

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών  
Υπολογιστών

# Ευφυή & Προσαρμοστικά Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

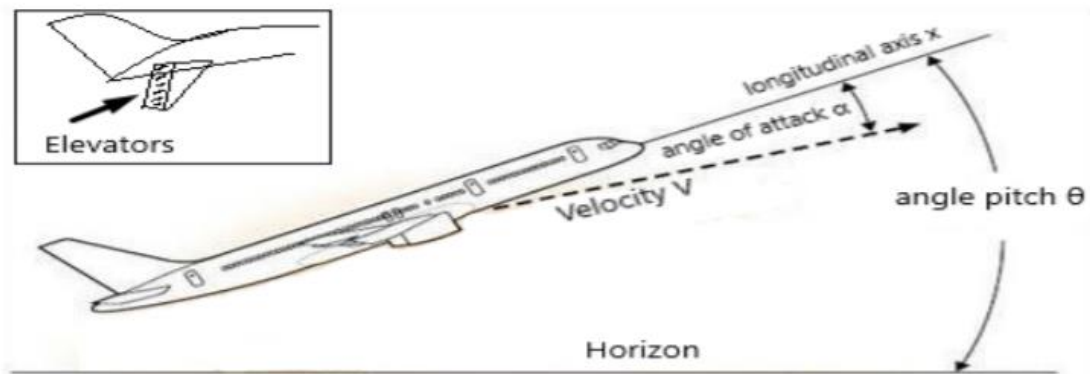
Εργασία 2<sup>η</sup> – Χειμερινό Εξάμηνο 2021/2022

Καβελίδης Φραντζής Δημήτριος – ΑΕΜ 9351

**7/1/2022**

## Πρόβλημα:

Η κίνηση στον κατακόρυφο άξονα των συμβατικών αεροσκαφών ελέγχεται από την ισχύ των κινητήρων καθώς και από την επιφάνεια ελέγχου στα ουραία πτερύγια (elevators). Αν και η ισχύς των κινητήρων αποτελεί την πρωταρχική είσοδο ρύθμισης της ταχύτητας, η εκτροπή των elevators πάνω ή κάτω κατά γωνία  $\delta_e$  μεταβάλλει το ρυθμό pitch  $q = \dot{\theta}$  του αεροσκάφους και κατά συνέπεια τον προσανατολισμό του ως προς τον ορίζοντα (γωνία pitch  $\theta$ ). Ταυτόχρονα οι ροπές που ασκούνται από την εκτροπή των elevators, θα επηρεάσουν και την γωνία προσβολής του αεροσκάφους  $\alpha$ , (την γωνία μεταξύ του διανύσματος της ταχύτητας  $V$  και του διαμήκη άξονα του αεροσκάφους  $x$ ):



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται τα διάφορα μεγέθη. Αν θεωρήσουμε ως μεταβλητές κατάστασης τα  $x_p = [\alpha, q]^T$  σε rad και rad/s αντίστοιχα και για σταθερή ταχύτητα αεροσκάφους μετρούμενη σε ft/s, οι δυναμικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση στον κατακόρυφο άξονα για μικρές σχετικά εκτροπές των elevators σε rad είναι:

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} -0.8060 & 1 \\ -9.1486 & -4.59 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} -0.04 \\ -4.59 \end{bmatrix} \delta_e, \quad (2.1)$$

Έξοδος  $y$  λαμβάνεται η γωνία προσβολής. Προκειμένου να προσδώσουμε χαρακτηριστικά αναλογικού ολοκληρωτικού ελέγχου, ορίζουμε το σφάλμα  $e_y \triangleq y_p - r$  το οποίο ολοκληρώνεται δημιουργώντας το σύστημα:

$$e_{yI} \triangleq \int_0^t e_y(\tau) d\tau$$

Το  $e_{yI}$  μαζί με τις μεταβλητές κατάστασης χρησιμοποιούνται για την δημιουργία αναδράσεων.

### **Ζητήματα:**

- α) Να υλοποιηθεί σε MATLAB γραμμικός ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων με χαρακτηριστικά αναλογικού-ολοκληρωτικού ελέγχου, ώστε όλα τα σήματα στο κλειστό βρόχο να είναι φραγμένα και το σφάλμα  $e \triangleq y_p - y_m$  να συγκλίνει στο μηδέν. Εδώ  $y_m$  είναι η έξοδος του μοντέλου αναφοράς που περιγράφεται στην διατύπωση της 1ης Εργασίας και η είσοδος αναφοράς  $r(t)$  είναι:

$$r(t) = \begin{cases} 0^\circ, & 0 \leq t < 1s \\ 0.5^\circ, & 1 \leq t < 10s \\ 0^\circ, & 10 \leq t < 22s \\ -0.5^\circ, & 22 \leq t < 32s \\ 0^\circ, & 32 \leq t < 45s \\ 1^\circ, & 45 \leq t < 55s, \\ 0^\circ, & 55 \leq t < 65s \\ -1^\circ, & 65 \leq t < 75s \\ 0^\circ, & 75 \leq t < 85s \\ 0.5^\circ, & 85 \leq t < 95s \\ 0^\circ, & t \leq 95s \end{cases} \quad (2.2)$$

β) Στη συνέχεια θεωρείστε πως το σύστημα (2.1) περιέχει και αβεβαιότητες και περιγράφεται από τις εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p D(\delta_e + f(x_p)), \quad (2.3)$$

με

$$f(x_p) = k_\alpha \alpha + k_q q, \quad (2.4)$$

Να επιλέξετε τις τιμές των παραμέτρων  $D, k_\alpha, k_q$  ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου με τον ελεγκτή του ερωτήματος (α) να είναι ασταθές. Να δείξετε με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων την αστάθεια.

γ) Για το σύστημα (3) και για τις τιμές των παραμέτρων  $D, k_\alpha, k_q$  που έχετε επιλέξει (αλλά θεωρώντας τις άγνωστες), να σχεδιαστεί και να υλοποιηθεί σε MATLAB προσαρμοστικός ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων (δες Εργασία 1), που να διατηρεί τα χαρακτηριστικά του αναλογικού ολοκληρωτικού ελέγχου, και να επιτυγχάνει την παρακολούθηση της εξόδου του μοντέλου αναφοράς για είσοδο αναφοράς (2) από την έξοδο του ελεγχόμενου συστήματος. Στην προσομοίωση που θα κάνετε ο ελεγκτής δεν θα κάνει χρήση των παραμέτρων  $D, k_\alpha, k_q$ . Επιπλέον των γραφικών παραστάσεων που περιγράφηκαν στο ερώτημα (α), να δοθούν και οι γραφικές παραστάσεις όλων των σημάτων στο κλειστό βρόχο.

Να σχολιάσετε και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματά σας.

### Ανάλυση:

Για σκοπούς πληρότητας, πριν ξεκινήσουμε την προσομοίωση θα αναφέρουμε σύντομα κάποια βασικά στοιχεία από τη βιβλιογραφία σχετικά με τα φυσικά μεγέθη του προβλήματος, καθώς και μία ανάλυση για την μέθοδο επιλογής κερδών LQR (Linear Quadrative Regulator).

### Φυσικά Μεγέθη:

Όπως υποδεικνύεται και από την εκφώνηση, οι σχέσεις των μεγεθών  $\alpha, q$  τα οποία ελέγχονται από το  $\delta_e$  αποτελούν την βραχύχρονη δυναμική του αεροσκάφους (aircraft short-period dynamics). Αν θεωρήσουμε σταθερές ρυθμίσεις των γκαζιών και σταθερή ταχύτητα αεροσκάφους, τότε η βραχύχρονη δυναμική του αεροσκάφους μπορεί να προσεγγιστεί από μία 2<sup>ης</sup> τάξης διαφορική εξίσωση στην παρακάτω μορφή [1],[2],[3]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_\alpha}{V} & 1 + \frac{Z_q}{V} \\ M_\alpha & M_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_\delta \\ M_\delta \end{pmatrix} D(\delta_e + f(x_p)), \quad D > 0, \quad (2.5)$$

όπου:

|  |   |
|--|---|
| $\alpha$ (rad)                                     | Γωνία προσβολής (angle of attack)             |
| $q$ (rad/s)  | Ρυθμός pitch                                  |
| $V$ (ft/s)   | Ταχύτητα αεροσκάφους                          |
| $\delta_e$ (rad)                                   | Σήμα ελέγχου (Elevator Deflection)            |
| $Z_\alpha, Z_q, Z_\delta, M_\alpha, M_q, M_\delta$ | Παράγωγοι ευστάθειας αεροσκάφους              |
| $D$  | Αναπαριστά την έκπτωση στη δυνατότητα ελέγχου |

Είναι φανερό ότι με αυτή την προσέγγιση το σύστημα έχει τη μορφή:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p D(u + f(x_p))$$

με

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.8060 & 1 \\ -9.1486 & -4.59 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} -0.04 \\ -4.59 \end{bmatrix} \text{ και } y = [1 \quad 0] x_p = \alpha \text{ άρα } C_p^T = [1 \quad 0].$$

Ακολουθούμε τώρα την ανάλυση της **Εργασίας 1**. Δεδομένου ότι θέλουμε να μοντελοποιήσουμε το σφάλμα  $e_{y_I}$ , θα επεκτείνουμε το σύστημα όπως δείξαμε, και συνεπώς τελικά το σύστημά μας θα γίνει:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BD(u + f(x_p)) + B_m r \\ y = C^T x \end{cases}$$

με

$$x = \begin{bmatrix} e_{y_I} \\ x_p \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.8060 & 1 \\ 0 & -9.1486 & -4.59 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.04 \\ -4.59 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = [0 \quad 1 \quad 0], \quad u = \delta_e$$

Για την κατασκευή του μοντέλου αναφοράς, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο LQR η οποία θα αναλυθεί παρακάτω εν συντομία.

