Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Ευφυή & Προσαρμοστικά Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

Εργασία 1η – Χειμερινό Εξάμηνο 2021/2022

Καβελίδης Φραντζής Δημήτριος – ΑΕΜ 9351

19/12/2021

Εργασία 1η – Θεωρητική Ανάλυση για Έλεγχο Συστήματος

Έχουμε το σύστημα:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p D(u + f(x_p)), \qquad (1)$$

όπου $x_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος και $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου. Η συνάρτηση $f(*)$ μας είναι άγνωστη, γνωρίζουμε όμως ότι είναι τοπικά συνεχής κατά Lipchitz ως προς x_p και επιπλέον,

$$f(x_p) = \theta^T \Phi(x_p) \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

Στη (2), με $\theta \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ συμβολίζουμε διάνυσμα με στοιχεία άγνωστες αλλά σταθερές παραμέτρους και $\Phi(x_p) \in \mathbb{R}^{N}$ διάνυσμα με στοιχεία γνωστές μη-γραμμικές συναρτήσεις, τοπικά συνεχείς κατά Lipchitz ως προς x_p.

Στην (1), οι πίνακες $A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ και $B_p \in \mathbb{R}^{n_p \times 1}$ είναι γνωστοί και σταθεροί. Η άγνωστη σταθερά D είναι αυστηρά θετική. Το ζεύγος (A_p, B_p) είναι ελέγξιμο. Η έξοδος του συστήματος ικανοποιεί,

$$y_p = C_p^{\,T} x_p \in \mathbb{R}$$

με $C_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ γνωστό και σταθερό διάνυσμα. Με τη σταθερά D μοντελοποιούμε την έκπτωση στη «δύναμη» ελέγχου που μπορεί να εμφανιστεί μέσω εκφύλισης του ενεργοποιητή, βλαβών κλπ. Στην ιδανική περίπτωση, όπου όλα λειτουργούν σωστά, έχουμε $D = 1$. Στην περίπτωση αυτή, επιπλέον του $D = 1$ αγνοούμε επίσης την ύπαρξη της $f(x_p)$, θέτουμε δηλαδή $f(x_p) = 0$. Έτσι, το ελεγχόμενο σύστημα γίνεται:

$$(\Sigma_1): \begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \\ y_p = C_p^{\,T} x_p \end{cases}, \qquad (3)$$

Θέμα 1ο

Για το σύστημα (3) να σχεδιαστεί γραμμικός ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων, ώστε όλα τα σήματα στον κλειστό βρόγχο να είναι φραγμένα και η έξοδος y_p να παρακολουθεί την έξοδο y_m ενός μοντέλου αναφοράς

$$(\Sigma_2): \begin{cases} \dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \\ y_m = C_m^{\,T} x_m \end{cases}, \qquad (4)$$

Ζητείται ο ελεγκτής που θα κατασκευαστεί να έχει χαρακτηριστικά αναλογικού-ολοκληρωτικού ελέγχου. Για το σκοπό αυτό, το σφάλμα $e_y \triangleq y_p - r$ ολοκληρώνεται σχεδιάζοντας το

$$e_{y_I} \triangleq \int_0^t e_y(\tau)d\tau$$

Θέμα 2ο

Στην μη-ιδανική περίπτωση, όταν $0 < D < 1$ και $f(x_p)$ να μην ταυτίζεται με το μηδέν, να τροποποιηθεί ο ελεγκτής του ερωτήματος (α), προσθέτοντας του μια επιπλέον βαθμίδα προσαρμοστικού ελέγχου, ώστε να επιτυγχάνεται ο ίδιος στόχος.

Ανάλυση:

Η απαίτηση μας στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ο νόμος ελέγχου μας να έχει χαρακτηριστικά αναλογικού-ολοκληρωτικού ελέγχου. Έτσι, πρέπει να κάνουμε μερικές μετατροπές στο σύστημά μας. Το σφάλμα $e_y = y_p - r$ ολοκληρώνεται και έχουμε:

$$e_{y_I} = \int_0^t e_y(\tau)d\tau \Leftrightarrow e_{y_I} = \frac{e_y}{s},$$

κάνοντας μία απλή μετατροπή στον χώρο της συχνότητας. Έτσι:

$$e_{y_I} = \frac{e_y}{s} \Leftrightarrow$$

$$se_{y_I} = e_y \Leftrightarrow$$

$$\dot{e}_{y_I} = e_y$$

Έχουμε:

$$\begin{cases} \dot{e}_{y_I} = e_y = {C_p}^T x_p - r \\ \dot{x}_p = A_p x_p + B_p D(u + f(x_p)) \end{cases}$$

