Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙΙ

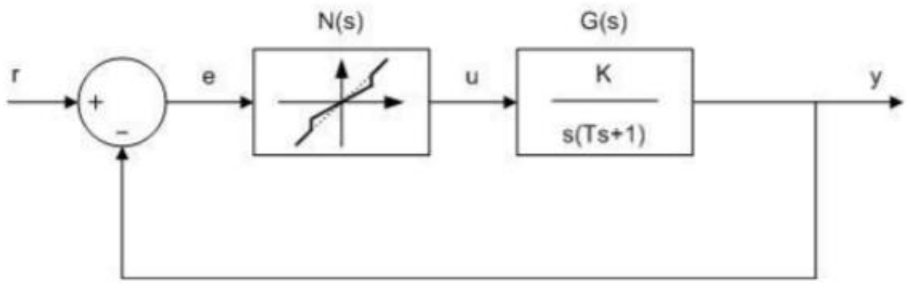
Εργασία Χειμερινού Εξαμήνου 2020/2021 – Τμήμα Α

Καβελίδης Φραντζής Δημήτριος

ΑΕΜ 9351

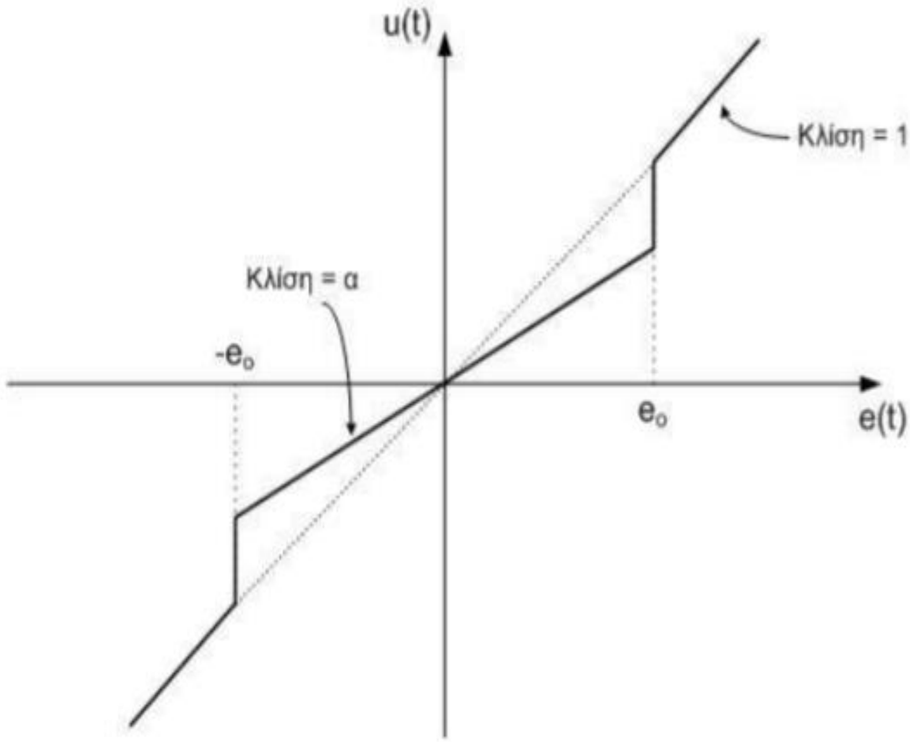
kavelids@ece.auth.gr

Για αυτό το τμήμα της εργασίας μελετούμε το παρακάτω σύστημα με παραμέτρους
$T = 1$ και $K = 4$:



Όπου r(t) η είσοδος, y(t) η έξοδος και e(t) το σφάλμα ανάδρασης.

Επίσης, N(s) είναι η συνάρτηση μεταβλητού κέρδους φαίνεται παρακάτω:



Α) ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΕΡΟΣ - θεωρούμε ότι δεν έχουμε την N(s) , δηλαδή ότι u = e.

Ζητούμενα Α' μέρους:

Ι) Χαρακτηριστική εξίσωση του ΣΚΒ, τιμές των ω_n και ζ, η διαφορική εξίσωση του συστήματός μας ως προς το σφάλμα e(t) και οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος θεωρώντας ως κατάσταση τις φασικές μεταβλητές του σφάλματος.

II) Το σημείο ισορροπίας του συστήματος σφάλματος όταν η είσοδος r(t) είναι α) μία βηματική συνάρτηση και β) μία συνάρτηση ράμπας με κλίση V = 1.2 .

III) Οι γραφικές παραστάσεις της χρονικής απόκρισης των μεταβλητών κατάστασης καθώς και το φασικό πορτραίτο του συστήματος για τις 2 εισόδους, χρησιμοποιώντας για αρχικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης τις παρακάτω: (-2,1.5) , (-2.5,0.8) , (1.5,2) , (0.2,1.8) , (2.5,-0.8) , (2,-2) , (-0.2,-1.8) και (-1,-2.5).

Αποτελέσματα Α' μέρους:

I) Η χαρακτηριστική εξίσωση του ΣΚΒ προκύπτει από τον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου. Αυτή είναι η H(s) = $\frac{G(s)}{1+G(s)}$ ⇔ H(s) = $\frac{K}{Ts^2+s+K}$

⇔ H(s) = $\frac{\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{T}}}{\boldsymbol{s^2}+\boldsymbol{s}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{T}}+\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{T}}}$

Επομένως, η **χαρακτηριστική εξίσωση** (σε γενική μορφή) είναι **:** $\boldsymbol{s^2 + s * \frac{1}{T} + \frac{K}{T} = 0}$

Δεδομένων των παραμέτρων, έχουμε H(s) = 4/(s^2 + s + 4) , δηλαδή η χαρ. εξίσωση:

1 + G(s) = 0 ⇔ $\boldsymbol{s^2 + s + 4 = 0}$

Θα έχουμε:

$\zeta * \omega_n = 1/T = 1$ και $\omega_n^2 = K/T = 4$ ⇔ $\boldsymbol{\omega_n = \sqrt{(K/T)} = 2}$ ⇔ $\boldsymbol{\zeta = ½}$

Για την διαφορική εξίσωση του συστήματος έχουμε (από το διάγραμμα):

$Y(s)/E(s) = K/(Ts^2 + s) = 4/(s^2 + s)$ ⇔ $\boldsymbol{\ddot{y} + \dot{y} = 4e}$ ⇔ $\boldsymbol{\ddot{e} + \dot{e} + 4e = \ddot{r} + \dot{r}}$ (ως προς το σφάλμα)

Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος θεωρώντας ως κατάσταση τις φασικές μεταβλητές του σφάλματος προκύπτουν αν θέσουμε:

$\boldsymbol{x_1 = e}$

$\boldsymbol{x_2 = \dot{e}}$

Έτσι, $\dot{x}_1 = \dot{e} = x_2$ και $\dot{x}_2 = \ddot{e} = \ddot{r} + \dot{r} - \dot{e} - 4e = \ddot{r} + \dot{r} - \dot{x}_1 - x_2$

Άρα τελικά : ($\boldsymbol{\Sigma}$): $\begin{cases} \boldsymbol{\dot{x}_1 = x_2} \\ \boldsymbol{\dot{x}_2 = \ddot{r} + \dot{r} - 4x_1 - x_2} \end{cases}$

και

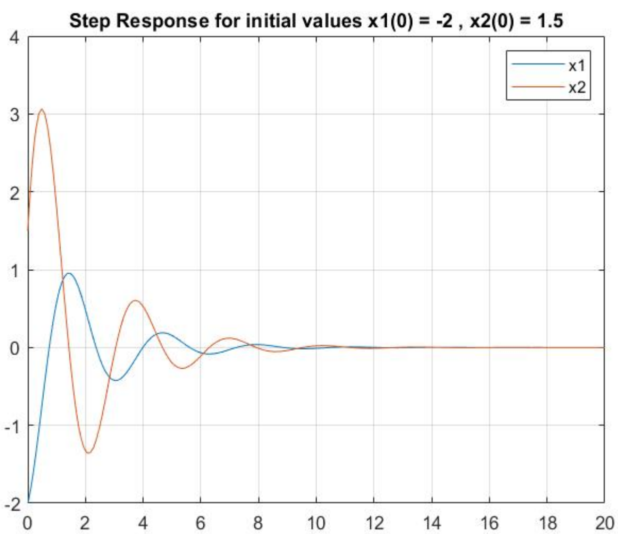
$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$

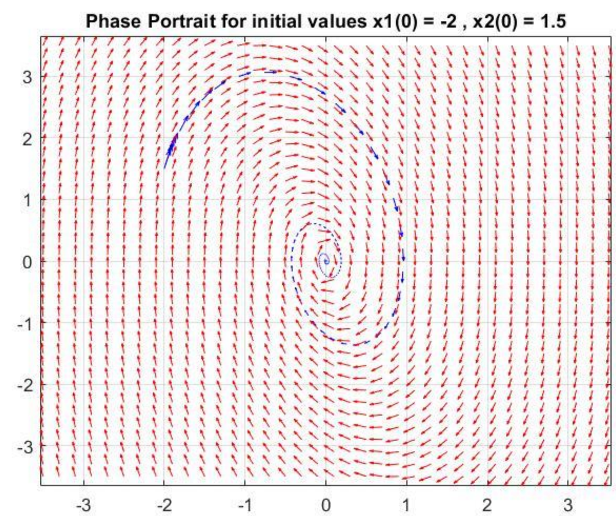
II) Θα έχουμε Σ.Ι. εκεί που $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \ddot{r} + \dot{r} = 4x_1 \end{cases}$

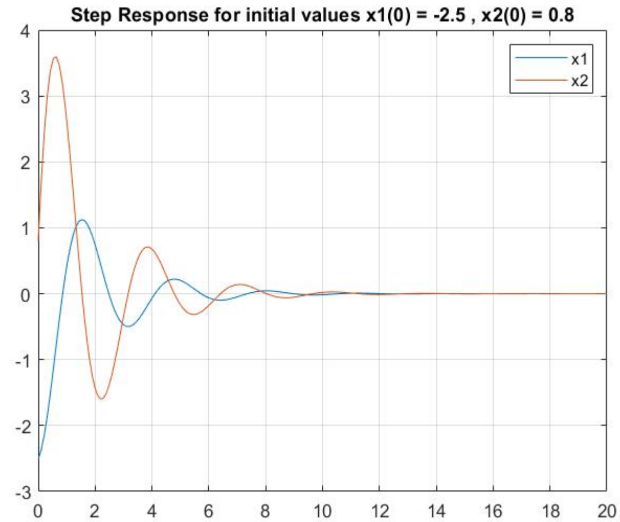
a) Για **r(t) = Au(t)** όπου u(t) η βηματική συνάρτηση και A ένα πλάτος:
Έχουμε $\dot{u}(t) = \dot{r} = \delta(t)$ και $\ddot{u}(t) = \ddot{r} = \delta'(t)$. Εφόσον ισχύουν ∀t , θα θεωρήσουμε δεδομένο $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ άρα $x_1 = 0$ άρα τελικά: $\mathbf{x_{e1} = (0, 0)}$

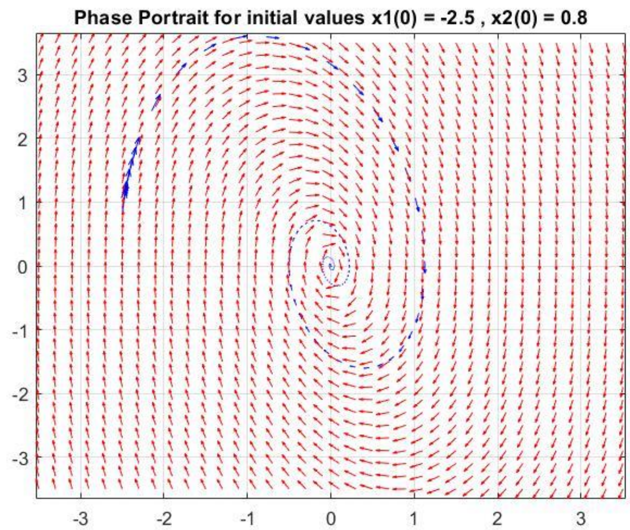
b) Για $r(t) = V \cdot t \cdot u(t)$ όπου u(t) η βηματική συνάρτηση και V = 1.2:
Εδώ έχουμε $\dot{u}(t) = \dot{r} = 1.2$ και $\ddot{u}(t) = \ddot{r} = 0$. Επομένως $x_1 = 0.3$ => $\mathbf{x_{e2} = (0.3, 0)}$

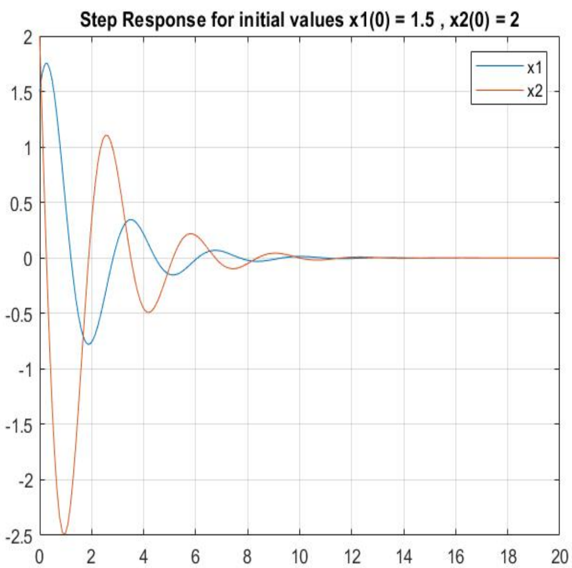
III) α) Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις για **βηματική απόκριση** και διαφορετικές αρχικές συνθήκες σε αντιστοιχία με το φασικό πορτραίτο του συστήματος για αυτές τις συνθήκες:

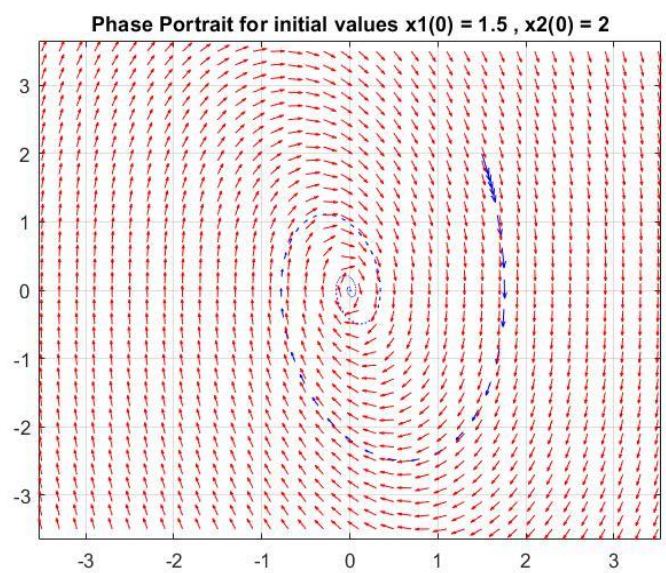


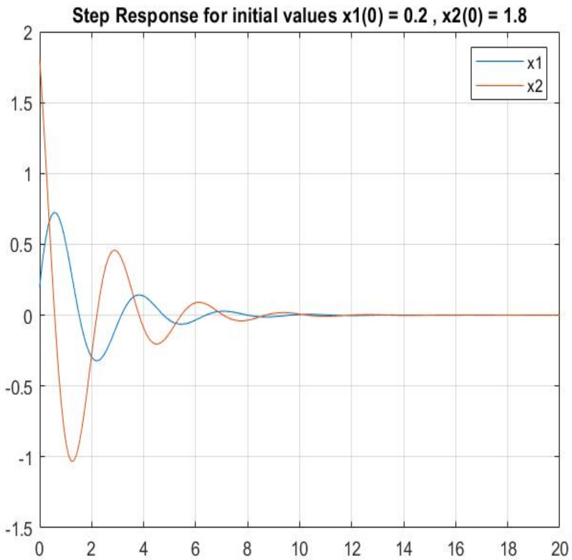


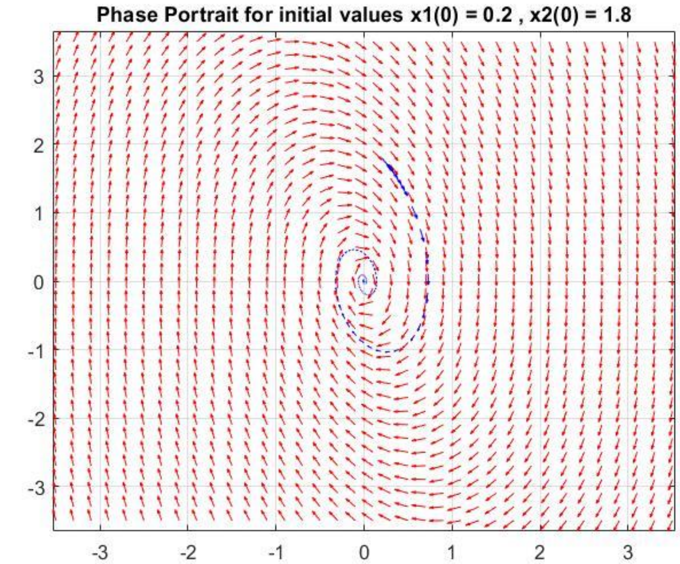

Step Response for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8
x1
x2

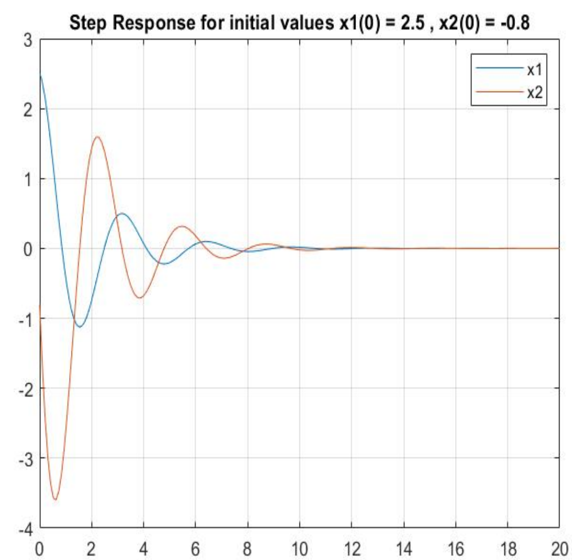

Phase Portrait for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8

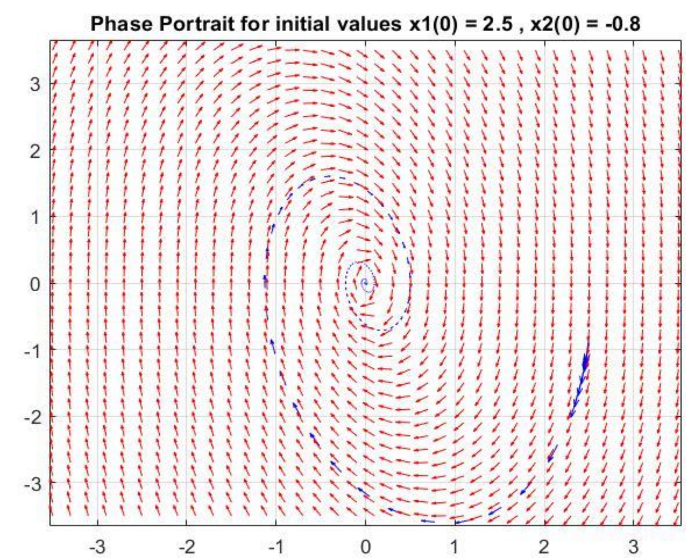

Step Response for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2
x1
x2

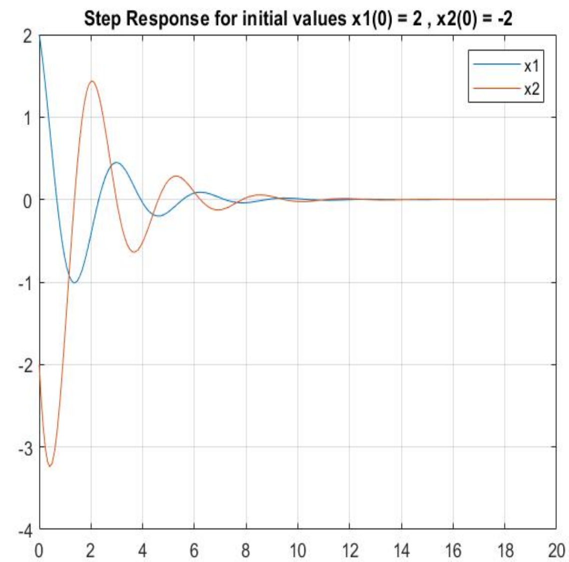

Phase Portrait for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2


Step Response for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8
x1
x2

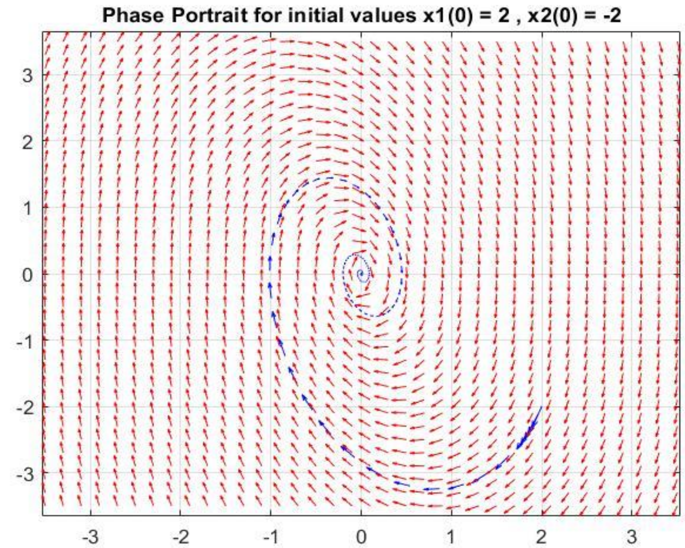

Phase Portrait for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8


Step Response for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8
x1
x2

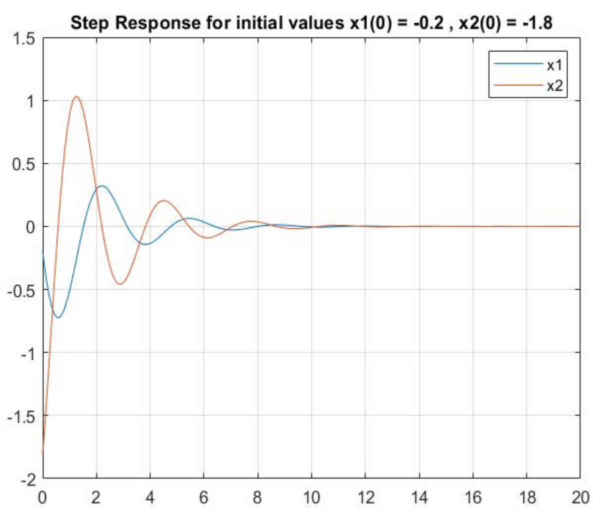

Phase Portrait for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8



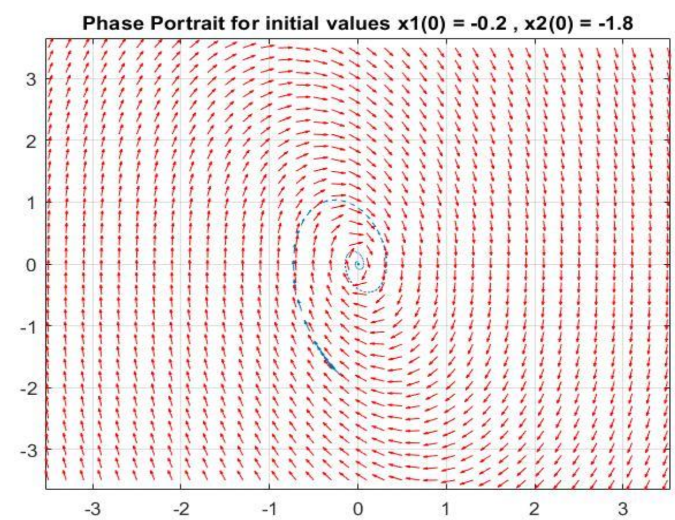
Step Response for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2
x1
x2



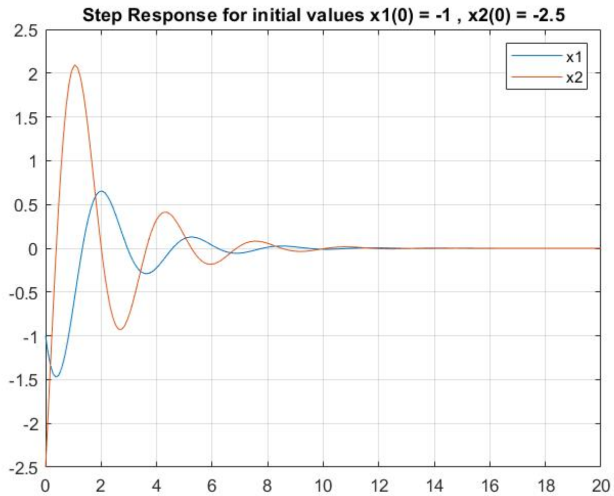
Phase Portrait for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2

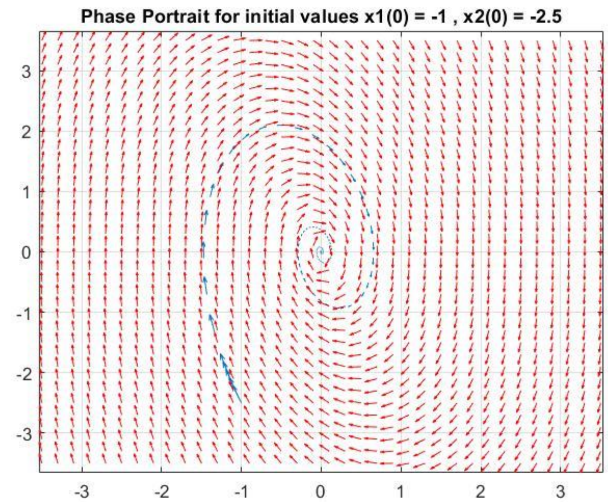


Step Response for initial values x1(0) = -0.2 , x2(0) = -1.8
x1
x2

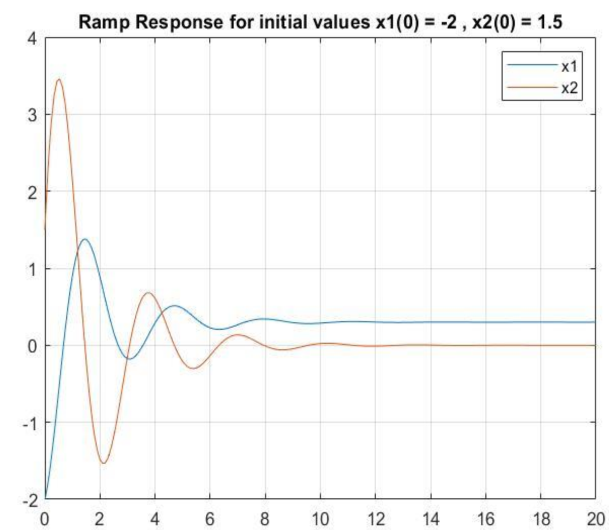


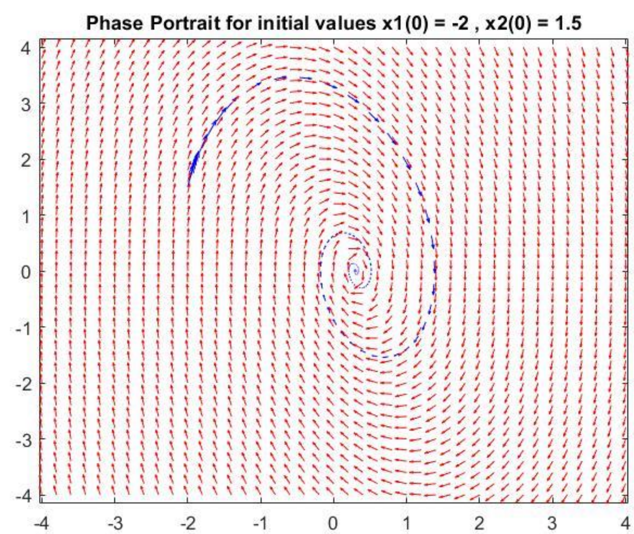
Phase Portrait for initial values x1(0) = -0.2 , x2(0) = -1.8

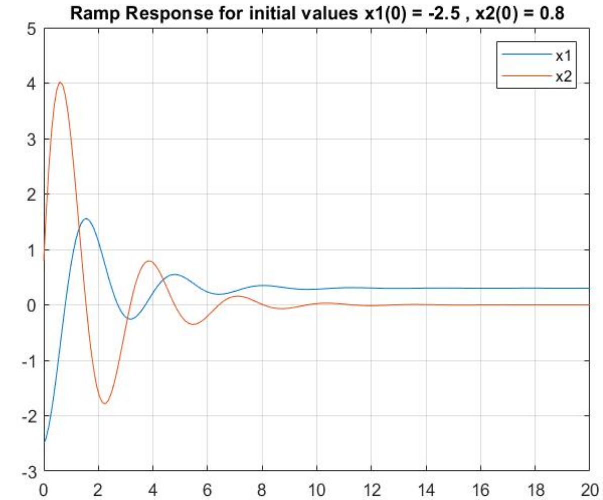


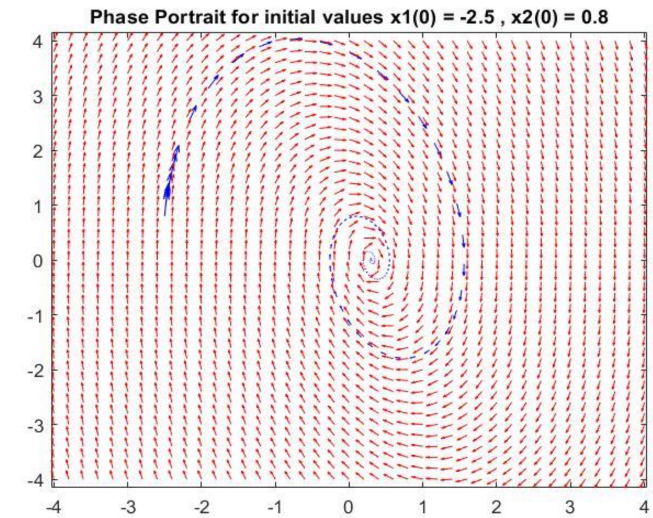


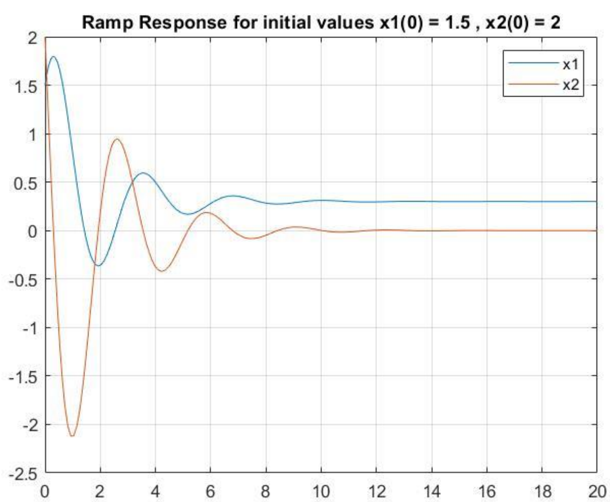
β) Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις για **χρονική απόκριση έχοντας είσοδο συνάρτηση τη ράμπας** και διαφορετικές αρχικές συνθήκες σε αντιστοιχία με το φασικό πορτραίτο του συστήματος για αυτές τις συνθήκες:

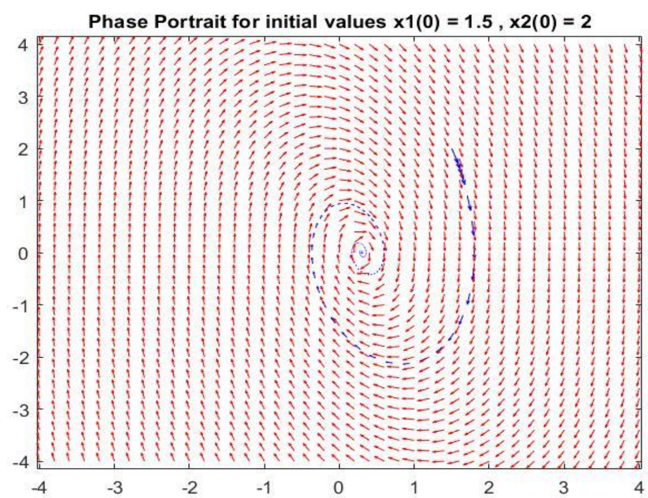


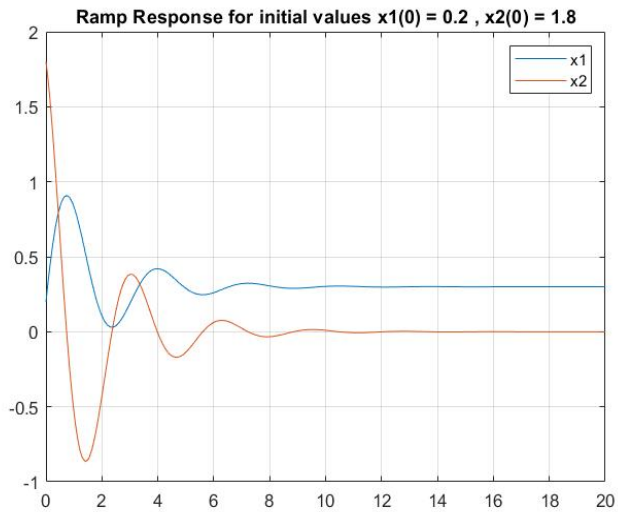


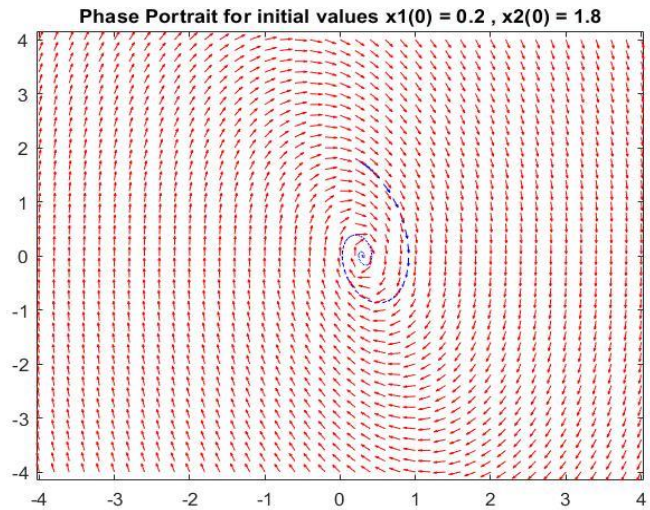

Ramp Response for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8
x1
x2

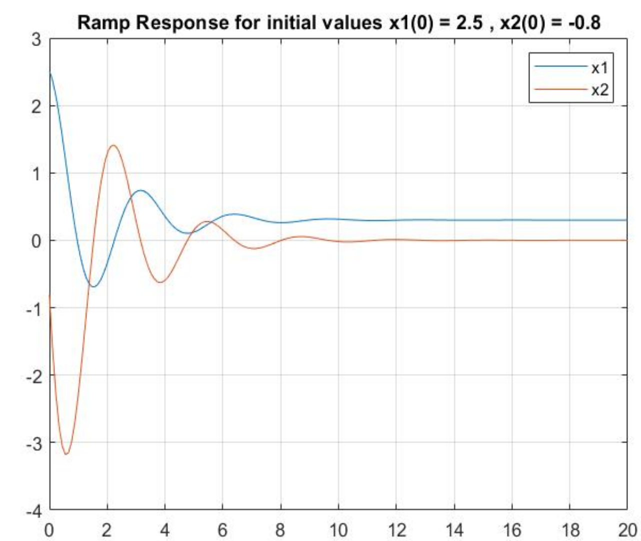

Phase Portrait for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8

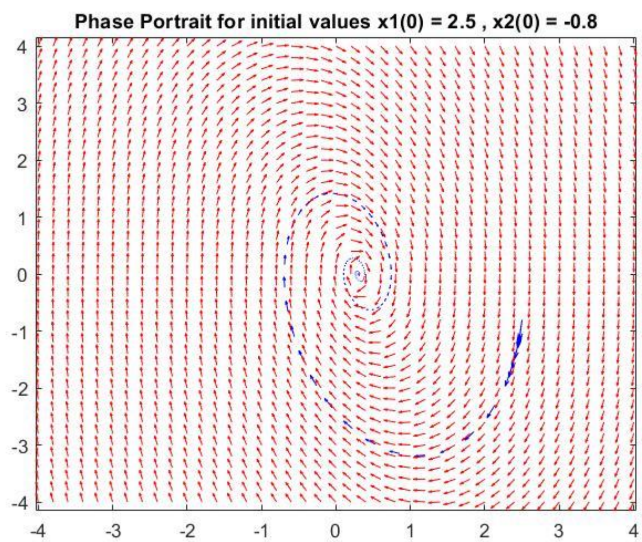

Ramp Response for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2
x1
x2

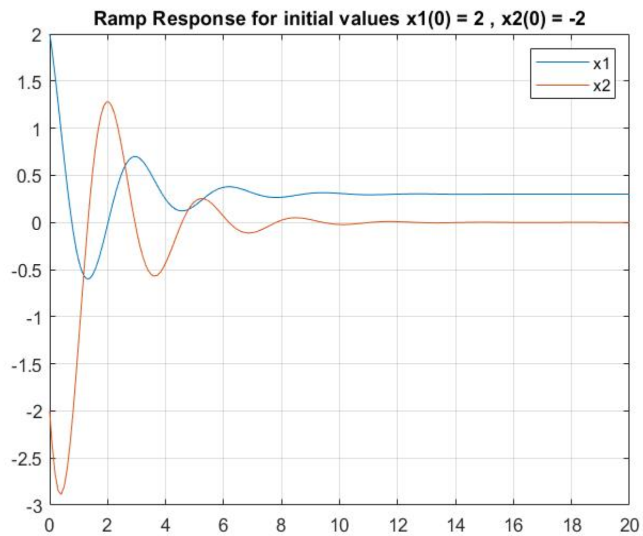

Phase Portrait for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2

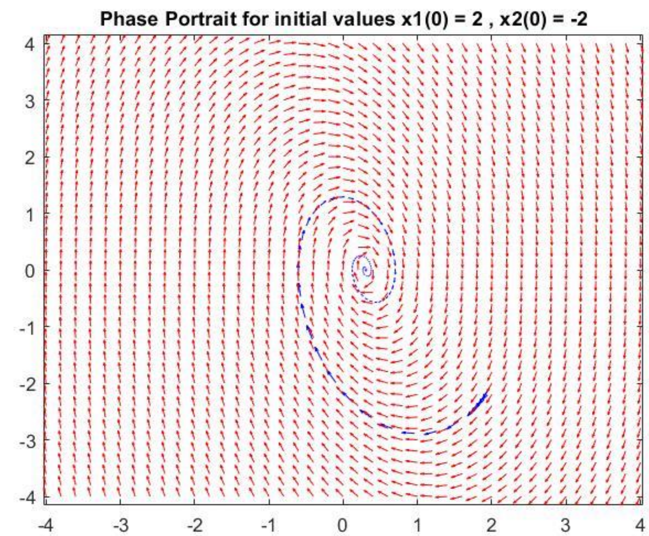

Ramp Response for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8
x1
x2

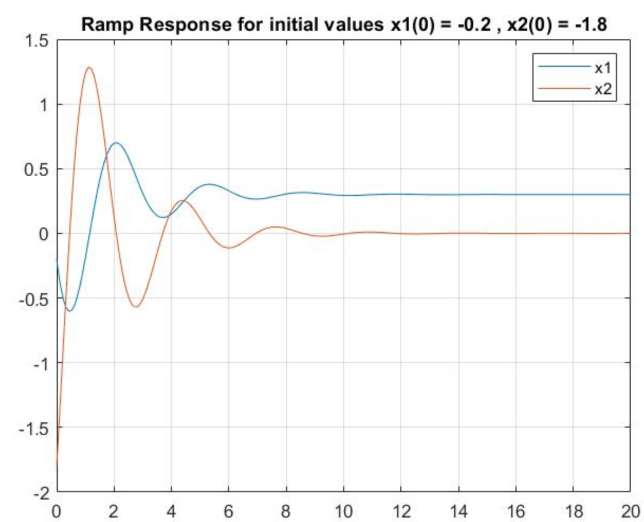

Phase Portrait for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8

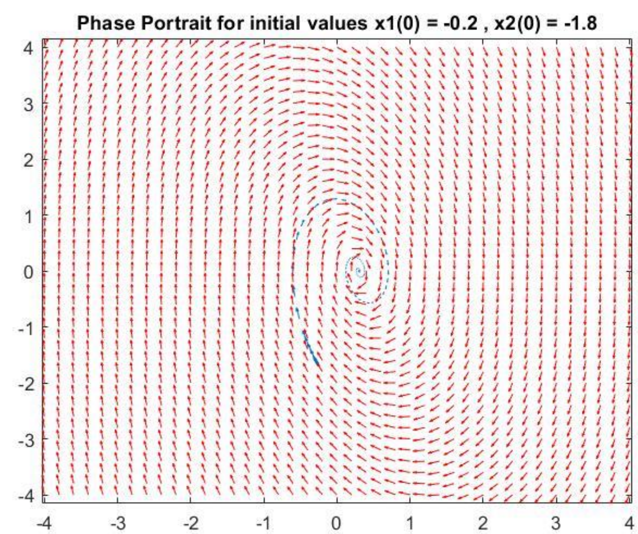

Ramp Response for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8
x1
x2

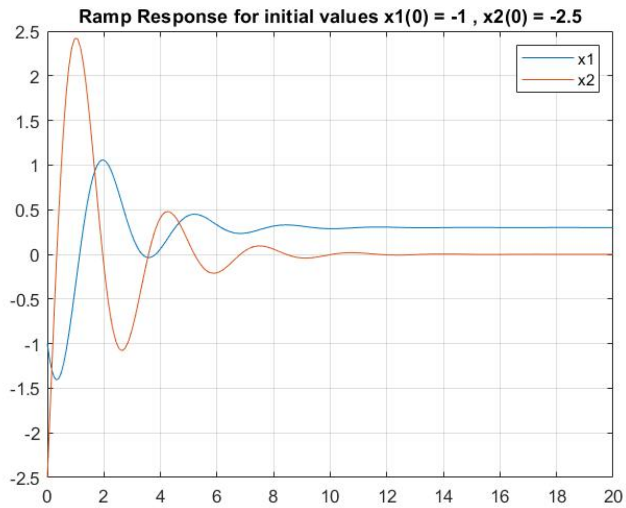

Phase Portrait for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8

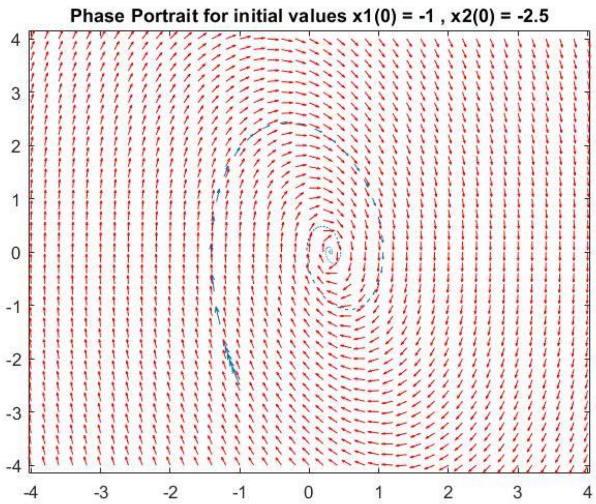

Ramp Response for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2
x1
x2


Phase Portrait for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2


Ramp Response for initial values x1(0) = -0.2 , x2(0) = -1.8
x1
x2


Phase Portrait for initial values x1(0) = -0.2 , x2(0) = -1.8





<u>Παρατηρήσεις:</u>

Στο γραμμικό αυτό μέρος, είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι το σύστημα είναι (ασυμπτωτικά) ευσταθές, για αυτό και τα διαγράμματα που παίρνουμε είναι αυτής της μορφής. Αυτό φαίνεται είτε από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\mathbf{s^2 + s + 4 = 0}$ που έχει ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο**,** είτε από το θεώρημα LaSalle για συνάρτηση Lyapunov:

$V = 2 \cdot {x_1}^2 + \frac{1}{2} \cdot {x_2}^2$ (προφανώς ΘΟ, μη φραγμένη ακτινικά) και

$\dot{V} = 4 \cdot x_1 \cdot \dot{x_1} + x_2 \cdot \dot{x_2} = 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - {x_2}^2 = -{x_2}^2 \leq 0 \quad , \forall x \in R^2, \forall t \geq t_0$

Έχουμε για οποιοδήποτε x(t):

$$\textbf{Για} \begin{cases} \dot{\boldsymbol{V}} = \mathbf{0} \,, \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_0} \\ \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})] \,, \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_2} = \mathbf{0} \,, \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_0} \\ \dot{\boldsymbol{x_1}} = \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_0} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x_1} = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0 \ \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_0}$$

Για την είσοδο ράμπας με V = 1.2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έμμεση μέθοδο Lyapunov. Θα είναι :

$$\boldsymbol{f_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{f_x}|_{\boldsymbol{x_{e2}}}$$

Έτσι, $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{f_x}|_{\boldsymbol{x_{e2}}} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{\lambda} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-1} - \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{4}$ **που έχει ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο άρα αποδεικνύεται η ασυμπτωτική ευστάθεια, (αφού Re[$\boldsymbol{\lambda_i}(\boldsymbol{f_x}|_{\boldsymbol{x_{e2}}})$] < 0 για κάθε i).**

Β) ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΕΡΟΣ – Θεωρούμε ότι η συνάρτηση μεταβλητού κέρδους N(s) υπάρχει με $e_o = 0.2$ και $\alpha = 0.06$.

