

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών  
Υπολογιστών

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών  
Συστημάτων

Εργασία 2<sup>η</sup> – Εαρινό Εξάμηνο 2020/2021



Καβελίδης Φραντζής Δημήτριος – AEM 9351

19/5/2021

## Εργασία 2<sup>η</sup> – Online / Real Time εκτίμηση παραμέτρων

Στην συγκεκριμένη εργασία γίνεται online/real time εκτίμηση άγνωστων παραμέτρων με τη μέθοδο κλίσης και τη μέθοδο Lyapunov (Παράλληλη και Μικτή δομή).

Για τους σκοπούς της ανάλυσης θεωρούμε το σύστημα:

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0 \quad (1)$$

Όπου  $x$  είναι η κατάσταση του συστήματος,  $a = 2$ ,  $b = 1$  οι πραγματικές τιμές των σταθερών παραμέτρων οι οποίες θέλουμε να εκτιμήσουμε και  $u = 5 \cdot \sin(3t)$ .

### Θέμα 1<sup>ο</sup>

Σχεδίαση και προσομοίωση ενός εκτιμητή πραγματικού χρόνου βασισμένο στην μέθοδο κλίσης για την εκτίμηση του  $x$ , του  $a$  και του  $b$  (δηλαδή τις  $\hat{x}$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ).

### Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σχεδίαση και προσομοίωση ενός εκτιμητή πραγματικού χρόνου βασισμένο στην μέθοδο Lyapunov

α) Παράλληλης δομής

β) Μικτής δομής

για την εκτίμηση του  $x$ , του  $a$  και του  $b$  (δηλαδή τις  $\hat{x}$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ), χωρίς παρουσία θορύβου. Στην συνέχεια, προσομοίωση/εκτίμηση παρουσία θορύβου. Ο θόρυβος μετριέται:

$\eta(t) = \eta_0 \cdot \sin(2\pi ft)$  με  $\eta_0 = 0.15$ ,  $f = 20$ .

Σύγκριση των μεθόδων. Παρατηρήσεις για μεταβολές στο  $\eta_0$  και το  $f$ .

-----  
Θεωρούμε το σύστημα δεύτερης τάξης:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Όπου  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  είναι η καταστάσεις του συστήματος,  $u = 10 \cdot \sin(2t) + 5 \cdot \sin(7.5t)$  είναι η είσοδος και  $\alpha_{11} = -0.25$ ,  $\alpha_{12} = 3$ ,  $\alpha_{21} = -5$ ,  $\alpha_{22} = -1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 2.2$  οι πραγματικές τιμές των σταθερών παραμέτρων.

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

Σχεδίαση και προσομοίωση ενός εκτιμητή πραγματικού χρόνου βασισμένο στην μέθοδο Lyapunov παράλληλης δομής για το MIMO σύστημα και παρουσίαση των εκτιμήσεων.

## Ανάλυση:

### Θέμα 1°

Το σύστημα μας στην (1) είναι σε μορφή εξισώσεων κατάστασης. Είναι γνωστό ότι για την ευστάθεια του συστήματος πρέπει  $\mathbf{a} > \mathbf{0}$  το οποίο ισχύει. Για να ακολουθήσουμε τις ζητούμενες μεθόδους, πρέπει το σύστημα να είναι στην κατάλληλη μορφή. Έτσι λοιπόν αρχικά θα φέρουμε το σύστημα σε γραμμικά παραμετρική μορφή. Για να το κάνουμε αυτό θα φιλτράρουμε την (1) με ένα ευσταθές φίλτρο πρώτης τάξης  $\frac{1}{\Lambda(s)}$ , δηλαδή  $\Lambda(s) = s + a_m$  με  $a_m > 0$  ως εξής:

i) προσθέτουμε και στα δύο μέλη της (1) τον όρο  $\mathbf{a}_m \mathbf{x}$ :

$$\dot{\mathbf{x}} + a_m \mathbf{x} = -a \mathbf{x} + a_m \mathbf{x} + b u$$

ii) Περνάμε με Μ/Σ Laplace στο πεδίο της συχνότητας:

$$s \mathbf{x} + a_m \mathbf{x} = -a \mathbf{x} + a_m \mathbf{x} + b u$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{x}(s + a_m) = (a_m - a) \mathbf{x} + b u$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{(s + a_m)} [(a_m - a) \mathbf{x} + b u]$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\varphi}, \quad (3)$$

$$\text{Όπου } \boldsymbol{\theta}^* = [a_m - a \quad b]^T \text{ και } \boldsymbol{\varphi} = \left[ \frac{1}{(s+a_m)} \mathbf{x} \quad \frac{1}{(s+a_m)} u \right]^T$$

Επομένως τώρα η (3) εκφράζει την εξίσωση (1) στην γραμμικά παραμετρική μορφή της.

Η δε εκτίμηση λοιπόν της εξόδου  $\mathbf{x}$  θα είναι:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}$$

Όπου  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  το διάνυσμα με τις εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων.

$$\text{Σχηματίζουμε το σφάλμα αναγνώρισης } \mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = (\boldsymbol{\theta}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varphi} = -\tilde{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{e} = -\tilde{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\varphi}$$

$$\text{Όπου } \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*$$

### Μέθοδος Κλίσης:

Ορίζουμε την συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, δηλαδή την  $K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{\theta}^T \varphi)^2}{2}$

Σύμφωνα με τη μέθοδο κλίσης:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K$$

Το δε διάνυσμα κλίσης της συνάρτησης  $K(\hat{\theta})$  είναι:

$$\nabla K = -e\varphi$$

Επομένως  $\dot{\hat{\theta}} = \gamma e\varphi$  με  $\gamma > 0$  μία σταθερά, και  $\hat{\theta}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (δική μας επιλογή)

Έτσι, έχουμε τα διανύσματα

$$\varphi_1 = \frac{1}{(s + a_m)} x$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{(s + a_m)} u$$

Ενώ περνώντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις στο πεδίο του χρόνου (για μηδενικές αρχικές συνθήκες) θα έχουμε τελικά το εξής σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x} = -ax + bu, & x(0) = 0 \\ \dot{\varphi}_1 = a_m \varphi_1 + x, & \varphi_1(0) = 0 \\ \dot{\varphi}_2 = a_m \varphi_2 + x, & \varphi_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1, & \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2, & \hat{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}$$

Έτσι, λύνοντας το παραπάνω σύστημα, κάνουμε εκτίμηση πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων  $a$  και  $b$ , αφού αυτές προκύπτουν τελικά ως εξής:

$$\hat{a} = a_m - \hat{\theta}_1$$

$$\hat{b} = \hat{\theta}_2$$

Παρόλο που το πραγματικό σύστημα στην (1) είναι ευσταθές δεδομένου ότι έχουμε φραγμένη είσοδο-φραγμένη έξοδο, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε το ίδιο για το σύστημα αναγνώρισης (3) που προκύπτει καθώς η εκτίμηση  $\hat{\theta}(t)$  που κάνουμε ενδέχεται να οδηγήσει το σύστημα σε αστάθεια. Γνωρίζουμε από

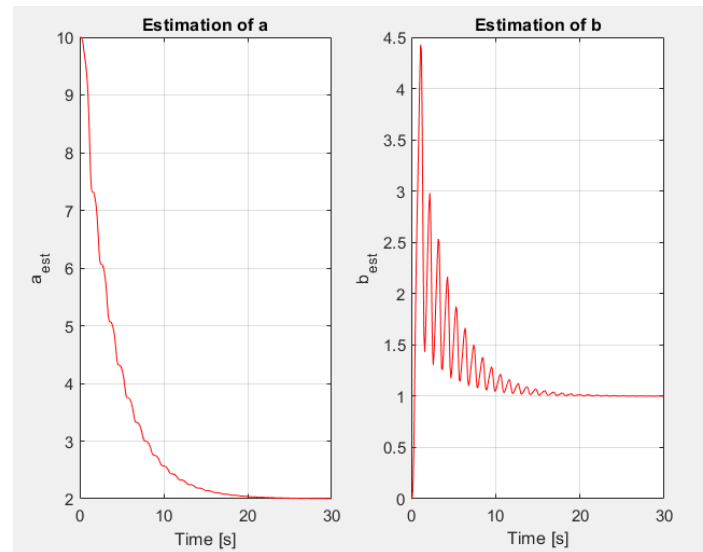
την θεωρία όμως ότι η συνάρτηση Lyapunov  $V = \frac{\bar{\theta}^2}{2} \geq 0$  και η ανάλυσή της (μηδενισμός του σφάλματος στο άπειρο, λήμμα Barbalat), θα μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι για είσοδο  $u$  για την οποία ισχύει  $u, \dot{u}$  φραγμένες, θα έχουμε ευσταθές σύστημα και ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων θα οδηγήσει ασυμπτωτικά το σύστημα σε μηδενισμό του σφάλματος, δηλαδή η έξοδος  $\hat{x}$  θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στην έξοδο  $x$  του πραγματικού συστήματος.

### Αποτελέσματα Προσομοίωσης/Εκτίμησης Παραμέτρων:

Η σχεδίαση του συστήματός μας σαφώς έχει να κάνει με τις απαιτήσεις που έχουμε. Το πιθανότερο είναι σε ένα πραγματικό πρόβλημα να ενδιαφερόμαστε για την ταχύτητα εκτίμησης (δηλαδή ταχύτητα σύγκλισης της απόκρισης του συστήματος αναγνώρισης στην απαιτούμενη τιμή) και για την ανύψωση (overshoot) κι επομένως την απόκλιση του σφάλματος μέχρι αυτό να μηδενιστεί.

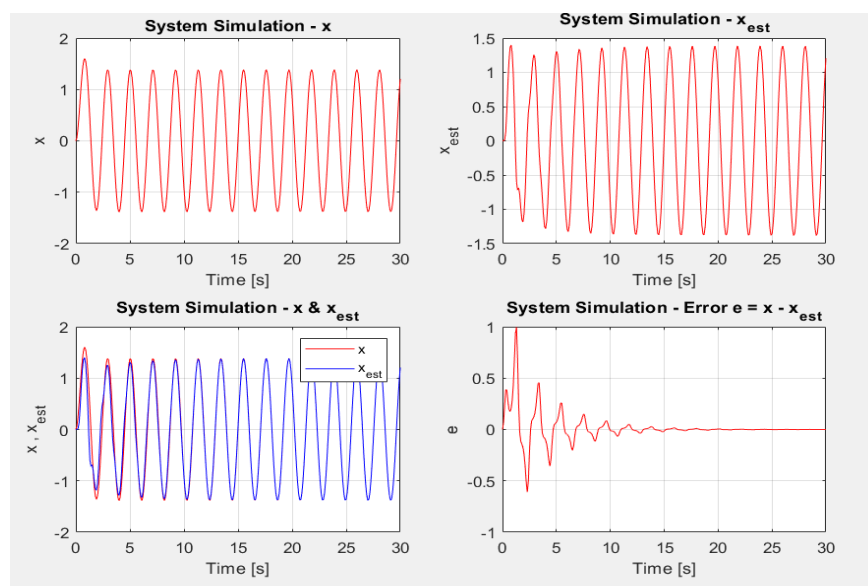
Στην συγκεκριμένη εργασία, η διαδικασία σχεδίασης γίνεται πειραματικά, δηλαδή διαλέγονται τα  $a_m$  και  $\gamma$  με την πρακτική δοκιμής και σφάλματος (*trial and error*).

Ξεκινώντας, κάνουμε μία τελείως τυχαία πρώτη δοκιμή σχεδιάζοντας με τιμές  $a_m = 10$ ,  $\gamma = 50$ :



Εκτιμήσεις 1: Εκτίμηση  $a$  και  $b$  με  $a_m = 10$ ,  $\gamma = 50$

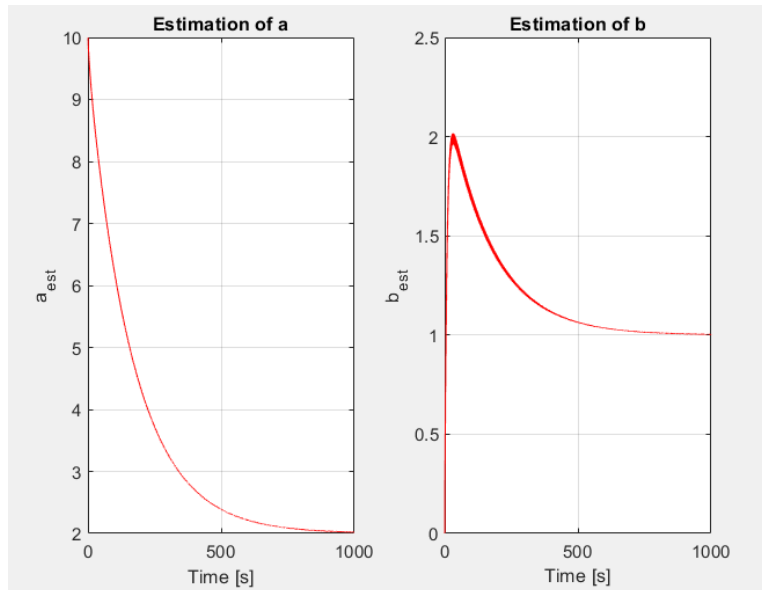
Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση στις πραγματικές τιμές γίνεται περίπου στα 25 sec. Παρακάτω στην εικόνα «Εκτιμήσεις 2» βλέπουμε το σφάλμα να ταλαντώνει πριν μηδενιστεί.



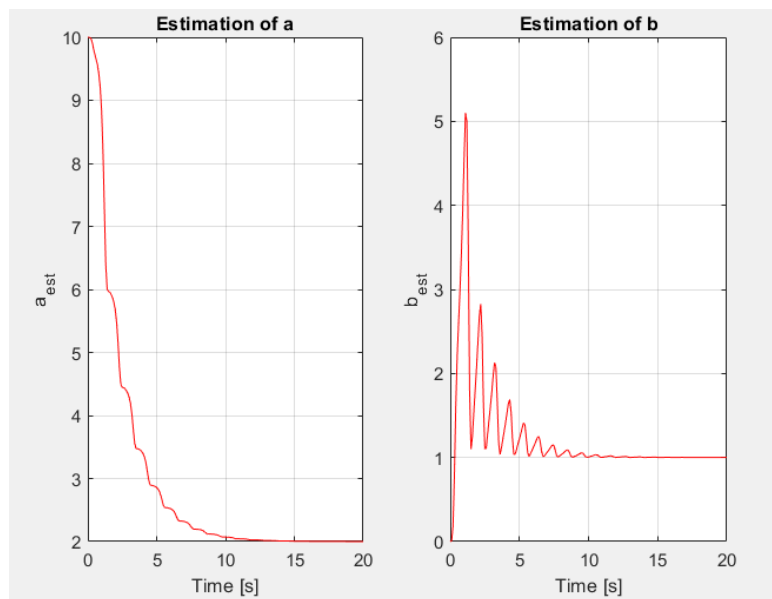
Εκτιμήσεις 2: Προσομοίωση πραγματικού συστήματος, συστήματος αναγνώρισης και σφάλματος με  $a_m = 10$ ,  $\gamma = 50$

Στη συνέχεια, κρατάμε σταθερό το  $a_m$  και μεταβάλλουμε την τιμή του  $\gamma$ .