## Linear Quadratic Regulator [4]

Η μέθοδος LQR έχει ως στόχο την εύρεση των παραμέτρων ενός πίνακα κερδών, οι οποίες ελαχιστοποιούν μία συνάρτηση κόστους. Ανάλογα με τις απαιτήσεις σχεδίασης, ο μηχανικός δίνει τα αντίστοιχα βάρη για την κάθε παράμετρο, και βρίσκει τα κέρδη που ελαχιστοποιούν το κόστος. Δηλαδή, αναλογιζόμαστε τις απαιτήσεις μας ώστε να βρούμε το κατάλληλο tradeoff. Συνήθως αυτό το tradeoff είναι ανάμεσα στην απόδοση (performance) και στην ενέργεια που απαιτείται από τον ενεργοποιητή (actuator effort). Η συνάρτηση κόστους έχει συνήθως αυτή τη μορφή:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

με  $Q$  να έχει βάρη-παραμέτρους για την **απόδοση (performance)**, ενώ  $R$  να έχει βάρη-παραμέτρους για την **ενέργεια (effort)**, οι οποίοι είναι συνήθως διαγώνιοι θετικά ορισμένοι πίνακες.

Λύνοντας το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της παραπάνω συνάρτησης κόστους, παίρνουμε μία λύση  $u = -Kx$  με  $K$  να είναι το ιδανικό κέρδος (που πετυχαίνει αυτή την ελαχιστοποίηση).

Πρακτικά, ρυθμίζοντας το  $Q$  «τιμωρούμε» την κακή απόδοση, ενώ ρυθμίζοντας το  $R$  «τιμωρούμε» το actuator effort. Αν έχουμε για παράδειγμα έναν πολύ ακριβό ενεργοποιητή, για παράδειγμα κάποιον από τους κινητήρες του αεροσκάφους που χρειάζεται μεγάλα ποσά ενέργειας, μπορούμε να αυξήσουμε το αντίστοιχο βάρος στον πίνακα  $R$ . Από την άλλη, αν μας ενδιαφέρει περισσότερο η απόδοση, τότε θα αυξήσουμε τα αντίστοιχα βάρη στον  $Q$ .

### Ανάλυση συγκεκριμένου προβλήματος:

α) Έχοντας εξηγήσει λοιπόν την μέθοδο LQR, ξεκινάμε με το σύστημά μας να έχει τη μορφή:

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_m r$$

Κάνοντας την σχεδίαση όπως στο **Θέμα 1** της **Εργασίας 1**, και χρησιμοποιώντας την μέθοδο LQR για το κέρδος  $K_x = K_{LQR}$ , θα έχουμε τελικά:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_m x + B(u + K_{LQR}^T x) + B_m r \\ u = u_l = -K_{LQR}^T x = -[K_I^T \quad K_P^T] \begin{bmatrix} e_{y_l} \\ x_p \end{bmatrix} \\ A_m = A - B K_{LQR}^T \\ y = C^T x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = A_m x + B_m r \\ y = C^T x \end{cases}$$

ενώ το μοντέλο αναφοράς θα είναι:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = A_m x + B_m r \\ y = C^T x \end{cases}$$

### Ορισμός πινάκων βαρών:

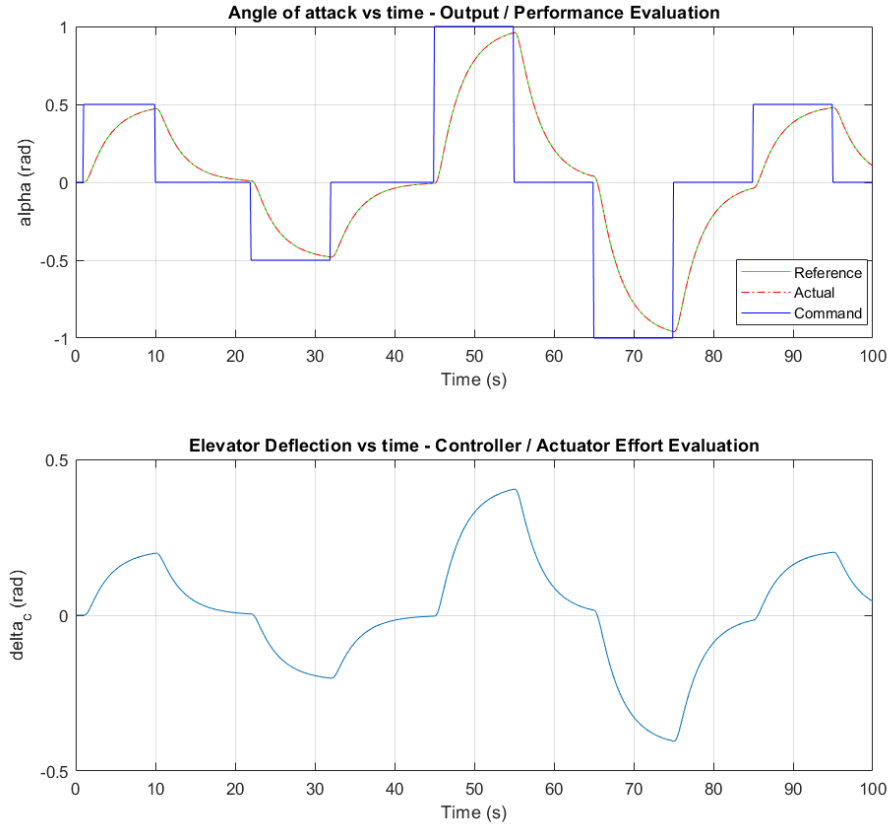
Δεδομένου ότι με τη μέθοδο LQR βρίσκουμε ένα ιδανικό κέρδος που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους, πρέπει ουσιαστικά να ορίσουμε ποια είναι αυτή η συνάρτηση κόστους, δηλαδή τις απαιτήσεις μας από το σύστημα.

Παρακάτω φαίνονται κάποιες δοκιμές για διαφορετικούς συνδυασμούς των πινάκων  $Q_{LQR}, R_{LQR}$ . Σε αυτό το σημείο, να διευκρινιστεί ότι γενικά ο  $R_{LQR}$  είναι πίνακας σε περίπτωση που έχουμε ελεγκτή μεγαλύτερης διάστασης, αλλά εδώ έχουμε βαθμωτό μέγεθος  $u$ , επομένως είναι βαθμωτό και το  $R_{LQR}$ .

Θα δούμε τώρα τι γίνεται για διαφορετικές τιμές στην απόδοση και στο actuator effort για διαφορετικούς συνδυασμούς των παραμέτρων. Για τον υπολογισμό του  $K_{LQR}$ , χρησιμοποιούμε την συνάρτηση του Matlab:  $K_{LQR} = lqr(A, B, Q, R)$

Για  $Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $R_{LQR} = 1$  θα έχουμε  $K_{LQR} = [-1 \quad -0.4213 \quad -0.4718]$

για το οποίο τελικά με βάση την ανάλυση που κάναμε παραπάνω θα έχουμε τα παρακάτω παραγόμενα διαγράμματα που δείχνουν τα αποτελέσματα της επιλογής μας:

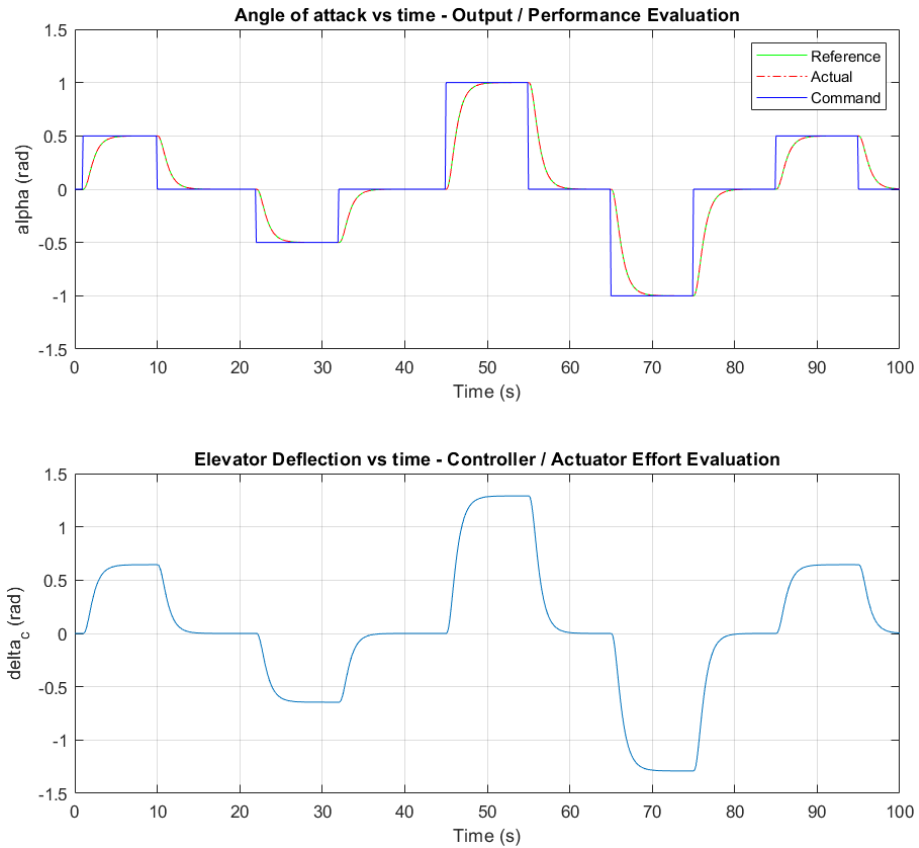


Διάγραμμα 1 – Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου για

$$Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{LQR} = 1$$

Βλέπουμε πως με την επιλογή μας, έχουμε σταθερά ένα σφάλμα  $e_{y_I}$  τόσο από την έξοδο του μοντέλου όσο από την έξοδο του μοντέλου αναφοράς (τα οποία σε κάθε περίπτωση θα ταυτίζονται όσο δεν υπάρχουν αβεβαιότητες) το οποίο είναι αναμενόμενο. Παρόλα αυτά, αν θέλουμε να μειώσουμε αυτό το σφάλμα, μπορούμε να αυξήσουμε την τιμή της παραμέτρου του πίνακα  $Q_{LQR}$  η οποία επηρεάζει το σφάλμα αυτό.

$$\text{Για } Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{LQR} = 1:$$



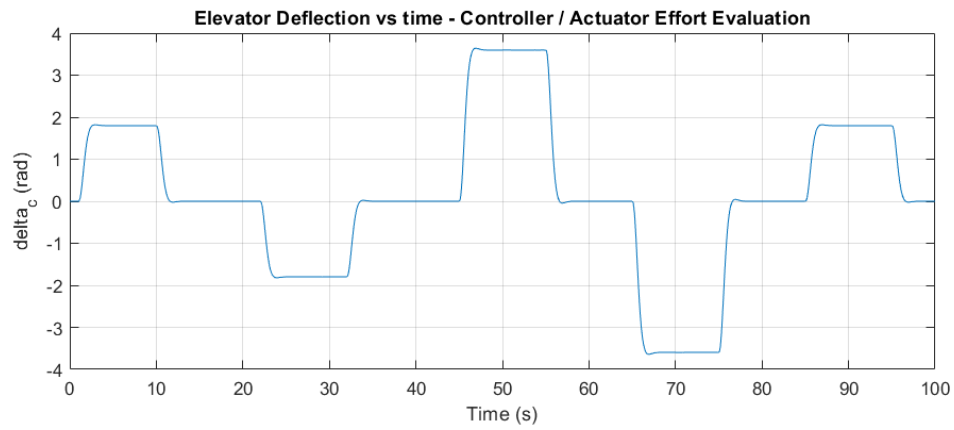
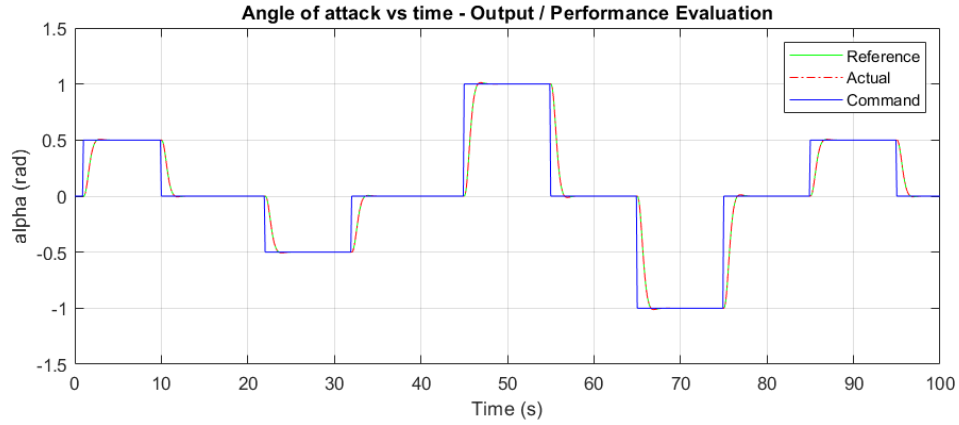
Διάγραμμα 2 – Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου για

$$Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{LQR} = 1$$

Παρατηρούμε εδώ ότι έχουμε καλύτερη απόδοση, αφού μειώσαμε το σφάλμα  $e_{y_I}$  και πετυχαίνουμε καλύτερη παρακολούθηση του σήματος αναφοράς  $r(t)$ , αλλά έχει αυξηθεί σχεδόν στο τριπλάσιο η μέγιστη τιμή του actuator effort, πράγμα που σημαίνει και αντίστοιχα μεγαλύτερο κόστος καυσίμου, μεγαλύτερη φθορά του ενεργοποιητή κτλ.

Έτσι, για  $Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $R_{LQR} = 1$ , περιμένουμε ακόμα καλύτερη απόδοση αλλά ακόμα πιο υψηλό κόστος στον ενεργοποιητή. Πράγματι:



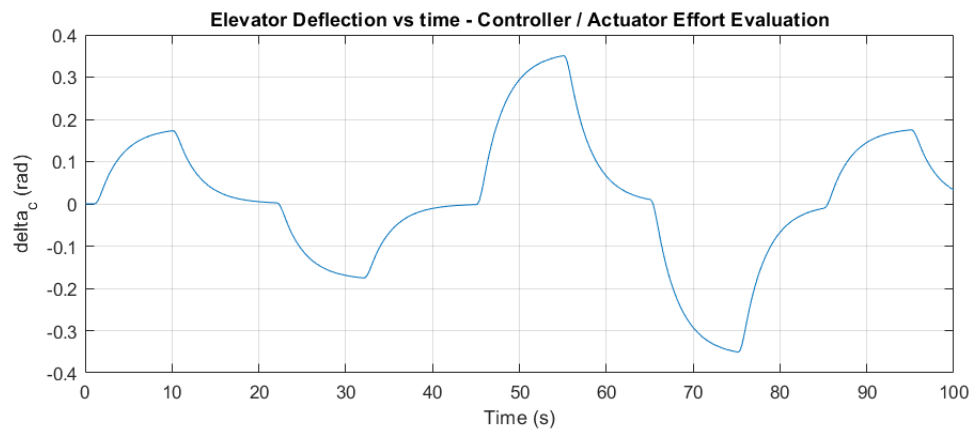
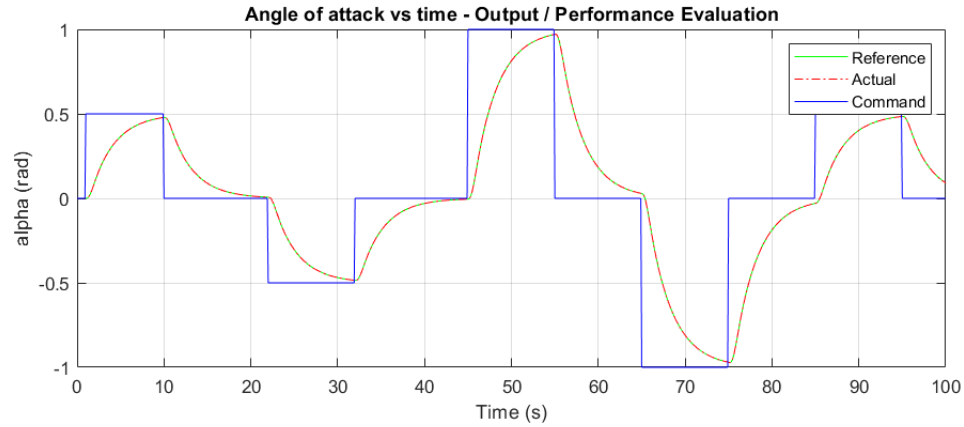


Διάγραμμα 3 – Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου για

$$Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{LQR} = 1$$

Αντίστροφα, μεγαλώνοντας την τιμή του  $R_{LQR}$ , θα έχουμε μικρότερη απόδοση αλλά και μικρότερο κόστος στον ενεργοποιητή.