Με βάση το διάγραμμα, τώρα θα ισχύουν : $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{4}{s^2 + s}$ ⇔ $\mathbf{\ddot{y} + \dot{y} = 4u}$

Το u όμως τώρα είναι μία συνάρτηση του σφάλματος, δηλαδή:

$$u = N(e) \Leftrightarrow u = \begin{cases} e\,,\ \gamma\iota\alpha\ e < -e_o \text{ ή } e > e_o \\ \alpha \cdot e\,,\ \gamma\iota\alpha\ -e_o < e < e_o\ \kappa\alpha\iota\ \alpha < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \begin{cases} \boldsymbol{e}\,,\ \boldsymbol{\gamma\iota\alpha\ e < -0.2} \text{ ή } \boldsymbol{e > 0.2} \\ \mathbf{0.06 \cdot e}\,,\ \boldsymbol{\gamma\iota\alpha\ -0.2 < e < 0.2} \end{cases}$$

επομένως, δουλεύοντας όπως και προηγουμένως, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$\mathbf{\ddot{e} + \dot{e} + 4N(e) = \ddot{r} + \dot{r}}$

$$\mathbf{Για} \begin{cases} \mathbf{x_1 = e} \\ \mathbf{x_2} = \boldsymbol{\dot{e}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{\dot{x}_1 = x_2} \\ \mathbf{\dot{x}_2 = \ddot{r} + \dot{r} - 4}\,\boldsymbol{N}\mathbf{(x_1) - x_2} \end{cases}$$

α) Για βηματική είσοδο εδώ θεωρούμε $\mathbf{\ddot{r} = \dot{r} = 0}$

- Για $x_1 < \mathbf{-0.2}$ ή $x_1 > \mathbf{0.2}$ => $\mathbf{N(x_1) = x_1}$

  και επομένως το σύστημα σε αυτήν την περιοχή θα έχει την μορφή: $\begin{cases} \mathbf{\dot{x}_1 = x_2} \\ \mathbf{\dot{x}_2 = -4\,x_1 - x_2} \end{cases}$
- Για $\mathbf{-0.2} < x_1 < \mathbf{0.2}$ => $\mathbf{N(x_1) = \alpha x_1 = 0.06\,x_1}$

  και επομένως το σύστημα σε αυτήν την περιοχή θα έχει την μορφή: $\begin{cases} \mathbf{\dot{x}_1 = x_2} \\ \mathbf{\dot{x}_2 = -0.24x_1 - x_2} \end{cases}$

β) Για συνάρτηση ράμπας ως είσοδο, θεωρούμε $\mathbf{\ddot{r} = 0}$, $\mathbf{\dot{r}} = \boldsymbol{V}$

- Για $x_1 < \mathbf{-0.2}$ ή $x_1 > \mathbf{0.2}$ => $\mathbf{N(x_1) = x_1}$

  και επομένως το σύστημα σε αυτήν την περιοχή θα έχει την μορφή: $\begin{cases} \mathbf{\dot{x}_1 = x_2} \\ \mathbf{\dot{x}_2} = \boldsymbol{V} \mathbf{- 4\,x_1 - x_2} \end{cases}$
- Για $\mathbf{-0.2} < x_1 < \mathbf{0.2}$ => $\mathbf{N(x_1) = \alpha x_1 = 0.06\,x_1}$

  και επομένως το σύστημα σε αυτήν την περιοχή θα έχει την μορφή: $\begin{cases} \mathbf{\dot{x}_1 = x_2} \\ \mathbf{\dot{x}_2} = \boldsymbol{V} \mathbf{- 0.24\,x_1 - x_2} \end{cases}$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας θα μετακινείται με βάση το πλάτος V της ράμπας. Συγκεκριμένα, για το ΣΙ , καταλήγουμε στη σχέση **$V = 4x_1$ ή στο $V = 4 \cdot a \cdot x_1$** , ανάλογα με τις τιμές που θα δίνουμε στην κλίση της ράμπας:

Δεδομένου ότι οι τιμές του x_1 επηρεάζουν το μη γραμμικό στοιχείο, δοκιμάζουμε την τιμή **$x_1 = e_0 = 0.2$** το οποίο είναι σημείο ασυνέχειας. Σε αυτό το σημείο θα έχουμε **$V^+ = 0.8$** και/ή **$V^- = 0.048$**. Θα παρατηρήσουμε παρακάτω ότι:

- Για τιμές του **V στο [0, 0.048]** θα ισχύει ο τύπος **$V = 4 \cdot a \cdot x_1$** από τον οποίο θα προκύπτει το σημείο ισορροπίας (δηλαδή το x_1 θα μεταβάλλεται για διαφορετικές τιμές της κλίσης της ράμπας σε αυτό το διάστημα). **Έχουμε ευστάθεια σε αυτά τα σημεία.**
- Για τιμές του **V στο [0.8, +∞]** έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια.
- Για κάθε τιμή **V στο διάστημα (0.048,0.8)** , το φασικό πορτραίτο μας θα φαίνεται αρχικά σαν να έχουμε σημείο ισορροπίας στο (0.2,0). Ωστόσο, αυτό δεν είναι αλήθεια και μπορούμε να το

δούμε μεγεθύνοντας αρκετά τα διαγράμματα της απόκρισης και του φασικού πορτραίτου. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο όταν τρέξουμε την προσομοίωση με αρχικές συνθήκες το σημείο (0.2, 0). Ενώ σε πρώτη εκτίμηση φαίνεται ότι βρισκόμαστε ήδη σε σημείο ισορροπίας, επομένως βάζοντας αυτές τις αρχικές συνθήκες θα περιμέναμε να μην σχεδιαστεί φασικό πορτραίτο, θα παρατηρήσουμε τελικά ότι η τροχιά μας ξεκινάει από το (0.2, 0) και κινείται «προς τα έξω» σε τροχιά που μοιάζει με **οριακό κύκλο.** Θα δούμε ότι αυτό ισχύει και για σημεία εντός αλλά και για στοιχεία εκτός του οριακού κύκλου, δηλαδή φαίνεται σαν αυτός ο «**οριακός κύκλος» να είναι ευσταθής.** Εφόσον μετακινούμαστε από το σημείο (0.2, 0), σημαίνει ότι οι παράγωγοι στο σημείο αυτό δεν είναι 0. Να σημειώσουμε ότι σε αυτό το διάστημα δεν υπάρχουν τιμές που να ικανοποιούν την εξίσωση $N(x_1) = V/4$ και για αυτό **δεν μπορούμε να μιλάμε για σημείο ισορροπίας**. Για παράδειγμα, για την τιμή **V = 0.4**, θα έχουμε για $x_1 > 0.2$, θα είναι

$N(x_1) = x_1 = V/4 = 0.1$ (άτοπο!) ενώ για $x_1 < 0.2$ θα είναι

$N(x_1) = \alpha \cdot x_1 \Leftrightarrow x_1 = 0.4/0.24 = 1.6666$ (άτοπο)

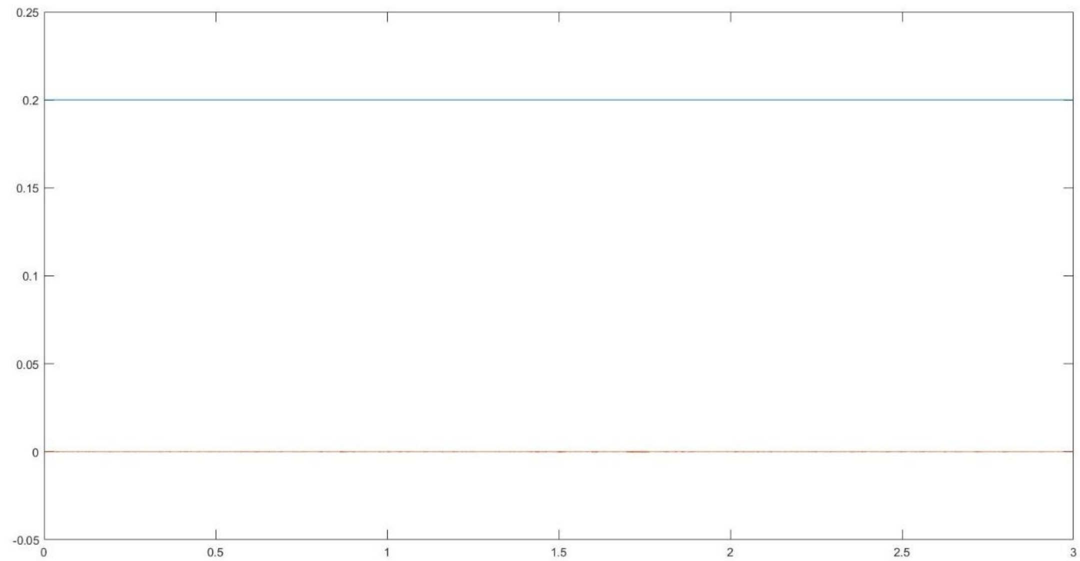
Ουσιαστικά, δεν μπορούμε να μιλήσουμε για ΣΙ, αλλά αν κάνουμε την ανάλυση με περιγραφική συνάρτηση, αυτό που θα παρατηρήσουμε είναι ότι υπάρχει ένα φαινόμενο ταλάντωσης στο φασικό πορτραίτο, το οποίο όμως «φτάνει» ασυμπτωτικά σε ένα **ευσταθές "cycle point" [1] . Αυτό, θα είναι ουσιαστικά ένας «οριακός κύκλος» με πλάτος 0 και άπειρη συχνότητα. Όπως θα δούμε παρακάτω, το ότι ξεκινώντας από το σημείο δεν μένουμε σε αυτό, δείχνει την συμπεριφορά που έχει το σύστημα αυτό καθώς ο χρόνος πηγαίνει στο άπειρο. Παρόλα αυτά, το σημείο (0.2,0) που θα προκύψει για αυτές τις τιμές του V, δεν θα περικλείεται από την καμπύλη όσο το πλάτος μεγαλώνει, επομένως θα είναι ευσταθές [1]** . Σε ένα σύστημα με τέτοια συμπεριφορά, το Matlab, δεν μπορεί να αναπαραστήσει εντελώς την ασυμπτωτική αυτή συμπεριφορά στο άπειρο.

Σημείωση: Προφανώς για αρνητικές κλίσεις στην ράμπα, θα ισχύουν τα αντίστοιχα διαστήματα στους αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς.

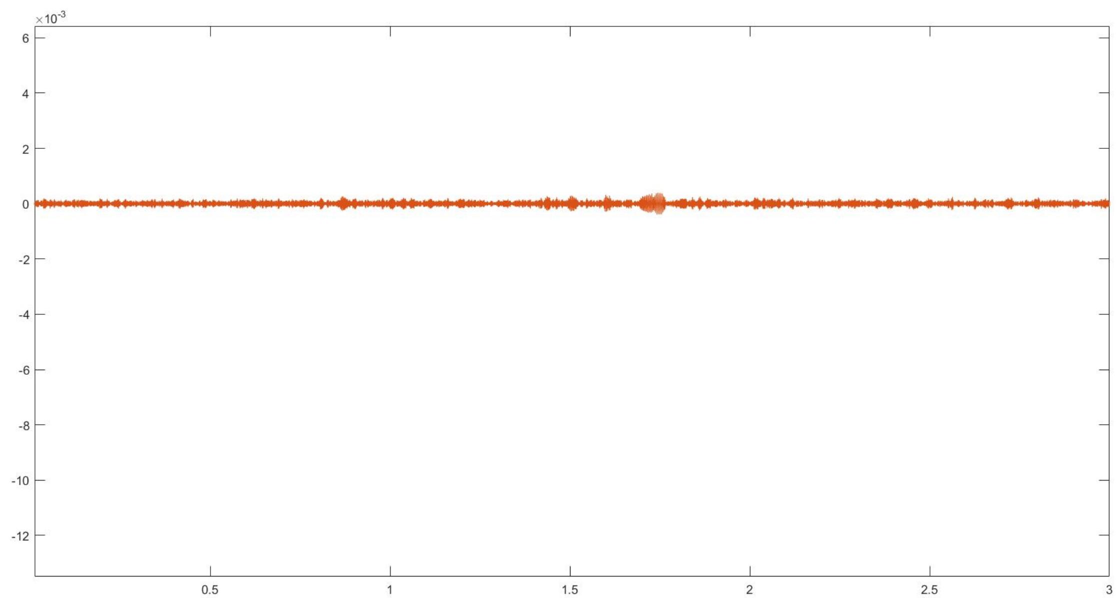
II) Απόκριση και Φασικό Πορτραίτο για τις δύο εισόδους

Ξεκινάμε για V = 0.4:

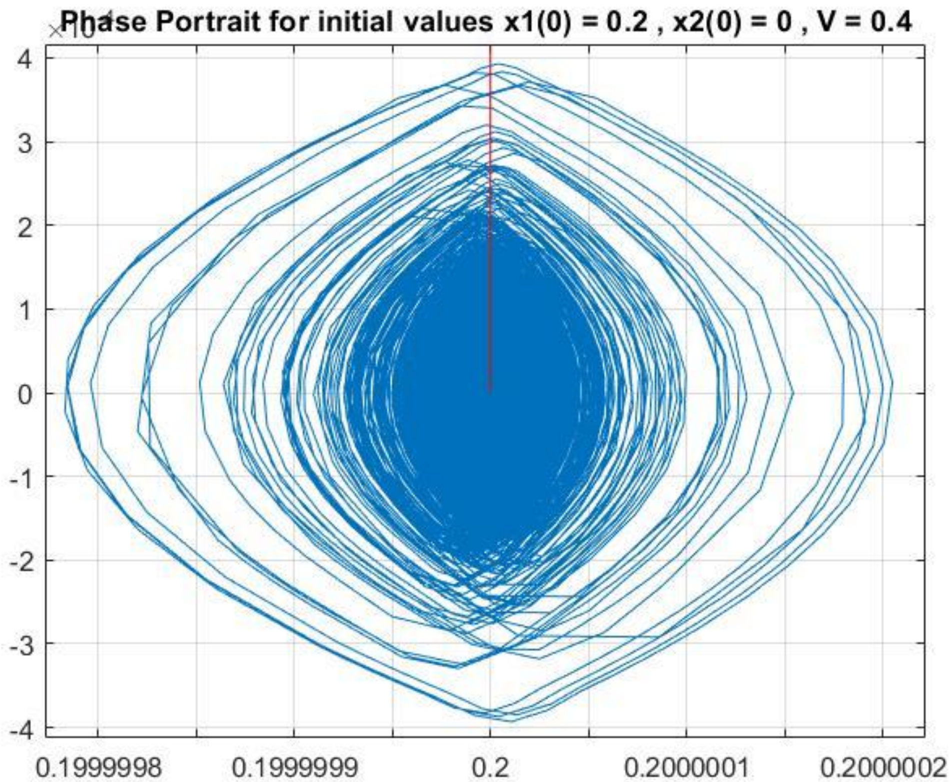
Για αρχικές συνθήκες (0.2,0) :