Κι έτσι ορίζουμε το εκτεταμένο σύστημα ανοιχτού βρόχου:

$$\dot{x} = Ax + BD(u + f(x_p)) + B_m r$$

όπου $x = ({e_{y_I}}^T, {x_p}^T)^T \in \mathbb{R}^n$ το εκτεταμένο διάνυσμα καταστάσεων του συστήματος του οποίου η διάσταση είναι $n = n_p + 1$. Οι νέοι πίνακες είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & {C_p}^T \\ 0_{n_p\, x\, 1} & A_p \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_p \end{pmatrix}, \qquad B_m = \begin{pmatrix} -1 \\ 0_{n_p\, x\, 1} \end{pmatrix},$$

ενώ η έξοδος εκτεταμένου συστήματος θα έχει τη μορφή:

$$y = \begin{pmatrix} 0 & {C_p}^T \end{pmatrix} x = C^T x, \qquad \mu\varepsilon \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & {C_p}^T \end{pmatrix}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το ζεύγος (A, B) του εκτεταμένου συστήματος είναι επίσης ελέγξιμο:

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του ζεύγους (A_p, B_p) είναι $M_p = \begin{pmatrix} B_p & A_p B_p & \dots & {A_p}^{n_p - 1} B_p \end{pmatrix}$. Έχουμε παρακάτω τα γινόμενα:

$$AB = \begin{pmatrix} {C_p}^T B_p \\ A_p B_p \end{pmatrix}, \; A^2 B = \begin{pmatrix} A_p {C_p}^T B_p \\ {A_p}^2 B_p \end{pmatrix}, \dots, A^{n-1} B = \begin{pmatrix} {A_p}^{n-2} {C_p}^T B_p \\ {A_p}^{n-1} B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {A_p}^{n_p - 1} {C_p}^T B_p \\ {A_p}^{n_p} B_p \end{pmatrix}$$

ενώ ο πίνακας ελεγξιμότητας του ζεύγους (A, B) είναι

$$M = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B)$$

και έτσι εύκολα φαίνεται ότι:

$$M = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {C_p}^T M_p \\ B_p & A_p M_p \end{pmatrix}$$

Άρα για να είναι ελέγξιμο, αρκεί $\det \begin{pmatrix} 0 & {C_p}^T M_p \\ B_p & A_p M_p \end{pmatrix} \neq 0$. Θεωρώντας ότι A_p είναι αντιστρέψιμος:

$$det \begin{pmatrix} 0 & {C_p}^T M_p \\ B_p & A_p M_p \end{pmatrix} = det\left(\begin{pmatrix} 0 & {C_p}^T M_p \\ B_p & A_p M_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_p & -{M_p}^{-1}{A_p}^{-1}B_p \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} {C_p}^T M_p & -{C_p}^T {A_p}^{-1} B_p \\ A_p M_p & 0 \end{pmatrix}$$
$$= det(A_p M_p) \cdot det(-{C_p}^T {A_p}^{-1} B_p) = det(A_p) \cdot det(M_p) \cdot det(-{C_p}^T {A_p}^{-1} B_p)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι και το ζεύγος πινάκων του εκτεταμένου συστήματος θα είναι επίσης ελέγξιμο αν και μόνο αν:

1) το ζεύγος $(A_p, B_p D) => (A_p, B_p)$, (αφού το D$\neq 0$ είναι σταθερά) είναι ελέγξιμο, δηλαδή $det(M_p) \neq 0$ και

2) $rank \begin{pmatrix} A_p & B_p D \\ {C_p}^T & 0 \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} A_p & B_p \\ {C_p}^T & 0 \end{pmatrix} = n_p + 1 = n$, δηλ.
$\det = \begin{pmatrix} A_p & B_p \\ {C_p}^T & 0 \end{pmatrix} = \det(A_p)\det(-{C_p}^T {A_p}^{-1} B_p) \neq 0$
ώστε να εξασφαλίζεται και η παρατηρησιμότητα **[1] τα οποία τα θεωρούμε προϋποθέσεις για την συνέχεια της ανάλυσης**. Πρακτικά αυτό που θέλω να εξασφαλίσω είναι ότι ο ελεγκτής μου θα είναι υλοποιήσιμος. Δηλαδή δείχνω ότι το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο για να εξασφαλίσω την ύπαρξη $\boldsymbol{A_m}$ πίνακα Hurwitz στη σχέση $\boldsymbol{A_m = A - B{K_x}^T}$ που θα χρησιμοποιήσω παρακάτω και επομένως του $\boldsymbol{K_x}$.

