\chi^{(1)}\|, \quad \text{при } q \approx 1, \quad (11.59)$$

$$\chi(x) \rightarrow \chi^{(2)}(x) / \|\chi^{(2)}\|, \quad \text{при } q \approx 0. \quad (11.60)$$

Теперь рассмотрим следующую ситуацию (Aharonov, Albert, 1984b), которая приведет к заключению, что амплитуда $\chi(x)$ есть неоднозначная функция на пространственно-временном континууме (см. рис. 11.7). Предположим, что мы подготовили на начальной гиперповерхности σ_0 некоторое одноэлектронное состояние $|\Psi(\sigma_0)\rangle$ такое, что амплитуда $\langle 0 | \psi(x) | \Psi(\sigma_0) \rangle$

представляет два волновых пакета $\chi^{(1)}(x)$ и $\chi^{(2)}(x)$

$$\langle 0 | \psi(x) | \Psi(\sigma_0) \rangle = \chi^{(1)}(x) + \chi^{(2)}(x), \quad x \in \sigma_0. \quad (11.61)$$

Волновые пакеты предполагаются локализованными в малых областях вблизи $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$ соответственно и следуют их мировым трубкам с нулевой средней скоростью. Для простоты мы пренебрегаем расширением, а также размытием волновых пакетов. Эти эффекты могут быть легко приняты во внимание, что не изменит доказательства.

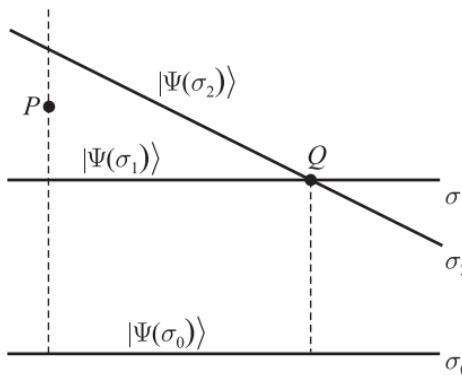


Рис. 11.7. Рисунок показывает, что пространственно-временные амплитуды, в общем случае, являются многозначными функциями. Векторы состояний, ассоциируемые с двумя различными гиперповерхностями σ_1 и σ_2 , могут дать в результате различные амплитуды в общей точке Q , если в точке P выполняется измерение координаты.

В некоторой точке P пространства-времени выполняется координатное измерение с помощью устройства, рассмотренного выше типа. Мы допускаем, что измерение приводит к результату, что электрон находится в P (случай $q = 1$ выше). Задавая, таким образом, ситуацию, мы можем рассмотреть две плоских пространственоподобных гиперповерхности σ_1 и σ_2 , которые пересекаются в точке пространства-времени Q . Обе гиперповерхности появляются как одновременные гиперповерхности в выбранных надлежащим образом системах координат K_1 и K_2 . То есть существуют два наблюдателя O_1 и O_2 в состоянии покоя в K_1 и K_2 соответственно, такие, что σ_1 есть одновременная гиперповерхность для O_1 , а σ_2 есть одновременная гиперповерхность для O_2 . Важное отличие между двумя наблюдателями в том, что для O_2 измерение уже имеет место, в то время как для O_1

еще нет. Соответственно, наблюдатели приписывают различные амплитуды и одной и той же реальной точке Q пространства-времени. Состояние редукции следующего измерения электрона в P дает

$$\langle 0|\psi(Q)|\Psi(\sigma_2)\rangle = 0 \quad (11.62)$$

на σ_2 . С другой стороны, на σ_1 состояние редукции еще не появилось, так что мы имеем

$$\langle 0|\psi(Q)|\Psi(\sigma_1)\rangle = \chi^{(2)}(Q) \neq 0. \quad (11.63)$$

Таким образом, мы находим, что амплитуды отличаются в точке Q , где пересекаются обе гиперповерхности

$$\langle 0|\psi(Q)|\Psi(\sigma_1)\rangle \neq \langle 0|\psi(Q)|\Psi(\sigma_2)\rangle. \quad (11.64)$$

Это соотношение ясно показывает то, что требуется, а именно, что одновременная амплитуда $\langle 0|\psi(x)|\Psi(\sigma)\rangle$ является многозначной функцией в пространстве-времени. Значение этой амплитуды в x зависит, главным образом, от гиперповерхности σ , которая пересекает x . Другими словами, амплитуда зависит от расслоения и, таким образом, от полной истории вектора состояния.

Несмотря на очевидное существование преобразования Лоренца, которое отображает плоскость σ_1 в σ_2 , соответствующие одновременные амплитуды, несомненно, не связаны унитарным преобразованием. Это происходит благодаря тому, что измерение системы делает ее открытой, такой, что в ситуациях, похожих на рассмотренную выше, нет унитарного представления лоренцевской группы для редуцированной системы. То же заключение имеет место, если мы рассмотрим соответствующее неселективное измерение. В этом случае мы имеем смешанное состояние на σ_2 , в то время как на σ_1 у нас состояние чистое.

11.2.4. Согласованная иерархия совместных вероятностей

Обобщая предшествующий анализ, мы теперь можем рассмотреть последовательность локальных измерений, выполняемых в точках

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(K)}, \quad (11.65)$$

которые могут быть произвольно распределены в пространстве и времени. В каждой $x^{(k)}$, где $k = 1, 2, \dots, K$, локальная наблюдаемая $A^{(k)} = A(x^{(k)})$ измеряется непрямо, через связывание с квантовым измерителем в начальном состоянии $|\phi^{(k)}\rangle$. Связывание между полем и k -м квантовым измерителем включает обобщенный импульс $P^{(k)}$, а прямое измерение канонически

связанной наблюдаемой $Q^{(k)}$ выполняется после взаимодействия. Мы полагаем, что здесь K квантовых датчиков действуют полностью независимо на поле, то есть мы можем записать

$$|\phi\rangle = |\phi^{(1)}\rangle \otimes |\phi^{(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi^{(K)}\rangle \quad (11.66)$$

для полного состояния K пробных частиц. Также как и раньше, мы полагаем, что средние значения $\langle \phi^{(k)} | Q^{(k)} | \phi^{(k)} \rangle$ равны нулю, так что выходные значения $a^{(k)}$ для наблюдаемых $A^{(k)}$ просто задаются как $a^{(k)} = q^{(k)}$. Записывая $\phi^{(k)}(q^{(k)})$ для $Q^{(k)}$ представления начального состояния k -й пробной частицы, мы, таким образом, получаем операции

$$\Omega^{(k)}(a^{(k)}) = \phi^{(k)} \left(a^{(k)} - A^{(k)} \right), \quad (11.67)$$

которые описывают изменение состояния системы, обусловленное результатом $a^{(k)}$ в $x^{(k)}$.

Как упоминалось раньше, точки $x^{(k)}$ могут быть распределены произвольно в пространстве и времени. Таким образом, мы можем иметь пространственноподобные, а также времязадающие интервалы между ними. Так как $A^{(k)}$ предполагаются локальными наблюдаемыми, принцип причинности гарантирует, что для пространственноподобных интервалов операции коммутируют сами с собой и с гамильтонианской плотностью, то есть мы имеем

$$[\Omega^{(k)}(a^{(k)}), \Omega^{(l)}(a^{(l)})] = 0, \quad \text{при } (x^{(k)} - x^{(l)})^2 < 0, \quad (11.68)$$

$$[\mathcal{H}(x), \Omega^{(k)}(a^{(k)})] = 0, \quad \text{при } (x - x^{(k)})^2 < 0. \quad (11.69)$$

Результаты предыдущего подраздела теперь легко обобщаются на представленный выше набор локальных измерений (Breuer, Petruccione, 1999). Беря некоторое расслоение с начальной поверхностью σ_0 , мы находим для вектора состояния на $\sigma(\tau)$ (ср. с (11.46))

$$|\Psi(\sigma(\tau))\rangle = \mathcal{N} \cdot T_{\leftarrow} \left(\prod_{k=1}^K \Omega^{(k)}(a^{(k)}) \exp \left[-i \int_{\sigma_0}^{\sigma(\tau)} \mathcal{H}(x) d^4x \right] \right) |\Psi(\sigma_0)\rangle. \quad (11.70)$$

Снова, оператор упорядочения по времени действует на экспоненциальную функцию, а также на операции $\Omega^{(k)}$. Нормировочный множитель \mathcal{N} задается как

$$\mathcal{N} = \left[\mathcal{P}_K(a^{(1)}, \dots, a^{(K)}) \right]^{-1/2}, \quad (11.71)$$

где $\mathcal{P}_K(a^{(1)}, \dots, a^{(K)})$ означает совместную вероятность регистрируемых показаний

$$\mathcal{P}_K(a^{(1)}, \dots, a^{(K)}) = \left\| T_{\leftarrow} \left(\prod_{k=1}^K \Omega^{(k)}(a^{(k)}) \exp \left[-i \int_{\sigma_0}^{\sigma(\tau)} \mathcal{H}(x) d^4x \right] \right) |\Psi(\sigma_0)\rangle \right\|^2. \quad (11.72)$$

Поверхность $\sigma(\tau)$ может быть выбрана произвольно с тем лишь ограничением, что все $x^{(k)}$ должны быть расположены в ее прошлом, что означает, что $\sigma(\tau)$ должна пересекать прямые световые конусы всех $x^{(k)}$.

Уравнение (11.70) ассоциируется с каждым расслоением однозначным статистическим процессом $|\Psi(\sigma(\tau))\rangle$. Каждая реализация процесса представляет историю вектора состояния, которая обусловлена зарегистрированными данными, подчиняющимися совместной вероятности (11.72). Важно отчетливо понимать, что этот процесс является марковским и интегрируемым. В частности, совместная вероятность $\mathcal{P}_K(a^{(1)}, \dots, a^{(K)})$ представляет лоренцевское инвариантное выражение и не зависит от расслоения. Причина в том, что оператор упорядочения во времени T_{\leftarrow} определяется в инвариантной форме в силу условий причинности (11.68) и (11.69). Мы также отметим, что благодаря соотношениям полноты

$$\int \Omega^{(k)\dagger}(a^{(k)}) \Omega^{(k)}(a^{(k)}) da^{(k)} = I \quad (11.73)$$

совместная вероятность нормируется как

$$\int da^{(1)} \dots \int \mathcal{P}_K(a^{(1)}, \dots, a^{(K)}) da^{(K)} = 1. \quad (11.74)$$

На рис. 11.8 мы иллюстрируем, как уравнение (11.70) работает для специального случая трех точек измерения (подобная ситуация была рассмотрена Блохом (Bloch, 1967)). Расстояние между $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ и между $x^{(1)}$ и $x^{(3)}$ пространственноподобны, в то время как $x^{(2)}$ и $x^{(3)}$ разделены времеподобным интервалом. Рисунок показывает три различных расслоения \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 и \mathcal{F}_3 . Согласно уравнению (11.70) эти расслоения приводят к трем операциям

$$\Omega(\mathcal{F}_1) = \Omega^{(3)} \Omega^{(2)} \Omega^{(1)}, \quad (11.75)$$

$$\Omega(\mathcal{F}_2) = \Omega^{(1)} \Omega^{(3)} \Omega^{(2)}, \quad (11.76)$$

$$\Omega(\mathcal{F}_3) = \Omega^{(3)} \Omega^{(1)} \Omega^{(2)}, \quad (11.77)$$

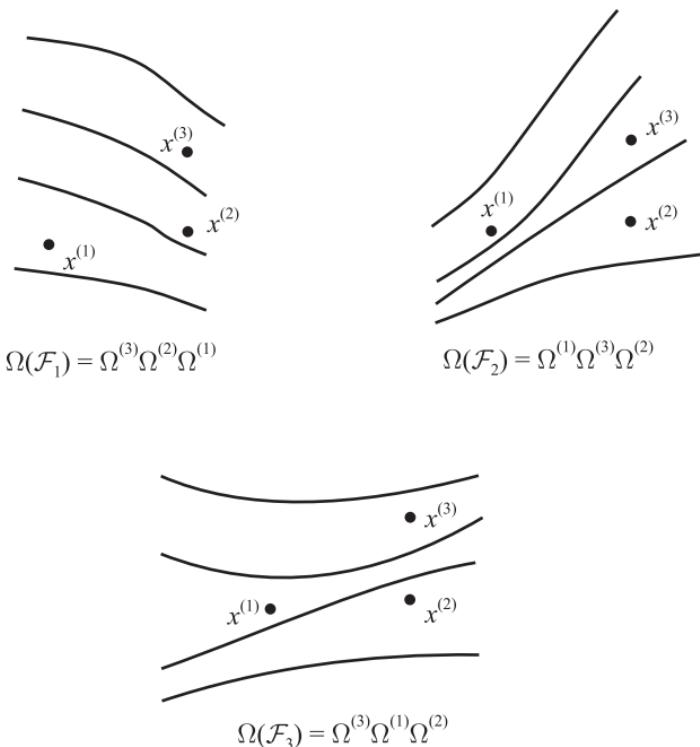


Рис. 11.8. Пример для уравнения (11.70), включающий три точки измерения с двумя пространственноподобными и одним времяподобным интервалом. Рисунок показывает три различных расслоения, каждое из которых приводит к одной и той же суммарной операции.

которые описывают вектор состояния на конечной гиперповерхности соответствующего расслоения (для простоты, плотность гамильтониана может считаться равной нулю). $\Omega^{(1)}$ коммутирует с $\Omega^{(2)}$ и $\Omega^{(3)}$, но $\Omega^{(2)}$, конечно, не коммутирует с $\Omega^{(3)}$. Как легко видеть, все три итоговые операции идентичны. Это показывает интегрируемость процесса, а также релятивистскую инвариантность совместного вероятностного распределения.

Нужно подчеркнуть, что история вектора состояния (11.70) обусловливается суммарной регистрацией данных $(a^{(1)}, \dots, a^{(K)})$. Мы снова рассмотрим наблюдателя O , движущегося вдоль некоторой мировой линии $y = y(\tau)$. Как и прежде, мы полагаем, что результаты измерений в точках $x^{(k)}$ сообщаются через световые сигналы, такие, что результаты отдельных из-

мерений доступны в соответствующих будущих световых конусах $V_+(x^{(k)})$. Двигаясь вдоль $y(\tau)$, наблюдатель O успешно вторгается в эти световые конусы. Предполагается, что собственное время τ наблюдателя O навязывается световым конусам точек $x^{(k_l)}$, где $l = 1, 2, \dots, L$ и $L \leq K$. Наблюдатель O тогда определяет для любого расслоения историю вектора состояния, которая задается уравнением (11.70) с тем лишь изменением, что произведение \prod_k теперь распространяется только на точки $x^{(k_l)}$, в прямых световых конусах которых находится O , то есть на те, результаты измерения которых O знает.

Нужно ясно понимать, что для того чтобы установить историю вектора состояния, наблюдатель O не должен знать ни результаты измерений, ни какая наблюдаемая измеряется в $x^{(k)}$ или выполнено ли какое-либо измерение в этой точке или нет заблаговременно. Конечно, информация о том, что измерено и где измерение произошло, может сообщаться вместе с соответствующими зарегистрированными показаниями.

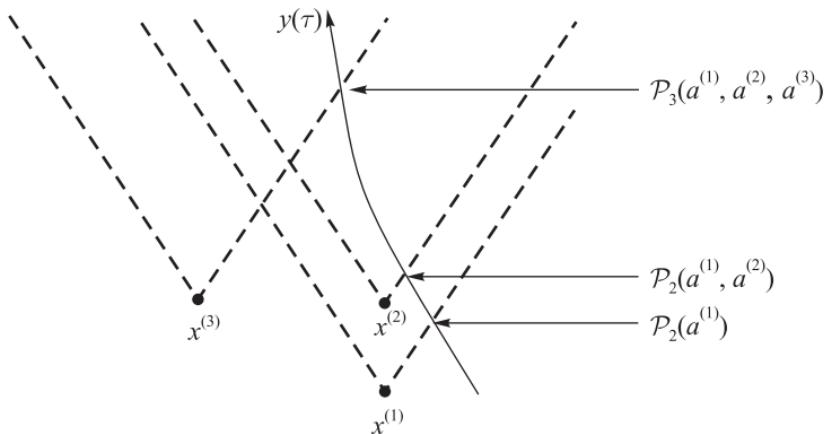


Рис. 11.9. Иерархия совместных вероятностей (11.78), увиденных движущимся вдоль мировой линии $y(\tau)$ наблюдателем: каждый раз, когда наблюдатель входит в новый световой конус измерения световых точек $x^{(k)}$, генерируется новый член семейства.

Для облегчения записи пометим точки измерения таким образом, что наблюдатель O попадает в первый световой конус $x^{(1)}$, затем в световой конус $x^{(2)}, \dots$ и в конце в световой конус $x^{(K)}$. Двигаясь вперед, наблюдатель O , таким образом, генерирует семейство совместных вероятностей

(см. рис. 11.9)

$$\mathcal{P}_1(a^{(1)}), \quad \mathcal{P}_2(a^{(1)}, a^{(2)}), \quad \dots, \quad \mathcal{P}_K(a^{(1)}, \dots, a^{(K)}), \quad (11.78)$$

которые определяются как

$$\mathcal{P}_k(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}) = \left\| T_{\leftarrow} \left(\prod_{l=1}^k \Omega^{(l)}(a^{(l)}) \exp \left[-i \int_{\sigma_0}^{\sigma(\tau)} \mathcal{H}(x) d^4x \right] \right) |\Psi(\sigma_0)\rangle \right\|^2. \quad (11.79)$$

Точки $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ располагаются в области пространства-времени, окруженной гиперповерхностями σ_0 и $\sigma(\tau)$. Как мы уже отметили, все совместные вероятности (11.78) нормированы и не зависят от специфики выбора расслоения. Последнее свойство означает, что любые два наблюдателя с одной и той же информацией о зарегистрированных данных полностью согласованы с соответствующими совместными вероятностями. Следующее условие согласованности может быть легко проверено

$$\mathcal{P}_k(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}) = \int \mathcal{P}_{k+1}(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}, a^{(k+1)}) da^{(k+1)}. \quad (11.80)$$

Это показывает, что каждое новое считывание $a^{(k+1)}$, которое передается наблюдателю O , когда она или он входит в световой конус $V_+(x^{(k+1)})$, согласовано с совместными вероятностями более низкого порядка в иерархии. Таким образом, мы заключаем, что (11.78) формирует согласованную иерархию совместных вероятностных распределений.

11.2.5. ЭПР-корреляции

Важно отметить, что представленные выше формулы были выведены без ограничений на начальный вектор состояний $|\Psi(\sigma_0)\rangle$. Таким образом, они способны описать произвольные квантовые корреляции между времязадобными и пространственноподобными отдельными точками. Квантовые корреляции в пространственноподобных разделенных точках появляются, если $|\Psi(\sigma_0)\rangle$ представляет нелокальное запутанное состояние. В качестве примера мы рассмотрим формулировку Бома (Bohm, 1951) известного ЭПР мысленного эксперимента, изложенного Эйнштейном, Подольским и Розеном (Einstein, Podolsky, Rosen, 1935). Двухчастичная система в состоянии с суммарным спином 0

$$|\Psi(\sigma_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle^{(1)} |-\rangle^{(2)} - |-\rangle^{(1)} |+\rangle^{(2)} \right) \quad (11.81)$$

разделяется на две частицы со спином $\frac{1}{2}$, летящие в противоположные стороны со скоростями вдоль x -направления. В записи (11.81) состояния $|\pm\rangle^{(k)}$ являются собственными состояниями z -компоненты $\sigma_z^{(k)}$ спинового оператора в двух точках $x^{(k)}$, $k = 1, 2$, с собственными значениями ± 1 . В точках $x^{(k)}$, разделенных пространственноподобным интервалом, измеряются спиновые проекции $\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^{(1)}$ и $\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}$. Здесь $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ означают единичные векторы, лежащие в плоскости (y, z) и составляющие углы α и β с осью z . Пренебрегая любым взаимодействием частиц, мы теперь имеем для совместных вероятностей измерений

$$\mathcal{P}_2(a^{(1)}, a^{(2)}) = \|\Omega^{(1)}(a^{(1)})\Omega^{(2)}(a^{(2)})|\Psi(\sigma_0)\rangle\|^2. \quad (11.82)$$

Полагая, что измерения представляют идеальные измерения спиновых проекций, мы имеем два возможных считывания $a^{(k)} = \pm 1$, в то время как операции задаются проекциями на соответствующие собственные векторы. Тогда мы находим, что для отдельных измерений $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ средние значения

$$\langle\Psi(\sigma_0)|\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^{(1)}|\Psi(\sigma_0)\rangle = \langle\Psi(\sigma_0)|\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}|\Psi(\sigma_0)\rangle = 0, \quad (11.83)$$

а дисперсии

$$\text{Var}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^{(1)}) = \langle\Psi(\sigma_0)|(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^{(1)})^2|\Psi(\sigma_0)\rangle = 1, \quad (11.84)$$

$$\text{Var}(\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) = \langle\Psi(\sigma_0)|(\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}^{(2)})^2|\Psi(\sigma_0)\rangle = 1. \quad (11.85)$$

Коэффициент корреляции (см. (1.40)) легко находится

$$\begin{aligned} \text{Cor}(\alpha, \beta) &= \sum_{a^{(1)}, a^{(2)}} a^{(1)} a^{(2)} \mathcal{P}_2(a^{(1)}, a^{(2)}) = \\ &= \langle\Psi(\sigma_0)|(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^{(1)})(\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}^{(2)})|\Psi(\sigma_0)\rangle = \\ &= -\cos(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (11.86)$$

Коэффициент корреляции описывает квантовые корреляции, включенные в совместное вероятностное распределение $\mathcal{P}_2(a^{(1)}, a^{(2)})$. При $\alpha = \beta$ мы имеем $\text{Cor}(\alpha, \beta) = -1$, откуда следует, что считывания полностью антикоррелированы, а именно $a^{(1)} = -a^{(2)}$.

При произвольных измерениях частиц мы имеем соотношения

$$\mathcal{P}_1(a^{(1)}) = \|\Omega^{(1)}(a^{(1)})|\Psi(\sigma_0)\rangle\|^2, \quad (11.87)$$

$$\mathcal{P}_1(a^{(1)}) = \int \mathcal{P}_2(a^{(1)}, a^{(2)})da^{(2)}. \quad (11.88)$$

Уравнение (11.87) показывает, что вероятности для отдельного локального измерения в $x^{(1)}$ полностью независимы от измерения в $x^{(2)}$. Они не зависят ни от считывания $a^{(2)}$, ни от измеряемой там наблюдаемой, то есть от угла β , например. Вероятности для отдельного измерения в $x^{(1)}$ не зависят даже от того, где выполняется возможное второе измерение, до тех пор, конечно, пока последнее отделено пространственноподобным интервалом $x^{(1)}$. Как уже отмечалось, уравнение (11.88) означает, что безусловные вероятности для отдельного измерения в $x^{(1)}$ не изменяются, когда локальный наблюдатель получает какую-либо информацию об измерении во второй точке $x^{(2)}$, что ясно показывает состоятельность совместных вероятностей для представленного примера.

11.2.6. Непрерывные измерения

С помощью идеи вектора состояний, как функции на множестве пространственноподобных гиперповерхностей, представление стохастической волновой функции для непрерывных селективных измерений может быть задано в релятивистки ковариантной форме. В качестве примера мы построим здесь кусочно-детерминированный процесс для вектора состояний источника, образованного оптическим резонатором, который является ковариантным относительно преобразований Лоренца и который описывает стохастическую динамику, индуцируемую непрерывным мониторингом излучаемых фотонов, регистрируемых движущимся детектором. Обобщение до случая квантовой динамической полугруппы, генерируемой произвольным числом операторов Линдблада, очевидно; дальнейшие детали теории могут быть найдены в (Breuer, Petruccione, 2001).

Мы рассмотрим выходной сигнал двухуровневого атома в оптическом резонаторе, который обнаруживается фотосчетчиком. Фотодетектор движется со скоростью $\vec{v} = v\vec{e}$ относительно резонатора в направлении \vec{e} выходного сигнала, следуя, таким образом, мировой линии $y(\tau)$ в пространстве Минковского. Снова, параметр τ обозначает собственное время детектора, то есть время, связанное с детектором. Дальше мы рассматриваем ускоренное движение, для которого 4-скорость

$$n(\tau) \equiv \frac{dy}{d\tau} = (\gamma, \gamma\vec{v}) \quad (11.89)$$

не постоянна, где $n^\mu(\tau)n_\mu(\tau) = 1$ и $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$. Для каждого τ уравнение

$$n(\tau)(x - y(\tau)) = 0 \quad (11.90)$$

определяет плоскость, пространственноподобную гиперповерхность $\sigma(\tau)$. Эта гиперповерхность является множеством тех точек пространства-времени, с которыми наблюдатель O , двигаясь с детектором, связывает одну и ту же координату времени τ . Семейство гиперповерхностей $\mathcal{F} = \{\sigma(\tau)\}$, определяемое траекторией $y(\tau)$, представляет расслоение определенной области пространства-времени. Более точно, это область пространства-времени, в которой различные гиперповерхности семейства не пересекаются. Соответствующее условие $l(x) < g^{-1}$, где $l(x)$ есть расстояние от точки x до мировой линии $y(\tau)$, а g есть ускорение детектора, измеренное в его собственной системе координат (Misner, Thorne, Wheeler, 1973). Семейство $\{\sigma(\tau)\}$ представляет тогда расслоение множества точек x пространства-времени, которые удовлетворяют этому условию. Как мы увидим, на расстоянии свыше g^{-1} от мировой линии детектора полное непрерывное измерение и, следовательно, стохастическое представление динамики источника в общем случае перестают существовать.

Наша цель сейчас — сконструировать релятивистское ковариантное, стохастическое представление источника на языке вектора состояния $|\Psi(\tau)\rangle = |\Psi(\sigma(\tau))\rangle$, которое следует из непрерывного мониторинга излучаемых фотонов через движущийся фотодетектор. Каждый раз при детектировании фотона волновая функция источника претерпевает мгновенное изменение. Мы полагаем, как и в нерелятивистской теории (см. раздел 6.3), что это изменение получается через применение некоторого оператора Линдблада L к вектору состояния. Из-за отсутствия абсолютного времени *мгновенное изменение волновой функции* не является релятивистики ковариантным. Однако в силу основных принципов квантовой механики источник, поле излучения и детектор должны рассматриваться как целое. Важным заключением является то, что преобразование Лоренца оказывает воздействие на квантовый объект и датчик, а также детектор и гиперповерхности $\sigma(\tau)$ расслоения наблюдателя O . Мы достигнем ковариантного описания для редукции вектора состояния, если мы постулируем, что редукция вектора состояния появляется мгновенно в системе координат детектора, то есть вдоль определенной пространственноподобной гиперповерхностью $\sigma(\tau)$ расслоения для наблюдателя O , связанного с ней.

Как следствие, оператор скачка теперь становится функцией $L(\tau) = L(\sigma(\tau))$ гиперповерхности расслоения. В прямой аналогии с нерелятивистской формулировкой мы получим на основе нашего постулата редук-

ции состояний следующее марковское стохастическое уравнение для вектора состояний, описывающее кусочно-детерминированный процесс:

$$\begin{aligned} d|\Psi(\tau)\rangle = & -iH(\tau)|\Psi(\tau)\rangle d\tau - \\ & - \frac{1}{2} (L^\dagger(\tau)L(\tau) - \langle L^\dagger(\tau)L(\tau) \rangle) |\Psi(\tau)\rangle da + \\ & + \left(\frac{L(\tau)|\Psi(\tau)\rangle}{\sqrt{\langle L^\dagger(\tau)L(\tau) \rangle}} - |\Psi(\tau)\rangle \right) dN(a), \end{aligned} \quad (11.91)$$

где мы ввели сокращенное обозначение

$$\langle L^\dagger(\tau)L(\tau) \rangle \equiv \langle \Psi(\tau) | L^\dagger(\tau)L(\tau) | \Psi(\tau) \rangle. \quad (11.92)$$

Первый член с правой стороны уравнения (11.91) представляет унитарную динамику (см. (11.23)), в то время как второй и третий члены дают необратимую часть эволюции, вызываемую непрерывным мониторингом квантового объекта. Структура этих членов подобна уже знакомым по разделу 6.1.1. Дифференциал da играет роль инвариантного приращения времени, которое будет определено ниже. Величина $dN(a)$ является пуассонским процессом, который подчиняется условиям

$$E[dN(a)] = \langle L^\dagger(\tau)L(\tau) \rangle da, \quad [dN(a)]^2 = dN(a), \quad (11.93)$$

где E означает математическое ожидание процесса. Второе соотношение в (11.93) говорит нам, что $dN(a)$ принимает значения 0 и 1. До тех пор пока фотон не детектирован, мы имеем $dN(a) = 0$ и, таким образом, второй член уравнения (11.91) дает эволюцию вектора состояния при условии, что в результате фотон не продетектируется. Если фотон детектируется, мы имеем $dN(a) = 1$, так что третий член уравнения (11.91) в результате дает соответствующий скачок для вектора состояния, задаваемый

$$|\Psi(\sigma)\rangle \rightarrow \frac{L(\sigma)|\Psi(\sigma)\rangle}{\sqrt{\langle L^\dagger(\sigma)L(\sigma) \rangle}}. \quad (11.94)$$

Таким образом, пуассонский процесс $N(a)$ просто считает число продетектированных фотонов.

Согласно уравнению (11.94) стохастические скачки вектора состояния появляются вдоль гиперповерхностей $\sigma = \sigma(\tau)$ расслоения, задаваемого траекторией детектора. Если фотон продетектирован в определенное собственное время, редукция вектора состояния происходит с соответствующим замедлением собственного времени:

$$\tau_{\text{ret}} = \tau - \frac{R}{c}, \quad (11.95)$$

где принято во внимание время, требуемое для передачи светового сигнала от источника к детектору, R обозначает мгновенное расстояние от источника до детектора. Это следует прямо из того факта, что продетектированный сигнал дает информацию о состоянии источника в замедленном времени. Таким образом, точное предписание для редукции вектора состояния принимает следующий вид. Редукция вектора состояния появляется вдоль пространственноподобных гиперповерхностей $\sigma(\tau_{\text{ret}})$ в замедленном собственном времени τ_{ret} , которое соответствует собственному времени τ фактического события измерения. Таким образом, уравнение (11.91) приводит к стохастическому уравнению движения для волновой функции источника $|\Psi(\tau_{\text{ret}})\rangle = |\Psi(\sigma(\tau_{\text{ret}}))\rangle$.

Для того чтобы определить инвариантный параметр времени a , используемый в уравнении (11.91), мы сначала заметим, что согласно уравнению (11.93) фототок, измеренный в системе покоя детектора, задается как

$$J = \langle L^\dagger(\tau)L(\tau) \rangle \frac{da}{d\tau}. \quad (11.96)$$

J есть среднее число фотонов, продетектированных за единицу обыкновенного временного интервала $d\tau$. Вследствие лоренцевской инвариантности скалярного произведения, мы можем просто положить $\langle L^\dagger(\tau)L(\tau) \rangle = \gamma_0$, где γ_0 является инвариантной характеристикой интенсивности излучения источника. Таким образом, мы имеем

$$J = \gamma_0 \frac{da}{d\tau}. \quad (11.97)$$

Если детектор находится в состоянии покоя относительно источника ($v = 0$), детектируемый фототок должен быть $J_0 = \gamma_0$. Таким образом, a должно быть равным собственному времени источника, то есть a задается временем часов, зафиксированных рядом с источником. Чтобы убедиться, что это заключение верно, мы рассмотрим случай движущегося детектора ($v \neq 0$). С помощью законов преобразования тензора электромагнитного поля легко показать, что фототок J , измеренный в системе покоя детектора, задается как

$$J = \gamma_0 \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}, \quad (11.98)$$

где мы не предполагаем, что скорость v является постоянной. Теперь, с указанным выше выбором для величины a , мы находим

$$\frac{da}{d\tau} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}, \quad (11.99)$$

что доказывает наше утверждение.

Как упоминалось раньше, источник должен быть в пределах расстояния $l < g^{-1}$ от мировой линии детектора. Это условие означает, что $da/d\tau_{\text{ret}} > 0$, и тогда уравнение (11.91) представляет собой осмысленное стохастическое уравнение для вектора состояний с положительным инкрементом da . Если это условие нарушается, тогда очевидно, что полный непрерывный мониторинг детектором невозможен. В качестве примера можно представить детектор в гиперболическом движении, в случае которого наблюдатель сможет опережать фотоны, излучаемые источником.

Ковариантность нашего стохастического уравнения для вектора состояния (11.91) при преобразованиях Лоренца очевидна. Так как da инвариантен, величина $dN(a)$ является инвариантным стохастическим процессом. Кроме того, так как квантовое математическое ожидание $\langle L^\dagger(\sigma)L(\sigma)\rangle$ преобразуется как лоренцевский скаляр, то как диссипативный, так и стохастический член (11.91) преобразуются ковариантно. Важно подчеркнуть, что законы преобразования также включают преобразование для оператора скачка, а именно

$$L'(\sigma') = UL(\sigma)U^\dagger, \quad (11.100)$$

где U обозначает унитарное представление для преобразования Лоренца. Физически, это означает, что квантовый объект, а также окружение и измерительная аппаратура должны быть преобразованы по Лоренцу для того, чтобы получить ковариантность стохастического процесса. Принимая во внимание физический смысл процесса как непрерывного измерения, полученный результат является правдоподобным рецептом, который находится в полном согласии как с квантовой механикой, так и специальной теорией относительности.

11.3. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И ПРИЧИННОСТЬ

В анализе предыдущего раздела мы предполагали, что суммарное начальное состояние квантового датчика задается простым произведением состояний вида (11.66). Более общий класс измерений может быть сконструирован с помощью квантовых датчиков, которые запутаны в начальных состояниях. В настоящем разделе мы продемонстрируем, что запутанные состояния датчика делают возможным выполнение измерений нелокальных наблюдаемых и состояний, как впервые было показано Аароновым и Альбертом (Aharonov, Albert, 1980, 1981, 1984a, 1984b).

Возможность нелокальных измерений имеет несколько важных следствий для представления состояний и наблюдаемых в релятивистской квантовой теории. Как и прежде, мы будем считать, что включены только локальные взаимодействия между объектом и датчиком системы. Поэтому ди-

намика целой системы будет, конечно, совместимой с принципом причинности. Однако если причинность комбинируется с определенными условиями, накладываемыми на свойства измерительных приборов, а также на поведение вектора состояния самой изучаемой системы, то это приводит к важным ограничениям на измеримость наблюдаемых и состояний (Aharonov, Albert, Vaidman, 1986; Sorkin, 1993).

Условия, налагаемые принципом причинности, будут выведены в этом разделе. Например, ниже мы продемонстрируем, что проекции на нелокальные запутанные состояния неизмеримы в обычном смысле в квантовой механике. Также будет показано, что только определенный класс нелокальных состояний и только для определенных типов нелокальных наблюдаемых с запутанными собственными состояниями допускается квантовое неразрушающее измерение (КНИ).

Несмотря на то, что возможность КНИ измерений нелокальных наблюдаемых и состояний сильно ограничена причинностью, *приготовление* нелокальных состояний такого ограничения не имеет. На самом деле, как будет показано, любое нелокальное запутанное состояние в принципе может быть приготовлено без противоречия с причинностью. Также существует вполне отличимый тип измерения, известный как обменное измерение, который никогда не приводит к какому-либо противоречию с причинностью и который также будет рассмотрен. В заключение в качестве интересного приложения мы исследуем передачу неизвестного квантового состояния с помощью классического канала связи и квантового канала, предоставляющего ЭПР-запутанное квантовое состояние. Это так называемая квантовая телепортация, которая прекрасно иллюстрирует некоторые особенности релятивистских квантовых измерений.

11.3.1. Запутанные квантовые датчики

Мы рассмотрим случай, когда датчик системы изначально приготавливается в некотором запутанном состоянии $|\phi\rangle$. В $Q^{(k)}$ представлении запишем волновую функцию суммарной пробной системы

$$\phi(q^{(1)}, \dots, q^{(K)}) = \langle q^{(1)}, \dots, q^{(K)} | \phi \rangle. \quad (11.101)$$

Наш предыдущий результат (11.72) может быть сразу обобщен до результата

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_K(a^{(1)}, \dots, a^{(K)}) &= \\ &= \left\| T_{\leftarrow} \left(\Omega(a^{(1)}, \dots, a^{(K)}) \exp \left[-i \int_{\sigma_0}^{\sigma(\tau)} \mathcal{H}(x) d^4x \right] \right) |\Psi(\sigma_0)\rangle \right\|^2, \end{aligned} \quad (11.102)$$

где снова $x^{(1)}, \dots, x^{(K)}$ расположены в области пространства-времени, окруженной гиперповерхностями σ_0 и $\sigma(\tau)$. Итоговая операция может быть записана как

$$\Omega(a^{(1)}, \dots, a^{(K)}) = \phi(a^{(1)} - A^{(1)}, \dots, a^{(K)} - A^{(K)}). \quad (11.103)$$

Надо отметить, что в общем это лишь формальное выражение, так как две операции $A^{(k)}$ и $A^{(l)}$ не коммутируют, если соответствующие точки $x^{(k)}$ и $x^{(l)}$ разделяются времеподобным интервалом. Однако благодаря действию оператора упорядочения во времени T_{\leftarrow} в уравнении (11.102) операция определяется однозначно.

Использование запутанного квантового датчика приводит к имеющему решающее значение следствию для условной эволюции состояния изучаемой системы. Наиболее важной особенностью является то, что для запутанных состояний датчика эволюция, в общем случае, не преобразует чистые состояния в чистые состояния, и то, что процесс становится немарковским. Это можно увидеть с помощью простейшего случая, а именно, измерения в двух пространственноподобных точках $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Так как соответствующие операторы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ коммутируют, то операция

$$\Omega(a^{(1)}, a^{(2)}) = \phi(a^{(1)} - A^{(1)}, a^{(2)} - A^{(2)}), \quad (11.104)$$

конечно, является однозначно определяемой и без оператора упорядочения по времени.

Мы полагаем, что пробное состояние $|\phi\rangle$ является запутанным состоянием. Для большей определенности мы можем рассмотреть $|\phi\rangle$ как состояние двухчастичной системы, которая приготавливается в запутанном состоянии в некоторой локализованной области. Эти пробные частицы переносятся тогда в точки пространства-времени $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ соответственно, где они взаимодействуют с изучаемой системой. Впоследствии, наблюдаемые $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ измеряются на пробных частицах, чтобы получить счиывания $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$, как показано на рис. 11.10.

Рассмотрим теперь два различных расслоения \mathcal{F} и \mathcal{F}' параллельными плоскостями, как изображено на рис. 11.11. Как и прежде, мы можем рассмотреть гиперповерхности, соответствующие этим расслоениям, как одновременные гиперповерхности двух наблюдателей O и O' , движущихся с различными 4-скоростями n и n' . Ясно, что n является единичным нормальным вектором \mathcal{F} , а n' таким же вектором для \mathcal{F}' .

В случае, когда зонд представлен в запутанном состоянии, может оказаться, что O и O' ассоциируются с полностью различными историями

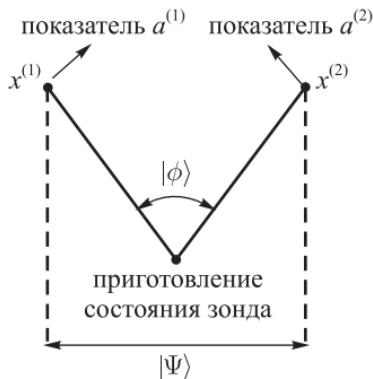


Рис. 11.10. Общая схема генерации для непрямого измерительного устройства, которое использует запутанное состояние $|\phi\rangle$.

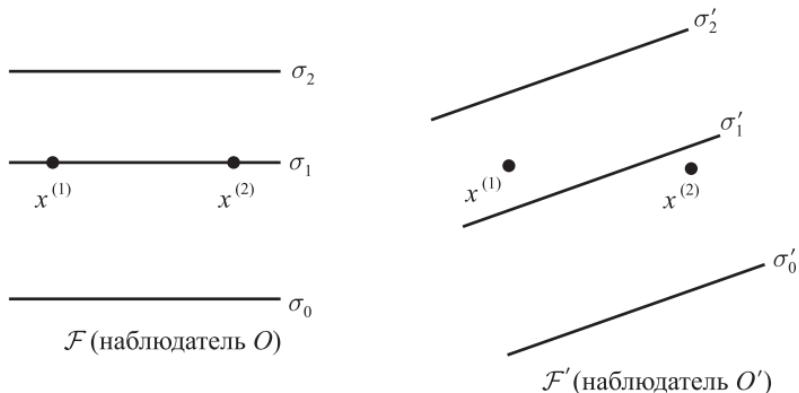


Рис. 11.11. Два различных расслоения \mathcal{F} и \mathcal{F}' , соответствующие двум наблюдателям O и O' , которые описывают нелокальные измерения, показанные на рис. 11.10, в их соответствующих системах координат.

состояния в своих расслоениях. Наблюдатель O стартует из некоторого начального состояния $|\Psi(\sigma_0)\rangle$ на σ_0 . Как показано на рисунке, существует некоторая поверхность σ_1 расслоения \mathcal{F} , которая пересекает обе точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, что означает, что оба измерения одновременны для наблюдателя O . Это подразумевает, что редукция состояния в \mathcal{F} происходит вдоль σ_1 и что считывания $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ дают итоговое состояние

$$|\Psi(\sigma_2)\rangle = \mathcal{N}\Omega(a^{(1)}, a^{(2)})|\Psi(\sigma_0)\rangle \quad (11.105)$$

на поверхности σ_2 расслоения O , \mathcal{N} есть нормировочный множитель. Таким образом, наблюдатель O описывает историю состояния как эволюцию

чистых состояний с редукцией, происходящей в отдельный момент времени в системе покоя O .

История состояния, ассоциируемая с расслоением \mathcal{F}' , полностью отлична. В этом расслоении не существует гиперповерхности, которая проходит через обе точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, то есть для наблюдателя O' два измерения не одновременны. Существует промежуточная область времен, в которой первое измерение в $x^{(2)}$ и соответствующая редукция состояния уже имеют место, в то время как то же самое в $x^{(1)}$ еще не происходит. Для запутанного квантового датчика это приводит к результату, что в этой промежуточной области объект и датчик, в общем случае, находятся в конечном запутанном состоянии, которое задается

$$|\Phi(\sigma'_1)\rangle = \mathcal{N} \int |a^{(1)}\rangle \otimes |a^{(2)}\rangle \otimes \langle a^{(1)}, a^{(2)}| e^{-iA^{(2)}P^{(2)}} |\phi\rangle |\Psi(\sigma'_0)\rangle da^{(1)}. \quad (11.106)$$

В противоположность этому, если состояние датчика является прямым произведением $|\phi\rangle = |\phi^{(1)}\rangle \otimes |\phi^{(2)}\rangle$, то промежуточное состояние также становится прямым произведением

$$|\Phi(\sigma'_1)\rangle = \mathcal{N} |\phi^{(1)}\rangle \otimes |a^{(2)}\rangle \langle a^{(2)}| e^{-iA^{(2)}P^{(2)}} |\phi^{(2)}\rangle |\Psi(\sigma'_0)\rangle, \quad (11.107)$$

как это было в рассмотренных в предыдущей главе случаях. Также ясно, что после второго измерения в $x^{(1)}$ суммарная (объект плюс датчик) система всегда находится в факторизованном состоянии, которое снова принимает вид

$$|\Phi(\sigma'_2)\rangle = \mathcal{N} |a^{(1)}\rangle \otimes |a^{(2)}\rangle \otimes \Omega(a^{(1)}, a^{(2)}) |\Psi(\sigma'_0)\rangle. \quad (11.108)$$

Запутанность объект-измеритель, связанная с наблюдаемыми изучаемой системы, показывает, что состояние представляет, в общем случае, смесь в средней области расслоения \mathcal{F}'

$$\rho(\sigma'_1) = \frac{1}{\mathcal{P}_1(a^{(2)})} \int \phi(a^{(1)}, a^{(2)} - A^{(2)}) \rho(\sigma'_0) \phi^\dagger(a^{(1)}, a^{(2)} - A^{(2)}) da^{(1)}, \quad (11.109)$$

где

$$\mathcal{P}_1(a^{(2)}) = \int \langle \Psi(\sigma'_0) | \phi^\dagger \phi(a^{(1)}, a^{(2)} - A^{(2)}) | \Psi(\sigma'_0) \rangle da^{(1)} \quad (11.110)$$

есть безусловная плотность вероятности для считывания $a^{(2)}$ измерения в $x^{(2)}$. Таким образом, мы видим, что наблюдатель O' ассоциирует следующую историю состояния объекта с его/ее расслоением \mathcal{F}' :

$$\rho(\sigma'_0)(\text{чистое}) \rightarrow \rho(\sigma'_1)(\text{смешанное}) \rightarrow \rho(\sigma'_2)(\text{чистое}). \quad (11.111)$$

На первом шаге чистое состояние $\rho(\sigma'_0)$ преобразуется в смешанное $\rho(\sigma'_1)$ измерением в $x^{(2)}$. На втором шаге это смешанное затем снова преобразуется в чистое состояние $\rho(\sigma'_2)$. Разрушение чистого состояния первым измерением полностью аннулируется вторым измерением.

Представленное выше описание вскрывает немарковский характер истории состояний. Итоговое состояние $\rho(\sigma'_2)$ изучаемой системы после второго измерения получается применением операции $\Omega(a^{(1)}, a^{(2)})$ к начальному состоянию $\rho(\sigma'_0)$ путем приложения ее к состоянию изучаемой системы, которое было задано за конечный временной интервал $\Delta\tau$ до второго измерения. Мы отмечаем, что этот временной интервал, соответствующий промежуточной области времени между двумя измерениями, может быть произвольно большим. Например, если $x^{(1)} = (0, \vec{x}^{(1)})$ и $x^{(2)} = (0, \vec{x}^{(2)})$ являются координатами измерительных событий в системе координат O и если O' двигается в направлении $\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}$, временной интервал между первым и вторым измерениями оказывается равным

$$\Delta\tau = \gamma v \Delta x, \quad (11.112)$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, v — скорость O' относительно O и $\Delta x = |\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}|$.

Немарковская особенность процесса существует благодаря тому факту, что информация, которая требуется для восстановления чистого состояния объекта на втором шаге, содержится в состоянии датчика в течение временного интервала $\Delta\tau$. Эта информация теряется при взятии следа переменных квантового датчика. Как мы видели, процесс, описывающий поведение полной системы объект плюс датчик, конечно, является марковским.

11.3.2. Нелокальные измерения ЭПР-датчиками

В этом подразделе мы продемонстрируем, что использование запутанных состояний датчика допускает квантовое неразрушающее измерение определенных наблюдаемых. Как и в предыдущем подразделе, наш квантовый датчик составляют двухуровневая система с каноническими координатами $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ и соответствующими сопряженными импульсами $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$. За начальное состояние датчика принимается запутанное состояние ЭПР-типа, которое может быть определено с помощью соотношений

$$\left(P^{(1)} + P^{(2)} \right) |\phi\rangle = 0, \quad (11.113)$$

$$\left(Q^{(1)} - Q^{(2)} \right) |\phi\rangle = 0. \quad (11.114)$$

Отметим, что суммарный канонический импульс

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} \quad (11.115)$$

коммутирует с относительной координатой

$$\tilde{Q} = Q^{(1)} - Q^{(2)}, \quad (11.116)$$

так что P и \tilde{Q} могут одновременно принимать точные значения. Вводя также среднее координат

$$Q = \frac{1}{2} (Q^{(1)} + Q^{(2)}), \quad (11.117)$$

а также относительный импульс

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} (P^{(1)} - P^{(2)}), \quad (11.118)$$

мы получаем две пары канонически сопряженных координат и импульсов

$$[P, Q] = [\tilde{P}, \tilde{Q}] = -i, \quad (11.119)$$

$$[P, \tilde{Q}] = [\tilde{P}, Q] = 0. \quad (11.120)$$

Используя смешанное (P, \tilde{Q}) представление, мы можем, таким образом, определить состояние датчика посредством

$$|\phi\rangle = |p = 0, \tilde{q} = 0\rangle. \quad (11.121)$$

Определим операцию, описывающую считывания $a^{(1)} = q^{(1)}$ и $a^{(2)} = q^{(2)}$ для локального измерения $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ после взаимодействия объект-датчик. Применяя приведенные выше соотношения, мы находим

$$\begin{aligned} \Omega(a^{(1)}, a^{(2)}) &= \langle a^{(1)}, a^{(2)} | \exp[-iA^{(1)}P^{(1)} - iA^{(2)}P^{(2)}] |\phi\rangle = \\ &= \langle a^{(1)}, a^{(2)} | \exp[-i(A^{(1)} - A^{(2)})\tilde{P} - \frac{i}{2}(A^{(1)} + A^{(2)})P] |\phi\rangle = \\ &= \langle a^{(1)}, a^{(2)} | \exp[-i(A^{(1)} - A^{(2)})\tilde{P}] |\phi\rangle, \end{aligned} \quad (11.122)$$

где мы использовали тот факт, что P коммутирует с \tilde{P} и что $P|\phi\rangle = 0$. Рассмотрим теперь нелокальный оператор

$$A = A^{(1)} - A^{(2)} \quad (11.123)$$

и его спектральное разложение

$$A = \sum_a a\Pi_A(a), \quad (11.124)$$

которое полагается для простоты дискретным. Здесь и далее мы пишем $\Pi_A(a)$ для проекции на собственное пространство оператора A , соответствующее собственному значению a .

Если мы введем спектральное разложение A в выражение (11.122), мы получаем для операции

$$\begin{aligned}\Omega(a^{(1)}, a^{(2)}) &= \sum_a \langle a^{(1)}, a^{(2)} | e^{-ia\tilde{P}} | p = 0, \tilde{q} = 0 \rangle \Pi_A(a) = \\ &= \sum_a \langle a^{(1)}, a^{(2)} | p = 0, \tilde{q} = a \rangle \Pi_A(a).\end{aligned}\quad (11.125)$$

На втором шаге мы использовали тот факт, что $\exp(-ia\tilde{P})$ является оператором трансляции, который сдвигает \tilde{q} на величину a , так как \tilde{P} является канонически сопряженным к \tilde{Q} . Теперь оставшийся матричный элемент исчезает за исключением $a^{(1)} - a^{(2)} = a$,

$$\langle a^{(1)}, a^{(2)} | p = 0, \tilde{q} = a \rangle = \delta(a^{(1)} - a^{(2)} - a), \quad (11.126)$$

что дает

$$\Omega(a^{(1)}, a^{(2)}) = \sum_a \delta(a^{(1)} - a^{(2)} - a) \Pi_A(a). \quad (11.127)$$

Это уравнение четко показывает, что операция зависит только от разности считываний и что возможные значения этой разности совпадают с собственными значениями A . Корректно нормированная операция относительно результата $a = a^{(1)} - a^{(2)}$ может поэтому быть записана как

$$\Omega(a) = \Pi_A(a), \quad a \in \text{spec}(A), \quad (11.128)$$

показывая, что операция является в точности равной соответствующей проекции спектрального семейства оператора A .

Таким образом, мы видим, что ЭПР-запутанное состояние датчика допускает идеальное квантовое неразрушающее измерение нелокальной наблюдаемой A . Операция описывает обратное действие на квантовый объект, которое находится в полном согласии с проекционным постулатом фон Неймана–Лёдерса. Считывания результатов дают собственные значения A . Если начальное состояние изучаемой системы было собственным состоянием A , то это состояние не изменяется при измерении.

Чтобы оценить, что было достигнуто, важно реализовать следующие свойства представленной выше схемы. Во-первых, нужно подчеркнуть, что

измерительное устройство не дает какой-либо информации о локальных наблюдаемых $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$. Это связано с тем фактом, что ни $Q^{(1)}$ ни $Q^{(2)}$ не являются вполне определенными в начальном состоянии датчика, так как эти наблюдаемые не коммутируют с P . Вполне определена лишь относительная координата \tilde{Q} , которая коммутирует с P . Запутанное состояние датчика $|\phi\rangle$, таким образом, не является подходящим для измерения локальных наблюдаемых $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$. Рассмотрим, например, локальное измерение в $x^{(2)}$ и расслоение \mathcal{F}' предыдущего подраздела (рис. 11.11). Если мы вводим спектральное разложение локальной наблюдаемой $A^{(2)}$

$$A^{(2)} = \sum_{\nu} a_{\nu}^{(2)} \Pi_{\nu}^{(2)} \quad (11.129)$$

для матрицы плотности, описывающей квантовый объект после первого измерения $x^{(2)}$, мы находим

$$\rho(\sigma'_1) = \sum_{\nu} \Pi_{\nu}^{(2)} \rho(\sigma'_0) \Pi_{\nu}^{(2)}. \quad (11.130)$$

Это в точности матрица плотности, которая будет получена *неселективным* измерением локальной наблюдаемой $A^{(2)}$. Отсюда следует, что измерение $Q^{(2)}$ не дает какой-либо информации о $A^{(2)}$. Квантовый объект характеризуется как если бы мы измеряли $A^{(2)}$ и одновременно удаляли эту информацию. В частности, возможные результаты $a^{(2)}$ не задаются собственными значениями $A^{(2)}$, но равномерно распределены и независимы от начального состояния объекта.

Таким образом, мы видим, что устройство допускает измерение $A = A^{(1)} - A^{(2)}$ без измерения локальных величин $A^{(1)}, A^{(2)}$. Конечно, можно измерить и линейную комбинацию вида

$$A = \alpha A^{(1)} + \beta A^{(2)}. \quad (11.131)$$

Это достигается соответствующей заменой локальной наблюдаемой $A^{(1)} \rightarrow -\alpha A^{(1)}, A^{(2)} \rightarrow -\beta A^{(2)}$. Напомним, что наше основное предположение заключается в том, что, по меньшей мере в принципе, мы можем измерить любую локальную наблюдаемую. Подобным же образом можно также измерить любое произведение

$$A = A^{(1)} \cdot A^{(2)} \quad (11.132)$$

при условии, что обе локальные наблюдаемые имеют определенный знак, например $A^{(1)} > 0, A^{(2)} > 0$. В этом случае мы можем провести замену $A^{(1)} \rightarrow \ln A^{(1)}, A^{(2)} \rightarrow \ln A^{(2)}$. Однако, как мы продемонстрируем

позже, невозможно измерить все наблюдаемые, соответствующие алгебре операторов изучаемой системы.