Παρατηρούμε ότι για άλλες τιμές του  $\gamma$  ο χρόνος σταθεροποίησης της εκτίμησης (μηδενισμός του σφάλματος) επηρεάζεται σημαντικά:

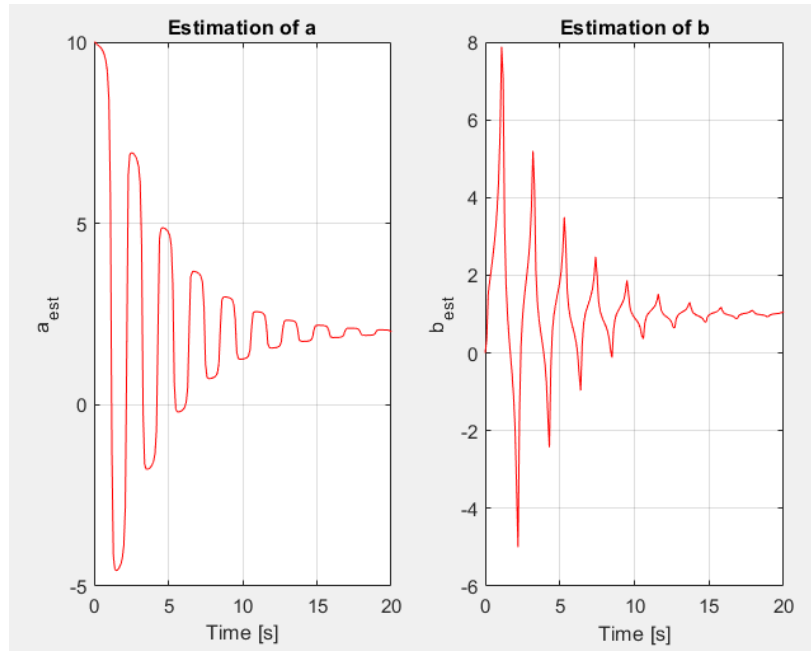


Εκτιμήσεις 3: Εκτίμηση  $a$  και  $b$  με  $a_m = 10$ ,  $\gamma = 1$

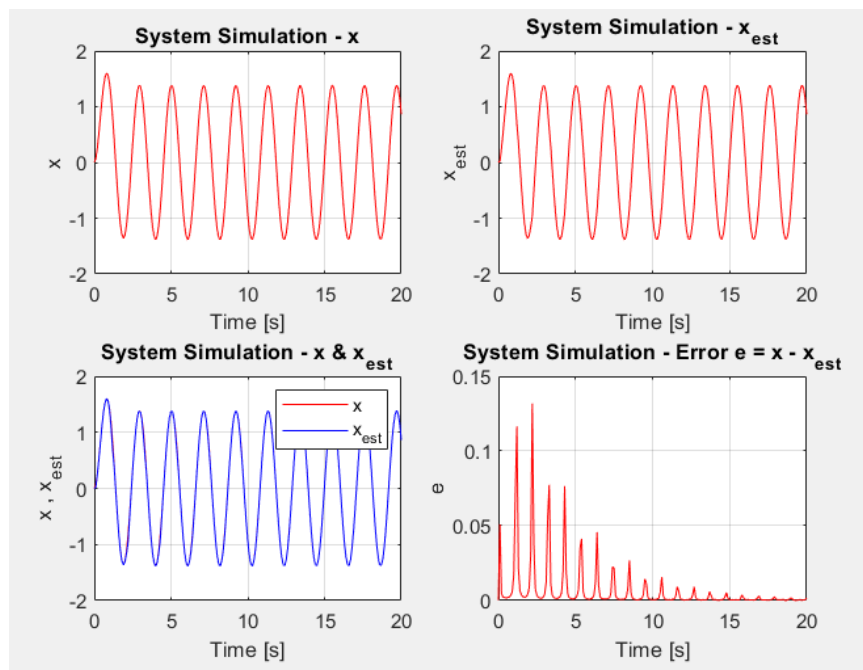


Εκτιμήσεις 4: Εκτίμηση  $a$  και  $b$  με  $a_m = 10$ ,  $\gamma = 100$

Είναι σαφές ότι για τις μεγαλύτερες τιμές του  $\gamma$  έχουμε σημαντικά γρηγορότερη εκτίμηση. Παρόλα αυτά φαίνεται ότι αυτό δεν είναι κάτι που συνεχίζεται επ' αορίστου καθώς φαίνεται να υπάρχει κάποια τιμή του  $\gamma$  η οποία σχετίζεται με την τιμή που έχουμε διαλέξει για το  $a_m$  την οποία αν ξεπεράσουμε φαίνεται πως τόσο ο χρόνος σύγκλισης όσο και η απόκλιση που έχει σφάλμα αρχίζουν να μεγαλώνουν.

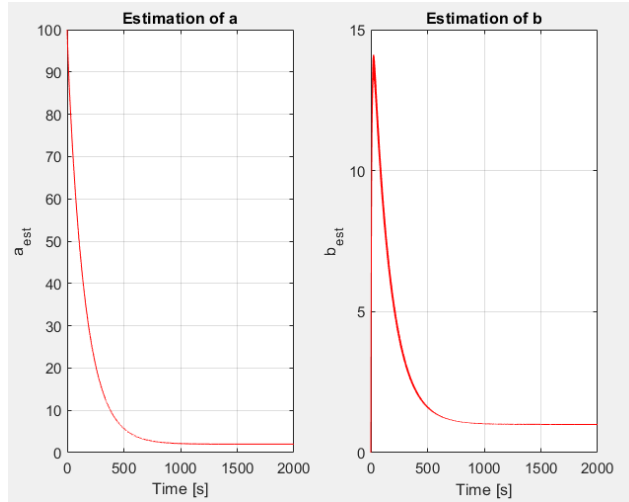


Εκτιμήσεις 5: Εκτίμηση  $a$  και  $b$  με  $a_m = 10$ ,  $\gamma = 5000$

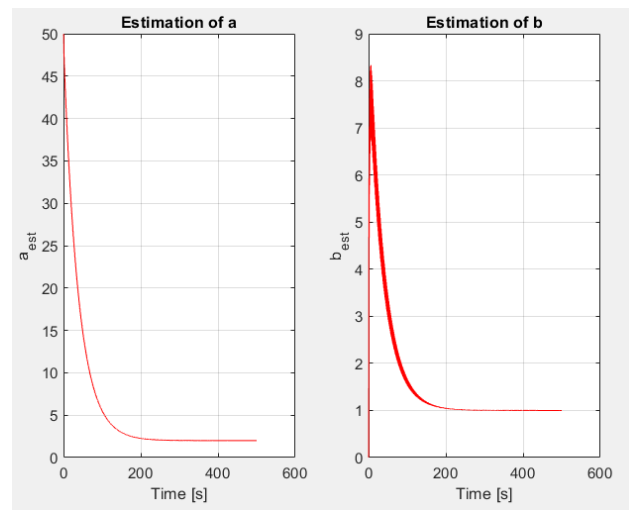


Εκτιμήσεις 6: Προσομοίωση πραγματικού συστήματος, συστήματος αναγνώρισης και σφάλματος με  $a_m = 10$ ,  $\gamma = 5000$

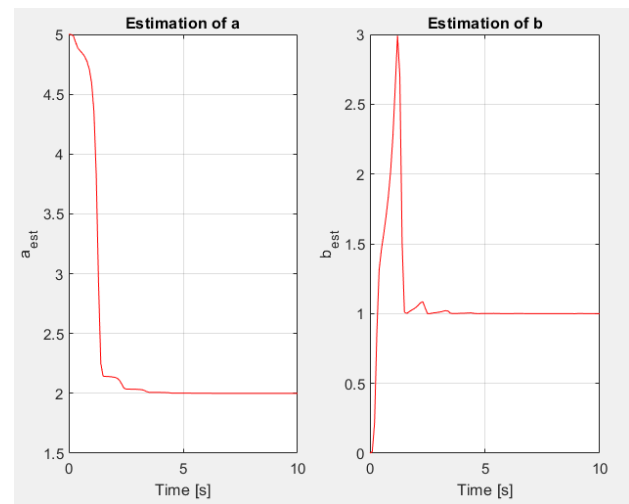
Ας δούμε τώρα την επίδραση του  $a_m$  κρατώντας σταθερό το  $\gamma = 100$ :



Εκτιμήσεις 7: Εκτίμηση  $a$  και  $b$  με  $a_m = 100$ ,  $\gamma = 100$

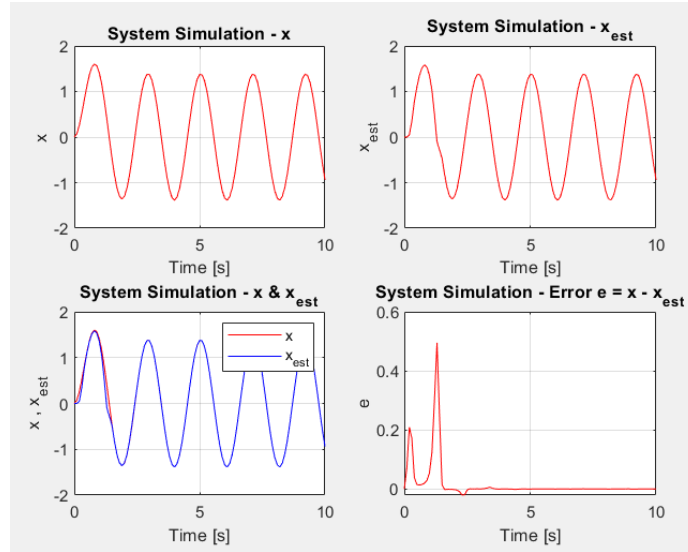


Εκτιμήσεις 8: Εκτίμηση  $a$  και  $b$  με  $a_m = 50$ ,  $\gamma = 100$

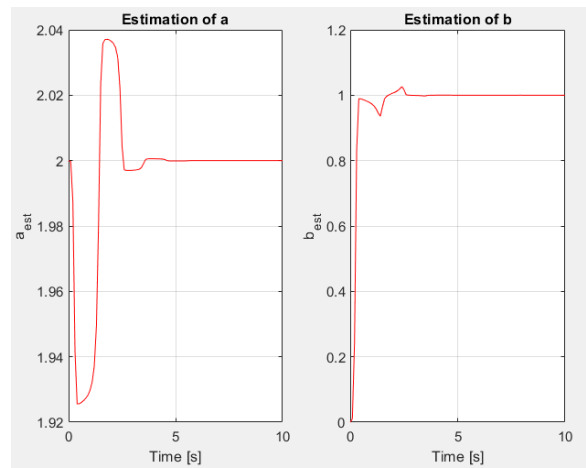


Εκτιμήσεις 9: Εκτίμηση  $a$  και  $b$  με  $a_m = 5$ ,  $\gamma = 100$

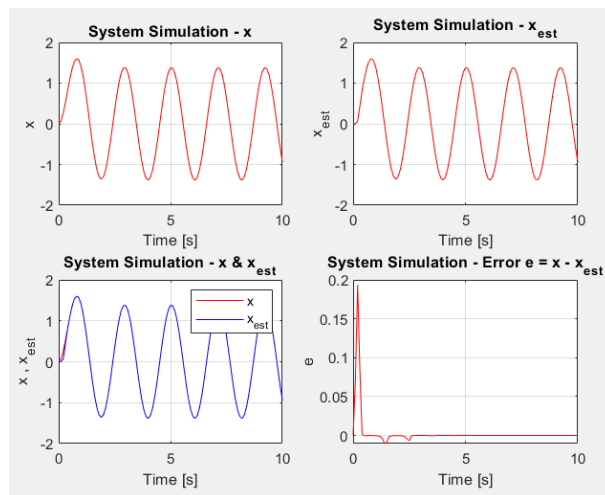




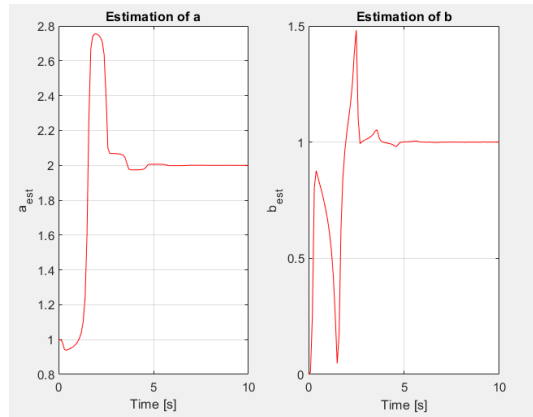
Εκτιμήσεις 10: Προσομοίωση πραγματικού συστήματος, συστήματος αναγνώρισης και σφάλματος με  $a_m = 5$ ,  $\gamma = 100$



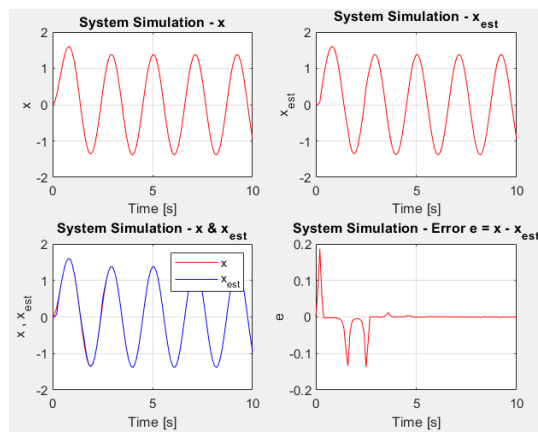
Εκτιμήσεις 11: Εκτίμηση  $a$  και  $b$  με  $a_m = 2$ ,  $\gamma = 100$



Εκτιμήσεις 12: Προσομοίωση πραγματικού συστήματος, συστήματος αναγνώρισης και σφάλματος με  $a_m = 2$ ,  $\gamma = 100$