Έτσι, το νέο μας σύστημα είναι:

$$(\Sigma_3): \begin{cases} \dot{x} = Ax + BD(u + f(x_p)) + B_m r \\ y = C^T x \end{cases}$$

Στόχος μας είναι να παρακολουθήσουμε ένα φραγμένο επιθυμητό σήμα $r(t)$. Οι πίνακες A, B, C είναι γνωστοί, εφόσον A_p, B_p, C_p είναι γνωστοί.

Θέμα 1ο

Για την παρακάτω ανάλυση θα κάνουμε τις παρακάτω **συμβάσεις για το μοντέλο αναφοράς** μας. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι:

1. $B_m = \begin{pmatrix} -1 \\ 0_{n_p \, x \, 1} \end{pmatrix}$
2. ο A_m πίνακας με τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του αρνητικά (Hurwitz).
3. ${C_m}^T = C^T$
4. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C \in \mathbb{R}^n$ με $n = n_p + 1$

(Στην πράξη/προσομοίωση δηλαδή, αποσκοπούμε να ελέγξουμε τη συμπεριφορά του συστήματος μόνο από την επιλογή συγκεκριμένων παραμέτρων για τον πίνακα A_m του μοντέλου αναφοράς, το οποίο θα παρακολουθεί το αρχικό μας σύστημα).

Έχουμε $D = 1$ και $f(x_p) = 0$.
Έτσι, το (Σ_3) παίρνει τη μορφή:

$$(\Sigma_4): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_m r \\ y = C^T x \end{cases}$$

Ενώ το σύστημα αναφοράς:

$$(\Sigma_2): \begin{cases} \dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \\ y_m = {C_m}^T x_m \end{cases}$$

Για να ταυτίσουμε τα δύο συστήματα επιλέγουμε κέρδος ανάδρασης (feedback gain) K_x να είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε ο **Hurwitz πίνακας του μοντέλου αναφοράς** να είναι $\boldsymbol{A_m = A - BD{K_x}^T = A - B{K_x}^T}$, δηλαδή υποθέτουμε ότι ισχύουν οι **συνθήκες ταύτισης μοντέλου (Model Matching Conditions)**. Για να μπορούμε να κάνουμε αυτή την τοποθέτηση πόλων παρόλα αυτά, δηλαδή να ελέγξουμε το σύστημά μας, πρέπει το ζεύγος $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ να είναι ελέγξιμο (που ισχύει).

Έτσι, τελικά οι εξισώσεις κατάστασης παίρνουν την μορφή:

$$\dot{x} = A_m x + B(u + {K_x}^T x) + B_m r, \qquad (5)$$

Επομένως**, επιλέγοντας έναν κλασικό ελεγκτή ανάδρασης καταστάσεων** :

$$\boldsymbol{u = u_l = -{K_x}^T x} = -\begin{bmatrix} {K_I}^T & {K_P}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{y_I} \\ x_p \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

όπου K_I, το κέρδος για ολοκληρωτικό έλεγχο, ενώ το K_P, τα κέρδη για αναλογικό έλεγχο.

Με αυτή μας την επιλογή η τελική μορφή του συστήματος θα γίνει:

$$\boldsymbol{\dot{x} = A_m x + B_m r}$$

Ορίζουμε το σφάλμα

$$e(t) \triangleq x(t) - x_m(t), \qquad (7)$$

και παραγωγίζοντας

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_m \quad \Leftrightarrow \text{(4),(5)}$$

$$\dot{e} = A_m x + B(u + {K_x}^T x) + B_m r - (A_m x_m + B_m r) \Leftrightarrow \text{(6)}$$

$$\dot{e} = A_m(x - x_m) \quad \Leftrightarrow \text{(7)}$$

$$\boldsymbol{\dot{e} = A_m e}, \ \ \mathbf{(8)} \ \textbf{(δυναμική σφάλματος)}$$

Η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov θα είναι

$$V(t) = e^T(t)P_m e(t) \geq 0 \text{ (ως τετραγωνική μορφή)}$$

όπου P_m είναι ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας-λύση της εξίσωσης Lyapunov:

$$\boldsymbol{A_m}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P_m} + \boldsymbol{P_m A_m} = -\boldsymbol{Q}, \qquad (9)$$

για κάποιον διαγώνιο θετικά ορισμένο πίνακα $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q^T} > \boldsymbol{0}$.

Έτσι, η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι:

$$\dot{V} = \dot{e}^T P_m e + e^T P_m \dot{e} \Leftrightarrow \text{(8)}$$

$$\dot{V} = e^T {A_m}^T P_m e + e^T P_m A_m e \Leftrightarrow$$

$$\dot{V} = e^T({A_m}^T P_m + P_m A_m)e \Leftrightarrow \text{(9)}$$

$$\boldsymbol{\dot{V} = -e^T Q e \leq 0}, \quad (10)$$

εφόσον έχουμε τετραγωνική μορφή με θετικά ορισμένο πίνακα Q.