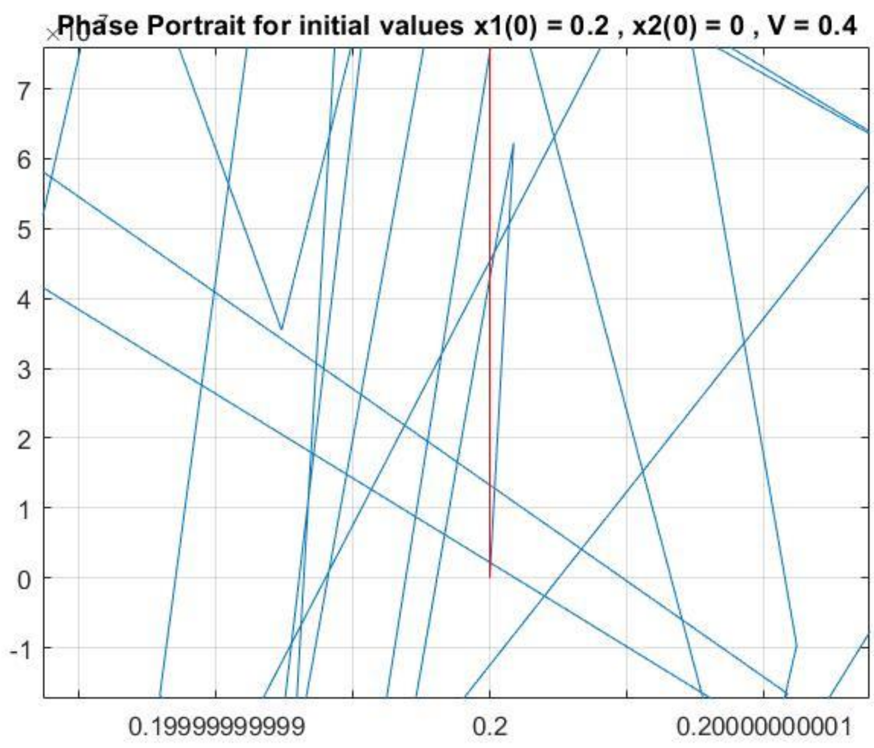
Κάνοντας αρκετή μεγέθυνση:



Εδώ φαίνεται ότι έχουμε ταλάντωση, δηλαδή μιλάμε για κάποιου είδους οριακό κύκλο. Το φασικό πορτραίτο :

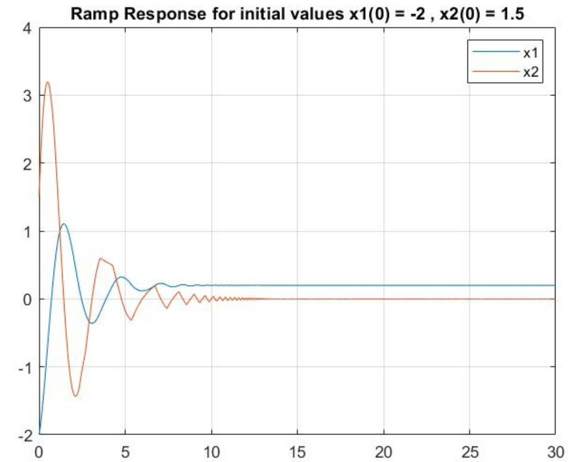


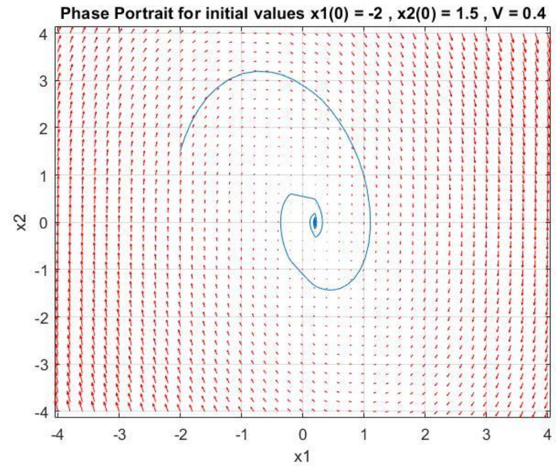
Αν κάνουμε αρκετή μεγέθυνση είναι ξεκάθαρο πως ξεκινάμε από το σημείο και φεύγουμε από αυτό το σημείο:

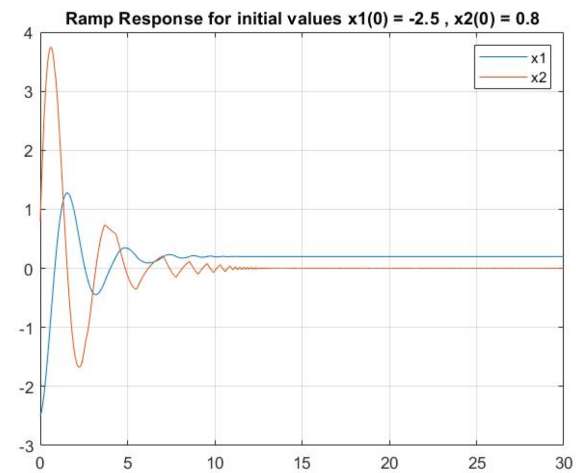


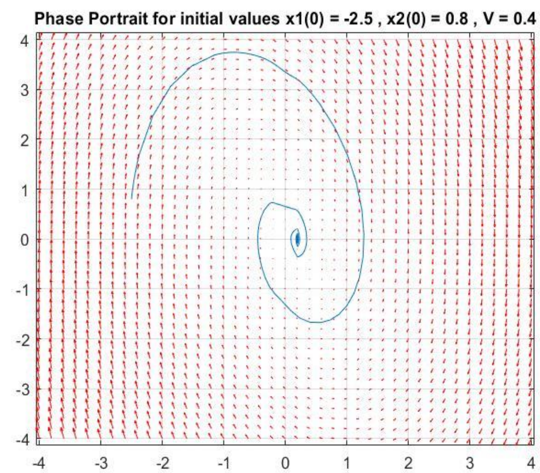
Αναλυτικά για όλες τις αρχικές συνθήκες :

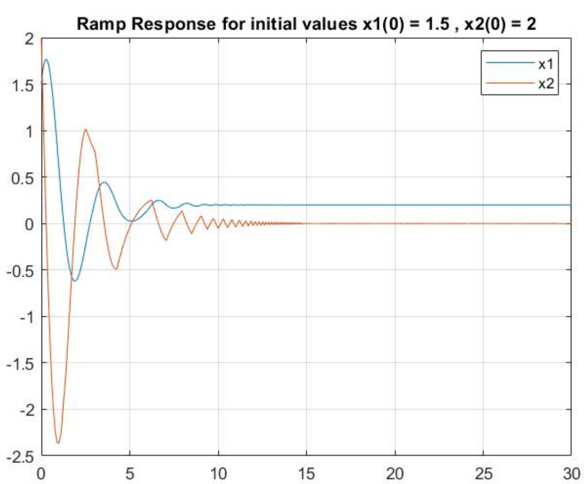
Για V = 0.4:

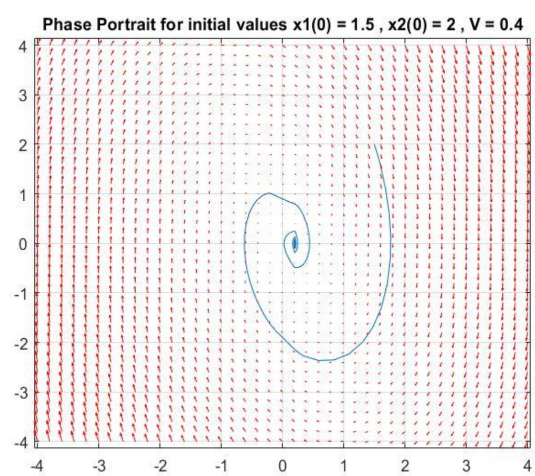


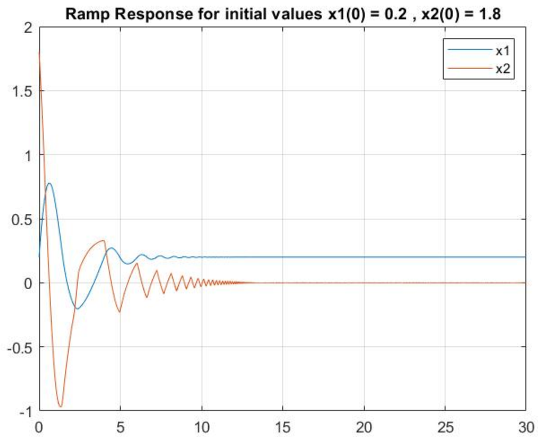


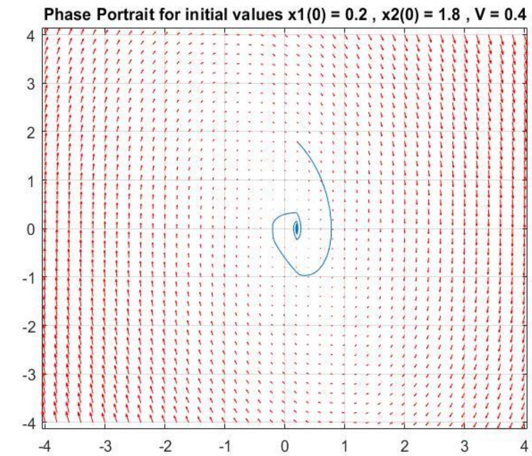


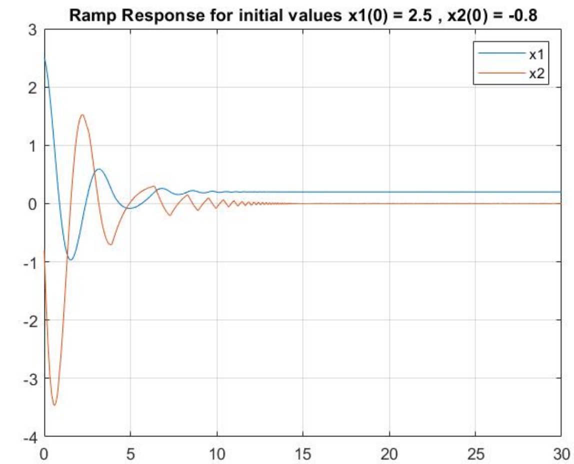


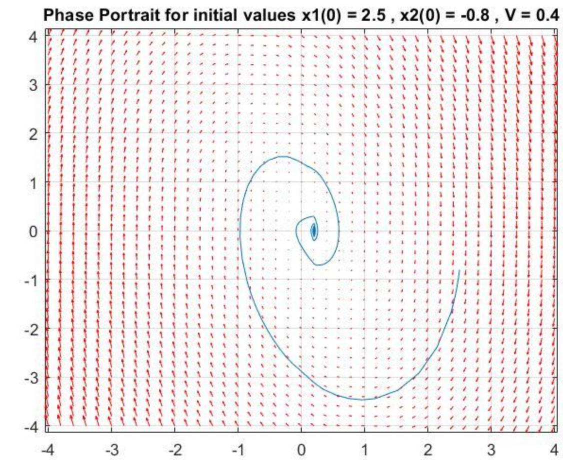


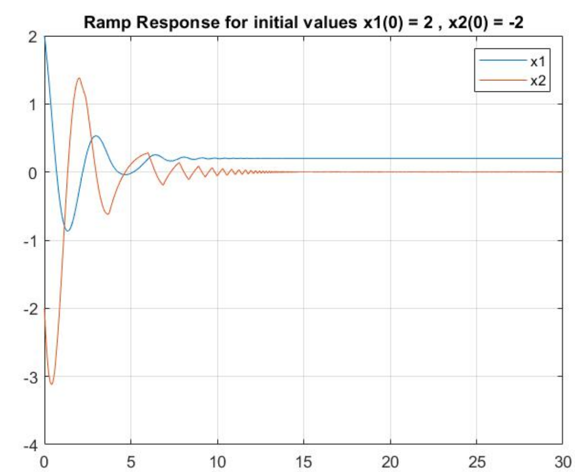


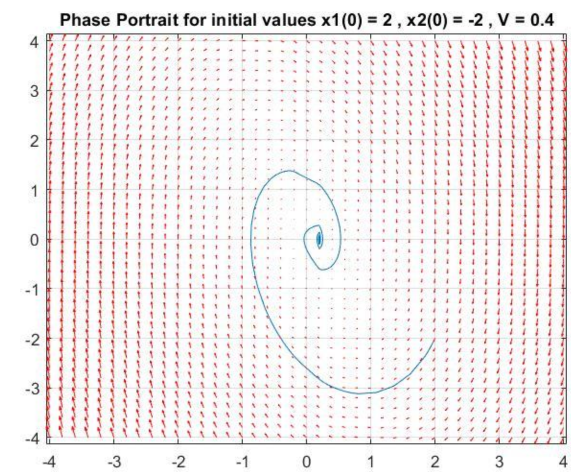

Ramp Response for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8
x1
x2

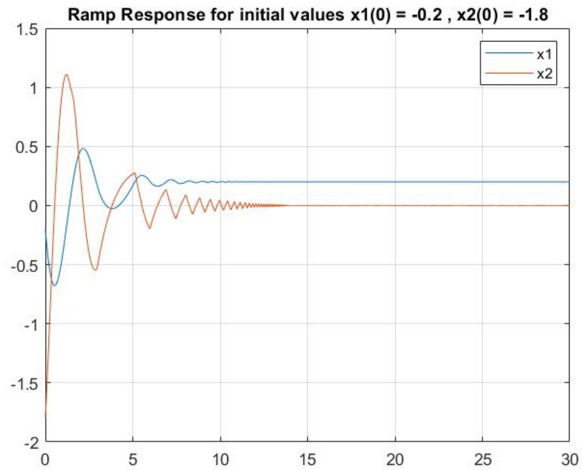

Phase Portrait for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8 , V = 0.4

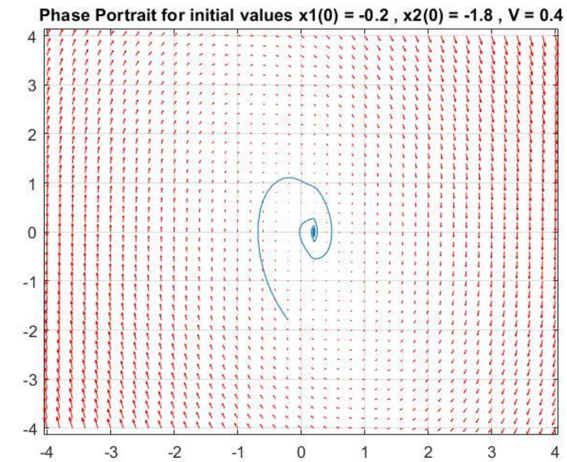

Ramp Response for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8
x1
x2

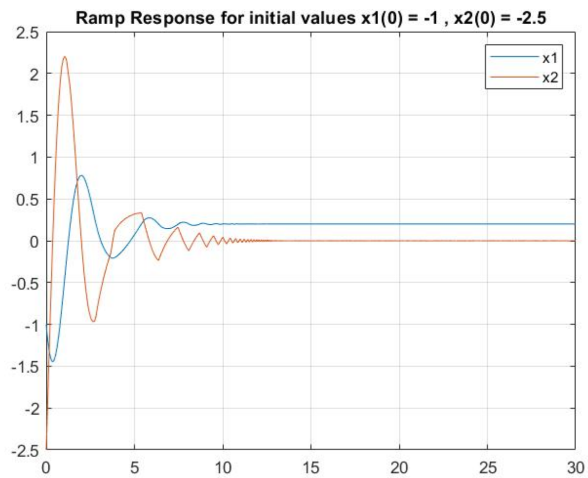

Phase Portrait for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8 , V = 0.4