Второе важное замечание состоит в том, что устройство допускает измерение нелокальных наблюдаемых, которые не могут быть измерены локально. Рассмотрим наблюдаемую $A = A^{(1)} + A^{(2)}$. Полагаем, во-первых, что A невырождена. В этом случае мы можем измерить A также локально простым измерением $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ соответственно (с помощью датчика, который находится в состоянии прямого произведения). Такое измерение будет тогда также КНИ измерением A . Соответствующие считывания $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ являются собственными значениями $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ соответственно и $a = a^{(1)} + a^{(2)}$ является собственным значением A . Более того, все собственные состояния A также являются собственными $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, что следует из того факта, что локальные наблюдаемые коммутируют и что A невырождена. Поэтому отдельное измерение $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ оставляет неизмененными все состояния A .

Ситуация полностью меняется, если A вырождена. Отдельные измерения будут тогда, в общем случае, не КНИ измерениями A . Чтобы увидеть это, мы рассмотрим некоторое вырожденное собственное значение a наблюдаемой A и два соответствующих ортогональных собственных состояния $|\chi_1\rangle$ и $|\chi_2\rangle$. Нелокальная процедура измерения, сконструированная выше, имеет то свойство, что подпространство, натянутое на $|\chi_1\rangle$ и $|\chi_2\rangle$, остается инвариантным. Однако мы всегда можем выбрать такие состояния, что они одновременно являются собственными состояниями $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$. Мы предполагаем, что соответствующие собственные значения различны, и рассмотрим начальное состояние

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_1\rangle + |\chi_2\rangle). \quad (11.133)$$

Тогда во время локальных измерений $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ оказывается, что это состояние переходит с вероятностью $\frac{1}{2}$ к $|\chi_1\rangle$ или $|\chi_2\rangle$. Поэтому раздельное измерение локальных величин не является КНИ измерением их суммы.

В качестве примера, который будет использован несколько раз позднее, мы рассмотрим систему из двух частиц со спином $\frac{1}{2}$. Одна частица локально взаимодействует с устройством в $x^{(1)}$, другая в $x^{(2)}$. Суммарное гильбертово пространство является, конечно, заданным тензорным произведением $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$. В качестве наших локальных наблюдаемых мы возьмем спиновые компоненты частиц на направление z

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma_z^{(1)}, \quad A^{(2)} = \frac{1}{2}\sigma_z^{(2)} \quad (11.134)$$

и рассмотрим измерение суммы спинов на это направление

$$A = \frac{1}{2} (\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}) \equiv J_z. \quad (11.135)$$

Базис собственных состояний J_z может быть записан в очевидном представлении как

$$|j=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle^{(1)} |-\rangle^{(2)} - |-\rangle^{(1)} |+\rangle^{(2)}), \quad (11.136)$$

$$|j=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle^{(1)} |-\rangle^{(2)} + |-\rangle^{(1)} |+\rangle^{(2)}), \quad (11.137)$$

$$|j=1, m=+1\rangle = |+\rangle^{(1)} |+\rangle^{(2)}, \quad (11.138)$$

$$|j=1, m=-1\rangle = |-\rangle^{(1)} |-\rangle^{(2)}, \quad (11.139)$$

где m обозначает собственное значение J_z . Эти собственные состояния выбраны для одновременных собственных состояний квадрата полного спина

$$\vec{J} = \frac{1}{2} (\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}), \quad (11.140)$$

то есть $\vec{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle$. Состояния $|j=0, m=0\rangle$ и $|j=1, m=0\rangle$ охватывают двумерное вырожденное собственное подпространство, соответствующее собственному значению 0 оператора J_z . Нелокальное измерение, использующее состояние датчика ЭПР-типа, разрешает КНИ измерение J_z . В отдельном измерении локальных спинов частиц, однако, синглетное состояние $|j=0, m=0\rangle$, например, будет преобразовано в $|+\rangle^{(1)} |-\rangle^{(2)}$ или $|-\rangle^{(1)} |+\rangle^{(2)}$.

Теперь продемонстрируем, что кроме линейной комбинации и определенного произведения мы также можем измерить произвольную модулярную сумму локальных наблюдаемых. Тот факт, что этот тип нелокальной наблюдаемой является измеримым, по меньшей мере в принципе, будет играть важную роль в дальнейшем развитии теории.

Очевидно, достаточно сконструировать явное измерительное устройство для величины

$$B = A \bmod z \equiv (A^{(1)} - A^{(2)}) \bmod z, \quad (11.141)$$

где $z > 0$ есть некоторое действительное число. Чтобы измерить B , мы используем следующее начальное состояние датчика:

$$|\phi\rangle = \mathcal{N} \sum_n |p=0, \tilde{q}=nz\rangle, \quad (11.142)$$

где суммирование производится по соответствующему подмножеству множества целых чисел, а \mathcal{N} является некоторым несущественным нормировочным множителем. Состояние датчика является суперпозицией ЭПР-запутанных состояний. В контрасте с датчиком, используемым прежде, не только локальные координаты $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ являются неопределенными в этом состоянии, но также относительная координата \tilde{Q} является определенной только для чисел кратных z , когда $(\tilde{O} \bmod z)|\phi\rangle = 0$.

Продолжая таким же образом, как и выше, мы теперь получаем следующее выражение для операции:

$$\Omega(a^{(1)}, a^{(2)}) = \sum_n \sum_a \langle a^{(1)}, a^{(2)} | p = 0, \tilde{q} = a + nz \rangle \Pi_A(a). \quad (11.143)$$

Корректно нормированная операция принимает вид

$$\Omega(a^{(1)}, a^{(2)}) = \sum_{a+nz=a^{(1)}-a^{(2)}} \Pi_A(a). \quad (11.144)$$

Здесь суммирование проходит по всем a и n с ограничением фиксированного значения для величины $a + nz = a^{(1)} - a^{(2)}$. Это показывает, что операция зависит на самом деле только от величины $a \bmod z \equiv b$, и мы можем записать операцию как

$$\Omega(b) = \sum_{a \bmod z=b} \Pi_A(a) = \Pi_B(b). \quad (11.145)$$

Следовательно, операция $\Omega(b)$ равна проекции на собственное подпространство, соответствующее собственному значению b модульной суммы B . Использование состояния датчика (11.142) поэтому допускает измерение суммы по модулю от локальных наблюдаемых. Отметим, что не обязательно, чтобы сумма по n в начальном состоянии датчика пробегала все целые числа. В дальнейшем мы применим измерение сумм по модулю только к ограниченным операторам. В этом случае этого достаточно, если сумма проходит ограниченное количество целых чисел, а именно те, которые проецируют собственные значения A на фундаментальный интервал $[0, z)$.

11.3.3. Верификация квантового состояния

Изучение предыдущего раздела поднимает вопрос: можем ли мы измерить все нелокальные наблюдаемые соответствующим образом разработанными квантовыми датчиками и использованием различных локальных взаимодействий между датчиком и изучаемой системой. Это удивительно, но ответ на этот вопрос такой, что мы не можем измерить все нелокальные наблюдаемые, то есть мы не можем разработать идеальное, квантовое

неразрушающее измерение для каждой наблюдаемой, соответствующей алгебре операторов изучаемой системы. На самом деле, как мы увидим, измерение большинства нелокальных наблюдаемых несовместно с принципом причинности. В следующих разделах мы сформулируем ограничение на измеримость наблюдаемых, которые накладываются причинностью, и исследуем некоторые классы нелокальных операторов и состояний, которые измеримы.

Для ясного и систематического рассмотрения предмета оказывается очень полезной концепция измерения, направленного на верификацию состояния. Это более общая концепция, чем обычная идея измерения состояний, которая используется в квантовой механике. В настоящем подразделе мы определяем верификацию состояний и описываем ее на языке операций и эффектов в рамках обобщенной теории измерения, развитой в разделе 2.4.2.

Измерение, направленное на верификацию состояния, задаваемого $|\Psi_0\rangle$, определяется измерительным устройством, которое выполняет Да/Нет-решающие эксперименты со следующим свойством. Пусть $|\Psi\rangle$ будет любым состоянием, лежащем в гильбертовом пространстве, и

$$|\Psi\rangle = \alpha|\Psi_0\rangle + \beta|\Psi_{\perp}\rangle \quad (11.146)$$

— его разложение на параллельную компоненту $|\Psi_0\rangle$ и перпендикулярную, так что $\langle\Psi_0|\Psi_{\perp}\rangle = 0$ и $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Если до измерения система находится в состоянии $|\Psi\rangle$, то измерительное устройство отвечает Да с вероятностью $|\alpha|^2$, и отвечает Нет с вероятностью $|\beta|^2$.

Аналогично, мы определяем КНИ верификацию состояний как измерение, направленное на проверку состояния со следующим дополнительным свойством. Если результат Да, то система находится в состоянии $|\Psi_0\rangle$ после измерения. Это означает, что начальное состояние $|\Psi_0\rangle$ остается неизмененным измерением, так как результат Да является несомненным фактом. В случае, когда измерение дает Нет, система находится в состоянии $|\Psi'_{\perp}\rangle$, которое ортогонально $|\Psi_0\rangle$, но которое не обязательно равно ортогональной компоненте $|\Psi_{\perp}\rangle$ начального состояния. Последнее свойство означает, что при повторном эксперименте мы снова с уверенностью получим Нет.

Должно быть ясно, что квантовое измерение-верификация в общем случае не представляет собой измерения проекции

$$\Pi_0 = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| \quad (11.147)$$

на начальное состояние в обычном смысле квантовой механики. В случае КНИ верификации состояния ортогональной компоненте разрешается изменяться во время измерения, а для измерения, направленного на верифика-

цию состояния, в общем случае, вовсе не делается никаких предположений относительно поведения вектора состояния системы.

Теперь мы опишем форму для общей верификации состояния, используя язык операций и эффектов. Согласно этому определению, устройство имеет множество $\{a\}$ Да-считываний и множество $\{b\}$ Нет-считываний. Соответственно, мы имеем набор Да-операций $\Omega_{\text{Yes}}(a)$ и Нет-операций $\Omega_{\text{No}}(b)$. Поведение матрицы плотности изучаемой системы в результате неселективной верификации состояния может быть описано как

$$\rho \rightarrow \rho' = \sum_a \Omega_{\text{Yes}}(a) \rho \Omega_{\text{Yes}}^\dagger(a) + \sum_b \Omega_{\text{No}}(b) \rho \Omega_{\text{No}}^\dagger(b). \quad (11.148)$$

Это, как мы видели в разделе 2.4.2, кроме предположения о дискретности набора считываний, есть наиболее важное общее положение. В частности, оно включает возможность использования квантовых датчиков в смешанных состояниях, а также неполные, приближенные или неселективные измерения конечного состояния зонда.

Введение Да- и Нет-эффектов задается формулами

$$F_{\text{Yes}} = \sum_a \Omega_{\text{Yes}}^\dagger(a) \Omega_{\text{Yes}}(a), \quad (11.149)$$

$$F_{\text{No}} = \sum_b \Omega_{\text{No}}^\dagger(b) \Omega_{\text{No}}(b), \quad (11.150)$$

из сохранения вероятности мы получаем

$$F_{\text{Yes}} + F_{\text{No}} = I. \quad (11.151)$$

Рассмотрим начальное состояние $|\Psi\rangle$ и его разложение (11.146). Мы можем записать вероятность для результата Да верификации состояния $|\Psi_0\rangle$ как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{Yes}}(\Psi) &= \langle \Psi | F_{\text{Yes}} | \Psi \rangle = |\alpha|^2 \langle \Psi_0 | F_{\text{Yes}} | \Psi_0 \rangle + |\beta|^2 \langle \Psi_\perp | F_{\text{Yes}} | \Psi_\perp \rangle + \\ &\quad + (\alpha \beta^* \langle \Psi_\perp | F_{\text{Yes}} | \Psi_0 \rangle + \text{c.c.}) = |\alpha|^2. \end{aligned} \quad (11.152)$$

Последнее равенство выражает условие для измерения, направленного на верификацию состояния, и должно быть истинным для всех α , β и $|\Psi_\perp\rangle$. Устанавливая сперва $\beta = 0$, а затем $\alpha = 0$, легко приходим к соотношениям

$$\langle \Psi_0 | F_{\text{Yes}} | \Psi_0 \rangle = 1, \quad \langle \Psi_\perp | F_{\text{Yes}} | \Psi_\perp \rangle = 0. \quad (11.153)$$

Если эти соотношения подставить в уравнение (11.152), то также находим, что

$$\langle \Psi_\perp | F_{\text{Yes}} | \Psi_0 \rangle = 0. \quad (11.154)$$

Отсюда следует, что при любом измерении, направленном на верификацию состояния, Да-эффект равен проекции на верифицируемое состояние

$$F_{\text{Yes}} = \Pi_0 \equiv |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|. \quad (11.155)$$

С помощью уравнения (11.153) приходим к следующим уравнениям:

$$\Omega_{\text{Yes}}(a)|\Psi_{\perp}\rangle = 0 \quad (11.156)$$

и

$$\Omega_{\text{No}}(b)|\Psi_0\rangle = 0. \quad (11.157)$$

Уравнение (11.156) выполняется для всех a и для всех состояний, перпендикулярных верифицируемым состояниям, тогда как уравнение (11.157) верно для всех b .

Подводя итог, мы видим, что для любого измерения-верификации все Да-операции уничтожают Нет-состояния, все Нет-операции уничтожают Да-состояния, а Да-эффект равен проекции на Да-состояние. С помощью сохранения вероятности выводится также, что Нет-эффект равен проекции на ортогональное дополнение

$$F_{\text{No}} = I - \Pi_0 \equiv \Pi_{\perp}. \quad (11.158)$$

Для того чтобы верификация состояния была КНИ измерением, должны быть удовлетворены два следующих условия. Во-первых, когда применено состояние $|\Psi_0\rangle$, все Да-операции должны в результате давать состояние, которое пропорционально $|\Psi_0\rangle$. Тогда требуется только отдельная Да-операция, которая должна быть проекцией на верифицируемое состояние,

$$\Omega_{\text{Yes}} = \Pi_0. \quad (11.159)$$

Вторым дополнительным условием для КНИ верификации состояния является то, что все Нет-операции должны отображать подпространство, ортогональное $|\Psi_0\rangle$, в себя.

Эти результаты будут применены в следующем подразделе к верификации нелокальных состояний.

11.3.4. Нелокальные операции и принцип причинности

В настоящем и следующем подразделах мы изучим измерение квантовых подсистем, которые состоят из двух локализованных частей (1) и (2), описываемых гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ соответственно.

Суммарное пространство квантового объекта является тензорным произведением $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Мы исследуем верификацию запутанного состояния $|\Psi_0\rangle$ в этом пространстве. Вводя соответствующие локальные базисы $|\chi_i^{(1)}\rangle$ и $|\chi_i^{(2)}\rangle$ в обеих частях системы, заданное состояние $|\Psi_0\rangle$ может быть представлено на языке разложения Шмидта как показано ниже (см. раздел 2.2.2):

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{i=1}^D \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle. \quad (11.160)$$

Здесь и далее мы полагаем, что $|\Psi_0\rangle$ нормирована, а ее число Шмидта D ограничено. Таким образом, разложение Шмидта состоит из ограниченного набора членов, и мы полагаем, что комплексные числа α_i , $i = 1, \dots, D$ отличны от нуля

$$\sum_{i=1}^D |\alpha_i|^2 = 1, \quad \alpha_i \neq 0. \quad (11.161)$$

Для $D \geq 2$ состояние $|\Psi_0\rangle$ является запутанным. Напомним, что $|\Psi_0\rangle$ называется максимально запутанным состоянием, если абсолютные значения неисчезающих коэффициентов в разложении Шмидта $|\Psi_0\rangle$ равны друг другу, то есть если $|\alpha_i| = 1/\sqrt{D}$ для всех $i = 1, \dots, D$.

Дальше мы обозначаем через $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$ локальные подпространства, натянутые на базисные векторы, которые появляются в разложении Шмидта с ненулевыми коэффициентами

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} = \text{span} \left\{ |\chi_i^{(1)}\rangle \right\}_{i=1, \dots, D}, \quad (11.162)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(2)} = \text{span} \left\{ |\chi_i^{(2)}\rangle \right\}_{i=1, \dots, D}. \quad (11.163)$$

Тензорное произведение $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$ есть, таким образом, D^2 -мерное пространство.

11.3.4.1. Формулировка принципа причинности. Мы рассмотрим установку, изображенную на рис. 11.12. Начальное состояние системы может быть любым состоянием $|\Psi\rangle$. В двух разделенных пространственно-неподобных интервалах точках $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ выполняется измерение, направленное на верификацию состояния $|\Psi_0\rangle$. В локализованной области, соответствующей части (1), мы выполняем измерение некоторой наблюдаемой $B^{(1)}$, ссылаясь на локальные переменные этой части. В дальнейшем через $E[B^{(1)}|\Psi]$ мы обозначаем математическое ожидание $B^{(1)}$ для этого

локального измерения, выполненного после верификации состояния, при условии, что начальное состояние есть $|\Psi\rangle$.

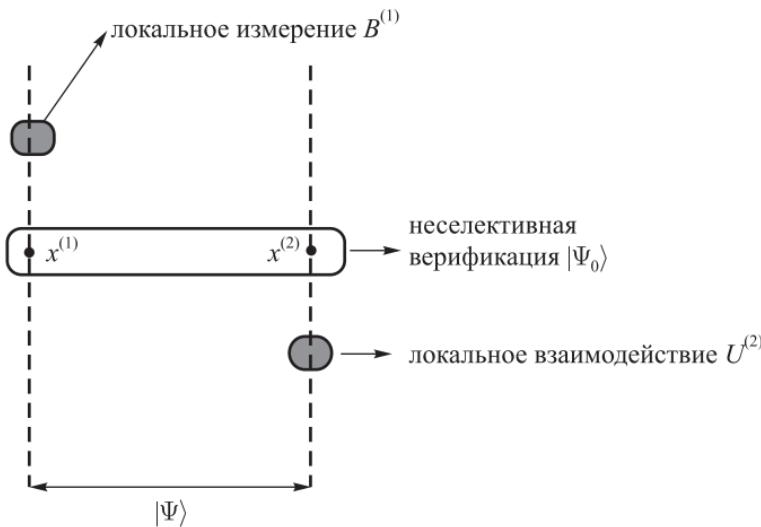


Рис. 11.12. Иллюстрация принципа причинности, выражаемая уравнением (11.164). После верификационного измерения $|\Psi_0\rangle$ локальная наблюдаемая $B^{(1)}$ измеряется на части (1) системы. Перед верификационным измерением в части (2) системы может быть применено локальное взаимодействие, описываемое унитарным оператором $U^{(2)}$. Измерение $B^{(1)}$ и взаимодействие $U^{(2)}$ разделяются пространственно-подобным интервалом, так что математическое ожидание $B^{(1)}$ должно быть независимым от того, будет ли взаимодействие $U^{(2)}$ применено к системе или нет. Верификация состояния сама по себе описывается на неселективном уровне.

Предполагается, что некоторое локальное взаимодействие может быть применено на части (2) перед измерением, направленным на верификацию состояния. Это может быть описано некоторым унитарным оператором $U^{(2)}$, действующим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)}$. Например, если квантовый объект представляет собой спиновую систему, можно рассматривать $U^{(2)}$ как описывающее взаимодействие системы с магнитным полем, которым экспериментатор может перевернуть спин частицы в части (2). Так как мы полагаем, что все может быть измерено локально, то мы можем также предположить, что любое унитарное преобразование может быть реализовано соответствующим выбором взаимодействий в каждой локальной части системы.

Мы допускаем, что измерение $B^{(1)}$ выполняется в области пространства-времени, которая отделяется от области взаимодействия $U^{(2)}$ пространственноподобным интервалом. Принцип причинности тогда подразумевает, что результат локального измерения, осуществляющийся в части (1) *после* верификации состояния, не зависит от какого бы то ни было способа локального взаимодействия, которое применяется к системе в части (2) *перед* верификацией состояния. Это означает, что математическое ожидание любой наблюдаемой $B^{(1)}$, определяемое после верификации состояния, должно быть тем же независимо от того, применено ли $U^{(2)}$ к системе или нет, то есть мы должны иметь

$$E[B^{(1)}|U^{(2)}\Psi] = E[B^{(1)}|\Psi]. \quad (11.164)$$

Это уравнение выражает требование принципа причинности для измерения, осуществляющего верификацию состояния.

Должно быть ясно, что верификация состояния должна быть описана здесь как неселективное измерение. Причина в том, что любой локальный наблюдатель в части (1) не знает результата верификации нелокального состояния $|\Psi_0\rangle$ в момент времени, когда измеряется $B^{(1)}$. Однако если бы уравнение (11.164) не всегда было истинным, то локальный наблюдатель в части (2) мог бы передать информацию из части (2) в часть (1) со скоростью, превышающей скорость света. Таким образом, математическое ожидание задается выражением

$$\begin{aligned} E[B^{(1)}|\Psi] &= \sum_a \langle \Psi | \Omega_{\text{Yes}}^\dagger(a) B^{(1)} \Omega_{\text{Yes}}(a) | \Psi \rangle + \\ &+ \sum_b \langle \Psi | \Omega_{\text{No}}^\dagger(b) B^{(1)} \Omega_{\text{No}}(b) | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (11.165)$$

Принцип причинности, сформулированный уравнениями (11.164) и (11.165), приводит к важным следствиям для измеримости нелокальных величин. Нужно придать особое значение тому, что уравнение (11.164) *заведомо* удовлетворено, если мы полагаем, как, конечно, и делаем, что только локальные взаимодействия объект-датчик включаются в измерения. На самом деле, как легко видеть, уравнение (11.164) становится тривиальным, если мы запишем его на языке вектора состояния (или матрицы плотности) для полной системы объект-датчик. Однако из приведенной выше формулировки принципа причинности могут быть выведены важные заключения, если этот принцип объединяется с измерениями, направленными на верификацию нелокальных состояний, и с определенными свойствами, лежащими в основе гильбертова пространства объединенной изучаемой системы.

11.3.4.2. Теорема стирания локальной информации. В дальнейшем мы докажем теорему Попеску и Вайдмана (Popescu, Vaidman 1994), которая может быть выведена из принципа причинности (11.164) и которая приводит к некоторым интересным заключениям о возможностях нелокальных измерений. Эта теорема устанавливает, что

$$E[B^{(1)}|\Psi] = E[B^{(1)}|\Psi_0] \quad \text{при всех } |\Psi\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}. \quad (11.166)$$

Это означает, что математические ожидания для всех локальных наблюдаемых в части (1) не зависят от начального состояния $|\Psi\rangle$ до верификационного измерения состояния. Другими словами, после верификационного измерения состояния локальный наблюдатель в части (1) посредством измерения локальных наблюдаемых $B^{(1)}$ не может выяснить начальное состояние системы до верификации состояния. Таким образом, после верификации состояния в локальной матрице плотности не существует следов начального состояния, связанных с переменными части (1) системы. Это свойство называется стиранием локальной информации верификационным измерением состояния.

Подчеркнем, что стирание локальной информации относится к начальным состояниям $|\Psi\rangle$, которые соответствуют подпространствам $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Для произвольного $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ из уравнения (11.166), общем случае это неверно. В качестве примера мы возьмем $|\Psi_0\rangle = |\chi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle$. Это произведение состояний, очевидно, может быть проверено выполнением отдельных локальных измерений проекций на состояния $|\chi^{(1)}\rangle$ и $|\chi^{(2)}\rangle$ в частях (1) и (2) системы. Рассмотрим далее состояние $|\Psi\rangle = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle$, где $|\psi^{(1)}\rangle$ ортогонально $|\chi^{(1)}\rangle$. Так как выбранная верификация состояния является идеальным квантовым измерением, мы имеем условные ожидания $E[B^{(1)}|\Psi_0] = \langle\chi^{(1)}|B^{(1)}|\chi^{(1)}\rangle$ и $E[B^{(1)}|\Psi] = \langle\psi^{(1)}|B^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle$, которые, в общем, не равны друг другу.

Чтобы доказать (11.166), мы сначала вычислим выражение для условного математического ожидания (11.165). Используя разложение (11.146) для $|\Psi\rangle$ и принимая во внимание свойства (11.156) и (11.157) верификационного измерения состояния, мы получаем

$$\begin{aligned} E[B^{(1)}|\Psi] &= |\alpha|^2 \sum_a \langle \Psi_0 | \Omega_{\text{Yes}}^\dagger(a) B^{(1)} \Omega_{\text{Yes}}(a) | \Psi_0 \rangle + \\ &+ |\beta|^2 \sum_b \langle \Psi_\perp | \Omega_{\text{No}}^\dagger(b) B^{(1)} \Omega_{\text{No}}(b) | \Psi_\perp \rangle = \\ &= |\alpha|^2 E[B^{(1)}|\Psi_0] + |\beta|^2 E[B^{(1)}|\Psi_\perp]. \quad (11.167) \end{aligned}$$

Таким образом, мы находим

$$E[B^{(1)}|\Psi] = E[B^{(1)}|\Psi_0] + |\beta|^2 \left(E[B^{(1)}|\Psi_{\perp}] - E[B^{(1)}|\Psi_0] \right). \quad (11.168)$$

Если $|\Psi\rangle$ имеет неисчезающую ортогональную компоненту, то есть если $\beta \neq 0$ в разложении (11.146), последнее уравнение говорит нам, что $E[B^{(1)}|\Psi]$ равно $E[B^{(1)}|\Psi_0]$ тогда и только тогда, когда $E[B^{(1)}|\Psi_{\perp}]$ равно $E[B^{(1)}|\Psi_0]$,

$$E[B^{(1)}|\Psi] = E[B^{(1)}|\Psi_0] \iff E[B^{(1)}|\Psi_{\perp}] = E[B^{(1)}|\Psi_0]. \quad (11.169)$$

Для доказательства (11.166) используется следующая стратегия. На первом шаге показываем, что любое состояние $|\Psi\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ может быть представлено в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{r=1}^N c_r U_r^{(2)} |\Psi_0\rangle, \quad (11.170)$$

где c_r — обычное число, а $U_r^{(2)}$ — унитарные операторы, которые действуют на локальное пространство $\mathcal{H}^{(2)}$ части (2) системы. Это означает, что любой такой вектор состояния может быть представлен как суперпозиция ограниченного количества состояний, которые могут быть сформированы из $|\Psi_0\rangle$ применением унитарного преобразования, действующего на часть (2) системы. На втором шаге доказательства показывается, что любое состояние вида (11.170) подчиняется уравнению (11.166). На этом втором шаге используется принцип причинности (11.164), а также свойство (11.169).

Существование представления (11.170) будет продемонстрировано явным конструированием локальных унитарных операторов $U_r^{(2)}$. Пространство $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ натянуто на базисные векторы

$$|\chi_k^{(1)}\rangle \otimes |\chi_l^{(2)}\rangle, \quad k = 1, \dots, D, \quad l = 1, 2, \dots \quad (11.171)$$

Отметим, что ограничение $k \leq D$ является результатом нашего требования, что $|\Psi\rangle$ соответствует пространству $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Как мы уже отмечали, теорема верна не для всех векторов состояний, принадлежащих $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Очевидно, этого достаточно, чтобы продемонстрировать, что любой базисный вектор (11.171) может быть представлен в виде (11.170). Это достигается с помощью двух унитарных преобразований $U_1^{(2)}$ и $U_2^{(2)}$, которые

действуют в пространстве $\mathcal{H}^{(2)}$ и которые определяются как

$$U_1^{(2)}|\chi_k^{(2)}\rangle = |\chi_l^{(2)}\rangle, \quad (11.172)$$

$$U_1^{(2)}|\chi_l^{(2)}\rangle = |\chi_k^{(2)}\rangle, \quad (11.173)$$

$$U_1^{(2)}|\chi_i^{(2)}\rangle = |\chi_i^{(2)}\rangle, \quad \text{при } i \neq k, l, \quad (11.174)$$

и

$$U_2^{(2)}|\chi_k^{(2)}\rangle = -|\chi_l^{(2)}\rangle, \quad (11.175)$$

$$U_2^{(2)}|\chi_l^{(2)}\rangle = |\chi_k^{(2)}\rangle, \quad \text{при } k \neq l, \quad (11.176)$$

$$U_2^{(2)}|\chi_i^{(2)}\rangle = |\chi_i^{(2)}\rangle, \quad \text{при } i \neq k, l. \quad (11.177)$$

Таким образом, $U_1^{(2)}$ просто меняет состояния $|\chi_k^{(2)}\rangle$ и $|\chi_l^{(2)}\rangle$, а $U_2^{(2)}$ меняет эти состояния и вводит дополнительный знак минуса. Для $k = l$ оператор $U_1^{(2)}$ является тождественным, в то время как $U_2^{(2)}$ умножает k -й базисный вектор на -1 . Применяя эти операторы к $|\Psi_0\rangle$, мы получаем для $k \neq l$

$$U_1^{(2)}|\Psi_0\rangle = +\alpha_k|\chi_k^{(1)}\rangle|\chi_l^{(2)}\rangle + \alpha_l|\chi_l^{(1)}\rangle|\chi_k^{(2)}\rangle + \sum_{i \neq k, l} \alpha_i|\chi_i^{(1)}\rangle|\chi_i^{(2)}\rangle, \quad (11.178)$$

$$U_2^{(2)}|\Psi_0\rangle = -\alpha_k|\chi_k^{(1)}\rangle|\chi_l^{(2)}\rangle + \alpha_l|\chi_l^{(1)}\rangle|\chi_k^{(2)}\rangle + \sum_{i \neq k, l} \alpha_i|\chi_i^{(1)}\rangle|\chi_i^{(2)}\rangle. \quad (11.179)$$

Отсюда вытекает, что

$$U_1^{(2)}|\Psi_0\rangle - U_2^{(2)}|\Psi_0\rangle = 2\alpha_k|\chi_k^{(1)}\rangle \otimes |\chi_l^{(2)}\rangle, \quad (11.180)$$

что дает представление требуемого вида. А именно

$$|\chi_k^{(1)}\rangle \otimes |\chi_l^{(k)}\rangle = \left(\frac{1}{2\alpha_k} U_1^{(2)} - \frac{1}{2\alpha_k} U_2^{(2)} \right) |\Psi_0\rangle. \quad (11.181)$$

Как легко видеть, случай $k = l$ приводит к тому же уравнению. Отметим, что $\alpha_k \neq 0$ при $k = 1, \dots, D$ в силу наших предположений о $|\Psi\rangle$ и $|\Psi_0\rangle$, что заканчивает доказательство (11.170).

Теперь мы должны показать, что любой вектор $|\Psi\rangle$ вида (11.170) удовлетворяет уравнению (11.166). Это делается по индукции введением N , числа членов, включенных в представление. Для $N = 1$ мы можем установить $c_1 = 1$, так как $|\Psi\rangle$ нормирована. Уравнение (11.166) тогда следует прямо из принципа причинности (11.164).

Предполагается, что (11.166) выполняется для всех состояний с разложением вида (11.170), включающем N членов. Рассмотрим некоторое нормированное состояние, чье представление этого вида содержит $N + 1$ член

$$|\Psi\rangle = \sum_{r=1}^{N+1} c_r U_r^{(2)} |\Psi_0\rangle. \quad (11.182)$$

Для краткости, ниже мы пишем $E[\Psi]$ вместо $E[B^{(1)}|\Psi]$. Согласно принципу причинности (11.164), мы имеем

$$E[\Psi] = E \left[\left(U_{N+1}^{(2)} \right)^{-1} \Psi \right], \quad (11.183)$$

где

$$\left(U_{N+1}^{(2)} \right)^{-1} |\Psi\rangle = \sum_{r=1}^N c_r \left(U_{N+1}^{(2)} \right)^{-1} U_r^{(2)} |\Psi_0\rangle + c_{N+1} |\Psi_0\rangle. \quad (11.184)$$

Если сумма по r в (11.184) есть ноль, то мы доказали теорему. Поэтому предполагаем, что это не ноль и вводим нормированное состояние

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \mathcal{N} \sum_{r=1}^N c_r \left(U_{N+1}^{(2)} \right)^{-1} U_r^{(2)} |\Psi_0\rangle \quad (11.185)$$

с соответствующим нормировочным множителем \mathcal{N} . Введенное предположение дает

$$E[\tilde{\Psi}] = E[\Psi_0]. \quad (11.186)$$

Дальше мы раскладываем состояние $|\tilde{\Psi}\rangle$:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \alpha |\Psi_0\rangle + \beta |\Psi_\perp\rangle, \quad (11.187)$$

где мы считаем, что $\beta \neq 0$, так как иначе теорема доказывается сразу. Уравнение (11.186) вместе со свойством (11.169) в результате дают

$$E[\Psi_\perp] = E[\Psi_0]. \quad (11.188)$$

Ввиду уравнений (11.184), (11.185) и (11.187) мы имеем разложение

$$\left(U_{N+1}^{(2)} \right)^{-1} |\Psi\rangle = \left(\frac{\alpha}{\mathcal{N}} + c_{N+1} \right) |\Psi_0\rangle + \frac{\beta}{\mathcal{N}} |\Psi_\perp\rangle \equiv \alpha' |\Psi_0\rangle + \beta' |\Psi_\perp\rangle. \quad (11.189)$$

Так как $\beta' \neq 0$ (см. выше), мы теперь можем использовать уравнение (11.188), чтобы с помощью (11.169) заключить, что

$$E\left[\left(U_{N+1}^{(2)}\right)^{-1}\Psi\right] = E[\Psi_0], \quad (11.190)$$

откуда теорема доказывается использованием уравнения (11.183).

Необходимо отметить, что теорема была доказана при вполне общих условиях. В качестве физических предположений мы использовали только существование операций и эффектов, описывающих верификационное измерение состояния, а также принцип причинности.

11.3.5. Ограничение на измеримость операторов

Сделаем некоторые важные выводы из теоремы стирания локальной информации относительно измеримости нелокальных операторов в составном гильбертовом пространстве системы.

Первый вывод в том, что проекции $\Pi_0 = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$ на запутанные состояния $|\Psi_0\rangle$ не измеримы. Для доказательства этого утверждения мы выведем противоречие с принципом причинности. Пусть

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{i=1}^D \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle \quad (11.191)$$

будет разложением Шмидта $|\Psi_0\rangle$. Так как мы полагаем, что это состояние запутано, то как минимум два коэффициента α_i отличны от нуля, то есть мы имеем $\alpha_k, \alpha_l \neq 0$ для некоторых пар индексов $k \neq l$. КНИ измерение проекции Π_0 означает, что имеются две операции, а именно $\Omega_{\text{Yes}} = \Pi_0$ и $\Omega_{\text{No}} = \Pi_{\perp} = I - \Pi_0$. Отсюда следует, что не только $|\Psi_0\rangle$, но также любое ортогональное состояние $|\Psi_{\perp}\rangle$ должно оставаться неизменным при измерении, то есть

$$E[B^{(1)}|\Psi_0\rangle] = \langle\Psi_0|B^{(1)}|\Psi_0\rangle, \quad (11.192)$$

$$E[B^{(1)}|\Psi_{\perp}\rangle] = \langle\Psi_{\perp}|B^{(1)}|\Psi_{\perp}\rangle. \quad (11.193)$$

Стирание локальной информации, выражаемое уравнением (11.166), подразумевает, что

$$\langle\Psi_{\perp}|B^{(1)}|\Psi_{\perp}\rangle = \langle\Psi_0|B^{(1)}|\Psi_0\rangle \quad (11.194)$$

должно выполняться для всех состояний, которые ортогональны $|\Psi_0\rangle$ и которые соответствуют пространству $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Теперь мы возьмем $|\Psi_{\perp}\rangle = |\chi_k^{(1)}\rangle \otimes |\chi_l^{(2)}\rangle$ и выберем $B^{(1)} = |\chi_l^{(1)}\rangle \langle \chi_l^{(1)}|$. Это приводит к условиям

$$\langle \Psi_{\perp} | B^{(1)} | \Psi_{\perp} \rangle = \langle \chi_k^{(1)} | B^{(1)} | \chi_k^{(1)} \rangle = 0, \quad (11.195)$$

$$\langle \Psi_0 | B^{(1)} | \Psi_0 \rangle = \sum_i |\alpha_i|^2 \langle \chi_i^{(1)} | B^{(1)} | \chi_i^{(1)} \rangle = |\alpha_l|^2 \neq 0, \quad (11.196)$$

которые несовместимы с уравнением (11.194). Это показывает, что измерение проекции на запутанное состояние будет противоречить принципу причинности.

Отметим, что противоречие принципу причинности появляется, только если, по меньшей мере, два коэффициента Шмидта α_i являются неисчезающими, то есть только если $|\Psi_0\rangle$ — запутанное состояние. Конечно, все проекции на произведение состояний $|\chi_k^{(1)}\rangle \otimes |\chi_l^{(2)}\rangle$ являются измеримыми.

В качестве примера можно привести квадрат оператора полного спина \vec{J} (см. (11.140)) для нелокальной системы двух частиц со спинами $\frac{1}{2}$.

Оператор \vec{J}^2 имеет тройное вырождение собственного пространства, соответствующее собственному значению 2, и невырожденное собственное состояние, соответствующее собственному значению 0. Невырожденное собственное состояние, а именно: собственное состояние $|j=0, m=0\rangle$ является запутанным состоянием. Измерение \vec{J}^2 , таким образом, является эквивалентным измерению проекции на запутанное состояние. Таким образом, оператор \vec{J}^2 не является измеримым.

Эти рассмотрения могут быть обобщены следующим образом. Пусть A будет некоторой измеримой наблюдаемой в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ с, по меньшей мере, одним собственным значением a и соответствующим запутанным собственным состоянием $|\Psi_0\rangle$ вида (11.191) с числом Шмидта $D \geq 2$. Как и прежде, мы определяем $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$ подпространствами, натянутыми на соответствующие базисные векторы $|\chi_i^{(1)}\rangle$ и $|\chi_i^{(2)}\rangle$, где $i = 1, \dots, D$. Если дальше мы предполагаем, что A оставляет инвариантным подпространство $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$, то принцип причинности приводит к следующему выводу. Невырожденное собственное состояние $|\Psi_0\rangle$, а также все другие собственные состояния A в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$ должны быть максимально запутаны.

Чтобы доказать это утверждение, мы введем базис $|\Psi_{\nu}\rangle$, $\nu = 0, \dots, D^2 - 1$, собственных векторов A , соответствующих простран-

ству $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$. Состояние $|\Psi_0\rangle$, задаваемое $\nu = 0$, является лишь собственным состоянием, соответствующим невырожденному собственному значению a .

Теперь любое измерение A неизбежно является верификацией состояния $|\Psi_0\rangle$. Чтобы привести условие причинности к соответствующему виду, мы вводим плотность $\rho^{(1)}(\Psi)$, которая определяется локальной матрицей плотности, описывающей переменные части (1) после верификации состояния, в соответствии с условием, что начальное состояние было $|\Psi\rangle$. Эта плотность получается взятием частичного следа по части (2) матрицы плотности всей системы после верификации состояния

$$\rho^{(1)}(\Psi) = \text{tr}^{(2)} \left\{ \sum_a \Omega_{\text{Yes}}(a) |\Psi\rangle\langle\Psi| \Omega_{\text{Yes}}^\dagger(a) + \sum_b \Omega_{\text{No}}(b) |\Psi\rangle\langle\Psi| \Omega_{\text{No}}^\dagger(b) \right\}. \quad (11.197)$$

Стирание локальной информации, выражаемое (11.166), может быть переформулировано как

$$\rho^{(1)}(\Psi) = \rho^{(1)}(\Psi_0) \quad \text{для всех } |\Psi\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}. \quad (11.198)$$

Так как все $|\Psi_\nu\rangle$ соответствуют пространству $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$, то для всех ν мы имеем

$$\rho^{(1)}(\Psi_0) = \rho^{(1)}(\Psi_\nu). \quad (11.199)$$

Измерение A оставляет неизменными все собственные состояния. Таким образом, мы заключаем, что

$$\text{tr}^{(2)}\{|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\} = \text{tr}^{(2)}\{|\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu|\}. \quad (11.200)$$

Суммируя это уравнение по ν и принимая во внимание, что $|\Psi_\nu\rangle$ задает базис в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$, мы немедленно получаем

$$\begin{aligned} D^2 \cdot \text{tr}^{(2)}\{|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\} &= \text{tr}^{(2)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{D^2-1} |\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu| \right\} = \\ &= \text{tr}^{(2)} \left\{ I_{\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}} \right\} = \\ &= D \cdot I_{\tilde{\mathcal{H}}^{(1)}}, \end{aligned} \quad (11.201)$$

откуда с использованием разложения Шмидта для $|\Psi_0\rangle$ вытекает

$$\text{tr}^{(2)}\{|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\} = \sum_{i=1}^D |\alpha_i|^2 |\chi_i^{(1)}\rangle\langle\chi_i^{(1)}| = \frac{1}{D} I_{\tilde{\mathcal{H}}^{(1)}}. \quad (11.202)$$

Это доказывает, что $|\alpha_i| = 1/\sqrt{D}$ для всех $i = 1, \dots, D$, то есть что невырожденное состояние $|\Psi_0\rangle$ является максимально запутанным. Уравнение (11.200) теперь говорит нам, что оно также должно быть верным для других состояний $|\Psi_\nu\rangle$. Таким образом, мы видим, что на самом деле все собственные состояния A в подпространстве $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$ имеют разложение Шмидта вида

$$|\Psi_\nu\rangle = \sum_{i=1}^D \beta_{\nu, i} |\chi_{\nu, i}^{(1)}\rangle \otimes |\chi_{\nu, i}^{(2)}\rangle, \quad \text{где } |\beta_{\nu, i}| = \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad (11.203)$$

с соответствующими локальными базисными векторами $|\chi_{\nu, i}^{(1)}\rangle$ и $|\chi_{\nu, i}^{(2)}\rangle$.

В качестве нашего заключительного приложения принципа причинности мы дадим полную характеристику всех невырожденных измеримых наблюдаемых для нашего примера, а именно для нелокальной системы двух частиц со спином $\frac{1}{2}$ (Popescu, Vaidman, 1994). Таким образом, пусть A является невырожденной наблюдаемой в совместном гильбертовом пространстве этих частиц. Очевидно, есть только два возможных случая. Все собственные состояния являются прямыми произведениями, или существует, по меньшей мере, одно запутанное собственное состояние.

Если все собственные состояния являются прямыми произведениями, можно проверить, что можно выбрать соответствующий локальный базис, такой, что собственные состояния A принимают следующий вид:

$$|\Psi_1\rangle = |+z\rangle|+z'\rangle, \quad (11.204)$$

$$|\Psi_2\rangle = |-z\rangle|+z'\rangle, \quad (11.205)$$

$$|\Psi_3\rangle = |+z''\rangle|-z'\rangle, \quad (11.206)$$

$$|\Psi_4\rangle = |-z''\rangle|-z'\rangle, \quad (11.207)$$

где мы обозначаем $|\pm n\rangle$ собственные состояния компоненты спина на направление n с соответствующими собственными значениями $\pm \frac{1}{2}$. Принцип причинности тогда приводит к выводу, что направление z'' должно быть параллельным или антипараллельным z , что означает, что собственные состояния A могут всегда быть приведены к виду

$$|\Psi_1\rangle = |+z\rangle|+z'\rangle, \quad (11.208)$$

$$|\Psi_2\rangle = |-z\rangle|+z'\rangle, \quad (11.209)$$

$$|\Psi_3\rangle = |+z\rangle|-z'\rangle, \quad (11.210)$$

$$|\Psi_4\rangle = |-z\rangle|-z'\rangle. \quad (11.211)$$

Для доказательства этого утверждения мы возьмем локальную наблюдаемую $B^{(1)} = | - z \rangle \langle -z|$. Так как $|\Psi_1\rangle$ есть собственное состояние A ,

$$E[B^{(1)}|\Psi_1] = \langle \Psi_1 | B^{(1)} | \Psi_1 \rangle = 0. \quad (11.212)$$

Для состояния $|\Phi\rangle = | + z \rangle | - z' \rangle$ принцип причинности в результате дает

$$E[B^{(1)}|\Phi] = E[B^{(1)}|\Psi_1] = 0. \quad (11.213)$$

С другой стороны, так как A предполагается измеримым оператором, мы должны выполнить условие

$$\begin{aligned} E[B^{(1)}|\Phi] &= \sum_{i=1}^4 |\langle \Phi | \Psi_i \rangle|^2 \langle \Psi_i | B^{(1)} | \Psi_i \rangle = \\ &= | \langle +z | +z'' \rangle |^2 \cdot | \langle -z | +z'' \rangle |^2 + | \langle +z | -z'' \rangle |^2 \cdot | \langle -z | -z'' \rangle |^2 = \\ &= 0, \end{aligned} \quad (11.214)$$

показывающее, что на самом деле $z'' = \pm z$, как и требуется.

Теперь рассмотрим случай, когда, по меньшей мере, одно собственное состояние является запутанным. Общее рассмотрение тогда показывает, что все наши четыре собственных состояния A должны быть максимально запутаны. Это можно сделать соответствующим выбором локальных базисных векторов, поэтому всегда эти собственные состояния можно привести к следующему виду:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| + z \rangle | - z' \rangle - | - z \rangle | + z' \rangle), \quad (11.215)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| + z \rangle | - z' \rangle + | - z \rangle | + z' \rangle), \quad (11.216)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| + z \rangle | + z' \rangle - | - z \rangle | - z' \rangle), \quad (11.217)$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| + z \rangle | + z' \rangle + | - z \rangle | - z' \rangle). \quad (11.218)$$

Невырожденный оператор с собственными состояниями такого вида называется оператором состояний Белла. Таким образом, мы показали, что множество всех измеримых невырожденных операторов разделяется на два класса. Либо все собственные состояния являются прямыми произведениями вида (11.208), либо иначе все собственные состояния являются максимально запутанными состояниями вида (11.215). Мы продемонстрировали,

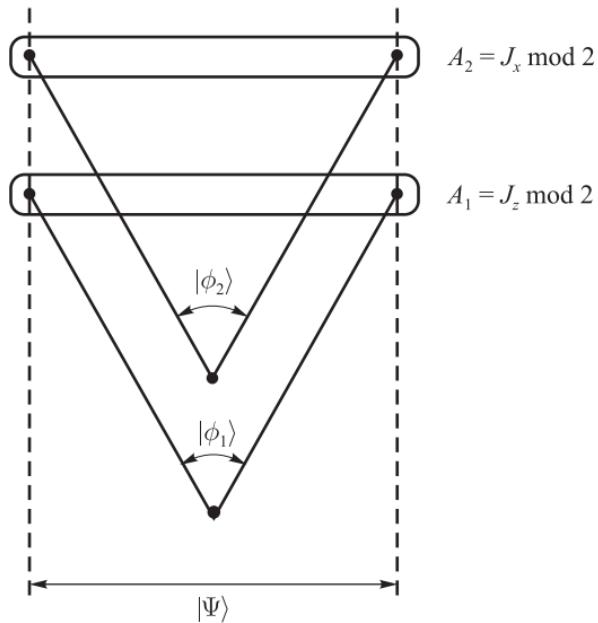


Рис. 11.13. Измерительное устройство, которое делает доступным измерение оператора состояний Белла с невырожденными собственными состояниями, задаваемыми (11.215). Используются два квантовых датчика, которыми измеряются нелокальные величины $A_1 = J_z \bmod 2$ и $A_2 = J_x \bmod 2$.

что измерение невырожденного оператора, который не соответствует ни одному из этих двух классов, будет противоречить причинности. Однако осталось показать, как эти операторы, чьи собственные состояния являются указанного выше вида, могут быть измерены.

Очевидно, что невырожденный оператор с собственными значениями вида (11.208) может быть измерен. На самом деле, это достигается двумя отдельными измерениями, выполненными локально в обеих частях системы. Теперь мы покажем, что также любой оператор состояний Белла, то есть любой невырожденный оператор A с собственными значениями вида (11.215) может быть измерен. Это будет сделано с помощью измерения двух нелокальных наблюдаемых A_1 и A_2 (см. рис. 11.13). Мы конструируем эти наблюдаемые и проверяем, что они представляют операторы, про которые мы уже знаем, что они измеримы.

Измерение должно быть КНИ для верификации всех собственных состояний $|\Psi_i\rangle$. Через Π_0 обозначим подпространство, натянутое на $|\Psi_1\rangle$

и $|\Psi_2\rangle$, а Π_1 — подпространство, натянутое на $|\Psi_3\rangle$ и $|\Psi_4\rangle$. С помощью первого измерения A_1 мы хотим найти, соответствует ли начальное состояние Π_0 или Π_1 . Для этого рассмотрим оператор

$$J_z = \frac{1}{2} \left(\sigma_z^{(1)} + \sigma_{z'}^{(2)} \right). \quad (11.219)$$

В подпространстве Π_0 имеется собственное значение 0, в то время как Π_1 охвачено собственными состояниями, соответствующими собственным значениям ± 1 . Таким образом, мы имеем $J_z^2 = 0$ в Π_0 и $J_z^2 = 1$ в Π_1 . Соотношение $J_z^2 = J_z \bmod 2$ говорит нам, что J_z^2 соответствует классу измеримых операторов. Таким образом, наше первое измерение является измерением величины

$$A_1 = J_z \bmod 2. \quad (11.220)$$

По второму измерению мы должны быть в состоянии отличать состояния $|\Psi_{1,2}\rangle$ в Π_0 , а также состояния $|\Psi_{3,4}\rangle$ в Π_1 . Чтобы найти соответствующие наблюдаемые для достижения этого, мы сначала отметим, что

$$\sigma_x^{(1)} |\pm z\rangle = |\mp z\rangle, \quad \sigma_{x'}^{(2)} |\pm z'\rangle = |\mp z'\rangle, \quad (11.221)$$

что показывает, что оператор $\sigma_x^{(1)} \sigma_{x'}^{(2)}$ переворачивает спины обеих частиц. Далее, $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_3\rangle$ нечетные, а $|\Psi_2\rangle$ и $|\Psi_4\rangle$ четные, относительно переворота спина обеих частиц. Таким образом, измерение $\sigma_x^{(1)} \sigma_{x'}^{(2)}$ вместе с предыдущим измерением A_1 делает нам доступным проверку всех четырех собственных состояний, которые составляют КНИ измерение оператора A состояний Белла. Для того чтобы показать, что оператор $\sigma_x^{(1)} \sigma_{x'}^{(2)}$ в самом деле является измеримым, мы запишем как показано ниже:

$$\sigma_x^{(1)} \sigma_{x'}^{(2)} = 2J_x^2 - 1, \quad (11.222)$$

где

$$J_x = \frac{1}{2} \left(\sigma_x^{(1)} + \sigma_{x'}^{(2)} \right). \quad (11.223)$$

Таким образом, измерение $\sigma_x^{(1)} \sigma_{x'}^{(2)}$ эквивалентно измерению J_x^2 . Снова мы имеем $J_x^2 = J_x \bmod 2$, и тогда второе измерение выполнимо посредством наблюдаемой

$$A_2 = J_x \bmod 2. \quad (11.224)$$

Таким образом, мы сконструировали явную схему, которая позволяет выполнить измерение оператора A состояния Белла. Ясно, что устройство

обеспечивает КНИ оператора A : возьмем любое собственное пространство A_1 и любое собственное пространство A_2 . Тогда оба собственных пространства являются двумерными, ортогональными друг другу и имеют общее одномерное подпространство, которое представляется собственное состояние A . Отсюда следует, что все собственные состояния A остаются неизменяемыми при измерении. Это можно увидеть, замечая, что нелокальные величины коммутируют $[A_1, A_2] = 0$, как это легко проверяется.

11.3.6. КНИ верификация нелокальных состояний

В предыдущем разделе мы рассмотрели измеримость операторов в пространстве тензорного произведения $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Вернемся к КНИ верификации запутанных состояний в этом пространстве, то есть теперь мы скорее рассмотрим верификацию отдельного вектора состояния, чем измерения операторов. Мы бы хотели ответить на вопрос, какого типа запутанные состояния допускают КНИ верификацию и как такие измерения могут быть выполнены. Снова мы призываем на помощь принцип причинности, который дает возможность исключения большого класса запутанных состояний.

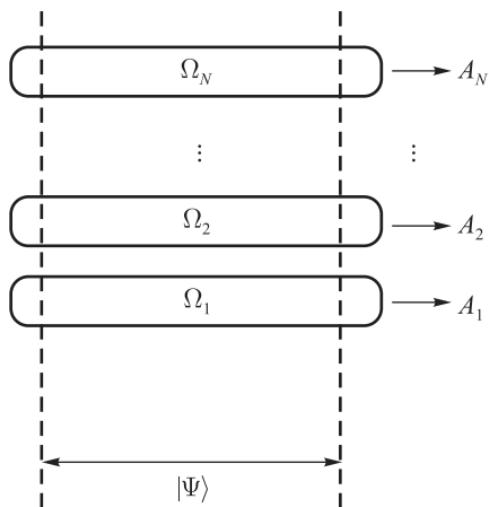


Рис. 11.14. Общее измерительное устройство для верификации состояния посредством КНИ. Схема включает измерение нелокальных величин A_1, A_2, \dots, A_N , описываемых операциями $\Omega_1(a_1), \Omega_2(a_2), \dots, \Omega_N(a_N)$.

Мы рассмотрим следующую общую измерительную схему (см. рис. 11.14). Измерение состоит из последовательности N измерений (в общем нелокальных) наблюдаемых A_1, A_2, \dots, A_N . Каждая A_n измеряется с помощью соответствующего (возможно, запутанного) квантового датчика, как описано в разделе 11.3.1. Мы полагаем, что все A_n являются такими операторами, которые могут быть измерены. Если обозначить операцию соответствующую n -му считыванию a_n как $\Omega_n(a_n)$, то суммарная операция для устройства принимает вид

$$\Omega(a_1, \dots, a_N) = \Omega_N(a_N)\Omega_{N-1}(a_{N-1})\dots\Omega_1(a_1), \quad (11.225)$$

где подразумевается упорядочение во времени. Для любого измерения мы имеем

$$\sum_{a_1, \dots, a_N} \Omega^\dagger(a_1, \dots, a_N)\Omega(a_1, \dots, a_N) = I, \quad (11.226)$$

что сразу следует из упорядочения во времени и с помощью свойства

$$\sum_{a_n} \Omega_n^\dagger(a_n)\Omega_n(a_n) = I. \quad (11.227)$$

Для всех измерительных процедур, рассмотренных здесь, мы требуем, чтобы операция являлась функцией измеряемой величины. Это подразумевает, что все операции коммутируют с сопряженными операциями

$$[\Omega_n(a_n), \Omega_n^\dagger(a_n)] = 0. \quad (11.228)$$

Это уравнение, в свою очередь, приводит к тому, что кроме (11.226) мы также имеем

$$\sum_{a_1, \dots, a_N} \Omega(a_1, \dots, a_N)\Omega^\dagger(a_1, \dots, a_N) = I, \quad (11.229)$$

что также легко проверяется. Физически это означает, что начальная матрица плотности, которая пропорциональна единичной матрице, не изменяется при измерении.

