

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών
Υπολογιστών

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών
Συστημάτων

Εργασία 1^η – Εαρινό Εξάμηνο 2020/2021



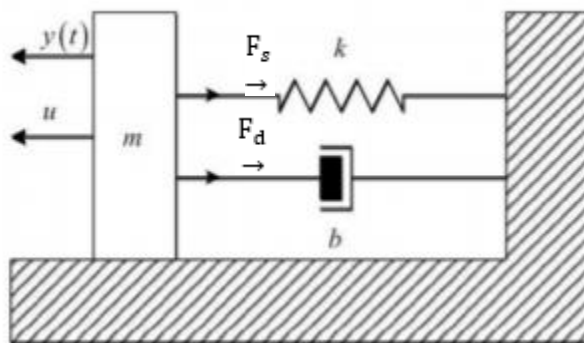
Καβελίδης Φραντζής Δημήτριος – AEM 9351

27/3/2021

Εργασία 1^η

Θέμα 1^ο

Δίνεται το σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης, k είναι η σταθερά του ελατηρίου, u μια εξωτερική δύναμη και $y(t)$ είναι η μετατόπιση της μάζας m εξαιτίας της δύναμης που εφαρμόζεται πάνω της.

1. Βρείτε το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος και παραμετροποιήστε το γραμμικά, στη μορφή:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^* \boldsymbol{\zeta}$$

όπου το σήμα $\boldsymbol{\zeta}$ παράγεται από μετρήσεις της εξωτερικής δύναμης u και της μετατόπισης y .

2. Σχεδιάστε τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων m , b και k όταν μετρούμε μόνο την μετατόπιση και την εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στη μάζα.
3. Προσομοιώστε τον αλγόριθμο που σχεδιάσατε στο προηγούμενο βήμα υποθέτοντας ότι $m = 15\text{kg}$, $b = 0.2\text{kg/sec}$, $k = 2\text{kg/sec}^2$ και $u = 5 \sin(2t) + 10.5\text{N}$. Χρησιμοποιήστε δείγματα ανά 0.1sec για 10sec θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες για τις καταστάσεις του συστήματος. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Ανάλυση:

1. Η δύναμη F_s που ασκεί το ελατήριο στη μάζα m αντιτίθεται στη δύναμη u και είναι:

$$F_s = ky$$

Η δύναμη F_d που ασκεί ο αποσβεστήρας στη μάζα m αντιτίθεται στη δύναμη u και είναι:

$$F_d = b \frac{dy}{dt}$$

\Leftrightarrow

$$F_d = b\dot{y}$$

Όπως ξέρουμε, η συνολική δύναμη είναι ίση με $\Sigma F = m \frac{d^2 y}{dt^2} \Leftrightarrow \Sigma F = m\ddot{y}$

Έτσι, έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \quad \Sigma F &= u - F_s - F_d \\
 \Leftrightarrow \quad m\ddot{y} &= u - ky - b\dot{y} \\
 \Leftrightarrow \quad m\ddot{y} + b\dot{y} + ky &= u \\
 \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y &= \frac{1}{m}u \\
 \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_2y &= b_0u \quad (A)
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

Εύκολα τώρα η (A) παίρνει τη μορφή

$$y^{(2)} = \theta^{*T} \Delta \quad (B)$$

φτιάχνοντας το διάνυσμα θ^* των άγνωστων παραμέτρων, το οποίο θα είναι:

$$\theta^* = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad b_0]^T = \left[\frac{b}{m} \quad \frac{k}{m} \quad \frac{1}{m} \right]^T$$

και το διάνυσμα Δ που περιέχει συγκεντρωμένα τα σήματα εισόδου εξόδου με τις παραγώγους τους, δηλαδή

$$\Delta = [-\dot{y} \quad -y \quad u]^T = [-\Delta_1^T y \quad \Delta_0^T u]^T$$

όπου $\Delta_i = [s^i \quad s^{i-1} \quad \dots \quad 1]^T$, δηλαδή χρησιμοποιούμε M/Σ Laplace.

Δεδομένου τώρα ότι τα μόνα μετρήσιμα σήματα είναι η είσοδος u και η έξοδος y , η παραπάνω μορφή δεν μπορεί να υλοποιηθεί διότι δεν γνωρίζουμε την παράγωγο του y . Το πρόβλημα αυτό

ξεπερνιέται χρησιμοποιώντας ένα ευσταθές φίλτρο $\frac{1}{\Lambda(s)}$ δεύτερης τάξης, δηλαδή

$\Lambda(s) = s^2 + s(p_1 + p_2) + p_1 p_2 = (s + p_1)(s + p_2)$ όπου p_1, p_2 οι πόλοι που τοποθετούμε στο αριστερό ημιεπίπεδο για την εξασφάλιση της ευστάθειας.

Έτσι, φιλτράροντας και τα δύο μέρη της (B), με το $\frac{1}{\Lambda(s)}$ καταλήγουμε σε σχέση της μορφής:

$$z = \theta^{*T} \zeta$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1}{\Lambda(s)} y^{(2)} = \frac{s^2}{\Lambda(s)} y \\
 \zeta &= \left[-\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} y \quad \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} u \right]^T
 \end{aligned}$$

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda^T \Delta_1(s), \quad \lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2]^T = [p_1 + p_2 \quad p_1 p_2]^T$$

Επομένως,

$$z = \frac{s^2}{\Lambda(s)} y = \frac{\Lambda(s) - \lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y = y - \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y$$

Άρα:

$$y = z + \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y \quad (Γ)$$

Τώρα, χωρίζοντας το διάνυσμα στις παραμέτρους που αφορούν την είσοδο και την έξοδο αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\theta}_1^{*T} \boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2^{*T} \boldsymbol{\zeta}_2$$

όπου:

$$\boldsymbol{\theta}_1^* = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T, \quad \boldsymbol{\theta}_2^* = b_0$$

και

$$\boldsymbol{\zeta}_1 = -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\zeta}_2 = \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{u}$$

Έτσι, τελικά η (Γ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \boldsymbol{\theta}_1^{*T} \boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2^{*T} \boldsymbol{\zeta}_2 - \lambda^T \boldsymbol{\zeta}_1 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}_\lambda^T \boldsymbol{\zeta} \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

όπου

$$\boldsymbol{\theta}_\lambda = [\boldsymbol{\theta}_1^{*T} - \lambda^T \quad \boldsymbol{\theta}_2^{*T}]^T = [\alpha_1 - \lambda_1 \quad \alpha_2 - \lambda_2 \quad b_0]^T$$

\Leftrightarrow

$$\boldsymbol{\theta}_\lambda = \left[\frac{b}{m} - (p_1 + p_2) \quad \frac{k}{m} - p_1 p_2 \quad \frac{1}{m} \right]^T$$

και

$$\boldsymbol{\zeta} = \left[-\frac{[s \quad 1]}{s^2 + s(p_1 + p_2) + p_1 p_2} \mathbf{y} \quad \frac{1}{s^2 + s(p_1 + p_2) + p_1 p_2} \mathbf{u} \right]^T$$

2. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους m, b, k .