Πράγματι για  $Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $R_{LQR} = 10$ :



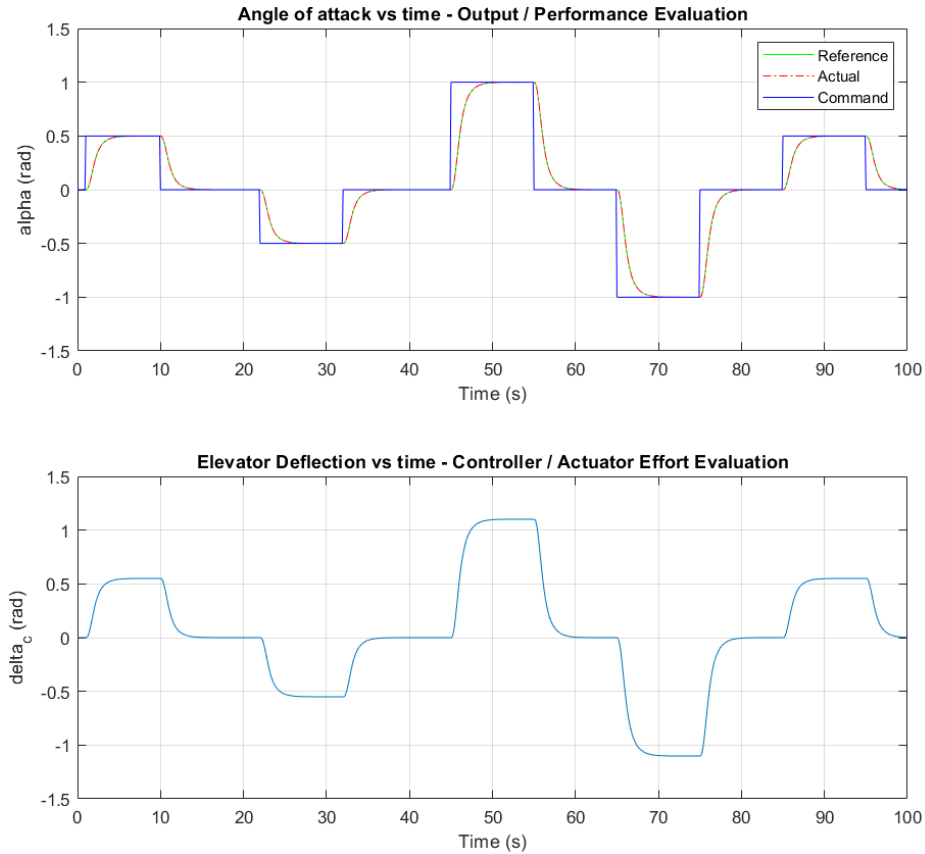
Διάγραμμα 4 – Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου για

$$Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{LQR} = 10$$

Εφόσον δεν έχουμε περιορισμούς για το κόστος και το σύστημα ανταποκρίνεται σχετικά γρήγορα, θα χρησιμοποιήσουμε (αυθαίρετα):

$$Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_{LQR} = 1 \text{ και έχουμε } K_{LQR} = [-3.1623 \quad -1.1018 \quad -0.2153], \text{ με}$$

τα οποία θα συνεχίσουμε και την ανάλυσή μας. Για αυτά προκύπτει:



Διάγραμμα 5 – Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου για

$$Q_{LQR} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_{LQR} = 1$$

Όπως δείξαμε στην εργασία 1, με την παραπάνω ανάλυση το σφάλμα παρακολούθησης της εξόδου θα συγκλίνει στο 0, δηλαδή  $y(t) \rightarrow y_m(t)$ .

β) Στο βήμα αυτό θέλουμε να φέρουμε αστάθεια στο σύστημα

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p D(u + f(x_p))$$

και συνεπώς στο

$$\dot{x} = Ax + BD(u + f(x_p)) + B_m r \Leftrightarrow$$

$$\dot{x} = Ax + BD(u + k_\alpha \alpha + k_q q) + B_m r \Leftrightarrow$$

$$\dot{x} = A_m x + BD(u + D^{-1} K_{LQR}^T x + k_\alpha \alpha + k_q q) + B_m r$$

με κάποια επιλογή των  $D$ ,  $k_\alpha$ ,  $k_q$ .

Θα επιλέξουμε τις παραμέτρους έτσι ώστε να έχουμε ταυτόχρονες αλλαγές στις παραμέτρους του συστήματος, δηλαδή στα  $M_\delta$  (αποτελεσματικότητα ελέγχου),  $M_\alpha$  (στατική ευστάθεια) και  $M_q$

(απόσβεση pitch) [1]. Με αυτόν τον τρόπο θα «διαταράζουμε» το σύστημα πέρα από την ευστάθειά του. Επιλέγουμε λοιπόν (με αυθαίρετους συντελεστές):

$$\mathbf{D} = \mathbf{0.5}, \mathbf{k}_\alpha = \mathbf{1.5M}_\alpha, \mathbf{k}_q = \mathbf{0.5M}_q$$

Με αυτή την επιλογή, οι εξισώσεις κατάστασης θα είναι:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{D}(\mathbf{u} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}_{LQR}^T \mathbf{x} + \mathbf{k}_\alpha \alpha + \mathbf{k}_q q) + \mathbf{B}_m \mathbf{r} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{D}(-\mathbf{K}_{LQR}^T \mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}_{LQR}^T \mathbf{x} + [0 \quad 1.5\mathbf{M}_\alpha \quad 0.5\mathbf{M}_q]\mathbf{x}) + \mathbf{B}_m \mathbf{r} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{D}(-\mathbf{K}_{LQR}^T + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}_{LQR}^T + [0 \quad 1.5\mathbf{M}_\alpha \quad 0.5\mathbf{M}_q])\mathbf{x} + \mathbf{B}_m \mathbf{r} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{unst} \mathbf{x} + \mathbf{B}_m \mathbf{r} \Leftrightarrow$$

$$\text{με } \mathbf{A}_{unst} = \mathbf{A}_m + \mathbf{B}\mathbf{D}(-\mathbf{K}_{LQR}^T + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}_{LQR}^T + [0 \quad 1.5\mathbf{M}_\alpha \quad 0.5\mathbf{M}_q]) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{A}_{unst} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.0632 & -0.5536 & 1.0416 \\ -7.2574 & 19.8154 & 0.1829 \end{pmatrix}$$

με το  $\mathbf{B}_m \mathbf{r}$  να είναι φραγμένο και τις ιδιοτιμές του  $\mathbf{A}_{unst}$  να είναι  $-4.9025 \quad 4.1619 \quad 0.3699$ , επομένως έχουμε αστάθεια.

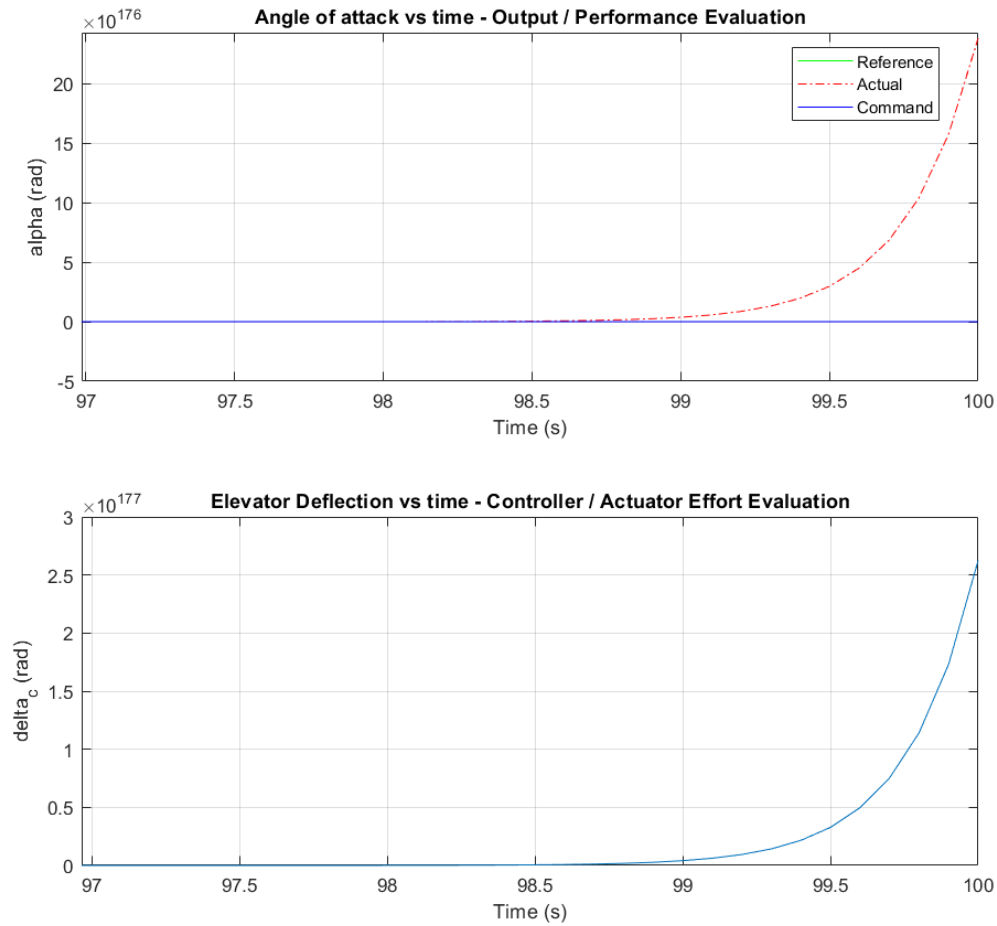
Έτσι λοιπόν, αν ξέραμε τις τιμές των παραμέτρων, ο ιδανικός ελεγκτής που θα φτιάχναμε θα ήταν:

$$\mathbf{K}_{x \text{ ideal}} = (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}_{LQR}^T + [0 \quad 1.5\mathbf{M}_\alpha \quad 0.5\mathbf{M}_q])^T = [-6.3246 \quad -15.9256 \quad -2.7256]^T$$