Αυτό εξασφαλίζει την ευστάθεια του συστήματος και συνεπώς και του αρχικού μας συστήματος. Δεδομένου ότι $V(t) > 0$ και $\dot{V} \leq 0$, τότε $V(t) \leq V(0) < \infty$. Επομένως η $V(t) \in L_\infty$, το οποίο σημαίνει ότι και το σφάλμα $e(t) \in L_\infty$. Επιπλέον, έχοντας επιλέξει ένα σήμα αναφοράς $r(t) \in L_\infty$ και εφόσον το σύστημα αναφοράς είναι ευσταθές, έχουμε $x_m \in L_\infty$ το οποίο υποδεικνύει ότι και $x \in L_\infty$, επομένως $x_p \in L_\infty$, αλλά και $\boldsymbol{e_{y_I} \in L_\infty}$**.** Επιπρόσθετα,

$$\int_0^t \dot{V}(\tau)d\tau = V(t) - V(0), \qquad (11)$$

όπου, η $V(t)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση επομένως ισχύει: $V(0) - V(t) \leq V(0)$

Άρα από (10), (11):

$$-\int_0^t \dot{V}(\tau)d\tau \leq V(0) \Leftrightarrow$$

$$\int_0^t e^T Q e \, d\tau \leq V(0)$$

που σημαίνει ότι το σφάλμα $e(t) \in L_2$. Επιπλέον, αφού $e(t) \in L_\infty$, τότε και $\dot{e}(t) \in L_\infty$, το οποίο υποδηλώνει ότι $\ddot{V}(t) \in L_\infty$, άρα και ομοιόμορφα συνεχής.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} V \; \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta \\ \dot{V} \leq 0 \\ \ddot{V}(t) \; o\mu o\iota\acute{o}\mu o\rho\varphi\alpha \; \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \end{cases}$$

Με τη χρήση λοιπόν το λήμματος Barbalat, καταλήγουμε στο ότι $\lim_{t\to\infty} \dot{V}(t) = 0$, το οποίο με τη σειρά του αποδεικνύει ότι το σφάλμα $e(t) \to 0$ για $t \to \infty$. Επομένως δείξαμε ότι $x(t) \to x_m(t)$, δηλαδή ότι το x παρακολουθεί ασυμπτωτικά το x_m και επομένως ότι η έξοδος του συστήματος $y =$

$C^T x$ θα παρακολουθεί ασυμπτωτικά την έξοδο του συστήματος αναφοράς $y_m = {C_m}^T x_m = C^T x_m$. Ταυτόχρονα, η έξοδος y_m παρακολουθεί το σήμα αναφοράς $r(t)$ με φραγμένο σφάλμα, επομένως και $y = C^T x = [0 \quad C_p] \begin{bmatrix} e_{y_I} \\ x_p \end{bmatrix} = C_p x_p = y_p$ θα παρακολουθεί το $r(t)$ με φραγμένο σφάλμα.

Όλα τα σήματα λοιπόν στον κλειστό βρόγχο (χρησιμοποιώντας δηλαδή τον ελεγκτή $\boldsymbol{u_l}$), είναι φραγμένα και η έξοδος του αρχικού συστήματος παρακολουθεί την έξοδο του σήματος αναφοράς με τον τρόπο που απαιτήσαμε.

<u>**Σημείωση:**</u>

Σε αυτή τη λύση, δώσαμε μόνο κέρδη ανατροφοδότησης (Feedback gain). Στη βιβλιογραφία πολλές φορές οι συνθήκες ταύτισης έχουν λίγο διαφορετική μορφή χρησιμοποιώντας και ένα κέρδος προσωτροφοδότησης K_r (Feedforward gain):

$$\begin{cases} A_m = A - BK_x \\ B_m = BK_r \end{cases}$$

Επίσης, οι συνθήκες ταύτισης εδώ σαφώς αφορούν σύστημα μορφής $\dot{x} = Ax + Bu$.
Σε τέτοια περίπτωση θέλουμε έναν ελεγκτή της μορφής $u = -K_x x + K_r r$. Παρόλα αυτά, λόγω της επέκτασης του συστήματος μέσω της απαίτησης για ολοκληρωτικό έλεγχο, το σύστημα μας θα είναι ήδη:

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_m r$$

Δηλαδή έχουμε ήδη συμπεριλάβει την επίδραση όρου τύπου $K_r r$ καθώς ο όρος $B_m r$ έχει εμφανιστεί ήδη μέσω του σφάλματος, επομένως είναι περιττό.