Εύκολα βλέπουμε ότι η γενική μορφή στην οποία χρειάζεται να είναι το σύστημά μας, είναι:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}$$

όπου από 1, $\boldsymbol{\theta}^T = \boldsymbol{\theta}_\lambda^T$ και $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\zeta}$

Γνωρίζουμε ότι οι μόνες διαθέσιμες μετρήσεις είναι από τα \mathbf{u}, \mathbf{y} . Έστω λοιπόν ότι έχουμε \mathbf{N} το πλήθος μετρήσεις, από είσοδο και έξοδο. Έτσι, το \mathbf{Z}_N θα είναι το σύνολο των δεδομένων του συστήματος, δηλαδή μετρήσεις εισόδου και εξόδου για χρονικές στιγμές μέχρι \mathbf{N} .

Ως γνωστόν, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε μία νόρμα του \mathbf{e} (όπου

$\mathbf{e}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y}(\mathbf{t}) - \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta})$ το σφάλμα πρόβλεψης) η οποία θα έχει την μορφή:

$$\mathbf{V}_N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z}_N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N l(\mathbf{e}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}))$$

και συγκεκριμένα για τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων, με $l(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^2$.

Φτιάχνουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{Y}(\mathbf{t}) = [\mathbf{y}(1) \quad \mathbf{y}(2) \quad \cdots \quad \mathbf{y}(N)]^T \in \mathbb{R}^N$ το οποίο προκύπτει από τις μετρήσεις της εξόδου, και πίνακα Φ ο οποίος αποτελείται από τις συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{\varphi}$ για κάθε μέτρηση που έχουμε, δηλαδή $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{j})$ είναι η \mathbf{j} μέτρηση της \mathbf{i} συνιστώσας του διανύσματος $\boldsymbol{\varphi}$. Έτσι:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1(1) & \boldsymbol{\varphi}_2(1) & \boldsymbol{\varphi}_3(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_1(N) & \boldsymbol{\varphi}_2(N) & \boldsymbol{\varphi}_3(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 3}$$

Το σφάλμα λοιπόν θα πάρει τη μορφή:

$e = Y - \Phi\theta$ που είναι πλέον σε διανυσματική μορφή λόγω του πλήθους των μετρήσεων. Θα χρησιμοποιήσω το μέτρο του σφάλματος για την ελαχιστοποίηση και την χρήση του αλγορίθμου:

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta} \frac{|e|^2}{2} = \arg \min_{\theta} \frac{e^T e}{2}$$

Άρα η συνάρτηση V_N γίνεται $V_N = \left| \frac{Y - \Phi\theta}{2} \right|^2$. Η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή, άρα έχω

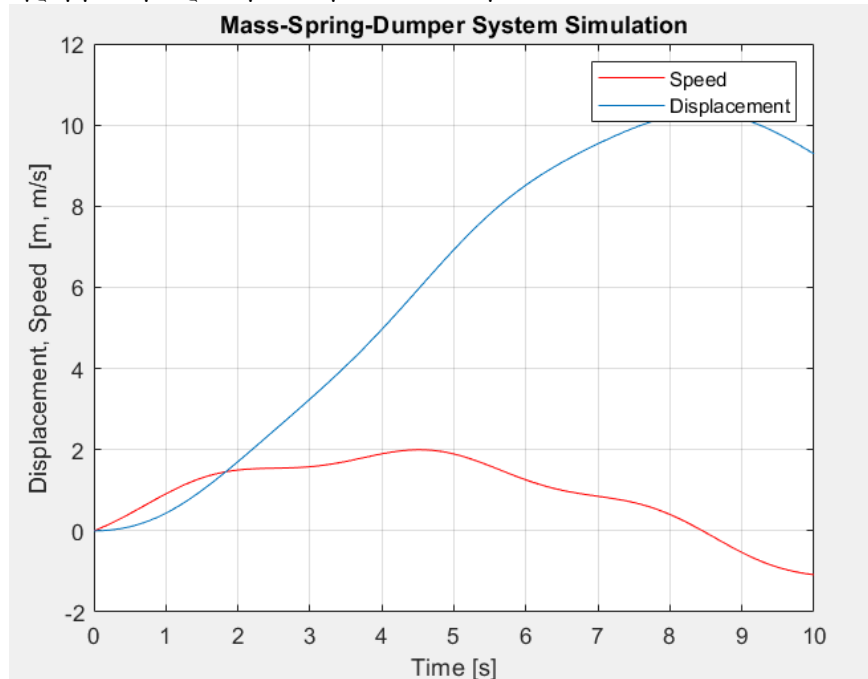
ένα μοναδικό ελάχιστο, έστω στο θ_0 , το οποίο για να βρω λύνω την εξίσωση:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \Leftrightarrow (Y - \Phi\theta)^T (-\Phi) = 0 \Leftrightarrow -Y^T \Phi + \theta_0^T (\Phi^T \Phi) = 0 \Leftrightarrow \theta_0^T (\Phi^T \Phi) = Y^T \Phi \quad (\Delta)$$

Έτσι, η λύση του συστήματος αυτού, δηλαδή οι τιμές που θα βρω στο θ_0 είναι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων που με ενδιαφέρουν, δηλαδή m,b,k. Το θ_0 δηλαδή είναι το σύνολο των παραμέτρων με τιμές τέτοιες που ελαχιστοποιούν ένα μέτρο του σφάλματος πρόβλεψης και συνεπώς είναι πιο κοντά στις πραγματικές τιμές αυτών των μεγεθών.