Теперь мы рассмотрим измерительное устройство в качестве верификации некоторого запутанного состояния $|\Psi_0\rangle$. Вводя соответствующие операции Да/Нет, мы, таким образом, в добавление к (11.151) имеем

$$\sum_a \Omega_{\text{Yes}}(a)\Omega_{\text{Yes}}^\dagger(a) + \sum_b \Omega_{\text{No}}(b)\Omega_{\text{No}}^\dagger(b) = I. \quad (11.230)$$

Нам нужно еще одно условие. Здесь мы будем предполагать, что операции относительно измерения оставляют пространство $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$ инвариантным, то есть пространство, которое натянуто на базисные векторы с неисчезающими коэффициентами в разложении Шмидта. На физическом языке это означает, что измеряемые величины не возбуждают новых базисных векторов состояния, кроме тех, что уже представлены в разложении Шмидта. Ввиду этого условия мы можем ограничить итоговое рассмотрение до подпространства $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$.

Наша цель состоит в том, чтобы доказать следующее утверждение. Для любого запутанного состояния $|\Psi_0\rangle$, которое допускает КНИ верификацию рассмотренного выше типа, принцип причинности требует, чтобы все коэффициенты α_i разложения Шмидта (11.160) были равны друг другу, то есть $|\alpha_i| = \frac{1}{\sqrt{D}}$. Это означает, что только максимально запутанные состояния могут быть верифицированы такими КНИ измерениями без противоречия с причинностью. Дополнительно мы продемонстрируем, как эти максимально запутанные состояния могут быть измерены.

Для доказательства приведенного выше утверждения мы используем условие причинности в виде (11.198). Явно это условие может быть записано с помощью операций Да/Нет как

$$\begin{aligned} \text{tr}^{(2)}\{|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\} &= \\ &= \text{tr}^{(2)} \left\{ \sum_a \Omega_{\text{Yes}}(a) |\Psi\rangle\langle\Psi| \Omega_{\text{Yes}}^\dagger(a) + \sum_b \Omega_{\text{No}}(b) |\Psi\rangle\langle\Psi| \Omega_{\text{No}}^\dagger(b) \right\}. \end{aligned} \quad (11.231)$$

Наша стратегия подобна используемой в предыдущем разделе 11.3.5. Мы выбираем набор ортонормированных базисных векторов $|\Psi_\nu\rangle$, $\nu = 0, 1, \dots, D^2 - 1$, которые задают пространство $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$. Подставляем эти базисные векторы в уравнение (11.231) и суммируем по ν . Существенная разность со случаем КНИ операторного измерения в том, что мы не можем положить здесь, что все базисные векторы $|\Psi_\nu\rangle$ не изменяются на протяжении измерения. В общем случае $|\Psi_0\rangle$ не изменяется в КНИ верификации. Таким образом, вместо уравнения (11.201) мы теперь имеем

$$\begin{aligned} D^{(2)} \cdot \text{tr}^{(2)}\{|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\} &= \\ &= \text{tr}^{(2)} \left\{ \sum_a \Omega_{\text{Yes}}(a) I_{\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}} \Omega_{\text{Yes}}^\dagger(a) + \sum_b \Omega_{\text{No}}(b) I_{\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}} \Omega_{\text{No}}^\dagger(b) \right\}. \end{aligned} \quad (11.232)$$

Однако, ввиду уравнения (11.230) и нашего требования, что операции оставляют инвариантными пространство $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}$, из последнего уравнения мы можем заключить

$$D^2 \cdot \text{tr}^{(2)}\{|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\} = \text{tr}^{(2)}\left\{I_{\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \otimes \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}}\right\} = D \cdot I_{\tilde{\mathcal{H}}^{(1)}}, \quad (11.233)$$

из которого мы получаем

$$\text{tr}^{(2)}\{|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\} = \frac{1}{D} I_{\tilde{\mathcal{H}}^{(1)}}. \quad (11.234)$$

Это доказывает наше утверждение, а именно что, для того чтобы быть измеримым без противоречий с условием причинности, состояние $|\Psi_0\rangle$ должно быть максимально запутанным. Другими словами, после КНИ верификации состояния, локальные матрицы плотности, ссылающиеся на локальные переменные в части (1) системы, с необходимостью должны быть пропорциональны единичной матрице в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}^{(1)}$. Это снова ясно выражает стирание локальной информации. После верификации состояния не обнаруживается следа в локальных смесях, и последние описывают состояния с максимальной энтропией.

Что в итоге демонстрируется, так это то, что максимально запутанные состояния могут, по меньшей мере в принципе, быть верифицированы некоторым КНИ измерением. Это будет сделано явным конструированием измерительного устройства (Aharonov, Albert, Vaidman, 1986). Для этого мы сначала отметим, что соответствующим выбором фаз локального векторного базиса всегда можно записать вектор максимально запутанного состояния в виде

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{i=1}^D |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle. \quad (11.235)$$

Верификация этого состояния может быть выполнена с помощью двух успешных нелокальных измерений, подобных устройству, сконструированному для оператора состояний Белла.

Первое измерение задается наблюдаемой

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad (11.236)$$

где локальные наблюдаемые $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ определяются через

$$A^{(1)}|\chi_i^{(1)}\rangle = -i|\chi_i^{(1)}\rangle, \quad (11.237)$$

$$A^{(2)}|\chi_i^{(2)}\rangle = +i|\chi_i^{(2)}\rangle, \quad (11.238)$$

с $i = 1, 2, \dots, D$. Очевидно, $|\Psi_0\rangle$ является собственным состоянием A с собственным значением 0. Более того, векторы $|\Psi\rangle$, соответствующие D -мерному собственному пространству $A = 0$, имеют следующую общую форму:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^D \beta_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle. \quad (11.239)$$

Это показывает, что результатом $A = 0$ мы проверяем, что состояние имеет разложение Шмидта в заданной локальной области базисных векторов $|\chi_i^{(1)}\rangle, |\chi_i^{(2)}\rangle$.

Вторым измерением мы хотим проверить, что коэффициенты β_i в (11.239) все равны друг другу. Для того чтобы найти соответствующую наблюдаемую, мы рассматриваем локальные унитарные операторы $U^{(1)}, U^{(2)}$, определяемые через

$$U^{(1)} |\chi_i^{(1)}\rangle = |\chi_{i+1}^{(1)}\rangle, \quad i = 1, \dots, D-1, \quad (11.240)$$

$$U^{(1)} |\chi_D^{(1)}\rangle = |\chi_1^{(1)}\rangle, \quad (11.241)$$

$$U^{(2)} |\chi_i^{(2)}\rangle = |\chi_{i+1}^{(2)}\rangle, \quad i = 1, \dots, D-1, \quad (11.242)$$

$$U^{(2)} |\chi_D^{(2)}\rangle = |\chi_1^{(2)}\rangle. \quad (11.243)$$

Эти операции вызывают циклический сдвиг индекса i . Вводя унитарный оператор $U = U^{(1)}U^{(2)}$, мы находим, что для любого состояния (11.239) в пространстве $A = 0$

$$U|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^D \beta_{i-1} |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle, \quad (11.244)$$

где $\beta_0 \equiv \beta_D$. Таким образом, мы видим, что $U|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ тогда и только тогда, когда все β_i равны друг другу. Отсюда следует, что $|\Psi_0\rangle$ является единственным собственным состоянием U , соответствующим собственному значению 1 в пространстве $A = 0$.

Так как $U^{(1)}, U^{(2)}$ являются локальными операторами, мы можем ввести локальные наблюдаемые $B^{(1)}, B^{(2)}$ посредством

$$U^{(1)} = \exp \left\{ iB^{(1)} \right\}, \quad U^{(2)} = \exp \left\{ iB^{(2)} \right\}, \quad (11.245)$$

такие, что $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ коммутируют

$$U = \exp \left\{ i \left(B^{(1)} + B^{(2)} \right) \right\}. \quad (11.246)$$

Из приведенного выше свойства U мы заключаем, что $|\Psi_0\rangle$ является единственным собственным состоянием оператора

$$B = \left(B^{(1)} + B^{(2)} \right) \bmod 2\pi, \quad (11.247)$$

соответствующим собственному значению 0 в пространстве $A = 0$. Как было продемонстрировано в разделе 11.3.2, такие суммы по модулю измеримы.

Это завершает конструирование измерительного устройства. Состояние $|\Psi_0\rangle$ проверяется результатами $A = 0$ и $B = 0$ двух нелокальных измерений. Начальное состояние $|\Psi_0\rangle$, очевидно, остается неизменным при измерении. Более того, поскольку A и B коммутируют, легко показать, что устройство обеспечивает КНИ верификацию состояния.

11.3.7. Приготовление нелокальных состояний

Выше мы видели, что принцип причинности налагает сильные ограничения на измеримость нелокальных наблюдаемых и состояний. В частности, мы нашли, что нормированное запутанное и нелокальное состояние с разложением Шмидта вида

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^D \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle \quad (11.248)$$

неизмеримо нашим КНИ устройством для верификации состояния, если только не все $|\alpha_i|$ равны друг другу, то есть если только состояние не является максимально запутанным. Однако важно отметить, что все состояния вида (11.248) могут быть *приготовлены* соответствующим нелокальным измерительным устройством без противоречия с причинностью.

Устройство для приготовления состояний вида (11.248) может быть разработано как показано ниже (Aharonov, Albert, Vaidman, 1986). Сначала мы локально подготовим (нормированные) состояния

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_{i=1}^D \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle, \quad (11.249)$$

$$|\psi^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{i=1}^D |\chi_i^{(2)}\rangle, \quad (11.250)$$

которые объединяются для формирования начального состояния

$$|\Phi\rangle = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{i,j=1}^D \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_j^{(2)}\rangle \quad (11.251)$$

в пространстве тензорного произведения $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Обе части (1) и (2) объединенной системы могут быть разделены пространственноподобным расстоянием.

На втором шаге мы измеряем нелокальную наблюдаемую $A = A^{(1)} + A^{(2)}$, где локальные величины $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ задаются уравнением (11.237). Результат $A = 0$ этого измерения проецирует начальное состояние $|\Phi\rangle$ на состояние $|\Psi\rangle$, чье разложение Шмидта имеет желаемый вид в заданном локальном базисе $|\chi_i^{(1)}\rangle$ и $|\chi_i^{(2)}\rangle$, то есть мы имеем

$$|\Phi\rangle \rightarrow |\Psi\rangle = \sum_{i=1}^D \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle. \quad (11.252)$$

Конфликта с принципом причинности, естественно, нет, так как измерение A включает только локальные взаимодействия. Однако приготовление $|\Psi\rangle$ успешно только с определенной долей вероятности, которая задается как

$$\mathcal{P}(A = 0) = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2 = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D |\alpha_i|^2 = \frac{1}{D}. \quad (11.253)$$

Важный вывод, следующий из приведенных выше рассмотрений, заключается в том, что для любого измерительного устройства состояния, которые *измеримы* и которые могут быть *приготовлены* этим устройством, следует аккуратно различать. Именно возможность приготовления обосновывает рассмотрение векторов (11.248) в тензорном произведении как *состояний* объединенной системы.

11.3.8. Обменные измерения

В нескольких местах мы пришли к противоречию с принципом причинности посредством предположения, что КНИ верификация оставляет инвариантным состояние $|\Psi_0\rangle$, которое должно быть проверено, а также его ортогональное дополнение. Из формулировки принципа причинности, выражаемого уравнением (11.166), видно, что противоречий нет, если выполняется разрушение измерения такое, что во всех случаях изучаемая система

будет приходить в одно и то же состояние. Обозначая последнее $|\Psi_f\rangle$ и полагая для простоты, что имеем только одну единственную Да-операцию, мы имеем следующие Да/Нет-операции для устройства:

$$\Omega_{\text{Yes}} = |\Psi_f\rangle\langle\Psi_0|, \quad (11.254)$$

$$\Omega_{\text{No}}(b) = |\Psi_f\rangle\langle\Psi_{\perp}(b)|. \quad (11.255)$$

Состояния $|\Psi_{\perp}(b)\rangle$ ортогональны $|\Psi_0\rangle$ и, конечно, могут зависеть от b , обязательным ограничением является лишь условие нормировки

$$\begin{aligned} F_{\text{Yes}} + F_{\text{No}} &= \Omega_{\text{Yes}}^{\dagger}\Omega_{\text{Yes}} + \sum_b \Omega_{\text{No}}^{\dagger}(b)\Omega_{\text{No}}(b) = \\ &= |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| + \sum_b |\Psi_{\perp}(b)\rangle\langle\Psi_{\perp}(b)| = I. \end{aligned} \quad (11.256)$$

Представленные выше Да/Нет-операции удовлетворяют всем условиям верификационного измерения. Конечное состояние $|\Psi_f\rangle$ может быть равно или не равно $|\Psi_0\rangle$. Например, оно может быть задано вакуумным состоянием $|0\rangle$ электромагнитного поля. Этот случай реализуется, например, если устройство измеряет кванты поля, которые уничтожаются после регистрации.

Важным примером таких разрушающих измерений являются так называемые обменные измерения. Мы определяем обменное измерение как устройство, включающее локальные взаимодействия с каждой частью системы. Предполагается, что гильбертово пространство $\mathcal{H}^{(k)}$ локальной части (k) изучаемой системы и гильбертово пространство $\mathcal{H}_P^{(k)}$ соответствующей части датчика изоморфны. Вводя локальные базисные векторы $|\chi_i^{(k)}\rangle$ и $|\phi_i^{(k)}\rangle$ в $\mathcal{H}^{(k)}$ и $\mathcal{H}_P^{(k)}$ соответственно, локальные взаимодействия объект-датчик в части (k) , как предполагается, имеют вид

$$|\chi_i^{(k)}\rangle \otimes |\phi_j^{(k)}\rangle \rightarrow |\chi_j^{(k)}\rangle \otimes |\phi_i^{(k)}\rangle. \quad (11.257)$$

Взаимодействие, таким образом, представляет просто обмен меток базисных векторов объекта и измерителя.

Ясно, что, если такое взаимодействие применять ко всем нелокальным состояниям квантового объекта, оно приводит к конечному состоянию объекта, которое изоморфно начальному состоянию измерителя, и наоборот. Например, беря за начальное состояние объекта

$$|\Psi_0\rangle = \sum_i \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle \quad (11.258)$$

и начальное состояние датчика

$$|\Phi_0\rangle = \sum_j \beta_j |\phi_j^{(1)}\rangle \otimes |\phi_j^{(2)}\rangle \quad (11.259)$$

в качестве результата взаимодействия обеих частей (1) и (2) системы, мы находим

$$|\Psi_0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \rightarrow \left(\sum_j \beta_j |\chi_j^{(1)}\rangle \otimes |\chi_j^{(2)}\rangle \right) \otimes \left(\sum_i \alpha_i |\phi_i^{(1)}\rangle \otimes |\phi_i^{(2)}\rangle \right). \quad (11.260)$$

Это показывает, что итоговое состояние $|\Psi_f\rangle$ изучаемой системы изоморфно начальному состоянию датчика $|\Phi_0\rangle$, то есть

$$|\Psi_f\rangle = \sum_j \beta_j |\chi_j^{(1)}\rangle \otimes |\chi_j^{(2)}\rangle, \quad (11.261)$$

в то же время конечное состояние датчика изоморфно начальному состоянию изучаемой системы. Таким образом, в результате локального взаимодействия обеих частей системы изучаемая система и датчик поменялись ролями.

Однако нужно отметить, что с локальными обменными взаимодействиями измерение неполно. После локальных взаимодействий различные части состояния датчика должны быть перенесены в одно место, в котором может быть выполнено локальное измерение. Любое нелокальное измерение состояния датчика, конечно, подчиняется тем же ограничениям, которые обсуждались в предыдущих разделах.

11.4. Квантовая телепортация

Нелокальные запутанные состояния описывают квантовые корреляции, которые выражаются через совместные вероятности измерений, выполняемых на отдельных частях составной квантовой системы. Интересным приложением является использование свойств запутанных состояний для когерентной передачи неизвестного квантового состояния из одной части системы в другую, пространственно подобно отделенную часть. Здесь мы изучим эту передачу квантового состояния, известную как квантовая телепортация (Bennett et al., 1993, 1993; Vaidman, 1994).

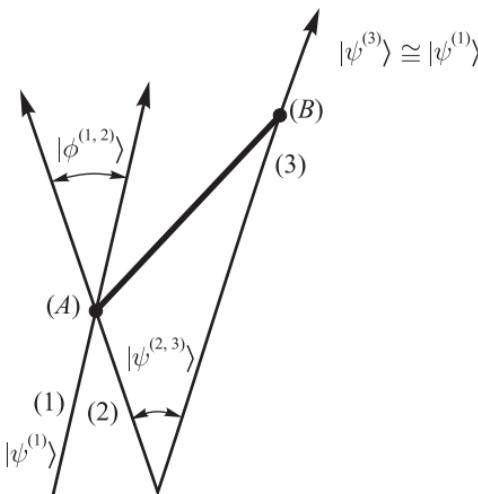


Рис. 11.15. Схематическая картина квантовой телепортации в пространстве-времени. Входящее состояние $|\psi^{(1)}\rangle$ гильбертова пространства Алисы (A) передается в изоморфную копию $|\psi^{(3)}\rangle$ гильбертова пространства Боба (B). Квантовый канал представляется максимально запутанным состоянием $|\psi^{(2,3)}\rangle$. Жирная линия представляет классический канал взаимодействия, через который Алиса сообщает результат ее измерения Бобу. Если Алиса выполняет КНИ измерение, она остается с запутанным состоянием $|\phi^{(1,2)}\rangle$, которое является изоморфным к $|\psi^{(2,3)}\rangle$, при условии, что ее измерение успешено.

11.4.1. Когерентная передача квантовых состояний

Сначала точно определим, что означает телепортация квантового состояния (см. рис. 11.15). Мы рассмотрим систему, которая состоит из трех гильбертовых пространств $\mathcal{H}^{(1)}$, $\mathcal{H}^{(2)}$ и $\mathcal{H}^{(3)}$. Дальше эти пространства предполагаются изоморфными, то есть имеют ту же размерность D . Общее пространство объединенной системы является троичным тензорным произведением

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} \otimes \mathcal{H}^{(3)}. \quad (11.262)$$

Пространства $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ описывают степени свободы некоторой локализованной части общей системы, которую будем называть частью (A). Третье пространство $\mathcal{H}^{(3)}$ представляет вторую локализованную часть системы, обозначаемую как (B), которая отделяется от части (A) пространственно-подобным интервалом. Мы можем ассоциировать локального наблюдателя,

называемого Алисой, с частью (A) и локального наблюдателя, называемого Бобом, с частью (B) . Таким образом, Алиса может измерить все локальные наблюдаемые относительно пространства $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$, в то время как локальные наблюдаемые в пространстве $\mathcal{H}^{(3)}$ доступны Бобу.

Рассмотрим теперь некоторое состояние

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_{i=0}^{D-1} \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle, \quad (11.263)$$

соответствующее первому гильбертову пространству $\mathcal{H}^{(1)}$.¹ Алиса намеревается передать это состояние Бобу мгновенно и когерентно без его измерения или разрушения. Абсолютные значения, а также фазовые отношения амплитуд α_i остаются неизменными после осуществления процесса передачи.

Такой процесс передачи, на самом деле, может быть достигнут при помощи запутанного состояния $|\psi^{(2,3)}\rangle$ в пространстве $\mathcal{H}^{(2)} \otimes \mathcal{H}^{(3)}$. Для определенности возьмем это состояние в виде максимально запутанного состояния

$$|\psi^{(2,3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{j=0}^{D-1} |\chi_j^{(2)}\rangle \otimes |\chi_j^{(3)}\rangle. \quad (11.264)$$

Состояние $|\psi^{(2,3)}\rangle$ может быть приготовлено в некоторой локализованной области пространства-времени. Затем оно разделяется на две части, описываемые гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}^{(2)}$ и $\mathcal{H}^{(3)}$, которые относятся к Алисе и Бобу соответственно. Таким образом, квантовые корреляции, включенные в $|\psi^{(2,3)}\rangle$, могут быть продетектированы через совместные измерения, выполняемые Алисой и Бобом. В дальнейшем состояние $|\psi^{(2,3)}\rangle$ будет рассматриваться как квантовый канал.

Начальное состояние общей системы теперь задается как

$$|\Psi_0\rangle = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2,3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{i,j=0}^{D-1} \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_j^{(2)}\rangle \otimes |\chi_j^{(3)}\rangle. \quad (11.265)$$

Предположим, что Алиса выполняет определенное верификационное измерение следующего состояния:

$$|\phi^{(1,2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k=0}^{D-1} |\chi_k^{(1)}\rangle \otimes |\chi_k^{(2)}\rangle, \quad (11.266)$$

¹Отметим, что, в противоположность нашему предыдущему соглашению, индекс i , который обозначает базисные векторы, теперь пробегает от 0 до $D - 1$.

которое соответствует гильбертовому пространству, доступному Алисе. Если верификация дает положительный результат, начальное состояние $|\Psi_0\rangle$ общей системы проецируется на состояние $|\phi^{(1, 2)}\rangle$. Из приведенных выше уравнений легко выводится, что

$$\langle \phi^{(1, 2)} | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \alpha_i |\chi_i^{(3)}\rangle \equiv \frac{1}{D} |\psi^{(3)}\rangle. \quad (11.267)$$

Это показывает, что Алиса получает положительный результат с вероятностью, задаваемой

$$\mathcal{P} = \| \langle \phi^{(1, 2)} | \Psi_0 \rangle \|^2 = \frac{1}{D^2}. \quad (11.268)$$

Основываясь на этом результате, получаем, что состояние до измерения преобразуется в состояние после измерения согласно правилу

$$|\Psi_0\rangle = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2, 3)}\rangle \rightarrow |\phi^{(1, 2)}\rangle \otimes |\psi^{(3)}\rangle. \quad (11.269)$$

Таким образом, мы видим, что редукция состояния, обусловленная положительным результатом измерения Алисы, приводит к желаемому процессу телепортации. Итоговое состояние $|\psi^{(3)}\rangle$ в гильбертовом пространстве Боба $\mathcal{H}^{(3)}$, задаваемое (11.267), представляет копию начального состояния Алисы $|\psi^{(1)}\rangle$ (см. (11.263)) в $\mathcal{H}^{(1)}$.

Нужно отметить следующие факты. Будучи вызванным редукционным измерением в одной части системы, процесс телепортации (11.269) может рассматриваться как мгновенный во всех лоренцевских системах отсчета. А именно, как мы уже обсуждали, это может рассматриваться как событие, имеющее место вдоль всех пространственноподобных гиперповерхностей, которые пересекают классическое событие, вызванное измерением Алисы.

Так как телепортация состояния включает только локальные взаимодействия в одной части системы, то, конечно, здесь нет конфликтов с причинностью и нет передачи информации со скоростью, превышающей скорость света. В самом деле, редуцированная матрица плотности, которая относится к гильбертовому пространству Боба $\mathcal{H}^{(3)}$, пропорциональна единичной матрице в этом пространстве, что происходит благодаря тому факту, что квантовый канал (11.264) представляет максимально запутанное состояние. Так как операции, описывающие измерение Алисы, локальны и действуют только в $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$, редуцированная матрица Боба не влияет на измерение Алисы, если последнее описывается на неселективном уровне. Матрица плотности Боба, которая описывает состояние максимального незнания, является, таким образом, неизменной за время измерения Алисы.

Однако, если результат измерения Алисы сообщается Бобу по классическому каналу, он может использовать эту информацию для вывода, что его состояние $|\psi^{(3)}\rangle$ изоморфно состоянию $|\psi^{(1)}\rangle$, при условии, что представленный результат измерения Алисы был положительным. Отметим, что в этом случае ни Алиса, ни Боб не измеряли переданное состояние. После ее измерения состояние Алисы $|\phi^{(1, 2)}\rangle$ запутывается с состоянием, изоморфным квантовому каналу $|\psi^{(2, 3)}\rangle$. Телепортация заданного состояния работает, несмотря на то, что оно остается полностью неизвестным как для Алисы, так и для Боба.

11.4.2. Телепортация и измерение состояний Белла

Если процесс телепортации выполняется на ансамбле начальных состояний, приготовленных описанным выше способом, он будет успешным только для доли $1/D^2$ ансамбля. Причина этого факта в том, что отрицательный результат верификации состояния Алисы, как правило, разрушает начальное состояние $|\psi^{(1)}\rangle$. Однако Алиса всегда может, по меньшей мере в принципе, разработать устройство, которое дает коэффициент телепортации 100 %. Для этой цели Алиса выполняет измерение, которое проецирует начальное состояние на ортогональный базис, который состоит из максимально запутанных состояний, то есть Алиса выполняет измерение состояний Белла в $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$.

Чтобы объяснить эту особенность более детально, мы сначала отметим, что ортогональный базис максимально запутанных состояний $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ дается следующим выражением:

$$|\phi_{\nu}^{(1, 2)}\rangle = \sum_{k=0}^{D-1} \beta_{r, k} |\chi_{(k+n) \bmod D}^{(1)}\rangle \otimes |\chi_k^{(2)}\rangle. \quad (11.270)$$

Индекс $\nu = 0, 1, \dots, D^2 - 1$ обозначает базисные векторы $|\phi_{\nu}^{(1, 2)}\rangle$. Каждый ν имеет уникальное представление вида

$$\nu = r + nD, \quad (11.271)$$

где

$$r = \nu \bmod D = 0, 1, \dots, D - 1 \quad (11.272)$$

и $n = 0, 1, \dots, D - 1$. Амплитуды $\beta_{r, k}$ в уравнении (11.270) определяются как

$$\beta_{r, k} = \frac{1}{\sqrt{D}} \exp \left(-2\pi i \frac{kr}{D} \right). \quad (11.273)$$

Давайте продемонстрируем, что уравнение (11.270) в самом деле порождает базис желаемого вида. Во-первых, сразу ясно, что $|\phi_\nu^{(1, 2)}\rangle$ является максимально запутанным. Соответствующим перенумерованием базисных векторов в $\mathcal{H}^{(1)}$, отвечающих первому множителю в тензорном произведении, мы всегда можем достичь условия, что (11.270) принимает стандартный вид разложения Шмидта. Так как все $\beta_{r, k}$ равны по абсолютному значению

$$|\beta_{r, k}| = \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad (11.274)$$

мы находим, что все $|\phi_\nu^{(1, 2)}\rangle$ являются максимально запутанным.

Поэтому остается показать, что $|\phi_\nu^{(1, 2)}\rangle$ являются ортогональными и нормированными. Для этого сперва проверим, что

$$\sum_{k=0}^{D-1} \beta_{r', k}^* \beta_{r, k} = \delta_{r' r}, \quad (11.275)$$

что легко выполняется с помощью формулы суммирования для геометрической прогрессии. Установливая $\nu = r + nD$ и $\nu' = r' + n'D$, мы находим скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\nu'}^{(1, 2)} | \phi_\nu^{(1, 2)} \rangle &= \sum_{k, l=0}^{D-1} \beta_{r', k}^* \beta_{r, l} \langle \chi_{(k+n')}^{(1)} \bmod D | \chi_{(l+n)}^{(1)} \bmod D \rangle \langle \chi_k^{(2)} | \chi_l^{(2)} \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{D-1} \beta_{r', k}^* \beta_{r, k} \langle \chi_{(k+n')}^{(1)} \bmod D | \chi_{(k+n)}^{(1)} \bmod D \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{D-1} \beta_{r', k}^* \beta_{r, k} \delta_{n' n} = \delta_{r' r} \delta_{n' n}. \end{aligned} \quad (11.276)$$

На втором и третьем шагах мы использовали ортогональность базисных векторов $|\chi_k^{(1)}\rangle$ и $|\chi_k^{(2)}\rangle$, в уравнении (11.275) это использовалось на последнем шаге. Таким образом, в итоге мы получаем желаемую ортогональность базисных векторов

$$\langle \phi_{\nu'}^{(1, 2)} | \phi_\nu^{(1, 2)} \rangle = \delta_{\nu' \nu}, \quad (11.277)$$

что завершает доказательство. Применяя уравнение (11.270) к специальному случаю $D = 2$ (частицы со спином $\frac{1}{2}$), находим состояния Белла, задаваемые уравнением (11.215).

Возвращаясь к квантовой телепортации, мы теперь разложим полное начальное состояние (11.265) устройства в следующую сумму:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{\nu=0}^{D^2-1} |\phi_{\nu}^{(1, 2)}\rangle \langle \phi_{\nu}^{(1, 2)}| \Psi_0\rangle. \quad (11.278)$$

Из уравнений (11.265) и (11.270) мы получаем

$$\langle \phi_{\nu}^{(1, 2)}| \Psi_0\rangle = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} \alpha_i \sqrt{D} \beta_{r, (i-n) \bmod D}^* |\chi_{(i-n) \bmod D}^{(3)}\rangle. \quad (11.279)$$

Для каждого ν мы вводим соответствующий унитарный оператор $U_{\nu}^{(3)}$, который действует в гильбертовом пространстве Боба $\mathcal{H}^{(3)}$. Мы определяем эти операторы их действием на локальный базис Боба

$$U_{\nu}^{(3)} |\chi_i^{(3)}\rangle = \sqrt{D} \beta_{r, (i-n) \bmod D}^* |\chi_{(i-n) \bmod D}^{(3)}\rangle, \quad i = 0, 1, \dots, D-1. \quad (11.280)$$

В силу уравнения (11.274) эти операторы в действительности унитарные. Кроме добавления фазовых множителей, они просто вызывают циклические перестановки базисных состояний $|\chi_i^{(3)}\rangle$.

Это дает нам возможность переписать уравнение (11.278) как показано ниже:

$$|\Psi_0\rangle = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2, 3)}\rangle = \frac{1}{D} \sum_{\nu=0}^{D^2-1} |\phi_{\nu}^{(1, 2)}\rangle \otimes U_{\nu}^{(3)} |\psi^{(3)}\rangle, \quad (11.281)$$

где $|\psi^{(3)}\rangle$ задается уравнением (11.267). Из этого уравнения мы делаем вывод, что коэффициент телепортации в 100 % действительно возможен, если Алиса выполняет измерение полного базиса $|\phi_{\nu}^{(1, 2)}\rangle$. Все D^2 возможных результатов этого измерения появляются с вероятностью $1/D^2$. Получая результат ν , из измерения Алисы по классическому каналу, Боб может применить инвертирование соответствующего унитарного оператора $U_{\nu}^{(3)}$ к его состоянию, которое во всех случаях в результате дает изоморфную копию $|\psi^{(3)}\rangle$ состояния Алисы $|\psi^{(1)}\rangle$.

В качестве примера применим описанную выше конструкцию к случаю $D = 2$, то есть к спину $\frac{1}{2}$, изученному предварительно. Тогда получим, что Боб должен применить следующие унитарные операторы:

$$U_0^{(3)} = I, \quad U_1^{(3)} = \sigma_z, \quad U_2^{(3)} = \sigma_x, \quad U_3^{(3)} = i\sigma_y, \quad (11.282)$$

зависящие от результата измерения Алисы.

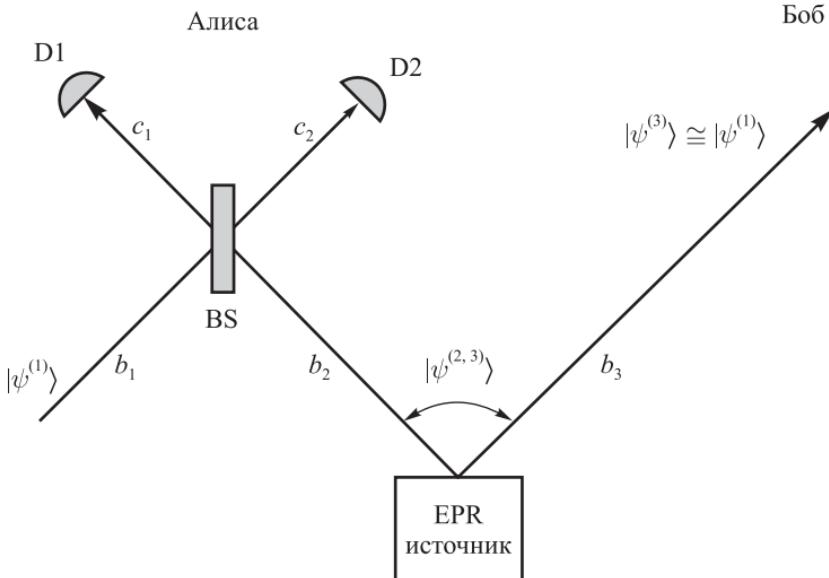


Рис. 11.16. Эскиз установки, используемой для экспериментальной реализации квантовой телепортации. Анализ состояния Алисы реализуется суперпозицией двух полевых мод b_1 и b_2 в светоделителе BS и последующим измерением выходящих фотонов в модах c_1 , c_2 через детекторы D1 и D2. Успешная телепортация в полевую моду b_3 продемонстрирована анализом состояния этой моды (не показано).

11.4.3. Экспериментальная реализация

Мы завершим наше обсуждение рассмотрением экспериментальной реализации квантовой телепортации, выполненной Боумейстером и др. (Bouwmeester et al., 1997). Схематичный вид экспериментальной установки представлен на рис. 11.16. Она работает с тремя электромагнитными полевыми модами b_1 , b_2 и b_3 . Мы пишем $b_{i\lambda}^\dagger$ и $b_{i\lambda}$ для соответствующих операторов рождения и уничтожения, где $i = 1, 2, 3$, а $\lambda = \leftrightarrow, \downarrow$ обозначают поляризацию фотона. Квантовый канал задается ЭПР-источником, который порождает запутанное двухфотонное состояние

$$|\psi^{(2,3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{2\leftrightarrow}^\dagger b_{3\downarrow}^\dagger - b_{2\downarrow}^\dagger b_{3\leftrightarrow}^\dagger)|0\rangle \quad (11.283)$$

параметрическим преобразованием с понижением частоты (Michler et al., 1996). Тщательная подготовка устройства гарантирует, что все три моды содержат по одному фотону. Итоговое гильбертово пространство тогда является изоморфным тензорному произведению гильбертовых пространств соответствующих трех мод.

Состояние для передачи задается как

$$|\psi^{(1)}\rangle = \left(\alpha b_{1\leftrightarrow}^\dagger + \beta b_{1\downarrow}^\dagger\right) |0\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (11.284)$$

такое, что мы имеем следующее трехфотонное начальное состояние

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha b_{1\leftrightarrow}^\dagger + \beta b_{1\downarrow}^\dagger \right) \left(b_{2\leftrightarrow}^\dagger b_{3\downarrow}^\dagger - b_{2\downarrow}^\dagger b_{3\leftrightarrow}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (11.285)$$

Алиса выполняет верификационное измерение состояния на ее фотонах в модах b_1 и b_2 , используя светоделитель с коэффициентом пропускания $\frac{1}{2}$ (см. обсуждение гомодинного детектирования в разделе 6.4). С помощью детекторов D1 и D2 она регистрирует кванты, уничтожаемые операторами $c_{1\lambda}$ и $c_{2\lambda}$. При соответствующем выборе фаз для этих операторов мы имеем

$$c_{1\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_{1\lambda} + b_{2\lambda}), \quad (11.286)$$

$$c_{2\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_{1\lambda} - b_{2\lambda}). \quad (11.287)$$

Критической точкой эксперимента является обеспечение уверенности, что фотоны в модах b_1 и b_2 попадают одновременно в светоделитель, так как иначе они будут различны из-за времен их прибытия. Более рафинированный теоретический анализ (Braunstein, Mann, 1995) также требует принять во внимание пространственно-временную структуру состояний в различных модах. Мы пренебрегаем таким рассмотрением, так как оно не меняет принципиальных утверждений.

Для того чтобы найти возможные совпадающие события, измеренные детекторами D1 и D2, мы решаем соотношения (11.286) и (11.287) относительно $b_{1\lambda}$ и $b_{2\lambda}$ и подставляем в уравнение (11.285), что приводит к

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle = & +\frac{1}{\sqrt{8}} \left(c_{1\leftrightarrow}^\dagger c_{2\downarrow}^\dagger - c_{1\downarrow}^\dagger c_{2\leftrightarrow}^\dagger \right) \left(\alpha b_{3\leftrightarrow}^\dagger + \beta b_{3\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle - \\ & - \frac{1}{\sqrt{8}} \left(c_{1\downarrow}^\dagger c_{1\leftrightarrow}^\dagger - c_{2\downarrow}^\dagger c_{2\leftrightarrow}^\dagger \right) \left(\alpha b_{3\leftrightarrow}^\dagger - \beta b_{3\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle - \\ & - \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\left[c_{1\downarrow}^\dagger \right]^2 - \left[c_{2\downarrow}^\dagger \right]^2 \right) \beta b_{3\leftrightarrow}^\dagger |0\rangle + \\ & + \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\left[c_{1\leftrightarrow}^\dagger \right]^2 - \left[c_{2\leftrightarrow}^\dagger \right]^2 \right) \alpha b_{3\downarrow}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (11.288)$$

Из этого уравнения мы делаем вывод, что можем различать четыре разных случая совпадения событий. В случае 1, который описывается первым членом правой части уравнения (11.288), оба детектора регистрируют отдельные фотоны. Отметим, что в этом случае поляризации фотонов должны отличаться друг от друга, так как члены, пропорциональные $c_{1\leftrightarrow}^\dagger c_{2\leftrightarrow}^\dagger$ или $c_{1\downarrow}^\dagger c_{2\downarrow}^\dagger$, не появляются в представленном выше разложении. Это эффект интерференции. Благодаря светофильтру, существуют два различных пути, которые вносят вклад в событие регистрации отдельного фотона в обоих детекторах. Амплитуды для этих траекторий интерферируют деструктивно, так что только та компонента исходного двухфотонного состояния вносит вклад, которая содержит в себе различные поляризации мод b_1, b_2 . Из первой строки следует, что случай 1 происходит с вероятностью $\frac{1}{4}$ и приводит к следующему состоянию моды 3:

$$|\psi^{(3)}\rangle = \left(\alpha b_{3\leftrightarrow}^\dagger + \beta b_{3\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (11.289)$$

что представляет копию состояния $|\psi^{(1)}\rangle$, задаваемого уравнением (11.284). Этот случай исследован в эксперименте Цайлингера (Bouwmeester et al., 1997), где процесс телепортации демонстрируется с помощью дополнительного анализа состояния, содержащегося в моде b_3 .

Случай 2, который также происходит с вероятностью $\frac{1}{4}$, описывается второй строкой уравнения (11.288). Он состоит из тех событий, когда оба фотона детектируются либо D1, либо D2 с различными поляризациями. Случай 3 (третья строка) и случай 4 (четвертая строка) представляют те события, когда либо D1, либо D2 регистрируют два фотона с поляризациями обоих, равными \uparrow или \leftrightarrow соответственно. Суммарная вероятность для случая 3 равна $|\beta|^2/2$ и $|\alpha|^2/2$ для случая 4.

В случае 2 Боб получает конечное состояние $(\alpha b_{3\leftrightarrow}^\dagger - \beta b_{3\downarrow}^\dagger) |0\rangle$ в моде b_3 . Простым приложением σ_z мы снова получаем копию $|\psi^{(1)}\rangle$. Таким образом, если Алиса точно может отличить случаи 1 и 2 от случаев 3 и 4, коэффициент телепортации, в принципе, может быть достигнут в 50 % в представленной выше схеме. Это верхний предел, так как в случаях 3 и 4 (нормированное) суммарное состояние моды b_3 есть либо $b_{3\leftrightarrow}^\dagger |0\rangle$, либо $b_{3\downarrow}^\dagger |0\rangle$, так что фазовые соотношения начального состояния $|\psi^{(1)}\rangle$ у Алисы теряются безвозвратно.

Квантовая телепортация предлагает полностью новый взгляд на эксперименты по основам квантовой механики. Например, это может быть использовано для передачи квантовых состояний на большие расстояния

без их разрушения эффектами декогерентизации. Отметим также, что телепортируемое состояние само может быть частью запутанного состояния в некотором большем гильбертовом пространстве. Таким образом, возможно передавать запутанность между двумя частицами и выполнять проверку неравенств Белла (Bell, 1964; Clauser, Shimony, 1978) над частицами, которые не взаимодействовали прямо в прошлом.

В добавление к новым экспериментам по основам квантовой механики было предложено несколько устройств телепортации для квантовой обработки информации и связи (Bouwmeester et al., 1997). Например, они могли бы использоваться для хранения информации, переносимой фотонами в захваченных ионах, или для телепортации квантового состояния на большие расстояния, даже если доступные квантовые каналы очень низкого качества. Более того, схемы квантовой телепортации также могут служить как для связи между квантовыми компьютерами, так для защиты состояний в квантовых компьютерах от окружения.

В заключение отметим, что схема телепортации, изученная выше, представляет хороший пример концепции состояний как функционалов на множестве пространноподобных гиперповерхностей, которые были введены в разделе 11.1.1. Обозначим через $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ точки пространства-времени, соответствующие событиям фотодетектирования на детекторах D1 и D2 соответственно. Выше мы неявно считали, что эти события происходят одновременно в системе координат Алисы. Однако, в принципе, D1 и D2 могли быть произвольно далеко, и мы можем рассмотреть некоторую пространноподобную гиперповерхность σ , которая пересекает прямой световой конус, основанный при $x^{(1)}$, и обратный световой конус, основанный у $x^{(2)}$. Если σ — плоскость, тогда это можно рассматривать в качестве разновременной гиперповерхности в системе координат движения наблюдателя O , для которого детектирование на D1 происходит раньше, чем на D2. Согласно нашему обсуждению в разделах 11.2.1 и 11.2.3 мы находим, что наблюдатель O связывает состояние с гиперповерхностью σ , которая *не* связывается каким-либо представлением лоренцевской группы с любым из расслоений Алисы. В самом деле, согласно уравнению (11.288) мы имеем на σ вектор состояния, который обусловлен результатом первого измерения на D1 и который задается одним из шести возможных состояний, а именно двумя двухфотонными состояниями

$$c_{2\downarrow}^{\dagger} \left(\alpha b_{3\leftrightarrow}^{\dagger} + \beta b_{3\uparrow}^{\dagger} \right) |0\rangle, \quad c_{2\leftrightarrow}^{\dagger} \left(\alpha b_{3\leftrightarrow}^{\dagger} + \beta b_{3\uparrow}^{\dagger} \right) |0\rangle, \quad (11.290)$$

тремя однофотонными состояниями

$$b_{3\downarrow}^{\dagger} |0\rangle, \quad b_{3\leftrightarrow}^{\dagger} |0\rangle, \quad \left(\alpha b_{3\leftrightarrow}^{\dagger} - \beta b_{3\downarrow}^{\dagger} \right) |0\rangle \quad (11.291)$$

и одним трехфотонным состоянием

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\beta \left[c_{2\downarrow}^\dagger \right]^2 b_{3\leftrightarrow}^\dagger - \alpha \left[c_{2\leftrightarrow}^\dagger \right]^2 b_{3\downarrow}^\dagger + c_{2\leftrightarrow}^\dagger c_{2\downarrow}^\dagger \left[ab_{3\leftrightarrow}^\dagger - \beta b_{3\downarrow}^\dagger \right] \right) |0\rangle. \quad (11.292)$$

Отметим также, что смесь, которая описывает измерение на неселективном уровне, не имеет определенного количества фотонов. Это снова показывает, что вектор состояния (или матрица плотности) должны быть представлены в качестве функционалов на множестве пространственно-подобных поверхностей, что означает, что это должно быть связано с различными расслоениями пространства-времени.

Библиография

Aharonov, Y. and Albert, D. Z. (1980). States and observables in relativistic quantum field theories. *Phys. Rev.*, **D21**, 3316–3324.

Aharonov, Y. and Albert, D. Z. (1981). Can we make sense out of the measurement process in relativistic quantum mechanics? *Phys. Rev.*, **D24**, 359–370.

Aharonov, Y. and Albert, D. Z. (1984a). Is the usual notion of time evolution adequate for quantum-mechanical system? I. *Phys. Rev.*, **D29**, 223–227.

Aharonov, Y. and Albert, D. Z. (1984b). Is the usual notion of time evolution adequate for quantum mechanical system? II. Relativistic considerations. *Phys. Rev.*, **D29**, 228–234.

Aharonov, Y., Albert, D. Z. and Vaidman, L. (1986). Measurement process in relativistic quantum theory. *Phys. Rev.*, **D34**, 1805–1813.

Bell, J. S. (1964). On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox. *Physics*, **1**, 195–200.

Bennett, C. H., Brassard, G., Crepeau, C., Jozsa, R., Peres, A. and Wootters, W. K. (1993). Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1895–1899.

Bloch, I. (1967). Some relativistic oddities in the quantum theory of observation. *Phys. Rev.*, **156**, 1377–1384.

Bohm, D. (1951). *Quantum Theory*. Prentice-Hall, New York. Имеется перевод: Бом Д. *Квантовая теория*. — М.: Наука, 1965. — 728 стр.

Bohr, N. and Rosenfeld, L. (1933). *Zur Frage der Meßbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen*. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab., Matematisk-fysiske Meddelelser XII, 8, Copenhagen. Имеется перевод: Бор Н., Розенфельд Л. *К вопросу об измеримости электромагнитного поля* // Бор Н. *Избранные научные труды*. В 2-х т. М.: Наука, 1971. Т. 2. С. 120–162.

- Bouwmeester, D., Pan, J.-W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H. and Zeilinger, A. (1997). Experimental quantum teleportation. *Nature*, **390**, 575–579.
- Braunstein, S. L. and Mann, A. (1995). Measurement of the Bell operator and quantum teleportation. *Phys. Rev.*, **A51**, R1727–1730.
- Breuer, H. P. and Petruccione, F. (1998). Relativistic formulation of quantum-state diffusion. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**, 33–52.
- Breuer, H. P. and Petruccione, F. (1999). State vector reduction in relativistic quantum mechanics: An introduction. In *Open Systems and Measurement in Relativistic Quantum Theory* (eds. Breuer, H. P. and Petruccione, F.), Volume 526 of *Lecture Notes in Physics*, p. 1–30. Springer-Verlag, Berlin.
- Breuer, H. P. and Petruccione, F. (2001). Relativistic theory of continuous measurements. In *Chance in Physics. Foundations and Perspectives* (eds. Bricmont, J., Dürr, D., Galavotti, M. C., Ghirardi, G., Petruccione, F. and Zanghi, N.), Volume 574 of *Lecture Notes in Physics*, p. 195–212. Springer-Verlag, Berlin.
- Clauser, J. F. and Shimony, A. (1978). Bell's theorem: Experimental tests and implications. *Rep. Prog. Phys.*, **41**, 1881–1927.
- Diòsi, L. (1991). Covariant formulation of multiple localized quantum measurements. *Phys. Rev.*, **A43**, 17–21.
- Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, **47**, 777–780. Имеется перевод: Эйнштейн А., Подольски Б., Розен Н. *Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным?* // УФН. — 1936. — Т. XVI, вып. 4. — С. 440–446; Эйнштейн А. *Собрание научных трудов*. Т. 3. С. 604–611.
- Jauch, J. M. and Rohrlich, F. (1980). *The Theory of Photons and Electrons*. Springer-Verlag, New York.
- Landau, L. and Peierls, R. (1931). Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips fur die relativistische Quantentheorie. *Z. Phys.*, **69**, 56–69. Имеется русский вариант: Ландау Л. Д., Пайерс Р. Распространение принципа неопределенности на релятивистскую квантовую теорию // Ландау Л. Д. *Собрание трудов*. М., 1969. Т. 1. С. 56–70.
- Michler, M., Mattle, K., Weinfurter, H. and Zeilinger, A. (1996). Interferometric Bell-state analysis. *Phys. Rev.*, **A53**, R1209–R1212.
- Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Freeman, San Francisco. Имеется перевод: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация* (в 3-х томах). М.: Мир, 1977.

- Popescu, S. and Vaidman, L. (1994). Causality constraints on nonlocal quantum measurements. *Phys. Rev.*, **A49**, 4331–4338.
- Schweber, S. S. (1961). *In Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Row, Peterson and Company, Evanston, Illinois. Имеется перевод: Швеберс С. *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля*. М.: ИЛ, 1963.
- Schwinger, J. (1948). Quantum electrodynamics. I. A covariant formulation. *Phys. Rev.*, **74**, 1439–1461.
- Sorkin, R. D. (1993). *Impossible measurements on quantum fields*. In *Directions in General Relativity* (eds. Hu, B. L. and Jacobson, T. A.), Volume 2. Cambridge University Press, Cambridge.
- Tomonaga, S. (1946). On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. I. *Prog. Theor. Phys.*, **1**, 27–42.
- Tomonaga, S. (1946). On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. II. *Prog. Theor. Phys.*, **2**, 101–116.
- Vaidman, L. (1994). Teleportation of quantum states. *Phys. Rev.*, **A49**, 1473–1476.
- Weinberg, S. (1995). *The Quantum Theory of Fields*, Volume I. Cambridge University Press, Cambridge. Имеется перевод: Вайнберг С. *Квантовая теория поля*, т. 1. М.: Физматлит, 2003.

ГЛАВА 12

Квантовая электродинамика открытых систем

В квантовой электродинамике степени свободы вещества взаимодействуют с полем излучения $A_\mu(x)$ через локальную, калибровочно-инвариантную плотность вида $j^\mu(x)A_\mu(x)$, где $j^\mu(x)$ — сохраняющаяся плотность тока заряженного вещества. Благодаря линейной структуре этого взаимодействия, задача конструирования полного формального представления редуцированной динамики вещества может быть решена точно, если электромагнитное поле излучения находится изначально в состоянии, описываемом гауссовым характеристическим функционалом. Подходящая стратегия для достижения этой цели состоит в использовании функциональных методов теории поля. В этой главе мы объединим такие методы с техникой супероператоров, чтобы вывести точное релятивистское представление приведенной матрицы плотности для степеней свободы вещества.

Редуцированная динамика включает некоторый упорядоченный по времени функционал плотности потока супероператоров, который полностью описывает влияние электромагнитного поля излучения на динамику вещества. Этот функционал уже применялся при изучении квантового броуновского движения в разделе 3.6.4 для вывода функционала влияния Фейнмана–Вернона и представления в интегралах по траекториям для пропагатора модели Кальдейры–Леггетта.

Техника функционального супероператора, развитая в этой главе, может быть использована как отправная точка для вывода основных уравнений, встречавшихся в предыдущих главах. Здесь мы проиллюстрируем эту технику посредством конкретного приложения. А именно, мы изучим потерю квантовой когерентности заряженных частиц через излучение в типичных интерференционных устройствах. Для этого степень декогерентизации будет описываться через релятивистский, калибровочно-инвариантный функционал. Будет развита соответствующая техника, позволяющая дать явное определение функционала декогерентизации для простых интерференционных устройств. Оказывается, что относительное движение двух

интерферирующих волновых пакетов приводит к потере когерентности, которая вызывается испусканием мягкого, низкочастотного тормозного излучения. Этот механизм декогерентизации представляет фундаментальный процесс в квантовой электродинамике, так как он доминирует на малых временах и поэтому работает даже для электромагнитного поля в вакууме при нулевой температуре.

В заключение мы исследуем возможность разрушения когерентной суперпозиции многочастичных состояний. Будет доказано, что, в то время как эффект декогерентизации мал для одиночных электронов с нерелятивистской скоростью, он заметно усиливается для некоторых суперпозиций многочастичных состояний.

12.1. Теория матриц плотности для КЭД

В отличие от договоренности в первых главах, в этой главе мы воспользуемся единицами Хевисайда–Лоренца, так что $\hbar = c = 1$, и постоянная тонкой структуры выражается как

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}, \quad (12.1)$$

где e — заряд электрона и c — скорость света. Как и в главе 11, пространственно-временные координаты 4-вектора в пространстве Минковского обозначаются $x^\mu = (x^0, \vec{x})$, и мы используем метрический тензор с сигнатурой $(+1, -1, -1, -1)$. Соответственно, лоренцово скалярное произведение двух 4-векторов $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ и $y^\mu = (y^0, \vec{y})$ запишется как

$$xy = x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad (12.2)$$

где мы используем правило суммирования. Время от времени мы будем писать множители c и \hbar .

12.1.1. Уравнения поля и корреляционные функции

Для определенности мы будем работать в кулоновской калибровке. В ней легко исключить степени свободы излучения. Хотя мы теряем свойство заведомой лоренцевой ковариантности, выбирая фиксированную калибровку, лоренцева ковариантность и калибровочная инвариантность конечных результатов легко восстанавливаются.

12.1.1.1. Уравнения Максвелла и перестановочные соотношения. В кулоновской калибровке поле излучения описывается векторным потенциалом \vec{A} , удовлетворяющим условию

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (12.3)$$

Электрическое и магнитное поля в терминах \vec{A} выражаются как¹

$$\vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (12.4)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (12.5)$$

Свободные уравнения Максвелла

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_T = 0, \quad (12.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (12.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (12.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}_T}{\partial t} \quad (12.9)$$

приводят тогда к волновому уравнению для поперечного векторного потенциала

$$\square \vec{A} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} = 0. \quad (12.10)$$

Волновое уравнение (12.10) может быть решено при помощи разложения векторного потенциала по плоским волнам

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2(2\pi)^3 \omega}} \sum_{\lambda=1,2} \left[\vec{e}_\lambda(\vec{k}) b_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + \vec{e}_\lambda(\vec{k}) b_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right]. \quad (12.11)$$

Как обычно, моды плоских волн характеризуются волновым вектором \vec{k} и двумя единичными векторами поляризации $\vec{e}_\lambda(\vec{k})$, так что

$$\vec{k} \cdot \vec{e}_\lambda(\vec{k}) = 0, \quad (12.12)$$

$$\vec{e}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{e}_{\lambda'}(\vec{k}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (12.13)$$

$$\sum_{\lambda=1,2} e_\lambda^i(\vec{k}) e_\lambda^j(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \equiv P_{ij}(\vec{k}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (12.14)$$

Тензор $P_{ij}(\vec{k})$ является проектором на поперечную компоненту в k -пространстве. В координатном пространстве он принимает вид

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta}. \quad (12.15)$$

¹Мы ставим индекс T для того, чтобы подчеркнуть поперечный характер поля излучения \vec{E}_T .