Επιπλέον, για την επιλογή του A_m και συνεπώς του K_x, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο LQR (Linear Quadratic Regulator), η οποία θα αναλυθεί στη επόμενη εργασία για την χρήση της στην προσομοίωση.

Θέμα 2ο

Έχουμε τώρα μία μη ιδανική περίπτωση στην οποία $0 < D < 1$ και $f(x_p) \neq 0$, επομένως πρέπει να τροποποιήσουμε την λύση μας, προσθέτοντας στον ελεγκτή μας ένα προσαρμοστικό νόμο για να πετύχουμε τον ίδιο στόχο. Δηλαδή ο ελεγκτής μας θα έχει τη μορφή $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_l} + \boldsymbol{u_{ad}}$ όπου $\boldsymbol{u_l}$ ο ελεγκτής από το Θέμα 1 και $\boldsymbol{u_{ad}}$ ένας προσαρμοστικός νόμος που θα οριστεί παρακάτω.

Το σύστημά μας (όπως αναλύσαμε παραπάνω) τώρα θα είναι:

$$(\Sigma_3):\begin{cases}\dot{x} = Ax + BD(u + f(x_p)) + B_m r \\ y = C^T x = C_p x_p = y_p\end{cases} \Leftrightarrow (\Sigma_3):\begin{cases}\dot{x} = Ax + BD(u + \theta^T \Phi(x_p)) + B_m r \\ y = C^T x = C_p x_p = y_p\end{cases}$$

όπου οι πίνακες A, B, C είναι γνωστοί.

Για το μοντέλο αναφοράς μας θα ισχύουν ακριβώς οι ίδιες συμβάσεις με το Θέμα 1.

Υποθέτοντας πάλι Model Matching Conditions, δηλαδή ότι $\boldsymbol{A_m} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BD}\boldsymbol{K_x}^{\boldsymbol{T}}$, από το Θέμα 1:

$$\begin{cases}\dot{x} = A_m x + BD(u + {K_x}^T x + \theta^T \Phi(x_p)) + B_m r \\ y = y_p\end{cases}$$

Παρόλα αυτά, η διαφορά σε σχέση με πριν είναι ότι λόγω της αβεβαιότητας του $\boldsymbol{D}$, το $\boldsymbol{K_x}$ μας είναι πλέον άγνωστο. Επίσης, ο $\boldsymbol{\theta}$ αποτελεί αβεβαιότητα του συστήματος και συνεπώς δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον ελεγκτή. Έτσι τελικά, ο ελεγκτής μας θα πρέπει να έχει νόμους εκτίμησης αυτών των παραμέτρων δηλαδή να είναι

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_{ad}} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{u_{ad}} = -\boldsymbol{\widehat{K}_x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\widehat{\theta}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x_p}), \qquad (\mathbf{12})$$

όπου $\widehat{K}_x(t) \in \mathbb{R}^{n\,x\,1}$ και $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{N\,x\,1}$ είναι οι εκτιμήσεις τον προσαρμοστικών κερδών του ελεγκτή, για τα οποία θα ορίσουμε προσαρμοστικό νόμο στη συνέχεια.

Τελικά, αντικαθιστώντας χρησιμοποιώντας τη σχέση (12):

$$\dot{x} = A_m x + BD(-(\widehat{K}_x - K_x)^T x - (\hat{\theta} - \theta)^T \Phi(x_p)) + B_m r \Leftrightarrow$$

$$\dot{x} = A_m x + BD(-{\widetilde{K}_x}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p)) + B_m r, \qquad (13)$$

όπου $\widetilde{K}_x \triangleq \widehat{K}_x - K_x$ και $\tilde{\theta} \triangleq \hat{\theta} - \theta$ τα παραμετρικά σφάλματα. Για τη δυναμική σφάλματος $e(t) = x(t) - x_m(t)$ λοιπόν έχουμε:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_m \quad \Leftrightarrow (13),$$

$$\dot{e} = A_m x + BD(-{\widetilde{K}_x}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p)) + B_m r - (A_m x_m + B_m r) \quad \Leftrightarrow$$

$$\dot{e} = A_m(x - x_m) + BD(-{\widetilde{K}_x}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p)) \quad \Leftrightarrow$$

$$\dot{e} = A_m e + BD(-\widetilde{K}_x{}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p)),$$ **(δυναμική σφάλματος) (14)**

Επιλέγουμε τώρα συνάρτηση Lyapunov:

$$\boldsymbol{V(t) = e^T(t) P_m e(t) + \widetilde{K}_x{}^T \Gamma_x{}^{-1} \widetilde{K}_x D + \tilde{\theta}^T \Gamma_\theta{}^{-1} \tilde{\theta} D}$$