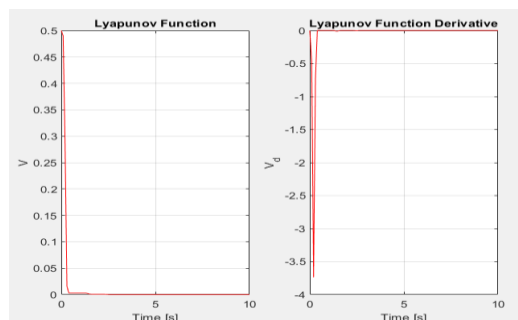


Εκτιμήσεις 13: Εκτίμηση  $a$  και  $b$  με  $a_m = 1$ ,  $\gamma = 100$



Εκτιμήσεις 14: Προσομοίωση πραγματικού συστήματος, συστήματος αναγνώρισης και σφάλματος με  $a_m = 1$ ,  $\gamma = 100$

Βλέπουμε εύκολα ότι όσο πιο κοντά είναι το  $a_m$  στην πραγματική τιμή του  $a$ , δηλαδή το  $a = 2$ , τόσο καλύτερη και γρηγορότερη γίνεται η εκτίμηση (τουλάχιστον για αυτό το  $\gamma$ ). Συνεχίζοντας την ερευνα έχοντας αυτά τα παραπάνω ως δεδομένα **καταλήγουμε ότι το καλύτερο tradeoff** μεταξύ ταχύτητας σύγκλισης και overshoot είναι όντως στις τιμές  **$a_m = 2$ ,  $\gamma = 100$** . Φυσικά, αυτό είναι αναμενόμενο καθώς για  $a_m = 2$  θα γίνει  $x = \frac{1}{(s+a_m)}bu$ . Σε πραγματικές συνθήκες, που δεν θα γνωρίζαμε το  $a$ , θα θέλαμε ουσιαστικά το  $a_m$  να πλησιάζει όσο γίνεται το  $a$ . Μία καλή πρακτική θα ήταν να βρούμε πρώτα ποια είναι η τιμή του  $a$ , ακόμα και με μία κακή εκτίμηση, και στη συνέχεια να βάλουμε την τιμή του  $a_m$  ίση με του  $a$ . Στην προκειμένη, γνωρίζουμε την τιμή του. Για αυτές τις τιμές παίρνουμε και το διάγραμμα της συνάρτησης Lyapunov:



Εκτιμήσεις 15: Συνάρτηση Lyapunov και παράγωγος με  $a_m = 2$ ,  $\gamma = 100$

Παρόλα αυτά, ενδέχεται να υπάρχουν και καλύτεροι συνδυασμοί/trade off για άλλες τιμές. Όπως αναφέρθηκε, η επιλογή γίνεται ανάλογα με τις σχεδιαστικές απαιτήσεις του συστήματος.

## Θέμα 2°

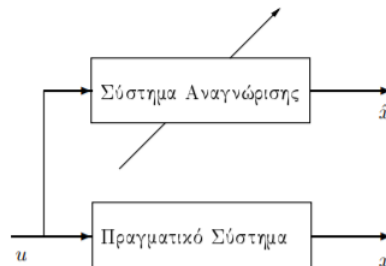
### α) Μέθοδος Lyapunov – Παράλληλη Δομή

Το σύστημα όπως είναι στην (1) είναι ήδη στην μορφή που χρειάζεται για να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο (δεδομένου ότι  $\alpha > 0$  επομένως εξασφαλίζει ότι για φραγμένη είσοδο θα έχουμε φραγμένη έξοδο). Η (1) δηλαδή μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\dot{x} = -\theta^*_1 x + \theta^*_2 u, \quad x(0) = 0 \quad (4)$$

Ορίζουμε το σύστημα αναγνώρισης:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (5)$$



Φτιάχνουμε το σφάλμα εκτίμησης:

$$e = x - \hat{x}$$

Η παράγωγος του σφάλματος:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\dot{e} = -\theta^*_1 x + \theta^*_2 u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u$$

$\Leftrightarrow$

$$\dot{e} = -\theta^*_1 x + \theta^*_2 u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u$$

$\Leftrightarrow$

$$\dot{e} = -\theta^*_1 (x - \hat{x}) - (\hat{\theta}_2 - \theta^*_2) u + (\hat{\theta}_1 - \theta^*_1) \hat{x}$$

$\Leftrightarrow$

$$\dot{e} = -\theta^*_1 e - \tilde{\theta}_2 u + \tilde{\theta}_1 \hat{x}$$

Όπου  $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta^*_1$  και  $\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta^*_2$

Επιλέγουμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2$$

η οποία έχει παράγωγο:

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \dot{V} = e(-\theta^*_1 e - \tilde{\theta}_2 u + \tilde{\theta}_1 \hat{x}) + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2$$

$$\Leftrightarrow \dot{V} = -\theta^*_1 e^2 - \tilde{\theta}_2 eu + \tilde{\theta}_1 e\hat{x} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 \quad (7)$$

Από τον ορισμό των παραμετρικών σφαλμάτων έχουμε ότι:

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = \dot{\hat{\theta}}_1$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = \dot{\hat{\theta}}_2$$

Έτσι, επιλέγοντας :

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e\hat{x}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu$$

όπου  $\gamma_1, \gamma_2$  θετικές σταθερές της επιλογής μας, η (7) γίνεται:

$$\dot{V} = -\theta^*_1 e^2 \leq 0$$

Επομένως έχουμε ευστάθεια και από τη θεωρία με τη βοήθεια του λήμματος Barbalat εξασφαλίζουμε ότι για την ομοιόμορφα φραγμένη μας είσοδο  $u$ , ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των παραμέτρων πετυχαίνει την σύγκλιση της εκτίμησης  $\hat{x}$  στην πραγματική έξοδο του συστήματος  $x$ .

Οι εξισώσεις λοιπόν που χρειαζόμαστε για το σύστημα και τις εκτιμήσεις είναι:

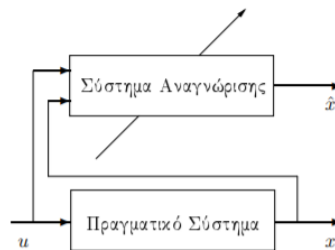
$$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x} = -\theta^*_1 x + \theta^*_2 u, & x(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e\hat{x}, & \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu, & \hat{\theta}_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, & \hat{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Τέλος, οι εκτιμήσεις μας γίνονται ως:

$$\hat{a} = \hat{\theta}_1$$

$$\hat{b} = \hat{\theta}_2$$

β) Αντίστοιχα με την παραπάνω διαδικασία, για την μικτή δομή θα έχουμε:



Το σύστημα αναγνώρισης τώρα περιγράφεται από διαφορική εξίσωση της μορφής:  
 $\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u - \theta_m(x - \hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0, \quad \theta_m > 0$  της επιλογής μας

Η παράγωγος του σφάλματος θα είναι:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\Leftrightarrow \dot{e} = -\theta^*_1 x + \theta^*_2 u + -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u - \theta_m(x - \hat{x})$$

$$\Leftrightarrow \dot{e} = -\theta_m e - \tilde{\theta}_2 u + \tilde{\theta}_1 \hat{x}$$

Παίρνοντας τώρα την ίδια συνάρτηση Lyapunov, θα έχω δουλεύοντας στην παράγωγο (6):

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 - \tilde{\theta}_2 eu + \tilde{\theta}_1 e\hat{x} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 \quad (8)$$

με  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ .

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική με προηγουμένως, θα επιλέξουμε:

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = -\gamma_1 e\hat{x}$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = \gamma_2 eu$$

Έτσι, η (8) γίνεται:

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 \leq 0$$

Η οποία και πάλι μας εξασφαλίζει την ευστάθεια και την σύγκλιση της εκτίμησης στην πραγματική έξοδο για την ομοιόμορφη και φραγμένη μας είσοδο (χρησιμοποιώντας την ίδια αιτιολόγηση με τη βοήθεια του λήμματος Barbalat).

Το δε σύστημα που έχουμε τώρα έχει τις εξισώσεις:

$$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x} = -\theta^*_1 x + \theta^*_2 u, & x(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e\hat{x}, & \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu, & \hat{\theta}_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u - \theta_m(x - \hat{x}), & \hat{x}(0) = 0 \end{cases}$$

και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι:

$$\hat{a} = \hat{\theta}_1$$

$$\hat{b} = \hat{\theta}_2$$

### Παρουσία θόρυβου:

Ο θόρυβος που προστίθεται είναι στην μέτρηση της εξόδου  $x$ , έτσι θα τον προσθέσουμε στις εξισώσεις μας μόνο μετά την πραγματική επίλυση του  $x$  δηλαδή στον ορισμό του σφάλματος. Έτσι, αυτό που εύκολα θα παρατηρήσουμε είναι ότι ο θόρυβος θα εμφανίζεται μόνο μετά την πραγματική τιμή και όχι στην εκτίμηση του  $x$ . Έτσι, εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αφού

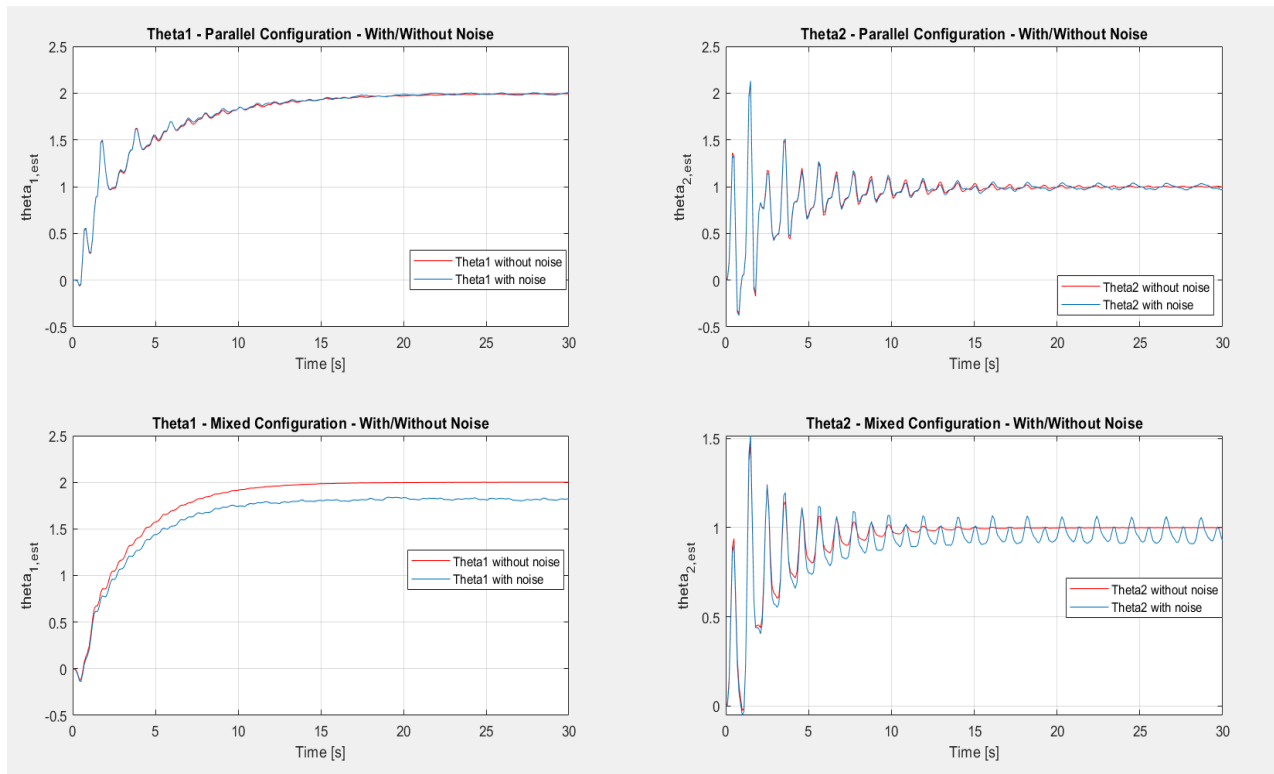
$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x = -\gamma_1 (x - \hat{x}) \hat{x} = \hat{x}^2 - x \hat{x} \quad (\text{Παράλληλη Δομή})$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x = -\gamma_1 (x - \hat{x}) x = x^2 - x \hat{x} \quad (\text{Μικτή Δομή})$$

συνεπώς ο θόρυβος που προστίθεται, εμφανίζεται πιο έντονα (στην πρώτη και στην δεύτερη δύναμη για την ακρίβεια) στην μικτή δομή από ότι στην παράλληλη όπου εμφανίζεται μόνο στην πρώτη δύναμη. Συνεπώς περιμένουμε στις προσομοιώσεις μας τα αποτελέσματα παρουσία θορύβου να είναι καλύτερα με την παράλληλη δομή.