3. Στο βήμα αυτό θα κάνουμε προσομοίωση χρησιμοποιώντας το περιβάλλον προγραμματισμού **MATLAB**.

Πρώτα, τρέχουμε την προσομοίωση με τα πραγματικά δεδομένα χρησιμοποιώντας την συνάρτηση ode45 για να πάρω τη λύση της διαφορικής εξίσωσης του συστήματος και συνεπώς το Y . Το διάγραμμα της προσομοίωσης είναι το εξής:



Στη συνέχεια φιλτράρουμε με το ευσταθές φίλτρο $A(s)$ και φτιάχνουμε τον πίνακα Φ από τα δεδομένα μας. Τέλος, λύνουμε την εξίσωση (Δ) και παίρνουμε το θ_0 . Από αυτό θα έχουμε:

$$\hat{m} = 1/\theta_0(3)$$

$$\hat{k} = \hat{m}(\theta_0(2) + p_1 p_2)$$

$$\hat{b} = \hat{m}(\theta_0(1) + p_1 + p_2)$$

Επιλογή των πόλων του φίλτρου:

Σαφώς το πρώτο και κυριότερο που μας ενδιαφέρει είναι οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο για να είναι ευσταθές το φίλτρο. Στη συνέχεια μας ενδιαφέρει με την επιλογή που κάνουμε να πετυχαίνουμε όσο καλύτερη εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων μπορούμε. Η επιλογή έγινε με δοκιμή-σφάλμα-διόρθωση. Η πρώτη επιλογή έγινε τυχαία και ήταν για $p_1 = p_2 = 10$. Τα αποτελέσματα ήταν αρκετά μακριά από τα πραγματικά δεδομένα:

```
mest =
```

```
16.3892
```

```
kest =
```

```
2.0104
```

```
best =
```

```
|
```

```
0.1202
```

Μεγαλώνοντας τα νούμερα, τα αποτελέσματα φεύγουν ακόμα πιο μακριά, π.χ. για

$p_1 = 20, p_2 = 20$:

```
mest =
```

```
21.0087
```

```
kest =
```

```
2.0227
```

```
best =
```

```
0.0368
```

Έτσι, οι επόμενες δοκιμές έγιναν για $p_1 = 1, p_2 = 1$. Τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:

```
mest =

    15.0130

kest =

    2.0002

best =

    0.1961
```

Η εξέταση των τιμών συνέχισε έτσι, ψάχνοντας ιδιαίτερα σε τιμές στο διάστημα [0.3, 0.6]
Το καλύτερο ζευγάρι κατά τις δοκιμές (χωρίς εξασφάλιση βέλτιστης λύσης) ήταν για $p_1 = 0.47$, $p_2 = 0.47$:

```
mest =

    14.9994

kest =

    1.9999

best =

    0.1990
```

Δοκιμάζοντας και αλλάζοντας λίγο τα δεδομένα των παραμέτρων, κρατώντας ίδιους τους πόλους τα αποτελέσματα φαίνονται να είναι εξίσου καλά. Γενικά αυτό που παρατηρήθηκε ήταν ότι μεγαλώνοντας τα p_1 , p_2 μεγαλώνει και η εκτίμηση για τα m,k, ενώ μικραίνει για b και αντιστρόφως. Το ζευγάρι που προτείνεται έδωσε το καλύτερο αποτέλεσμα (tradeoff) από όλα αυτά που δοκιμάστηκαν, και τελικά προσέγγιζε καλύτερα τις πραγματικές τιμές. Αξίζει να σημειωθεί παρόλα αυτά πως δεν είναι μία επιλογή που έγινε με κάποιον αυστηρό τρόπο και συνεπώς η βελτιστοποίηση της επιλογής δεν είναι απαραίτητα εξασφαλισμένη και μαθηματικά αποδεδειγμένη.

Παρατηρήσεις:

α) Στην προκειμένη περίπτωση, έχουμε ένα μηχανικό σύστημα (που γενικά έχουν χαμηλές φυσικές συχνότητες) και συνεπώς θέλουμε οι πόλοι κατά την τοποθέτησή τους να είναι κοντά στον φανταστικό άξονα. Εδώ, πχ έχουμε $p_1 p_2 = \omega_n^2$. Όπως γνωρίζουμε από την φυσική,

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{15}} \approx 0.365$, επομένως καταλαβαίνουμε γιατί πρέπει η επιλογή των πόλων να είναι σε αυτήν την περιοχή καθώς το «φιλτράρισμα» θα γίνει σε αυτές τις συχνότητες.

β) Για κάποια ζευγάρια, κάποιες από τις τιμές των παραμέτρων μπορεί να παίρνουν και ακριβώς την τιμή που θέλουμε (τουλάχιστον σε αυτήν την ακρίβεια), παρόλα αυτά φαίνεται ότι για αυτές δεν έχουμε τόσο καλή εκτίμηση για τις άλλες παραμέτρους. Για παράδειγμα, για $p_1 =$

0.6, $p_2 = 0.6$ παίρνουμε:

mest =

15.0024

kst =

2.0000

best =

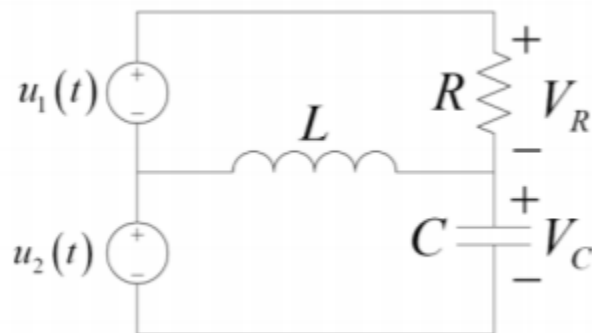
0.1982

Εδώ φαίνεται ότι έχουμε εκτιμήσει «τέλεια» (δηλαδή τέλεια σε αυτήν την ακρίβεια) την παράμετρο k , αλλά έχουμε απομακρυνθεί από την αληθινή τιμή της b , δηλαδή δεν έχουμε πετύχει ικανοποιητικό tradeoff.

γ) Σαφώς, οι εκτιμήσεις που κάνουμε γίνονται σε κάποια ακρίβεια. Αν γίνονται με διαφορετική ακρίβεια ενδέχεται να έχουμε μικρές διαφορές λόγω του λογισμικού που χρησιμοποιείται.