με $\gamma_x > 0$ και $\gamma_\theta > 0$ είναι παράμετροι σχετικές με τον ρυθμό προσαρμογής, $P_m = P_m{}^{\boldsymbol{T}} > 0$ πίνακας-λύση της εξίσωσης Lyapunov $\boldsymbol{A_m{}^T P_m + P_m A_m = -Q}$ **,** με $Q = Q^{\boldsymbol{T}} > 0$. Επιλέγοντας $\Gamma_x = \Gamma_x{}^T > 0$ και $\Gamma_\theta = \Gamma_\theta{}^T > 0$, με $\Gamma_x, \Gamma_\theta \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ θα έχουμε τετραγωνική μορφή ($\boldsymbol{\widetilde{K}_x{}^T \Gamma_x{}^{-1} \widetilde{K}_x}$ βαθμωτό και D θετική σταθερά) άρα:

$$\boldsymbol{V(t) \geq 0}$$

Παραγωγίζοντας και χρησιμοποιώντας την ίδια αιτιολόγηση με το Θέμα 1:

$$\dot{V} = \dot{e}^T P_m e + e^T P_m \dot{e} + \dot{\widetilde{K}}_x{}^T \Gamma_x{}^{-1} \widetilde{K}_x D + \widetilde{K}_x{}^T \Gamma_x{}^{-1} \dot{\widetilde{K}}_x D + \dot{\tilde{\theta}}^T \Gamma_\theta{}^{-1} \tilde{\theta} D + \tilde{\theta}^T \Gamma_\theta{}^{-1} \dot{\tilde{\theta}} D \Leftrightarrow \text{(14)}$$

(το $BD(-\widetilde{K}_x{}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p))$ είναι διάνυσμα αφού $-\widetilde{K}_x{}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p)$ βαθμωτό)

$$\dot{V} = (e^T A_m{}^T + B^T D(-\widetilde{K}_x{}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p)))P_m e + e^T P_m (A_m e + BD(-\widetilde{K}_x{}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p))) + 2\widetilde{K}_x{}^T \Gamma_x{}^{-1} \dot{\widetilde{K}}_x D + 2\tilde{\theta}^T \Gamma_\theta{}^{-1} \dot{\tilde{\theta}} D \Leftrightarrow$$

Είναι προφανές ότι αφού $P_m = P_m{}^{\boldsymbol{T}}$**,** ισχύει $B^T P_m e = e^T P_m B$, ενώ τα υπόλοιπα ενδιάμεσα μεγέθη είναι βαθμωτά.

$$\dot{V} = e^T (A_m{}^T P_m + P_m A_m) e + 2e^T P_m BD(-\widetilde{K}_x{}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p)) + 2\widetilde{K}_x{}^T \Gamma_x{}^{-1} \dot{\widetilde{K}}_x D + 2\tilde{\theta}^T \Gamma_\theta{}^{-1} \dot{\tilde{\theta}} D \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(t) = -e^T(t) Q e(t) + 2e^T P_m BD(-\widetilde{K}_x{}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi(x_p)) + 2\widetilde{K}_x{}^T \Gamma_x{}^{-1} \dot{\widetilde{K}}_x D + 2\tilde{\theta}^T \Gamma_\theta{}^{-1} \dot{\tilde{\theta}} D$$

Ισχύει ότι $\dot{\widetilde{K}}_x = \dot{\widehat{K}}_x - \dot{K}_x = \dot{\widehat{K}}_x$, $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}} - \dot{\theta} = \dot{\hat{\theta}}$ αφού τα $\dot{K}_x, \dot{\theta}$ είναι 0 εφόσον K_x, θ σταθερά. Άρα:

$$\boldsymbol{\dot{V}(t) = -e^T(t) Q e(t) + 2e^T P_m BD\left(-\widetilde{K}_x{}^T x - \tilde{\theta}^T \Phi\left(x_p\right)\right) + 2\widetilde{K}_x{}^T \Gamma_x{}^{-1} \dot{\widehat{K}}_x D + 2\tilde{\theta}^T \Gamma_\theta{}^{-1} \dot{\hat{\theta}} D}$$