ενώ ο αντίστοιχος ελεγκτής θα ήταν:

$$\mathbf{u}_{ideal} = -\mathbf{K}_{x \text{ ideal}} \mathbf{x}$$

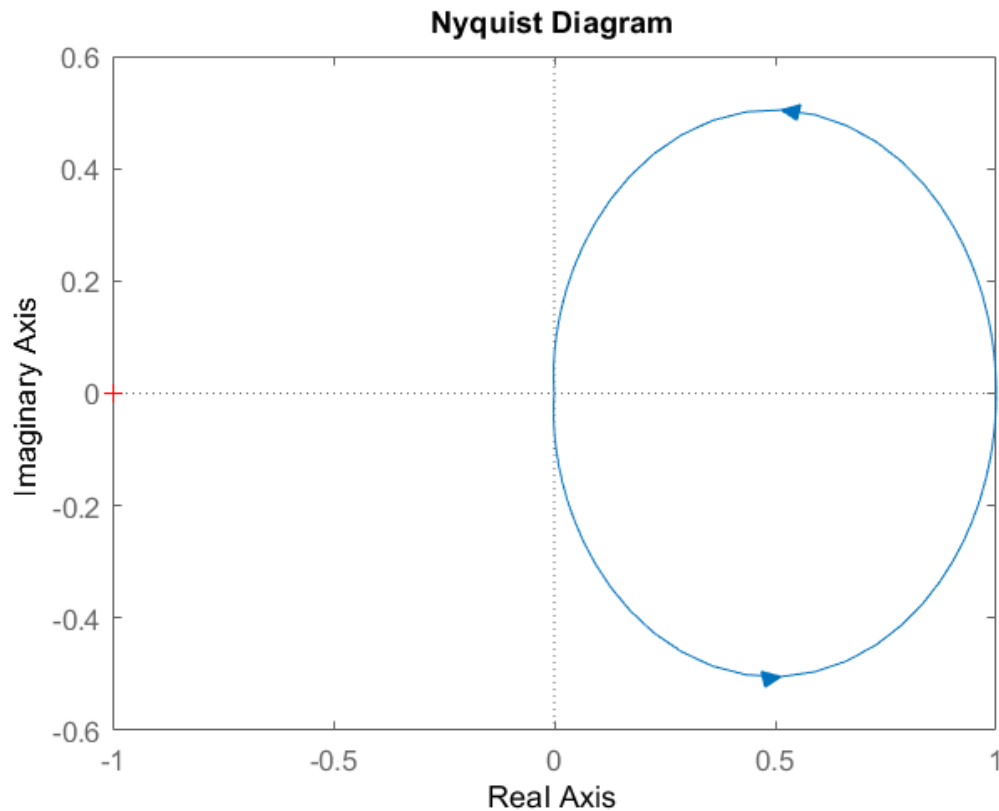
Η αστάθεια φαίνεται ξεκάθαρα στα παρακάτω διαγράμματα:



Διάγραμμα 6 – Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου. Παρουσίαση Αστάθειας

Βλέπουμε σε αυτά τα διαγράμματα ότι τόσο η έξοδος του πραγματικού συστήματος, όσο και το σήμα ελέγχου παίρνουν τεράστιες τιμές (που δείχνει ότι  $y \rightarrow \infty$  και  $u \rightarrow \infty$ ) όσο περνάει ο χρόνος, πράγμα που επιβεβαιώνει την αστάθεια.

Επίσης, κάνοντας το διάγραμμα Nyquist του συστήματος, θα έχουμε:



Διάγραμμα 7 – Διάγραμμα Nyquist του συστήματος

Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$G = \frac{0.063246 (s + 119.3)}{(s + 4.903)(s - 4.162)(s - 0.3699)}$$

επομένως έχουμε  $N = 0$  (καμία περικύκλωση του -1),  $Z = 1$  (ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο δεξί ημιεπίπεδο),  $P = 1$  (πόλοι της  $G$ ). Έτσι, έχουμε για  $N = Z - P$ ,  $N \neq -P$  και επομένως αστάθεια.

#### Σημείωση:

Σαφώς η επιλογή που κάναμε για τις αβεβαιότητες δεν είναι μοναδική, αλλά υπάρχουν διάφορες επιλογές που κάνουν τον πίνακα  $A_{unst}$  που προκύπτει να είναι ασταθής (να έχει ιδιοτιμές στο δεξί ημιεπίπεδο).

γ) Σε αυτό το βήμα, για τις τιμές των αβεβαιοτήτων που επιλέξαμε, θα φτιάξουμε έναν προσαρμοστικό ελεγκτή όπως στην **Εργασία 1**, θεωρώντας τις αβεβαιότητες τώρα άγνωστες. Όπως λοιπόν ήδη αναλύσαμε, θα έχουμε το παρακάτω σύστημα και ελεγκτή:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BD(\hat{K}_x^T x - \hat{\theta}^T \Phi(x_p) + \theta^T \Phi(x_p)) + B_m r \\ \dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \\ \dot{\hat{K}}_x = \Gamma_x x e^T P_m B \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma_\theta \Phi(x_p) e^T P_m B \end{cases} :$$

$$\begin{cases} u = -\hat{K}_x^T x - \hat{\theta}^T \Phi(x_p) = u_{ad} \\ \dot{\hat{K}}_x = \Gamma_x x e^T P_m B \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma_\theta \Phi(x_p) e^T P_m B \end{cases}$$

Παρόλα αυτά, δεδομένου ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση οι αβεβαιότητες του συστήματος είναι γραμμικές, μπορούμε να εκφράσουμε το σύστημα ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BD(u + K_x^T x + k_\alpha \alpha + k_q q) + B_m r \Leftrightarrow \\ \dot{x} &= Ax + BD(u + K_x^T x + [0 \quad k_\alpha \quad k_q]x) + B_m r \Leftrightarrow \\ \dot{x} &= Ax + BD(u + (K_x^T + [0 \quad k_\alpha \quad k_q])x) + B_m r \Leftrightarrow \\ \dot{x} &= Ax + BD(u + \tilde{K}_x^T x + [0 \quad k_\alpha \quad k_q]x) + B_m r \Leftrightarrow \\ \dot{x} &= Ax + BD(u + K_{x\text{ext}}^T x) + B_m r \end{aligned}$$

όπου  $K_x$  και συνεπώς  $K_{x\text{ext}} = K_x^T + [0 \quad k_\alpha \quad k_q]$  είναι πλέον άγνωστο αφού δεν γνωρίζουμε την τιμή του  $D$ , και συνεπώς θα έχουμε έναν νόμο εκτίμησης του  $K_x$ . Έτσι, αντίστοιχα με την ανάλυση που κάναμε στην Εργασία 1, θα έχουμε για τον ελεγκτή:

$$u = -\tilde{K}_{x\text{ext}}^T x$$

Για το σφάλμα  $e(t) = x(t) - x_m(t)$  λοιπόν έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_m \Leftrightarrow \\ \dot{e} &= A_m e + BD(-\tilde{K}_{x\text{ext}}^T x) \end{aligned}$$

όπου  $\tilde{K}_{x\text{ext}} \triangleq \hat{K}_{x\text{ext}} - K_{x\text{ext}}$

και συνεπώς επιλέγοντας συνάρτηση Lyapunov:

$$V(t) = e^T(t) P_m e(t) + \tilde{K}_{x\text{ext}}^T \Gamma_x^{-1} \tilde{K}_{x\text{ext}} D$$

με  $P_m$  να είναι η λύση της εξίσωσης Lyapunov  $A_m^T P_m + P_m A_m = -Q$ , με  $Q = Q^T > 0$  πίνακας της επιλογής μας,  $\Gamma_x = \Gamma_x^T > 0$ , δηλαδή  $V(t) \geq 0$ , τότε σε απόλυτη αρμονία με την

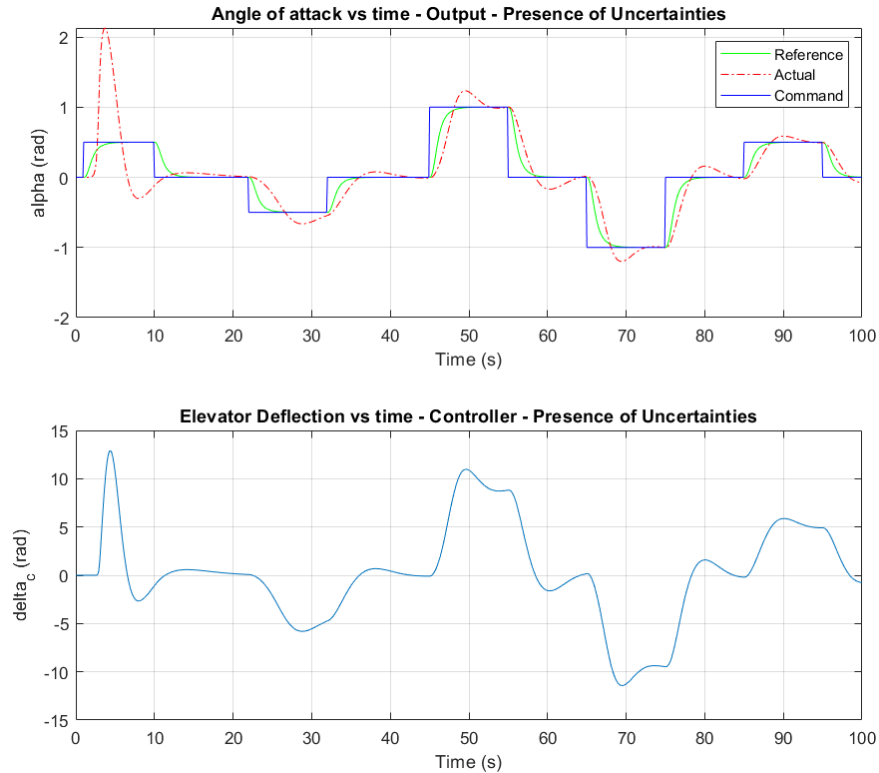
Εργασία 1, θα έχουμε  $\dot{V}(t) = -e^T(t)Qe(t) \leq 0$  έχοντας επιλέξει προσαρμοστικό νόμο εκτίμησης:

$$\dot{\hat{K}}_{x\text{ext}} = \Gamma_x x e^T P_m B$$

ενώ στην συνέχεια με επιχειρηματολογία Barbalat (βλ. Εργασία 1) δείχνουμε ότι όλα τα σήματα είναι φραγμένα. **Συνεπώς τελικά το σύστημα και ο ελεγκτής μας είναι:**