Θέμα 2°:

Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος:



όπου $u_1(t) = 2 \sin(t)$ V και $u_2(t) = 1$ V. Επιπλέον, μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τις τάσεις V_R, V_C στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή αντίστοιχα.

- a) Εκτιμήστε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τον πίνακα μεταφοράς του παραπάνω κυκλώματος. Οι τάσεις V_R, V_C παράγονται από το αρχείο v.p καλώντας την συνάρτηση ως εξής:

Vout = v(t) % για κάποιο t

VC = Vout(1), VR= Vout(2)

- b) Θεωρήστε ότι οι μετρήσεις V_R, V_C λαμβάνονται εσφαλμένα (π.χ. παράγετε τα σήματα V_R, V_C όπως πριν και προσθέστε σε 3 τυχαίες χρονικές στιγμές κάποιους τυχαίους αριθμούς πολύ μεγαλύτερης τάξης μεγέθους από τις κανονικές τιμές). Παρατηρήστε τι αντίκτυπο έχει αυτό το σφάλμα στις εκτιμήσεις των παραμέτρων μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.

Ανάλυση:

a) Αρχικά, πρέπει να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα. Γίνεται λοιπόν παρακάτω η ανάλυση του κυκλώματος με τους γνωστούς νόμους/εξισώσεις βρόχων. Έστω i_1 το ρεύμα του πάνω βρόχου, i_2 το ρεύμα του κάτω βρόχου και $i_L = i_1 - i_2$ το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο. Οι εξισώσεις βρόχων που προκύπτουν είναι:

$$\begin{aligned} \text{Πάνω βρόχος:} \quad u_1 &= V_R + L \frac{di_L}{dt} \\ \text{Κάτω βρόχος:} \quad u_2 &= V_C - L \frac{di_L}{dt} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= V_R + V_C \\ \Leftrightarrow u_1 + u_2 - V_C &= V_R \quad (2.1) \end{aligned}$$

Επίσης:

$$i_2 = C \frac{dV_C}{dt} \quad (2.2) \quad \text{και} \quad i_1 = \frac{V_R}{R} \quad (2.3)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$\begin{aligned} u_1 &= V_R + L \frac{di_L}{dt} \\ \Leftrightarrow u_1 &= V_R + L \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} \\ \Leftrightarrow u_1 &= V_R + L \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} \\ \Leftrightarrow (2.2)-(2.3) \quad u_1 &= V_R + \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} - LC \frac{d^2V_C}{dt^2} \\ \Leftrightarrow (2.1) \quad u_1 &= u_1 + u_2 - V_C + \frac{L}{R} \left(\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} - \frac{dV_C}{dt} \right) - LC \frac{d^2V_C}{dt^2} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C &= \frac{1}{RC} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{RC} \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{LC} \\ \Leftrightarrow \ddot{V}_C + \frac{1}{RC} \dot{V}_C + \frac{1}{LC} V_C &= \frac{1}{RC} \dot{u}_1 + \frac{1}{RC} \dot{u}_2 + \frac{1}{LC} u_2 \end{aligned}$$

Έστω τώρα για να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο που εφαρμόσαμε στην προηγούμενη άσκηση, θεωρούμε $y = V_C$ και τελικά θα έχουμε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα:

$$\ddot{y} + \frac{1}{RC} \dot{y} + \frac{1}{LC} y = \frac{1}{RC} \dot{u}_1 + \frac{1}{RC} \dot{u}_2 + \frac{1}{LC} u_2,$$

Θα φέρουμε λοιπόν και πάλι το σύστημα στη μορφή:

$$y^{(2)} = \theta^{*T} \Delta, \quad (2.4)$$

φτιάχνοντας το διάνυσμα θ^* των άγνωστων παραμέτρων, το οποίο θα είναι:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

και το διάνυσμα $\boldsymbol{\Delta}$ που περιέχει συγκεντρωμένα τα σήματα εισόδου-εξόδου με τις παραγώγους τους, δηλαδή

$$\boldsymbol{\Delta} = [-\dot{\mathbf{y}} \quad -\mathbf{y} \quad \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_2]^T = [-\boldsymbol{\Delta}_1^T \mathbf{y} \quad \boldsymbol{\Delta}_1^T \mathbf{u}_1 \quad \boldsymbol{\Delta}_1^T \mathbf{u}_2]^T$$

χρησιμοποιώντας τον Μ/Σ Laplace.

Το φίλτρο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι πάλι ένα ευσταθές φίλτρο $\frac{1}{\Lambda(s)}$ δευτέρης τάξης, δηλαδή

$\Lambda(s) = s^2 + s(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = (s + \mathbf{p}_1)(s + \mathbf{p}_2)$ όπου $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ οι πόλοι που τοποθετούμε στο αριστερό ημιεπίπεδο για την εξασφάλιση της ευστάθειας.

Έτσι, φιλτράροντας και τα δύο μέρη της (2.4) με το $\frac{1}{\Lambda(s)}$ καταλήγουμε σε σχέση της μορφής:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\zeta}$$

όπου:

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\Lambda(s)} \mathbf{y}^{(2)} = \frac{s^2}{\Lambda(s)} \mathbf{y}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \left[-\frac{\boldsymbol{\Delta}_1^T(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{y} \quad \frac{\boldsymbol{\Delta}_1^T(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{u}_1 \quad \frac{\boldsymbol{\Delta}_1^T(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{u}_2 \right]^T$$

$$\Lambda(s) = s^2 + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Delta}_1(s), \quad \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2]^T = [\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2]^T$$

Επομένως,

$$\mathbf{z} = \frac{s^2}{\Lambda(s)} \mathbf{y} = \frac{\Lambda(s) - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Delta}_1(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{y} = \mathbf{y} - \frac{\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Delta}_1(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{y}$$

Άρα:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \frac{\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Delta}_1(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{y} \quad (2.5)$$

Τώρα, χωρίζοντας το διάνυσμα στις παραμέτρους που αφορούν την είσοδο και την έξοδο αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\theta}_1^{*T} \boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2^{*T} \boldsymbol{\zeta}_2 + \boldsymbol{\theta}_3^{*T} \boldsymbol{\zeta}_3$$