Έτσι τελικά, επιλέγουμε τους εξής προσαρμοστικούς νόμους:

$$\boldsymbol{\dot{\widehat{K}}_x = \Gamma_x x e^T P_m B}$$

$$\boldsymbol{\dot{\hat{\theta}} = \Gamma_\theta\, \Phi(x_p) e^T P_m B}$$

Με αυτές τις επιλογές:

$$\boldsymbol{\dot{V}(t) = -e^T(t) Q e(t) \leq 0}$$

Συνεπάγονται όλα όσα αναλύθηκαν στο Θέμα 1 για τη συνάρτηση Lyapunov, δηλαδή η $V(t) \in L_\infty$, το οποίο σημαίνει ότι και τα σφάλματα $e(t), \tilde{\theta}(\text{t}), \widetilde{K}_x(\text{t}) \in L_\infty$. Επιπλέον, έχοντας επιλέξει ένα σήμα αναφοράς $r(t), e(t) \in L_\infty$ και εφόσον το σύστημα αναφοράς είναι ευσταθές, έχουμε $x_m \in L_\infty$ το οποίο υποδεικνύει ότι και $x \in L_\infty$, επομένως $x_p \in L_\infty$, αλλά και $\boldsymbol{e_{y_I}} \in \boldsymbol{L_\infty}$. Συνεπώς και $\dot{x}(t) \in L_\infty$ Επιπρόσθετα,

$$\int_0^t \dot{V}(\tau)d\tau = V(t) - V(0)$$

όπου, η $V(t)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση επομένως ισχύει: $V(0) - V(t) \leq V(0)$

Άρα όπως και προηγουμένως:

$$-\int_0^t \dot{V}(\tau)d\tau \leq V(0) \Leftrightarrow$$

$$\int_0^t e^T Q e \, d\tau \leq V(0)$$

που σημαίνει ότι το σφάλμα $e(t) \in L_2$. Έχουμε $\tilde{\theta}(\mathrm{t}), \widetilde{K}_x(\mathrm{t})$ φραγμένα και οι πραγματικές τιμές θ, K_x σταθερές, άρα και $\widehat{K}_x(t), \hat{\theta}(t)$ είναι φραγμένα. Δεδομένου ότι το διάνυσμα $\Phi(x_p)$ αποτελείται από τοπικά συνεχείς κατά Lipchitz ως προς $x_p \in L_\infty$, τότε και $\Phi(x_p)$ είναι φραγμένο. Επομένως, $u \in L_\infty$ Επιπλέον, αφού $e(t), \tilde{\theta}(\mathrm{t}), \widetilde{K}_x(\mathrm{t}) \in L_\infty$, τότε και $\dot{e}(t) \in L_\infty$, το οποίο υποδηλώνει ότι $\ddot{V}(t) \in L_\infty$, άρα και ομοιόμορφα συνεχής. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} V \; \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta \\ \dot{V} \leq 0 \\ \ddot{V}(t) \; o\mu o\iota\acute{o}\mu o\rho\varphi\alpha \; \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \end{cases}$$

Με τη χρήση λοιπόν το λήμματος Barbalat, καταλήγουμε στο ότι $\lim_{t\to\infty} \dot{V}(t) = 0$, το οποίο με τη σειρά του αποδεικνύει ότι το σφάλμα $e(t) \to 0$ για $t \to \infty$. Επομένως δείξαμε ότι $x(t) \to x_m(t)$, δηλαδή ότι το x παρακολουθεί ασυμπτωτικά το x_m και επομένως ότι η έξοδος του συστήματος $y = C^T x$ θα παρακολουθεί ασυμπτωτικά την έξοδο του συστήματος αναφοράς

$$y_m = {C_m}^T x_m = C^T x_m$$

Ταυτόχρονα, αφού $\boldsymbol{e_{y_I}} \in \boldsymbol{L_\infty}$, το $y = y_p$ θα παρακολουθεί το σήμα $r(t)$ με φραγμένο σφάλμα.

Σημειώσεις:

1) Παρόλο που τα σφάλματα $\tilde{\theta}(\mathrm{t}), \widetilde{K}_x(\mathrm{t}) \in L_\infty$, δεν έχουμε αποδείξει ότι μηδενίζονται, δηλαδή ότι οι εκτιμήσεις συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές. Αυτό που γνωρίζουμε είναι ότι οι άγνωστες παράμετροι παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένες.

2) Σε περίπτωση που είχαμε άλλες διαστάσεις, πχ $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, τότε θα έπρεπε να αντιμετωπίσουμε στην συνάρτηση Lyapunov πίνακες τους οποίους για να εμφανίσουν βαθμωτό μέγεθος θα τους βάζαμε μέσα στην συνάρτηση ίχνους (trace).

<u>Ανακεφαλαίωση:</u>

Το τελικό σύστημα εξισώσεων της ανάλυσης είναι:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{BD}(\widehat{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{x}}{}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}}) + \boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}})) + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{m}}\,\boldsymbol{r} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{r} \\ \dot{\widehat{\boldsymbol{K}}}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{B} \\ \dot{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}})\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{B} \end{cases}$$

Δηλαδή υλοποιώ τον ελεγκτή τον ελεγκτή:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = -\widehat{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{x}}{}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{ad}} \\ \dot{\widehat{\boldsymbol{K}}}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{B} \\ \dot{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}})\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{B} \end{cases}$$

έχοντας υποθέσει ότι η συνθήκη ταύτισης των μοντέλων ισχύει (δηλαδή ότι έχει λύση).