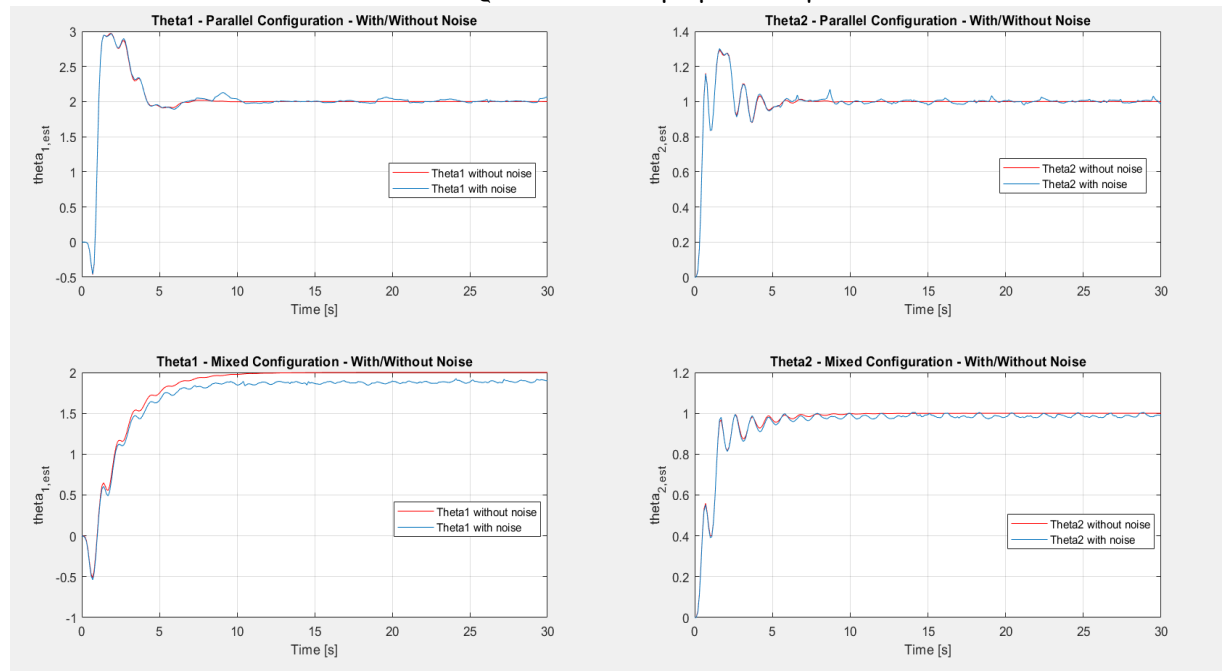
### Αποτελέσματα Προσομοίωσης/Εκτίμησης Παραμέτρων:

Όπως και πριν, έτσι και τώρα ξεκινάμε με τυχαίες τιμές τις δοκιμές στην σχεδίασή μας. Αρχικά λοιπόν επιλέχθηκαν  $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$  τόσο για την παράλληλη όσο και για την μικτή δομή, στις δοσμένες παραμέτρους για τον θόρυβο:

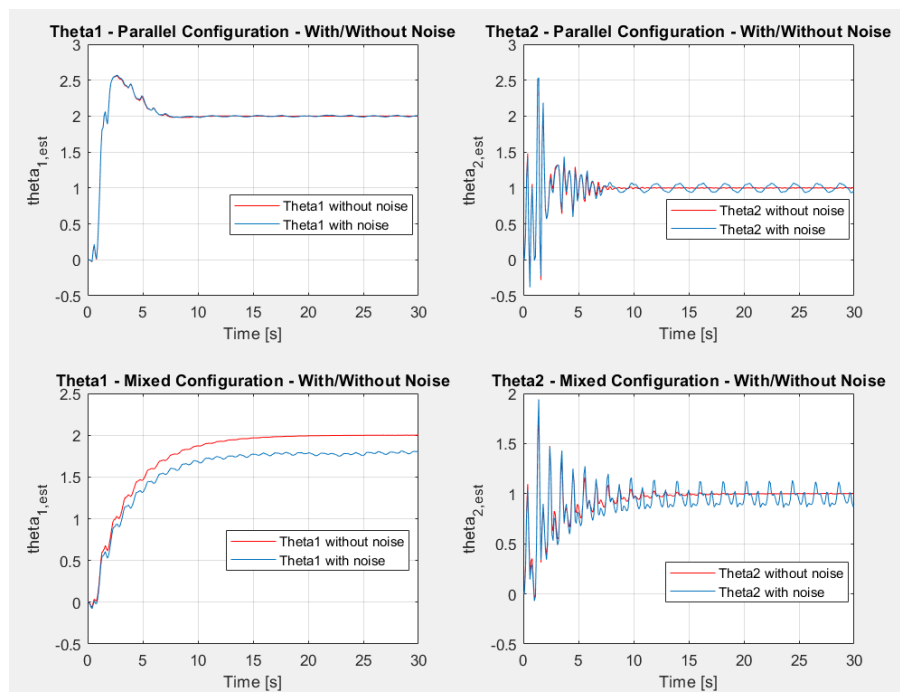


Εκτιμήσεις 15 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$  παράλληλη και μικτή ( $\theta_m = 5$ )

Γνωρίζουμε εξ' αρχής ότι το  $\theta_m$  επηρεάζει μόνο την μικτή δομή. Κρατάμε λοιπόν αρχικά το  $\gamma_1$  σταθερό και αλλάζουμε μόνο το  $\gamma_2$ .

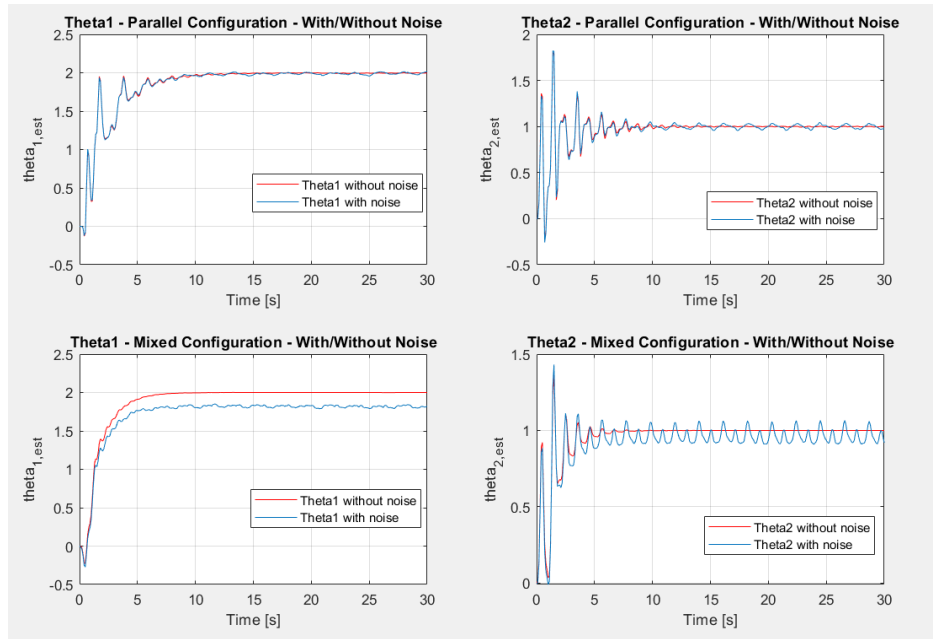


Εκτιμήσεις 16 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παράλληλη και μικτή ( $\theta_m = 5$ )

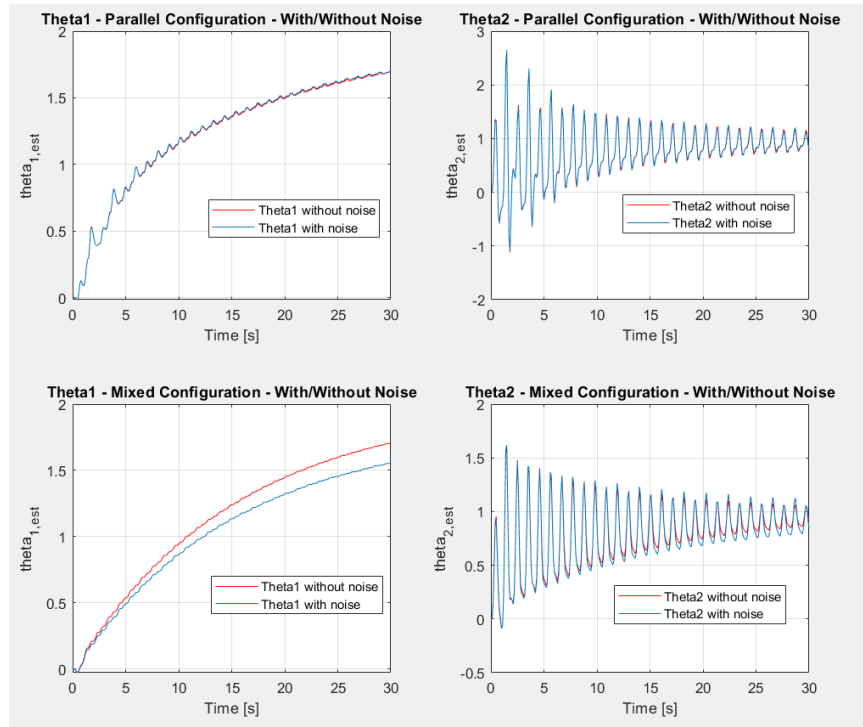


Εκτιμήσεις 17 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 10$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 5$ )

Δοκιμάζουμε τώρα να αλλάζουμε το  $\gamma_1$ :



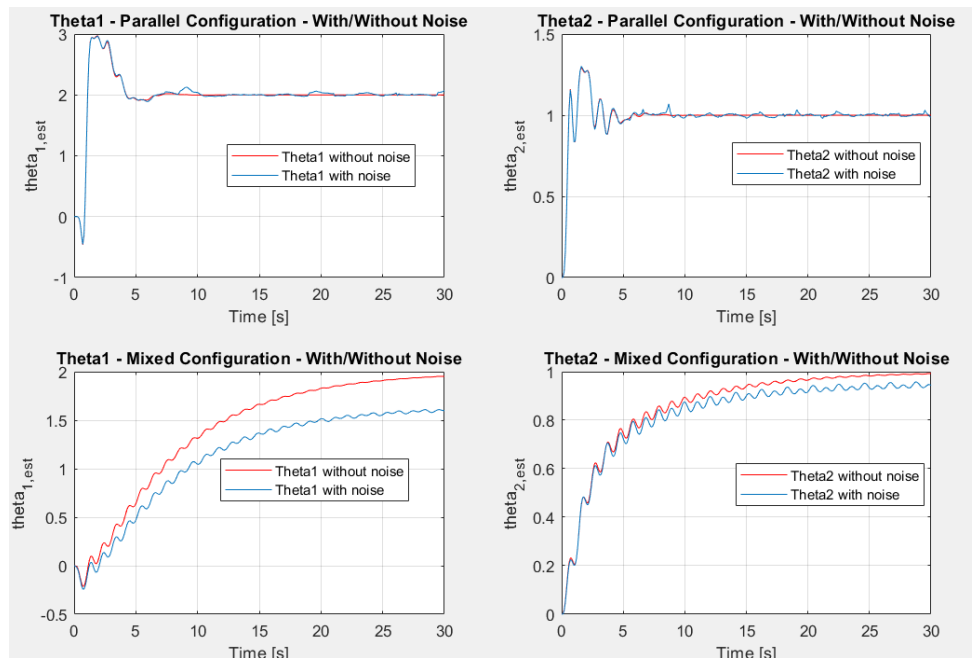
Εκτιμήσεις 18 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 10$ ,  $\gamma_2 = 5$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 5$ )



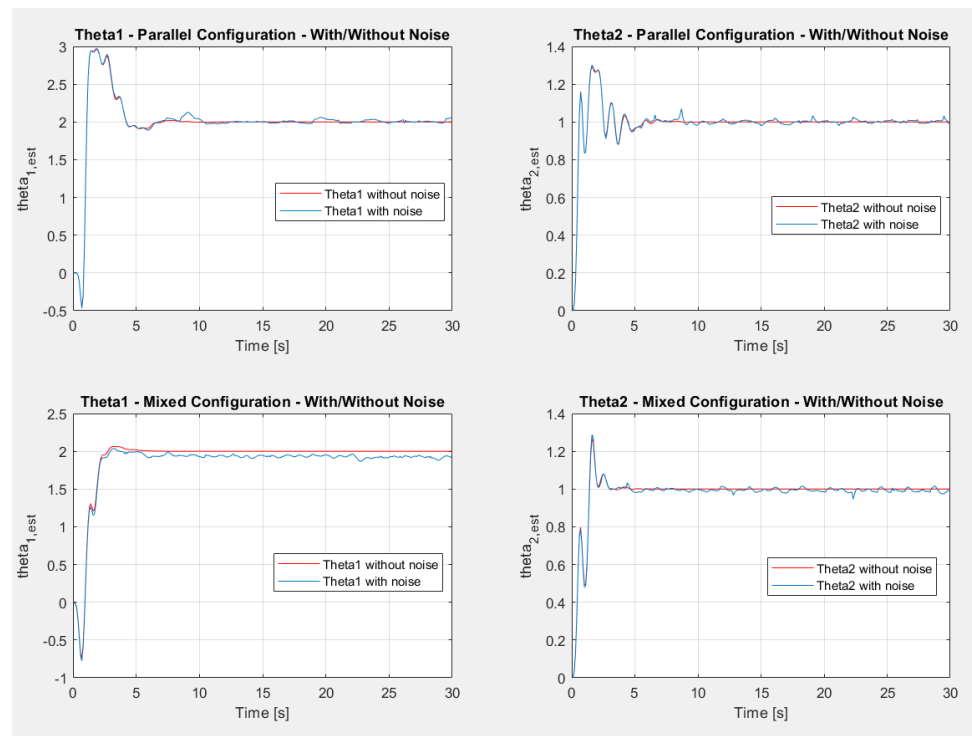
Εκτιμήσεις 18 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 5$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 5$ )



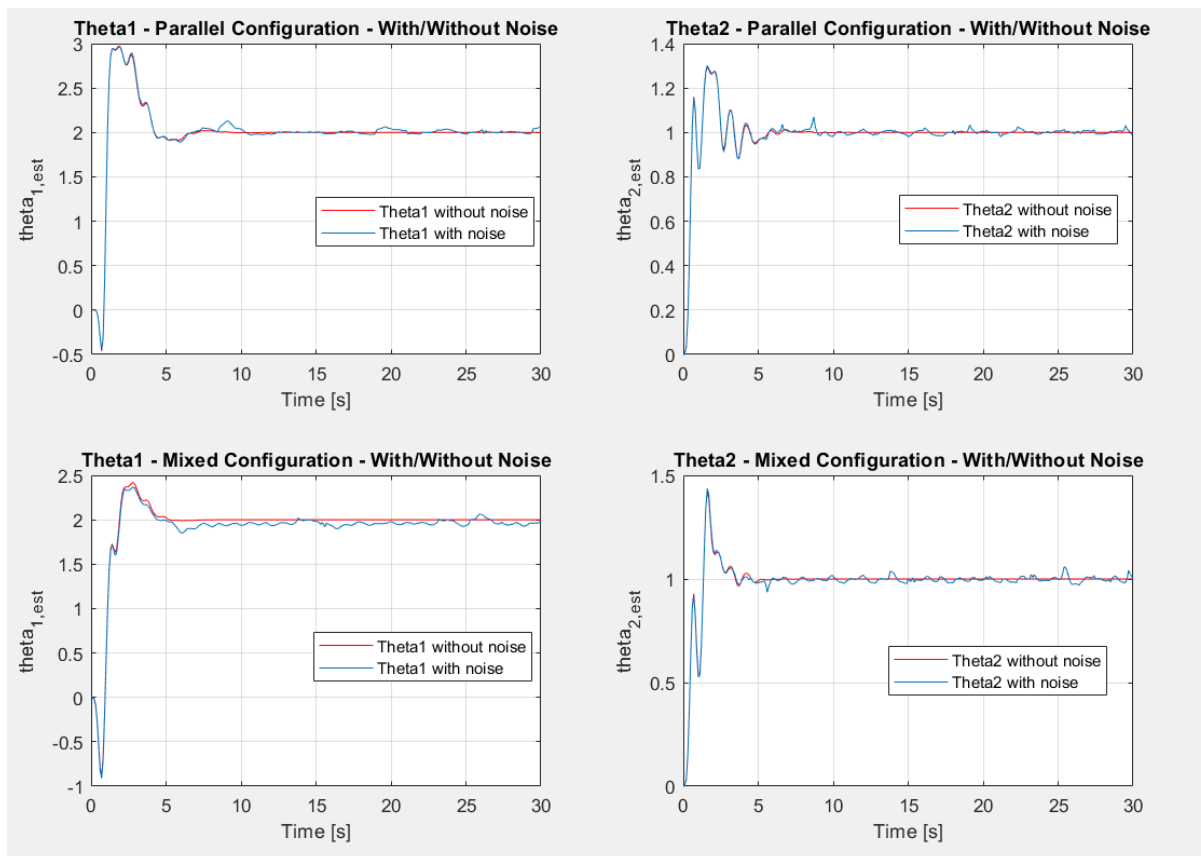
Στην συνέχεια κρατώντας τα καλύτερα αποτελέσματα από τις δοκιμές που κάναμε (δηλαδή για  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$ ) και θα δούμε την επιρροή της παραμέτρου  $\theta_m$  στις εκτιμήσεις της μικτής δομής:



Εκτιμήσεις 19 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 20$ )

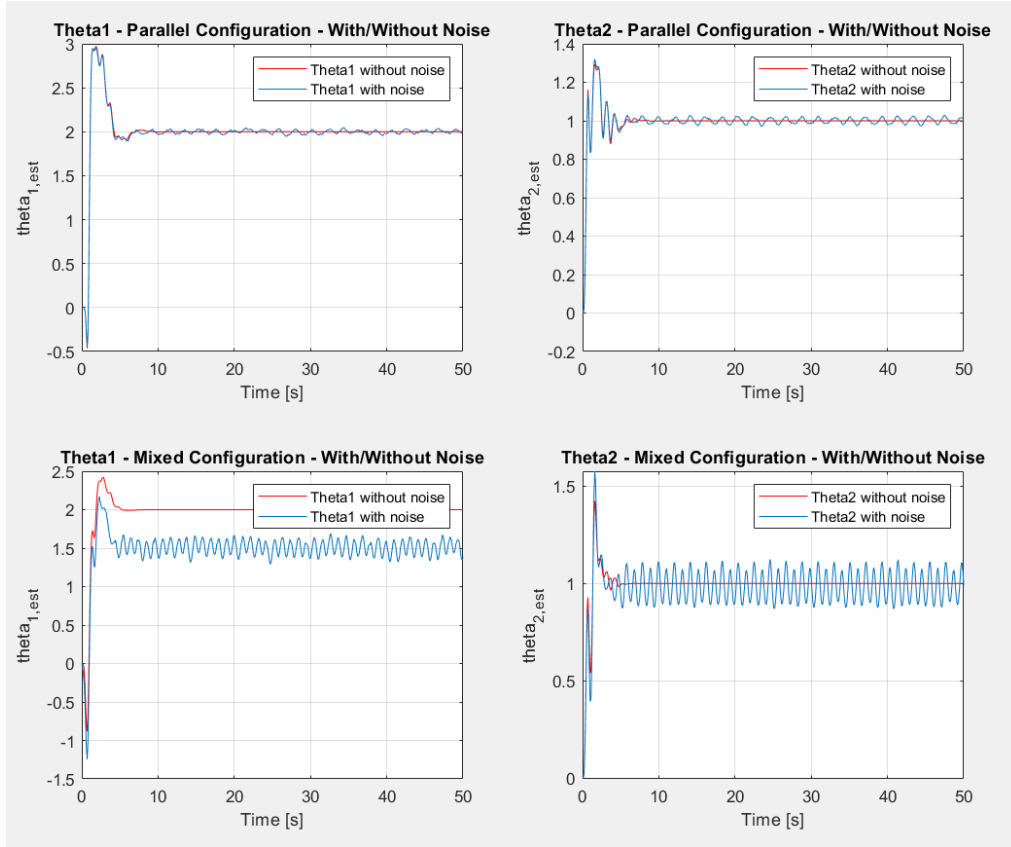


Εκτιμήσεις 20 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ )

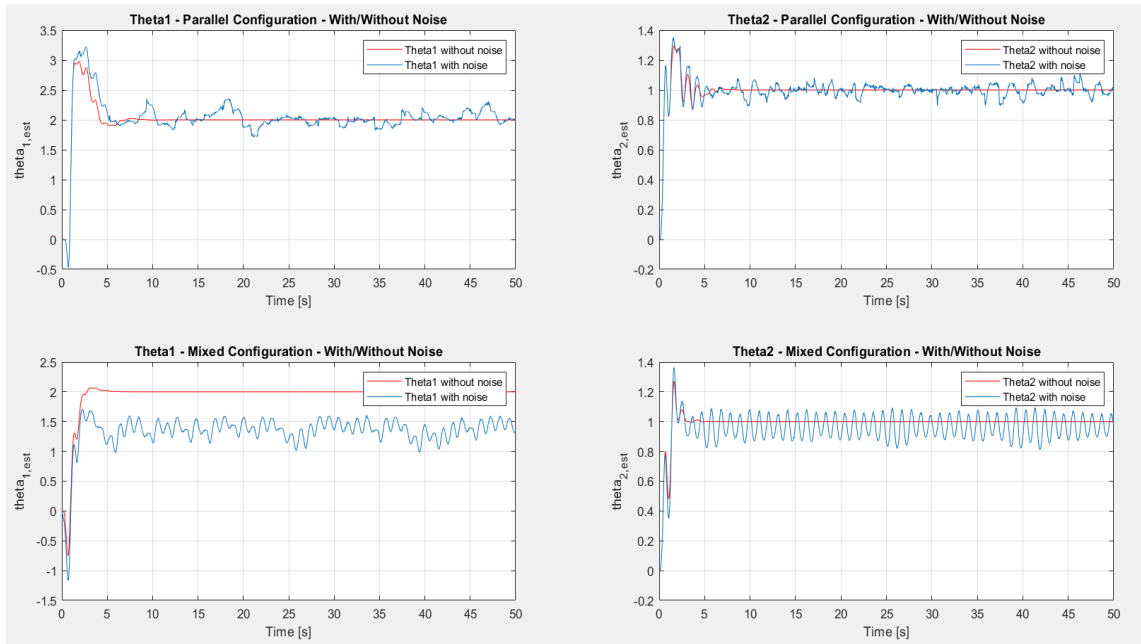


Εκτιμήσεις 21 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 1$ )

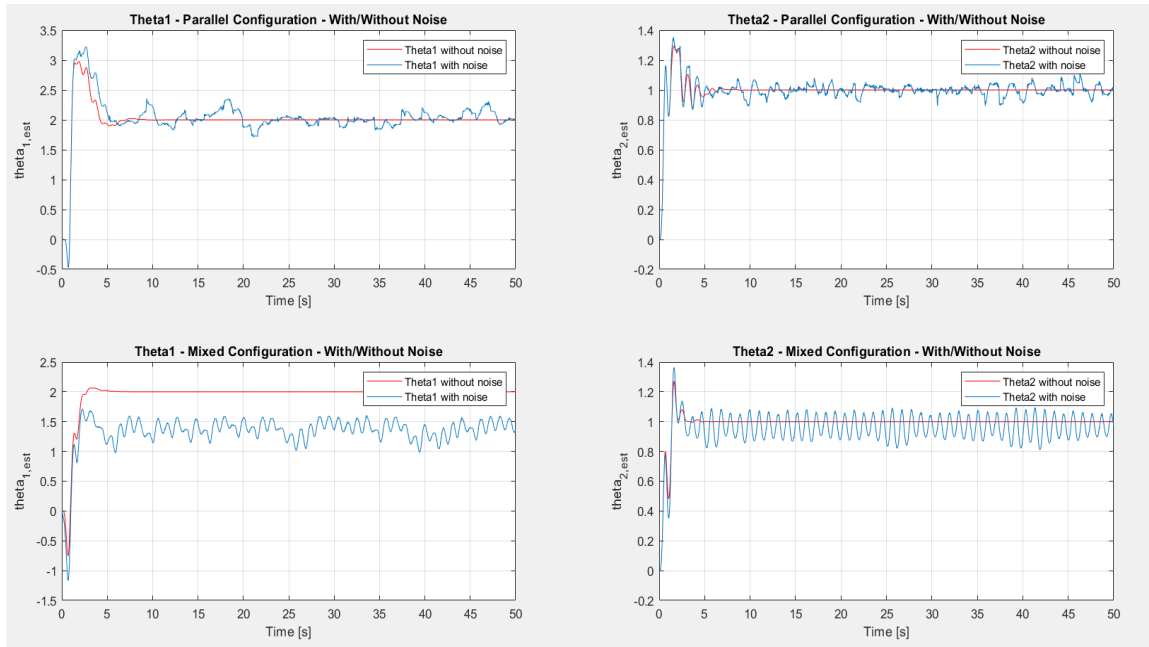
Όπως βλέπουμε, όσο μικρότερο γίνεται το  $\theta_m$ , τόσο γρηγορότερα γίνεται η σύγκλιση στην μικτή δομή. Παρόλα αυτά, όταν το  $\theta_m < 2$ , αρχίζουμε και έχουμε overshoot. Έτσι, πάλι η επιλογή παραμέτρων είναι θέμα απαιτήσεων σχεδίασης. Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα ο θόρυβος που αναφέρεται είναι στις τιμές που δίνονται στην εκφώνηση. Στην συνέχεια θα δούμε την επιρροή του θορύβου και τη σύγκριση του βαθμού ευρωστίας της παράλληλης και της μικτής δομής. Ήδη μπορούμε να συμπεράνουμε ότι παρουσία θορύβου η παράλληλη δομή ανταποκρίνεται καλύτερα καθώς το σφάλμα εκτίμησης μηδενίζεται μετά από κάποιο χρόνο ενώ στην μικτή παρατηρούμε ένα steady state error μετά από κάποιο χρόνο. Κρατώντας σταθερά τα  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$ ,  $\theta_m = 2$  (τα οποία θα είναι βασική μας επιλογή για αυτό το ερώτημα, έχοντας ως προσωπική απαίτηση σχεδίασης το καλύτερο tradeoff μεταξύ χρόνου σύγκλισης και overshoot), δοκιμάζουμε άλλες τιμές για τις παραμέτρους του θορύβου:



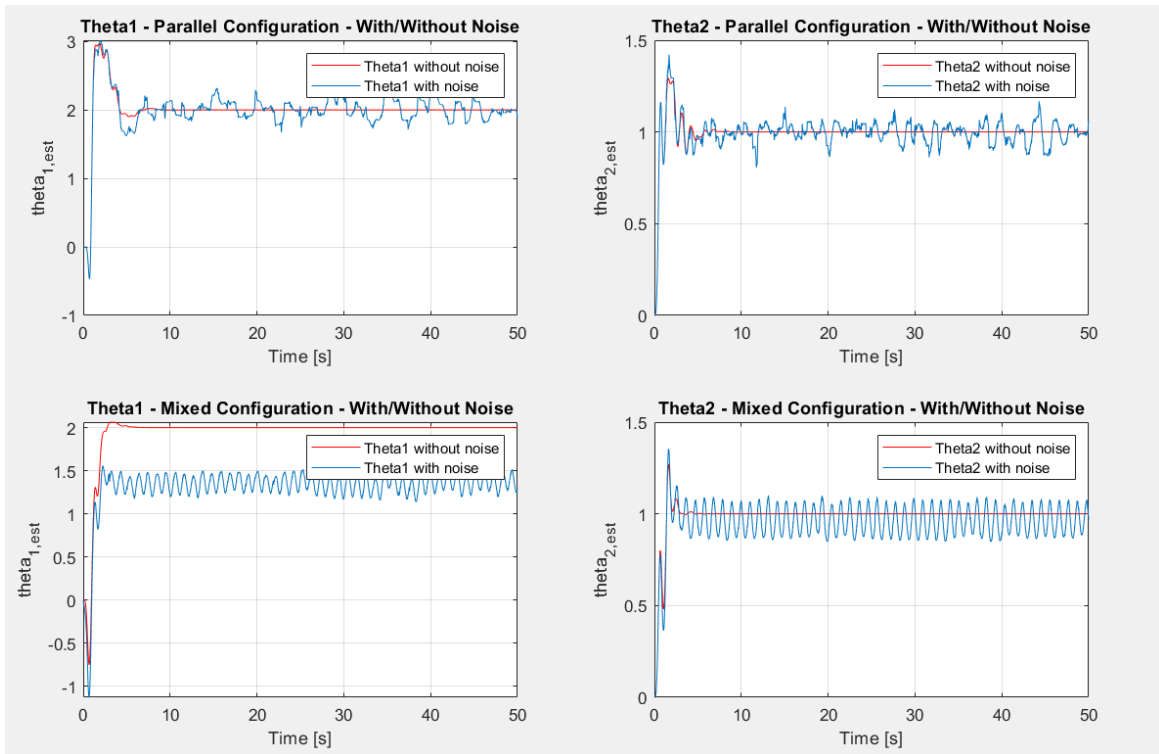
Εκτιμήσεις 22 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=0.5$ ,  $f=20$



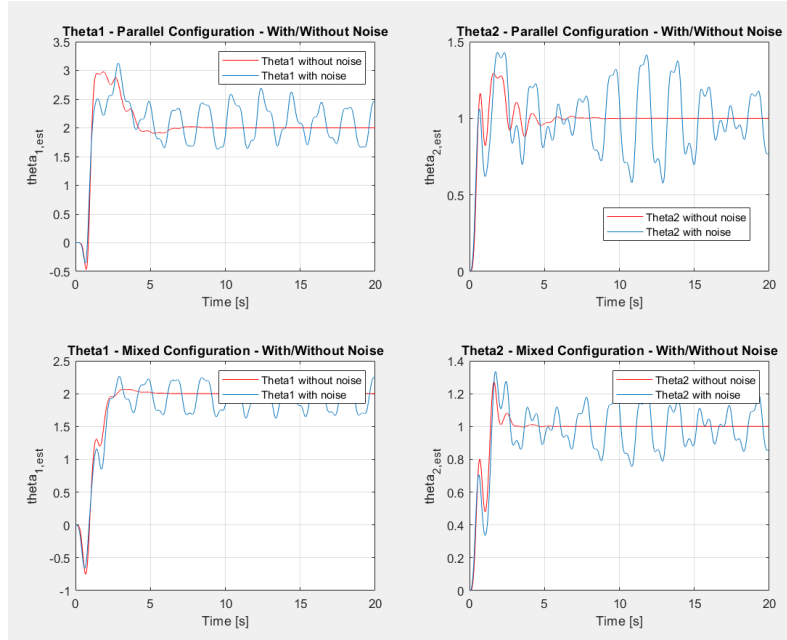
Εκτιμήσεις 23 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=0.5$ ,  $f=80$