Полевые операторы $b_\lambda(\vec{k})$ и $b_\lambda^\dagger(\vec{k})$ представляют собой операторы уничтожения и рождения фотона с волновым вектором \vec{k} и поляризацией $\vec{e}_\lambda(\vec{k})$ и удовлетворяют бозонным перестановочным соотношениям

$$\left[b_\lambda(\vec{k}), b_{\lambda'}(\vec{k}') \right] = \left[b_\lambda^\dagger(\vec{k}), b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right] = 0, \quad (12.16)$$

$$\left[b_\lambda(\vec{k}), b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (12.17)$$

4-вектор импульса фотона записывается как

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}) = (\omega, \vec{k}), \quad \omega = |\vec{k}|, \quad (12.18)$$

и $kx \equiv k^\mu x_\mu = \omega x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$.

С помощью приведенных выше соотношений легко определить перестановочное соотношение для свободного векторного потенциала в произвольный момент времени

$$D^T(x - x')_{ij} \equiv i[A_i(x), A_j(x')] = -P_{ij}D(x - x'). \quad (12.19)$$

Функция $D(x - x')$ — перестановочная функция Паули–Иордана электромагнитного поля. Ее Фурье-образ принимает вид

$$D(x - x') = -i \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3 \omega} \left(e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \right). \quad (12.20)$$

В явном виде находим

$$D(x - x') = -\frac{1}{4\pi r} [\delta(r - t) - \delta(r + t)] = \quad (12.21)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \text{sign}(x_0 - x'_0) \delta[(x - x')^2], \quad (12.22)$$

где

$$r \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|, \quad t \equiv x_0 - x'_0. \quad (12.23)$$

Мы видим, что $D(x - x')$ является антисимметричной функцией и удовлетворяет

$$D(x - x')|_{x_0=x'_0} = 0, \quad (12.24)$$

$$\partial_0 D(x - x')|_{x_0=x'_0} = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (12.25)$$

Более того, $D(x - x')$ является решением однородного волнового уравнения

$$\square D(x - x') = 0 \quad (12.26)$$

и, очевидно, инвариантна относительно преобразований Лоренца²

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (12.27)$$

то есть мы имеем

$$D(\Lambda[x - x']) = D(x - x'). \quad (12.28)$$

Перестановочная функция $D(x - x')$, сингулярная в пространстве Минковского, стремится к нулю вне поверхности светового конуса, определенного как $(x - x')^2 = 0$, и имеет δ -сингулярность на нем. Следующие соотношения связывают ее с запаздывающей $D_{ret}(x - x')$ и опережающей $D_{adv}(x - x')$ функциями Грина:

$$D(x - x') = -(D_{ret}(x - x') - D_{adv}(x - x')), \quad (12.29)$$

$$\begin{aligned} \text{sign}(x - x_0)D(x - x') &= -\frac{1}{2\pi}\delta[(x - x')^2] = \\ &= -(D_{ret}(x - x') + D_{adv}(x - x')). \end{aligned} \quad (12.30)$$

В заключение отметим, что перестановочное соотношение (12.19) немедленно дает с помощью уравнения (12.25) перестановочное соотношение между векторным потенциалом и оператором поперечного электрического поля, взятых в один момент времени,

$$[\vec{E}_i^T(t, \vec{x}), A_j(t, \vec{x})] = +iP_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{x}') \equiv i\delta_{ij}^T(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (12.31)$$

12.1.1.2. Антиперестановочная функция. Как мы уже видели при изучении квантового броуновского движения, помимо перестановочной функции есть еще одна корреляционная функция, которая играет важную роль в описании динамики редуцированной системы. Это антиперестановочная функция, которая определяется как

$$D_1^T(x - x')_{ij} \equiv \langle \{A_i(x), A_j(x')\} \rangle_f. \quad (12.32)$$

Угловые скобки обозначают среднее по полю излучения в состоянии теплового равновесия при некоторой температуре T ,

$$\langle \mathcal{O} \rangle_f \equiv \text{tr}_f \left\{ \mathcal{O} \frac{1}{Z_f} \exp[-H_f/k_B T] \right\}, \quad (12.33)$$

²Более точно, она инвариантна относительно ортохронных преобразований Лоренца, которые удовлетворяют условию $\Lambda_0^0 \geqslant 1$.

где

$$H_f = \int d^3k \sum_{\lambda=1,2} \omega b_\lambda^\dagger(\vec{k}) b_\lambda(\vec{k}) \quad (12.34)$$

представляет собой гамильтониан свободного поля излучения, tr_f обозначает след по степеням свободы излучения, а Z_f — нормировочный множитель, статсумма поля.

С помощью

$$\left\langle \left[b_\lambda(\vec{k}), b_{\lambda'}(\vec{k}') \right] \right\rangle_f = \left\langle \left[b_\lambda^\dagger(\vec{k}), b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right] \right\rangle_f = 0, \quad (12.35)$$

$$\left\langle \left[b_\lambda(\vec{k}), b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right] \right\rangle_f = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) \quad (12.36)$$

находим

$$D_1^T(x - x')_{ij} = P_{ij} D_1(x - x') \quad (12.37)$$

с антиперестановочной функцией

$$\begin{aligned} D_1(x - x') &= \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3 \omega} \left(e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right) \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) \equiv \\ &\equiv D_1^{vac}(x - x') + D_1^{th}(x - x'). \end{aligned} \quad (12.38)$$

В последнем уравнении мы разложили D_1 на вакуумную и термическую части. Легко найти, что вакуумная часть равна

$$\begin{aligned} D_1^{vac}(x - x') &= \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3 \omega} \left(e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \left[\text{P} \frac{1}{r-t} + \text{P} \frac{1}{r+t} \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \text{P} \frac{1}{(x - x')^2}. \end{aligned} \quad (12.39)$$

Р обозначает главное значение в смысле Коши. Как и для перестановочной функции $D(x - x')$, вакуумный вклад $D_1^{vac}(x - x')$ антиперестановочной функции является лоренцевым инвариантом и удовлетворяет уравнению для свободной волны. В то время как $D(x - x')$ — антисимметричная, $D_1^{vac}(x - x')$ является, очевидно, симметричной. Отметим, что $D_1^{vac}(x - x')$ не стремится к нулю снаружи светового конуса и демонстрирует сингулярность в смысле главного значения на световом конусе.

Для того чтобы определить термическую часть антиперестановочной функции, выполним интегрирование по углу в k -интеграле в (12.38), чтобы получить

$$D_1^{th}(x - x') = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_0^\infty d\omega [\coth(\omega/2k_B T) - 1] [\sin \omega(r-t) + \sin \omega(r+t)]. \quad (12.40)$$

С помощью формулы (4.57) получаем

$$D_1^{th}(x - x') = \frac{1}{4\pi^2 r} \left[\frac{1}{\tau_B} \coth \left(\frac{r-t}{\tau_B} \right) - \frac{1}{r-t} + \frac{1}{\tau_B} \coth \left(\frac{r+t}{\tau_B} \right) - \frac{1}{r+t} \right]. \quad (12.41)$$

В этом выражении используется термическое корреляционное время

$$\tau_B \equiv \frac{1}{\pi k_B T}, \quad (12.42)$$

которое уже вводилось в уравнении (4.58).

Видно, что $D_1^{th}(x - x')$ является регулярной функцией в пространстве Минковского. Если мы скомбинируем приведенное выше выражение для $D_1^{th}(x - x')$ с выражением (12.39) для вакуумного вклада, мы увидим, что оба вклада, включающие $1/(r \pm t)$, уничтожают друг друга. Условившись, что сингулярность на световом конусе $(x - x')^2 = 0$ считается сингулярностью в смысле главного значения, мы можем записать полную антиперестановочную функцию в следующем виде:

$$\begin{aligned} D_1(x - x') &= \frac{1}{4\pi^2 r \tau_B} \left[\coth \left(\frac{r-t}{\tau_B} \right) + \coth \left(\frac{r+t}{\tau_B} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r \tau_B} \frac{\operatorname{sh}(2r/\tau_B)}{\operatorname{sh}[(r-t)/\tau_B] \operatorname{sh}[(r+t)/\tau_B]}. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Нужно отметить, что антиперестановочная функция не является лоренц-инвариантной. Это связано с тем фактом, что тепловое поле излучения выделяет некоторую систему отсчета. Конечно, полная антиперестановочная функция является симметричной и удовлетворяет уравнению для свободной волны. В соответствии с уравнением (12.43), $D_1(x - x')$ изменяет знак при пересечении поверхности светового конуса, то есть $D_1(x - x') > 0$ для пространственно-подобных интервалов ($(x - x')^2 < 0$) и $D_1(x - x') < 0$ для временно-подобных интервалов ($(x - x')^2 > 0$).

Дипольное приближение для антиперестановочной функции получается при переходе к пределу $r \rightarrow 0$ в уравнении (12.43), что дает

$$D_1(t, 0) = -\frac{1}{2\pi^2\tau_B^2 \operatorname{sh}^2(t/\tau_B)}. \quad (12.44)$$

В пределе $|t| \ll \tau_B$ эта функция расходится как t^{-2} и затухает экспоненциально как $\exp(-2|t|/\tau_B)$ для времен $|t| \gg \tau_B$.

С другой стороны, при переходе к пределу $t \rightarrow 0$ в уравнении (12.43) мы находим

$$D_1(0, r) = \frac{1}{2\pi^2 r \tau_B} \operatorname{cth}(r/\tau_B). \quad (12.45)$$

Это показывает, что $D_1(0, r)$ расходится как r^{-2} на малых расстояниях ($r \ll \tau_B$), но затухает лишь как r^{-1} на больших расстояниях ($r \gg \tau_B$).

12.1.1.3. Корреляционная функция электрического поля. Определение корреляционной функции поперечного поля $\vec{E}_T(x)$ является простой, но интересной задачей. Используя однородность пространства и времени, можно увидеть, что достаточно вычислить величину

$$\begin{aligned} \langle \{E_i^T(x), E_j^T(0)\} \rangle_f &= \left\langle \left\{ \dot{A}_i(x), \dot{A}_j(0) \right\} \right\rangle_f = \\ &= -P_{ij} \partial_0^2 D_1(t, r) = \\ &= -(\delta_{ij} \Delta - \partial_i \partial_j) D_1(t, r), \end{aligned} \quad (12.46)$$

где $t = x^0$ и $r = |\vec{x}|$. На последнем шаге мы использовали тот факт, что D_1 удовлетворяет однородному волновому уравнению. Пользуясь явным выражением (12.43), получаем

$$\begin{aligned} \langle \{E_i^T(x), E_j^T(0)\} \rangle_f &= (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) \times \\ &\times \frac{-1}{2\pi^2 \tau_B^3 r} \left[\frac{\operatorname{ch}[(r-t)/\tau_B]}{\operatorname{sh}^3[(r-t)/\tau_B]} + \frac{\operatorname{ch}[(r+t)/\tau_B]}{\operatorname{sh}^3[(r+t)/\tau_B]} \right], \end{aligned} \quad (12.47)$$

где $\hat{x}_i = x_i/r$. Суммируя по $i = j$, мы приходим к выражению

$$\left\langle \left\{ \vec{E}_T(x), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_f = \frac{-1}{\pi^2 \tau_B^3 r} \left[\frac{\operatorname{ch}[(r-t)/\tau_B]}{\operatorname{sh}^3[(r-t)/\tau_B]} + \frac{\operatorname{ch}[(r+t)/\tau_B]}{\operatorname{sh}^3[(r+t)/\tau_B]} \right]. \quad (12.48)$$

Рассмотрим сначала предел $r \rightarrow 0$ для уравнения (12.48), который выражается как

$$\left\langle \left\{ \vec{E}_T(t, 0), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_f = \frac{1}{\pi^2 \tau_B^4} \frac{6 + 4 \operatorname{sh}^2(t/\tau_B)}{\operatorname{sh}^4(t/\tau_B)}. \quad (12.49)$$

Для времен малых по сравнению с корреляционным временем это дает

$$\left\langle \left\{ \vec{E}_T(t, 0), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_f \approx \frac{6}{\pi^2 t^4}, \quad |t| \ll \tau_B, \quad (12.50)$$

что соответствует вакуумному вкладу для корреляционной функции. Таким образом, вакуумная часть доминирует на малых временах и расходится как t^{-4} .

Термический вклад в корреляционную функцию электрического поля выражается как

$$\left\langle \left\{ \vec{E}_T(t, 0), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_{th} = \frac{1}{\pi^2 \tau_B^4} \left[\frac{6 + 4 \operatorname{sh}^2(t/\tau_B)}{\operatorname{sh}^4(t/\tau_B)} - \frac{6}{(t/\tau_B)^4} \right]. \quad (12.51)$$

Для $|t|/\tau_B \rightarrow 0$ член в квадратных скобках стремится к значению $2/15$, так что мы можем записать

$$\left\langle \left\{ \vec{E}_T(t, 0), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_{th} = \frac{2}{15 \pi^2 \tau_B^4} g\left(\frac{t}{\tau_B}\right), \quad (12.52)$$

где функция

$$g(\tau) \equiv \frac{15}{2} \left[\frac{6 + 4 \operatorname{sh}^2 \tau}{\operatorname{sh}^4 \tau} - \frac{6}{\tau^4} \right] \quad (12.53)$$

удовлетворяет условию $g(0) = 1$. Плотность энергии поля в тепловом равновесии равна, таким образом,

$$u_{th} = \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \vec{E}_T(0), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_{th} = \frac{1}{15 \pi^2 \tau_B^4} = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{15},$$

что является законом Стефана–Больцмана для излучения черного тела.

С другой стороны, в случае $|t| \gg \tau_B$ уравнение (12.49) дает

$$\left\langle \left\{ \vec{E}_T(t, 0), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_f \approx \frac{16}{\pi^2 \tau_B^4} e^{-2|t|/\tau_B}. \quad (12.54)$$

Корреляционная функция затухает экспоненциально на временах больших по сравнению с корреляционным временем τ_B .

В заключение рассмотрим предел $|t| \rightarrow 0$ в уравнении (12.48). Этот предел дает

$$\left\langle \left\{ \vec{E}_T(0, r), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_f = \frac{-2}{\pi^2 \tau_B^3 r} \frac{\text{ch}(r/\tau_B)}{\text{sh}^3(r/\tau_B)}, \quad (12.55)$$

так что мы имеем

$$\left\langle \left\{ \vec{E}_T(0, r), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_f \approx -\frac{2}{\pi^2 r^4} \quad \text{для } r \ll \tau_B, \quad (12.56)$$

$$\left\langle \left\{ \vec{E}_T(0, r), \vec{E}_T(0) \right\} \right\rangle_f \approx -\frac{16}{\pi^2 \tau_B^3 r} e^{-2r/\tau_B} \quad \text{для } r \gg \tau_B. \quad (12.57)$$

Корреляционная функция электрического поля расходится, таким образом, как r^{-4} на коротких расстояниях, $r \ll \tau_B$. На расстояниях больших по сравнению с τ_B она затухает экспоненциально, в отличие от поведения антиперестановочной функции D_1 в этом пределе.

12.1.2. Приведенная матрица плотности

Обратимся теперь к редуцированной динамике степеней свободы вещества, которое взаимодействует с полем излучения. Плотность гамильтонiana в представлении взаимодействия в калибровке Кулона принимает вид (Weinberg, 1995; Jauch, Rohrlich, 1980)

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_C(x) + \mathcal{H}_T(x). \quad (12.58)$$

Здесь

$$\mathcal{H}_T(x) = -\vec{j}(x) \cdot \vec{A}(x) \equiv j^\mu(x) A_\mu(x) \quad (12.59)$$

представляет собой плотность взаимодействия плотности тока вещества $j^\mu(x)$ с поперечным полем излучения $A^\mu = (0, \vec{A})$. Считается, что плотность тока вещества удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \quad (12.60)$$

выражающему локальное сохранение заряда. Плотность кулоновской энергии выражается как

$$\mathcal{H}_C(x^0, \vec{x}) = \frac{1}{2} \int d^3y \frac{j^0(x^0, \vec{x}) j^0(x^0, \vec{y})}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (12.61)$$

так что

$$\mathcal{H}_C(x^0) = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{j^0(x^0, \vec{x}) j^0(x^0, \vec{y})}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \quad (12.62)$$

является мгновенной плотностью кулоновской энергии для распределения заряда, заданного $j^0(x)$.

Для удобства обозначений в уравнении (12.59) мы приравняли скалярный потенциал поля излучения нулю, $A^0 = 0$. Это позволяет нам записать корреляционные функции поля как

$$D^T(x - x')_{\mu\nu} = i[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -P_{\mu\nu} D(x - x'), \quad (12.63)$$

$$D_1^T(x - x')_{\mu\nu} = \langle \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} \rangle_f = +P_{\mu\nu} D_1(x - x'), \quad (12.64)$$

где $P_{\mu\nu}$ определяется уравнением (12.15), а также тем, что $P_{00} = P_{0i} = P_{i0} = 0$ для $i = 1, 2, 3$. Нужно помнить, однако, что эти и все другие корреляционные функции, которые будут введены позже, включают в себя поперечную проекцию $P_{\mu\nu}$.

Как и в предыдущем разделе, все поля берутся в представлении взаимодействия. Матрица плотности $\rho(t)$ взаимодействующей системы удовлетворяет тогда уравнению Лиувилля–фон Неймана, которое мы запишем как

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = \int d^3x \mathcal{L}(t, \vec{x}) \rho(t). \quad (12.65)$$

Супероператор Лиувилля $\mathcal{L}(x)$ выражается как $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_C(x) + \mathcal{L}_T(x)$, где мы вводим супероператоры Лиувилля, относящиеся к плотностям кулоновского поля и поперечного поля,

$$\mathcal{L}_C(x)\rho \equiv -i[\mathcal{H}_C(x), \rho], \quad (12.66)$$

$$\mathcal{L}_T(x)\rho \equiv -i[\mathcal{H}_T(x), \rho]. \quad (12.67)$$

Интегрируя формально уравнение Лиувилля–фон Неймана с помощью оператора хронологического упорядочения по времени и вычисляя след по полю излучения, мы получаем следующее уравнение:

$$\rho_m(t_f) = \text{tr}_f \left\{ T_- \exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}(x) \right] \rho(t_i) \right\}. \quad (12.68)$$

Это уравнение соотносит матрицу плотности $\rho_m(t_f)$, описывающую степени свободы вещества в некоторый конечный момент времени t_f , с матрицей плотности $\rho(t_i)$ комбинированной системы вещество–поле в некоторый

начальный момент времени t_i . Оно будет отправной точкой для вывода функционала влияния в следующем разделе.

12.2. Функционал влияния КЭД

В этом разделе мы выведем супероператорное представление для функционала влияния КЭД, воспользовавшись функциональной техникой теории поля. Функционал влияния будет получен в виде функционала супероператоров потока плотности вещества, в основе которого лежат функции Грина поля излучения. Будет разобран физический смысл получившегося выражения. В частности, функционал будет сравниваться с хорошо известными выражениями для амплитуды вакуум-вакуум электромагнитного поля излучения в присутствии классической плотности тока и с классической формулировкой для системы заряженных частиц в терминах нелокального принципа действия (Breuer, Petruccione, 2001).

12.2.1. Исключение степеней свободы излучения

Наша цель состоит в исключении переменных электромагнитного поля излучения для того, чтобы получить точное представление для приведенной матрицы плотности ρ_m степеней свободы вещества. Для этого мы возьмем формальное представление (12.68). Процедура вывода состоит из двух шагов. Во-первых, мы исключаем упорядочение по времени переменных электромагнитного поля, во-вторых, определяем получившийся след по переменным поля, используя гауссовые свойства состояния поля.

12.2.1.1. Исключение временного упорядочения переменных поля.

На первом шаге мы разложим оператор хронологического упорядочения по времени T_{\leftarrow} на оператор упорядочения по времени для тока вещества T_{\leftarrow}^j и для переменных электромагнитного поля T_{\leftarrow}^A как $T_{\leftarrow} = T_{\leftarrow}^j T_{\leftarrow}^A$. Это позволит записать уравнение (12.68) как

$$\rho_m(t_f) = T_{\leftarrow}^j \left(\text{tr}_f \left\{ T_{\leftarrow}^A \exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x (\mathcal{L}_C(x) + \mathcal{L}_T(x)) \right] \rho(t_i) \right\} \right). \quad (12.69)$$

Токи $j^\mu(x)$ коммутируют при временном упорядочении T_{\leftarrow}^j . Мы, следовательно, можем их формально считать коммутирующими классическими полями под символом временного упорядочения. Поскольку оператор $\mathcal{L}_C(x)$

содержит только переменные вещества, соответствующий вклад можно вынести из под tr . Таким образом, мы имеем

$$\rho_m(t_f) = T_{\leftarrow}^j \left(\exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_C(x) \right] \text{tr}_f \left\{ T_{\leftarrow}^A \exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_T(x) \right] \rho(t_i) \right\} \right). \quad (12.70)$$

Теперь исключим временное упорядочение A полей. При помощи теоремы Вика (Itzykson, Zuber, 1980) мы получаем

$$\begin{aligned} T_{\leftarrow}^A \exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_T(x) \right] &= \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' [\mathcal{L}_T(x), \mathcal{L}_T(x')] \theta(t - t') \right] \exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_T(x) \right]. \end{aligned} \quad (12.71)$$

Для того чтобы определить коммутатор лиувиллевских супероператоров, мы используем тождество Якоби, которое для произвольной тестовой плотности ρ дает

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_T(x), \mathcal{L}_T(x')] \rho &= \mathcal{L}_T(x) \mathcal{L}_T(x') \rho - \mathcal{L}_T(x') \mathcal{L}_T(x) \rho = \\ &= -[\mathcal{H}_T(x), [\mathcal{H}_T(x'), \rho]] + [\mathcal{H}_T(x'), [\mathcal{H}_T(x), \rho]] = \\ &= -[[\mathcal{H}_T(x), \mathcal{H}_T(x')], \rho]. \end{aligned} \quad (12.72)$$

Коммутатор плотностей поперечной энергии может быть приведен к виду

$$[\mathcal{H}_T(x), \mathcal{H}_T(x')] = j^\mu(x) j^\nu(x') [A_\mu(x), A_\nu(x')], \quad (12.73)$$

так как вклад с коммутатором токов равен нулю из-за временного упорядочения T_{\leftarrow}^j . Таким образом, из уравнений (12.72) и (12.73) следует, что коммутатор лиувиллевских супероператоров может быть записан как

$$[\mathcal{L}_T(x), \mathcal{L}_T(x')] \rho = -[A_\mu(x), A_\nu(x')] [j^\mu(x) j^\nu(x'), \rho]. \quad (12.74)$$

Удобно ввести супероператоры тока $J_+(x)$ и $J_-(x)$ посредством

$$J_+^\mu(x) \rho \equiv j^\mu(x) \rho, \quad J_-^\mu(x) \rho \equiv \rho j^\mu(x). \quad (12.75)$$

Таким образом, $J_+(x)$ является, по определению, оператором плотности тока, действующим слева, тогда как $J_-(x)$ действует справа. При помощи

этих определений мы приведем выражение для коммутатора лиувиллевских супероператоров к виду

$$[\mathcal{L}_T(x), \mathcal{L}_T(x')] = -[A_\mu(x), A_\nu(x')](J_+^\mu(x)J_+^\nu(x') - J_-^\mu(x)J_-^\nu(x')). \quad (12.76)$$

Подставляя результат в уравнение (12.71), мы можем записать уравнение (12.70) как

$$\begin{aligned} \rho_m(t_f) = & T_{\leftarrow}^j \left(\exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_C(x) - \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' \theta(t-t') [A_\mu(x), A_\nu(x')] J_+^\mu(x) J_+^\nu(x') + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' \theta(t-t') [A_\mu(x), A_\nu(x')] J_-^\mu(x) J_-^\nu(x') \left. \right] \times \\ & \times \text{tr}_f \left\{ \exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_T(x) \right] \rho(t_i) \right\}. \end{aligned} \quad (12.77)$$

Это точное формальное представление приведенной матрицы плотности для переменных вещества. Упорядочение по времени степеней свободы излучения было исключено и входит в уравнение (12.77) только через функционал

$$W[J_+, J_-] \equiv \text{tr}_f \left\{ \exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_T(x) \right] \rho(t_i) \right\}, \quad (12.78)$$

так как коммутатор A полей является классической (с-числовой) функцией.

12.2.1.2. Супероператор влияния. Функционал (12.78) включает в себя усреднение переменных поля по начальному состоянию $\rho(t_i)$ совместной системы вещество-поле. Следовательно, он содержит все корреляции в начальном состоянии полной системы. В дальнейшем нашей главной целью будет изучение при помощи взаимодействия между веществом и полем излучения того, как устроены корреляции. Мы рассмотрим начальное состояние с низкой энтропией, которое выражается как произведение состояний вида

$$\rho(t_i) = \rho_m(t_i) \otimes \rho_f, \quad (12.79)$$

где $\rho_m(t_i)$ является матрицей плотности вещества в начальном состоянии, а матрица плотности ρ_f поля излучения описывает состояние теплового равновесия при температуре T . Исключить влияние особого выбора начального состояния (12.79) можно устремлением t_i к $-\infty$ и адиабатическим включением взаимодействия. Это обычная процедура, которая применяется в квантовой теории поля для того, чтобы определить асимптотические состояния S -матрицы. Тогда переменные вещества и поля описываются как входящие (in-состояния) полей, которые подчиняются свободным уравнениям поля с перенормированной массой.

Для произвольного начального состояния $\rho(t_i)$ функционал $W[J_+, J_-]$ может быть определен посредством кумулянтного разложения (см. раздел 9.2.3). Кумулянтное разложение заканчивается на втором члене, так как исходное состояние (12.79) является гауссовым по отношению к переменным поля, и лиувиллевский супероператор $\mathcal{L}_T(x)$ линеен по полу излучения. Вдобавок, линейный член разложения отсутствует, потому что $\langle A_\mu(x) \rangle_f = 0$. В итоге, мы немедленно получаем

$$W[J_+, J_-] = \exp \left[\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' \langle \mathcal{L}_T(x) \mathcal{L}_T(x') \rangle_f \right] \rho_m(t_i). \quad (12.80)$$

Подставляя определение лиувиллевского супероператора $\mathcal{L}_T(x)$ в экспоненту, после некоторых преобразований находим

$$\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' \langle \mathcal{L}_T(x) \mathcal{L}_T(x') \rangle_f \rho_m(t_i) \equiv \quad (12.81)$$

$$\begin{aligned} & \equiv -\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' \text{tr}_f [\mathcal{H}_T(x), [\mathcal{H}_T(x'), \rho(t_i)]], \\ & = -\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' \times \quad (12.82) \\ & \times [\langle A_\nu(x') A_\mu(x) \rangle_f J_+^\mu(x) J_-^\nu(x') + \langle A_\mu(x) A_\nu(x') \rangle_f J_-^\mu(x) J_+^\nu(x') - \\ & - \langle A_\nu(x') A_\mu(x) \rangle_f J_+^\mu(x) J_-^\nu(x') - \langle A_\mu(x) A_\nu(x') \rangle_f J_-^\mu(x) J_+^\nu(x')] \rho_m(t_i). \end{aligned}$$

Используя этот результат совместно с уравнением (12.80), мы можем пре-

образовать уравнение (12.77) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \rho_m(t_f) = & T_{\leftarrow}^j \exp \left[\int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_C(x) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' \{ -(\theta(t-t')) [A_\mu(x), A_\nu(x')] + \\ & + \langle A_\nu(x') A_\mu(x) \rangle_f J_+^\mu(x) J_+^\nu(x') + (\theta(t-t')) [A_\mu(x), A_\nu(x')] - \\ & - \langle A_\mu(x) A_\nu(x') \rangle_f J_-^\mu(x) J_-^\nu(x') + \langle A_\nu(x') A_\mu(x) \rangle_f J_+^\mu(x) J_-^\nu(x') + \\ & \left. + \langle A_\mu(x) A_\nu(x') \rangle_f J_-^\mu(x) J_+^\nu(x') \} \] \rho_m(t_i). \end{aligned} \quad (12.83)$$

На этом этапе удобно ввести новые обозначения для корреляционных функций электромагнитного поля — фейнмановский пропагатор и комплексно сопряженный ему (T_{\leftarrow} обозначает антихронологическое упорядочение по времени)

$$\begin{aligned} iD_F(x-x')_{\mu\nu} \equiv & \langle T_{\leftarrow} [A_\mu(x) A_\nu(x')] \rangle_f = \\ = & \theta(t-t') [A_\mu(x), A_\nu(x')] + \langle A_\nu(x') A_\mu(x) \rangle_f, \end{aligned} \quad (12.84)$$

$$\begin{aligned} iD_F^*(x-x')_{\mu\nu} \equiv & -\langle T_{\rightarrow} [A_\mu(x) A_\nu(x')] \rangle_f = \\ = & \theta(t-t') [A_\mu(x), A_\nu(x')] - \langle A_\mu(x) A_\nu(x') \rangle_f \end{aligned} \quad (12.85)$$

и двухточечные корреляционные функции

$$D_+(x-x')_{\mu\nu} \equiv \langle A_\mu(x) A_\nu(x') \rangle_f, \quad (12.86)$$

$$D_-(x-x')_{\mu\nu} \equiv \langle A_\nu(x') A_\mu(x) \rangle_f. \quad (12.87)$$

Легко проверить, что эти функции связаны друг с другом посредством тождества

$$-iD_F(x-x')_{\mu\nu} + iD_F^*(x-x')_{\mu\nu} + D_+(x-x')_{\mu\nu} + D_-(x-x')_{\mu\nu} = 0. \quad (12.88)$$

При помощи этих обозначений матрица плотности вещества может быть теперь представлена в компактном виде

$$\rho_m(t_f) = T_{\leftarrow}^j \exp(i\Phi[J_+, J_-]) \rho_m(t_i), \quad (12.89)$$

где мы ввели *фазовый функционал влияния*

$$i\Phi[J_+, J_-] = \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_C(x) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' \times \\ \times \{-iD_F(x - x')_{\mu\nu} J_+^\mu(x) J_-^\nu(x') + iD_F^*(x - x')_{\mu\nu} J_-^\mu(x) J_-^\nu(x') + \\ + D_-(x - x')_{\mu\nu} J_+^\mu(x) J_-^\nu(x') + D_+(x - x')_{\mu\nu} J_-^\mu(x) J_+^\nu(x')\}. \quad (12.90)$$

Уравнение (12.89) дает точное представление матрицы плотности вещества, которое принимает требуемый вид: включает переменные электромагнитного поля только через различные введенные выше двухточечные корреляционные функции. Видно, что динамика переменных вещества выражается через времеупорядоченный *супероператор влияния*, то есть упорядоченную по времени экспоненциальную функцию, чей показатель является билинейным функционалом супероператоров тока $J_\pm(x)$.

Нужно отметить, что фазовое влияние $\Phi[J_+, J_-]$ является функционалом как величин $J_\pm(x)$, так и супероператора, который действует в пространстве матриц плотности степеней свободы вещества. Существует несколько альтернативных способов, которые могут быть использованы для получения выражения вида (12.90), как, например, техника интегралов по траекториям (Feynman, Vernon, 1963) или метод замкнутых временных путей Швингера (Chou, Su, Hao, Yu, 1985; Diòsi, 1990).

Для изучения явлений декогерентизации будет полезна еще одна эквивалентная формула для фазового функционала влияния. Для того чтобы получить эту формулу, мы воспользуемся перестановочными и антиперестановочными функциями, которые были введены и явно получены в разделе 12.1. Эти функции связаны с рассмотренными выше корреляционными функциями следующим образом:

$$D_+(x - x')_{\mu\nu} = \frac{1}{2} D_1^T(x - x')_{\mu\nu} - \frac{i}{2} D^T(x - x')_{\mu\nu}, \quad (12.91)$$

$$D_-(x - x')_{\mu\nu} = \frac{1}{2} D_1^T(x - x')_{\mu\nu} + \frac{i}{2} D^T(x - x')_{\mu\nu}, \quad (12.92)$$

$$iD_F(x - x')_{\mu\nu} = \frac{1}{2} D_1^T(x - x')_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \text{sign}(t - t') D^T(x - x')_{\mu\nu}, \quad (12.93)$$

$$-iD_F^*(x - x')_{\mu\nu} = \frac{1}{2} D_1^T(x - x')_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \text{sign}(t - t') D^T(x - x')_{\mu\nu}. \quad (12.94)$$

Мы определим перестановочный супероператор $J_c(x)$ и антиперестановоч-

ный супероператор $J_a(x)$ посредством

$$J_c^\mu(x)\rho \equiv [j^\mu(x), \rho], \quad (12.95)$$

$$J_a^\mu(x)\rho \equiv \{j^\mu(x), \rho\}, \quad (12.96)$$

которые связаны с введенными ранее супероператорами $J_\pm^\mu(x)$ как

$$J_c^\mu(x) = J_+^\mu(x) - J_-^\mu(x), \quad (12.97)$$

$$J_a^\mu(x) = J_+^\mu(x) + J_-^\mu(x). \quad (12.98)$$

В терминах этих величин фазовый функционал влияния принимает вид

$$i\Phi[J_c, J_a] = \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}_C(x) + \quad (12.99)$$

$$+ \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^t d^4x' \left\{ \frac{i}{2} D^T(x-x')_{\mu\nu} J_c^\mu(x) J_a^\nu(x') - \frac{1}{2} D_1^T(x-x')_{\mu\nu} J_c^\mu(x) J_c^\nu(x') \right\}.$$

Такая форма записи фазового функционала пригодится позже. Она определяет влияние поля излучения на динамику вещества в терминах двух фундаментальных двухточечных корреляционных функций $D(x-x')$ и $D_1(x-x')$. Отметим, что двойной интеграл по пространству-времени в уравнении (12.99) уже является упорядоченным по времени интегралом, так как интегрирование по x'_0 происходит на временном интервале от t_i до $t = x_0$.

Результат, выраженный в уравнениях (12.89) и (12.99), использовался в разделе 3.6.4 для определения функционала влияния в модели Кальдейры–Леггетта (см. (3.507) и (3.508)). Действительно, для модели Кальдейры–Леггетта мы должны были использовать взаимодействие вида $H_I = -xB$ (см. (3.377)). Из проделанных выше выкладок мы видим, что в этом случае функционал влияния (12.99) принимает в точности ту же форму, что и (3.508): перестановочный и антиперестановочный супероператоры J_c^μ, J_a^μ должны быть заменены супероператорами x_c и x_a , определенными в уравнении (3.510), в то время как контрчлен (3.509) играет схожую с кулоновским членом $\mathcal{L}_C(x)$ роль. Корреляционные функции $D^T(x-x')_{\mu\nu}$ и $D_1^T(x-x')_{\mu\nu}$ должны быть заменены на корреляционные функции модели Кальдейры–Леггетта, определенные в (3.385) и (3.386).

12.2.2. Амплитуда вакуум-вакуум

Поучительно сравнить уравнения (12.89) и (12.90) со структурой марковского основного уравнения в линдбладовском виде, содержащего множество линдбладовских операторов A_i (см. раздел 3.2.2). Видно, что члены

фазового функционала влияния включают супероператоры тока в комбинациях J_+J_- и J_-J_+ , соответствующих усиливающим членам в линдбладовском уравнении, которые имеют вид $A_i\rho_m A_i^\dagger$. Эти члены можно интерпретировать как описывающие обратное действие на редуцированную систему степеней свободы вещества, вызванное «реальными» процессами, в которых поглощаются и испускаются фотоны. Присутствие этих членов приводит к преобразованию чистых состояний в статистические смеси. Действительно, если мы пренебрежем членами, содержащими комбинации J_+J_- и J_-J_+ , правая часть (12.89) может быть записана как $U(t_f, t_i)\rho_m(t_i)U^\dagger(t_f, t_i)$, где

$$U(t_f, t_i) = T_{\leftarrow}^j \exp \left[-i \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{H}_C(x) - \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4x' D_F(x-x')_{\mu\nu} j^\mu(x) j^\nu(x') \right]. \quad (12.100)$$

Это показывает, что вклады, включающие в себя фейнмановские пропагаторы и комбинации J_+J_+ и J_-J_- супероператоров, сохраняют чистоту состояний.

Переходя к пределам $t_i \rightarrow -\infty$ и $t_f \rightarrow +\infty$, оператор $U(t_f, t_i)$ становится упорядоченным по времени произведением функционала

$$A[j] = \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_C(x) - \frac{i}{2} \int d^4x \int d^4x' D_F(x-x')_{\mu\nu} j^\mu(x) j^\nu(x') \right] \equiv \exp[i(S^{(1)} + iS^{(2)})]. \quad (12.101)$$

При нулевой температуре это уравнение является амплитудой вакуум-вакуум в присутствии классической плотности тока $j^\mu(x)$ (Feynman and Hibbs, 1965). Оно дает амплитуду для поля начать в вакууме при $t_i = -\infty$ и закончить в вакууме при $t_f = +\infty$. Во втором уравнении (12.101) мы разложили экспоненту на действительную и мнимую части, используя соответствующее разложение фейнмановского пропагатора, данное в уравнении (12.93).

Показатель экспоненты $A[j]$ является комплексным функционалом действия $S = S^{(1)} + iS^{(2)}$. Его мнимая часть равна

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{4} \int d^4x \int d^4x' D_1(x-x') \vec{j}_T(x) \cdot \vec{j}_T(x') = \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4x \int d^4x' D_1(x-x') j_\mu(x) j^\mu(x'). \end{aligned} \quad (12.102)$$

В первой строке \vec{j}_T обозначает поперечную компоненту плотности тока, которая удовлетворяет $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_T = 0$. Взаимодействие с поперечной компонентой происходит по причине того, что $D_1^T(x - x')_{\mu\nu}$ содержит поперечную проекцию $P_{\mu\nu}$. Во второй строке (12.102) мы воспользовались сохранением тока (12.60) для того, чтобы преобразовать выражения в ковариантную форму. Для того чтобы увидеть, как возникает эта форма, мы перейдем в Фурье-пространство, используя (12.38) и Фурье-образ плотности тока,

$$j^\mu(k) = \int d^4x e^{-ikx} j^\mu(x). \quad (12.103)$$

Это приводит к

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3\omega} \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) \left(\vec{j}(k) \cdot \vec{j}^*(k) - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{j}(k))(\vec{k} \cdot \vec{j}(k))^*}{|\vec{k}|^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3\omega} \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) (-j^\mu(k)j_\mu^*(k)), \end{aligned} \quad (12.104)$$

где мы использовали соотношение

$$\begin{aligned} \vec{j}(k) \cdot \vec{j}^*(k) - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{j}(k))(\vec{k} \cdot \vec{j}(k))^*}{|\vec{k}|^2} &= \vec{j}(k) \cdot \vec{j}^*(k) - j_0(k)j_0^*(k) = \\ &= -j^\mu(k)j_\mu^*(k), \end{aligned} \quad (12.105)$$

которое вытекает из сохранения тока, $k_\mu j^\mu(k) = 0$. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} |A[j]|^2 &= \exp[-2S^{(2)}] = \\ &= \exp \left[- \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3\omega} \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) (-j^\mu(k)j_\mu^*(k)) \right]. \end{aligned} \quad (12.106)$$

Это вероятность отсутствия излучения, то есть того, что плотность тока не испускает никаких фотонов (Itzykson, Zuber, 1980). Мы видим, что для конечных температур, $T > 0$, вероятность отсутствия излучения уменьшается по сравнению с вакуумным случаем. Это эффект процессов индуцированного излучения и поглощения.

Пользуясь соотношением (12.30) и сохранением тока, действительную часть функционала действия можно выразить как

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^4x \int d^4x' \left\{ \frac{\delta(x_0 - x'_0)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} j_0(x)j_0(x') - \delta[(x - x')^2] \vec{j}_T(x) \cdot \vec{j}_T(x') \right\} = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^4x \int d^4x' \delta[(x - x')^2] j_\mu(x)j^\mu(x'). \end{aligned} \quad (12.107)$$

Это классическое действие Уилера–Фейнмана (Wheeler, Feynman, 1945, 1949; Rohrlich, 1965). Оно позволяет описывать взаимодействие системы заряженных классических частиц посредством принципа нелокального действия. Степени свободы электромагнитного поля полностью исключаются согласно граничному условию полного поглощения излучения. Это условие хорошо известно в теории идеально поглощающего (черного) тела. В результате остается функционал нелокального действия, который содержит как запаздывающую, так и опережающую функции Грина (см. (12.30)).

12.2.3. Уравнение движения второго порядка

Уравнение движения второго порядка для матрицы плотности степеней свободы вещества немедленно следует из представления (12.89)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_m(t) = & -i[H_C(t), \rho_m(t)] - \\ & -\frac{i}{2}\int d^3x \int d^3x' \int_{t_i}^t dx'_0 D(x-x') \left[\vec{j}_T(x), \left\{ \vec{j}_T(x'), \rho_m(t) \right\} \right] - \\ & -\frac{1}{2}\int d^3x \int d^3x' \int_{t_i}^t dx'_0 D_1(x-x') \left[\vec{j}_T(x), \left[\vec{j}_T(x'), \rho_m(t) \right] \right], \end{aligned} \quad (12.108)$$

где $x = x(t, \vec{x})$ и $x' = (x'_0, \vec{x}')$. Это уравнение является основным уравнением до второго порядка по взаимодействию с исключенной временной сверткой. Как нам известно, оно дает немарковское основное уравнение, так как включает нелокальное диссипативное $D(x-x')$ и шумовое $D_1(x-x')$ ядра. Различные основные уравнения, которые встречались в предыдущих главах, могут быть выведены из этого уравнения. Например, основное квантовое оптическое уравнение может быть получено из него выполнением марковского приближения и приближения врачающейся волны.

12.2.3.1. Квантовый оптический предел. Возможно, полезно составить схему того, как выводится основное квантовое оптическое уравнение из уравнения (12.108). Для этого мы подставим Фурье-образы функции Грина $D(x-y)$ и $D_1(x-y)$ (см. (12.20) и (12.38)) в уравнение (12.108). Используя затем Фурье-компоненты поперечной плотности тока, которые определяются как

$$\vec{j}_T(x_0, \vec{k}) = \int d^3x \vec{j}_T(x_0, \vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (12.109)$$

пространственные интегралы по \vec{x} и \vec{x}' легко можно вычислить. Затем выполняется марковское приближение, которое состоит в замене

$$\int_{t_i}^t dx'_0 \rightarrow \int_{-\infty}^t dx'_0 = \int_0^\infty d\tau, \quad (12.110)$$

где мы сделали замену $\tau \equiv t - x'_0$. Наконец, мы выполняем разложение тока на собственные операторы гамильтониана системы, так что

$$\vec{j}_T(x_0, \vec{k}) = \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n x_0} \vec{j}_T(\omega_n, \vec{k}). \quad (12.111)$$

Суммирование проводится по частотам ω_n системы, которые определяются разницами энергии невозмущенной системы. Это представление позволяет нам применить приближение вращающейся волны в квантовом оптическом пределе. Последнее состоит в сохранении только секулярных членов в двойных суммах по частотам системы ω и эквивалентно процедуре усреднения по быстро осциллирующим членам. Собирая все это вместе, мы получим следующее основное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_m(t) &= -i[H_C(t), \rho_m(t)] - i[H_{LS} + H_{SS}, \rho_m(t)] + \\ &+ \sum_{\omega_n > 0} \gamma_-(\omega_n) \int d\Omega(\vec{k}) \left(\vec{j}_T(\omega_n, \vec{k}) \rho_m \vec{j}_T^\dagger(\omega_n, \vec{k}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \{ \vec{j}_T^\dagger(\omega_n, \vec{k}) \vec{j}_T(\omega_n, \vec{k}), \rho_m \} \right) + \\ &+ \sum_{\omega_n > 0} \gamma_+(\omega_n) \int d\Omega(\vec{k}) \left(\vec{j}_T^\dagger(\omega_n, \vec{k}) \rho_m \vec{j}_T(\omega_n, \vec{k}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \{ \vec{j}_T(\omega_n, \vec{k}) \vec{j}_T^\dagger(\omega_n, \vec{k}), \rho_m \} \right), \end{aligned} \quad (12.112)$$

где $d\Omega(\vec{k})$ обозначает элемент телесного угла в направлении волнового вектора \vec{k} .

Последние два члена в правой части (12.112) представляют собой диссипатор основного уравнения, описывающий некогерентные процессы, то есть процессы индуцированного поглощения, интенсивности которых пропорциональны $\gamma_+(\omega_n) = \omega_n N(\omega_n)/8\pi^2$, равно как и индуцированного излучения, и спонтанные процессы, происходящие с интенсивностью, которая пропорциональна $\gamma_-(\omega_n) = \omega_n [N(\omega_n) + 1]/8\pi^2$.

Когерентная часть гамильтониана содержит кулоновское взаимодействие H_C . Она также модифицируется наличием поля излучения, которое приводит к вкладу от сдвига Лэмба

$$H_{LS} = \sum_{\omega_n} P \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3 \omega} \frac{1}{\omega_n - \omega} \vec{j}_T^\dagger(\omega_n, \vec{k}) \vec{j}_T(\omega_n, \vec{k}) \quad (12.113)$$

и сдвига Штарка

$$H_{SS} = \sum_{\omega_n} P \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3 \omega} \frac{N(\omega)}{\omega_n - \omega} (\vec{j}_T^\dagger(\omega_n, \vec{k}) \vec{j}_T(\omega_n, \vec{k}) - \vec{j}_T(\omega_n, \vec{k}) \vec{j}_T^\dagger(\omega_n, \vec{k})). \quad (12.114)$$

Легко проверить, что матрица плотности уравнения (12.112) приводит к различным видам основного квантового оптического уравнения, использованного в предыдущих главах (обратите внимание на изменение единиц измерения).

12.2.3.2. Перенормировка массы и сдвиг Лэмба. Рассмотрим подробнее гамильтониан сдвига Лэмба (12.113). Вклад от H_{LS} формально бесконечен и должен быть перенормирован согласно процедуре перенормировки КЭД (см., например, Weinberg, 1995). Для наших целей достаточно сделать несколько замечаний о нерелятивистском рассмотрении этого члена.

Используя дипольное приближение и вводя спектральное разложение гамильтониана системы как $H_S = \sum_n E_n |n\rangle \langle n|$, найдем сдвиг ΔE_n n -го уровня, вызванный H_{LS} :

$$\Delta E_n = -\frac{e^2}{6\pi^2 m^2} \sum_{m \neq n} P \int_0^{\Omega_{\max}} d\omega \frac{\omega}{\omega - \omega_{mn}} |\langle n | \vec{p} | m \rangle|^2, \quad (12.115)$$

где $\omega_{mn} = E_m - E_n$ и Ω_{\max} — ультрафиолетовая отсечка по частоте. В главном порядке, интеграл по частоте расходится линейно по частоте отсечки. Для того чтобы выделить линейно расходящийся вклад, мы запишем подынтегральное выражение как

$$\frac{\omega}{\omega - \omega_{mn}} = 1 + \frac{\omega_{mn}}{\omega - \omega_{mn}}. \quad (12.116)$$

Соответственно, сдвиг энергии состоит из двух частей

$$\Delta E_n = \Delta E'_n + \Delta E''_n. \quad (12.117)$$

Первая часть выражается как

$$\Delta E'_n = -\frac{e^2}{6\pi^2 m^2} \sum_{m \neq n} \int_0^{\Omega_{\max}} d\omega |\langle n | \vec{p} | m \rangle|^2 = -\frac{e^2 \Omega_{\max}}{6\pi^2 m^2} \langle n | \vec{p}^2 | n \rangle. \quad (12.118)$$

Этот член можно интерпретировать как матричный элемент, который возникает из перенормировки массы в кинетической энергии гамильтониана системы. Действительно, если мы запишем физическую массу $m = m_0 + \delta m$ как сумму голой массы m_0 и электромагнитного вклада в массу δm , полная кинетическая энергия примет вид

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2(m_0 + \delta m)} \approx \frac{\vec{p}^2}{2m_0} - \frac{\delta m}{2m_0^2} \vec{p}^2. \quad (12.119)$$

Сравнивая это с уравнением (12.118), мы видим, что поправка к массе выражается как

$$\delta m = \frac{e^2 \Omega_{\max}}{3\pi^2}. \quad (12.120)$$

Это та же самая перенормировка массы, как и вычисляемая в классическом уравнении Абрагама–Лоренца для электрона (см. раздел 12.3.4). Если мы возьмем отсечку Ω_{\max} порядка массы электрона, то найдем, что поправка к массе мала, $\delta m/m = e^2/3\pi^2 \approx 0,0031$. Заметим, что при полностью релятивистском рассмотрении δm зависит от отсечки логарифмически (Bjorken, Drell, 1964)

$$\delta m = \frac{3e^2 m}{8\pi^2} \ln \left(\frac{\Omega_{\max}}{m} \right). \quad (12.121)$$

Вторая часть в сдвиге энергии (12.117) выражается как

$$\Delta E''_n = -\frac{e^2}{6\pi^2 m^2} \sum_{m \neq n} P \int_0^{\Omega_{\max}} d\omega \frac{\omega_{mn}}{\omega - \omega_{mn}} |\langle n | \vec{p} | m \rangle|^2. \quad (12.122)$$

В наших текущих нерелятивистских вычислениях это выражение дает основной вклад в наблюдаемый сдвиг атомных уровней, который вызван вакуумными флуктуациями электромагнитного поля. Можно вычислить сумму по промежуточным состояниям и получить знаменитую формулу Бете для сдвига Лэмба в атоме водорода (Bjorken, Drell, 1964).

12.3. Декогерентизация посредством тормозного излучения

В качестве следующего применения выражения (12.99) для фазового функционала влияния, в этом разделе мы исследуем разрушение квантовой когерентности посредством тормозного излучения. Для этого рассмотрим простой прототип интерференционного устройства для заряженной частицы и рассмотрим потери когерентности, которые вызываются взаимодействием с полем излучения. Интерференционное устройство включает две возможные траектории заряженной частицы. Начальный волновой пакет расщепляется на две компоненты, которые вначале двигаются раздельно и которые затем рекомбинируют, чтобы локально измерить их способность к интерференции. Такой тип эксперимента по интерференции, таким образом, включает относительное движение пространственно разделенных компонент волновой функции. Оказывается, что возможность излучения приводит к (частичному) разрушению квантовой когерентности, которая приводит к снижению видности интерференционной картины.

Подходящая мера для декогерентизации в эксперименте по интерференции в форме релятивистски ковариантного и калибровочно-инвариантного функционала, *функционала декогерентизации*, будет выведена и явно определена в этом разделе. Также будет показано, что полученный функционал декогерентизации включает в себя типичные свойства тормозного излучения. Будут получены явные аналитические выражения для вакуумного вклада и термического вклада в функционал декогерентизации, а также соответствующие длины когерентности. Эти выражения показывают, что тормозное излучение приводит к фундаментальному механизму декогерентизации, который доминирует на коротких временах и существует даже в электромагнитном вакуумном поле при нулевой температуре. Влияние тормозного излучения на координату центра масс системы из многих одинаковых заряженных частиц также изучается и показывается, что оно приводит к сильному подавлению квантовой когерентности.

12.3.1. Введение функционала декогерентизации

Рассмотрим интерференционное устройство, которое изображено на рис. 12.1. Заряженная частица, для краткости, электрон, испускается источником Q и может двигаться по двум различным траекториям y_1 и y_2 , чтобы достигнуть экрана S , где наблюдается интерференционная картина. Эти траектории представляют две квантовые альтернативы, чьи амплитуды вероятностей могут быть описаны двумя волновыми пакетами $|\Psi_1(t_i)\rangle$

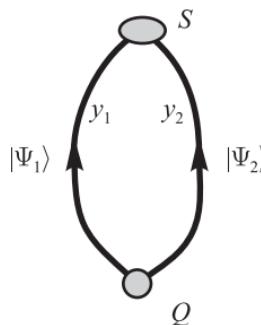


Рис. 12.1. Эскиз прототипа интерференционного устройства, которое используется для введения функционала декогерентизации. Электрон появляется из источника Q и может проследовать двумя возможными траекториями y_1 и y_2 , что, вообще говоря, приводит к интерференционной картине, наблюдаемой на S . Две квантовых альтернативы могут быть описаны через волновые пакеты $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$.

и $|\Psi_2(t_i)\rangle$. С помощью принципа суперпозиции мы находим, что волновая функция

$$|\Psi(t_i)\rangle = |\Psi_1(t_i)\rangle + |\Psi_2(t_i)\rangle \quad (12.123)$$

описывает физическую ситуацию, изображенную на рисунке. Состояние электрона может быть представлено на языке матрицы плотности $\rho_m(t_i) = |\Psi(t_i)\rangle\langle\Psi(t_i)|$, что может быть записано как

$$\rho_m(t_i) = \rho_{11}(t_i) + \rho_{22}(t_i) + \rho_{12}(t_i) + \rho_{21}(t_i), \quad (12.124)$$

где $\rho_{\alpha\beta}(t_i) = |\Psi_\alpha(t_i)\rangle\langle\Psi_\beta(t_i)|$ при $\alpha, \beta = 1, 2$. Наблюдается появление интерференционного члена $\rho_{12}(t_i) + \rho_{21}(t_i)$. Напомним, что мы работаем в картине взаимодействия и поэтому имеем $\rho_m(t) = \rho_m(t_i)$ для всех времен, в случае исчезновения связи между веществом и электромагнитным полем.

Нашей целью является определение структуры матрицы плотности электрона ρ_m в присутствии электромагнитного поля излучения с помощью супероператора влияния. Необходимое упрощение получается, если плотность электронного тока рассматривать как классический ток. Это приближение может быть обосновано следующими условиями. Во-первых, мы полагаем, что длина волны $\bar{\lambda} = c/\omega$ фотонов, излучаемых токами, много больше комптоновской длины волны $\bar{\lambda}_C$ электрона

$$\bar{\lambda} \gg \bar{\lambda}_C = \frac{\hbar}{mc} \quad (12.125)$$

и, таким образом, также много больше классического электронного радиуса $r_e = \alpha\lambda_C \approx 2,8 \times 10^{-15}$ м. Это требование эквивалентно $\hbar\omega \ll mc^2$. В этом низкоэнергетическом режиме можно пренебречь амплитудами рождения и уничтожения пар и рассматривать плотность тока вещества как заданное классическое поле (Jauch, Rohrlich, 1980; Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc, Grynberg, 1998). Та же процедура используется, например, при анализе поправок излучения в низкочастотном пределе вне рамок теории возмущений (см. ниже). В эксперименте типа, изображенном на рис. 12.1, траектории включают ускорение электрона в заданном поле сил. Рассматриваемая сила порождает определенное характеристическое время ускорения τ_p . Мы определяем τ_p как обратную величину к наибольшей частоте в спектре мощности силы, действующей на электрон. В дальнейшем мы называем τ_p временем приготовления, так как оно может быть интерпретировано как время, требуемое для начала движения интерферирующих волновых пакетов. Как следствие существования такого характеристического времени, мы имеем более высокую частоту обрезания Ω_{\max} для частотного спектра испускаемого излучения, которая оказывается порядка

$$\Omega_{\max} \sim \frac{1}{\tau_p} = \frac{c}{\sigma_0}, \quad (12.126)$$

где масштабная длина σ_0 представляет минимальную длину волны излучения. Приведенное выше требование принимает вид

$$\sigma_0 \gg \bar{\lambda}_C, \quad (12.127)$$

где также подразумевается, что характеристическое время ускорения τ_p является много большим по сравнению с r_e/c . Из классической электродинамики известно, что это условие гарантирует, что излучаемая энергия много меньше кинетической энергии частицы и поэтому эффекты, связанные с радиационным трением, малы (Jackson, 1999) (см. также раздел 12.3.4).