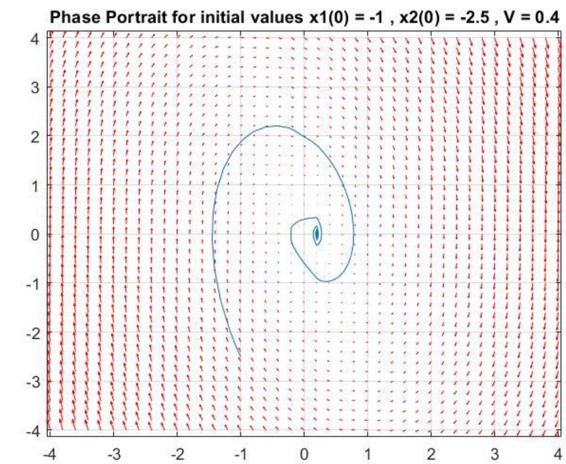

Ramp Response for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2
x1
x2


Phase Portrait for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2 , V = 0.4



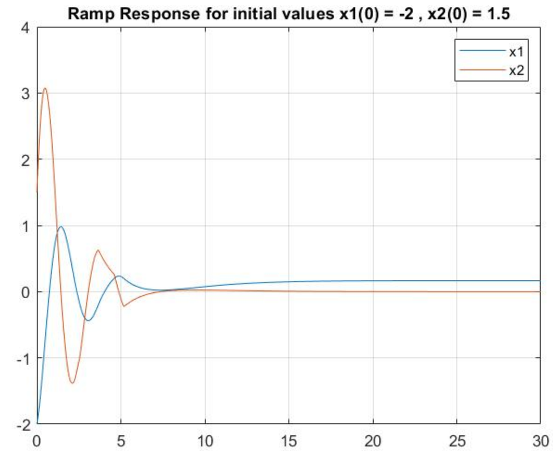


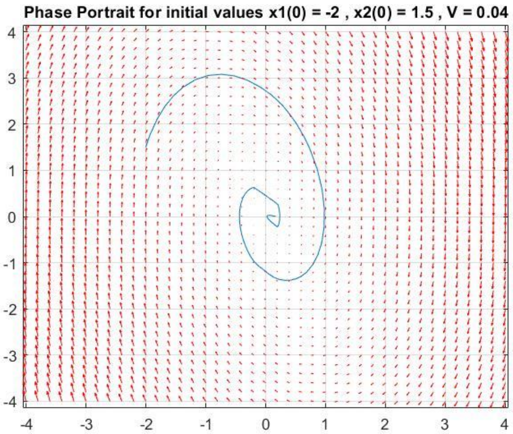


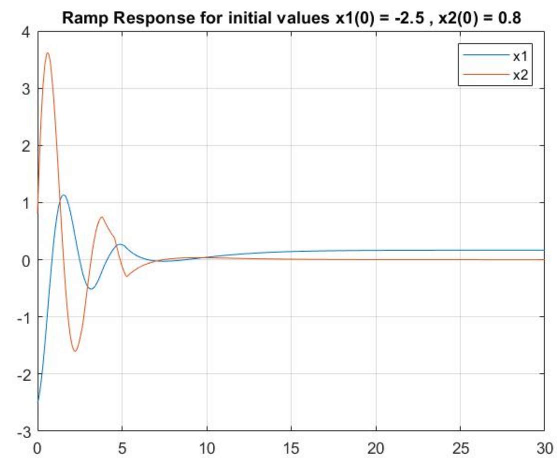


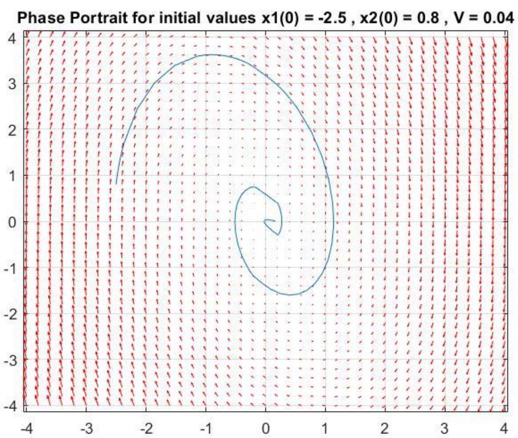
Όπως φαίνεται και στην απόκριση, υπάρχει έντονα το φαινόμενο του chattering γύρω από το 0, όταν το x_1 περάσει στην περιοχή όπου $|x_1| < 0.2$, πράγμα που δημιουργεί αυτήν την απότομη στροφή και στο φασικό πορτραίτο.

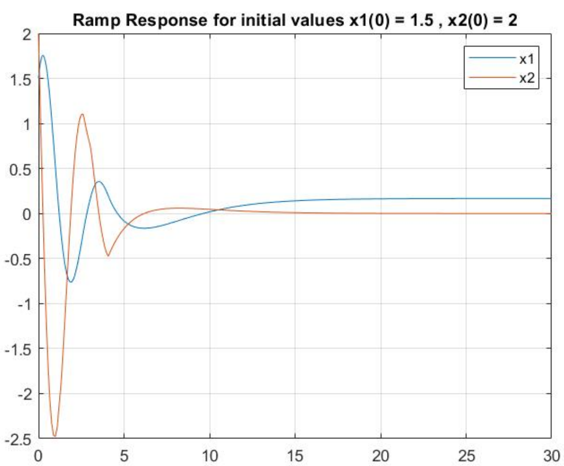
Για V = 0.04:

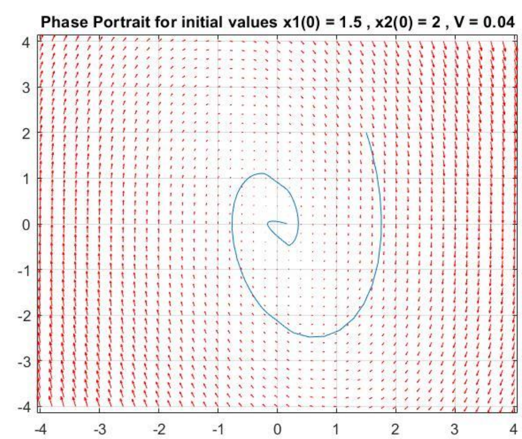

Ramp Response for initial values x1(0) = -2 , x2(0) = 1.5
x1
x2

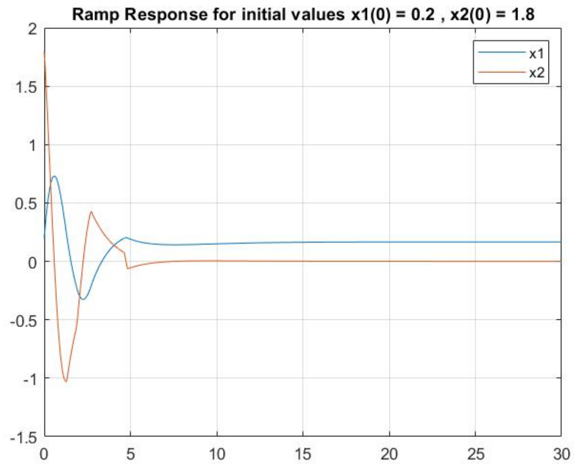

Phase Portrait for initial values x1(0) = -2 , x2(0) = 1.5 , V = 0.04

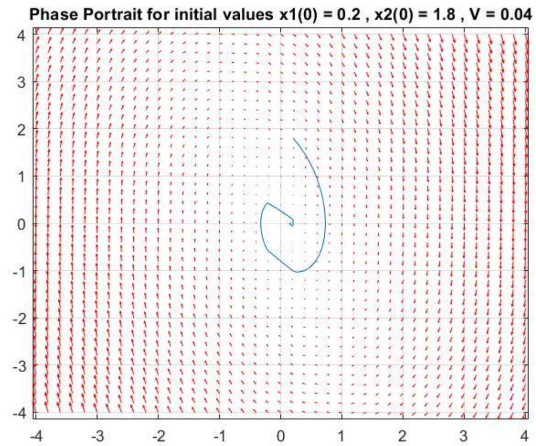

Ramp Response for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8
x1
x2

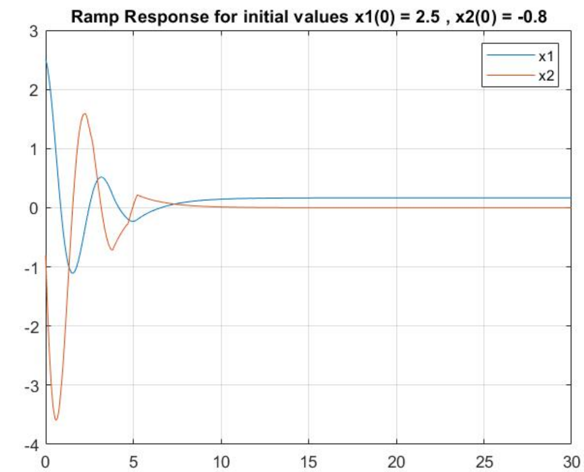

Phase Portrait for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8 , V = 0.04

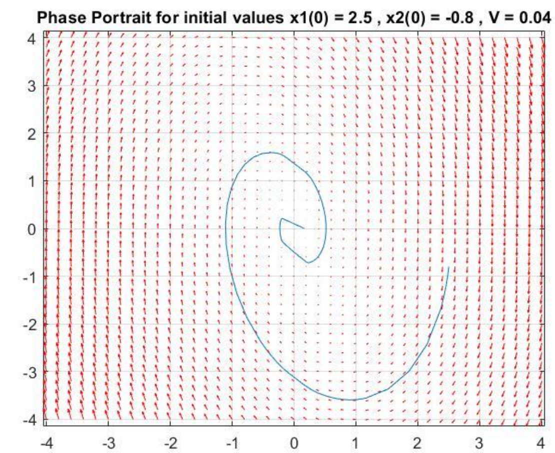

Ramp Response for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2
x1
x2

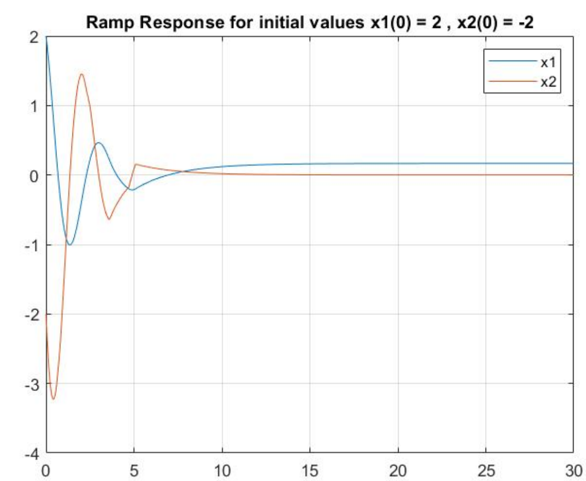

Phase Portrait for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2 , V = 0.04

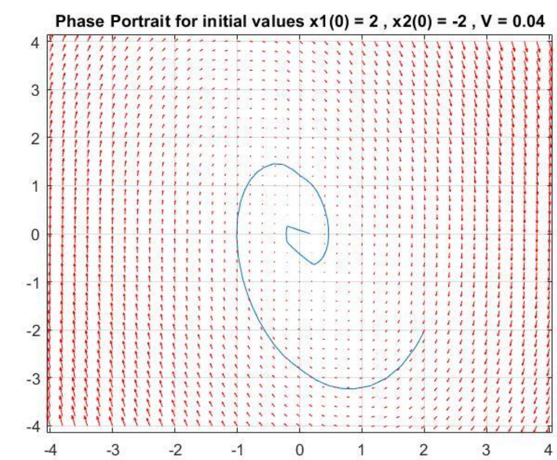

Ramp Response for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8
x1
x2

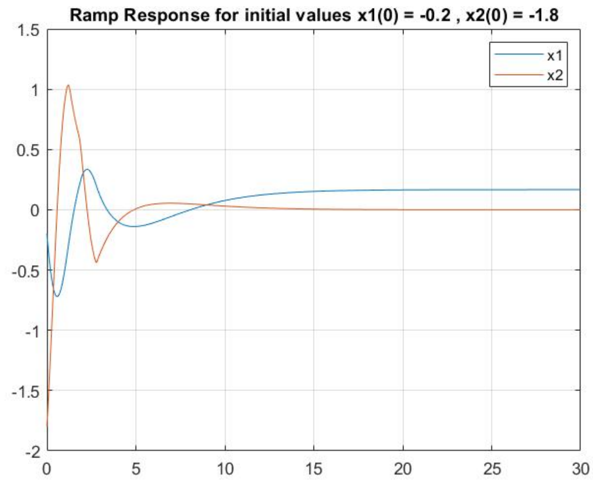

Phase Portrait for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8 , V = 0.04

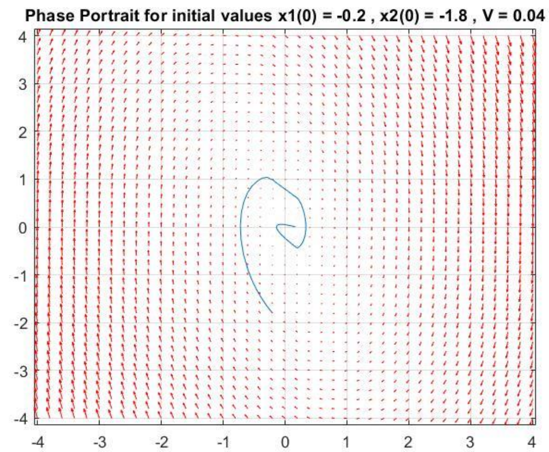

Ramp Response for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8
x1
x2

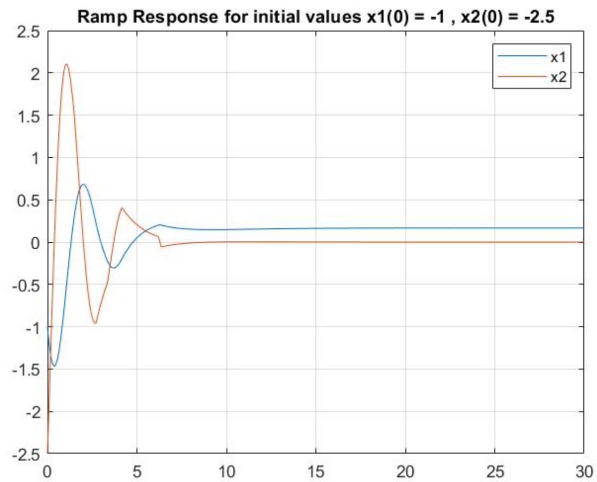

Phase Portrait for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8 , V = 0.04

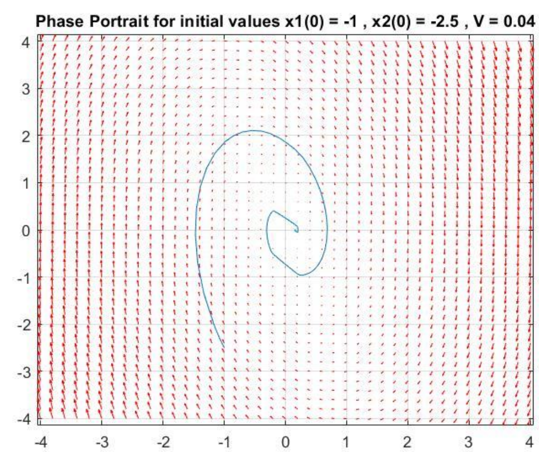

Ramp Response for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2
x1
x2


Phase Portrait for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2 , V = 0.04