όπου:

$$\boldsymbol{\theta}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\theta}_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\theta}_3^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

και

$$\boldsymbol{\zeta}_1 = -\frac{\boldsymbol{\Delta}_1^T(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\zeta}_2 = \frac{\boldsymbol{\Delta}_1^T(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{u}_1, \quad \boldsymbol{\zeta}_3 = \frac{\boldsymbol{\Delta}_1^T(s)}{\Lambda(s)} \mathbf{u}_2$$

Έτσι, τελικά η (Γ) :

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}_1^{*T} \boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2^{*T} \boldsymbol{\zeta}_2 + \boldsymbol{\theta}_3^{*T} \boldsymbol{\zeta}_3 - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\zeta}_1$$

⇔

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}_\lambda^T \boldsymbol{\zeta}$$

όπου

$$\theta_{\lambda} = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^{*T}]^T$$
$$\Leftrightarrow \theta_{\lambda} = \left[\frac{1}{RC} - (p_1 + p_2) \quad \frac{1}{LC} - p_1 p_2 \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \right]^T$$

και

$$\zeta = \left[-\frac{[s \quad 1]}{s^2 + s(p_1 + p_2) + p_1 p_2} y \quad \frac{[s \quad 1]}{s^2 + s(p_1 + p_2) + p_1 p_2} u_1 \quad \frac{[s \quad 1]}{s^2 + s(p_1 + p_2) + p_1 p_2} u_2 \right]^T$$

Στην συνέχεια, η ανάλυση στο διάνυσμα \mathbf{Y} , ο πίνακας Φ καθώς και η λύση της εξίσωσης $\theta_0^T (\Phi^T \Phi) = \mathbf{Y}^T \Phi$ που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση \mathbf{V}_N γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με το 1^ο Θέμα.

Έχοντας κάνει λοιπόν την ανάλυση του συστήματος, τα βήματα που θα ακολουθήσουμε είναι τα εξής:

1) Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις από το αρχείο v.p, τρέχουμε με τη βοήθεια του MATLAB τον αλγόριθμο της εύρεσης των άγνωστων παραμέτρων με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Κατά την διαδικασία αυτή δοκιμάζονται διαφορετικές θέσεις τοποθέτησης των πόλων. Στόχος μας αφού έχουμε πλέον εκτιμήσει τον πίνακα

$$\theta^* = \left[\frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \right]^T$$

είναι

το 1^ο, 3^ο, και 5^ο στοιχείο να έχουν πολύ κοντινές τιμές,
το 2^ο και το 6^ο στοιχείο να έχουν πολύ κοντινές τιμές
και το 4^ο στοιχείο να τείνει στο 0.

2) Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους που εκτιμήσαμε, θα τρέξουμε με αυτές τις τιμές μία νέα προσομοίωση με τη βοήθεια της συνάρτησης ode45 για αξιολόγηση του μοντέλου που φτιάξαμε. Η έξοδος της συνάρτησης θα μας δώσει ένα νέο διάνυσμα $\mathbf{V}_{C_{new}}$. Έτσι, φτιάχνουμε το σφάλμα εκτίμησης της πρώτης εξόδου

$\mathcal{E}_C = \mathbf{V}_C - \mathbf{V}_{C_{new}}$ που πήραμε με το μοντέλο που εκτιμήσαμε σε σχέση με το διάνυσμα \mathbf{V}_C που περιέχει τις αυθεντικές μετρήσεις του συστήματος.

3) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.1) θα κάνουμε την ίδια διαδικασία για το

$$\mathbf{V}_{R_{new}} = -\mathbf{V}_{C_{new}} + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

βρίσκοντας το

$$\mathcal{E}_R = \mathbf{V}_R - \mathbf{V}_{R_{new}}$$

4) Μελετώντας την επιρροή των πόλων με την μέθοδο δοκιμή-σφάλμα θα βρούμε που αυτά τα σφάλματα ελαχιστοποιούνται.

Έτσι, αφού η διαδικασία τελειώσει και έχοντας πλέον τους πόλους που βελτιστοποιούν την εκτίμηση, θεωρούμε ότι οι παράμετροι που βρίσκουμε είναι αυτές που θα χρησιμοποιήσουμε και στον πίνακα μεταφοράς του συστήματός μας. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τις σχέσεις που έχουμε ξεκινώντας πρώτα για το \mathbf{V}_C

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}u_1 + \frac{1}{RC}u_2 + \frac{1}{LC}u_2$$

Χρησιμοποιώντας τον Μ/Σ Laplace:

$$V_C(s) \left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = \frac{s}{RC}U_1(s) + \left(\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right)U_2(s)$$

Έτσι παίρνω τις εξής συναρτήσεις μεταφοράς:

$$G_{C1} = \frac{V_C(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}, \quad \text{για } U_2(s) = 0$$

$$G_{C2} = \frac{V_C(s)}{U_2(s)} = \frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}, \quad \text{για } U_1(s) = 0$$

Αντίστοιχα, αν στη σχέση

$$V_C(s) \left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = \frac{s}{RC}U_1(s) + \left(\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right)U_2(s)$$

χρησιμοποιήσουμε την (2.1), αφού χρησιμοποιήσουμε σε αυτήν τον Μ/Σ Laplace, θα έχουμε:

$$(U_1(s) + U_2(s) - V_R(s)) \left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = \frac{s}{RC}U_1(s) + \left(\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right)U_2(s)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$V_R(s) \left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = U_1(s) \left(s^2 + \frac{1}{LC}\right) + U_2(s)s^2$$

και έτσι παίρνω τις εξής συναρτήσεις μεταφοράς:

$$G_{R1} = \frac{V_R(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}, \quad \text{για } U_2(s) = 0$$

$$G_{R2} = \frac{V_R(s)}{U_2(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}, \quad \text{για } U_1(s) = 0$$

Τελικά ο πίνακας μεταφοράς θα είναι:

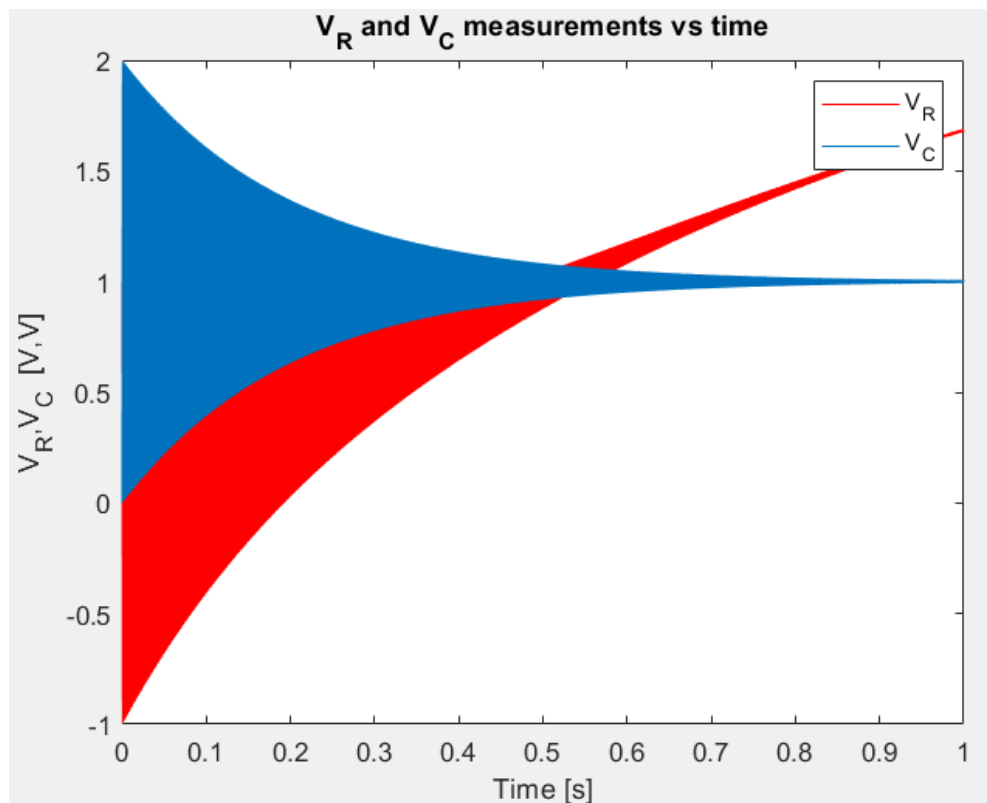
$$\begin{bmatrix} V_R \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{R1} & G_{R2} \\ G_{C1} & G_{C2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

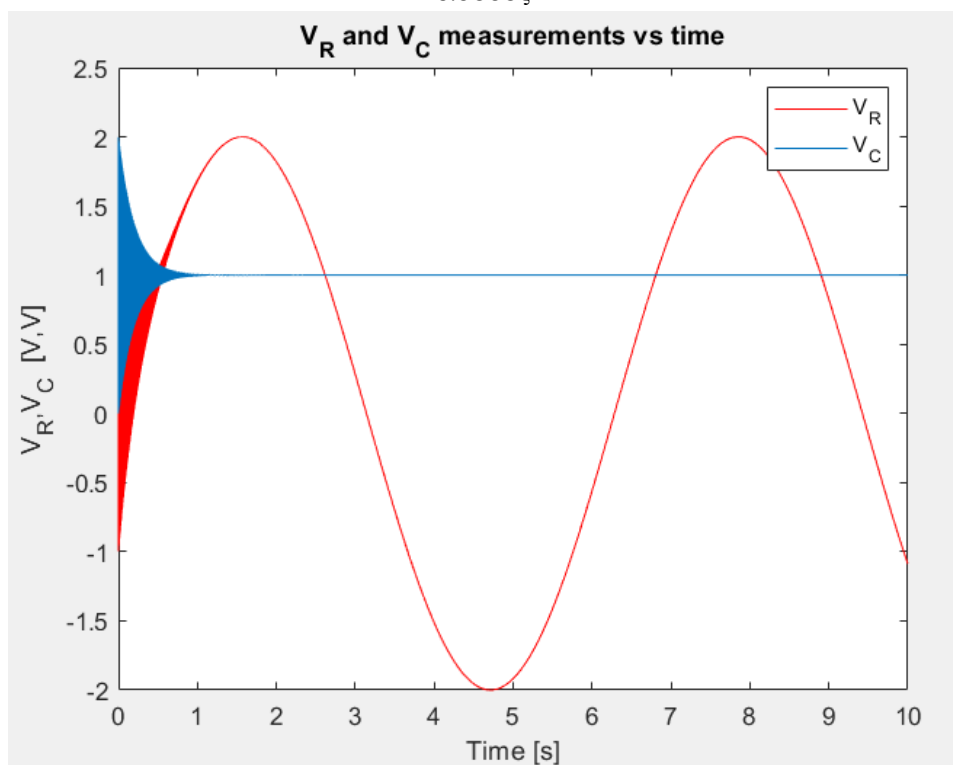
$$\begin{bmatrix} V_R \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \\ \frac{s}{RC} & \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Έτσι, έχοντας εκτιμήσει τα $\frac{1}{LC}$, $\frac{1}{RC}$, έχουμε ουσιαστικά εκτιμήσει και τον πίνακα μεταφοράς.

Το διάγραμμα των μετρήσεων από το αρχείο v.p είναι (με βήμα $t_{\text{step}} = 0.00001$ για το πρώτο δευτερόλεπτο):