Για το σύστημα αναφοράς μου έχω υποθέσει:

1. $B_m = \begin{pmatrix} -1 \\ 0_{n_p\,x\,1} \end{pmatrix}$
2. ο A_m πίνακας με τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του αρνητικά (Hurwitz).
3. $C_m{}^T = C^T$
4. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C \in \mathbb{R}^n$ με $n = n_p + 1$

<u>Προέκταση:</u>

Στο Θέμα 1 μελετήσαμε την κλασική περίπτωση ενός ιδανικού συστήματος και βγάλαμε έναν ιδανικό ελεγκτή $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{l}} = -\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}{}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$. Στο Θέμα 2 μελετήσαμε την παρακολούθηση του συστήματος αναφοράς υπό την ύπαρξη αβεβαιοτήτων φτιάχνοντας έναν ελεγκτή $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{ad}}$.

Με παρόμοια λογική, μπορώ να τροποποιήσω τελικά τον ελεγκτή μου ώστε να συμπεριλαμβάνει και τον ιδανικό PI ελεγκτή μου, δηλαδή να έχω $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{ad}}$.

Έστω ότι επιλέγω A_m έτσι ώστε:

$$A_m = A - BK_x{}^T (Hurwitz)$$

Θα έχω και λίγο διαφορετικό $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{ad}}$.

Το σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_m x + BD(u + \frac{1}{D}K_x{}^T x + \theta^T \Phi(x_p)) + B_m\, r \\ y = y_p \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_m x + BD(u_{ad} + (1 - \frac{1}{D})u_l + \theta^T \Phi(x_p)) + B_m\, r \\ y = y_p \end{cases}$$

Ορίζουμε το $\bar{\Phi}(u_l, x_p) = (u_l, \Phi^T(x_p))^T$ ένα το εκτεταμένο διάνυσμα regressor και το εκτεταμένο διάνυσμα $\bar{\Theta} = (K_u, \Theta^T)^T$ (όπου $K_u = (1 - \frac{1}{D})$) με τις άγνωστες παραμέτρους, και έχουμε:

$$\bar{\Theta}^T \bar{\Phi}(u_l, x_p) = (1 - \frac{1}{D})u_l + \theta^T \Phi(x_p)$$

Άρα το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_m x + BD(u_{ad} + \bar{\Theta}^T \bar{\Phi}(u_l, x_p)) + B_m\, r \\ y = y_p \end{cases}$$

Από εδώ και πέρα η ανάλυση με συνάρτηση Lyapunov, γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στο Θέμα 2. Καταλήγουμε τελικά με τα εξής:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dot{x} = Ax + BD(-\hat{\bar{\Theta}}^T \bar{\Phi}(u_l, x_p) + \bar{\Theta}^T \bar{\Phi}(u_l, x_p)) + B_m\, r} \\ \boldsymbol{\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r} \\ \boldsymbol{\dot{\hat{\bar{\Theta}}} = \Gamma_{\bar{\Theta}}\, \bar{\Phi}(x_p) e^T P_m B, \mu\varepsilon\ \Gamma_{\bar{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Gamma_u & 0_{nx1} \\ 0_{Nx1} & \Gamma_\theta \end{pmatrix}, \Gamma_u = {\Gamma_u}^T > 0} \end{cases}$$

Δηλαδή υλοποιώ τον ελεγκτή τον ελεγκτή:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u = u_l + u_{ad} = -{K_x}^T x - {\hat{K}_u}^T x - \hat{\theta}^T \Phi(x_p) = -\left(1 - {\hat{K}_u}^T\right) {K_x}^T x - \hat{\theta}^T \Phi(x_p)} \\ \boldsymbol{= (1 - {\hat{K}_u}^T)(K_I \frac{(r - y)}{s} - K_P x_p) - \hat{\theta}^T \Phi(x_p)} \\ \boldsymbol{\dot{\hat{K}}_u = \Gamma_u u_l e^T P_m B} \\ \boldsymbol{\dot{\hat{\theta}} = \Gamma_\theta \Phi(x_p) e^T P_m B} \end{cases}$$

Σημείωση:

Σε όλη την ανάλυση δεν έχουμε αναφέρει καθόλου τις αρχικές τιμές. Χωρίς να έχουμε κάποιο περιορισμό μπορούμε να θεωρήσουμε μηδενικές αρχικές τιμές.

Βιβλιογραφία:

[1] Lavretsky, E., and Wise, K. "Robust and adaptive control: With aerospace applications", Advanced textbooks in control and signal processing. London and New York: Springer, 2013.