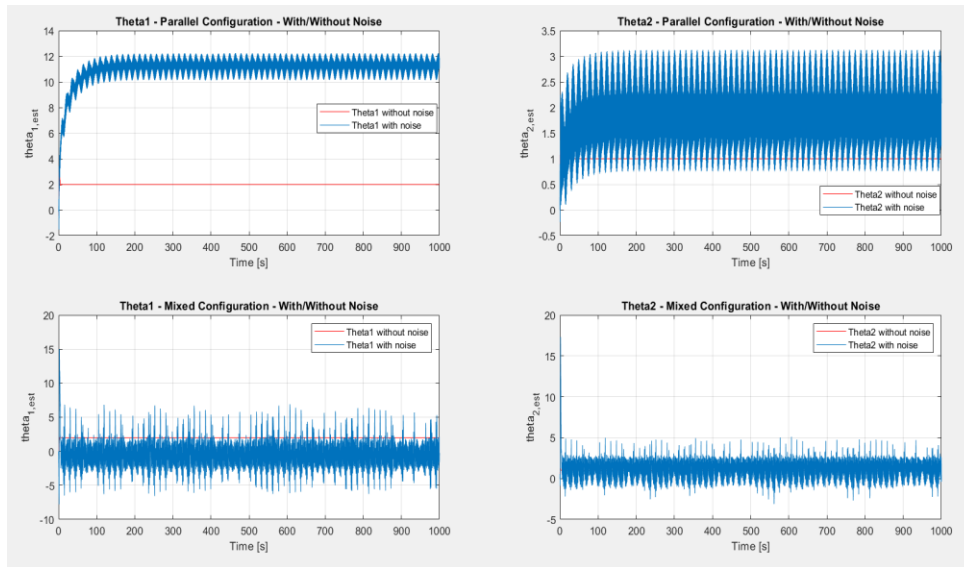
Εκτιμήσεις 24 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=0.5$ ,  $f=80$



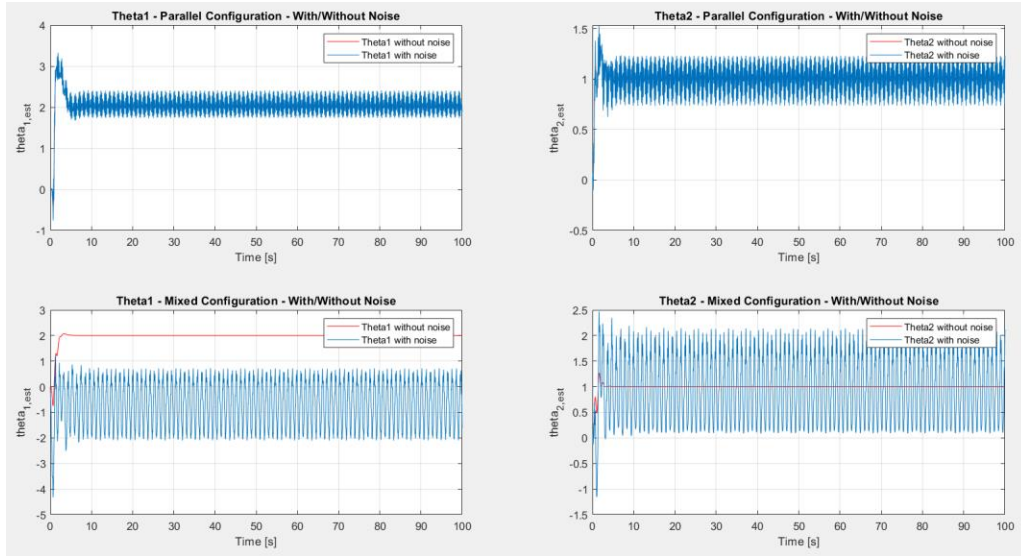
Εκτιμήσεις 25 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=0.5$ ,  $f=110$



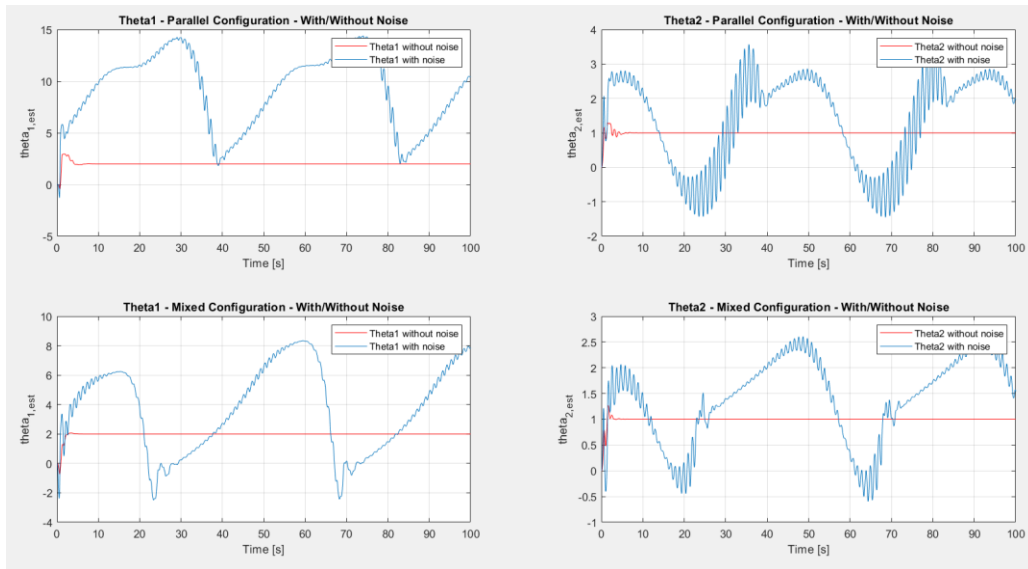
Εκτιμήσεις 25 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=0.5$ ,  $f=1$



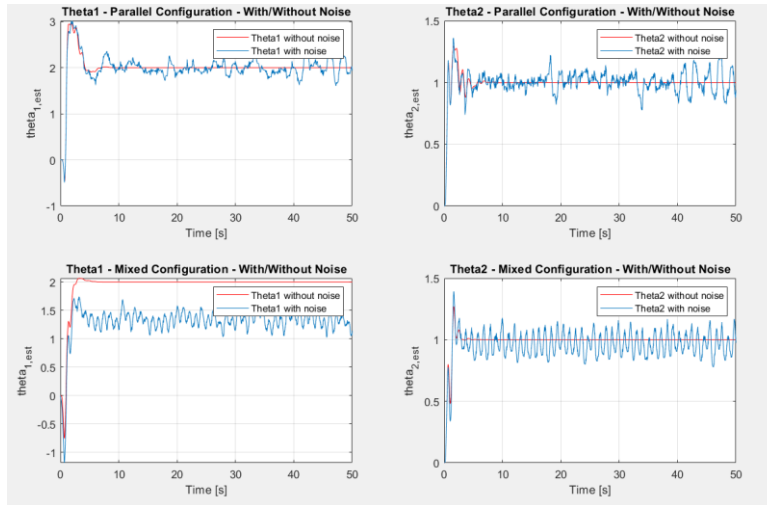
Εκτιμήσεις 25 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=1.5$ ,  $f=1.5$



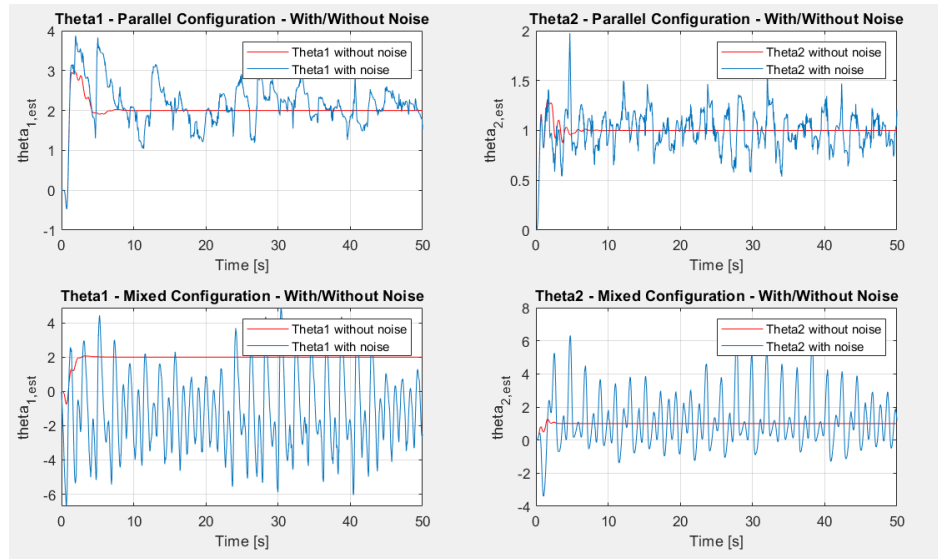
Εκτιμήσεις 25 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  
 $\eta_0 = 1.5$ ,  $f = 5$



Εκτιμήσεις 25 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  
 $\eta_0 = 1.2$ ,  $f = 0.5$



Εκτιμήσεις 26 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=0.5$ ,  $f=1000$



Εκτιμήσεις 27 – Σύγκριση Παράλληλης και Μικτής δομής με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=2$ ,  $f=1000$

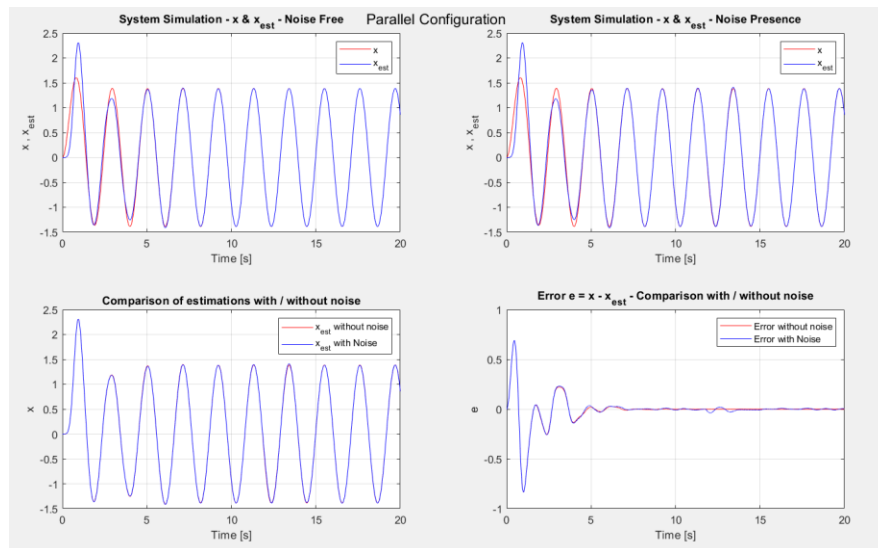
Όπως βλέπουμε, η επιλογή της  $\eta_0$  επηρεάζει το πλάτος του ημιτόνου και επομένως την διασπορά του θορύβου στην εκτίμηση. Στην μικτή δομή το ημίτονο του θορύβου εμφανίζεται στο τετράγωνο επομένως βλέπουμε μία σταθερή διασπορά στην εκτίμηση η οποία εν γένει είναι μεγαλύτερη από αυτή της παράλληλης δομής. Σαφώς όταν  $\eta_0 < 1$ , το πλεονέκτημα αυτό της παράλληλης δομής δεν φαίνεται ξεκάθαρα. Αντιθέτως για  $\eta_0 > 1$ , η παράλληλη δομή υπερτερεί κατά κόρον. Ενδιαφέρουσες είναι οι παρατηρήσεις όταν ο θόρυβος έχει εξαιρετικά μικρή συχνότητα, πχ  $f = 0.5, 1, 1.5$ , όπου φαίνονται τα εξής:

- 1) Για  $\eta_0 < 1$  και  $f < 3$  έχουμε μεγαλύτερη διασπορά στην παράλληλη δομή, δηλαδή φαίνεται ότι η μικτή δομή υπερτερεί.
- 2) Για  $\eta_0 > 1$  και  $1 < f < 3$  έχουμε μεγαλύτερη διασπορά στην μικτή δομή, παρόλα αυτά στην παράλληλη δομή εμφανίζεται σημαντικότερο/μεγαλύτερο steady state error από ότι στην μικτή δομή.
- 3) Για  $\eta_0 > 1$  και  $f < 1$  φαίνεται στην παράλληλη δομή να υπάρχει τόσο το steady state error όσο και μεγαλύτερη διασπορά.

Έτσι, ως συμπέρασμα μπορούμε να συνάγουμε το εξής:

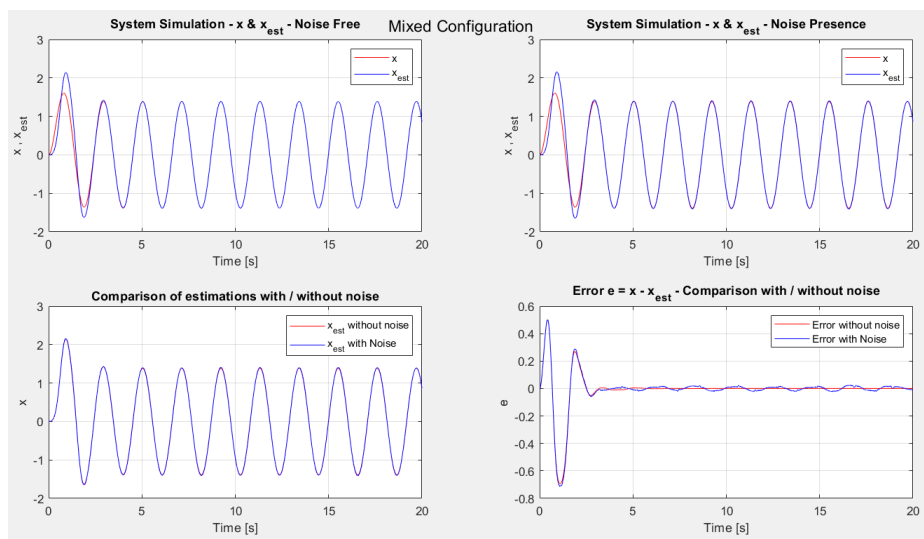
Για εξαιρετικά χαμηλής συχνότητας θόρυβο, η μικτή δομή φαίνεται να υπερτερεί. Παρόλα αυτά, για θόρυβο με  $f > 3$  η παράλληλη δομή φαίνεται να υπερτερεί, ενώ για αυτές τις συχνότητες η διαφορά γίνεται σημαντική όταν  $\eta_0 > 1$  όπου η παράλληλη δομή υπερτερεί σημαντικά. Εν γένει ο θόρυβος στις μετρήσεις είναι σήμα υψηλής συχνότητας πχ  $\omega > 100$ , επομένως περιμένουμε το σύστημα με παράλληλη δομή να ανταποκρίνεται ικανοποιητικότερα.