Второе условие состоит в том, что движение тока может быть справедливо описано в рамках полуклассического приближения. Это приводит к требованию $\Delta v/v \ll 1$, где v является обычной скоростью, а Δv — неопределенность скорости. Предполагая, что волновые пакеты представляют состояния с минимальной неопределенностью с пространственной шириной Δx , приходим к условию

$$\frac{\Delta v}{v} \sim \frac{\hbar}{mv\Delta x} \ll 1 \quad (12.128)$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{\bar{\lambda}_{\text{dB}}}{\Delta x} \ll 1, \quad (12.129)$$

где $\bar{\lambda}_{\text{dB}} = \hbar/mv$ есть длина волны де Броиля. Это обычное условие при полуклассическом рассмотрении.

Принимая во внимание эти условия, мы теперь полагаем, что $\rho_m(t_i)$ представляет состояние, которое является приближенно собственным состоянием плотности тока. Таким образом, если $\rho_m(t_i)$ — чистое состояние,

$$\rho_m(t_i) = |\Psi(t_i)\rangle\langle\Psi(t_i)|, \quad (12.130)$$

мы полагаем, что

$$j^\mu(x)|\Psi(t_i)\rangle \approx s^\mu(x)|\Psi(t_i)\rangle, \quad (12.131)$$

где $s^\mu(x)$ является классической плотностью тока. Тогда с той же степенью точности можно положить

$$J_c^\mu(x)\rho_m(t_i) = [j^\mu(x), \rho_m(t_i)] \approx 0. \quad (12.132)$$

Начальное состояние $\rho_m(t_i)$ не обязательно должно быть чистым состоянием. Достаточно требования (12.132), где

$$\langle j^\mu(x) \rangle = \text{tr}_m\{j^\mu(x)\rho_m(t_i)\} = s^\mu(x) \quad (12.133)$$

является математическим ожиданием плотности тока. В любом случае для фазового влияния с помощью (12.132) и выражения (12.99) мы сразу получаем

$$\rho_m(t_f) \approx \rho_m(t_i). \quad (12.134)$$

Это уравнение устанавливает, что система, по существу, не подвержена влиянию поля излучения, то есть в силу нашего предположения, что начальное состояние является приближенным собственным состоянием тока, динамика матрицы плотности близка к динамике матрицы плотности свободной системы. С использованием точного аналитического выражения для функции пропагатора в дипольном приближении (см. раздел 12.3.4) может быть сделан тот же вывод при рассмотрении гауссова волнового пакета, находящегося под влиянием излучения.

Теперь вернемся к интерференционному устройству и предположим, что суперпозиция (12.123) состоит из двух приближенных собственных состояний

$$j^\mu(x)|\Psi_1(t_i)\rangle \approx s_1^\mu(x)|\Psi_1(t_i)\rangle, \quad (12.135)$$

$$j^\mu(x)|\Psi_2(t_i)\rangle \approx s_2^\mu(x)|\Psi_2(t_i)\rangle, \quad (12.136)$$

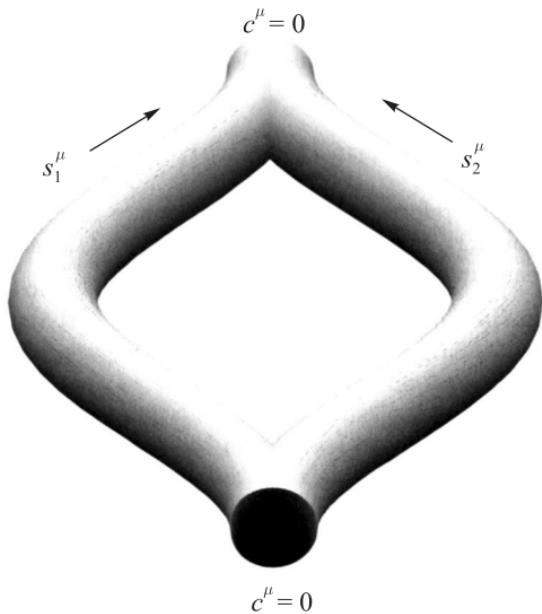


Рис. 12.2. Замкнутая токовая мировая трубка, определяющая носитель разности плотности тока $c^\mu = (s_1^\mu - s_2^\mu)/\sqrt{2}$. Мировая трубка расположена вокруг замкнутого пути $C = y_1 - y_2$, формируемого y_1 в положительном и y_2 в отрицательном направлениях (см. рис. 12.1).

где $s_1(x)$ и $s_2(x)$ являются классическими плотностями тока. Эти токи предполагаются сконцентрированными в двух мировых трубках вдоль траекторий y_1 и y_2 интерференционного устройства соответственно (см. рис. 12.2). В силу уравнения (12.135) мы имеем

$$J_c^\mu(x)\rho_{11}(t_i) \approx J_c^\mu(x)\rho_{22}(t_i) \approx 0, \quad (12.137)$$

$$J_c^\mu(x)\rho_{12}(t_i) \approx (s_1^\mu(x) - s_2^\mu(x))\rho_{12}(t_i), \quad (12.138)$$

$$J_a^\mu(x)\rho_{12}(t_i) \approx (s_1^\mu(x) + s_2^\mu(x))\rho_{12}(t_i) \quad (12.139)$$

и

$$\mathcal{L}_C(x)\rho_{11}(t_i) \approx \mathcal{L}_C(x)\rho_{22}(t_i) \approx 0, \quad (12.140)$$

$$\mathcal{L}_C(x)\rho_{12}(t_i) \approx -i(\mathcal{H}_{C1}(x) - \mathcal{H}_{C2}(x))\rho_{12}(t_i), \quad (12.141)$$

где

$$\mathcal{H}_{C1,2}(x) = \frac{1}{2} \int \frac{s_{1,2}^0(x^0, \vec{x})s_{1,2}^0(x^0, \vec{y})}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y \quad (12.142)$$

есть кулоновская плотность энергии, ассоциируемая с плотностями тока $s_1^\mu(x)$ и $s_2^\mu(x)$ соответственно. Мы можем предположить, что соответствующие кулоновские энергии обеих возможных траекторий равны друг другу. Выражение (12.99) для фазового функционала влияния теперь сразу же приводит к

$$\rho_m(t_f) \approx \rho_{11}(t_i) + \rho_{22}(t_i) + \exp(i\Phi)\rho_{12}(t_i) + \exp(-i\Phi^*)\rho_{21}(t_i), \quad (12.143)$$

где

$$\begin{aligned} i\Phi &\equiv i\Phi[s_1, s_2] = \\ &= \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^t \frac{i}{2} D^T(x - x')_{\mu\nu} (s_1^\mu(x) - s_2^\mu(x))(s_1^\nu(x') + s_2^\nu(x')) d^4x' - \\ &- \frac{1}{4} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} D_1^T(x - x')_{\mu\nu} (s_1^\mu(x) - s_2^\mu(x))(s_1^\nu(x') - s_2^\nu(x')) d^4x'. \end{aligned} \quad (12.144)$$

Мы видим, что электромагнитное поле влияет на интерференционные члены через комплексный множитель $\Phi = \Phi[s_1, s_2]$, который является функционалом двух возможных траекторий y_1 и y_2 или, более точно, соответствующих плотностей тока $s_1^\mu(x)$ и $s_2^\mu(x)$. Действительная часть Φ приводит к искривлению (дисторсии) интерференционной картины. Мнимая часть Φ , с другой стороны, приводит к подавлению интерференционных членов в (12.143) посредством множителя

$$|\exp(i\Phi)| = \exp \Gamma. \quad (12.145)$$

Показатель экспоненты Γ рассматривается как функционал декогерентизации (ср. с рассмотрением в разделе 4.1). Из второго члена в уравнении (12.144) мы заключаем, что Γ представляет билинейный функционал разности тока

$$c^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_1^\mu(x) - s_2^\mu(x)), \quad (12.146)$$

и можем записать его как

$$\Gamma[c] = -\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} D_1^T(x - x')_{\mu\nu} c^\mu(x) c^\nu(x') d^4x'. \quad (12.147)$$

12.3.2. Физическая интерпретация

Чтобы представить $\Gamma[c]$ в более удобном виде, определим t_0 как время, соответствующее точке Q (см. рис. 12.1), то есть как момент времени, в который волновой пакет разделяется на две части. В то же время пусть t_f обозначает конечное время, когда оба волновых пакета рекомбинировали в точке S . Очевидно, что разность тока $c^\mu(x)$ исчезает для времен до t_0 и времен после t_f . На самом деле, носитель разности тока $c^\mu(x)$ лежит внутри замкнутой петли вокруг мировой трубки

$$C = y_1 - y_2, \quad (12.148)$$

которая формируется траекторией y_1 , идущей в положительном, и траекторией y_2 в отрицательном направлениях, как показано на рис. 12.2. Сохранение тока $\partial_\mu c^\mu = 0$, поэтому дает нам возможность записать функционал декогерентизации как (ср. с рассмотрением, проведенным в (12.202))

$$\Gamma[c] = -\frac{1}{2} \int d^4x \int D_1(x - x')[-c^\mu(x)c_\mu(x')]d^4x'. \quad (12.149)$$

Мы видим, что $\Gamma[c]$ представляет релятивистски ковариантный и калибровочно-инвариантный функционал. Более того, $\Gamma[c]$ является лоренцевским инвариантом в случае вакуума, что можно явно видеть из того факта, что $D_1^{vac}(x - x')$ задается инвариантной функцией (12.39).

Уравнение (12.149) предлагает несколько интересных интерпретаций. С помощью пропагатора Фейнмана (12.84) и двухточечных корреляционных функций (12.86) и (12.87) мы можем выразить комплексный фазовый множитель $\exp(i\Phi)$ в уравнении (12.143) как показано ниже:

$$\begin{aligned} \exp(i\Phi) &= A[s_1]A[s_2]^* \times \\ &\times \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x \int D_-(x - x')_{\mu\nu} s_1^\mu(x)s_2^\nu(x')d^4x' + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \int d^4x \int D_+(x - x')_{\mu\nu} s_2^\mu(x)s_1^\nu(x')d^4x' \right], \end{aligned} \quad (12.150)$$

где $A[j]$ определяется в уравнении (12.101). В таком виде фазовый множитель был впервые получен Фордом (Ford, 1993) для случая нулевой температуры с целью изучения влияния проводящих границ на электронную когерентность. Как мы уже видели, при нулевой температуре $A[j]$ есть вакуум-вакуумная амплитуда в представлении классической плотности тока $j^\mu(x)$. Первый член с правой стороны в уравнении (12.150), таким об-

разом, есть произведение вакуум-вакуумных амплитуд в присутствии плотностей тока s_1^μ и s_2^μ . Этот вклад описывает виртуальные процессы, в которых фотоны излучаются и снова поглощаются любым из токов s_1^μ и s_2^μ . Соответственно, экспонента в правой части уравнения (12.150) есть вклад в излучение реальных фотонов. Эти процессы также вносят вклад в функционал декогерентизации, так как фотоны могут излучаться обоими токами и переносить информацию о траектории электрона. Более того, при конечных температурах появляются термически вызываемые процессы излучения и поглощения.

Выражение (12.150) также отвечает на вопрос, как виртуальный или вакуумный процесс или реальное излучение фотонов ответственны за эффект декогерентизации, выражаемый функционалом $\Gamma[c]$. Мы видим, что фактор декогерентизации (12.145) зависит от виртуальных процессов через пропагатор Фейнмана $D_F(x - x')_{\mu\nu}$ (который содержится в вакуум-вакуумных амплитудах), а также от реальных процессов, описываемых функцией Грина $D_\pm(x - x')_{\mu\nu}$. Таким образом, это совместный эффект виртуального и реального процессов, который приводит к декогерентизации. Физическая причина его в том, что измерение возможного реального фотонного излучения также уменьшает вакуум-вакуумные амплитуды, которые уже могут привести к снижению интерференционного контраста. Например, можно придумать интерференционное устройство, в котором траектория y_1 представляет равномерное движение электрона, в то время как другая траектория y_2 является сильноизогнутой, приводящей к большому ускорению электрона. Предположим, мы наблюдаем фотоны, испускаемые в эксперименте. Если мы знаем, что фотон не испущен, тогда, вероятно, электрон идет по траектории y_1 , что приводит к подавлению интерференционной картины, формируемой электронами соответствующего субансамбля. Такая ситуация подобна двухуровневому атому, находящемуся в суперпозиции возбужденного и основного состояний. Если мы видим, что атом не испустил фотон за достаточно большой интервал времени (много больше по сравнению с обратной шириной перехода), мы имеем эффективно измеренное состояние атома, которое интерпретируется как основное состояние. Так, недиагональные члены атомной матрицы плотности почти исчезают в условиях отсутствия излучения фотонов.

Также интересно выразить множитель декогерентизации прямо на языке амплитуд $A[c]$. Применяя (12.91), мы находим

$$\exp(\Gamma[c]) = |A[c]|^2. \quad (12.151)$$

Очевидно, мы имеем $\Gamma[c] \leq 0$ и $\Gamma[c] = 0$ при $s_1^\mu = s_2^\mu$, то есть при исчезающей разности тока $c^\mu = 0$. Уравнение (12.151) дает другую интересную

интерпретацию. Фактор декогерентизации, при интерференционном члене, задается вероятностью бесфотонной эмиссии в присутствии плотности тока c^μ . Это тот же ток, что и ток, создаваемый двумя частицами с противоположными зарядами $\pm e/\sqrt{2}$: одной, двигающейся вдоль y_1 , и другой вдоль y_2 . Чем меньше вакуум-вакуумная амплитуда для плотности этого тока, тем сильнее заметно уменьшение интерференционного контраста. Это должно быть ожидаемо, так как разность, существующая между токами s_1 и s_2 , определяет степень различимости путей и уровень потери когерентности.

Интерпретации на языке испускаемых фотонов должны рассматриваться с некоторой осторожностью. Причина этого в том, что мы рассматриваем здесь процессы в ограниченном масштабе времени и без рассмотрения переходов между асимптотическими состояниями. Хорошо известно, что заданные материальные токи испускают неограниченное число длинноволновых (мягких) фотонов, чьи частоты стремятся к нулю, в то время как их суммарная энергия соответствует ограниченному значению. Это так называемая инфракрасная катастрофа (Weinberg, 1995; Jauch, Rohrlich, 1980), которая появляется при расчете радиационных поправок к любому процессу, затрагивающему заряженную материю. Полное удаление инфракрасной расходимости требует непертурбативного рассмотрения, в котором амплитуды излучения и действительных и виртуальных фотонов суммируются во всех порядках, так что процессы, включающие действительные и виртуальные фотоны, становятся неразличимыми в низкочастотном пределе. Инфракрасной расходимостью можно пренебречь при условии, что для фотодетектирования введена ограниченная разрешающая способность Ω_{\min} . Находясь в рамках теории возмущений, можно сказать, что всегда существует неограниченное количество квантов, таких, чья частота меньше, чем Ω_{\min} , и которые остаются непротедетектированными и невозможными для наблюдения в принципе.

Наш анализ рассматривает материальный ток классически, но не через теорию возмущений (Jauch, Rohrlich, 1980). Принимая во внимание приведенное выше рассмотрение, очевидно, что функционал декогерентизации $\Gamma[c]$ не приводит к инфракрасной расходимости, так как он описывает процесс, имеющий место в ограниченном временном интервале между расщеплением волнового пакета в момент времени t_0 и рекомбинацией в момент времени t_f . Это порождает естественную разрешающую частоту порядка

$$\Omega_{\min} \sim \frac{1}{t_f - t_0}. \quad (12.152)$$

Появление такого эффективного инфракрасного обрезания будет видно яв-

но в вычислениях следующего подраздела, где будет продемонстрировано, что появившиеся интегралы по частотам фотонов сходятся на нижнем пределе $\omega \rightarrow 0$. Кроме того, мы также имеем ультрафиолетовое обрезание Ω_{\max} , которое уже было введено в уравнении (12.126). Это может быть учтено введением ограниченной ширины σ_0 , характеризующей ток мировой трубы, как это будет видно в следующем подразделе.

12.3.3. Вычисление функционала декогерентизации

Мы хотим вычислить здесь функционал декогерентизации для некоторых специальных ситуаций. С использованием уравнения (12.149) и Фурье-представления (12.38) антиперестановочной функции $D_1(x - x')$ мы находим

$$\Gamma[c] = - \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3 \omega} \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) [-c^\mu(k)c_\mu^*(k)], \quad (12.153)$$

где мы ввели преобразование Фурье

$$c^\mu(k) \equiv \int \exp(-ikx) c^\mu(x) d^4 x \quad (12.154)$$

для разности токов $c^\mu(x)$.

Сначала явно покажем, как конечная ширина мировых токовых трубок приводит к ультрафиолетовому обрезанию. Для этого токи $s_1^\mu(x)$ и $s_2^\mu(x)$ считаются сконцентрированными в пределах мировых трубок пространственного объема σ_0 вокруг мировых линий $y_1 = y_1(\tau)$ и $y_2 = y_2(\tau)$. Мировые линии параметризуются их собственным временем τ , так что

$$u_{1,2}^\mu(\tau) = \frac{dy_{1,2}^\mu(\tau)}{d\tau} \quad (12.155)$$

есть соответствующие 4-скорости. Для большей конкретности запишем

$$s_{1,2}^\mu(x) = e \int u_{1,2}^\mu(\tau) \delta_{\sigma_0}(x - y_{1,2}(\tau)) d\tau, \quad (12.156)$$

где

$$\delta_{\sigma_0}(x - x') = \delta(x_0 - x'_0) \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\vec{x} - \vec{x}')^2}{2\sigma_0^2} \right] \quad (12.157)$$

есть размазанная δ -функция, описываемая гауссианом с шириной σ_0 . Отметим, что мы пренебрегаем вкладом спина в плотность тока. Это обосновывается тем, что масштабы длин, включенные в задачу, согласно рассмотрению, много больше комптоновской длины волны (Ford, 1993).

При подстановке уравнения (12.156) в уравнение (12.154) преобразование Фурье разности тока есть

$$c^\mu(k) = \frac{e}{\sqrt{2}} \left[\int u_1^\mu(\tau) \exp(-iky_1(\tau)) d\tau - \int u_2^\mu(\tau) \exp(-iky_2(\tau)) d\tau \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \omega^2 \right]. \quad (12.158)$$

Мы видим, что конечная ширина σ_0 токовой мировой трубки приводит к эффективному ультрафиолетовому обрезанию $\Omega_{\max} \sim \sigma_0^{-1}$, как дается в уравнении (12.126). Нашим основным интересом является оценка функционала декогерентизации для некоторых характерных ситуаций. Поэтому в дальнейшем мы игнорируем специфический вид функции обрезания в уравнении (12.158) и работаем с резким обрезанием на максимальной частоте $\omega = \Omega_{\max}$. Ниже будет видно, что конечное выражение для $\Gamma[c]$ зависит от Ω_{\max} только через $\ln \Omega_{\max}$. Эта очень слабая логарифмическая зависимость показывает, что точное значение σ_0 или времени приготовления τ_p является практически несущественным. Здесь важно отметить, что появление эффективного ультрафиолетового обрезания имеет чисто физическое происхождение.

Таким образом, мы теперь запишем уравнение (12.153) как

$$\Gamma[c] = -\frac{1}{16\pi^3} \int_0^{\Omega_{\max}} \omega \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) d\omega \int [-c^\mu(k) c_\mu^*(k)] d\Omega(\hat{k}), \quad (12.159)$$

где $d\Omega(\hat{k})$ обозначает элемент телесного угла в направлении единичного вектора $\hat{k} \equiv \vec{k}/|\vec{k}|$. Преобразование Фурье разности токов может быть выражено в виде контурного интеграла по замкнутому контуру $C = y_1 - y_2$

$$c^\mu(k) = \frac{e}{\sqrt{2}} \oint_C \exp(-ikx) dx^\mu. \quad (12.160)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда контур C состоит из четырех сегментов мировых линий (см. рис. 12.3(a)). Вершины контура обозначаются a_0, a_1, a_2, a_3 , в то время как соответствующие 4-скорости задаются

$$u_n^\mu = \gamma_n(1, \vec{v}_n), \quad \gamma_n = (1 - |\vec{v}_n|^2)^{-1/2}. \quad (12.161)$$

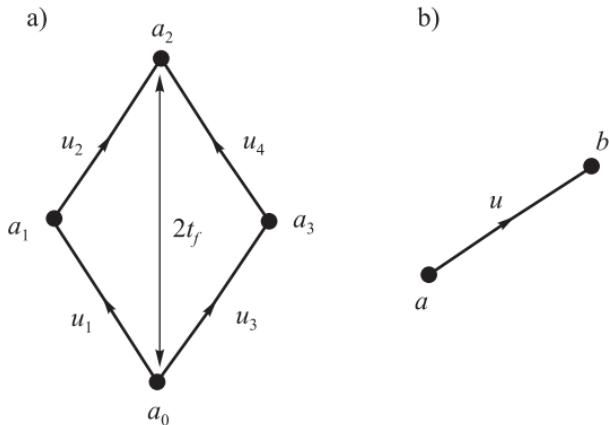


Рис. 12.3. (а) Для явного определения функционала декогерентизации $\Gamma[c]$ используется замкнутый контур $C = y_1 - y_2$. Контур состоит из четырех отрезков мировых линий с 4-скоростями u_1, u_2, u_3, u_4 . Вершины расположены в пространственно-временных точках a_0, a_1, a_2, a_3 . Как показывается, контур соответствует суммарному времени $2t_f$. (б) Отдельный отрезок с начальной точкой a , конечной точкой b и 4-скоростью u .

В дальнейшем мы полагаем, что расположение симметричное, то есть мы полагаем, что $u_1 = u_4$, $u_2 = u_3$ и что $a_1 - a_0 = a_2 - a_3$, $a_2 - a_1 = a_3 - a_0$. Для отдельного отрезка с начальной точкой a , конечной точкой b и 4-скоростью u (см. рис. 12.3(б)) мы получаем

$$\int_a^b \exp(-ikx)dx = i \frac{u}{ku} [e^{-ikb} - e^{-ika}] . \quad (12.162)$$

С помощью этой формулы преобразование Фурье (12.160) для разности токов есть

$$c(k) = \frac{ie}{\sqrt{2}} \left\{ + \frac{u_1}{ku_1} [e^{-ika_1} - e^{-ika_0}] + \frac{u_2}{ku_2} [e^{-ika_2} - e^{-ika_1}] - \frac{u_3}{ku_3} [e^{-ika_3} - e^{-ika_0}] - \frac{u_4}{ku_4} [e^{-ika_2} - e^{-ika_3}] \right\} . \quad (12.163)$$

Нужно отметить, что $k_\mu c^\mu(k) = 0$, как требуется сохранением тока. Отметим дальше, что $c^\mu(k)$ демонстрирует правильное поведение при преобразованиях Лоренца. В частности, оказывается, что $c^\mu(k)$ преобразует-

ся в $c^\mu(k) \exp(-ikb)$ при пространственно-временных трансляциях генерируемых 4-вектором b . Если теперь мы используем симметричные свойства контура, то придем к

$$c(k) = \frac{ie}{\sqrt{2}} \left[\frac{u_2}{ku_2} - \frac{u_4}{ku_4} \right] \mathcal{G}(k), \quad (12.164)$$

где ввели

$$\mathcal{G}(k) = e^{-ika_2} \left(1 - e^{ik(a_2 - a_3)} \right) \left(1 - e^{ik(a_2 - a_1)} \right). \quad (12.165)$$

Используя эти результаты, приходим к следующему выражению для функционала декогерентизации:

$$\Gamma[c] = \frac{\alpha}{8\pi^2} \int_0^{\Omega_{\max}} \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) \frac{d\omega}{\omega} \int \omega^2 \left[\frac{u_2}{ku_2} - \frac{u_4}{ku_4} \right]^2 |\mathcal{G}(k)|^2 d\Omega(\hat{k}). \quad (12.166)$$

Мы определяем временной интервал, ассоциируемый с отдельным элементом линии контура t_f , то есть мы устанавливаем $t_0 = -t_f$ и $t_f - t_0 = 2t_f$ (см. рис. 12.3(a)). Тогда мы имеем

$$k(a_2 - a_3) = \omega t_f (1 - \hat{k} \cdot \vec{v}_4), \quad (12.167)$$

$$k(a_2 - a_1) = \omega t_f (1 - \hat{k} \cdot \vec{v}_2). \quad (12.168)$$

Для того чтобы дальше оценить выражение (12.166), мы используем приближение

$$k(a_2 - a_3) \approx k(a_2 - a_1) \approx \omega t_f, \quad (12.169)$$

что приводит к

$$|\mathcal{G}(k)|^2 = 8 \left[(1 - \cos \omega t_f) - \frac{1}{4} (1 - \cos 2\omega t_f) \right]. \quad (12.170)$$

Это позволяет нам оценить функционал декогерентизации (12.166) как

$$\begin{aligned} \Gamma[c] &\approx \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^{\Omega_{\max}} \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) \left[(1 - \cos \omega t_f) - \frac{1}{4} (1 - \cos 2\omega t_f) \right] \frac{d\omega}{\omega} \times \\ &\times \int \omega^2 \left[\frac{u_2}{ku_2} - \frac{u_4}{ku_4} \right]^2 d\Omega(\hat{k}). \end{aligned} \quad (12.171)$$

Сконцентрируемся на интеграле по фотонным частотам ω , то есть на первом интеграле с правой стороны (12.171). Подынтегральное выражение пропорционально ω^{-1} , что является обычным свойством для спектра тормозного излучения (Jackson, 1999). В добавление к вакуумному тормозному излучению термически могут быть индуцированы процессы излучения и поглощения (Itzykson, Zuber, 1980), которые включены в множитель $\text{cth}(\omega/2k_B T)$. При нулевой температуре (поле вакуума) этот множитель может быть заменен на 1.

Для того чтобы вычислить частотный интеграл, оказывается полезным разложить его на вакуумный и термический вклады, последний из которых исчезает при $T = 0$. Поэтому мы пишем

$$F \equiv \int_0^{\Omega_{\max}} \text{cth}(\omega/2k_B T)(1 - \cos \omega t_f) \frac{d\omega}{\omega} \equiv F_{vac} + F_{th}, \quad (12.172)$$

где

$$F_{vac} \equiv \int_0^{\Omega_{\max}} (1 - \cos \omega t_f) \frac{d\omega}{\omega} \quad (12.173)$$

является вакуумным вкладом, в то время как

$$F_{th} \equiv \int_0^{\Omega_{\max}} [\text{cth}(\omega/2K_B T) - 1](1 - \cos \omega t_f) \frac{d\omega}{\omega} \quad (12.174)$$

является термическим вкладом. Частотный интеграл F_{vac} может быть оценен как показано ниже. Подставляя $x = \omega t_f$, мы получаем

$$F_{vac} = \int_0^{\Omega_{\max} t_f} (1 - \cos x) \frac{dx}{x} = \ln(g\Omega_{\max} t_f) + O\left(\frac{1}{\Omega_{\max} t_f}\right), \quad (12.175)$$

где $\ln g \approx 0,577$ есть эйлеровская константа (Gradshteyn, Ryzhik, 1980). При $\Omega_{\max} t_f \gg 1$ мы, таким образом, получаем асимптотически

$$F_{vac} \approx \ln(g\Omega_{\max} t_f). \quad (12.176)$$

Это соотношение демонстрирует, что вакуумный интеграл по фотонным частотам сходится на нижнем пределе $\omega \rightarrow 0$, и это приводит к эффективному инфракрасному обрезанию порядка $\Omega_{\min} \sim 1/t_f$, как обсуждалось

в предыдущем подразделе (см. (12.152)). Мы также видим, что вакуумный частотный интеграл слабо растет с логарифмом $\Omega_{\max} t_f$. Как показано в уравнении (12.176), мы сохраняем лишь главные вклады в наших выражениях. Однако нужно помнить, что без особого труда можно включить члены более высокого порядка, которые исчезают в пределе $\Omega_{\max} t_f \rightarrow \infty$. Интеграл (12.173) уже был оценен в разделе 4.2.2, где мы использовали экспоненциальное обрезание. Сравнение с формулой (4.54) показывает, что изменение остроты обрезания вносит лишь малое изменение в значение интеграла.

Термический вклад F_{th} также оценивается в разделе 4.2.2 (см. (4.55)) согласно условию $k_B T \ll \hbar \Omega_{\max}$, что также будет предполагаться здесь. Чтобы дать пример этого условия, возьмем обрезание ультрафиолетового излучения $\Omega_{\max} \sim 10^{19} \text{ с}^{-1}$, соответствующий масштабу длины порядка $100\lambda_C$. Представленное выше условие означает, что $T \ll 10^8 \text{ К}$. Таким образом, с помощью (4.55) мы получаем

$$F_{th} \approx \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(t_f/\tau_B)}{t_f/\tau_B} \right). \quad (12.177)$$

При использовании (12.176) и (12.177) мы можем теперь определить частотный интеграл в уравнении (12.171)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Omega_{\max}} \operatorname{cth}(\beta\omega/2) \left[(1 - \cos \omega t_f) - \frac{1}{4} (1 - \cos 2\omega t_f) \right] \frac{d\omega}{\omega} \approx \\ & \approx \frac{3}{4} \ln(g\Omega_{\max} t_f) + \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(t_f/\tau_B)}{t_f/\tau_B} \right) - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(2t_f/\tau_B)}{2t_f/\tau_B} \right). \end{aligned} \quad (12.178)$$

Остается вычислить независящий от частоты угловой интеграл в уравнении (12.171), то есть мы должны оценить интегралы вида

$$I(u_n, u_m) \equiv \int \omega^2 \frac{u_n u_m}{(k u_n)(k u_m)} d\Omega(\hat{k}) = \quad (12.179)$$

$$= \int \frac{1 - \vec{v}_n \cdot \vec{v}_m}{(1 - \hat{k} \cdot \vec{v}_n)(1 - \hat{k} \cdot \vec{v}_m)} d\Omega(\hat{k}), \quad (12.180)$$

где $n, m = 2, 4$. Отметим, что комбинация $d\Omega(\hat{k})\omega^2$ является инвариантной величиной, такой, что $I(u_n, u_m)$ есть лоренцевский инвариантный интег-

рал. Для определения этого интеграла мы можем перейти в систему координат, в которой вторая скорость равна нулю, то есть $\vec{v}_m = 0$. В этой системе величина $v_n = |\vec{v}_n|$ первой скорости равна относительной скорости

$$v_{nm} \equiv \sqrt{1 - \frac{1}{(u_n u_m)^2}}, \quad (12.181)$$

что по определению есть релятивистки инвариантная величина. Таким образом, мы приходим к

$$I(u_n, u_m) = \int \frac{1}{1 - \hat{k} \cdot \vec{v}_n} d\Omega(\hat{k}) = \frac{4\pi}{v_{nm}} \operatorname{th}^{-1} v_{nm}. \quad (12.182)$$

Эта формула верна также для случая $u_n = u_m$, задавая $I(u_n, u_n) = 4\pi$, как можно увидеть прямо из разложения $\operatorname{th}^{-1}(x)$ по малому аргументу:

$$\operatorname{th}^{-1} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \quad (12.183)$$

Таким образом, мы находим

$$\begin{aligned} \int \omega^2 \left[\frac{u_2}{ku_2} - \frac{u_4}{ku_4} \right]^2 d\Omega(\hat{k}) &= I(u_2, u_2) + I(u_4, u_4) - 2I(u_2, u_4) = \\ &= -8\pi \left(\frac{1}{v_{24}} \operatorname{th}^{-1} v_{24} - 1 \right). \end{aligned} \quad (12.184)$$

Подставляя (12.184) и (12.178) в уравнение (12.171), мы в итоге получаем

$$\Gamma[c] = \Gamma_{vac} + \Gamma_{th}, \quad (12.185)$$

где

$$\Gamma_{vac} \approx -\frac{6\alpha}{\pi} \ln(g\Omega_{\max} t_f) \left(\frac{1}{v_{24}} \operatorname{th}^{-1} v_{24} - 1 \right) \quad (12.186)$$

есть функционал вакуумной декогерентизации, а

$$\begin{aligned} \Gamma_{th} \approx -\frac{8\alpha}{\pi} &\left[\ln \left(\frac{\operatorname{sh}(t_f/\tau_B)}{t_f/\tau_B} \right) - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(2t_f/\tau_B)}{2t_f/\tau_B} \right) \right] \times \\ &\times \left(\frac{1}{v_{24}} \operatorname{th}^{-1} v_{24} - 1 \right) \end{aligned} \quad (12.187)$$

есть термический вклад в функционал декогерентизации. Как и ожидалось, из этих выражений мы видим, что $\Gamma[c]$ сильно зависит от относительной скорости v_{24} , благодаря тому факту, что декогерентизация вызывается тормозным излучением. Чем больше v_{24} , тем больше вовлекается ускорение заряженной частицы, которое создает поле излучения.

Важным результатом является то, что тормозное излучение приводит к частичному разрушению когерентности даже при нулевой температуре. Видно, что величина вакуумного вклада Γ_{vac} увеличивается как логарифм времени t_f , если относительная скорость фиксирована. Эта слабая зависимость связана с эффективным инфракрасным разрешением $\Omega_{min} \sim 1/t_f$ интерференционного устройства. При увеличении t_f фотоны все более и более низких частот, в принципе, могут бытьendetектированы, и, таким образом, все больше и больше информации теряется при прохождении через фотонное поле. С другой стороны, член в квадратных скобках в (12.187) достигает $t_f/2\tau_B$ при $t_f \gg \tau_B$. Таким образом, сохраняя относительную фиксированную скорость термического вклада, Γ_{th} линейно увеличивается с t_f на временах $t_f \gg \tau_B$. Это описывает декогерентизирующую влияние поглощения и излучения, вызываемых термическим полем. Отсюда следует, что на коротких временах вклад вакуума доминирует, в то время как декогерентизация, главным образом, существует благодаря процессам, индуцированным за большие времена. Время t_f^* , соответствующее пересечению между этими двумя режимами, определяется соотношением

$$\ln(g\Omega_{max}t_f^*) = \frac{2}{3}\frac{t_f^*}{\tau_B}. \quad (12.188)$$

Считая $\Omega_{max} \sim 10^{19} \text{ с}^{-1}$ и $T = 1 \text{ К}$, мы находим из этого условия, что время пересечения есть порядка

$$t_f^* \sim 30\tau_B \sim 10^{-10} \text{ с}. \quad (12.189)$$

Это означает, что для данного примера вакуумная декогерентизация доминирует при временах много меньших 10^{-10} с .

Для упрощения дальнейшего обсуждения исследуем случай противоположных скоростей равной величины, то есть $\vec{v}_1 = \vec{v}_4 = -\vec{v}_2 = -\vec{v}_3$ (см. рис. 12.3(a)). Относительная скорость находится как

$$v_{24} = \frac{2v}{1+v^2}, \quad (12.190)$$

где

$$v = \frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_3|}{2t_f}. \quad (12.191)$$

Эта ситуация соответствует случаю двух волновых пакетов в суперпозиции, которые сначала двигаются с противоположными значениями скоростей \vec{v}_1 и $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1$ соответственно и, достигнув максимального расстояния $|\vec{a}_1 - \vec{a}_3|$, вновь подходят друг к другу со скоростями \vec{v}_2 и $\vec{v}_4 = -\vec{v}_2$. При нерелятивистских скоростях мы имеем $v_{24} \approx 2v$ и можем использовать разложение (12.183), чтобы получить

$$\Gamma_{th} \approx -\frac{16\alpha}{3\pi} \frac{t_f}{\tau_B} v^2, \quad t_f \gg \tau_B. \quad (12.192)$$

Можно поставить следующий вопрос. Задавая фиксированную энергию электрона, то есть фиксированную скорость v , насколько далеко мы можем когерентно разделить компоненты электронного состояния, не превысив заданной пороговой величины $|\Gamma_0|$ для декогерентизации? При условии, что термический вклад доминирует, уравнение (12.192) приводит к условию

$$\frac{16\alpha}{3\pi} \frac{t_f}{\tau_B} v^2 = |\Gamma_0|, \quad (12.193)$$

откуда мы получаем максимально возможное разделение

$$d_{\max} = 2vt_f = \frac{3\pi|\Gamma_0|}{8\alpha} \frac{c\tau_B}{v/c}. \quad (12.194)$$

Выбирая $|\Gamma_0| = 0,01$, что соответствует пороговой декогерентизации 1 %, мы находим максимальное расстояние при $T = 300$ К:

$$d_{\max} \approx \frac{4 \text{ мкм}}{v/c}. \quad (12.195)$$

Это показывает, что можно достигнуть довольно больших когерентных разделений для нерелятивистских электронов. Например, в эксперименте, выполненном Хассельбахом, Киселем и Соннеттагом (Hasselbach, Kiesel, Sonnentag, 2000), электронный пучок был когерентно разделен на латеральное расстояние около $d = 100$ мкм. Чтобы сравнить этот эксперимент с нашими результатами, мы возьмем энергию электрона 1 кэВ и используем фиксированное значение 10 см для расстояния, соответствующего интервалу времени от t_0 до t_f . При $|\Gamma_0| = 0,01$ условие (12.193) тогда дает $d_{\max} \approx 4,5$ см при $T = 1$ К и $d_{\max} \approx 0,26$ см при $T = 300$ К. Отметим, что величина v в уравнении (12.193) представляет величину модуля латеральной компоненты скорости электрона в эксперименте, которая, благодаря тому, что она является относительной скоростью, входит в формулу для функционала декогерентизации. Эти значения, полученные для d_{\max} , много больше латерального расстояния d , полученного в эксперименте, демонстрируют, что наша теория находится в полном согласии с экспериментом.

Результат, выражаемый через уравнения (12.186) и (12.187), также может быть рассмотрен с другой точки зрения. А именно, вместо сохранения фиксированной скорости v (см. (12.191)) мы можем рассмотреть фиксированное максимальное пространственное расстояние $|\vec{a}_1 - \vec{a}_3|$ между траекториями. Таким образом, при увеличении t_f скорость v становится все меньше и меньше и, соответственно, эффект декогерентизации через тормозное излучение становится все меньше и меньше. Для достаточно больших времен v является нерелятивистской, так что вклад вакуума и термический вклад в функционал декогерентизации задаются как

$$\Gamma_{vac} \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \ln(g\Omega_{max}t_f) \frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_3|^2}{t_f^2} \quad (12.196)$$

и

$$\Gamma_{th} \approx -\frac{8\alpha}{3\pi} \left[\ln\left(\frac{\text{sh}(t_f/\tau_B)}{t_f/\tau_B}\right) - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{\text{sh}(2t_f/\tau_B)}{2t_f/\tau_B}\right) \right] \frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_3|^2}{t_f^2}. \quad (12.197)$$

Согласно уравнению (12.196) модуль величины Γ_{vac} уменьшается по существу как t_f^{-2} , в то время как уравнение (12.197) показывает, что модуль величины термического вклада Γ_{th} уменьшается как t_f^{-1} при $t_f \gg \tau_B$:

$$\Gamma_{th} \approx -\frac{4\alpha}{3\pi} \frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_3|^2}{t_f \tau_B}. \quad (12.198)$$

Мы снова наблюдаем пересечение между двумя режимами времен. Для коротких времен доминирует вакуумная декогерентизация, в то время как термически индуцируемая декогерентизация доминирует для больших времен. Это может быть видно из рис. 12.4, где мы построили выражения (12.186) и (12.187) как функцию t_f при фиксированном значении $|\vec{a}_1 - \vec{a}_3|$.

Выражения (12.196) и (12.198) предполагают, что мы определяем вакуумную и термическую длины когерентности посредством

$$\Gamma_{vac} \equiv -\frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_3|^2}{2L(t_f)_{vac}^2}, \quad (12.199)$$

$$\Gamma_{th} \equiv -\frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_3|^2}{2L(t_f)_{th}^2}. \quad (12.200)$$

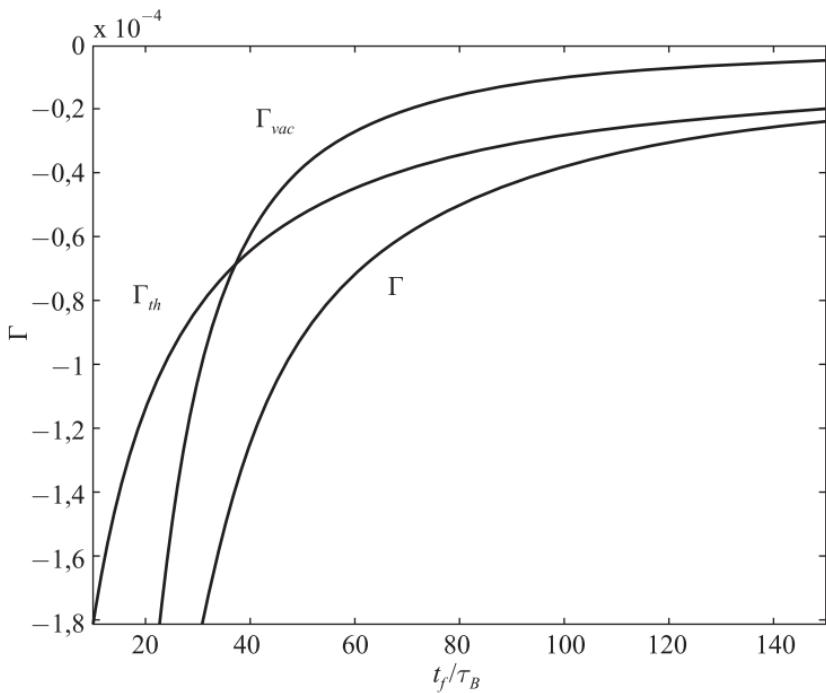


Рис. 12.4. Вакуумный вклад Γ_{vac} и термический вклад Γ_{th} функционала декогерентизации Γ , соответствующий уравнениям (12.186) и (12.187). При фиксированном максимальном расстоянии $|\vec{a}_1 - \vec{a}_3| = c\tau_B$ между траекториями два вклада строятся по отношению ко времени t_f , измеряемому в единицах времени термических корреляций τ_B . Параметры: $T = 1$ К и $\Omega_{max} = 10^{19}$ с⁻¹.

Что приводит к (восстановливаем множитель c)

$$L(t_f)_{vac} = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha \ln(g\Omega_{max}t_f)}} c \cdot t_f \approx \frac{10,4}{\sqrt{\ln(g\Omega_{max}t_f)}} c \cdot t_f \quad (12.201)$$

и

$$L(t_f)_{th} = \sqrt{\frac{3\pi}{8\alpha}} \sqrt{c^2 \tau_B t_f} \approx 12,7 \sqrt{c^2 \tau_B t_f} \propto t_f^{1/2} \cdot T^{-1/2}. \quad (12.202)$$

Уравнение (12.201) подразумевает, что вакуумная длина когерентности примерно порядка

$$L(t_f)_{vac} \sim c \cdot t_f. \quad (12.203)$$

Этот простой результат означает, что для заданного времени t_f радиационное поле не разрушает квантовую когерентность на масштабах длин, которые много меньше расстояния, проходимого за это время светом. Это также объясняет, почему поле излучения довольно неэффективно в разрушении квантовой когерентности отдельных локализованных электронов.

Мы завершаем этот раздел кратким рассмотрением другого интерференционного устройства, которое изображено на рис. 12.5. Здесь мы полагаем, что волновые пакеты, дающие интерференцию, изначально покоятся. Как показано на рисунке, этот случай соответствует ситуации, в которой линейные сегменты, описываемые 4-скоростями u_1 и u_3 , встречаются в бесконечном прошлом. Таким образом, мы устанавливаем $u_1 = u_3$ в уравнении (12.163), чтобы получить

$$c(k) = \frac{ie}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{u_1}{ku_1} [e^{-ika_1} - e^{-ika_3}] + \right. \\ \left. + \frac{u_2}{ku_2} [e^{-ika_2} - e^{-ika_1}] - \frac{u_4}{ku_4} [e^{-ika_2} - e^{-ika_3}] \right\}. \quad (12.204)$$

Выполняя здесь приближение (12.169), мы снова приходим к выражению (12.166), где теперь

$$|\mathcal{G}(k)|^2 = 2(1 - \cos \omega t_f), \quad (12.205)$$

что сразу приводит к выражению

$$\Gamma[c] = -\frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln(g\Omega_{\max}t_f) + \ln \left(\frac{\text{sh}(t_f/\tau_B)}{t_f/\tau_B} \right) \right] \left(\frac{1}{v_{24}} \text{th}^{-1} v_{24} - 1 \right). \quad (12.206)$$

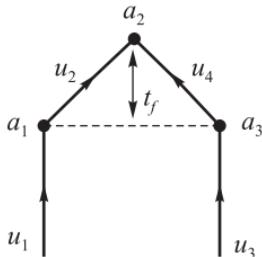


Рис. 12.5. Токовый контур, включающий два линейных сегмента, которые встречаются в бесконечном прошлом (ср. с рис. 12.3(a)). Эта ситуация соответствует интерференционному устройству, в котором относительная скорость v_{13} между интерферирующими волновыми пакетами изначально отсутствует.

В нерелятивистском пределе мы используем выражение (12.183), чтобы получить

$$\Gamma[c] \approx -\frac{8\alpha}{3\pi} \left[\ln(g\Omega_{\max} t_f) + \ln\left(\frac{\sinh(t_f/\tau_B)}{t_f/\tau_B}\right) \right] v^2, \quad (12.207)$$

где мы снова предполагаем $\vec{v}_2 = -\vec{v}_4$.

Декогерентизация через тормозное излучение показывает сильно немарковское поведение, так как функционал декогерентизации зависит от всех траекторий интерференционного устройства. Это может быть проиллюстрировано сравнением уравнения (12.206) с (12.186) и (12.187). После времени, соответствующего максимальному расстоянию между волновыми пакетами, мы в обоих случаях имеем два волновых пакета, подходящие друг к другу с противоположными скоростями, одинаковыми по величине v . Разница между функционалами декогерентизации, получаемая в двух случаях, показывает, что подавление квантовой когерентности через тормозное излучение зависит от всей истории процесса и что время памяти есть время порядка всего времени t_f эксперимента.

12.3.4. Метод интегралов по траекториям

Точное аналитическое представление задачи взаимодействия отдельного электрона с полем излучения, которое учитывает ограниченную ширину, а также размытие волновых пакетов, может быть получено в (нерелятивистском) дипольном приближении (Barone, Caldeira, 1991; Dürre, Spohn, 2000). Этот простой случай представляет особый интерес, так как допускает аналитическое рассмотрение нескольких интересных случаев, которые уже показывают физический механизм, приводящий к механизму декогерентизации через тормозное излучение (Breuer, Petruccione, 2000).

Используя дипольное приближение, мы можем заменить перестановочную функцию (см. (12.19) и (12.20)) и антиперестановочную функцию (см. (12.38)) их пространственно независимыми выражениями, как показано ниже:

$$D^T(x - x')_{ij} \rightarrow \delta_{ij} D(t - t') \equiv \delta_{ij} \int_0^\infty J(\omega) \sin \omega(t - t') d\omega, \quad (12.208)$$

$$D_1^T(x - x')_{ij} \rightarrow \delta_{ij} D_1(t - t') \equiv \delta_{ij} \int_0^\infty J(\omega) \operatorname{cth}(\omega/2k_B T) \cos \omega(t - t') d\omega, \quad (12.209)$$

где спектральная плотность задается

$$J(\omega) = \frac{e^2}{3\pi^2} \omega \theta(\Omega_{\max} - \omega). \quad (12.210)$$

Как и прежде, мы ввели здесь ультрафиолетовое обрезание Ω_{\max} . Видно, что спектральная плотность увеличивается как первая степень частоты ω . Мы использовали дипольную форму $-e\vec{x} \cdot \vec{E}_T$ для связи координаты электрона \vec{x} с электрическим полем (которая получается через каноническое преобразование), соответствующая спектральная плотность будет пропорциональна третьей степени частоты. Это означает, что связь с полем излучения в дипольном приближении может быть описана в качестве специального случая модели Кальдейры–Леггетта, обсуждаемой в разделе 3.6. На языке теории квантового броуновского движения поле излучения образует сверххимическое окружение (Barone, Caldeira, 1991; Anglin, Paz, Zurek, 1997). Отметим также, что теперь мы включаем множитель e^2 в определение корреляционной функции.

В рамках нерелятивистского приближения мы можем заменить плотность тока выражением

$$\vec{j}(t, \vec{x}) \rightarrow \frac{\vec{p}(t)}{m_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) + \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) \frac{\vec{p}(t)}{m_0}, \quad (12.211)$$

где $\vec{p}(t)$ и $\vec{x}(t)$ обозначают операторы импульса и координаты электрона в картине взаимодействия для гамильтониана

$$H_m = \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + V(\vec{x}) \quad (12.212)$$

для электрона, находящегося во внешнем потенциале $V(\vec{x})$. Масса «голого» электрона обозначается m_0 (см. ниже).

Таким образом, мы приходим к следующему нерелятивистскому приближению (пренебрегая спиновой степенью свободы) для матрицы плотности отдельного электрона в представлении функционала влияния (ср. с (12.99)):

$$\begin{aligned} \rho_m(t_f) = T_{\leftarrow} & \left(\exp \left[\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t \left\{ \frac{i}{2} D(t-t') \frac{\vec{p}_c(t)}{m_0} \frac{\vec{p}_a(t')}{m_0} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{1}{2} D_1(t-t') \frac{\vec{p}_c(t)}{m_0} \frac{\vec{p}_c(t')}{m_0} \right\} dt' \right] \right) \rho_m(t_i). \end{aligned} \quad (12.213)$$

Согласно определениям (12.95) и (12.96) \vec{p}_c является супероператором для коммутатора, \vec{p}_a — супероператором для антакоммутатора.

12.3.4.1. Представление интегралов по траекториям и классические уравнения движения. Как мы знаем из раздела 3.6.4.2, редуцированная матрица плотности, заданная в уравнении (12.213), допускает эквивалентное представление интегралами по траекториям. Мы вводим новые координаты через соотношения $\vec{q} = \vec{x} - \vec{x}'$ и $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{x}')$ и для простоты устанавливаем начальное время, равное нулю, $t_i = 0$. Функция пропагатора J определяется как

$$\rho_m(\vec{r}_f, \vec{q}_f, t_f) = \int d^3 r_i \int J(\vec{r}_f, \vec{q}_f, t_f; \vec{r}_i, \vec{q}_i) \rho_m(\vec{r}_i, \vec{q}_i, 0) d^3 q_i \quad (12.214)$$

и допускает представление интегралами по траекториям вида (см. (3.527))

$$J(\vec{r}_f, \vec{q}_f, t_f; \vec{r}_i, \vec{q}_i) = \int D\vec{r} \int D\vec{q} \exp\{i\mathcal{A}[\vec{r}, \vec{q}]\}. \quad (12.215)$$

Этот двойной интеграл по траекториям учитывает все траектории $\vec{r}(t)$, $\vec{q}(t)$, которые удовлетворяют граничным условиям

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_i, \quad \vec{r}(t_f) = \vec{r}_f, \quad \vec{q}(0) = \vec{q}_i, \quad \vec{q}(t_f) = \vec{q}_f. \quad (12.216)$$

Весовой множитель для траекторий определяется на языке эффективного функционала действия \mathcal{A} , задаваемого (см. (3.531))

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\vec{r}, \vec{q}] &= \int_0^{t_f} \left(m_0 \dot{\vec{r}} \dot{\vec{q}} - V(\vec{r} + \vec{q}/2) + V(\vec{r} - \vec{q}/2) \right) dt + \\ &+ \int_0^{t_f} dt \int_0^{t_f} \theta(t - t') D(t - t') \dot{\vec{q}}(t) \dot{\vec{r}}(t') dt' + \\ &+ \frac{i}{4} \int_0^{t_f} dt \int_0^{t_f} D_1(t - t') \dot{\vec{q}}(t) \dot{\vec{q}}(t') dt'. \end{aligned} \quad (12.217)$$

Это, во-первых, поучительно при рассмотрении классических уравнений движения, определенных эффективным функционалом действия. Пер-

вая вариация \mathcal{A} относительно $\vec{r}(t)$ и $\vec{q}(t)$ приводит к классическим уравнениям движения

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\vec{r}}(t) + \frac{1}{2} \vec{\nabla}_{\vec{r}} (V(\vec{r} + \vec{q}/2) + V(\vec{r} - \vec{q}/2)) + \frac{d}{dt} \int_0^t D(t-t') \dot{\vec{r}}(t') dt' = \\ = -\frac{i}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{t_f} D_1(t-t') \dot{\vec{q}}(t') dt' \end{aligned} \quad (12.218)$$

и

$$m_0 \ddot{\vec{q}}(t) + 2 \vec{\nabla}_{\vec{q}} (V(\vec{r} + \vec{q}/2) + V(\vec{r} - \vec{q}/2)) + \frac{d}{dt} \int_t^{t_f} D(t'-t) \dot{\vec{q}}(t') dt' = 0. \quad (12.219)$$

Действительная часть уравнения движения (12.218), которая получается обращением правой части в ноль, приводит к знаменитому уравнению Абрагама–Лоренца для электрона (Jackson, 1999). Оно описывает радиационное торможение через ядро затухания $D(t - t')$. Чтобы увидеть это, мы запишем действительную часть уравнения (12.218) как

$$m_0 \ddot{\vec{r}}(t) + \frac{d}{dt} \int_0^t D(t-t') \dot{\vec{r}}(t') dt' = \vec{F}(t), \quad (12.220)$$

где $\vec{F}(t)$ обозначает внешнюю силу, полученную из потенциала V . Ядро затухания может быть записано как

$$D(t-t') = \int_0^{\Omega_{\max}} \frac{e^2}{3\pi^2} \omega \sin \omega(t-t') d\omega = \frac{e^2}{3\pi^2} \frac{d}{dt'} f(t-t'), \quad (12.221)$$

где мы ввели функцию

$$f(t) \equiv \frac{\sin \Omega_{\max} t}{t}. \quad (12.222)$$

Для большей конкретности ультрафиолетовое обрезание Ω_{\max} принимается в виде $\hbar \Omega_{\max} = mc^2$, что приводит к $\Omega_{\max} \approx 0,78 \times 10^{21} \text{ с}^{-1}$. Член уравнения движения (12.220), включающий ядро затухания, может быть записан

как показано ниже:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t D(t-t') \dot{\vec{r}}(t') dt' &= \frac{e^2}{3\pi^2} \frac{d}{dt} \int_0^t dt' \left[\frac{d}{dt'} f(t-t') \right] \dot{\vec{r}}(t') = \\ &= \frac{e^2}{3\pi^2} \frac{d}{dt} \left[- \int_0^t f(t-t') \ddot{\vec{r}}(t') dt' + f(0) \dot{\vec{r}}(t) - f(t) \dot{\vec{r}}(0) \right]. \quad (12.223) \end{aligned}$$

Для времен t таких, что $\Omega_{\max} t \gg 1$, то есть $t \gg 10^{-21}$ с, мы можем заменить $f(t)$ на $\pi\delta(t)$ и аппроксимировать $f(t) \approx 0$, в то время как $f(0) = \Omega_{\max}$. Таким образом, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^t D(t-t') \dot{\vec{r}}(t') dt' = \frac{e^2}{3\pi^3} \frac{d}{dt} \left[-\frac{\pi}{2} \ddot{\vec{r}}(t) + \Omega_{\max} \dot{\vec{r}}(t) \right], \quad (12.224)$$

что в итоге приводит к уравнению движения

$$\left(m_0 + \frac{e^2 \Omega_{\max}}{3\pi^2} \right) \dot{\vec{v}}(t) - \frac{e^2}{6\pi} \ddot{\vec{v}}(t) = \vec{F}(t), \quad (12.225)$$

где $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ есть скорость. Это уравнение известно как уравнение Абрагама–Лоренца (Jackson, 1999). Приведенный выше вывод, который подобен представленному Бароне и Кальдейрой (Barone, Caldeira, 1991), показывает, что ядро затухания приводит к двум вкладам. Первый «одевает» массу электрона электромагнитной составляющей массы $\delta m = e^2 \Omega_{\max} / 3\pi^2$. Это та же самая перенормировка массы электрона, что и в разделе 12.2.3 (см. (12.120)). Второй вклад, вносимый ядром затухания, пропорционален третьей производной от $\vec{r}(t)$ и описывает затухающее движение электрона через испускаемое излучение. Этот член не зависит от обрезания.