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BD(u + K_{x\text{ext}}^T x) + B_m r \\ \dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \\ \dot{\hat{K}}_x = \Gamma_x x e^T P_m B \\ u = -\hat{K}_{x\text{ext}}^T x \end{cases}$$

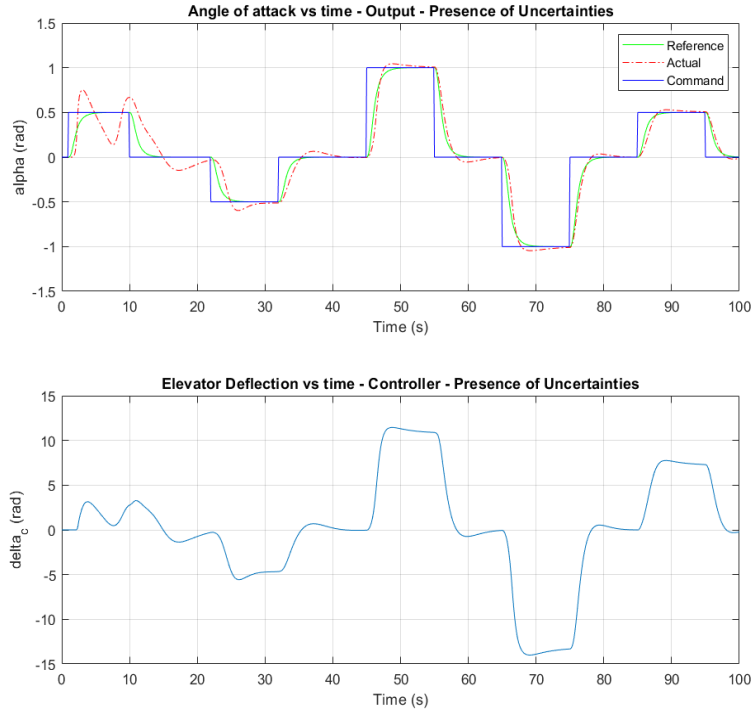
και έτσι τελικά οι παράμετροι με τους οποίες ελέγχουμε το σύστημά μας είναι με τα  $\Gamma_x, Q$ . Ακολουθώντας λοιπόν αυτή την ανάλυση προσομοιώνουμε το σύστημά μας για διάφορους συνδυασμούς αυτών των πινάκων. Για άλλη μία φορά, η επιλογή μας έχει να κάνει τόσο με το πόσο γρήγορα θέλουμε να ανταποκρίνεται το σύστημα στην ύπαρξη αβεβαιοτήτων, όσο και το να πετυχαίνει η έξοδος του συστήματος ικανοποιητική παρακολούθηση τόσο του σήματος αναφοράς όσο και της εξόδου του συστήματος αναφοράς με χαμηλό κόστος στον ενεργοποιητή. Για διαφορετικές τιμές λοιπόν θα πάρουμε λοιπόν τα παρακάτω αποτελέσματα:



Διάγραμμα 8 - Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου με

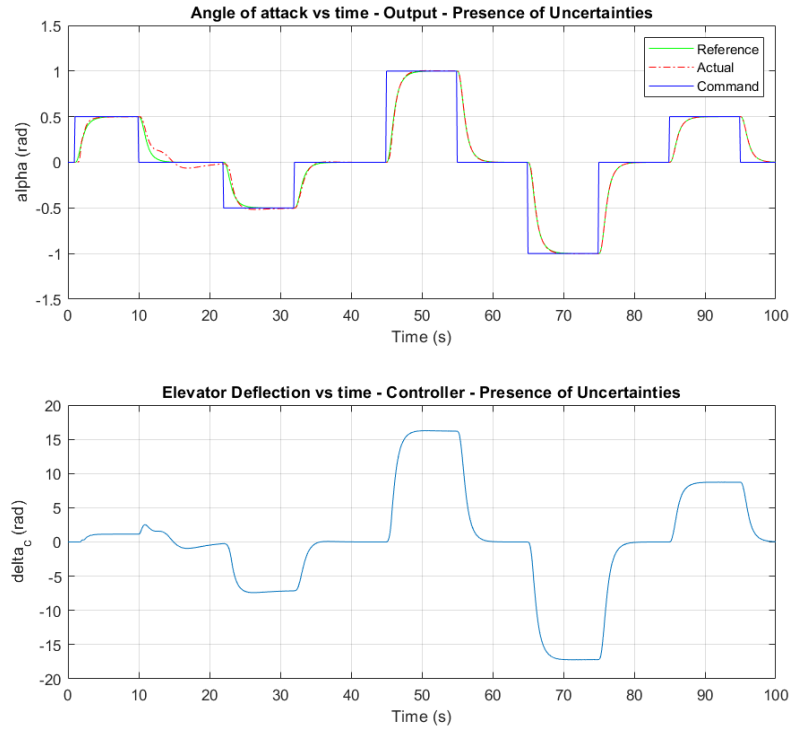
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma_x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$





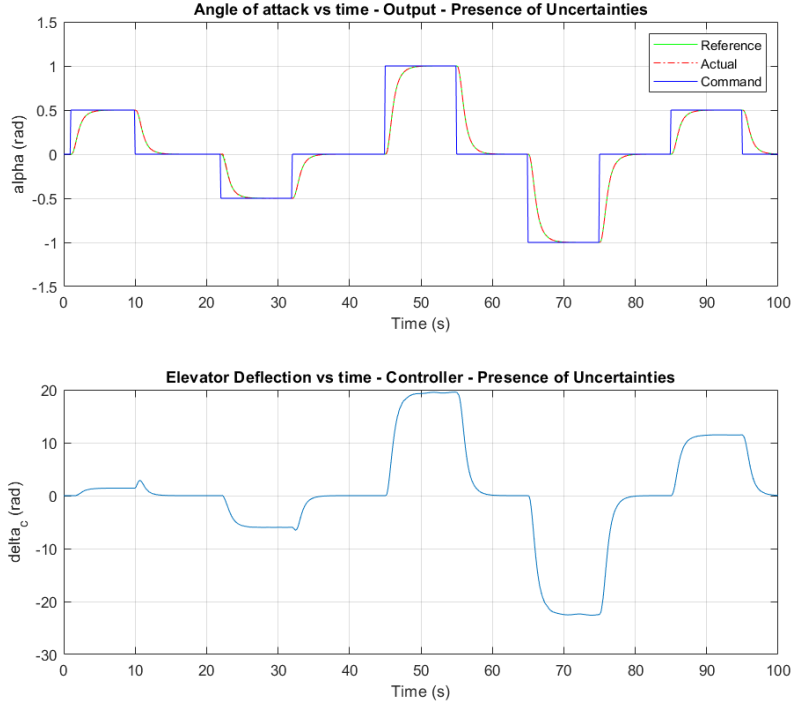
Διάγραμμα 9 - Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου με

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \Gamma_x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



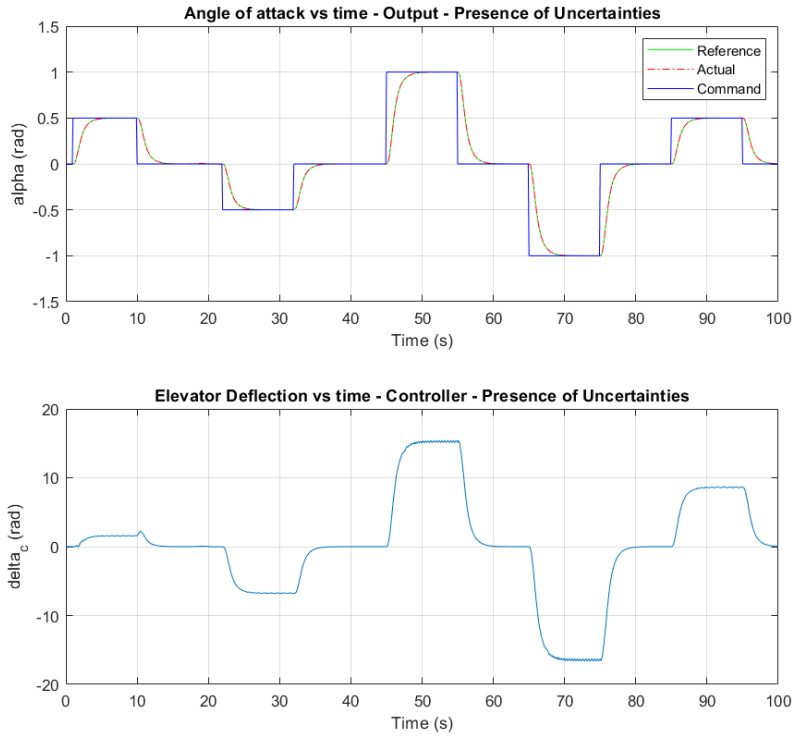
Διάγραμμα 10 - Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου με