Τέλος, παρουσιάζονται και τα υπόλοιπα διαγράμματα της προσομοίωσης με τις επιλεγμένες μας τιμές:

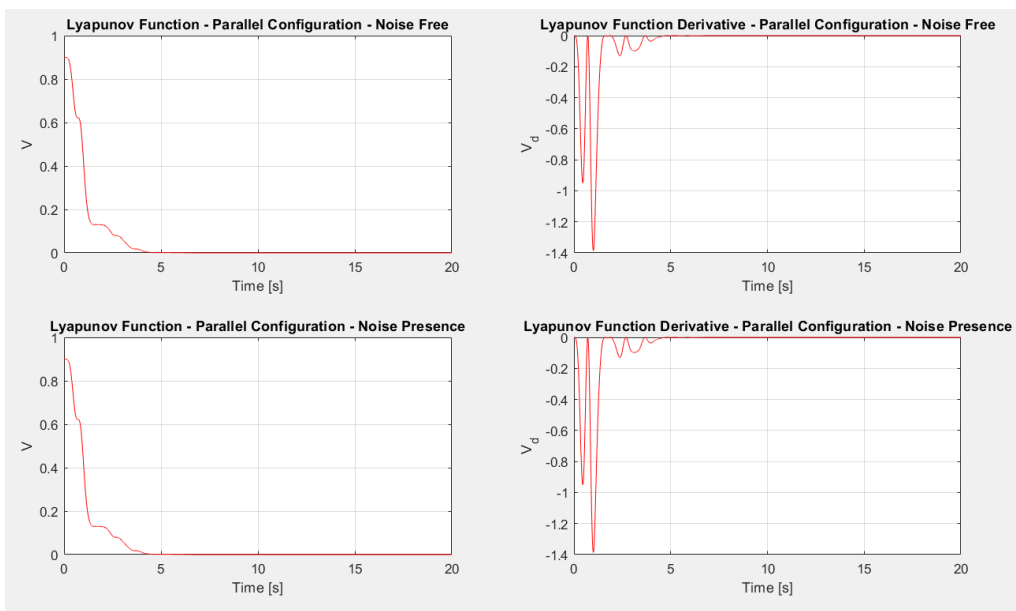


Εκτιμήσεις 28 –Παράλληλη δομή με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=0.15$ ,  $f=20$

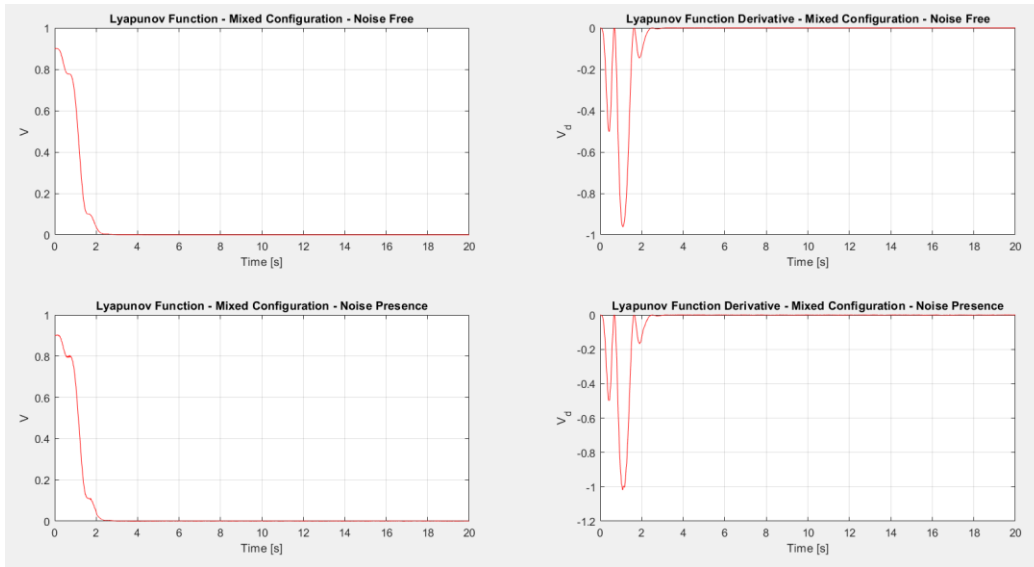




Εκτιμήσεις 29 - Μικτή δομή με/χωρίς θόρυβο -  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=0.15$ ,  $f=20$



Εκτιμήσεις 30 - Λαγυνον & παράγωγος - Παράλληλη δομή με/χωρίς θόρυβο -  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  $\eta_0=0.15$ ,  $f=20$



Εκτιμήσεις 31 – Λαρυπον & παράγωγος – Μικτή δομή με/χωρίς θόρυβο –  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1$  παρ/λη και μικτή ( $\theta_m = 2$ ),  
 $\eta_0=0.15, f=20$

### Θέμα 3ο

Το γραμμικό MIMO σύστημα μοντελοποιείται ως:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

με τον  $A$  αρνητικά ημιορισμένο και την είσοδο  $u$  φραγμένη.

Αφού  $A$  αρνητικά ημιορισμένος πίνακας, ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov:

$$PA + A^T P = -I$$

όπου  $P = P^T > 0$

Για τις εκτιμήσεις θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Lyapunov με παράλληλη δομή στο σύστημα αναγνώρισης. Έτσι, έχουμε:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} u$$

Το σφάλμα:

$$e = x - \hat{x}$$

Η παράγωγος δε του σφάλματος θα είναι:

$$\dot{e} = Ax + Bu - \hat{A} \hat{x} - \hat{B} u$$

$$\Leftrightarrow \dot{e} = A(x - \hat{x}) - (\hat{A} - A) \hat{x} - (\hat{B} - B) u$$

$$\Leftrightarrow \dot{e} = Ae - \tilde{A} \hat{x} - \tilde{B} u$$

όπου  $\tilde{A} = \hat{A} - A$ ,  $\tilde{B} = \hat{B} - B$

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V = e^T P e + tr\left\{\frac{\tilde{A}^T P \tilde{A}}{\gamma_1}\right\} + tr\left\{\frac{\tilde{B}^T P \tilde{B}}{\gamma_2}\right\}$$

όπου  $tr\{\cdot\}$  το ίχνος του πίνακα και  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι προφανώς θετικά ορισμένη.

Επίσης, ισχύουν όπως και πριν  $\dot{\tilde{A}} = \dot{\hat{A}}$  και  $\dot{\tilde{B}} = \dot{\hat{B}}$

Η δε παράγωγός της είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + tr\left\{\frac{\dot{\tilde{A}}^T P \tilde{A}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1}\right\} + tr\left\{\frac{\dot{\tilde{B}}^T P \tilde{B}}{\gamma_2} + \frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2}\right\} \\ &= e^T (PA + A^T P) e - 2e^T P \tilde{A} \hat{x} - 2e^T P \tilde{B} u + tr\left\{2 \frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1} + 2 \frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2}\right\} \end{aligned}$$

Θα αξιοποιήσουμε τώρα τις παρακάτω βασικές ιδιότητες για την συνάρτηση ίχνους:

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\Gamma\Delta\} &= \text{tr}\{\Delta\Gamma\}, & \Gamma, \Delta &\in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \text{tr}\{\Gamma + \Delta\} &= \text{tr}\{\Gamma\} + \text{tr}\{\Delta\}, & \Gamma, \Delta &\in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \text{tr}\{yx^T\} &= x^T y, & x, y &\in \mathbb{R}^{n \times 1} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} e^T P \tilde{A} \hat{x} &= \hat{x}^T \tilde{A}^T P e = \text{tr}\{\tilde{A}^T P e \hat{x}^T\} \\ e^T P \tilde{B} u &= \text{tr}\{\tilde{B}^T P e u^T\} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\dot{V} = -e^T e + 2 \text{tr}\left\{ \frac{\tilde{A}^T P \dot{\hat{A}}}{\gamma_1} - \tilde{A}^T P e \hat{x}^T + \frac{\tilde{B}^T P \dot{\hat{B}}}{\gamma_2} - \tilde{B}^T P e u^T \right\}$$

Επιλέγουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{A}} &= \gamma_1 e \hat{x}^T \\ \dot{\hat{B}} &= \gamma_2 e u^T \end{aligned}$$

Και έτσι:

$$\dot{V} = -e^T e \leq 0$$

Έτσι με την ίδια αιτιολόγηση με προηγουμένως πετυχαίνουμε

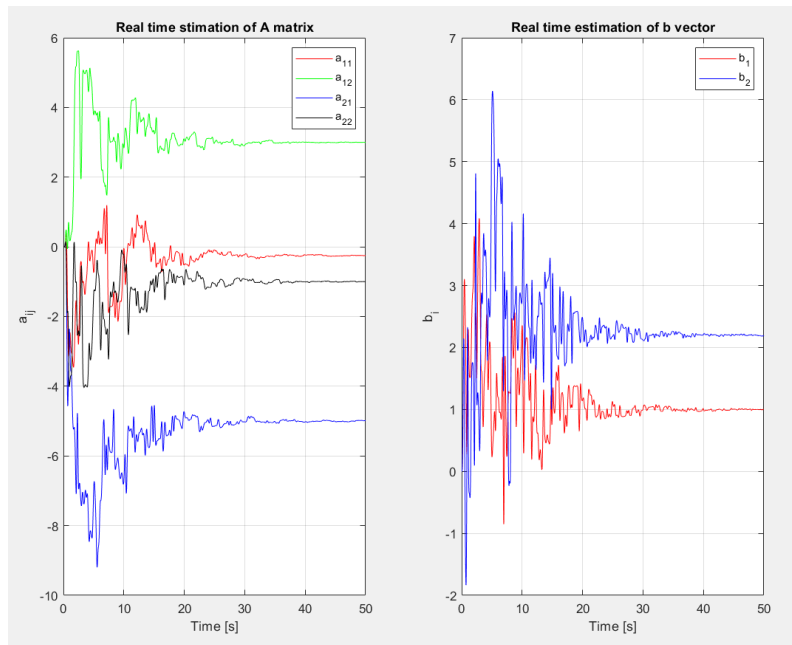
Οι εξισώσεις που χρειαζόμαστε τώρα είναι:

$$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{x}} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} u, & \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{A}} = \gamma_1 e \hat{x}^T, & \hat{A}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{B}} = \gamma_2 e u^T, & \hat{B}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Η παραπάνω συνάρτηση Lyapunov μας εξασφαλίζει την ευστάθεια και την σύγκλιση της εκτίμησης στην πραγματική έξοδο για την ομοιόμορφη και φραγμένη μας είσοδο [1].

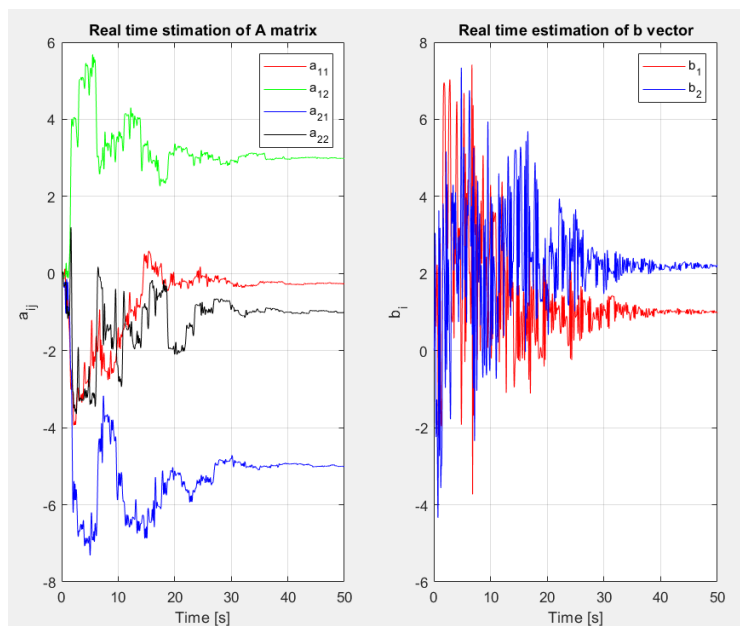
### Αποτελέσματα Προσομοίωσης/Εκτίμησης Παραμέτρων:

Θα ξεκινήσουμε βάζοντας τις τιμές  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1$  και θα αλλάζουμε σταδιακά την μία κρατώντας σταθερή την άλλη. Αρχικά:

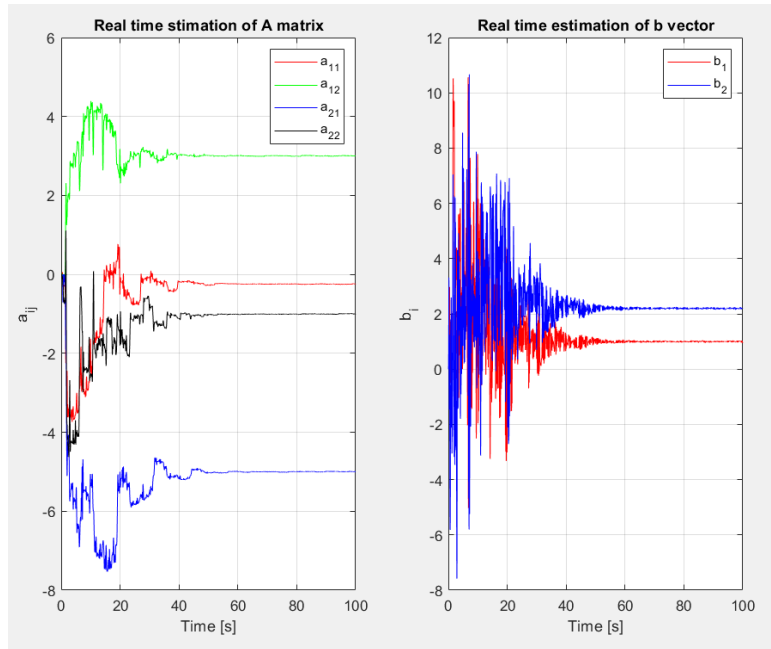


Εκτιμήσεις 32 – Εκτίμηση του A και του B,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1$