Уравнение движения (12.225) может быть получено эвристически по-средством ларморовской формулы для мощности излучения ускоренного заряда. Более строго это было выведено Абрагамом и Лоренцем из закона сохранения импульса поля, предполагая сферически симметричное распределение заряда и то, что импульс имеет чисто электромагнитное происхождение (Jackson, 1999). Разложение $m = m_0 + \delta m$ массы электрона на «голую» массу и электромагнитную добавку δm является нефизичным, так как электрон никогда не наблюдается без его собственного поля и ассоциируемого с ним импульса поля. Другими словами мы идентифицируем

с m наблюдаемой физической массой, которая нам доступна, чтобы записать уравнение (12.225) как

$$m(\dot{\vec{v}}(t) - \tau_0 \ddot{\vec{v}}(t)) = \vec{F}(t), \quad (12.226)$$

где мы определили характеристическую константу времени

$$\tau_0 \equiv \frac{e^2}{6\pi m} = \frac{2}{3} r_e \approx 0,6 \times 10^{-23} \text{ с.} \quad (12.227)$$

Хорошо известно, что уравнение (12.226), будучи классическим уравнением движения для электрона, приводит к проблеме экспоненциально увеличивающихся решений и, очевидно, к случайному свободному классическому поведению, известному как предускорение (Jackson, 1999). Время τ_0 представляет характерный временной масштаб излучения для движения электрона в следующем смысле (см. также соответствующее рассмотрение в разделе 12.3.1). Предполагаем, что изначально электрон находится в состоянии покоя. Если внешняя сила $\vec{F}(t)$ действует на электрон короткий период времени τ , условие $\tau \gg \tau_0$ подразумевает, что кинетическая энергия электрона велика в сравнении с энергией излучения, соответствующей формуле Лармора. Это означает, что влиянием затухающего излучения можно пренебречь при условии, что $\vec{F}(t)$ изменяется лишь слегка за время порядка τ_0 . Как и в разделе 12.3.1, мы будем использовать это условие в дальнейшем. Это позволит полностью избавиться от члена, включающего ядро затухания, в классических уравнениях движения. На языке броуновского движения мы можем сказать, что поведение на малых временах является строго слабозатухающим для частицы и что декогерентизация существует благодаря ядру шума в функции пропагатора электрона.

Также должно быть полезным сформулировать это условие для электрона, который движется в гармоническом потенциале

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \vec{x}^2. \quad (12.228)$$

В этом случае классическое уравнение движения понимается как

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} + \omega_0^2 \vec{r} - \tau_0 \frac{d^3}{dt^3} \vec{r} = 0. \quad (12.229)$$

С помощью подстановки $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \exp(zt)$ мы приходим к кубическому уравнению для характеристических частот

$$z^2 + \omega_0^2 - \tau_0 z^3 = 0. \quad (12.230)$$

При отсутствии связи с полем излучения ($\tau_0 = 0$) решения локализуются у $z_{\pm} = \pm i\omega_0$, описывая свободное движение гармонического осциллятора

с частотой ω_0 . При $\tau_0 > 0$ уравнение (12.230) имеет три корня: один действительный, а два других комплексно сопряженных. Действительный корень соответствует неконтролируемому решению и должен быть отброшен. Предположим, что период осциллятора много больше времени излучения

$$\tau_0 \ll \frac{1}{\omega_0}. \quad (12.231)$$

На основании (12.227) данное предположение хорошо удовлетворяется даже в режиме оптических частот. Таким образом, мы можем определить комплексные корни наименее порядка в $\omega_0\tau_0$:

$$z_{\pm} = \pm i\omega_0 - \frac{1}{2}\tau_0\omega_0^2. \quad (12.232)$$

Чисто мнимые корни $\pm i\omega_0$ невозмущенного гармонического осциллятора, таким образом, сдвигаются в отрицательную полуплоскость из-за поля излучения. Отрицательная действительная часть описывает затухающее излучение. На самом деле, мы видим, что $\vec{r}(t)$ распадается как $\exp(-\gamma t/2)$, где

$$\gamma = \tau_0\omega_0^2 = \frac{2}{3}\alpha \frac{\hbar\omega_0^2}{mc^2} \quad (12.233)$$

есть константа затухания для осциллятора. Если мы рассматриваем интервалы времени τ порядка величины одного периода осциллятора $\omega_0\tau \sim 1$, то имеем $\gamma\tau = (\omega_0\tau_0)(\omega_0\tau) \sim \omega_0\tau_0 \ll 1$. Таким образом, мы видим, что можем пренебречь эффектами затухающего излучения при условии, что время излучения τ_0 много меньше обычного масштаба времени ω_0^{-1} невозмущенного механического движения.

12.3.4.2. Определение функции пропагатора. Теперь мы можем явно определить функцию пропагатора для матрицы плотности электрона при произвольном квадратичном потенциале. Процедура, по существу, та же, что и используемая в разделе 3.6.4.2 для модели Кальдейры–Леггетта. Поэтому мы скжато описываем лишь в общих чертах результат для свободного движения электрона в поле излучения. Подробности вычисления могут быть найдены в (Breuer, Petruccione, 2000).

Согласно приведенным выше условиям, функция пропагатора для электрона находится как

$$J(\vec{r}_f, \vec{q}_f, t_f; \vec{r}_i, \vec{q}_i) = \left(\frac{m}{2\pi t_f} \right)^3 \exp \left\{ \frac{im}{t_f} (\vec{r}_f - \vec{r}_i)(\vec{q}_f - \vec{q}_i) + \Gamma(\vec{q}_f, \vec{q}_i, t_f) \right\}. \quad (12.234)$$

Как ожидалось, зависящая только от разности $\vec{r}_f - \vec{r}_i$ функция пропагатора является инвариантной относительно пространственных трансляций. Кроме того, легко определить, что вклад

$$G_0(\vec{r}_f - \vec{r}_i, \vec{q}_f - \vec{q}_i, t_f) \equiv \left(\frac{m}{2\pi t_f} \right)^3 \exp \left\{ \frac{im}{t_f} (\vec{r}_f - \vec{r}_i)(\vec{q}_f - \vec{q}_i) \right\} \quad (12.235)$$

является просто функцией пропагатора для электронной матрицы плотности в случае исчезновения связи с полем излучения.

Функция $\Gamma(\vec{q}_f, \vec{q}_i, t_f)$ в уравнении (12.234) описывает влияние поля излучения и может быть записана как

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{q}_f, \vec{q}_i, t_f) &\approx -\frac{2\alpha}{3\pi} \left[\ln(g\Omega_{\max} t_f) + \ln \left(\frac{\text{sh}(t_f/\tau_B)}{t_f/\tau_B} \right) \right] \frac{(\vec{q}_f - \vec{q}_i)^2}{(ct_f)^2} \equiv \\ &\equiv -\frac{(\vec{q}_f - \vec{q}_i)^2}{2L(t_f)^2}. \end{aligned} \quad (12.236)$$

Здесь мы ввели величину $L(t_f)$, которая определяется как

$$L(t_f)^2 \equiv \frac{3\pi}{4\alpha} \left[\ln(g\Omega_{\max} t_f) + \ln \left(\frac{\text{sh}(t_f/\tau_B)}{t_f/\tau_B} \right) \right]^{-1} \cdot (ct_f)^2 \quad (12.237)$$

и которая может быть представлена как зависящая от времени длина когерентности.

12.3.4.3. Динамика волновых пакетов. С помощью уравнения (12.234) мы можем изучить времененную эволюцию электронных волновых пакетов для того, чтобы оценить влияние конечной ширины и расплывания на механизм декогерентизации. Для этого мы исследуем начальное состояние, задаваемое суперпозицией двух гауссовых волновых пакетов, разделенных на расстояние $2a$. Мы полагаем, что оба волновых пакета имеют ширину σ_0 и что они изначально находятся вблизи $\vec{x} = \pm\vec{a} = \pm(a, 0, 0)$. Предполагается, что пакеты движутся навстречу друг другу со средней скоростью $v = k_0/m > 0$. Для простоты движение рассматривается вдоль оси x . Таким образом, наше начальное состояние

$$\begin{aligned} \psi_0(\vec{x}) &= A_1 \left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{(\vec{x} - \vec{a})^2}{4\sigma_0^2} - i\vec{k}_0(\vec{x} - \vec{a}) \right] + \\ &+ A_2 \left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{(\vec{x} + \vec{a})^2}{4\sigma_0^2} + i\vec{k}_0(\vec{x} + \vec{a}) \right], \end{aligned} \quad (12.238)$$

где $\vec{k}_0 = (k_0, 0, 0)$, а A_1, A_2 — комплексные амплитуды. Нашей целью является определение интерференционной картины, которая появляется в момент времени $t_f = a/v$ столкновения центров волновых пакетов при $\vec{x} = 0$. Плотность в координатном пространстве в момент времени t_f находится с помощью формулы

$$\begin{aligned}\rho_m(\vec{r}_f, t_f) &\equiv \rho_m(\vec{r}_f, \vec{q}_f = 0, t_f) = \\ &= \int d^3 r_i \int d^3 q_i \left(\frac{m}{2\pi t_f} \right)^3 \exp \left[-\frac{im}{t_f} (\vec{r}_f - \vec{r}_i) \vec{q}_i - \frac{\vec{q}_i^2}{2L(t_f)^2} \right] \times \\ &\quad \times \psi_0 \left(\vec{r}_i + \frac{1}{2} \vec{q}_i \right) \psi_0^* \left(\vec{r}_i - \frac{1}{2} \vec{q}_i \right).\end{aligned}\quad (12.239)$$

Выполняя интегрирование гауссианов, в результате получаем

$$\begin{aligned}\rho_m(\vec{r}_f, t_f) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma(t_f)^2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\vec{r}_f^2}{2\sigma(t_f)^2} \right] \times \\ &\quad \times \left\{ |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2\Re(A_1 A_2^* \exp[i\varphi(\vec{r}_f) + \Gamma(t_f)]) \right\}.\end{aligned}\quad (12.240)$$

Мы определяем гауссову огибающую, центрированную в $\vec{r}_f = 0$ с шириной $\sigma(t_f)$, некогерентной суммой $|A_1|^2 + |A_2|^2$, а интерференционный член пропорциональным $A_1 A_2^*$. Интерференционный член включает фазу

$$\varphi(\vec{r}_f) = -2\vec{k}_0 \vec{r}_f (1 - \varepsilon), \quad (12.241)$$

а также функцию декогерентизации

$$\Gamma(t_f) = -\frac{2a^2}{L(t_f)^2} (1 - \varepsilon). \quad (12.242)$$

Величина ε задается как

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{L(t_f)^2}{4\sigma_0^2} + \frac{m^2 \sigma_0^2 L(t_f)^2}{t_f^2} \right)^{-1}. \quad (12.243)$$

Член $-2\vec{k}_0 \vec{r}_f$ фазы $\varphi(\vec{r}_f)$ описывает интерференционную картину как если бы она получалась от свободной шредингеровской частицы, в то время как член $2\vec{k}_0 \vec{r}_f \varepsilon$ приводит к изменению периода картины. Больше того, без вклада, пропорционального ε , функция декогерентизации (12.242) точно

совпадает с выражением (12.207). Таким образом, мы видим, что влиянием ограниченной ширины и расплыванием волновых пакетов, приводящих к интерференции, можно пренебречь при условии, что выполняется $\varepsilon \ll 1$. Это условие всегда выполняется в настоящем приближении. Так как ε достигает максимального значения

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{1 + mL(t_f)^2/t_f}, \quad (12.244)$$

это приводит к требованию $L(t_f)^2 \gg \hbar t_f/m$, которое всегда удовлетворяется для времен t_f и температур T , удовлетворяющих $ct_f \gg \lambda_C$ и $k_B T \ll mc^2$.

12.4. Декогерентизация многочастичных состояний

В предыдущем разделе мы получили выражения для функционала декогерентизации, который описывает потерю когерентности в интерферционном устройстве. Здесь мы ставим вопрос: смогут ли эти результаты объяснить отсутствие когерентности определенных суперпозиций состояний, которые могут рассматриваться как макроскопически различные.

Для отдельных электронов вакуумная декогерентизация через тормозное излучение оказывается малой при нерелятивистских скоростях. Например, принимая $\Omega_{\max} \sim c/\lambda_C$ и t_f порядка 1 с и используя скорость v порядка 1/10 скорости света, находим, что $|\Gamma_{vac}| \sim 10^{-2}$. Это соответствует 1% подавлению интерференции. В силу слабой логарифмической зависимости от масштаба обрезания, эта оценка также истинна для других частиц, переносящих элементарный заряд.

Для многочастичных состояний дело может обстоять иначе. Для того чтобы исследовать этот случай, важно указать ясную структуру суперпозиции, подлежащую рассмотрению. Мы различаем два предельных класса многочастичных состояний (Joos, 1996). Если $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$ являются двумя состояниями, содержащими лишь небольшое число частиц, то можно рассмотреть суперпозицию вида

$$|\Psi\rangle = (\alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle)^N. \quad (12.245)$$

В наших обозначениях $|\Psi\rangle$ есть тензорное произведение N -го порядка суперпозиции нескольких частичных состояний $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$. Поэтому декогерентизирующий множитель для $|\Psi\rangle$ ожидается очень малым.

Однако эта ситуация, по существу, меняется, если рассматривается другой класс состояний, а именно состояния вида

$$|\Psi\rangle = \alpha|\varphi_1\rangle^N + \beta|\varphi_2\rangle^N. \quad (12.246)$$

В противоположность уравнению (12.245), это суперпозиция двух тензорных произведений N -го порядка. В таком случае состояния будут исследоваться относительно их свойств декогерентизации. Нашей целью является вывод зависимости функционала декогерентизации от числа частиц N .

Рассмотрим систему, которая состоит из N одинаковых частиц с массами m и зарядом e . Нашей целью является конструирование эффективного основного уравнения для матрицы плотности $\rho_{\text{cm}}(\vec{R}, \vec{R}')$ координаты центра масс

$$\vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \quad (12.247)$$

для таких систем. Здесь \vec{x}_i — координаты частиц, для простоты мы пренебрегаем спиновой степенью свободы. Мы вводим относительные координаты \vec{r}_i через

$$\vec{x}_i = \vec{R} + \vec{r}_i(q). \quad (12.248)$$

Так как \vec{r}_i при суммировании дает ноль, они являются функциями $3N - 3$ внутренних переменных, которые вместе обозначаются q . Предположим, что состояние N -частичной системы описывается матрицей плотности в координатном представлении

$$\rho_m = \rho_{\text{cm}}(\vec{R}, \vec{R}') \rho_{\text{int}}(q, q'), \quad (12.249)$$

где ρ_{cm} и ρ_{int} нормируются на единицу каждая:

$$\int \rho_{\text{cm}}(\vec{R}, \vec{R}) d^3 R = \int \rho_{\text{int}}(q, q) dq = 1. \quad (12.250)$$

Матрица плотности ρ_{cm} описывает координату центра масс, в то время как ρ_{int} представляет состояние внутренних степеней свободы. Например, находим, что величина

$$w(\vec{x} - \vec{R}) = \frac{1}{N} \int \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{R} - \vec{r}_i(q)) \rho_{\text{int}}(q, q) dq \quad (12.251)$$

есть плотность нахождения частицы в \vec{x} при условии, что координата центра масс находится в \vec{R} . Эта функция, очевидно, нормируется как

$$\int w(\vec{x}) d^3 x = 1. \quad (12.252)$$

Если система, описываемая состоянием (12.249), выполняет трансляционное движение, то разумно предположить, что полная плотность тока может быть аппроксимирована эффективной плотностью тока вида

$$\vec{j}_{\text{cm}}(\vec{x}) = \frac{Ne}{2M} \left\{ \vec{P}w(\vec{x} - \vec{R}) + w(\vec{x} - \vec{R})\vec{P} \right\}, \quad (12.253)$$

где $\vec{P} = -i\partial/\partial\vec{R}$ есть суммарный импульс, канонически сопряженный с координатой центра масс \vec{R} , Ne — суммарный заряд, а $M = Nm$ — суммарная масса. Выражение (12.253) подразумевает, что плотность тока внутренних степеней свободы исчезает. В частности, исключается возможность, что системы как целое находятся во вращательных состояниях, что требовало бы ввести три дополнительных коллективных координаты, таких как, например, три эйлеровых угла.

Уравнение (12.253) показывает, что случай N -частичной системы может быть рассмотрен с использованием $e \rightarrow Ne$ и $m \rightarrow M = Nm$ и представлением масштаба длины σ_0 , которая появляется на ультрафиолетовом масштабе обрезания $\Omega_{\max} \sim 1/\sigma_0$ в качестве линейного расширения одночастичной плотности $w(\vec{x})$. Представление матрицы плотности $\rho_{\text{cm}}(\vec{R}, \vec{R}')$ получается из (12.89) подстановкой эффективного тока (12.253) в функционал (12.99), используя нерелятивистское (дипольное) приближение, приходим к следующему представлению для плотности центра масс:

$$\rho_{\text{cm}}(t_f) = T_{\leftarrow} \left(\exp \left[\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \left\{ \frac{i}{2} D(t-t') \frac{\vec{P}_c(t)}{M} \frac{\vec{P}_a(t')}{M} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{2} D_1(t-t') \frac{\vec{P}_c(t)}{M} \frac{\vec{P}_c(t')}{M} \right\} \right] \right) \rho_{\text{cm}}(t_i), \quad (12.254)$$

где $\vec{P}_c(t)$ и $\vec{P}_a(t)$ обозначают супероператоры коммутатора и антакоммутатора для полного импульса в картине взаимодействия. Диссипативное и шумовое ядра задаются выражениями (12.213), где спектральная плотность принимает вид

$$J(\omega) = \frac{N^2 e^2}{3\pi^2} \omega \theta(\Omega_{\max} - \omega). \quad (12.255)$$

Результаты раздела 12.3.4 могут теперь сразу быть применены к данному случаю с помощью замены, указанной выше. Отсюда следует, что ваку-

умный функционал декогерентизации для N -частичного состояния масштабируется как квадрат N^2 числа частиц

$$\Gamma_{vac} \sim -N^2 \frac{8\alpha}{3\pi} \ln(g\Omega_{max} t_f) v^2. \quad (12.256)$$

Такая зависимость от числа частиц, очевидно, приводит к сильному увеличению эффекта декогерентизации. Чтобы дать конкретный пример, мы возьмем $N = 10^{22}$, что соответствует $\sigma_0 \sim 1$ см для обычной свободной электронной плотности в металлах. Зададимся вопросом о максимальной скорости v , приводящей к 1 % декогерентизации. С помощью (12.256) мы находим $v \sim 10^{-14}$ м · с⁻¹. При расстоянии в 1 м, например, это означает, что успешный эксперимент по интерференции будет примерно через 3 миллиона лет!

Масштабирование (12.256) Γ квадратом N^2 числа частиц может иметь в основе две причины. Во-первых, обратное действие излучения пропорционально квадрату суммарного заряда, так как испускаемое излучение когерентно складывается в пределах длины волны. Во-вторых, функционал декогерентизации зависит лишь от частоты обрезания Ω_{max} , что означает, что он очень слабо зависит от полной массы или пространственного объема N -частичного состояния. В обсуждаемых здесь случаях мы, конечно, должны ожидать сильного радиационного затухания в дополнение к эффекту декогерентизации. Фундаментальный интерес представляет также исследование влияния рассматриваемых явлений на сложные нейтральные объекты.

Библиография

- Anglin, J. R., Paz, J. P. and Zurek, W. H. (1997). Deconstructing decoherence. *Phys. Rev.*, **A55**, 4041–4053.
- Barone, P. M. V. B. and Caldeira, A. O. (1991). Quantum mechanics of radiation damping. *Phys. Rev.*, **A43**, 57–63.
- Bjorken, J. D. and Drell, S. D. (1964). *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York. Имеется перевод: Бъёркен Дж., Дрелл С. *Релятивистская квантовая теория*. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1978.
- Breuer, H. P. and Petruccione, F. (2000). Radiation damping and decoherence in quantum electrodynamics. In *Relativistic Quantum Measurement and Decoherence* (eds. Breuer, H. P. and Petruccione, F.), Volume 559 of *Lecture Notes in Physics*, p. 31–65. Springer-Verlag, Berlin.
- Breuer, H. P. and Petruccione, F. (2001). Destruction of quantum coherence through emission of bremsstrahlung. *Phys. Rev.*, **A63**, 032102-1(18).

- Chou, K.-C., Su, Z.-B., Hao, B.-L. and Yu, L. (1985). Equilibrium and nonequilibrium formalisms made unified. *Phys. Rep.*, **118**, 1–131.
- Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J. and Grynberg, G. (1998). *Atom-Photon Interactions*. John Wiley, New York.
- Diòsi, L. (1990). Landau's density matrix in quantum electrodynamics. *Found. Phys.*, **20**, 63–70.
- Dürr, D. and Spohn, H. (2000). Decoherence through coupling to the radiation field. In *Decoherence: Theoretical, Experimental, and Conceptual Problems* (eds. Blanchard, P., Giulini, D., Joos, E., Kiefer, C. and Stamatescu, I.-O.), Volume 538 of *Lecture Notes in Physics*, p. 77–86. Springer-Verlag, Berlin.
- Feynman, R. P. and Vernon, F. L. (1963). The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **24**, 118–173.
- Feynman, R. P. and Hibbs, A. R. (1965). *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, New York. Имеется перевод: Фейнман Р., Хибс А. *Квантовая механика и интегралы по траекториям*. — М.: Мир, 1968.
- Ford, L. H. (1993). Electromagnetic vacuum fluctuations and electron coherence. *Phys. Rev.*, **D47**, 5571–5580.
- Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York. Оригинал на русском языке: Градштейн И. С., Рыжик И. М. 4-е изд. — М.: Физматгиз, 1963.
- Hasselbach, F., Kiesel, H. and Sonnentag, P. (2000). Exploration of the fundamentals of quantum mechanics by charged particle interferometry. In *Decoherence: Theoretical, Experimental, and Conceptual Problems* (eds. Blanchard, P., Giulini, D., Joos, E., Kiefer, C. and Stamatescu, I.-O.), Volume 538 of *Lecture Notes in Physics*, p. 201–212. Springer-Verlag, Berlin.
- Itzykson, C. and Zuber, J.-B. (1980). *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, New York. Имеется перевод: Ицкисон К., Зюбер Ж. Б. *Квантовая теория поля*. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics* (third edition). John Wiley, New York. Имеется перевод: Джексон Дж. *Классическая электродинамика*. — М.: Мир, 1965.
- Jauch, J. M. and Rohrlich, F. (1980). *The Theory of Photons and Electrons*. Springer-Verlag, New York.
- Joos, E. (1996). Decoherence through interaction with the environment. In *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (eds. Giulini, D., Joos, E., Kiefer, C., Kupsch, J., Stamatescu, I.-O. and Zeh, H. D.), p. 35–136. Springer-Verlag, Berlin.

Rohrlich, F. (1965). *Classical Charged Particles*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Weinberg, S. (1995). *The Quantum Theory of Fields*, Volume I. Cambridge University Press, Cambridge. Имеется перевод: Вайнберг С. *Квантовая теория поля*. Т. 1, 2. — М., 2003.

Wheeler, J. A. and Feynman, R. P. (1945). Interaction with the absorber as the mechanism of radiation. *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 157–181.

Wheeler, J. A. and Feynman, R. P. (1949). Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action. *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 425–433.

Дополнение

Квантовая теория как унифицированная информационная модель статистических явлений

Ю. И. Богданов¹

Физико-технологический институт РАН

Цель настоящего приложения — дополнить изложение рассмотрением методологических вопросов квантовой механики с акцентом на ее статистической природе. Мы старались осветить основные фундаментальные принципы, содержащиеся в традиционной копенгагенской интерпретации с учетом важного развития основных положений теории в рамках современной квантовой информатики, претерпевающей бурное развитие в последние годы. Рассматриваются глубокие связи, существующие между квантовой и классической теориями. Демонстрируется применение методов квантовой теории в задачах статистического анализа данных и квантовой томографии. Обосновывается эффективность математического аппарата квантовой теории в задачах моделирования классических статистических систем.

1. Три кита, на которых держится мир квантовых явлений

Согласно Антону Цайлингеру [1–3], авторитетному специалисту в области квантовой физики, можно выделить три основных методологических принципа, лежащих в основе квантовой теории. Это **объективная случайность** (objective randomness), принцип **дополнительности** Нильса Бора (complementarity principle) и явление квантовой **запутанности** (entanglement). Современное изложение рассматриваемых принципов призвано развить и дополнить традиционную копенгагенскую интерпретацию квантовой механики, данную Бором и Гейзенбергом в 1927 году, с учетом новейших достижений в области теории квантовой информации [4–7].

¹E-mail: bogdanov@ftian.ru

Согласно копенгагенской интерпретации, состояние физической системы, задаваемое волновой функцией или матрицей плотности, есть «полный каталог знаний» (a complete catalogue of knowledge), позволяющий правильно рассчитать вероятности исходов любых будущих измерений. Таким образом, статистический аспект квантовой теории оказывается в самой ее сердцевине. Индивидуальные результаты наблюдений должны быть **объективно случайными**. Квантовые случайные события происходят самопротивольно, т. е. не определяются какими-либо явными или скрытыми причинами, в отличие от классических случайных событий, которые связаны с субъективными случайностями. Действительно, результаты классических испытаний, таких как бросание монеты или игральной кости, только выглядят как случайные из-за нашего незнания точных начальных условий (заметим попутно, что для того, кто оснащен измерительной аппаратурой, скоростной видеосъемкой и т. п., ничего случайного в рассматриваемых явлениях нет; такой наблюдатель вполне может предсказать результат испытания «на лету» и даже может управлять этим результатом, вовремя подхватив, например, брошенную монету).

Отдельные свойства квантовой статистической системы могут быть **взаимно-дополнительными**. Это означает, что случайные испытания какого-либо отдельного типа дают только часть информации, содержащейся в «полном каталоге знаний». Весь «каталог», определяемый вектором состояния или матрицей плотности квантовой системы, может быть изучен только посредством совокупности различных взаимно-дополнительных испытаний. Примеры таких взаимно-дополнительных испытаний дают измерения координаты и импульса микрочастицы, связанные известным соотношением неопределенности Гейзенberга, измерения проекций спина на различные направления в пространстве и т. п. Взаимно-дополнительные измерения отвечают некоммутирующим наблюдаемым, поэтому в известном смысле исключают друг друга, поскольку не существует такого квантового состояния, в котором эти наблюдаемые имели бы одновременно определенные значения. Измерение одной из таких наблюдаемых приводит к изменению (редукции) квантового состояния подвергшегося измерению представителя квантового статистического ансамбля. В силу редукции состояния однажды измеренный представитель квантового статистического ансамбля оказывается бесполезным для измерения другой наблюдаемой, не коммутирующей с первой. Таким образом, для восстановления квантового состояния нам необходимо подготовить большое число представителей, которые подвергались бы различным взаимно-дополнительным квантовым измерениям. Такая процедура называется квантовой томографией. Чем большее число представителей подвергнется различным взаимно-дополнительным

измерениям, тем больше информации будет получено о квантовой системе и тем точнее будет восстановлен «полный каталог знаний».

Третье по счету, но не по важности фундаментальное свойство квантовых систем — это **запутанность**. Квантовые объекты, образуя систему, могут терять свои индивидуальные свойства, приобретая определенные совместные характеристики. Так, состояние регистра из нескольких квантовых битов (кубитов) не сводится к совокупности состояний отдельных кубитов. В квантовом состоянии системы, состоящей из нескольких запутанных подсистем, невозможно точно определить состояния отдельных частей. Это контрастирует с ситуацией в классической статистической механике, где состояние всей системы задается просто состояниями отдельных частиц посредством их координат и импульсов. Оказывается, что явление квантовой запутанности приводит к колossalному росту числа возможных состояний физической системы и является основным ресурсом квантовых информационных технологий.

Дадим чуть более подробное описание рассматриваемых принципов.

1.1. Объективная случайность

Простейший и одновременно фундаментальный объект квантовой теории — это спиновое состояние частицы со спином $\frac{1}{2}$ (например, электрона). Измерение спина может быть выполнено в эксперименте типа Штерна–Герлаха (раздел 5.1.2 настоящей книги). Заметим, что оригинальный эксперимент рассчитан не на измерение спина свободных электронов, а на измерение спинов атомов. Первоначально в эксперименте Штерна–Герлаха измерялись атомы серебра, которые также имеют спин $\frac{1}{2}$, связанный с нескомпенсированным спином электрона на внешней электронной оболочке. Спин $\frac{1}{2}$ может быть измерен в любом направлении, и всегда результатом будет только одно из двух возможных значений, а именно вдоль выбранного направления и против («спин вверх» или «спин вниз» соответственно). В результате измерения исходный пучок частиц расщепляется на две компоненты, отклоняющиеся в противоположных направлениях. Если пучок, отвечающий одной из компонент, снова подвергнуть измерению, то он не расщепляется при измерении в том же направлении; если провести измерение в некотором другом направлении, то пучок снова расщепится, что отвечает случайному результату («спин вверх» или «спин вниз»). Отклонения «вверх» и «вниз» будут равновероятны при измерении вдоль направления, ортогонального к первоначальному (в этом случае частица

полностью «забывает» об исходном направлении спина). Измерения вдоль различных направлений являются взаимно-дополнительными.

Пусть последовательно измеряются наблюдаемые σ_z и σ_x , задаваемые соответствующими матрицами Паули и связанные с проекциями момента импульса частицы на оси z и x соответственно. После первого измерения отберем частицы, отклонившиеся в установке Штерна–Герлаха вверх (что соответствует $\sigma_z = +1$). Далее, отобранный пучок частиц с $\sigma_z = +1$ подвергнем измерению наблюдаемой σ_x (с помощью магнита Штерна–Герлаха, ориентированного вдоль x). Выделим теперь пучок с $\sigma_x = +1$. Находясь на позициях классической математической статистики, мы должны были бы быть уверены, что в результате двух измерений мы отобрали пучок, в котором одновременно $\sigma_z = +1$ и $\sigma_x = +1$. Эксперимент опровергает такой вывод. После второго измерения, когда был отобран пучок с $\sigma_x = +1$, оказывается, что если снова измерить σ_z , то половина частиц приобретает значение $\sigma_z = -1$, хотя исходно в пучке присутствовали только частицы с $\sigma_z = +1$. Таким образом, второе измерение разрушает результаты первого.

Чтобы лучше понять удивительное своеобразие квантовых явлений, представим себе следующий классический эксперимент. Имеется поток геометрических тел из детского конструктора, которые отличаются формой (шарики и кубики), а также цветом (зеленые и красные). Используем два сепаратора на лазерных датчиках, первый из которых разделяет тела по форме, а второй — по цвету. На выходе первого сепаратора выделим шарики, которые направим на второй сепаратор, на выходе которого выделим только тела зеленого цвета. В результате рассматриваемых двух селекций мы получим, очевидно, поток зеленых шариков. Каково же будет наше удивление, если, направив поток зеленых шариков снова на сепаратор по форме, мы обнаружим, что половина из шариков превратилась в кубики? Но именно такого рода явления и происходят с микрочастицами. Дело здесь в том, что макроскопические наблюдаемые (форма и цвет) вполне совместимы между собой (могут быть одновременно приписаны одному и тому же объекту). А вот относительно проекций спина на оси x и z этого сказать никак нельзя (определенное значение наблюдаемой σ_x исключает однозначное определение наблюдаемой σ_z , и наоборот).

По меткому замечанию фон Неймана, атомные явления лежат на краю (на границе) физического мира [8, с. 228]. Современная квантовая информатика уточняет, что крайние (граничные) свойства квантовых явлений следует понимать в смысле ограниченности информационного ресурса, связанного с квантовыми состояниями микрообъектов. Другими словами, у кубита весьма «короткая память», поскольку с ним может быть связан только один бит информации (только одно ДА или НЕТ). Вот почему при измере-

нии на ось x электрон «забывает», какой ответ он давал ранее при измерении на ось z . Если бы спин $\frac{1}{2}$ обладал большей памятью, то в его состояние можно было бы записать не один бит информации, а, скажем, весь роман «Война и мир» Льва Толстого.

Тот факт, что информационный ресурс физических систем может быть ограничен, довольно трудно воспринимать психологически, поскольку мы привыкли жить в мире макроскопических объектов, обладающих практически неограниченным информационным ресурсом. Такого рода представления о неограниченном информационном многообразии в шуточной форме описаны в отрывке из стихотворения «Рапсодия» Джонатана Свифта, дополненном математиком Августом де Морганом

*Блох больших кусают блошки,
Блошек тех — малютки-крошки,
И нет конца тем паразитам,
Как говорят, ad infinitum².*

*Блоха большая, в свой черед,
Кусает ту, на ком живет,
Ta — блох потолще, шире в талии,
И нет конца им, и так далее...*

Развитие квантовой механики показало, что подобного рода «дурной бесконечности» в природе не существует, поскольку элементарные структурные «кирпичики», представленные микроскопическими квантовыми объектами, обладают ограниченным информационным ресурсом. Подобные ограничения, однако, являются благом, поскольку обеспечивают существование и устойчивость систем организованной сложности. Именно благодаря своему ограниченному информационному ресурсу соответствующие объекты оказываются естественным образом стандартизованы самой природой. Легко, например, представить себе, что современные механизмы и машины были бы невозможны, если бы в сборочном цехе шестеренки, болты, гайки и другие детали не были бы стандартизованы, а изготавливались бы по произволу механика. Подобным же образом в классической механике атом оказывается нестандартизированным, число возможных траекторий для электронов оказывается практически неограниченным и такого рода атомы оказываются неспособными к проявлению простых регулярных свойств при взаимодействии с электромагнитным полем и между собой.

²Ad infinitum — до бесконечности (лат.).

Напротив, квантование атомных состояний и электромагнитного поля делает такого рода объекты информационно определенными и согласованными между собой, что и дает возможность для возникновения сложноорганизованных гармоничных структур.

Спиновое состояние вдоль любого направления всегда можно рассматривать как суперпозицию состояний «спин вверх» и «спин вниз» вдоль любого другого выбранного направления (чаще всего выбирают направление z).

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle. \quad (1.1)$$

Для определенности можно положить, например, $|0\rangle = |\uparrow\rangle$, $|1\rangle = |\downarrow\rangle$ (состоянию «ноль» отвечает спин «вверх», а состоянию «единица» — спин «вниз»). Комплексные числа c_0 и c_1 задают амплитуды вероятностей соответствующих состояний, тогда $|c_0|^2$ — вероятность состояния «ноль», а $|c_1|^2$ — вероятность состояния «единица».

Выражение (1.1) описывает когерентную суперпозицию базисных состояний. Когерентную суперпозицию следует отличать от некогерентной смеси. Например, при измерениях на ось z когерентное состояние $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ и смесь состояний, включающая 50 % состояний $|0\rangle = |\uparrow\rangle$ и 50 % состояний $|1\rangle = |\downarrow\rangle$, ведут себя одинаково. Однако при измерении на ось x в первом (когерентном) случае все частицы отклонятся в положительном направлении (все наблюдения отвечают $\sigma_x = +1$), а во втором (некогерентном) случае пучок снова будет расщепляться на две равновероятные компоненты (наблюдения $\sigma_x = +1$ и $\sigma_x = -1$ будут представлены с равными вероятностями).

Удобное представление для состояний спина-кубита можно получить на сфере Блоха, которая определяется посредством сферических углов Θ и Φ

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\Phi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \exp\left(i\frac{\Phi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Любой точке на сфере Блоха соответствует некоторое квантовое состояние кубита, и наоборот: любому (чистому) квантовому состоянию кубита можно сопоставить некоторую точку на сфере Блоха.

В роли кубита могут выступать самые разные физические системы. Кроме спина, можно назвать поляризационные состояния фотона, состояния двухуровневого атома, состояния квантовых точек в твердом теле, зарядовые и потоковые состояния сверхпроводниковых структур и т. д. Замечательно, что математически описание любого кубита, независимо от его

физической природы, сводится к заданию квантового состояния частицы со спином $\frac{1}{2}$.

1.2. Принцип дополнительности

Исторически своеобразие квантовой механики проявилось в трудностях, с которыми встретилась теория в попытках непротиворечивого описания квантовых явлений. На заре развития квантовой механики казалось, что различные квантовые процессы (например корпускулярные и волновые), в которых могут участвовать частицы вещества и свет, не допускают единого непротиворечивого описания.

Правильный подход к решению проблемы был найден Н. Бором в рамках выдвинутой им концепции дополнительности [9]. Согласно принципу дополнительности Н. Бора «данные, получаемые при разных условиях опыта, не могут быть охвачены одной-единственной картиной; эти данные должны скорее рассматриваться как *дополнительные* в том смысле, что только совокупность разных явлений может дать более полное представление о свойствах объекта» [10].

Со статистической точки зрения, согласно принципу дополнительности, для того чтобы экспериментальное изучение квантового ансамбля было полным, необходимо, чтобы данные, полученные при изучении ансамбля, например в координатном пространстве, были дополнены изучением того же квантового ансамбля в канонически сопряженном (импульсном) пространстве (аналогично при измерениях спина-кубита измерения на ось z должны быть дополнены, например, измерениями на оси x и y). Важно, что такого рода измерения не могут быть реализованы одновременно в одной и той же экспериментальной установке (т. е. являются взаимно-дополнительными).

Принцип дополнительности приводит к нарушению известной аксиомы о составных случайных величинах классической теории вероятностей [11]. Следуя Г. Крамеру [12] можно сформулировать эту аксиому в виде: «Если ξ_1, \dots, ξ_n — случайные величины размерностей соответственно k_1, \dots, k_n , то каждая составная величина (ξ_1, \dots, ξ_n) также является случайной величиной (размерности $k_1 + \dots + k_n$)». Указанная аксиома, однако, не выполняется в квантовой механике, поскольку объект, составленный из взаимно-дополнительных случайных величин, уже не является случайной величиной, а соответствует более общему понятию квантового состояния. Квантовое состояние можно рассматривать как естественное обобщение понятия статистического распределения. Согласно сказанному

выше, квантовое состояние не может быть сведено к одному-единственному статистическому распределению, а описывает одновременно совокупность различных взаимно-дополнительных распределений. Свидетельство Г. Крамера, одного из самых авторитетных специалистов по математической статистике, является важным. В своем изложении Крамер никак не опирался на квантовую теорию. Просто в логической структуре классической теории вероятностей реально существуют положения, которые могут быть уточнены экспериментом и развитием науки в целом (что и происходит в действительности).

Вероятность обнаружить квантовую систему в состоянии $|\varphi\rangle$ при условии, что она была приготовлена в состоянии $|\psi\rangle$, может быть записана в дираховских обозначениях (см. главу 2 настоящей книги):

$$P = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2. \quad (1.3)$$

Рассматриваемая формула представляет собой известный результат Борна и фон Неймана.

Согласно принципу дополнительности, различные проекционные измерения образуют совокупность взаимно-дополнительных измерений. Рассматриваемая совокупность, в свою очередь, образует протокол квантовых измерений. Вся совокупность квантовых измерений протокола может быть компактно представлена в матричном виде (см. подробнее раздел 3 настоящего дополнения):

$$M_j = X_{jl} c_l, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.4)$$

По повторяющемуся индексу l в формуле (1.4) предполагается суммирование. Протокол описывает m проекций квантового состояния (поэтому имеет m строк). M_j есть амплитуда вероятности j -й квантовой проекции. Вероятности соответствующих измерений задаются квадратами модулей амплитуд:

$$P_j = |M_j|^2. \quad (1.5)$$

Комплексные числа c_l образуют столбец из компонент вектора состояния. В гильбертовом пространстве размерности s соответствующий столбец есть

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{s-1} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Гильбертово пространство размерности $s = 2$ соответствует однокубитовому состоянию (1.1).

Матрица с компонентами X_{jl} , имеющая m строк и s столбцов задает так называемую аппаратную матрицу протокола квантовых измерений. Именно эта матрица описывает формально математически всю совокупность взаимно-дополнительных измерений (j -я строка матрицы X задает бра-вектор $\langle \varphi_j |$ соответствующего проекционного измерения в формуле (1.3)).

Приведем простейший пример протокола квантовых измерений. Рассмотрим следующую аппаратную матрицу, состоящую из шести строк и двух столбцов.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Рассматриваемый протокол описывает измерение однокубитового состояния. Первые две строки аппаратной матрицы отвечают измерению на ось z ($\sigma_z = \pm 1$), следующие две строки описывают измерение на ось x ($\sigma_x = \pm 1$), наконец, последние две строки соответствуют измерению на ось y ($\sigma_y = \pm 1$). Заметим, что скалярные произведения строк, отвечающих измерениям на различные оси, не равны нулю. Такие неортогональные измерения отвечают несовместимым наблюдаемым (соответствующие операторы не коммутируют).

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом протоколе произведение сопряженной аппаратной матрицы на исходную $X^+ X$ пропорционально единичной матрице. Про такие протоколы говорят, что соответствующие измерения образуют неортогональные разложения единицы. В практической деятельности далеко не всегда измерения сводятся к разложению единицы. Но если соответствующее условие выполняется, то теоретический анализ протокола квантовых измерений упрощается. Очень важный вклад в теорию квантовых измерений и, в частности, в теорию измерений, образующих неортогональные разложения единицы, внес А. С. Холево (см. его работы [6, 13, 14]).

Для восстановления произвольного квантового состояния (его «полного каталога знаний») не достаточно провести измерения только на одну из осей или только на две из трех осей, поскольку в этом случае информация о квантовом состоянии будет заведомо неполной. Вопросы адекватности, полноты и точности протоколов квантовых измерений мы рассмотрим ниже в разделе 3.

1.3. Квантовая запутанность

Однокубитовое состояние (1.1) имеет в своей основе два базисных состояния ($|0\rangle$ и $|1\rangle$). У системы из двух кубитов таких базисных состояний уже четыре: $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. Запись $|01\rangle$, например, означает, что первый кубит находится в состоянии «ноль», а второй — в состоянии «единица» и т. д.

Система из двух кубитов может находиться не только в каждом из четырех базисных состояний, но и в состояниях, представляющих собой суперпозиции базисных:

$$|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle. \quad (1.8)$$

Неожиданным с точки зрения обычной интуиции является то, что состояние системы не всегда описывается в терминах состояния отдельных ее частей. Например, такое состояние из двух кубитов, как $|00\rangle + |11\rangle$ не может быть разложено отдельно на состояния каждого из двух кубитов. Другими словами, мы не можем найти такие комплексные числа a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , которые обеспечивали бы выполнение следующего равенства:

$$(a_1|0\rangle + b_1|1\rangle) \otimes (a_2|0\rangle + b_2|1\rangle) = |00\rangle + |11\rangle. \quad (1.9)$$

Действительно:

$$(a_1|0\rangle + b_1|1\rangle) \otimes (a_2|0\rangle + b_2|1\rangle) = a_1a_2|00\rangle + a_1b_2|01\rangle + b_1a_2|10\rangle + b_1b_2|11\rangle. \quad (1.10)$$

Отсюда следует, что $a_1b_2 = 0$, поэтому либо $a_1a_2 = 0$, либо $b_1b_2 = 0$, что невозможно.

Состояния системы, которые не могут быть представлены в виде произведения состояний ее частей, называются **запутанными** (entangled) состояниями.

$$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle. \quad (1.11)$$

Нетрудно показать, что двухкубитовое состояние (1.8) будет незапутанным только в том случае, когда выполняется условие

$$c_{00}c_{11} - c_{01}c_{10} = 0. \quad (1.12)$$

В соответствии с постулатами квантовой информатики полное описание каждого кубита в отдельности определяется соответствующими однокубитовыми векторами состояний, задаваемыми формулой (1.2). Исходное состояние системы из независимо приготовленных кубитов задается тензорным произведением однокубитовых состояний. При включении взаимодействия между кубитами возникают квантовые корреляции. В результате совместное состояние регистра кубитов перестает быть сепарабельным, т. е. становится запутанным.

Запутанные состояния соответствуют ситуациям, которые не имеют классических аналогов и за которыми не стоит интуиция, подкрепленная наглядными механическими образами. Заметим, что такие состояния как раз и обеспечивают экспоненциальный рост размерности гильбертова пространства состояний в зависимости от числа кубитов.

Действительно, в случае системы из трех кубитов вектор квантового состояния будет иметь в своей основе 8 комплексных амплитуд вероятности:

$$|\psi\rangle = c_{000}|000\rangle + c_{001}|001\rangle + c_{010}|010\rangle + c_{011}|011\rangle + \\ + c_{100}|100\rangle + c_{101}|101\rangle + c_{110}|110\rangle + c_{111}|111\rangle. \quad (1.13)$$

Нетрудно видеть, что n -кубитовые состояния будут описываться посредством 2^n комплексных амплитуд вероятности, соответственно такой же будет и размерность гильбертова пространства ($s = 2^n$). Каждому комплексному числу соответствует два действительных параметра. Кроме того, нужно учесть, что квантовое состояние определено с точностью до соглашения о нормировке, а также с точностью до произвола в выборе общей фазы (глобальная калибровочная инвариантность), поэтому число независимых параметров уменьшается на два. В результате находим, что число действительных физически значимых параметров для n -кубитового вектора состояния есть

$$r = 2s - 2 = 2^{n+1} - 2. \quad (1.14)$$

С другой стороны, если бы в природе не существовало явления квантовой запутанности, то можно было бы определить отдельно состояние каждого кубита (по два действительных параметра на каждый кубит в соответствии с представлением на сфере Блоха). Таким образом, незапутанное n -кубитовое состояние описывается всего набором из $2n$ действительных параметров.

Пусть имеется регистр из 1000 кубитов ($n = 1000$). Тогда, без учета явления квантовой запутанности, будем иметь всего $2n = 2000$ степеней свободы. С учетом же квантовой запутанности получим колоссально большое

число степеней свободы, равное $2^{n+1} - 2 \approx 2,14 \cdot 10^{301}$. Заметим попутно, что для вселенной, имеющей в своем распоряжении «только» $\sim 10^{78}$ нуклонов, нет никакой возможности записать подобное состояние детерминированным образом на каком-либо материальном носителе. Рассмотренное явление колossalного роста числа базисных состояний в составных квантовых системах определяет ключевой ресурс квантовых информационных технологий. Запутанность является фундаментальным физическим ресурсом, не менее важным, чем энергия или вещество.

Вектор состояния составной системы может быть разложен по векторам, относящимся к отдельным подсистемам. Соответствующее представление называется разложением Шмидта (см. раздел 2.2.2 книги, а также [4, 5]):

$$|\psi\rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_k} |\psi_k^{(1)}\rangle \otimes |\psi_k^{(2)}\rangle. \quad (1.15)$$

Здесь λ_k — весовые (заведомо неотрицательные) множители, удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_k \lambda_k = 1. \quad (1.16)$$

Мы предполагаем, что слагаемые в разложении (1.15) представлены в порядке убывания (невозрастания) коэффициентов λ_k .

Разложение Шмидта дает наглядный математический аппарат для исследования запутанности. Например, регистрация подсистемы № 1 наблюдателем A в состоянии $|\psi_k^{(1)}\rangle$ означает, что подсистема № 2 с необходимостью будет зарегистрирована (наблюдателем B) в состоянии $|\psi_k^{(2)}\rangle$ (при том же самом k).

Векторы $|\psi_k^{(1)}\rangle$ и $|\psi_k^{(2)}\rangle$ называются модами Шмидта. Предположим, что каждая из подсистем описывается гильбертовым пространством размерности s . Тогда каждый из наборов функций $|\psi_k^{(1)}\rangle$ и $|\psi_k^{(2)}\rangle$ ($k = 1, \dots, s$) будет полным набором, образующим ортонормированный базис.

Основная числовая характеристика, связанная с разложением Шмидта есть число Шмидта K , которое характеризует эффективное число мод в разложении:

$$K = \frac{1}{\sum_k \lambda_k^2}. \quad (1.17)$$

По своему определению, в силу условия нормировки для λ_k , число K заведомо не ниже единицы (и равно единице только в том случае, когда

в разложении Шмидта имеется единственное ненулевое слагаемое). В случае систем, описываемых конечномерным вектором состояния, число K лежит в интервале $1 \leq K \leq s$, где s — размерность гильбертова пространства квантовой подсистемы.

Отметим, что наше определение числа Шмидта отличается от определения авторов книги, которые под числом Шмидта понимают число ненулевых компонент в разложении (см. раздел 2.2.2).

Наблюдатель A , для которого доступна подсистема № 1 и недоступна подсистема № 2, не имеет возможности восстановить вектор состояния полной системы. Он вынужден ограничиться описанием подсистемы № 1 посредством матрицы плотности:

$$\rho^{(1)} = \sum_k \lambda_k |\psi_k^{(1)}\rangle\langle\psi_k^{(1)}|. \quad (1.18)$$

Аналогично наблюдатель B , которому доступна только подсистема № 2, имеет дело с матрицей плотности:

$$\rho^{(2)} = \sum_k \lambda_k |\psi_k^{(2)}\rangle\langle\psi_k^{(2)}|. \quad (1.19)$$

Матрица плотности является инструментом неполного описания квантовых систем. Такое описание может быть искусственно домыслено (дополнено) до описания посредством вектора состояния (так называемая процедура очищения). Например, наблюдатель A , не имея возможности установить действительную систему № 2, с которой запутана его система № 1, может рассмотреть некоторую другую вспомогательную систему № 2' и соответствующий ей базисный набор $|\psi_k'^{(2)}\rangle$. Вместо действительного вектора состояния составной системы $|\psi\rangle$ такой наблюдатель будет рассматривать некоторое другое состояние $|\psi'\rangle$.

$$|\psi'\rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_k} |\psi_k^{(1)}\rangle \otimes |\psi_k'^{(2)}\rangle. \quad (1.20)$$

Важно отметить, что в отношении описания отдельно взятой системы № 1 векторы состояния $|\psi\rangle$ и $|\psi'\rangle$ эквивалентны.

Остановимся особо на случае, когда в качестве изучаемой выступает подсистема № 1, а в роли второй подсистемы выступает ее окружение. Тогда разложение Шмидта имеет вид

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^s \sqrt{\lambda_k} |\psi_k^{(S)}\rangle \otimes |\psi_k^{(E)}\rangle. \quad (1.21)$$

Здесь индексы S и E обозначают соответственно систему и ее окружение.

Величина, характеризующая степень неслучайности корреляций между системой и ее окружением, есть так называемая информация Шмидта [15].

$$I = \log_2 K. \quad (1.22)$$

В роли основной информационной характеристики состояния выступает известная энтропия фон Неймана

$$S = - \sum_{j=1}^s (\lambda_j \log_2 \lambda_j). \quad (1.23)$$

Эта величина характеризует степень неопределенности состояния, которая возникает из-за «ухода» части информации из системы в окружение.

Введенные характеристики позволяют осуществить классификацию квантовых состояний в зависимости от степени связи между системой и окружением.

Чистое состояние характеризуется условиями:

$$K = 1, \quad I = S = 0. \quad (1.24)$$

Неопределенность чистого состояния равна нулю, в окружении нет никакой информации о состоянии. Измерения над системой никак не коррелируют с измерениями над окружением. Отсюда следует свойство объективной случайности, рассмотренное в разделе 1.1, поскольку никакие измерения над окружением не позволяют предсказать результаты измерений над системой.

Смешанное состояние характеризуется условиями:

$$K > 1, \quad I > 0, \quad S > 0. \quad (1.25)$$

В этом случае неопределенность состояния оказывается строго больше нуля, поэтому часть информации о состоянии смеси содержится в окружении.

Наконец, состояние смеси, максимально запутанное с окружением, характеризуется условиями:

$$K = s, \quad I = S = \log_2 s. \quad (1.26)$$

В этом случае вся информация о состоянии «растворена» в окружении, имеется полностью некогерентное состояние «белого шума», матрица плотности оказывается пропорциональной единичной матрице.