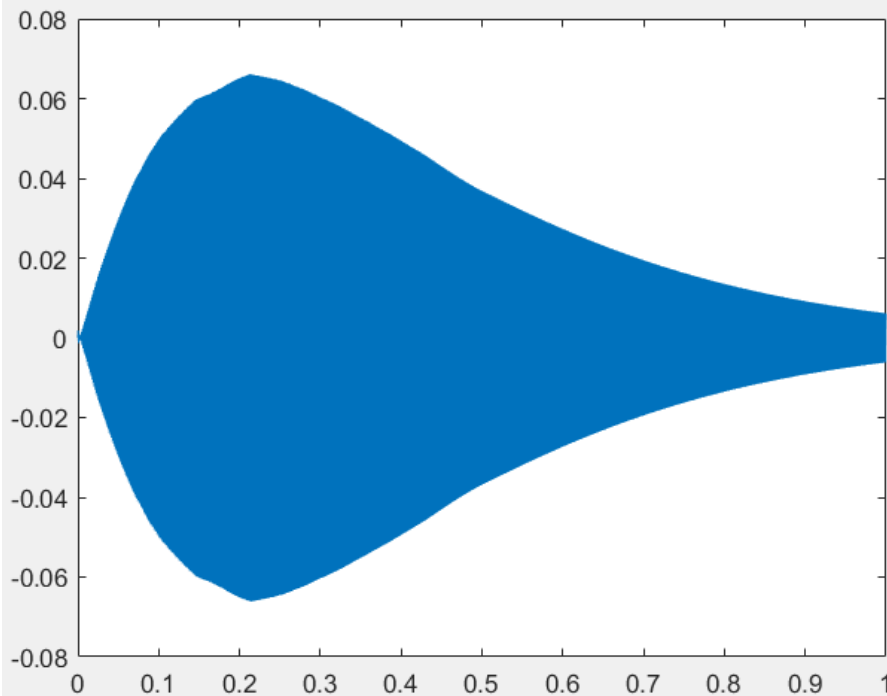
Όπως βλέπουμε, οι ταλαντώσεις που έχουμε στις μετρήσεις μας γίνονται σε αυτόν τον χρόνο ενώ για μεγαλύτερο χρόνο θα δούμε ότι οι έξοδοι έχουν πάρει τη μορφή που τους επιβάλλει η εκάστοτε είσοδος:



Επιλογή των πόλων (πειραματικό επίπεδο):

Η επιλογή έγινε και πάλι με την μέθοδο δοκιμή-σφάλμα. Πρώτα από όλα, παρατηρήθηκε ότι το χρονικό βήμα και διάρκεια που παίρνουμε τις μετρήσεις παίζουν καθοριστικό ρόλο στην ακρίβεια των εκτιμήσεων, για παράδειγμα για χρονικό βήμα $t_{\text{step}} = 0.0001$ οι πόλοι που οδηγούν σε προσέγγιση ώστε τα αποτελέσματα να "συμφωνούν" καλύτερα στο διάνυσμα θ , είναι κοντά στο **9.5**, ενώ αν μεγαλώσω τους πόλους τα αποτελέσματα «φθερίζονται» σημαντικά. Παρόλα αυτά, αν πάρω μετρήσεις με μικρότερο βήμα χρόνου, δηλαδή για $t_{\text{step}} = 0.00001$, τα αποτελέσματα γίνονται καλύτερα με σημαντικά μεγαλύτερους πόλους στο **100** (η οποία είναι και η μέση λύση) , ενώ για ακόμα μικρότερο βήμα $t_{\text{step}} = 0.000001$, οι "καλύτεροι" πόλοι είναι **κοντά στο 370**. Συγκεκριμένα, κατά τις προσομοιώσεις ακολουθήθηκε η εξής πρακτική:

Δοκιμάζοντας τα 3 παραπάνω χρονικά βήματα, ελέγχθηκαν ζευγάρια πόλων μέσα σε μία for σε ένα εύρος τιμών [1, 700] στην οποία πρώτα έτρεχε η προσομοίωση και η εύρεση του πίνακα θ^* και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας (με μία μέση τιμή των όρων, 1° 3° 5° για το **RC** και 2° 6° για το **LC**) τις εκτιμώμενες παραμέτρους προσομοιώνουμε το μοντέλο, παίρνουμε βρίσκουμε την μέγιστη τιμή των σφαλμάτων και την αποθηκεύουμε σε έναν πίνακα. Τέλος, βρίσκουμε που έχει ελάχιστο αυτός ο πίνακας. Τα αποτελέσματα διέφεραν αρκετά με διαφορετικά χρονικά βήματα, έτσι ανάλογα με το τι ακρίβεια θέλουμε και το πόση υπολογιστική δύναμη είμαστε διατεθειμένοι να διαθέσουμε, θα κάνουμε την αντίστοιχη επιλογή. Εδώ θα χρησιμοποιηθούν **πόλοι στο 370** για λόγους ακρίβειας. Να σημειωθεί ότι τα σφάλματα έχουν μία τέτοια μορφή:



Επομένως, είναι προφανές από το διάγραμμα ότι υπάρχει μέγιστο και εμείς δοκιμάζουμε πόλους ώστε να βρούμε σε ποιους πόλους ελαχιστοποιείται αυτό το μέγιστο.

Τελικά, ο πίνακας μεταφοράς που βρίσκουμε **για πόλους στο 370** είναι:

Transfer Function Matrix

G =

From input 1 to output...

$$s^2 + 2.5e07$$

$$1: \frac{\quad}{s^2 + 9.999 s + 2.5e07}$$

$$9.999 s$$

$$2: \frac{\quad}{s^2 + 9.999 s + 2.5e07}$$

From input 2 to output...

$$s^2$$

$$1: \frac{\quad}{s^2 + 9.999 s + 2.5e07}$$

$$9.999 s + 2.5e07$$

$$2: \frac{\quad}{s^2 + 9.999 s + 2.5e07}$$

Continuous-time transfer function.

ενώ το θ^* είναι:

theta =

Columns 1 through 3

9.99849990483835

25000050.5447192

10.000796778062

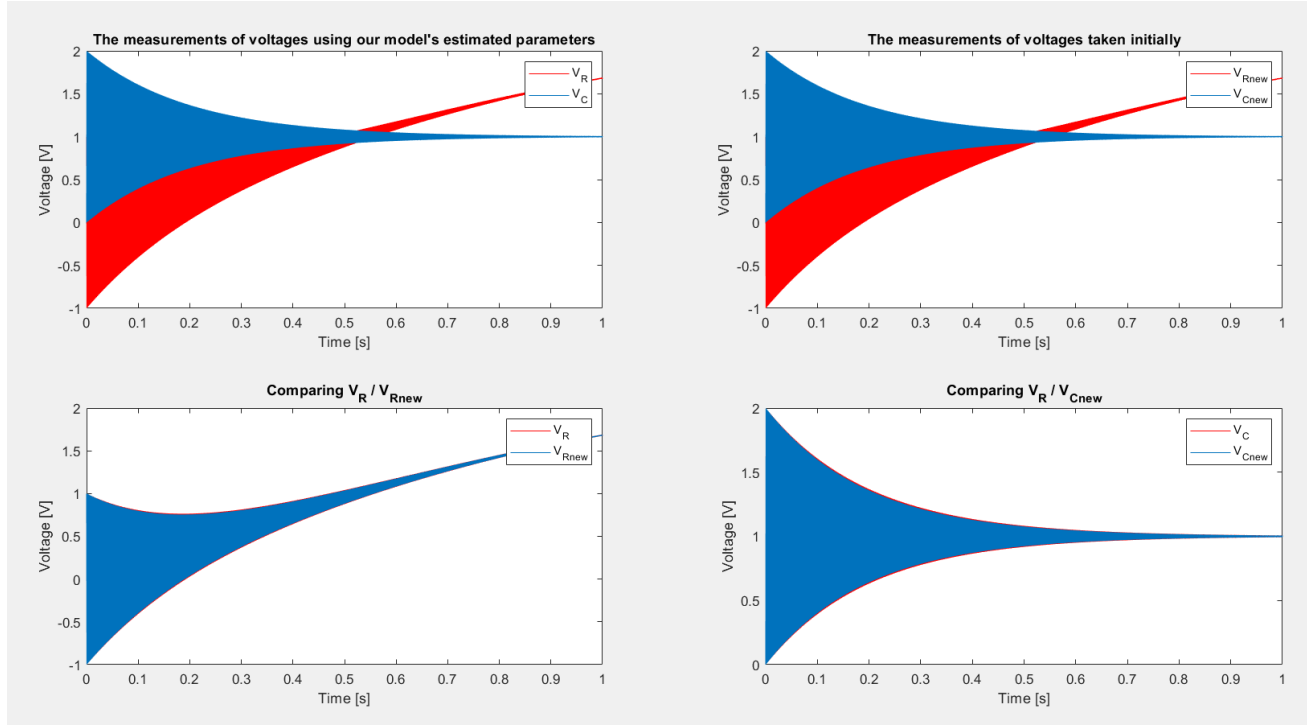
Columns 4 through 6

0.000441739906656177

9.99848026821773

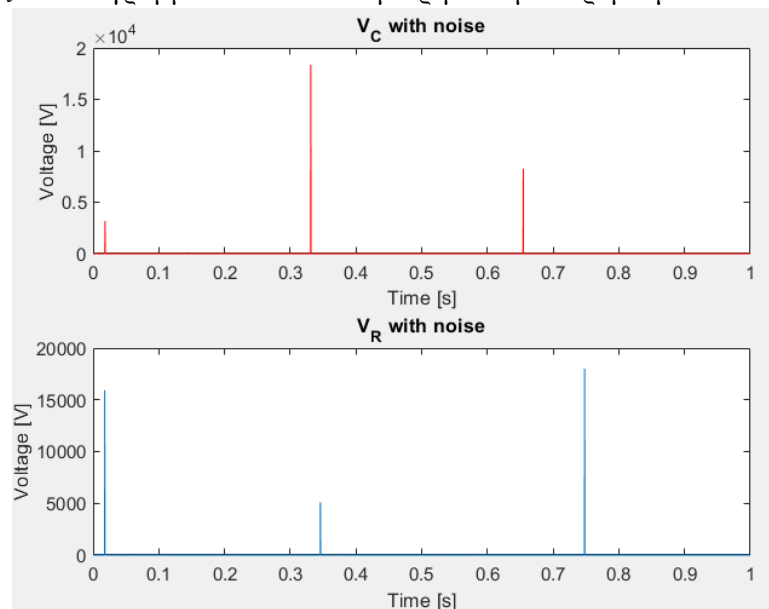
25000050.5429985

Στα παρακάτω γραφήματα φαίνονται οι συγκρίσεις/σφάλματα των μετρήσεών μας με τις μετρήσεις που προκύπτουν από το μοντέλο που εκτιμήσαμε:



ενώ αν ελέγξουμε και τα σφάλματα θα δούμε μικρές διαφορές. Είναι ξεκάθαρο ότι όταν προσεγγίζουμε καλά, οι παράμετροι $\frac{1}{RC}$ τείνουν να πάρουν την τιμή **10** ενώ οι παράμετροι $\frac{1}{LC}$ τείνουν στον αριθμό **2.5e07**.

b) Θα μελετήσουμε την επίδραση θορύβου/διαταραχής στις μετρήσεις μας προσθέτοντας έναν μεγάλο τυχαίο αριθμό σε τυχαία χρονική στιγμή (εννοείται μεγάλος συγκριτικά με τις μετρήσεις, εδώ επιλέγεται ένας αριθμός από το διάστημα [1000,20000]). Θα κάνουμε το παραπάνω για 3 μετρήσεις. Τα διαγράμματα λοιπόν των μετρήσεων με θόρυβο φαίνονται παρακάτω:



Έτσι, το θ^* θα είναι τώρα:

thetab =

Columns 1 through 3

-376.269588111448

27189634.1366386

23412.8193525368

Columns 4 through 6

9302.84445605986

-381.323093796204

27145776.4156683

Οι παραπάνω τιμές μας δείχνουν ότι τα αποτελέσματα έχουν ξεφύγει αρκετά από τις «αναμενόμενες» σε σχέση με τα αποτελέσματα χωρίς θόρυβο τιμές. Ουσιαστικά με τον θόρυβο που προσθέτουμε, ο αλγόριθμος αποκτάει μία «μεροληψία» από αυτές τις ακραίες τιμές και αλλάζει το σημείο στο οποίο έχουμε ελάχιστο. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην παρουσία θορύβου έχουμε ακόμα και αρνητικές τιμές, κάτι που σίγουρα δεν περιμένουμε από την θεωρητική ανάλυση.

Αν θεωρήσουμε ότι έχω εξαρχής αυτές τις μετρήσεις με τον θόρυβο, μία λύση (δεδομένου ότι έχουμε ταλάντωση) είναι να βρω τις χρονικές στιγμές που εμφανίζονται οι ακραίες τιμές και να τις «κανονικοποιήσω» ορίζοντας τις στον μέσο όρο της προηγούμενης και επόμενης χρονικής στιγμής κάθε φορά.

Σημείωση:

Στον κώδικα, η for που αναφέρεται παραπάνω είναι «απενεργοποιημένη» σε μορφή σχολίων (σαφώς για λόγους ταχύτητας εκτέλεσης από τον αναγνώστη του κώδικα) και αντ' αυτής έχουν προταθεί κατευθείαν οι πόλοι που επιλέγονται.