Αλλάζοντας τώρα σταδιακά το  $\gamma_2$ :

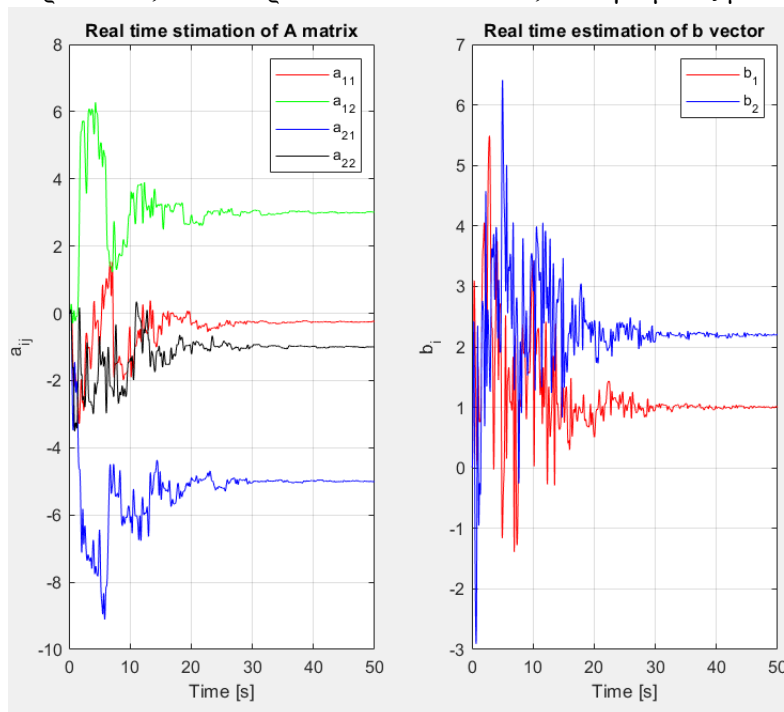


Εκτιμήσεις 33 – Εκτίμηση του A και του B,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 5$



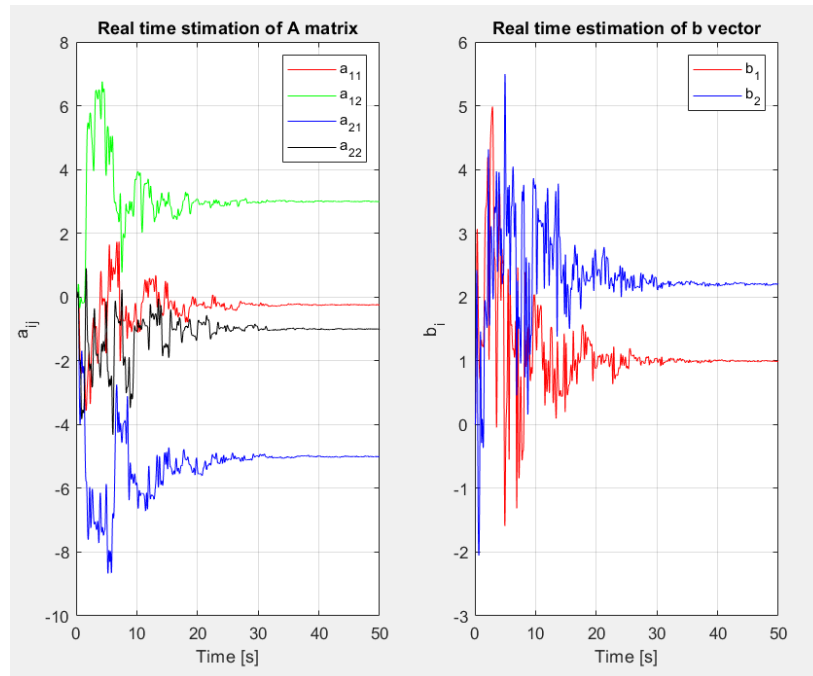
Εκτιμήσεις 34 – Εκτίμηση του A και του B,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 10$

Συνεχίζοντας να ανεβάζουμε την τιμή του  $\gamma_2$ , εύκολα παρατηρούμε ότι μεγαλώνει ο χρόνος σύγκλισης στις πραγματικές τιμές. Παρόλα αυτά, για τις τιμές ανάμεσα στο 1 και το 2 παρατηρείται ότι ο χρόνος μειώνεται περισσότερο από ό,τι στα άκρα 1 και 2. Ενδεικτικά, επιλέγουμε ως βέλτιστο  $\gamma_2$  το  $\gamma_2 = 1.5$ :

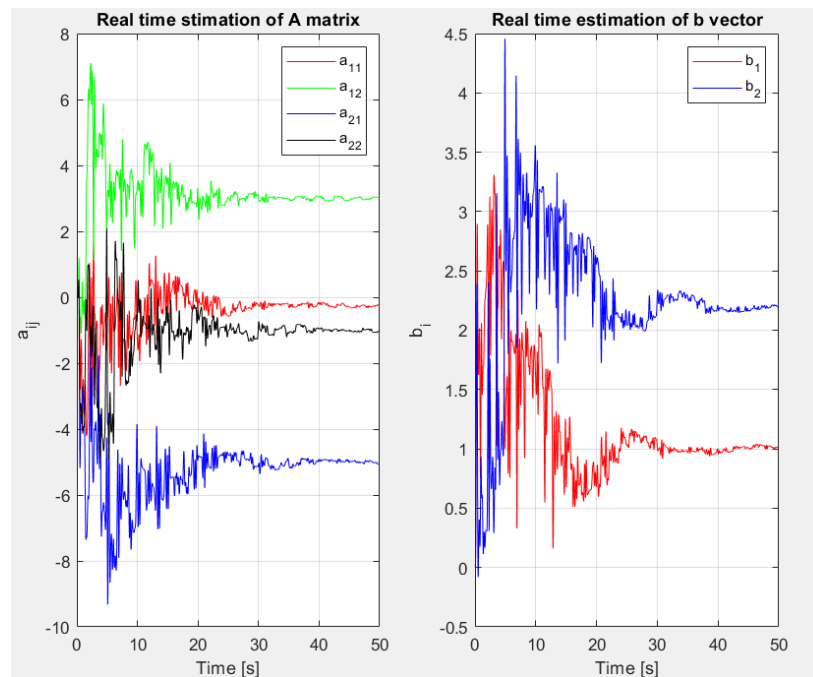


Εκτιμήσεις 35 – Εκτίμηση του A και του B,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1.5$

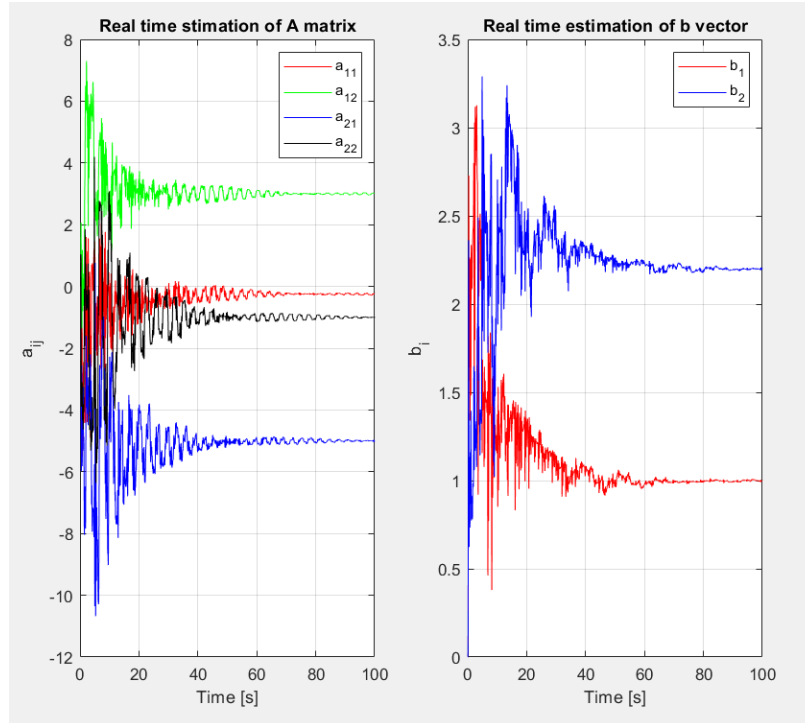
Κρατώντας τώρα σταθερό το  $\gamma_2 = 1.5$ , αυξάνουμε σταδιακά την τιμή του  $\gamma_1$ :



Εκτιμήσεις 36 – Εκτίμηση του A και του B,  $\gamma_1 = 1.5$ ,  $\gamma_2 = 1.5$



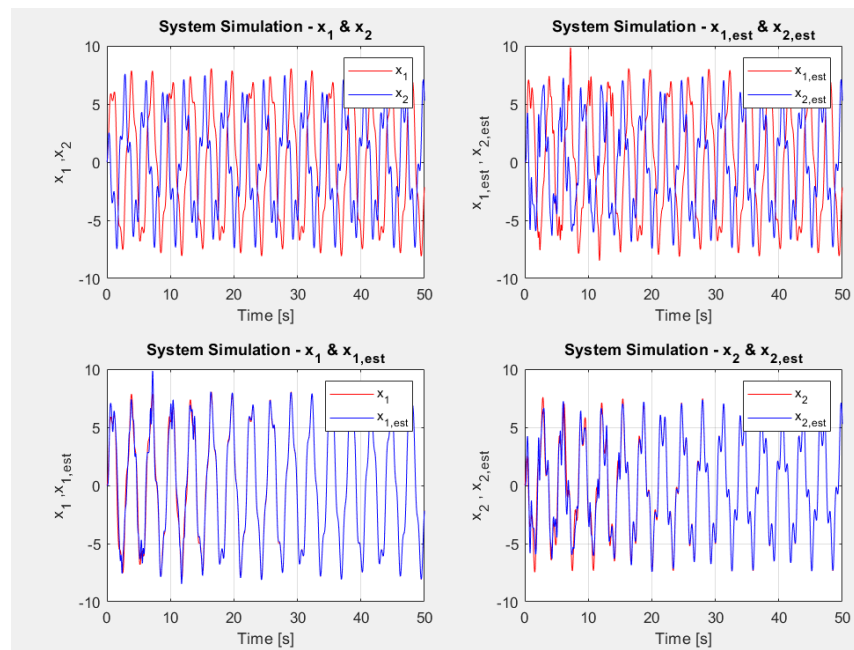
Εκτιμήσεις 37 – Εκτίμηση του A και του B,  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 1.5$



Εκτιμήσεις 38 – Εκτίμηση του A και του B,  $\gamma_1 = 10$ ,  $\gamma_2 = 1.5$

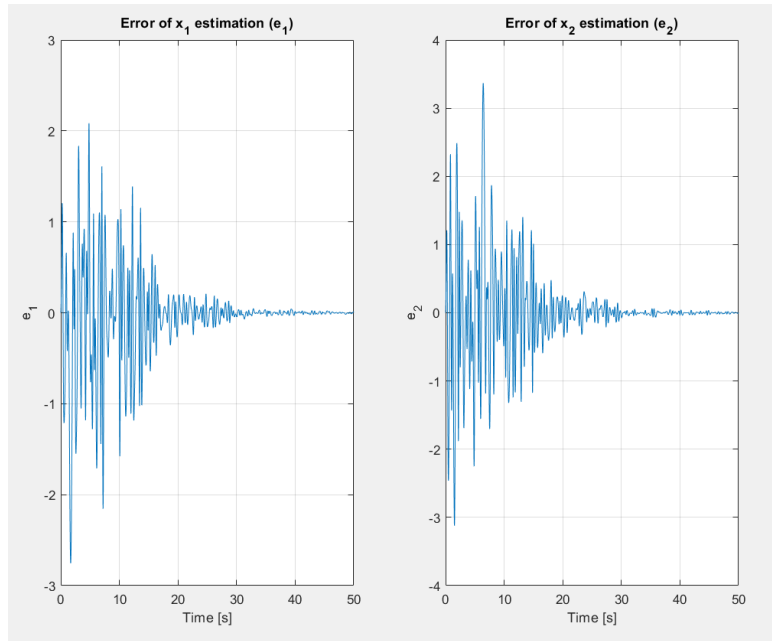
Συνεχίζοντας τώρα την αύξηση του  $\gamma_1$  ο χρόνος σύγκλισης όλο και θα μεγαλώνει. Εν τέλει λοιπόν, οι δοκιμές που έγιναν έδειξαν **καλύτερα αποτελέσματα για  $\gamma_1 = 1$   $\gamma_2 = 1.5$** .

Τα υπόλοιπα διαγράμματα για αυτές τις τιμές:

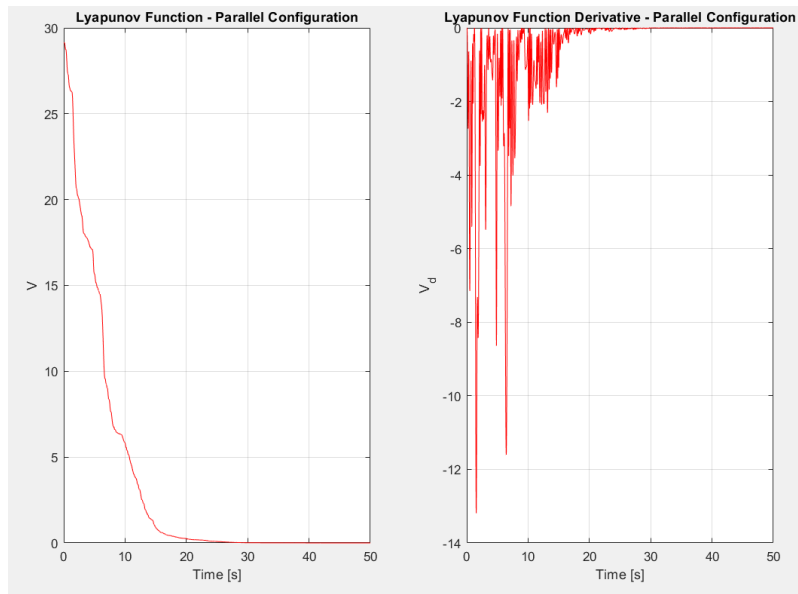


Εκτιμήσεις 39 – Προσομοίωση του x και της εκτίμησης του x,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1.5$





Εκτιμήσεις 41 – Σφάλματα για την εκτίμηση του  $x$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1.5$



Εκτιμήσεις 42 – Συνάρτηση Lyapunov & παράγωγος,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1.5$

### Βιβλιογραφία - Αναφορές:

- [1] Petros Ioannou, Robust Adaptive Control, p.159, 2003