2. Как квантовая механика позволяет понять классическую статистику. Корневой подход

В самом начале главы 2 авторы настоящей книги подчеркивают, что «хотя квантовая механика является по сути вероятностной теорией, приложение концепции вероятностей к квантовой механике сильно отличается от классической теории». Уже основное понятие вероятностного пространства колмогоровской теории вероятностей оказывается неадекватным для описания квантовых явлений.

В то время как авторы учебников по классической теории вероятностей неизменно подчеркивают, что вероятность возникает из-за практической невозможности точного описания очень сложных явлений (тем самым вероятность рассматривается как субъективная категория), квантовая механика, как уже отмечалось выше, исходит из того, что квантовые явления вероятностны по своей объективной природе. Единственным способом объединения наблюдаемых (случайных величин) в классической теории является переход от одномерных распределений к многомерным, тем самым исключаются взаимно-дополнительные квантовые измерения и несовместные наблюдаемые. Наконец, концепция классического пространства элементарных событий исходит из представлений наивного механического реализма и тем самым исключается возможность для описания запутанных квантовых состояний.

Квантовая механика несомненно является статистической теорией. В то же время ее математический аппарат очень существенно отличается от аппарата таких традиционных статистических научных направлений, как теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов и классическая статистическая физика. Это обстоятельство, отмеченное еще на заре квантовой теории, служило поводом для многочисленных попыток, направленных на то, чтобы, образно выражаясь, вернуть молодую «заблудшую» квантовую «овцу» в общее статистическое «стадо». Известно, что такого рода попытки не увенчались успехом. С развитием методов квантовой информатики стало ясно, что квантовую концепцию вероятности невозможно свести к классической.

Ниже рассматривается задача, связанная с построением таких много-параметрических статистических моделей, которые допускают устойчивое восстановление неизвестных параметров по экспериментальным данным. Оказывается, что существует только один класс моделей такого рода и это как раз те модели, которые рассматриваются в квантовой механике. В свете такого рода результатов статистическая модель квантовой механики имеет существенное преимущество по отношению к любым другим статистиче-

ским моделям, т. е. оказывается, в некотором роде, выделенной моделью. Не исключено, что «отбившаяся» когда-то от общего статистического «стада» «заблудшая» квантовая «овца» может со временем увести за собой все «стадо».

Заметим, что классическая вероятностная модель может рассматриваться как «урезанная» версия квантовой модели, в которой не учитывается возможность взаимно-дополнительных измерений, несовместных наблюдаемых, запутанных совместных состояний и т. п. Это означает, что все важные математические результаты, полученные в классической теории, могут быть использованы и в квантовой теории. Кроме того, квантовая теория делает структуру вероятностной теории более совершенной и открывает новые практические возможности для анализа данных. Описанию этих возможностей и посвящен настоящий раздел.

2.1. Метод максимального правдоподобия и информационная матрица Фишера

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — имеющаяся в распоряжении исследователя выборка, представляющая собой n независимых наблюдений из одного и того же распределения $p(x|\theta)$. Здесь θ — параметр распределения (возможно многомерный).

Функция правдоподобия определяется следующим произведением:

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i|\theta). \quad (2.1)$$

Рассматриваемая конструкция представляет собой n -мерную плотность совместного распределения случайных величин, если вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ интерпретировать как совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин. Если же $x = (x_1, \dots, x_n)$ есть конкретная реализация (фиксированная выборка), то функция правдоподобия, рассматриваемая как функция параметра θ , характеризует «степень правдоподобия» тех или иных значений параметра распределения.

Согласно принципу максимального правдоподобия, выдвинутому Рональдом Фишером в 1912 г. [16] и развитому им в 20-е годы прошлого века [17], в качестве оценки для параметра θ следует взять то значение $\hat{\theta}$ из области допустимых значений параметра, для которого функция правдоподобия принимает наибольшее значение.

Обычно удобнее работать не с самой функцией правдоподобия, а с ее логарифмом, который в силу монотонности логарифмической функции

принимает экстремальные значения в тех же точках, что и сама функция правдоподобия

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \ln p(x_i | \theta). \quad (2.2)$$

Необходимое условие экстремума логарифма функции правдоподобия задает уравнение правдоподобия, имеющее вид

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0. \quad (2.3)$$

Если $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$ — многомерный параметр, имеющий s компонент, то получим систему уравнений правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (2.4)$$

Основной результат теории оценок максимального правдоподобия заключается в том, что при некоторых достаточно общих условиях уравнения правдоподобия имеют решение $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_s)$, являющееся состоятельной, асимптотически нормальной и асимптотически эффективной оценкой параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$ [12, 18–21].

Формально это можно записать в виде

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, I^{-1}(\theta)). \quad (2.5)$$

Последняя запись означает, что асимптотически (при больших n) оценка $\hat{\theta}$ является случайной величиной, имеющей многомерное нормальное распределение со средним, равным истинному значению параметра θ , и ковариационной матрицей, равной обратной матрице информации Фишера.

Элементы матрицы информации Фишера имеют вид

$$I_{ij}(\theta) = n \cdot \int \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta_j} p(x|\theta) dx. \quad (2.6)$$

Множитель n показывает, что информация Фишера аддитивна (информация в выборке складывается из информации, содержащейся в ее отдельных независимых элементах). Асимптотически при $n \rightarrow \infty$ ковариационная матрица стремится к нулевой матрице и, в частности, в ноль обращаются дисперсии всех компонент (свойство состоятельности).

Фундаментальное значение информации Фишера связано с ее свойством определять границу точности статистических оценок, которая в некотором смысле характеризует наилучшую точностью, которая может быть достигнута в принципе. Согласно известному неравенству Рао–Крамера для любой несмешенной оценки $\hat{\theta}$ неизвестного многомерного параметра θ матрица $\Sigma(\hat{\theta}) - I^{-1}(\theta)$ является неотрицательно-определенной. Здесь $\Sigma(\hat{\theta})$ — ковариационная матрица оценки $\hat{\theta}$. Для оценок по методу максимального правдоподобия соответствующая разница асимптотически сводится к нулевой матрице (свойство асимптотической эффективности).

Именно свойство асимптотической эффективности делает метод максимального правдоподобия одним из наиболее привлекательных средств математической статистики. В то же время в вычислительном отношении, задачи, связанные с методом максимального правдоподобия, могут быть очень сложными. Эти сложности могут проявляться в задачах нелинейной оптимизации уже в случае оценок двух или трех неизвестных параметров, когда отсутствует аналитическое решение задачи и приходится прибегать к численным методам. В условиях, когда ни один из известных методов не дает гарантии сходимости к искомому решению, приходится поочередно использовать различные методы, такие как: метод простой итерации, метод Ньютона–Канторовича, методы спуска, в том числе различные градиентные методы, и т. п. По мере роста размерности задачи вычислительные трудности быстро становятся непреодолимыми. Так, в прикладных статистических исследованиях практически отсутствуют работы, в которых методами нелинейной оптимизации функции правдоподобия оценивалось бы четыре и более неизвестных статистических параметров. Это связано с трудностью получения таких оценок, а также с их низкой точностью (матрица, обратная к матрице информации Фишера, оказывается плохо обусловленной). Таким образом, стремление к получению обладающих хорошими асимптотическими свойствами максимально правдоподобных статистических оценок вступает в противоречие со сложностью их получения и устойчивостью.

В связи со сказанным становится понятной важность задачи разработки многопараметрической статистической модели, допускающей устойчивое оценивание параметров. Такая так называемая корневая модель была предложена и развита в работах [22–26]. Оказывается, что искомая простота и устойчивость оценок возникает, если потребовать, чтобы плотность распределения вероятностей представляла собой квадрат модуля некоторой функции, которую, по аналогии с квантовой механикой, естественно назвать пси-функцией. Пси-функция оказывается, в некотором смысле,

корнем из плотности вероятности (отсюда и термин — корневой подход). Пси-функция, также в полной аналогии с квантовой теорией, представляется в виде разложения по набору базисных функций; коэффициенты искомого разложения ищутся методом максимального правдоподобия.

Рассматриваемая модель, основанная на квантовомеханическом подходе к вероятности, оказывается выделенной по отношению к любым другим возможным статистическим моделям. Так, матрица информации Фишера (и обратная к ней матрица ковариаций) в новом подходе имеет простейший и универсальный (не зависящий от выбора базиса) вид. Немаловажно также и то обстоятельство, что уравнение правдоподобия в корневом методе имеет простой квазилинейный вид, допускающий построение быстросходящейся итерационной процедуры, пригодной для оценки многопараметрических моделей. Число параметров в этих моделях никак не ограничено какими бы то ни было проблемами, связанными со сходимостью алгоритмов или плохой обусловленностью задачи (и определяется только возможностями вычислительной техники).

2.2. Корневой подход к оцениванию плотности. Пси-функция и уравнение правдоподобия

Рассматриваемая ниже пси-функция является математическим объектом статистического анализа данных, вводимым по аналогии с квантовой механикой и служащим для радикального упрощения статистических оценок плотности, получаемых методом максимального правдоподобия.

Введение пси-функции означает, что вместо плотности распределения рассматривается «квадратный корень из нее», т. е.

$$p(x) = |\psi(x)|^2. \quad (2.7)$$

Пусть пси-функция зависит от s неизвестных параметров c_0, c_1, \dots, c_{s-1} (согласно традиции, существующей в квантовой механике, нумерация базисных функций обычно начинается с нулевого элемента — основного состояния). Введенные параметры являются коэффициентами разложения по некоторому набору базисных функций:

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{s-1} c_i \varphi_i(x). \quad (2.8)$$

Предположим, что набор функций является ортонормированным. Тогда условие нормировки полной вероятности на единицу будет иметь вид

$$\sum_{i=0}^{s-1} c_i c_i^* = 1. \quad (2.9)$$

Будем рассматривать такие наборы базисных функций, которые являются полными при $s \rightarrow \infty$. Некоторые примеры таких наборов представлены в разделе 2.4.

Метод максимального правдоподобия заключается в том, что в качестве «наиболее правдоподобных» оценок неизвестных параметров c_0, c_1, \dots, c_{s-1} берутся значения, при которых функция правдоподобия и ее логарифм становятся максимальными.

$$\ln L = \sum_{k=1}^n \ln p(x_k | c) \rightarrow \max. \quad (2.10)$$

Плотность вероятности есть

$$p(x) = \psi^* \psi = c_i c_j^* \varphi_i(x) \varphi_j^*(x). \quad (2.11)$$

Здесь и далее договоримся, что по повторяющимся индексам, нумерующим члены разложения по набору базисных функций, предполагается суммирование (если не оговорено обратное). Статистические же суммы, связанные с суммированием по элементам выборки, будем выписывать явно.

В точках выборки плотность распределения есть

$$p(x_k) = \psi^* \psi = c_i c_j^* \varphi_i(x_k) \varphi_j^*(x_k). \quad (2.12)$$

Функция правдоподобия в нашем случае имеет вид

$$\ln L = \sum_{k=1}^n \ln [c_i c_j^* \varphi_i(x_k) \varphi_j^*(x_k)]. \quad (2.13)$$

Нахождение экстремума логарифмического правдоподобия с учетом условия нормировки сводится к нахождению экстремума следующей функции:

$$S = \ln L - \lambda(c_i c_i^* - 1), \quad (2.14)$$

где λ — множитель Лагранжа.

Необходимое условие экстремума приводит к уравнению правдоподобия:

$$\frac{\partial S}{\partial c_i^*} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_i^*(x_k) \varphi_j(x_k)}{p(x_k)} c_j - \lambda c_i = 0. \quad (2.15)$$

Таким образом, нахождение экстремума сводится к задаче на собственные функции:

$$R_{ij}c_j = \lambda c_i, \quad (2.16)$$

где

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_i^*(x_k)\varphi_j(x_k)}{p(x_k)}. \quad (2.17)$$

Задача (2.16) является линейной по форме. Однако сама матрица R зависит от неизвестной плотности $p(x)$, поэтому, по существу, рассматриваемая задача является нелинейной и должна, вообще говоря, решаться методом итераций (см. [22]).

Умножая левую и правую части уравнения (2.16) на c_i^* и суммируя по i , получим, учитывая (2.9) и (2.11), что максимально правдоподобный вектор состояния c всегда отвечает собственному значению $\lambda = n$.

Проверим, что подстановка точного вектора состояния в уравнение правдоподобия обратит последнее в тождество (в асимптотическом пределе). Действительно, при больших объемах выборки ($n \rightarrow \infty$) в силу закона больших чисел (стремление выборочного среднего к генеральному) и свойства ортонормированности базисных функций имеем:

$$\frac{1}{n}R_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_i^*(x_k)\varphi_j(x_k)}{p(x_k)} \rightarrow \int \frac{\varphi_i^*(x)\varphi_j(x)}{p(x)} p(x) dx = \delta_{ij}. \quad (2.18)$$

Таким образом, матрица $\frac{1}{n}R$ асимптотически приближается к единичной матрице. Другими словами, непосредственно из уравнения правдоподобия (2.16) видно, что истинный вектор состояния гарантированно является его решением при $n \rightarrow \infty$ (состоятельность). Матрица $\frac{1}{n}R$ может быть названа квазиединичной.

Предположим, что базисные функции $\varphi_i(x)$ и вектор состояния c действительны. Тогда основное уравнение для определения вектора состояния (2.16) может быть написано в виде (для большей ясности выписываем явно знаки сумм)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\varphi_i(x_k)}{\sum_{j=0}^{s-1} c_j \varphi_j(x_k)} \right] = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, s-1. \quad (2.19)$$

Легко видеть, что решение этого уравнения автоматически удовлетворяет условию нормировки (2.9).

2.3. Статистические свойства корневых оценок

Будем для простоты снова рассматривать случай, когда пси-функция является действительной.

Пусть разложение имеет вид

$$\psi(x) = \sqrt{1 - (c_1^2 + \dots + c_{s-1}^2)}\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_{s-1}\varphi_{s-1}(x). \quad (2.20)$$

Здесь мы исключили из числа оцениваемых параметров коэффициент $c_0 = \sqrt{1 - (c_1^2 + \dots + c_{s-1}^2)}$, так как согласно условию нормировки он рассчитывается через другие коэффициенты.

Параметры c_1, c_2, \dots, c_{s-1} являются независимыми оцениваемыми параметрами. Их асимптотические статистические свойства изучим с использованием информационной матрицы Фишера:

$$I_{ij}(c) = n \cdot \int \frac{\partial \ln p(x, c)}{\partial c_i} \frac{\partial \ln p(x, c)}{\partial c_j} p(x, c) dx. \quad (2.21)$$

Для наших целей очень важно, что выражение для информационной матрицы Фишера радикально упрощается, если ввести пси-функцию.

$$I_{ij} = 4n \cdot \int \frac{\partial \psi(x, c)}{\partial c_i} \frac{\partial \psi(x, c)}{\partial c_j} dx. \quad (2.22)$$

В случае разложения (2.20) информационная матрица I_{ij} имеет порядок $(s - 1) \times (s - 1)$ и выражается в следующем простом виде:

$$I_{ij} = 4n \left(\delta_{ij} + \frac{c_i c_j}{c_0^2} \right), \quad \text{где } c_0 = \sqrt{1 - (c_1^2 + \dots + c_{s-1}^2)}. \quad (2.23)$$

Замечательной особенностью выражения (2.23) является его независимость от выбора базисных функций.

Матрица ковариаций оценки вектора состояния в силу асимптотической эффективности есть матрица, обратная к матрице информации Фишера:

$$\Sigma(\hat{c}) = I^{-1}(c). \quad (2.24)$$

Компоненты этой матрицы есть

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{4n}(\delta_{ij} - c_i c_j), \quad i, j = 1, \dots, s - 1. \quad (2.25)$$

Расширим теперь полученную матрицу ковариаций, добавив в нее ковариации компоненты c_0 вектора состояния с остальными компонентами. Можно показать, что полученная таким образом общая матрица ковариаций имеет тот же вид, что (2.25), но теперь $i, j = 0, 1, \dots, s - 1$. Этот результат представляется почти очевидным, поскольку нулевая компонента ничем не выделена по отношению к другим (точнее говоря, она была выделена нами только для обеспечения условия нормировки). С геометрической точки зрения полученная матрица ковариаций является тензором второго ранга.

Восстановленный методом максимального правдоподобия вектор состояния c отличается от теоретического вектора состояния $c^{(0)}$. Соответствующая точность восстановления определяется критерием хи-квадрат. В рамках корневого подхода критерий хи-квадрат задается простой формулой [22]:

$$1 - |\langle c | c^{(0)} \rangle|^2 = \frac{\chi_{s-1}^2}{4n}. \quad (2.26)$$

Здесь χ_{s-1}^2 — случайная величина, имеющая хи-квадрат распределение с $s - 1$ степенью свободы. Представленное выражение означает, что квадрат скалярного произведения истинного $c^{(0)}$ и восстановленного c векторов состояния меньше единицы на асимптотически малую случайную величину $\frac{\chi_{s-1}^2}{4n}$.

В квантовой теории информации случайная величина $F = |\langle c | c^{(0)} \rangle|^2$ задает точность восстановления квантового состояния. Она называется степенью согласия или вероятностью совпадения истинного и восстановленного векторов состояния (английский термин — fidelity). Случайную величину $\delta F = 1 - F$ можно назвать потерей точности. Таким образом, критерий хи-квадрат задает распределение для потери точности:

$$\delta F = \frac{\chi_{s-1}^2}{4n}. \quad (2.27)$$

В разделе 3 представленные выше результаты будут обобщены на квантовые состояния общего вида.

2.4. Некоторые наборы базисных состояний

Представим некоторые основные наборы базисных функций, которые удобно использовать для целей численного анализа в задачах восстановления статистических распределений по экспериментальным данным [22, 26].

Базисный ортонормированный набор функций Чебышева–Эрмита имеет вид

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(2^k k! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_k(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Здесь $H_k(x)$ — полином Чебышева–Эрмита k -го порядка.

Рассматриваемый базис, как известно, описывает стационарные состояния квантового гармонического осциллятора.

Удобство базиса Чебышева–Эрмита заключается, в частности, в том, что если в нулевом приближении распределение считать гауссовым, то это достигается просто выбором основного состояния осциллятора, а описание отклонений от «гауссности» достигается посредством добавления вклада высших гармоник в вектор состояния. Заметим, что итоговое распределение может очень сильно отличаться от своего нулевого приближения (может быть асимметричным, многомодальным и т. д.).

Рассматриваемый набор базисных функций может быть эффективно и с высокой точностью применен для задач восстановления произвольных статистических распределений, заданных на всей числовой прямой ($-\infty < x < +\infty$). Рассматриваемый базис допускает очевидное обобщение на многомерный случай.

Для распределений, заданных на полупрямой (например при $0 \leq x < +\infty$), удобно использовать другой базисный ортонормированный набор функций, основанный на полиномах Лагерра. Соответствующие базисные функции имеют вид

$$\varphi_k(x) = L_k(x) \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Здесь $L_k(x)$ — полином Лагерра k -го порядка.

Полиномы Лагерра находят применение для описания атомных состояний.

В рассматриваемом наборе базисных функций основное состояние ($k = 0$) соответствует экспоненциальному распределению. Учет высших гармоник в разложении пс-функции описывает отклонение статистического распределения от экспоненциального распределения.

Две основные модели дискретных распределений математической статистики — это, соответственно, биномиальное распределение и распределение Пуассона. В корневом подходе эти распределения выступают в качестве нулевых приближений при восстановлении дискретных распределений общего вида.

Базисный ортонормированный набор функций на основе полиномов Кравчука позволяет описывать многопараметрические распределения биномиального типа. Соответствующие дискретные распределения заданы в точках $x = 0, 1, 2, \dots, N$. По аналогии с обычным биномиальным распределением можно сказать, что случайная величина x есть число «успехов» в серии из N «испытаний». В нулевом приближении рассматриваемое распределение есть обычное биномиальное распределение. Базисные функции задаются формулой

$$\varphi_k(x) = \left(\frac{k!(N-k)!}{(pq)^k} \frac{p^x q^{N-x}}{x!(N-x)!} \right)^{1/2} K_k^p(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (2.30)$$

Здесь p — параметр, отвечающий средней вероятности «успеха», $q = 1 - p$, $K_k^p(x)$ — полином Кравчука k -го порядка, отвечающий заданному p .

Базисные функции на основе полиномов Кравчука находят применение для описания квантовых состояний частиц с произвольным спином [27].

Базисный ортонормированный набор функций на основе полиномов Шарлье позволяет моделировать многопараметрические распределения пуассоновского типа. Соответствующие распределения заданы в неотрицательных целых точках $x = 0, 1, 2, \dots$. В нулевом приближении рассматриваемое распределение есть обычное пуассоновское распределение. Базисные функции имеют вид

$$\varphi_k(x) = \left(\frac{\lambda^{k+x} e^{-\lambda}}{k! x!} \right)^{1/2} C_k^\lambda(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

Здесь λ — параметр, отвечающий среднему числу «успехов» (среднему значению случайной величины x), $C_k^\lambda(x)$ — полином Шарлье k -го порядка, отвечающий заданному λ .

Для иллюстрации на рисунке 1 приведен пример восстановления статистического распределения с использованием описанного выше метода. Видно очень близкое соответствие (практическое совпадение) между теоретическими распределениями (сплошные линии) и корневой оценкой (точки). Для сопоставления на том же рисунке приведены результаты, которые могут быть получены с использованием традиционных методов. Точность последних, как это видно из рисунка, невелика.

Математические свойства различных полиномов, рассматриваемых в настоящем разделе, хорошо известны [28].

Проведенные исследования показали также существенное преимущество описываемого здесь корневого подхода к восстановлению статисти-

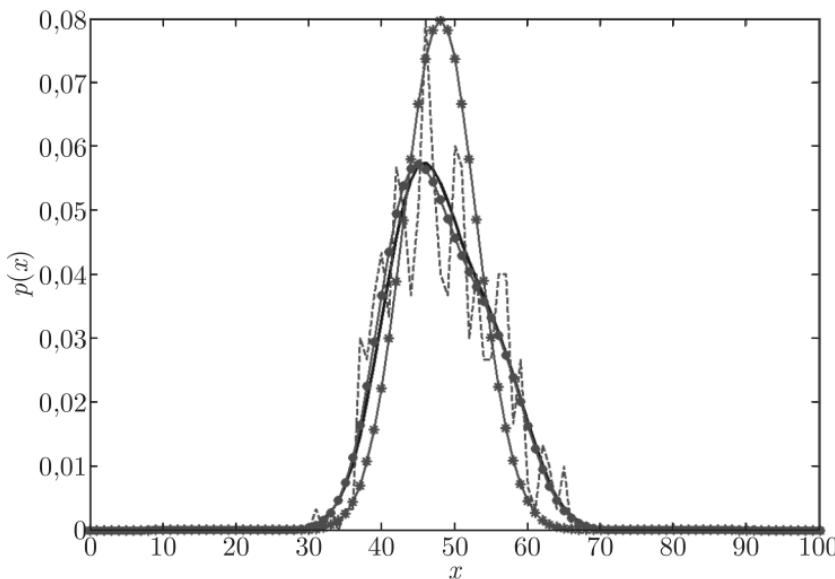


Рис. 1. Восстановление распределения, представляющего собой смесь в пропорции 2:1 биномиальных распределений с параметрами $p_1 = 0,45$ и $p_2 = 0,55$ соответственно ($N = 100$). Объем выборки 300. Сплошная линия — теоретическое распределение вероятностей, точки — корневая оценка с использованием базиса на основе полиномов Кравчука, звездочки — биномиальная оценка, штриховая линия — частотная оценка

ческих распределений по сравнению с ядерными оценками Розенблатта–Парзена и проекционными оценками Ченцова [23].

3. Унифицированный метод квантовой томографии, основанный на процедуре очищения

Настоящий раздел базируется на работе [29]. На основе процедуры дополнения смешанного квантового состояния до чистого ниже будет сформулирован общий метод статистического восстановления матрицы плотности для произвольных квантовых состояний. Будет получено универсальное статистическое распределение, описывающее точность восстановления квантовых состояний. Наконец, мы проиллюстрируем приложение развитой теории к анализу некоторых реальных протоколов квантовых измерений.

Наиболее успешно методы квантовых измерений применяются в задачах квантовой оптики. В последние годы различными исследовательскими группами было выполнено значительное количество успешных экспериментальных работ в этой области (см., например, [30–36]). Обзор работ в рассматриваемой области содержится в [37].

Рассматриваемый в настоящем разделе подход представляется весьма важным с теоретической точки зрения, поскольку задача оценивания смешанных состояний считается трудной [14]. Использование метода очищения смеси и математического аппарата полной матрицы информации Фишера позволяют явно разделить статистические флуктуации на два класса: физически существенные и несущественные. Последние связаны с произволом в выборе фаз компонентов смеси, неоднозначностью разделения смеси на чистые компоненты, а также с флуктуацией нормы состояния. Использование специального оператора проектирования позволяет очистить квантовое состояние от несущественных флуктуаций. Это важно с вычислительной точки зрения, поскольку алгоритм и численная процедура реконструкции квантового состояния теперь становятся хорошо обусловленными.

Заметим, что при других (неоптимальных) способах параметризации смешанного состояния наличие примеси «несущественных» флуктуаций создает в задачах высокой размерности неконтролируемые ошибки, делающие всю вычислительную процедуру некорректной. Контроль статистических флуктуаций, развитый в настоящей работе, впервые позволил сформулировать в общем виде универсальные характеристики точности, которые могут быть достигнуты в процедурах статистического восстановления квантовых состояний при наличии ограниченного объема результатов измерений. Основным полученным результатом такого рода является формулировка универсального многопараметрического распределения вероятностей для описания точности статистического восстановления квантовых состояний.

В разделе 3.1 будет описана процедура дополнения смешанного состояния до чистого посредством увеличения размерности рассматриваемого гильбертова пространства. Будет сформулирован метод статистического восстановления произвольных квантовых состояний (от чистых, представленных одной компонентой, до смеси из максимально возможного числа компонент).

В разделе 3.2 будет представлена общая теория статистических флуктуаций восстанавливаемого квантового состояния. Будет получено универсальное статистическое распределение, описывающее точность статистического восстановления квантовых состояний, которая может быть достигнута при заданном объеме статистического материала.

Наконец, в разделе 3.3 мы проиллюстрируем развитую теорию анализом некоторых протоколов квантовых измерений и сформулируем основные выводы.

3.1. Процедура очищения и алгоритм статистического восстановления квантовых состояний

Теория восстановления смешанных квантовых состояний может быть построена в полной аналогии с теорией восстановления чистых состояний, если воспользоваться известной процедурой дополнения смешанного состояния до чистого [5].

Пусть ρ — матрица плотности смеси в исходном гильбертовом пространстве $H^{(s)}$ размерности s . Будем говорить, что смешанное состояние имеет ранг r , если матрица плотности имеет r ненулевых собственных значений. Очевидно, что $1 \leq r \leq s$. Случай $r = 1$ отвечает чистому состоянию, а случай $r = s$ — смеси полного ранга.

Пусть p_j — ненулевые собственные значения матрицы плотности, а c_j — соответствующие собственные векторы, $j = 1, \dots, r$.

Процедура «очищения» смешанного состояния ранга r связана с переходом от исходного гильбертова пространства $H^{(s)}$ размерности s к гильбертovу пространству $H^{(rs)}$ размерности $r \cdot s$. Вместо исходной матрицы плотности ρ можно рассматривать «очищенный» вектор состояния длины $r \cdot s$:

$$|c\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1}c_1 \\ \vdots \\ \sqrt{p_r}c_r \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Указанное состояние, очевидно, можно представить в виде разложения Шмидта квантового состояния изучаемой системы, запутанного с окружением:

$$|c\rangle = \sum_{j=1}^r \sqrt{p_j}|e^j\rangle|c_j\rangle, \quad (3.2)$$

где $|e^j\rangle$ — ортонормированные базисные состояния окружения (столбцы длины r). Для смеси ранга r выберем базис в виде

$$|e^1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e^2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |e^r\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Набор векторов (3.3) может быть назван стандартным базисом окружения.

Известно, что эксперименты по статистическому восстановлению квантовых состояний сводятся к изучению совокупности взаимно-дополнительных квантовых процессов [11, 31, 32, 38, 39]. Каждому такому процессу соответствует одна строка протокола измерения. Пусть протокол состоит из m строк. Амплитуда отдельного квантового процесса может быть представлена в виде

$$M_j = X_j c, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4)$$

Если состояние чистое, т. е. является смесью ранга $r = 1$, то c — комплексный вектор состояния в исходном гильбертовом пространстве $H^{(s)}$ размерности s . В этом случае X_j — строка комплексной аппаратной матрицы длины s .

Обобщим величины, входящие в (3.4), на случай произвольных смешанных состояний. В этом случае c — «очищенный» вектор состояния (3.2) длины $r \cdot s$ в гильбертовом пространстве $H^{(rs)}$. Пусть X_j есть j -я строка аппаратной матрицы длины s . Путем добавления нулевых элементов создадим r строк длины $r \cdot s$ на основе строки X_j и базисных векторов окружения (3.3):

$$X_j^l = |e^l\rangle^+ \otimes X_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad l = 1, 2, \dots, r. \quad (3.5)$$

Каждая строка X_j^l действует только на «свою» l -ю компоненту смеси. При этом X_j^1 содержит строку X_j в качестве своих первых s элементов (остальные нули), X_j^2 содержит строку X_j в элементах с $s+1$ до $2s$ (остальные нули) и т. д.

Амплитуда квантового процесса M_j в (3.4) есть комплексное число. На ее основе строится наблюдаемая величина — интенсивность генерации событий (ожидаемое число событий в схеме регистрации в единицу времени)

$$\lambda_j = M_j^+ M_j = \langle c | \Lambda_j | c \rangle. \quad (3.6)$$

Здесь Λ_j — оператор интенсивности процесса.

Для чистого состояния Λ_j эрмитова матрица размерности $s \times s$:

$$\Lambda_j = X_j^+ X_j. \quad (3.7)$$

Оператор интенсивности (3.7) непосредственно обобщается на состояние смеси путем суммирования по ее компонентам

$$\Lambda_j = \sum_{l=1}^r X_j^{l+} X_j^l. \quad (3.8)$$

Для смешанных состояний ранга r оператор Λ_j представляется эрмитовой матрицей размерности $rs \times rs$.



Рис. 2. Общая схема эксперимента по измерению квантового состояния

Общая схема эксперимента по измерению квантового состояния представлена на рисунке 2. Блок приготовления задает источник, генерирующий представителей квантового статистического ансамбля. Блок селектирования обеспечивает выделение заданной проекции квантового состояния в соответствии с (3.4). Рассматриваемая функция реализуется посредством блока установки, который задает физические параметры измерения, а также время, в течение которого проводится измерение (время экспозиции). Наконец, блок регистрации обеспечивает необратимую регистрацию событий, возникающих в системе, причем число событий в единицу времени (частота событий) определяется формулой (3.6). Примеры конкретных протоколов измерения представлены в разделе 3.3.

Если время экспозиции j -й строки протокола равно t_j , то регистрируемое в эксперименте число событий k_j есть случайная величина, имеющая распределение Пуассона со средним $\lambda_j t_j$:

$$P(k_j) = \frac{(\lambda_j t_j)^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda_j t_j). \quad (3.9)$$

Экспериментатор, осуществляя квантовый протокол измерений из m строк, последовательно регистрирует m значений частот событий k_j , $j = 1, \dots, m$. Здесь каждому j соответствует конкретный набор параметров измерения, задающий селектирование определенной проекции квантового состояния. Задача статистического восстановления квантового состояния состоит в том, чтобы по имеющимся экспериментальным данным восстановить в некотором смысле наилучшим образом квантовое состояние. Одним из наиболее важных способов такого рода является метод максимального правдоподобия Фишера, кратко представленный в разделе 2.1.

Наша задача состоит в том, чтобы найти такой «очищенный» вектор состояния c вида (3.2), который обеспечивал бы максимум для функции правдоподобия, в нашем случае она задается произведением пуассоновских вероятностей по всем строкам протокола:

$$L = \prod_{j=1}^m \frac{(\lambda_j t_j)^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda_j t_j). \quad (3.10)$$

Необходимое условие экстремума функции (3.10) приводит к уравнению правдоподобия

$$Ic = Jc. \quad (3.11)$$

Здесь I и J — так называемые теоретическая и эмпирическая эрмитовы матрицы информации Фишера (размерности $rs \times rs$):

$$I = \sum_{j=1}^m t_j \Lambda_j, \quad J = \sum_{j=1}^m \frac{k_j}{\lambda_j} \Lambda_j. \quad (3.12)$$

Представленное уравнение правдоподобия впервые получено в работе [29]. Исследования, проведенные ранее в работах [11, 31, 32, 38], описывают частный случай, который формально соответствует модели первого ранга ($r = 1$).

Условие нормировки, автоматически содержащееся в уравнении правдоподобия (3.11), имеет вид

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j t_j = \sum_{j=1}^m k_j = n, \quad (3.13)$$

где n — общее число зарегистрированных событий.

Условие (3.13) связывает полное число наблюдаемых событий n с суммарным (по всем строкам протокола) их ожидаемым числом. В нашем подходе рассматриваемое условие заменяет обычно применяемое условие нормировки на единицу:

$$\langle c|c \rangle = 1.$$

Различные строки протокола квантовых измерений осуществляют измерения различных проекций квантового состояния. Важное свойство протокола измерения — его полнота.

Каждой строке X_j ($j = 1, \dots, m$) длины s сопоставим строку длины s^2 , которая является тензорным произведением $(X_j \otimes X_j^*)$ строки X_j

и комплексно сопряженной строки X_j^* . Припишем каждой такой строке B_j вес, определяемый соответствующим временем экспозиции t_j :

$$B_j = t_j \cdot X_j \otimes X_j^*. \quad (3.14)$$

Составим из таких строк матрицу B размерности $m \times s^2$, которую назовем матрицей измерений. Будем предполагать, что $m \geq s^2$.

Протокол является полным, если все s^2 сингулярных значений матрицы измерений B строго положительны: $\text{svd}(B) > 0$ (нет нулевых сингулярных значений). Такой протокол при достаточно высоком объеме выборки в каждой строке может обеспечить в принципе сколь угодно точное восстановление произвольного состояния (от чистого до смешанного состояния полного ранга). Ниже будем предполагать условие полноты выполненным.

«Очищенный» вектор состояния c , полученный методом максимального правдоподобия, отличается от точного «очищенного» вектора состояния c_0 . Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой оценки точности статистического восстановления квантовых состояний.

3.2. Точность восстановления квантовых состояний

Вещественное евклидово пространство удвоенной размерности $E^{(2rs)}$ — подходящая арена для того, чтобы описать характеристики точности восстановления состояний.

Переход от комплексного вектора состояния к действительному вектору удвоенной длины осуществляется по правилу

$$c \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Re}(c) \\ \text{Im}(c) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Теперь вектор состояния c — столбец действительных чисел длины $2rs$. Аналогичным образом задается преобразование амплитуды.

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Re}(M) \\ \text{Im}(M) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Теперь M не комплексное число, а столбец из двух действительных чисел.

Каждую, вообще говоря, комплексную строку X_j^l длины rs , в свою очередь, превратим в действительную матрицу, состоящую из двух действительных строк длины $2rs$ согласно правилу

$$X_j^l \rightarrow \begin{bmatrix} \text{Re}(X_j^l) & -\text{Im}(X_j^l) \\ \text{Im}(X_j^l) & \text{Re}(X_j^l) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Заметим, что мы не меняем обозначений при переходе от одного пространства к другому, что приводит к удобной унификации формул. Действительно, все представленные выше формулы (3.4)–(3.8), (3.11), (3.12), относящиеся к исходному гильбертовому пространству $H^{(rs)}$ размерности rs , остаются без изменений и в новом действительном евклидовом пространстве $E^{(2rs)}$ удвоенной размерности $2rs$.

Реконструированный вектор состояния, являющийся решением уравнения правдоподобия (3.11), основан на конечной случайной статистике регистрируемых событий и, таким образом, сам является случайной многопараметрической величиной. Отличие реконструированного вектора состояния от точного можно характеризовать как проявление статистических флуктуаций, связанных с фундаментальной вероятностной природой квантовых явлений. Инструмент для количественного описания уровня таких флуктуаций дает матрица полной информации, введенная в [11, 32, 38]. В рамках введенных выше обозначений она имеет вид

$$H = 2 \sum_j \frac{t_j(\Lambda_j c)(\Lambda_j c)^+}{\lambda_j}. \quad (3.18)$$

Матрица H есть действительная симметричная матрица размерности $2rs \times 2rs$.

Пусть dc — разность между точным и восстановленным методом максимального правдоподобия векторами состояния (в действительном евклидовом пространстве удвоенной размерности). Тогда уровень статистических флуктуаций можно описать посредством распределения хи-квадрат:

$$2\langle dc|H|dc \rangle = \chi^2(\nu_H), \quad (3.19)$$

где $\nu_H = (2s - r) \cdot r$.

В частном случае чистого состояния имеем $\nu_H = 2s - 1$, в то время как для смеси полного ранга $\nu_H = s^2$.

Кроме того, имеет место следующее равенство, играющее в нашем рассмотрении роль условия нормировки:

$$\langle c|H|c \rangle = 2n, \quad (3.20)$$

где n — полный ожидаемый объем выборки (по всем строкам протокола).

Равенство (3.19) показывает, что стоящий слева матричный элемент есть случайная величина, имеющая хи-квадрат распределение с $\nu_H = (2s - r) \cdot r$ степенями свободы.

Если протокол квантовых измерений полный, то для матрицы информации H из $2rs$ собственных значений $\nu_H = (2s - r) \cdot r$ строго положительны, а остальные r^2 точно равны нулю.

На основе введенной полной матрицы информации H может быть сформулировано универсальное статистическое распределение для описания точности статистического восстановления квантовых состояний. Алгоритм нахождения параметров искомого распределения удобно сформулировать на языке сингулярного разложения матриц (singular value decomposition — svd). Действительно, пусть svd-разложение матрицы информации (размерности $2rs \times 2rs$) есть

$$H = U_H S_H V_H^+. \quad (3.21)$$

Здесь U_H и V_H — унитарные матрицы, а S_H — диагональная неотрицательно определенная матрица.

Все r^2 столбцов матрицы U_H , отвечающие нулевым собственным значениям, объединим в матрицу Q_1 . Объединим матрицу Q_1 с действительным вектором состояния c из евклидова пространства (3.15) в единую матрицу G . Пусть матрица Q задает ортонормированный базис для матрицы G . Это означает, что $Q^+ Q = E$, где E — единичная матрица размерности $(r^2 + 1)(r^2 + 1)$. Столбцы матрицы Q покрывают то же самое пространство, что и столбцы матрицы G , причем число базисных векторов (число столбцов матрицы Q) равно рангу матрицы G .

Определим теперь проекционный оператор (проектор) формулой

$$P = E - Q Q^+, \quad (3.22)$$

где E — единичная матрица размерности $2rs \times 2rs$.

В то время как у чистого состояния имеется всего один ненаблюдаемый параметр — это глобальная фаза состояния (отсюда следует калибровочная инвариантность [11, 32, 38]), у состояния смеси таких параметров значительно больше. Заметим, что число действительных параметров, которыми описывается «очищенный» вектор состояния полного ранга ($r = s$), равно $2s^2$. Но только половина из них оказываются наблюдаемыми. Остальные параметры относятся к разряду ненаблюдаемых. Прежде всего, калибровочных фаз теперь не одна, а s (по числу компонент в смеси). Кроме того, можно показать, что имеется еще $s(s - 1)$ параметров, связанных с неоднозначностью разделения смеси на чистые компоненты. Рассматриваемое обстоятельство не таит в себе каких-либо трудностей. «Очищенный» вектор состояния определен с точностью до многопараметрического

произвола, однако это никак не влияет на искомую матрицу плотности восстановляемого квантового состояния, которая является инвариантом, не зависящим от указанного произвола.

Заметим, что в нашем подходе норма состояния имеет вполне определенный физический смысл. Квадрату нормы пропорционально полное по всем строкам ожидаемое число событий, и, таким образом, квадрат нормы может характеризовать интенсивность изучаемого физического взаимодействия (например интенсивность рождения бифотонов в процессе спонтанного параметрического рассеяния света в нелинейном кристалле). Если нас, однако, интересует статистическое распределение рассматриваемого ниже параметра согласия F между неизвестным квантовым состоянием и его реконструкцией, то оказывается, что рассматриваемая величина никак не зависит от нормы вектора состояния и в этом смысле флуктуации нормы становятся несущественными.

Введенный проектор (3.22) сконструирован так, чтобы уничтожить ненаблюдаемые нефизические флуктуации, отвечающие нулевым собственным значениям матрицы информации H , а также несущественную флуктуацию нормы. Тем самым обеспечивается редукция (сокращение) расстояния между восстановленным и теоретическим векторами состояния:

$$dc' = P dc. \quad (3.23)$$

Здесь dc' — вектор флуктуации состояния после редукции. Естественно ввести следующую величину, которую можно назвать «евклидовыми» потерями точности.

$$dF = 1 - F = \frac{\langle dc' | dc' \rangle}{\langle c | c \rangle} = \frac{\langle dc | P | dc \rangle}{\langle c | c \rangle}. \quad (3.24)$$

Замечательно, что введенная характеристика точности dF совпадает с величиной $(1 - F)$, где F — так называемая степень согласия (fidelity) между неизвестным квантовым состоянием и его реконструкцией. Для смешанных состояний рассматриваемая величинадается формулой Ульмана [5, 40]:

$$F = \left(\text{Tr} \sqrt{\rho_0^{1/2} \rho \rho_0^{1/2}} \right)^2, \quad (3.25)$$

где ρ_0 и ρ — теоретическая и восстановленная матрицы плотности соответственно.

Как уже отмечалось в разделе 2, в частном случае чистых нормированных на единицу состояний рассматриваемая характеристика определяется

формулой

$$F = |\langle c_0 | c \rangle|^2, \quad (3.26)$$

где c_0 и c — теоретический и восстановленный векторы состояния.

Естественность характеристики (3.25) связана с важной теоремой Ульмана [5, 40]. Согласно этой теореме, выражение (3.25) задает достижимый максимум от выражения (3.26) для всех возможных чистых векторов состояний c_0 и c , до которых могут быть дополнены смешанные состояния ρ_0 и ρ . Можно констатировать, что наш подход соответствует явному построению состояний, о которых говорится в теореме Ульмана.

Степень согласия имеет простую вероятностную интерпретацию. Если в качестве измерительного базиса для неизвестного состояния c_0 выбрать известный реконструированный вектор состояния c и ортогональное дополнение к нему, то F будет задавать вероятность совпадения неизвестного состояния с восстановленным (квантовая система, приготовленная в состоянии c_0 будет обнаружена при измерении в состоянии c с вероятностью F).

Рассмотрим теперь svd-разложение для проекционной матрицы

$$P = U_P S_P V_P^+. \quad (3.27)$$

Здесь U_P и V_P — унитарные матрицы, а S_P — диагональная неотрицательно определенная матрица. В соответствии с определением (3.22) для матрицы P из $2rs$ собственных значений ($r^2 + 1$) равны нулю, а остальные $(2s - r) \cdot r - 1$ равны единице.

Учтем, что ранг матрицы H равен $\nu_H = (2s - r) \cdot r$, а ранг матрицы P на единицу меньше $\nu_P = (2s - r) \cdot r - 1$. В соответствии с рангом матриц произведем некоторое сокращение их размеров. Диагональная матрица S_H после ее сокращения до размеров $\nu_H \times \nu_H$ перестанет быть особенной (будет существовать обратная матрица S_H^{-1}). Оставим в матрице U_H только первые ν_H столбцов, удалив остальные. Аналогично оставим в матрице U_P только первые ν_P столбцов. Введем матрицу размерности $\nu_P \times \nu_H$

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} U_P^+ U_H \sqrt{S_H^{-1}}. \quad (3.28)$$

Пусть D_L — столбец сингулярных значений матрицы L (длины ν_P).

Введем некоторый вектор d согласно формуле

$$d = \frac{D_L^2}{\langle c | c \rangle}. \quad (3.29)$$

Рассматриваемый вектор определяет искомое распределение точности. Потеря точности $1 - F$ оказывается случайной величиной, асимптотическое распределение которой можно представить в виде

$$1 - F = \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j \xi_j^2, \quad (3.30)$$

где $d_j \geq 0$ — неотрицательные коэффициенты, $\xi_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, \dots, j_{\max}$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, $j_{\max} = \nu_P = (2s - r)r - 1$. В частности, $j_{\max} = 2s - 2$ для чистых состояний и $j_{\max} = s^2 - 1$ для смешанных состояний полного ранга.

Рассматриваемое распределение является естественным обобщением распределения хи-квадрат. Последнее соответствует частному случаю $d_1 = d_2 = \dots = d_{j_{\max}} = 1$. Полученное распределение естественно назвать неоднородным хи-квадрат распределением. В рассматриваемом нами асимптотическом пределе параметры d_j оказываются обратно пропорциональными общему числу зарегистрированных событий n , т. е. $d_j \sim \frac{1}{n}$. Указанная зависимость позволяет легко осуществлять пересчет от одного объема выборки к другому.

Из (3.30) следует, что среднее значение потери точности равно

$$\langle 1 - F \rangle = \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j. \quad (3.31)$$

Нетрудно показать также, что дисперсия для потери точности есть

$$\sigma_F^2 = 2 \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j^2. \quad (3.32)$$

Рассмотрим важный частный случай. Пусть матрица, равная сумме по всем строкам протокола от произведений времен экспозиции t_j на операторы интенсивности Λ_j (3.7), пропорциональна единичной матрице E :

$$\sum_j t_j \Lambda_j = \sum_j t_j X_j^+ X_j = \text{const} \cdot E. \quad (3.33)$$

Протокол, удовлетворяющий условию (3.33), сводится к так называемому неортогональному разложению единицы [6, 13, 14]. Заметим, что в мате-

матической теории такие измерения рассматриваются в качестве наиболее общего расширения традиционных измерений фон Неймана, основанных на ортогональном разложении единицы. В то же время, реальные экспериментальные протоколы квантовых измерений зачастую не удовлетворяют условию (3.33). Резонность требования (3.33) основана на соображениях, связанных с сохранением полной вероятности. В реальных же экспериментах с использованием схемы регистрации событий (рисунок 2) экспериментатор настраивает установку на выделение, как правило, только одной проекции квантового состояния (при этом представители, отвечающие всем остальным проекциям, просто не регистрируются). Таким образом, реальные эксперименты (по техническим причинам) не обеспечивают регистрацию всех представителей квантового статистического ансамбля и в силу этого не связаны условием сохранения полной вероятности. Наш подход разработан для анализа произвольных реальных протоколов квантовых измерений, основанных на регистрации элементарных событий, и не ограничен требованием (3.33). Если, однако, рассматриваемое условие выполняется, то анализ протокола упрощается. Легко видеть, что в этом случае действительный евклидов вектор состояния удвоенной размерности (3.15) становится собственным вектором матрицы информации H . Этот вектор отвечает за флуктуацию нормы состояния, которая несущественна для распределения параметра согласия F . В рассматриваемом случае формула (3.28) приобретает наиболее простой вид.

$$L = \sqrt{\frac{S_H^{-1}}{2}}. \quad (3.34)$$

Здесь диагональная матрица S_H сокращена до размера $(\nu_H - 1) \times (\nu_H - 1)$ путем удаления не только всех нулевых собственных значений, но и собственного значения, отвечающего действительному вектору состояния (3.15) удвоенной размерности.

Рассмотрим частный случай состояния смеси, представляющей собой «белый шум» (все веса главных компонент смеси одинаковые). Пусть также квантовый томографический протокол сводится разложению единицы (удовлетворяет условию (3.33)). Тогда имеет место простая связь между вектором d размерности $s^2 - 1$, определяющим распределение потерь точности, и вектором сингулярных значений матрицы измерений B (из вектора сингулярных значений размерности s^2 следует удалить самое большое значение, отвечающее за нормировку). Обозначим значком b редуцированный вектор сингулярных значений размерности $s^2 - 1$. Искомая связь между

компонентами векторов имеет вид

$$d_j = \left(\frac{b_{\max}}{b_j} \right)^2 \frac{\text{const}}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, s^2 - 1. \quad (3.35)$$

Здесь b_{\max} — максимальное значение вектора b , n — объем выборки. Таким образом, потери точности оказываются обратно пропорциональными квадрату сингулярных значений и суммарному объему наблюдений. Коэффициент пропорциональности в формуле (3.34) зависит от конкретного протокола.

Заметим, что для восстановления чистого состояния требование完整性 протокола, вообще говоря, не обязательно. Напротив, такое требование является ключевым при восстановлении состояния белого шума. Можно констатировать, что протокол, являющийся полным для состояния белого шума, будет таковым и для любого другого состояния.

Как следует из (3.35), компонента, вносящая наибольший вклад в потери точности, имеет следующее значение:

$$d_{\max} = \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right)^2 \frac{\text{const}}{n}. \quad (3.36)$$

Представленный результат раскрывает ключевую роль числа обусловленности, которое определяется как отношение максимального сингулярного значения к минимальному

$$\text{cond}(B) = \frac{b_{\max}}{b_{\min}}. \quad (3.37)$$

Важная особенность статистического восстановления квантовых состояний заключается в том, что при оценке неизвестного квантового состояния ранг модели r , вообще говоря, не может быть зафиксирован заранее, а должен быть определен по самим экспериментальным данным. Рассматриваемой цели служит алгоритм проверки адекватности для модели смешанного состояния ранга r . Пусть k_j — число событий, зарегистрированных схемой регистрации событий для j -й строки протокола ($j = 1, \dots, m$). Для оценки адекватности модели рассмотрим следующую величину:

$$\chi_r^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(k_j - \lambda_j t_j)^2}{\lambda_j t_j}. \quad (3.38)$$

Здесь λ_j — интенсивности генерации событий, полученные в результате решения уравнения правдоподобия. Если модель смешанного состояния ранга r адекватна, то, согласно классическому результату Фишера [18, 19],

рассматриваемая характеристика должна иметь хи-квадрат распределение с числом степеней свободы равным $\nu = m - \nu_P - 1 = m - (2s - r)r$. Здесь, согласно изложенному выше, ν_P определяет число параметров состояния, оцениваемых по экспериментальным данным методом максимального правдоподобия. Заметим, что численное моделирование подтверждает справедливость рассматриваемого здесь критерия (см. раздел 3.3).

Подбор адекватного ранга r может, например, происходить следующим образом. Начинаем с модели чистого состояния ($r = 1$). Если, согласно критерию (3.38), рассматриваемая модель оказывается неадекватной, то переходим к более сложной модели ($r = 2$ и т. д., пока модель не станет адекватной). Выбор модели с наименьшим возможным числом компонент означает, что компоненты более высокого порядка, даже если они существуют, не имеют статистически значимого веса при заданном объеме экспериментальных данных.

Если неадекватной оказывается модель самого высокого ранга ($r = s$), то это означает наличие систематических инструментальных ошибок в установках параметров и данных. Заметим, однако, что когда объем статистики становится достаточно большим, инструментальные погрешности неизбежно начинают превалировать над статистическими флуктуациями. В результате в реальных экспериментах, асимптотически при неограниченном увеличении объема выборки, потери точности не стремятся к нулю, как в идеальной модели, а демонстрируют хотя бы и малые, но конечные значения. Эти «остаточные» потери точности характеризуют качество экспериментов по статистическому восстановлению квантовых состояний [32].

3.3 Примеры численного статистического моделирования

Развитая выше теория позволяет анализировать произвольные протоколы статистического восстановления квантовых состояний для экспериментов, основанных на использовании системы регистрации элементарных событий. Подробные описания различных протоколов такого рода можно найти в [30–36].

В качестве примера проанализируем два простых квантовых протокола. Первый из них представляет протокол измерения однокубитового квантового состояния. Аппаратная матрица протокола, имеющая 6 строк и 2 столбца, задается формулой (1.7). Считаем, для простоты, что каждой строке отвечает одно и тоже время экспозиции, условно принятое за единицу.

Сингулярные значения матрицы B равны соответственно $\sqrt{3}, 1, 1, 1$. Отсутствие нулевых сингулярных значений говорит о полноте протокола.

Если не считать первого из этих значений (оно отвечает за нормировку), то все остальные сингулярные значения оказываются равными. Это отвечает наилучшей обусловленности задачи.

Протокол становится неполным, а матрица B плохо обусловленной, если исключить измерения на одну из трех осей. В этом случае сингулярные значения матрицы B оказываются равными соответственно $\sqrt{2}, 1, 1, 0$. Наличие нулевого значения говорит о неполноте протокола. В этом случае смешанные состояния общего вида заведомо не могут быть восстановлены ни при каком, сколь угодно высоком, объеме выборки.

Для описания второго протокола удобно представить, что имеется двухкубитовое состояние, образованное двумя удаленными друг от друга частицами со спином $\frac{1}{2}$. Измерения производятся двумя экспериментаторами (Алисой и Бобом), причем каждый измеряет свою частицу. Пусть a_1, a_2, a_3 — три взаимно-ортогональные оси, на которые производит измерения Алиса, есть: $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1)$, а b_1, b_2, b_3 — три взаимно-ортогональные оси, на которые производит измерения Боб, есть: $b_1 = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$, $b_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $b_3 = (0, 0, 1)$. Четыре направления a_1, a_2, b_1, b_2 задают классическую схему измерений, демонстрирующую нарушение неравенства Белла при измерении синглетного состояния [5, 6, 41]. Направление $a_3 = b_3$ добавлено для того, чтобы протокол стал полным с точки зрения задачи статистического восстановления квантовых состояний [41]. Рассматриваемый протокол может быть назван расширенным протоколом Белла. Он образован 36 строками (9 распределений по 4 значения в каждом, каждое распределение возникает при измерении пар направлений a_i, b_j , где $i, j = 1, 2, 3$). Как и для первого протокола, предположим, что время экспозиции всех строк одинаково. В рассматриваемом случае матрица B имеет 16 сингулярных значений: 3 (отвечает за нормировку состояния), $\sqrt{3}$ (6 значений), 1 (9 значений). Отсутствие нулевых значений говорит о полноте протокола. Заметим, что различные сингулярные значения, отвечающие за флуктуации точности восстановления, отличаются друг от друга не более чем в $\sqrt{3}$ раз, что говорит о довольно хорошей обусловленности задачи.

Оба протокола содержат в себе некоторую избыточность, что позволяет применить к ним критерий адекватности (3.38). Число степеней свободы соответствующего распределения хи-квадрат в первом случае равно двум ($6 - 4 = 2$), а во втором — двадцати ($36 - 16 = 20$).