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \Gamma_x = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$



Διάγραμμα 11 - Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου με

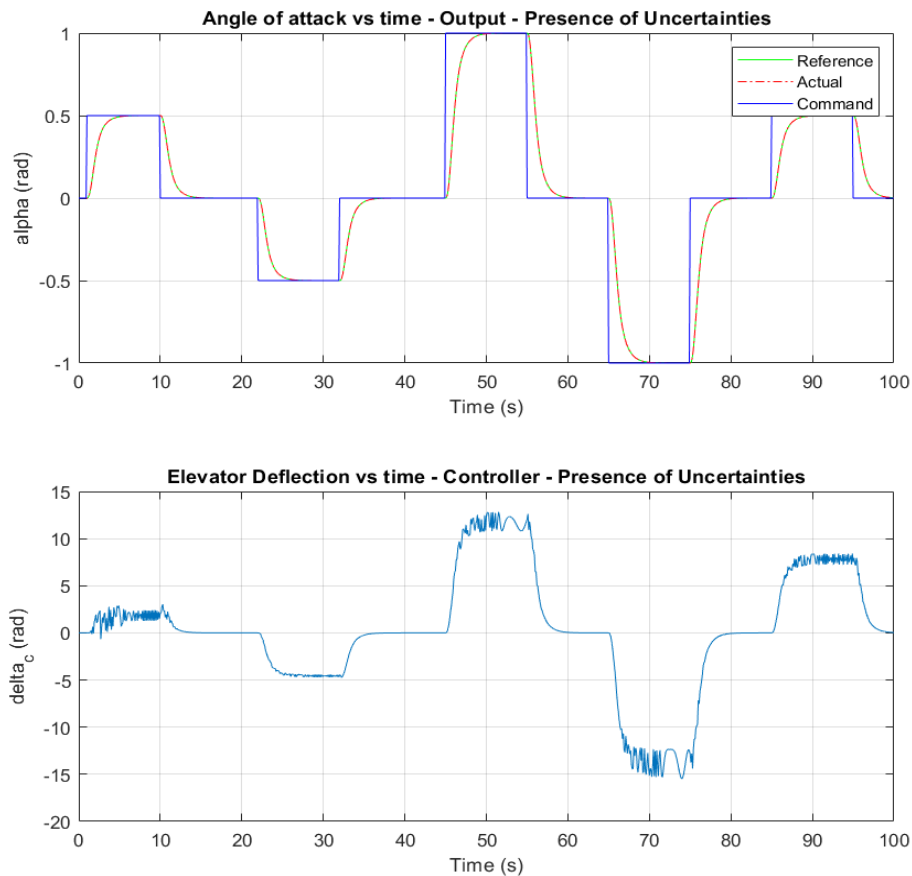
$$Q = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}, \Gamma_x = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$



Διάγραμμα 12 - Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου με

$$Q = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}, \Gamma_x = \begin{pmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Όπως βλέπουμε στα **Διαγράμματα 8,9** για μικρές τιμές των παραμέτρων έχουμε αργή ανταπόκριση στις αβεβαιότητες και κακή παρακολούθηση. Μεγαλώνοντας σταδιακά τις τιμές βλέπουμε πως πετυχαίνουμε καλύτερη παρακολούθηση και γρηγορότερη ανταπόκριση, αλλά και μεγαλύτερο actuator effort. Αυτό βέβαια φαίνεται να αλλάζει για την τελευταία επιλογή μας στο **Διάγραμμα 12** όπου πετυχαίνουμε ένα καλό tradeoff. Παρόλα αυτά, ακόμα και για (σχετικά) μεγάλο βήμα  $t = 0.1$  το οποίο χρησιμοποιούμε, μπορούμε να δούμε στο **Διάγραμμα 13**, ότι συνεχίζοντας την αύξηση των τιμών αρχίζουμε και έχουμε προβλήματα στον ενεργοποιητή μας (chattering):



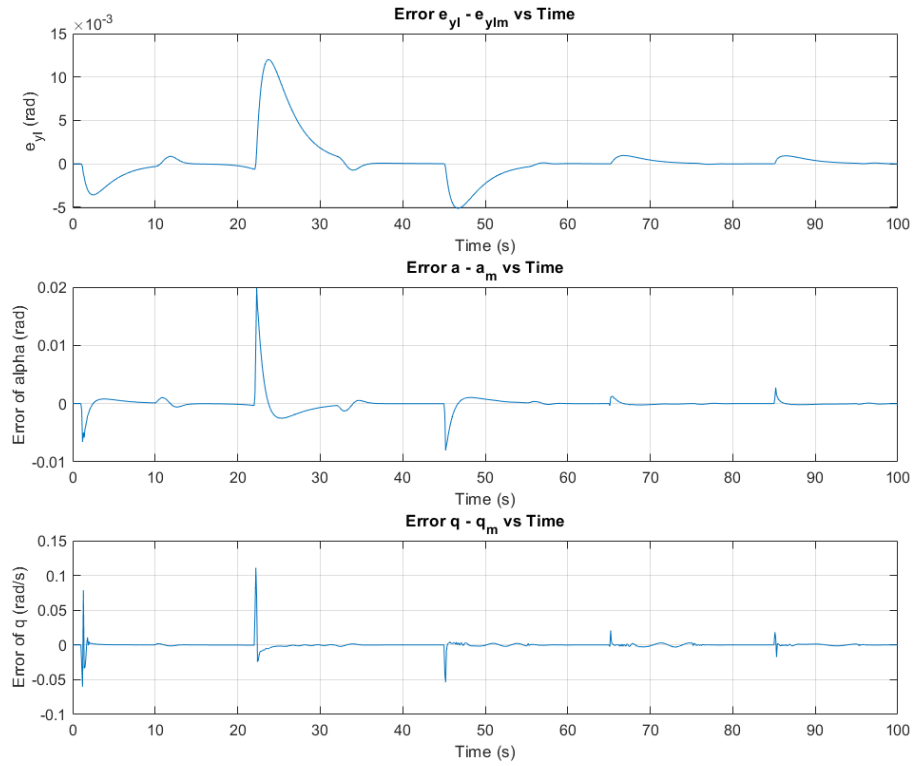
Διάγραμμα 12 - Αποτελέσματα προσομοίωσης / παρακολούθηση σήματος αναφοράς και σήμα ελέγχου με

$$Q = \begin{pmatrix} 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 \end{pmatrix}, R_x = \begin{pmatrix} 200000 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 2000 \end{pmatrix}$$

Κάτι που μπορούμε να παρατηρήσουμε σε όλες τις επιλογές στο σήμα ελέγχου είναι μίας μορφής αδράνεια που οφείλεται στο ότι υπάρχουν αρχικές συνθήκες στο  $\mathbf{K}_x$  οι οποίες δεν συμπεριλαμβάνονται στις εκτιμήσεις μας (των οποίων τις αρχικές συνθήκες θεωρούμε μηδενικές).

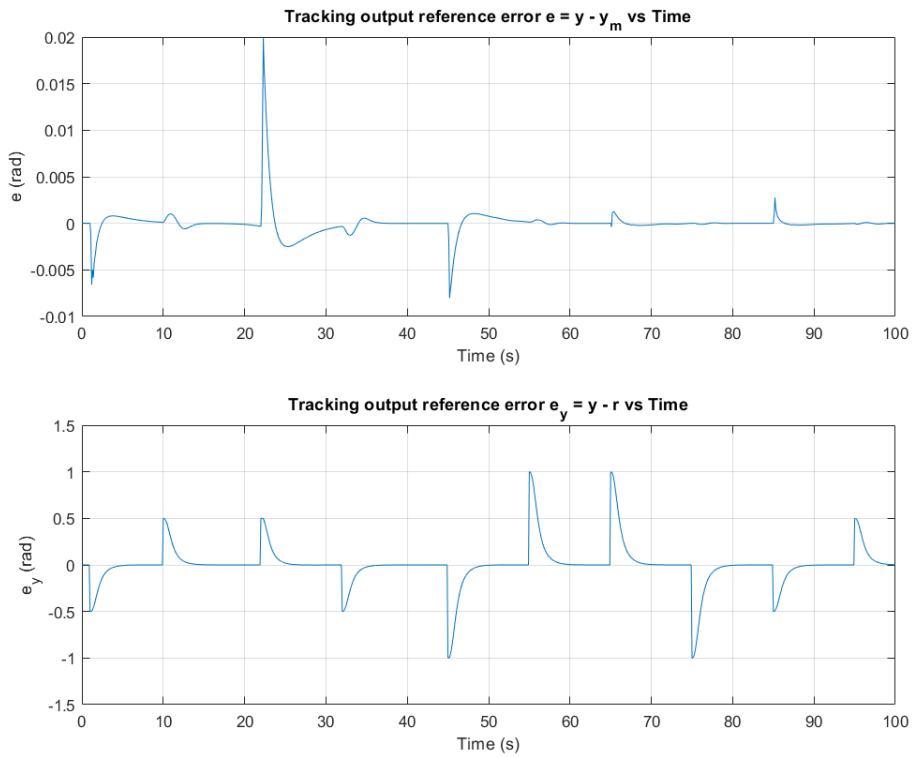
Η τελική μας επιλογή θα είναι οι πίνακες που χρησιμοποιήθηκαν για το **Διάγραμμα 11**, δεδομένου ότι δεν έχουμε προδιαγραφές που να μας αναγκάζουν να κάνουμε κάποια πιο αυστηρή επιλογή.