Результаты численного статистического моделирования для некоторых случайным образом сгенерированных состояний представлены на рисунке 3. Ожидаемый объем наблюдений в каждом численном эксперименте

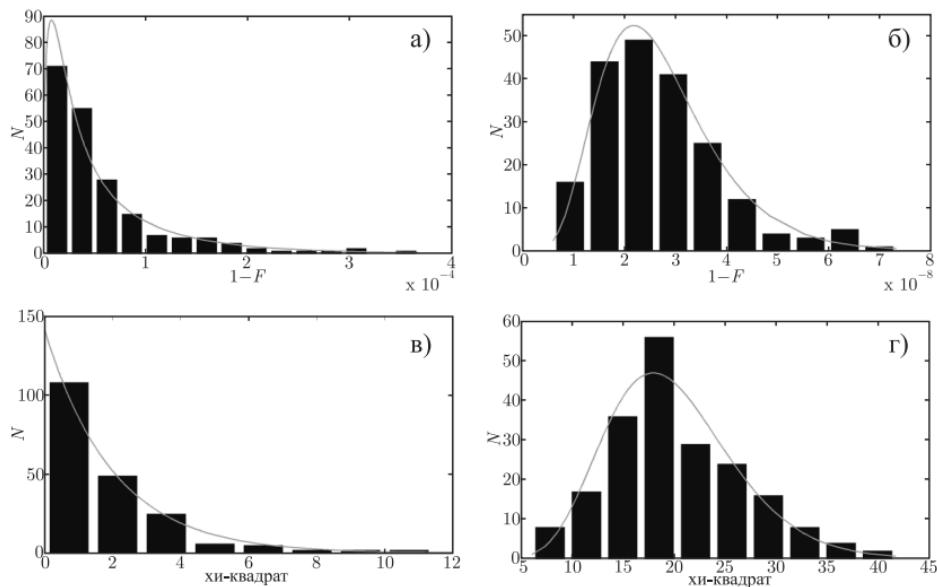


Рис. 3. Сравнение теории статистического восстановления квантовых состояний (кривые) с результатами численного моделирования (гистограммы) на примере однокубитовой и двухкубитовой систем; вверху (а и б) — распределение потерь точности, внизу (в и г) — проверка адекватности посредством критерия хи-квадрат; рисунки слева (а и в) относятся к однокубитовому состоянию, справа (б и г) — к двухкубитовому состоянию

составлял $n = 10^6$ для однокубитового состояния и $n = 10^9$ для двухкубитового состояния. Всего было проведено по 200 экспериментов для каждого протокола. Представленные на рисунке данные говорят о хорошем согласии между развитой теорией и результатами численного моделирования (что характеризуется высоким уровнем значимости соответствующих статистических гипотез). Другие численные эксперименты с конкретными физически интересными состояниями, а также с состояниями, сгенерированными случайным образом, также свидетельствуют об адекватности и эффективности унифицированной теории статистического восстановления квантовых состояний.

Таким образом, в настоящем разделе на основе процедуры очищения смеси развит общий формализм, позволяющий осуществлять статистическое восстановление произвольных чистых и смешанных квантовых состояний. Получено универсальное многопараметрическое статистическое

распределение для параметра согласия Ульмана, характеризующего точность статистической реконструкции. Полученное распределение может быть охарактеризовано как неоднородное распределение хи-квадрат. Было продемонстрировано, что выводы теоретического исследования хорошо согласуются с результатами статистического моделирования. Развитый подход может быть использован для разработки и реализации элементов и устройств квантовой информатики.

Эффективность разработанных методов и алгоритмов восстановления квантовых состояний была подтверждена в работах [31–34], выполненных совместно с группой профессора С. П. Кулика из Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Уровень точности восстановления квантовых состояний в рассматриваемых экспериментах значительно превосходит уровень других известных экспериментов.

4. Корневое квантование. Моделирование классических статистических систем квазиквантовым методом

Важное значение для реализации корневого подхода имеет адекватный выбор базисных функций разложения. В классической задаче восстановления плотности распределения, как было видно из рассмотрения, проведенного в разделе 2, базис корневого разложения может быть произвольным. Другими словами, в классической задаче объективно отсутствует какой-либо выделенный набор функций или состояний. Иначе обстоит дело в случае постановки статистической задачи в квантовой механике. Здесь естественный выделенный базис для разложения задают стационарные решения уравнения Шредингера, что с точки зрения квантовой теории совершенно естественно.

Интересно, однако, то, что между корневым характером разложения плотности и квантовой механикой существует определенная внутренняя связь. Раскрытию этой связи и посвящен настоящий раздел. Оказывается, что требование корневого характера разложения плотности распределения может рассматриваться как некоторое условие квантования (рецепт, позволяющий преобразовать классическую механику в квантовую) [24, 38, 39].

Корневое статистическое квантование основано на следующей схеме. Переход от динамических к статистическим закономерностям в механике предполагает, что вместо строго детерминированных координат \vec{x} рассматривается некоторая плотность $P(x)$. Предполагается, что рассматриваемая плотность допускает корневое разложение (которое, как было видно из результатов раздела 2, является выделенным по отношению к любым другим

разложениям). Далее, со статистической точки зрения естественно предположить, что законы классической механики остаются справедливыми только в среднем. Оказывается, что требование корневого характера разложения совместно с требованием выполнения в среднем законов классической механики позволяют из всех возможных статистических механических моделей выделить квантовую механику.

Во избежание недоразумений отметим, что речь не идет о выводе квантовой механики из классической на основе каких-либо статистических соображений. Предметом рассмотрения является процедура (рецепт) для перехода от классического описания к квантовому. Корневое статистическое квантование представляет собой определенную альтернативу другим известным методам квантования, таким как метод канонического квантования Дирака [42, 43], который связан с формальным введением нового алгебраического объекта — квантовых скобок Пуассона взамен классическим, и метод квантования Фейнмана [44, 45] с помощью интегралов по траекториям.

4.1. Корневой подход к исследованию механических систем

Рассмотрим самый обычный «школьный» второй закон Ньютона:

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \vec{x}}. \quad (4.1)$$

Предположим, что фигурирующие в этом законе ускорение и сила есть некоторые средние величины. Усреднение обеспечивается посредством введения некоторой плотности распределения $P(x)$:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\int P(x) \vec{x} dx \right) = -\frac{1}{m} \left(\int P(x) \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} dx \right). \quad (4.2)$$

Потребуем теперь, чтобы введенная плотность распределения допускала корневое разложение. Пусть всего имеется s компонент, т. е.

$$P(x) = |\psi^{(1)}(x)|^2 + |\psi^{(2)}(x)|^2 + \dots + |\psi^{(s)}(x)|^2, \quad (4.3)$$

где

$$\psi^{(l)}(x) = c_j^{(l)}(t) \varphi_j(x), \quad l = 1, \dots, s. \quad (4.4)$$

Предположим, что зависимость коэффициентов разложения от времени определяется гармоническими функциями:

$$c_j^{(l)}(t) = c_{j0}^{(l)} \exp(-i\omega_j t). \quad (4.5)$$

Базисные функции разложения и частоты заранее неизвестны. Их следует определить таким образом, чтобы выполнялись усредненные уравнения движения. Покажем, что модель, задаваемая уравнениями (4.2)–(4.5) приводит к стационарным функциям и частотам уравнения Шредингера.

Подставляя (4.3)–(4.5) в (4.2), получим

$$\begin{aligned} m(\omega_j - \omega_k)^2 \sum_{l=1}^s c_{j0}^{(l)} c_{k0}^{*(l)} \langle k | \vec{x} | j \rangle \exp(-i(\omega_j - \omega_k)t) = \\ = \sum_{l=1}^s c_{j0}^{(l)} c_{k0}^{*(l)} \langle k | \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} | j \rangle \exp(-i(\omega_j - \omega_k)t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь, как обычно, по повторяющимся индексам j и k предполагается суммирование.

Матричные элементы в выражении (4.6) определяются формулами:

$$\langle k | \vec{x} | j \rangle = \int \varphi_k^*(x) \vec{x} \varphi_j(x) dx, \quad (4.7)$$

$$\langle k | \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} | j \rangle = \int \varphi_k^*(x) \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \varphi_j(x) dx. \quad (4.8)$$

Для того чтобы соотношение (4.6) выполнялось в любой момент времени для произвольных начальных амплитуд, следует потребовать выполнения равенства левых и правых частей отдельно для каждого матричного элемента, поэтому

$$m(\omega_j - \omega_k)^2 \langle k | \vec{x} | j \rangle = \langle k | \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} | j \rangle. \quad (4.9)$$

Последнее выражение представляет собой матричное уравнение Гейзенберга для квантовой динамики в энергетическом представлении. Базисные функции и частоты, удовлетворяющие соотношениям (4.9), есть стационарные состояния и частоты квантовой системы (в соответствии с эквивалентностью картин Гейзенберга и Шрёдингера).

Действительно, образуем диагональную матрицу из частот системы ω_j . Рассматриваемая матрица будет эрмитовой в силу того, что частоты — действительные числа. Эта матрица будет представлением некоторого эрмитова оператора, собственные значения которого суть ω_j , т. е.

$$\hat{\Omega}|j\rangle = \omega_j|j\rangle. \quad (4.10)$$

Найдем явный вид искомого оператора частоты $\widehat{\Omega}$. В силу (4.10) матричное соотношение (4.9) можно переписать в виде операторного уравнения

$$[\widehat{\Omega}[\widehat{\Omega}, \vec{x}]] = \frac{1}{m}\widehat{\partial}U, \quad (4.11)$$

где $\widehat{\partial} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ — оператор дифференцирования, $[]$ — коммутатор.

Выражение, стоящее в правой части (4.11), представим в виде некоторого коммутатора:

$$\frac{1}{m}\widehat{\partial}U = \left[\frac{1}{\hbar}U, -\frac{\hbar}{m}\widehat{\partial} \right],$$

где \hbar — произвольная константа, аналогичная постоянной Планка (ее выбор обсуждается ниже).

Рассматриваемый коммутатор, очевидно, не изменится, если к потенциальной составляющей $\frac{1}{\hbar}U$ добавить произвольную функцию от оператора производной $F_1(\widehat{\partial})$, т. е.

$$\frac{1}{m}\widehat{\partial}U = \left[\frac{1}{\hbar}U, -\frac{\hbar}{m}\widehat{\partial} \right] = \left[F_1(\widehat{\partial}) + \frac{1}{\hbar}U, -\frac{\hbar}{m}\widehat{\partial} \right].$$

Аналогичным образом имеем:

$$-\frac{\hbar}{m}\widehat{\partial} = \left[-\frac{\hbar}{2m}\widehat{\partial}^2, \vec{x} \right] = \left[-\frac{\hbar}{2m}\widehat{\partial}^2 + F_2(\vec{x}), \vec{x} \right],$$

где $F_2(\vec{x})$ — произвольная функция от координат.

Таким образом:

$$[\widehat{\Omega}[\widehat{\Omega}, \vec{x}]] = \left[F_1(\widehat{\partial}) + \frac{1}{\hbar}U \left[-\frac{\hbar}{2m}\widehat{\partial}^2 + F_2(\vec{x}), \vec{x} \right] \right].$$

Последнее соотношение оказывается согласованным, если положить:

$$F_1(\widehat{\partial}) = -\frac{\hbar}{2m}\widehat{\partial}^2, \quad F_2(\vec{x}) = \frac{1}{\hbar}U.$$

Окончательно находим, что решением уравнения (4.11) является оператор:

$$\widehat{\Omega} = -\frac{\hbar}{2m}\widehat{\partial}^2 + \frac{1}{\hbar}U(x). \quad (4.12)$$

Для того чтобы слагаемые в (4.12) имели одинаковую размерность, произвольная константа \hbar должна иметь размерность постоянной Планка (эрг·с).

Вместо оператора частоты $\widehat{\Omega}$ в квантовой теории принято использовать гамильтониан \widehat{H} .

$$\widehat{H} = \hbar \widehat{\Omega} = -\frac{\hbar^2}{2m} \widehat{\partial}^2 + U(x). \quad (4.13)$$

Собственные значения гамильтониана согласно (4.10) есть

$$\widehat{H}|j\rangle = \hbar\omega_j|j\rangle. \quad (4.14)$$

Таким образом, если потребовать, чтобы корневая оценка плотности удовлетворяла в среднем классическим уравнениям движения, то базисные функции и частоты корневого разложения уже не могут быть произвольными, а должны представлять собой соответственно собственные функции и собственные значения гамильтониана системы.

Рассмотрим теперь матрицу плотности, элементы которой определим формулой:

$$\rho_{jk} = \sum_{l=1}^s c_j^{(l)} c_k^{*(l)} = \sum_{l=1}^s c_{j0}^{(l)} c_{k0}^{*(l)} \exp(-i(\omega_j - \omega_k)t). \quad (4.15)$$

На основе представленных выше результатов нетрудно получить уравнение для динамики матрицы плотности, называемое обычно уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\widehat{H}, \widehat{\rho}]. \quad (4.16)$$

С использованием полученного выражения (4.13) для гамильтониана уже нетрудно получить операторные представления для других динамических величин. Например, определение импульса можно ввести на основе следующей легко проверяемой цепочки равенств:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \left(\int P(x) \vec{x} dx \right) &= \\ &= -im(\omega_j - \omega_k) \sum_{l=1}^s c_{j0}^{(l)} c_{k0}^{*(l)} \langle k | \vec{x} | j \rangle \exp(-i(\omega_j - \omega_k)t) = \\ &= \frac{im}{\hbar} \sum_{l=1}^s \langle \psi^{(l)} | \widehat{H}x - x\widehat{H} | \psi^{(l)} \rangle = \sum_{l=1}^s \langle \psi^{(l)} | \widehat{p} | \psi^{(l)} \rangle = \text{Tr}(\widehat{p}\widehat{\rho}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где матрица плотности смеси есть

$$\hat{\rho} = \sum_l |\psi^{(l)}\rangle\langle\psi^{(l)}|. \quad (4.18)$$

В выражении (4.17) суммирование по индексам j и k предполагается автоматически, сумма по компонентам смеси (индекс l) выписана явно.

Первое из представленных равенств непосредственно следует из определения корневой оценки плотности, при получении второго равенства мы учли (4.14), наконец, последние два равенства следуют из определения импульса (в нерелятивистской теории оператор импульса должен быть определен таким образом, чтобы его среднее значение совпадало с произведением массы на среднюю скорость).

Из соотношения (4.17) с необходимостью вытекает следующее определение импульса:

$$\hat{p} = \frac{im}{\hbar} [\hat{H} \vec{x}] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}}. \quad (4.19)$$

Заметим, что выражения для операторов наблюдаемых величин мы не постулируем (как это делают при стандартном изложении квантовой механики), а выводим как необходимые следствия корневых статистических оценок.

Соотношения, согласно которым уравнения классической механики выполняются в среднем и для квантовых систем, называют уравнениями Эренфеста [46]. Самих этих уравнений, конечно, недостаточно для описания квантовой динамики. Как было показано выше, дополнительное условие, которое позволяет преобразовать классическую механику в квантовую (т. е. условие квантования), есть, по существу, требование корневого характера плотности.

Таким образом, для того чтобы статистическое описание было устойчивым, целесообразно исходить из корневого разложения для плотности распределения. С другой стороны, для того чтобы корневое разложение было согласовано с законами механики (имеется в виду согласование в среднем), в качестве базисных функций необходимо выбрать собственные функции оператора энергии (гамильтониана), а в качестве частот соответствующие собственные значения. Образно говоря, не существует никакого другого регулярного статистического метода, кроме корневого, и не существует никакой другой регулярной статистической механики, кроме квантовой.

В реальных задачах квантовой механики, численное значение постоянной Планка выбрано самой природой. В результате такого выбора собственные значения оператора частоты $\hat{\Omega}$, например в атомной физике, оказываются совпадающими с действительными атомными частотами. Квантование энергий и состояний микрообъектов, с информационной точки зрения,

приводит к появлению простых стандартизованных состояний, способных выступать в роли элементарных информационных «кирпичиков». Например, несмотря на многообразие атомных уровней, нередко взаимодействие атома с лазерным излучением может быть описано в рамках модели двухуровневого атома [47], когда атом оказывается представленным всего двумя энергетическими уровнями (условно называемыми «основным» и «возбужденным»); тем самым атом выступает в роли кубита.

Рассмотрим теперь каким образом полученные результаты могут быть использованы для моделирования классических статистических систем, описываемых лиувиллиевской динамикой в фазовом пространстве. Общепризнано, что переход от квантовой механики к классической может быть символически описан посредством устремления постоянной Планка к нулю ($\hbar \rightarrow 0$). Однако, например, для системы, совершающей финитное движение в некоторой потенциальной яме U , при устремлении постоянной Планка к нулю внутри этой ямы возникает бесконечное число энергетических уровней и, соответственно, необходим неограниченный информационный ресурс для учета бесконечного числа базисных состояний. Допустим, что у нас имеется только ограниченный вычислительный ресурс, достаточный для учета, например, не более чем s базисных функций. Тогда значение постоянной Планка следует выбрать из оптимизационных соображений. Действительно, если значение \hbar выбрать слишком малым, то все s первых уровней окажутся на самом дне ямы и соответствующий набор базисных функций будет неадекватным для описания движения в конечной области пространства. С другой стороны, если значение \hbar выбрать слишком большим, то, напротив, внутри ямы окажется слишком малое число уровней или таких уровней не будет вовсе. Ясно, что и такой базисный набор, состоящий в основном из состояний, отвечающих инфинитному движению, также будет неоптимальным. Очевидно, что оптимальный выбор постоянной Планка \hbar должен быть таким, чтобы область пространственной локализации s первых уровней приближенно совпадала с областью движения системы. Как показывают практические расчеты, точность такого квазиквантового моделирования классической статистической системы оказывается очень высокой и при этом меняется очень слабо при варьировании постоянной Планка в широких пределах в окрестности некоторого оптимального значения. Например, точность моделирования изменится не сильно, если постоянную Планка выбрать в два раза большей или в два раза меньшей по сравнению с соответствующим оптимальным значением.

Выбор первых s базисных функций отвечает приближению s -мерного гильбертого пространства. В этом пространстве способно «разместиться» до s компонент плотности распределения, соответствующая матрица плот-

ности имеет размерность $s \times s$ и описывается, как следует из результатов раздела 3, посредством $s^2 - 1$ действительных параметров. Для каждой из s компонент, как следует из проведенного выше исследования, в среднем выполняются законы классической механики. Образно говоря, компоненты смеси играют роль нечетких крупных частиц для математического моделирования статистической системы. Динамика компонент смеси — «крупных частиц» учитывается автоматически посредством задания квантовомеханических базисных функций и частот. Заметим, что, как следует из проведенного выше анализа, рассматриваемый подход является оптимальным, поскольку любой другой выбор «крупных частиц» приведет к их нерегулярной динамике, которая не может быть описана посредством задания конечного числа базисных функций и частот.

Резюмируя сказанное, можно сделать следующий вывод. Корневой подход может рассматриваться как метод статистического моделирования классических механических систем с использованием ограниченного информационного ресурса. Постоянная Планка при этом может рассматриваться как оптимизационный параметр, который следует согласовать с объемом имеющегося вычислительного ресурса, задаваемого числом базисных функций.

Пример квазикvantового моделирования классической статистической системы представлен в следующем разделе.

4.2. Иллюстрация квазикvantового метода моделирования

Рассматриваемый иллюстративный пример посвящен изучению статистической динамики ансамбля классических частиц, движущихся в потенциальной яме Пешля–Теллера. Соответствующий потенциал задается следующей формулой [42, 48]:

$$U(x) = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2(x/a)} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{\lambda(\lambda - 1)}{\operatorname{ch}^2(x/a)}. \quad (4.20)$$

Здесь безразмерный параметр λ характеризует глубину потенциальной ямы.

Параметры U_0 и a есть классические заданные величины, характеризующие глубину потенциальной ямы и ее пространственный масштаб. Переход к параметру λ задает значение эффективной постоянной Планка и, соответственно, определяет густоту квантовых состояний в области локализации системы.

Рассматриваемая задача допускает точное квантовомеханическое решение [42, 48]. Ограничимся рассмотрением состояний дискретного спек-

тра (т.е. связанных состояний, отвечающих отрицательной или нулевой энергии). Соответствующие энергетические уровни есть

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}(\lambda - 1 - n)^2, \quad (4.21)$$

где $n = 0, 1, \dots, n_{\max}$.

Заметим, что связанным состояниям отвечает условие

$$n_{\max} \leq (\lambda - 1).$$

Волновые (ненормированные) функции стационарных состояний, выраженные через гипергеометрическую функцию, есть

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\text{ch}^{(\lambda-1-n)}(x/a)} F \left[-n, 2\lambda - 1 - n, \lambda - n, \frac{1}{2}(1 - \text{th}(x/a)) \right], \quad (4.22)$$

где $-\infty < x < \infty$.

Другая форма записи (через полиномы Гегенбауэра, являющиеся частной формой полиномов Якоби):

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\text{ch}^{(\lambda-1-n)}(x/a)} C_n^{(\lambda-n-1/2)}(\text{th}(x/a)). \quad (4.23)$$

Важно отметить, что и классическая механическая задача, отвечающая потенциалу Пешля–Теллера, допускает простое аналитическое решение. Мы не будем выписывать это решение, предоставив читателю найти его в качестве упражнения. Наличие аналитического решения позволяет представить точную динамику плотности распределения в фазовом пространстве.

В качестве инструмента для преобразования начального классического распределения в фазовом пространстве в квазиквантовую матрицу плотности может быть использована функция Вигнера. Заметим, что, строго говоря, такое преобразование всегда, за исключением гауссова распределения, приводит к возникновению нефизических компонент матрицы плотности с отрицательными весами. Вес этих компонент, однако, оказывается пренебрежимо малым в силу малости эффективной постоянной Планка (в рассмотренном здесь примере относительный суммарный вес отрицательных компонент был порядка 10^{-7}).

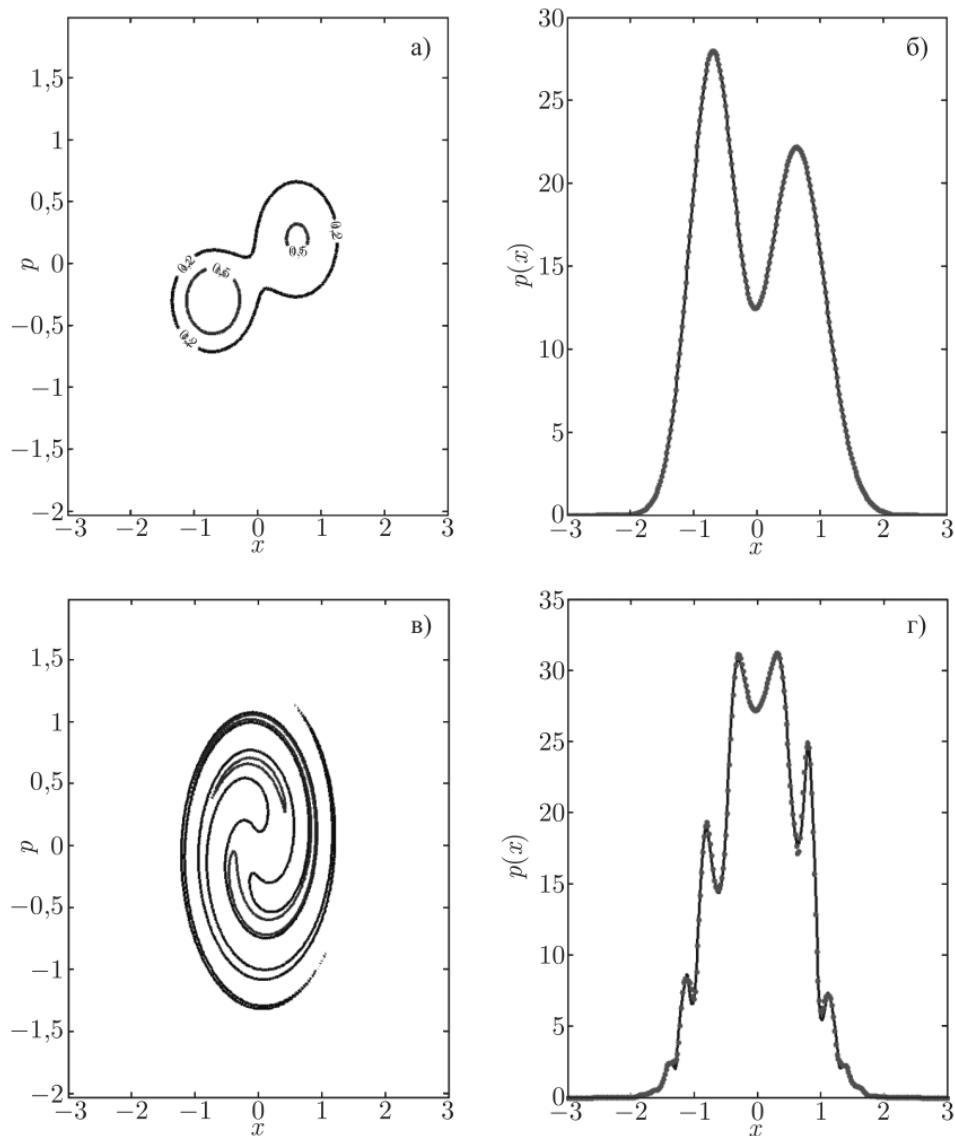


Рис. 4. Представление классического статистического ансамбля в два различных момента времени: а) и б) отвечают нулевому моменту времени, в) и г) соответствуют конечному моменту времени, когда произошло большое число колебаний. На рисунке а) представлены две изолинии плотности в фазовом пространстве в начальный момент времени, на рисунке в) — те же изолинии в конечный момент времени. На рисунках б) и г) представлена координатная зависимость ненормированной плотности, сплошные кривые отвечают классическому расчету, точки — квазиквантовому

На рисунке 4 представлены результаты классического и квазиквантового рассмотрения задачи для некоторого статистического ансамбля, конкретные параметры которого не имеют существенного значения для целей нашей иллюстрации. Моделирование осуществлялось с использованием 100 первых базисных функций ($s = 100$). Из кривых на рисунках б) и г) видно хорошее согласие между классическим и квазиквантовым расчетами для координатной зависимости плотности; обе кривые на рисунке г) слажены методом скользящих средних для удаления несущественных мелкомасштабных флюктуаций, исчезающих при усреднении по «физически бесконечно малому объему». Иллюстрация, представленная на обложке настоящей книги, есть цветной аналог рис. 4в.

Предложенный метод особенно эффективен для решения самосогласованных задач физики заряженной плазмы и теории гравитационных систем (соответствующее исследование будет опубликовано в отдельной работе).

Литература

- [1] Zeilinger A. The message of the quantum // Nature. 2005. Vol. 438. P. 743.
- [2] Zeilinger A. A Foundational Principle for Quantum Mechanics // Foundations of Physics. 1999. Vol. 29, № 4. P. 631–643.
- [3] Kofler J., Zeilinger A. The Information Interpretation of Quantum Mechanics and the Schrödinger Cat Paradox // Article in Sciences et Avenir Hors-Série. Le paradoxe du chat de Schrödinger. 2006. October/November (№ 148).
- [4] Валиев К. А., Кокин А. А. Квантовые компьютеры: надежда и реальность. Ижевск: РХД, 2001. 352 с.
- [5] Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация / пер. с англ. под ред. М. Н. Вялого и П. М. Островского; предисловие К. А. Валиева. М.: Мир, 2006. 824 с.
- [6] Холево А. С. Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО. 2002, 128 с.
- [7] Физика квантовой информации. Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления / под. ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера; пер. с англ. под ред. С. П. Кулика и Т. А. Шмаонова. М.: Постмаркет, 2002. 376 с.

- [8] Neumann J. von Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Springer, 1932. См. перевод: Нейман И. фон. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 368 с.
- [9] Бор Н. Избранные научные труды: в 2 т. М.: Наука, 1971. Т. 2. 675 с.
- [10] Bohr N. Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics // Albert Einstein: Philosopher-Scientist / ed. P. A. Schilp. P. 200–241. Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois, 1949. Перевод на русский язык: Бор Н. Дискуссия с Эйнштейном по проблемам теории познания в атомной физике // Избранные научные труды в 2 томах. М.: Наука, 1971. Т. 2. С. 399–433.
- [11] Богданов Ю. И. Многопараметрические статистические модели в задачах квантовой информатики // Труды ФТИАН. М.: Наука, 2005. Т. 18. с. 91–118.
- [12] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
- [13] Холево А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. 2-е изд., доп. М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 410 с.
- [14] Холево А. С. Статистическая структура квантовой теории. Ижевск: Инт компьютер. исслед., 2003. 192 с.
- [15] Богданов А. Ю., Богданов Ю. И., Валиев К. А. Информация Шмидта и запутанность квантовых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2007. № 1. с. 37–48; LANL Report quant-ph/0512062.
- [16] Fisher R. A. On an absolute criterion for fitting frequency curves // Messenger of Mathematics. 1912. Vol. 41. P. 155–160.
- [17] Fisher R. A. On mathematical foundation of theoretical statistics // Phil. Trans. Roy. Soc. (London). Ser. A. 1922. Vol. 222. P. 309–369.
- [18] Крянев А. В., Лукин Г. В. Математические методы обработки неопределенных данных. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
- [19] Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 900 с.
- [20] Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных: справоч. изд. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.

- [21] Вероятность и математическая статистика: энцикл. / под ред. Ю. В. Прокхорова. М.: Большая Рос. энцикл., 1999. 911 с.
- [22] Богданов Ю. И. Основная задача статистического анализа данных: корневой подход. М.: МИЭТ, 2002. 96 с. Пер. на англ.: *Bogdanov Yu. I. Fundamental problem of statistical data analysis: root approach*. М.: MIEE, 2002. 84 p.; *Bogdanov Yu. I. Statistical inverse problem* // LANL E-print, 2002, arXiv: phys/0211109. 39 p.
- [23] Богданов Ю. И. Метод максимального правдоподобия и корневая оценка плотности распределения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. № 3. С. 51–60.
- [24] Богданов Ю. И. Основные понятия классической и квантовой статистики: корневой подход // Оптика и спектроскопия. 2004. Т. 96. № 5. С. 735–746.
- [25] Bogdanov Yu. I. Quantum Mechanical View of Mathematical Statistics // New Topics in Quantum Physics Research. Nova Science. 2006. Р. 1–36.; LANL Report quant-ph/0303013.
- [26] Богданов Ю. И., Богданова Н. А. Применение методов квантовой информатики в задачах цифровой обработки статистических данных // Труды 8-й международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение». Москва. 29–31 марта 2006 г. Т. 1. С. 101–104.
- [27] Bogdanov Yu. I. Quantum tomography of arbitrary spin states of particles: root approach // Proceedings of SPIE. 2006. Vol. 6264. 626403. 10 p.; LANL report quant-ph/0509213.
- [28] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
- [29] Богданов Ю. И. Унифицированный метод статистического восстановления квантовых состояний, основанный на процедуре очищения // ЖЭТФ. 2009. Т. 135, вып. 6. С. 1068–1078.
- [30] James D. F., Kwiat P. G., Munro W. J., White A. G. Measurement of qubits // Phys. Rev. A. 2001. Vol. 64. 052312. 15 p.
- [31] Богданов Ю. И., Кривицкий Л. А., Кулик С. П. Статистическое восстановление квантовых состояний оптических трехуровневых систем // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 78, вып. 6. С. 804–809.

- [32] Bogdanov Yu. I., Chekhova M. V., Kulik S. P. et al. Statistical Reconstruction of Qutrits // Physical Review A. 2004. Vol. 70. № 4. 042303. 16 p.
- [33] Bogdanov Yu. I., Chekhova M. V., Kulik S. P. et al. Qutrit state engineering with biphotons // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. 230503. 4 p.
- [34] Bogdanov Yu. I., Galeev R. F., Kulik S. P. et al. Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons // Physical Review A. 2006. Vol. 73. 063810. 13 p.
- [35] Mikami H., Kobayashi T. Remote preparation of qutrit states with biphotons // Physical Review A. 2007. Vol. 75. 022325. 4 p.
- [36] Lanyon B. P., Weinhold T. J., Langford N. K. et al. Manipulating Biphotonics Qutrits // Physical Review Letters. 2008. Vol. 100. 060504. 4 p.
- [37] Genovese M., Traina P. Review on qudits production and their application to Quantum Communication and Studies on Local Realism // LANL Report quant-ph/07111288. 2007. 23 p.
- [38] Bogdanov Yu. I. Statistical Inverse Problem: Root Approach // 2nd Asia-Pacific Workshop on Quantum Information Science, Singapore, National University of Singapore, 15–19 December 2003; LANL Report quant-ph/0312042. 2003. 17 p.
- [39] Bogdanov Yu. I. Root Estimator of Quantum States // New Topics in Quantum Physics Research. Nova Science. 2006. P. 129–162; LANL Report quant-ph/0303014.
- [40] Uhlmann A. Fidelity and Concurrence of conjugated states // Phys. Rev. A. 2000. Vol. 62. 032307. 9 p.; LANL Report quant-ph/9909060. 1999. 10 p.
- [41] Богданов Ю. И. Исследование статистической природы неравенств Белла // Микроэлектроника. 2008. Т. 37. № 5. С. 352–369.
- [42] Ландау Л. Д., Лишинц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
- [43] Dirac P. A. M. The fundamental equations of quantum mechanics // Proceed. of the Royal Society. A. 1925. Vol. 109. P. 642–653. См. перевод: Дирак П. А. М. Фундаментальные уравнения квантовой механики // Дирак П. А. М. К созданию квантовой теории поля. Основные статьи 1925–1958 гг. М.: Наука, 1990. С. 25–38.

- [44] *Фейнман Р., Хибс. А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям: пер. с англ. Новочеркасск: ИО НФМИ, 1998. 380 с.
- [45] *Ициксон К., Зюбер Ж.Б.* Квантовая теория поля: в 2 т. М.: Мир, 1984. Т. 1. 448 с.; Т. 2. 400 с.
- [46] *Ehrenfest P.* Bemerkung über die angenaherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quanten Mechanik // Z. Phys. 1927. Vol. 45. S. 455–457. См. перевод: Эренфест П. Замечание о приближенной справедливости классической механики в рамках квантовой механики // Эренфест П. Относительность. Кванты. Статистика: сб. статей. М.: Наука, 1972. С. 82–84.
- [47] *Скалли М. О., Зубайри М. С.* Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003. 512 с.
- [48] *Флюгэ З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. / пер. с англ. Б. А. Лысова под ред. А. А. Соколова. М.: Мир, 1974. 341 с.

Предметный указатель

- H*-теорема, 262
S-матрица, 303
T-матрица, 304
 σ -алгебра, 25
Аксиомы Колмогорова, 26
Алиса, 686
Амплитуда
— вакуум-вакуум, 715, 728
— рассеяния, 305
Ансамбль, 98
— типа \mathcal{E}_ρ , 358
— типа \mathcal{E}_P , 359, 404
Антигруппировка
— фотонная, 420
Базис
— измерительный, 342
— предпочтительный, 285
Баланс детальный, 185
Боб, 686
Величина
— наблюдаемая, 93
— без самоусреднения, 475
— с самоусреднением, 475
— сильное самоусреднение, 475
— среднее значение, 99
— случайная, 28, 97
— в гильбертовом пространстве, 361
— многомерная, 31
Вероятность
— многовременная эксклюзивная, 393
— условная, 27
Вогнутость, 118
Времена возвращения Пуанкаре, 181
Время
— Зенона, 222, 224
— ЦПУ, 469, 472
— масштабируемая характеристика, 474
— декогерентизации, 285, 298
— корреляции резервуара, 577
— термической корреляции, 704
— ускорения, 724
Встряска первоначальная, 244
Выборка, 452
— среднего, 453
Выпуклость, 120
Гамильтониан
— Джейнса–Каммингса, 324
— Кальдейра–Леггетта, 226, 588
— атом-лазер взаимодействия, 511
— неэрмитовый, 386
— спин-бозонный, 289, 605
Гармоника излучения высокая, 537
Гиперповерхность, 619, 626
— единичного нормального вектора, 621
Движение
— броуновское, 57, 569, 744
— в квадратичном потенциале, 242
— свободное, 236, 242, 257
Действие
— Уилера–Фейнмана, 718
— обратное, 283, 405
Декогерентизация, 218, 282
— броуновского движения, 299

- внутренних степеней свободы, 300
- квантового измерения, 341
- многочастичных состояний, 752
- рассеяния, 303
- тормозного излучения, 699, 722
- электромагнитного поля состояний, 318
- Дельта-функция поперечная, 488
- Дефект, 63, 388, 455, 457, 503
- Динамика немарковская, 552, 569
- Дисперсия, 33, 453
 - ансамблей типа \mathcal{E}_P , 362
 - наблюдаемой, 99
- Диссипатор, 168, 197, 222, 233, 261, 719
- Длина
 - волны
 - де Бройля, 298, 307, 725
 - комптоновская, 723
 - когерентности, 750
- Дрейф детерминированный, 57
- Закон
 - Гаусса, 489
 - Стефана–Больцмана, 706
- Заселенность когерентного захвата, 522
- Затухание, 338, 602
 - сильное, 339
 - слабое, 338, 602
- Зонд квантовый, 138, 626
- Излучение
 - затухающее, 749
 - мультиполя, 494
 - черного тела, 706
- Измерение
 - квантовое
 - КНИ, 144, 656
 - КНИ верификация состояния, 658
- динамической модели, 348
- идеальное, 218
- локальное, 626
- на ансамблях типа \mathcal{E}_P , 379
- неидеальное, 220
- нелокальное, 647
- нелокальное, модулярные суммы, 657
- неполное, 496
- непрерывное, 218, 403, 487, 643
- непрямое, 137, 626
- неселективное, 123, 404, 655, 660
- обменное, 683
- обобщенное, 125
- оператор состояния Белла, 673
- приближительное, 134
- селективное, 123, 379
- состояние верификации, 658, 661
- энтропии, 132
- Инвариантность масштаба, 83
- Интеграл
 - по траектории
 - в гильбертовом пространстве, 392
 - прямое фотодетектирование, 416
 - фотодетектирование на полевой моде, 438
- Интенсивность
 - декогерентизации, 297
 - броуновского движения, 299
 - внутренних переходов, 302
 - рассеяния, 307
 - перескока, 47
 - распада, 583, 585
 - зависимая от времени, 573, 583
- Исключение адиабатическое быстрых переменных, 268

- История ковариантная стохастического вектора, 632
- Исчисление
 - Ито, 69
 - КДП, 71
 - диффузионный процесс, 68
- Калибровка Кулона, 487, 699
- Канал
 - квантовый, 686, 691
 - связи классический, 688
- Катастрофа инфракрасная, 730
- Квазиэнергии, 533
- Квантование поля излучения, 486
- Когерентность макроскопическая квантовая, 611
- Комбинация выпуклая линейная, 103
- Компьютер квантовый, 289
- Контраст интерференционный, 314
- Контрчлен, 227, 240, 250
- Кот Шредингера, 308, 319, 441
- Коэффициент
 - корреляции, 34
 - телепортации, 688
- Кубит, 289, 295
- Кумулянты
 - упорядоченные, 560
- Луч, 103
- Масштабируемость, 483
- Матрица
 - диффузионная, 57
 - ковариационная, 33
 - плотности, 100
 - КЭД, 708
 - как ковариационная матрица, 361, 375, 391
 - нерелевантной части, 547
 - равновесная, 562
 - редуцированная, 113, 569
- — релевантной части, 547
- Мера
 - Леви
 - стабильная, 85, 525
 - вероятностная, 26
 - положительная операторнозначная, 127
 - проекционнозначная, 99
 - спектральная, 98
- Метод
 - Монте-Карло, 451
 - волновой функции, 394
 - численная эффективность, 474
 - проективного
 - — оператора Накажимы–Цванцига, 547
 - — оператора за вычетом временной свертки, 552, 569
 - стохастический
 - — алгоритм для СУШ, 459
 - — линейный поиск, 459
 - — моделирования, 451, 581, 586
 - — численной эффективности, 474
- Микропричинность, 622
- операции, 631
- Множество борелевское, 29
- Модель
 - Джейнса–Каммингса, 569
 - запрещенная зона фотонов, 586
 - при резонансе, 581
 - с расстройкой, 583
 - Кальдейры–Леггетта, 226, 331, 744
 - коллапса стохастическая, 432
 - спин-бозонная, 289, 569, 605
- Момент
 - многопольный
 - — магнитный, 494
 - — электрический, 494
- Моменты, 33

- Независимость статистическая, 27
- Необратимость, 44
- Непрерывность очень слабая, 167
- Неравенства Белла, 694
- Неравенство
 - Клейна, 120
 - Чебышева, 33
- Область притяжения, 528
- Обработка
 - параллельная, 483
- Обращение времени, 44
- Обрезание ультрафиолетовое, 744
- Объект квантовый, 138
- Ожидание математическое, 32
- Окружение, 158
- Оператор
 - Гильберта–Шмидта, 114
 - Линдблада, 166
 - Лиувилля, 154, 708
 - Паули, 195
 - рождения, 488
 - самосопряженный, 93
 - собственный, 179, 190, 196, 491
 - состояния Белла, 673, 679, 688
 - статистический, 100
 - уничтожения, 488
 - эволюции во времени, 152
- Операторы поля, 487
- Операция, 124, 220, 405, 561
 - КЭД вида, 490
 - мультипольного излучения, 493
 - непрямого измерения, 404
 - релятивистская, 628
 - состояния верификации измерения, 660
 - теорема представления, 129
 - фотодетектирования
 - гомодинного, 420
 - прямого, 408
- Осциллятор
- Морзе, 477
- гармонический, 212, 337, 465, 569, 587, 605
- Отображение динамическое, 161
- Охлаждение, 528
 - лазерное, 508
 - — суботдача, 509
- Оценка
 - объективная
 - — математического ожидания, 453
 - — статистические ошибки, 453
- Ошибка
 - одношаговая, 461
 - относительная, 564, 591, 596, 602
 - оценка, 564
 - стандартная среднего значения, 453
- Память ядра, 551, 578
- Параметр Манделя Q , 420
- Перенормировка преобразования, 527
- Переход
 - условный
 - — вероятностный, 40
 - — вероятностный, КДП в гильбертовом пространстве, 385
 - — вероятностный, характеристика на коротких временах, 405
- Плотность
 - гамильтониана, 619
 - орбитального момента импульса, 489
 - спектральная, 228, 292, 334
 - — КЭД, 744
 - — Лоренца–Друде, 229, 248, 606
 - — запрещенной зоны фотонов, 586
 - — модели Джейнса–Каммингса, 577, 583
 - — омическая, 229, 240, 242, 248

- сверхомическая, 744
- спиновая, 489
- тока, 49, 489, 707
- электронная, 489
- Подпространство когерентное, 287, 294
- Показатель масштабирования, 86
- Поле
 - вакуума, 488
 - как квантовый зонд, 409
 - приращений Пуассона, 73
- Положительность
 - полная, 128, 167
- Полугруппа
 - динамическая, 43
 - квантовая
 - генератор, 163
 - генератор Линдблада, 573, 581
 - динамическая, 163, 385, 584, 600
 - необратимость, 173
 - параметрический генератор Линдблада, 260
 - первый стандартный вид, 166, 182, 187, 233
 - представление Гейзенберга, 167
 - релаксация к равновесию, 183
 - сжимающие, 168
- Постулат
 - проективный, 627
 - релятивистский, 630
- Поток фазовый, 45
- Правило
 - золотое, 49, 185, 195, 578
 - суперотбора, 288
- Предизмерение, 347
- Представление
 - Гейзенберга
 - закрытой системы, 156
 - открытой системы, 169
- стохастического представления, 397
- взаимодействия, 156
- когерентного состояния, 214
- Предускорение, 748
- Приближение
 - Борна, 177, 183, 548, 552, 575, 578
 - Борна–Маркова, 178, 183, 195, 227, 230
 - Маркова, 177, 183, 189, 581
 - вращающейся волны, 178, 186, 192, 225, 719
 - сингулярной связи, 221
 - слабого связывания, 177, 266
 - среднего поля, 262
- Приготовление
 - нелокальных состояний, 681
- Принцип
 - причинности, 637, 662
 - верификация состояния, 664
 - измерение запутанных собственных состояний, 670
 - измерение проекций, 669
 - локальная матрица плотности, 671
- Приращение
 - винеровского процесса, 59, 460
 - комплексного винеровского процесса, 218
 - независимое, 76
 - пуассоновского процесса, 53, 454, 515
 - стационарное, 77
- Произведение тензорное, 111
- Пропагатор
 - Фейнмана, 713
 - обратный, 553
- Пространство
 - Лиувилля, 114
 - выборочное, 25

- гильбертово, 92
- мера Дирака, 367
- проективное, 103
- расширенное, 534
- сдвоенное, 398, 565
- функциональные производные, 384
- функциональный интеграл, 368
- элемент объема, 368
- Процесс
 - Винера
 - многомерный, 60
 - Гаусса, 58
 - Коши, 89
 - Леви, 76
 - генератор, 77
 - характеристический показа-
тель, 77, 86
 - Маркова, 38
 - квантовый, 160
 - Орнштейна – Уленбека, 58
 - комплексный, 218
 - аддитивный, 76
 - детерминированный, 45, 383
 - диффузионный, 54
 - кусочно-детерминированный, 60
 - вектора состояний, 496
 - выборочных траекторий, 64
 - гильбертово пространство, 384
 - гомодинное фотодетектирова-
ние, 425
 - лазерного охлаждения, 515
 - матрицы плотности, 437, 497
 - представление Флоке, 537
 - прямое уравнение Колмогоро-
ва, 67
 - сдвоенного гильбертова про-
странства, 566
 - стохастический расчет, 68
 - однородный, 40
 - одношаговый, 50, 212
 - пуассоновский, 49, 80
 - — неоднородный, 51
 - скачковый, 46
 - стабильный, 83
 - стационарный, 40
 - стохастический, 35
 - — многомерный, 36
 - — немарковский, 649
 - — условие непрерывности, 55
- Путь выборочный, 35
- Разложение
 - Шмидта, 114, 662, 678
 - по кумулянтам, 559, 574, 712
 - по сингулярным числам, 115
 - спектральное, 94
- Распределение
 - Больцмана, 185, 213, 608
 - Вигнера, 110
 - Планка, 203
 - вероятности, 29
 - — проективного гильбертового
пространства, 371
 - времени ожидания, 454
 - мультиэкспоненциальное, 456
 - неограниченно делящееся, 78
 - основное, 457
 - стабильное, 83
 - флуоресцентного излучения, 416
 - чисто скачкового процесса, 62
 - экспоненциальное, 455
- Распределения
 - совместные
 - — вероятностные, 36, 106
 - — релятивистски инвариантные,
639
 - — семейство, 36
 - — согласованная иерархия, 641
- Рассеяние рэлеевское, 210
- Расслоение, 623, 628

- Реализация, 28, 35, 451
- Режим сильного связывания, 581
- Резервуар, 159, 176
- Сдвиг
 - Лэмба, 182, 194, 197, 200, 578, 586, 720
 - зависимый от времени, 573, 583
 - Штарка, 194, 197, 200, 720
- Сектор суперотбора, 287
- Семейство спектральное, 94
- Сечение поперечное, 306
- Система
 - двухуровневая, 222, 469, 570, 577
 - замкнутая, 151
 - изолированная, 153
 - открытая, 158
 - редуцированная, 158
 - эргодическая, 561
- Системы квантовые составные, 111
- Скачок
 - квантовый, 388
 - селективный алгоритм, 458
- Смесь
 - статистическая, 103
 - фиктивная, 113
- Событие, 25
- События элементарные, 25
- Состояние
 - Гаусса, 557, 595, 712
 - Гиббса, 175, 183, 549
 - запутанное, 116, 641
 - КНИ верификация, 676
 - базисное, 688
 - верификация, 660
 - максимально, 116, 286, 345, 662, 678
 - приготовление, 681
 - когерентное, 214, 308
 - ловушечное, 63
 - реперное, 549
 - сжатое ваккумное, 181, 199
 - темное, 502, 509
 - чистое, 103
- Состояния
 - Белла, 689
 - Дики, 274
 - Флоке, 533
 - Фока, 408
 - одетые, 540
 - относительные, 344
- Спектр
 - равновесных флуктуаций, 245
 - резонансной флуоресценции, 208
- Стирание локальной информации, 664, 669
- Субаддитивность, 118, 121
- Суперлюминисценция, 271
- Супероператор
 - влияния, 714
 - тока, 710, 716
- Суперотбор, 287
- Схема
 - Платена, 464
 - Рунге–Кутта, 463
 - Хьюна, 462
 - Эйлера, 462
- Сходимость
 - сильная, 461
 - слабая, 461
- Телепортация квантовая, 684
- Температура отдачи, 509
- Тензор спектральный корреляционный, 192, 200
- Теорема
 - Байеса, 28, 128
 - Боннера, 183
 - Вика, 710
 - Гаусса, 621
 - Дуба, 58
 - Колмогорова, 38

- Леви–Хинчина, 78
- Либа, 120, 174
- Линдблада, 167, 584
- Нельсона, 106
- адиабатическая, 325
- квантовая регрессионная, 172, 208, 600
- флуктуационно-диссипационная, 246
- Теория Вайскопфа–Вигнера, 572
- Теория Флoke, 532
- Теория идеального черного тела, 718
- Ток плотности вероятности, 57
- Траектории квантовые, 394
- Туннелирование, 605
- УВС-генератор, 554, 571
- УВС-неоднородность, 554
- Упорядочение
 - во времени
 - антихронологическое, 553
 - хронологическое, 550
 - нормальное, 215
 - Уравнение
 - Абрагама–Лоренца, 721, 747
 - Блоха, 205
 - Больцмана, 260
 - Больцмана квантовое, 262
 - Гейзенберга
 - движения, 155
 - Колмогорова прямое, 392
 - Лиувилля, 46, 384
 - КДП в гильбертовом пространстве, 385
 - основное, 60
 - Лиувилля–фон Неймана, 154
 - Накажимы–Цванцига, 551
 - Фоккера–Планка, 56, 216
 - диффузия в гильбертовом пространстве, 395
 - Хартри, 263
- Чепмена–Колмогорова, 41, 160
 - дифференциальное, 42
 - Швингера–Томонаги, 620
 - Шредингера, 152
 - гетеродинного детектирования, 431
 - гомодинного детектирования, 428
 - диффузии квантового состояния, 435
 - нелинейное, 269, 270, 387
 - непрерывной модели спонтанной локализации, 432
 - стохастическое, 397
 - Эренфеста, 156, 236
 - волновое, 487, 700
 - основное, 48, 151
 - Кальдейры–Леггетта, 227, 232, 257, 590
 - Линдблада, 166
 - Паули, 185, 212
 - Редфилда, 178
 - Ху–Паз–Жанга, 590
 - безотдаточный предел, 259
 - за вычетом временной свертки, 581, 586, 718
 - интерпретация, 385
 - квантовое оптическое, 194, 718
 - марковское, 163
 - нелинейное, 259
 - низкая плотность, 188
 - обобщенное, 581
 - представления Флoke, 537
 - сдвоенное гильбертово пространство, 565, 584
 - сингулярного связывания, 186
 - слабого связывания, 177
 - сопряженное, 169, 213, 595
 - среднего поля, 262
 - стохастическое

- КДП в гильбертовом пространстве, 389
- дифференциальное, 68, 236
- диффузионного процесса, 70
- матрица плотности, 435
- фон Неймана, 154
- Уравнения Лоренца, 267
- Ускорение, 483
- Условие
 - КМШ, 184
 - Маркова, 39
 - интегральное, 621
 - начальное
 - нефакторизуемое, 553, 560, 604
 - факторизуемое, 553, 589
 - непрерывности, 55
 - отсутствия, 146, 342, 347
- Условия непротиворечивости Колмогорова, 37
- Фаза динамическая, 325
- Формула
 - Бете, 721
 - Лармора, 748
 - фотодетектирования, 439
 - КНИ измерение, 445
 - когерентное состояние, 440
 - состояние Фока, 439
 - флуоресцентное излучение, 419
 - шредингеровского кота, 441
- Фотодетектирование, 730
 - гетеродинное, 420, 427
 - гомодинное, 460
 - полевая мода, 438
 - прямое, 407
- Функционал
 - влияния
 - КЭД, 714
 - Фейнмана–Вернона, 248, 251
 - представление интеграла по траекториям, 252, 745
 - декогерентизации, 722, 727
 - плотности
 - вероятности гильбертова пространства, 368
 - вероятности пространства матриц плотности, 377
- Функция
 - автокорреляционная, 245, 602
 - антиперестановочная, 702
 - декогерентизации, 284
 - вакуумной части, 293
 - зависимости от размера системы, 294
 - затухающего гармонического осциллятора, 316
 - модели Кадьдейры–Леггетта, 335
 - оптического вакуума, 310
 - поведение на малых временах, 288
 - свободного броуновского движения, 336
 - сильного затухания, 339
 - термической части, 293
 - корреляции
 - винеровского процесса, 58
 - времененная, 170
 - пуассоновского процесса, 53
 - равновесия, 561
 - резервуара, 181
 - стохастического представления, 401
 - термостата, 228
 - электрического поля, 705
 - отклика, 245
 - перестановочная, 701
 - производящая, 34
 - кумулянтов, 77
 - распределения кумулятивная, 30
 - характеристическая, 34

- Вигнера, 111, 292
- наблюдаемая, 108
- процесса Леви, 77
- Частота**
 - Раби, 204, 224, 324
 - «голая», 588
 - наблюдаемая, 602
 - отсечки, 597, 601
 - перенормированная, 588, 590
 - физическая, 588, 590
- Частоты Мацубары**, 229
- Число Шмидта**, 115
- Шум**
 - аддитивный, 460
- ЭПР корреляций**, 641
- Эксперимент Штерна–Герлаха**, 363
- Энергия**
- Допплера, 517
- отдачи, 509, 517
- Энтропия**, 679
- Шенонна, 117
- квантового измерения, 132
- линейная, 121, 286
- относительная, 119, 173
- поток, 175
- скорость производства, 173
- фон Неймана, 117, 175, 262
- Эффект**, 125
- Зенона, 187, 218, 220
- Эффективность квантовая**, 439
- Ядро**
 - демпфирующее, 239
 - диссипационное, 228, 590
 - шума, 228, 334, 590

*Хайнц-Питер Бродер
Франческо Петруччионе*

ТЕОРИЯ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

*Дизайнер Л. Н. Загуменова
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка С. В. Высоцкий
Корректор А. В. Бекмачева*

Подписано в печать 15.03.2010. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 47,90. Уч. изд. л. 51,45.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ № 16.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»

М426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295