Για τις παραμέτρους λοιπόν αυτές θα δούμε τώρα τι γίνεται με όλα τα σήματα του συστήματος. Θα ξεκινήσουμε από τα σφάλματα  $e_x = x - x_m$ :

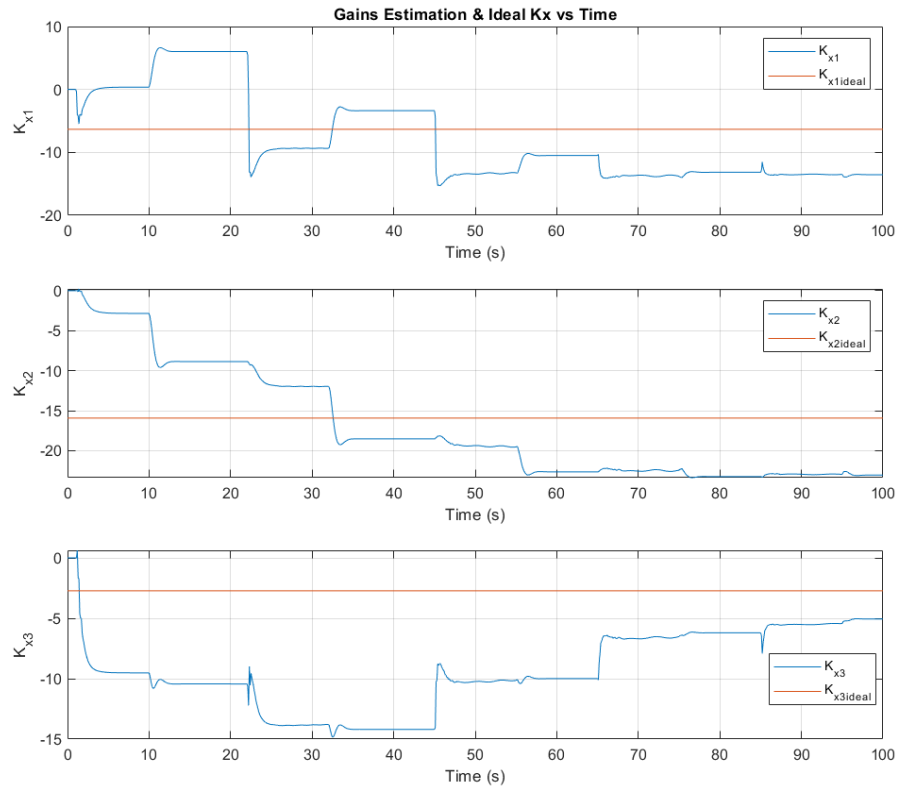


Διάγραμμα 13 – Σφάλματα  $e_x = x - x_m$  στον κλειστό βρόχο

Στη συνέχεια, τα σφάλματα  $e = y_p - y_m = y - y_m$ ,  $e_y = y_p - r = y - r$ :

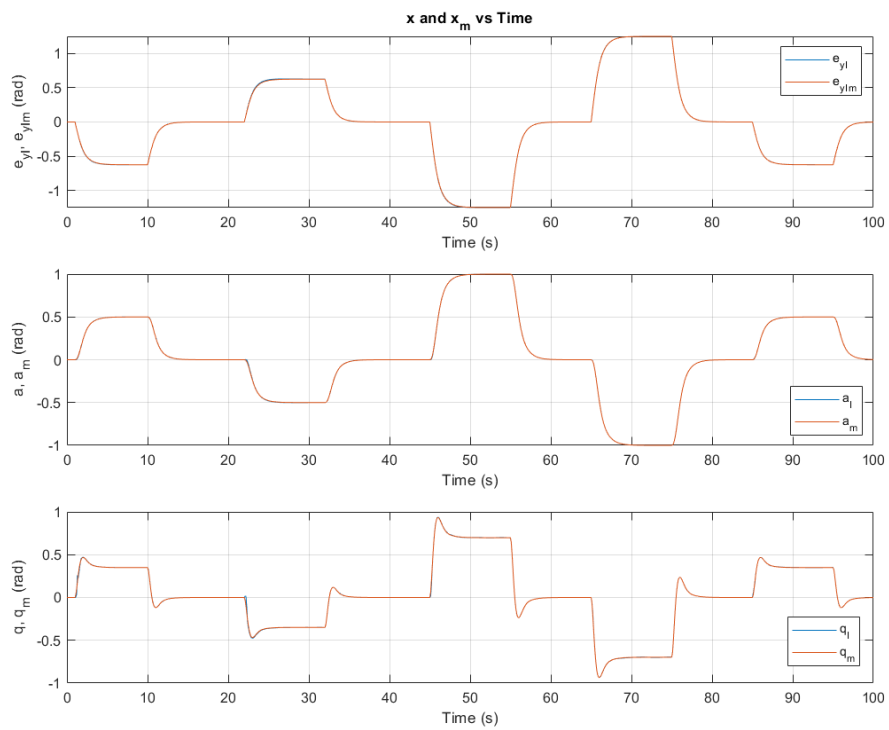


Διάγραμμα 14 – Σφάλματα  $e = y - y_m$ ,  $e_y = y - r$  στον κλειστό βρόχο



Διάγραμμα 15 – Εκτιμήσεις κερδών στο χρόνο σε σχέση με το ιδανικό κέρδος.

Σήματα  $x, x_m$ :



Διάγραμμα 16 – Εξέλιξη του πραγματικού συστήματος και του συστήματος αναφοράς στο χρόνο.

### Σημειώσεις:

- 1) Στο **Διάγραμμα 16**, πρέπει να κάνουμε μεγέθυνση για να δούμε διαφορές ανάμεσα στα σήματα αφού όπως είδαμε στο **Διάγραμμα 13** πετυχαίνουμε την παρακολούθησή τους πολύ ικανοποιητικά μετά από κάποιο χρόνο.
- 2) Στο **Διάγραμμα 15** βλέπουμε ότι δεν έχουμε πετύχει σύγκλιση των παραμέτρων στις πραγματικές τους τιμές, κάτι που είναι αναμενόμενο, αφού η ΠΕΜΑ ανάλυση δεν μας δίνει τέτοια εγγύηση από μόνη της.
- 3) Όπως μπορούμε να δούμε σε σχέση με το ερώτημα α) , η επίδραση των αβεβαιοτήτων στο σύστημα επιφέρουν πολύ μεγαλύτερες τιμές στο σήμα ελέγχου.
- 4) Όπως είδαμε και στην Εργασία 1, βλέπουμε και στο **Διάγραμμα 14** πως παρόλο που το σφάλμα  $e = y - y_m$  μηδενίζεται σταδιακά με το πέρασμα του χρόνου, το  $e_y = y - r$  είναι σταθερό, μη μηδενικό, αλλά φραγμένο.
- 5) Ένας παράγοντας που παίζει ρόλο στο κατά πόσο είναι υλοποιήσιμος πρακτικά ο ελεγκτής μας από τον ενεργοποιητή μας είναι το χρονικό βήμα που χρησιμοποιούμε. Μικρότερο βήμα μπορεί να εκφράζει καλύτερα το πως θέλουμε να ανταποκριθεί ο ενεργοποιητής αλλά μπορεί (σε πιο περίπλοκα συστήματα και αβεβαιότητες, όχι γραμμικές) να μην είναι δυνατό να τις ακολουθήσει σε περίπτωση μεγάλων αλλαγών σε μικρό χρονικό διάστημα.
- 6) Προφανώς αν είχαμε συγκεκριμένες προδιαγραφές θα κάναμε πιο αυστηρή επιλογή στις παραμέτρους που ελέγχουμε (tuning parameters). Παρόλα αυτά, οι επιλογές μας έγιναν με το σκεπτικό να έχουμε πάντα ένα καλό tradeoff, με ρεαλιστικές απαιτήσεις ανταπόκρισης του ενεργοποιητή από το σήμα ελέγχου αλλά και μία ικανοποιητική απόδοση. Σαφώς κι αυτό επηρεάζεται από τις προδιαγραφές. Η βασική προδιαγραφή ωστόσο, δηλαδή ο ελεγκτής μας να διατηρεί τα χαρακτηριστικά αναλογικού-ολοκληρωτικού ελέγχου και να πετυχαίνει την ζητούμενη παρακολούθηση ακόμα και με την ύπαρξη αβεβαιοτήτων, ικανοποιείται.

### **Βιβλιογραφία:**

- [1] Lavretsky, E., and Wise, K. "Robust and adaptive control: With aerospace applications", Advanced textbooks in control and signal processing. London and New York: Springer, 2013.
- [2] McRuer, D., Ashkenas, I., Graham, D.: Aircraft Dynamics and Automatic control. Princeton University Press, Princeton (1990)
- [3] Stevens, B.L., Lewis, F.L.: Aircraft Control and Simulation. Wiley, Hoboken (1992)
- [4] Ioannou, Petros A., and Jing Sun. *Robust adaptive control*. Courier Corporation, 2012, Chapter 7