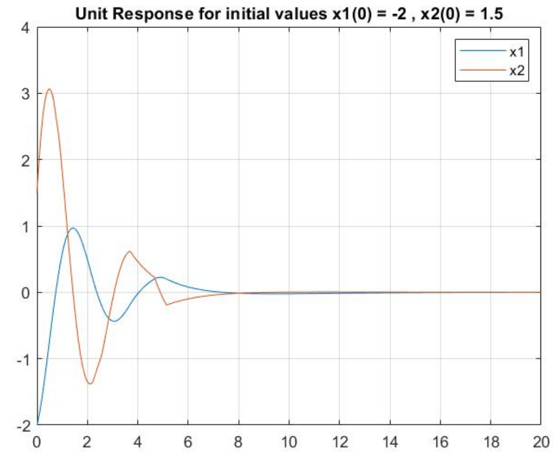


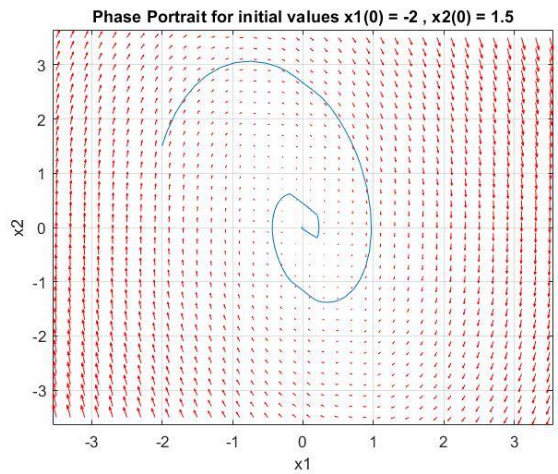


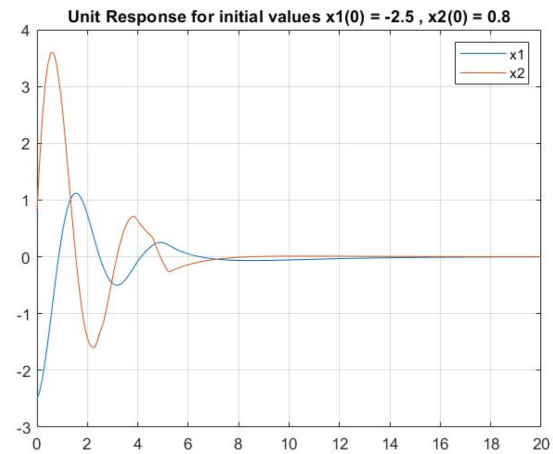


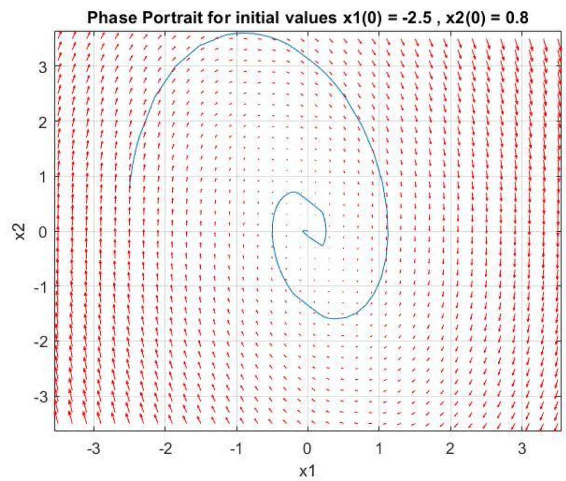
Εδώ καταλήγουμε στο σημείο ισορροπίας (V/(4a) , 0) . Η σύγκλιση στο ΣΙ έγινε αισθητά γρηγορότερη και δεν είναι πλέον ασυμπτωτική, όπως θα δούμε και παρακάτω για την βηματική είσοδο.

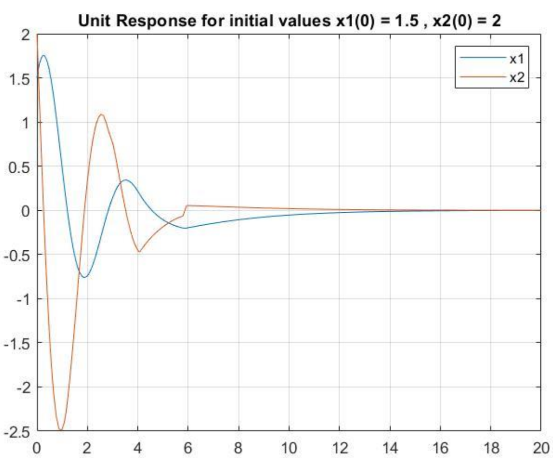
Για βηματική είσοδο θα έχουμε:

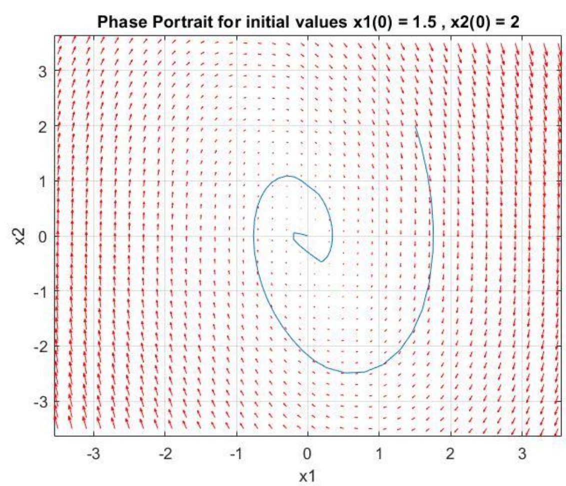

Unit Response for initial values x1(0) = -2 , x2(0) = 1.5
x1
x2

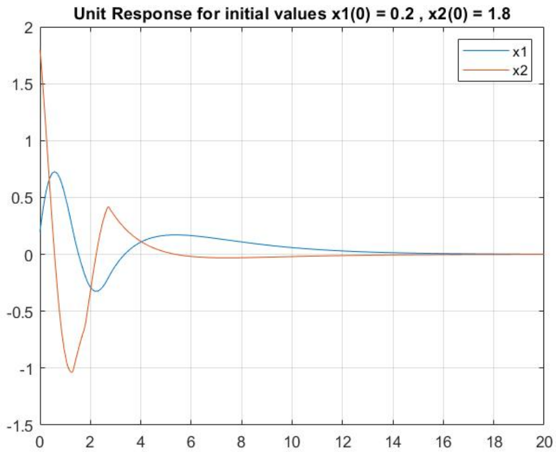

Phase Portrait for initial values x1(0) = -2 , x2(0) = 1.5
x1
x2

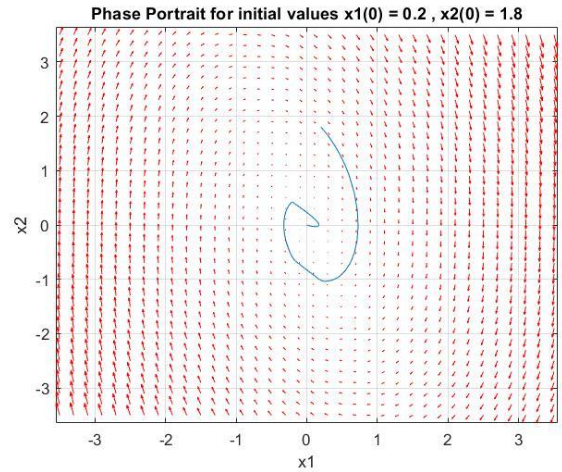

Unit Response for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8
x1
x2

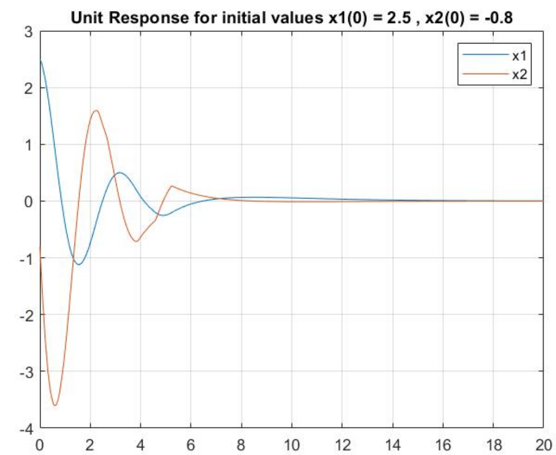

Phase Portrait for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8
x1
x2

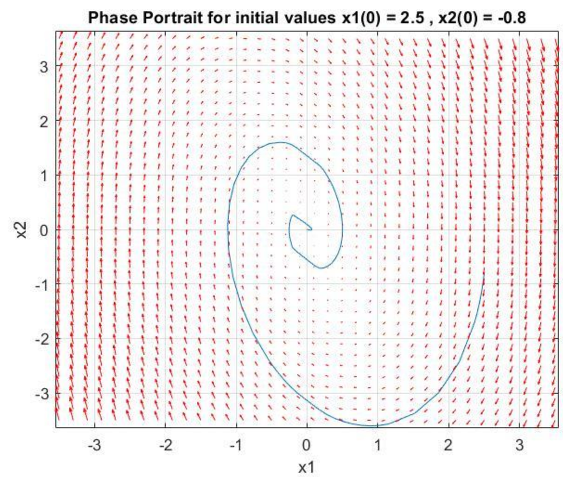

Unit Response for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2
x1
x2

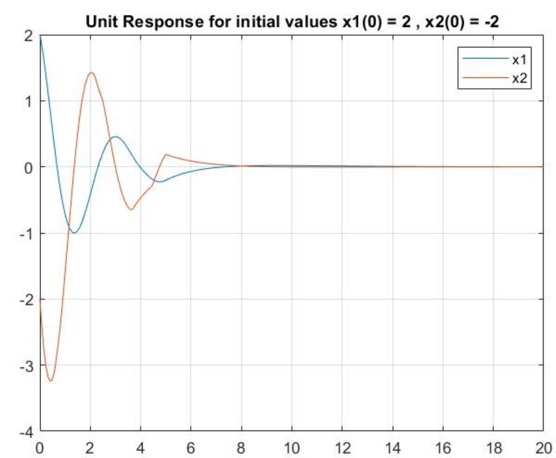

Phase Portrait for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2
x1
x2

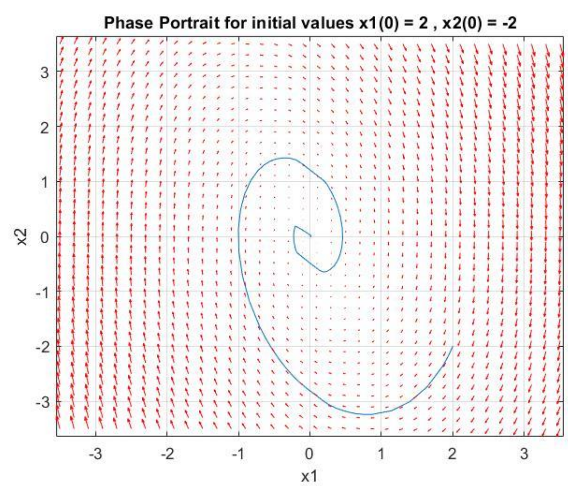

Unit Response for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8
x1
x2

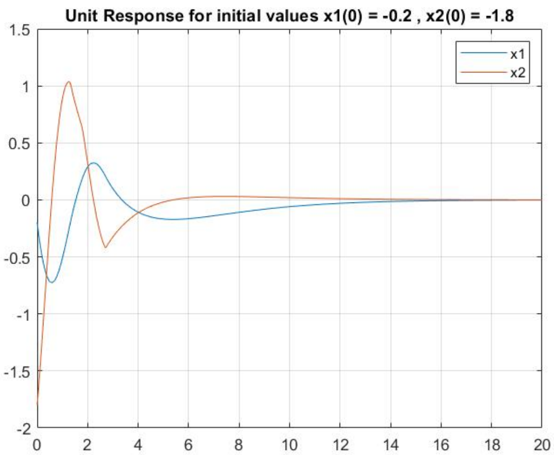

Phase Portrait for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8
x1
x2

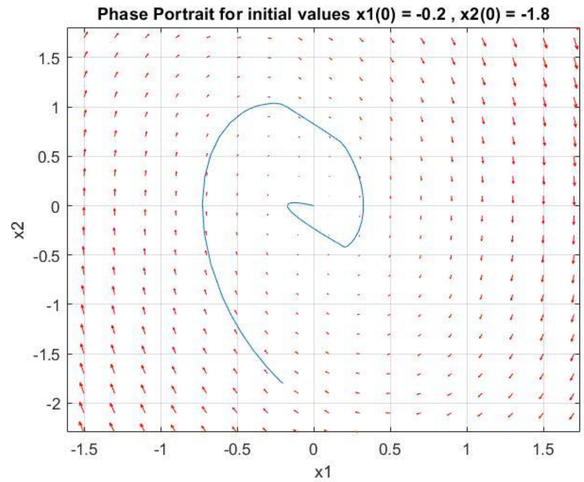

Unit Response for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8
x1
x2

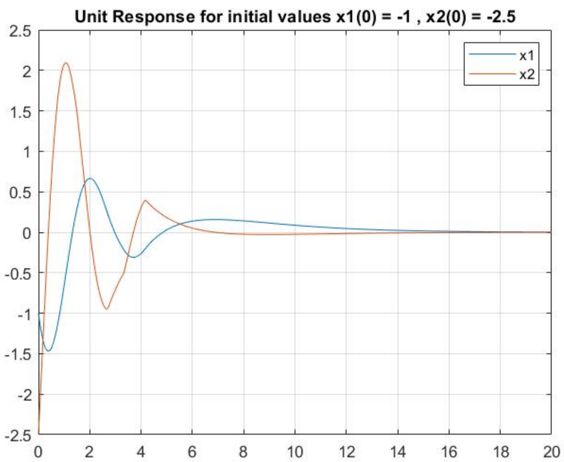

Phase Portrait for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8
x1
x2

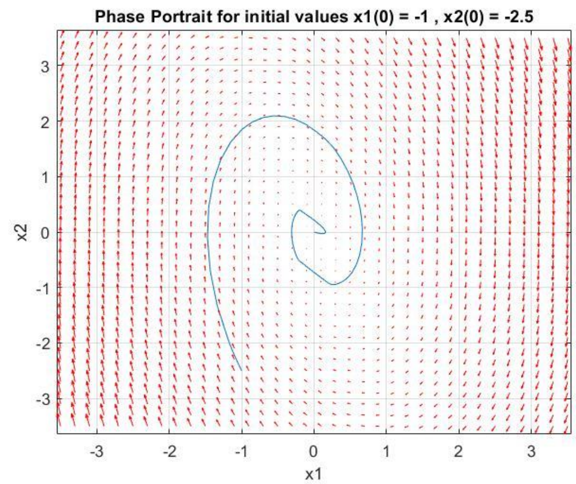

Unit Response for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2
x1
x2


Phase Portrait for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2
x1
x2



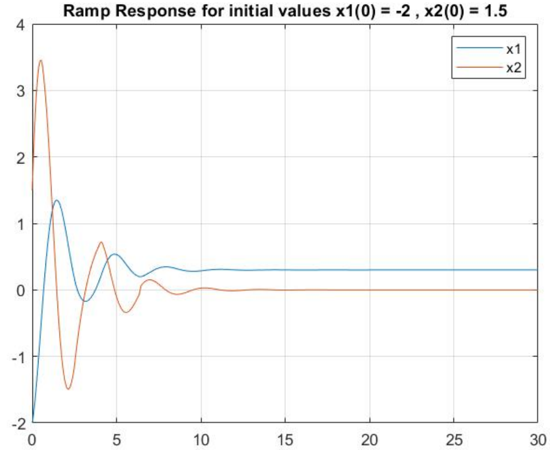




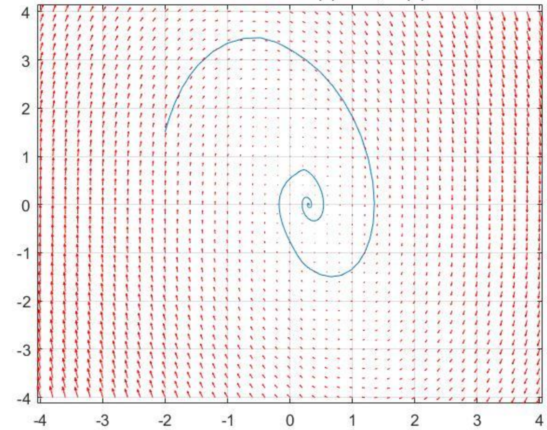


Τέλος, για είσοδο συνάρτηση ράμπας με κλίση V = 1.2:

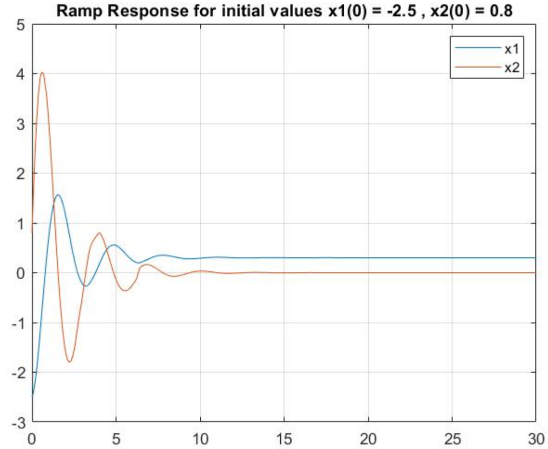
Ramp Response for initial values x1(0) = -2 , x2(0) = 1.5



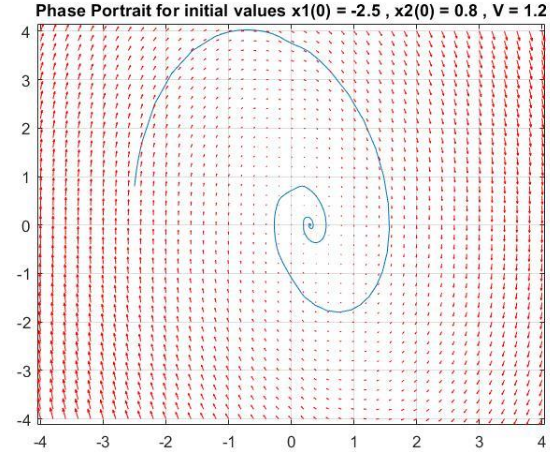
Phase Portrait for initial values x1(0) = -2 , x2(0) = 1.5 , V = 1.2



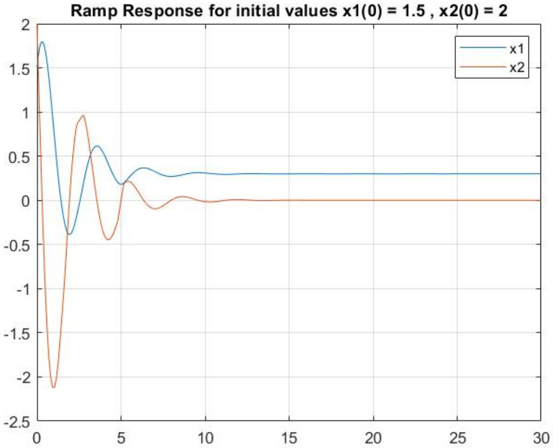
Ramp Response for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8



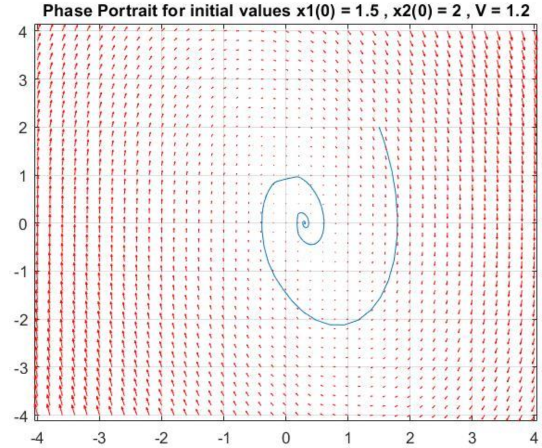
Phase Portrait for initial values x1(0) = -2.5 , x2(0) = 0.8 , V = 1.2

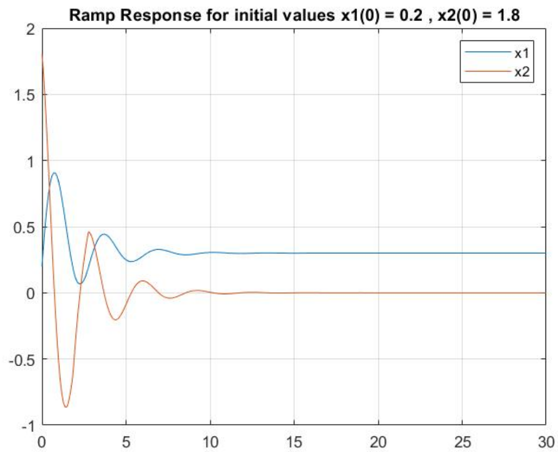


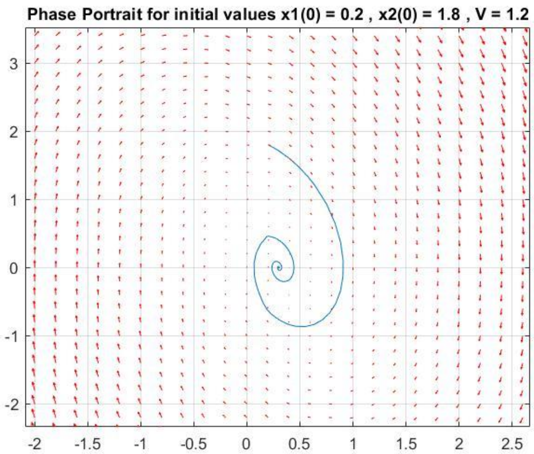
Ramp Response for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2

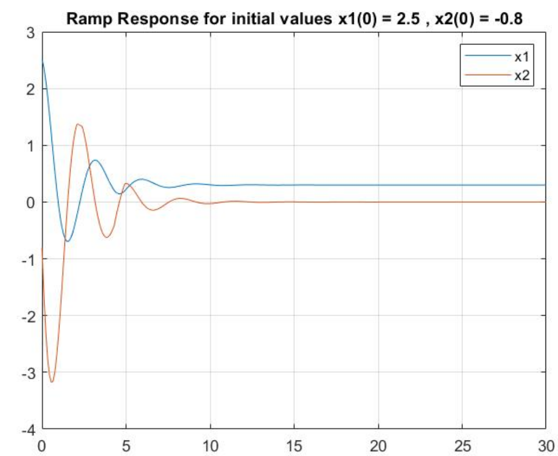


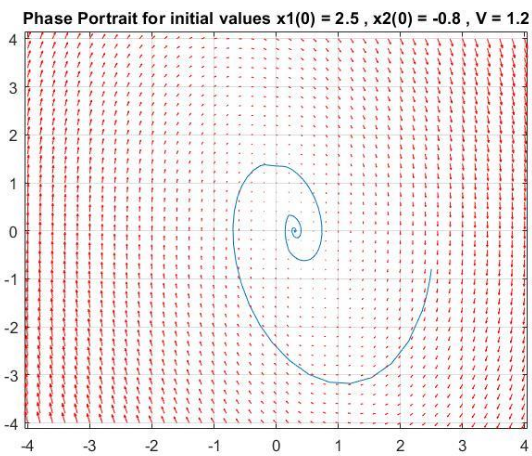
Phase Portrait for initial values x1(0) = 1.5 , x2(0) = 2 , V = 1.2

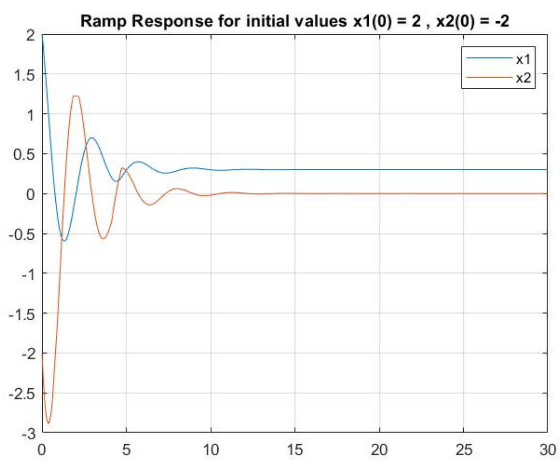


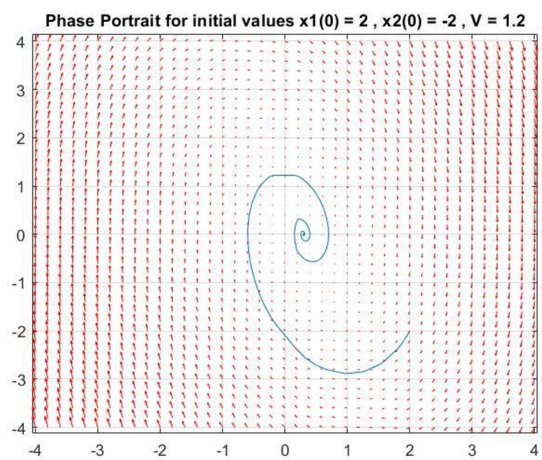

Ramp Response for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8
x1
x2

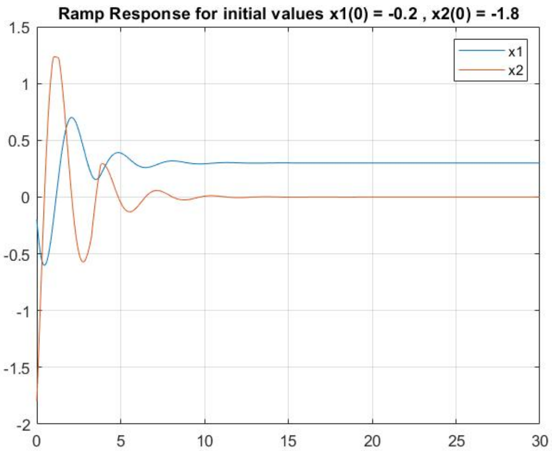

Phase Portrait for initial values x1(0) = 0.2 , x2(0) = 1.8 , V = 1.2

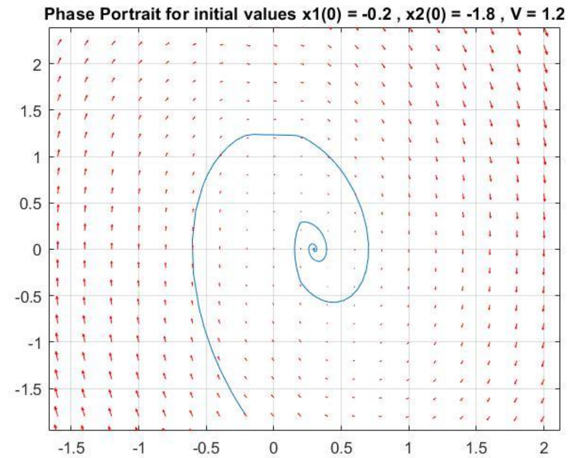

Ramp Response for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8
x1
x2

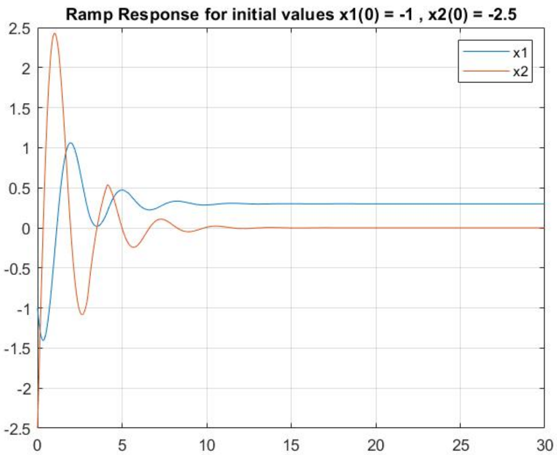

Phase Portrait for initial values x1(0) = 2.5 , x2(0) = -0.8 , V = 1.2

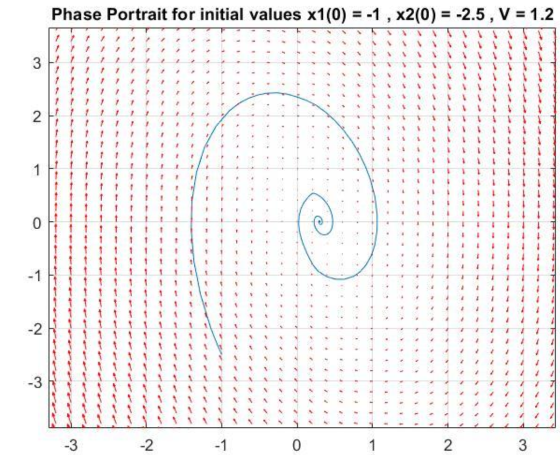

Ramp Response for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2
x1
x2


Phase Portrait for initial values x1(0) = 2 , x2(0) = -2 , V = 1.2









III) Σχολιασμός αποτελεσμάτων / Σύγκριση γραμμικού και μη γραμμικού

Παρατηρώντας, τόσο τις χρονικές αποκρίσεις, όσο και τα φασικά πορτραίτα, μπορεί κανείς πολύ εύκολα να συμπεράνει πως **η προσθήκη του μη γραμμικού στοιχείου στο σύστημα οδήγησε σε μεγαλύτερη ταχύτητα απόκρισης (εκτός από την περίπτωση του V = 0.4).** Αυτό φαίνεται στις χρονικές αποκρίσεις καθώς το σύστημα οδηγείται πιο γρήγορα σε σταθερή κατάσταση (μειώνεται ο χρόνος απόκρισης), ενώ στα φασικά πορτραίτα φαίνεται από την τάση του συστήματος να «στρέψει» την τροχιά γρηγορότερα στο σημείο ισορροπίας όταν η τροχιά έχει φτάσει αρκετά κοντά (δηλαδή όταν $-e_0 < x_1 < e_0$). Συνοψίζοντας, με την προσθήκη του μη γραμμικού στοιχείου, έχουμε :

Για βηματική είσοδο → **Ευστάθεια + μεγαλύτερη ταχύτητα απόκρισης (καθώς πριν φτάναμε ασυμπτωτικά στο ΣΙ, ενώ τώρα υπάρχουν περιπτώσεις που οδηγούμαστε σε αυτό με μη ασυμπτωτικό τρόπο**)

Για είσοδο ράμπας:

1) **Ευστάθεια για V = 0.04 + μεγαλύτερη ταχύτητα απόκρισης (δεδομένου ότι πριν για οποιαδήποτε τιμή της ράμπας συγκλίναμε ασυμπτωτικά, ενώ τώρα με μη ασυμπτωτικό τρόπο)**
2) **Ασυμπτωτική σύγκλιση σε ευσταθές “cycle point” : (0.2,0) , για V = 0.4**
3) **Ασυμπτωτική ευστάθεια για V = 1.2 – όχι ιδιαίτερη διαφορά στην ταχύτητα απόκρισης**

<u>Σημειώσεις:</u>

1) Παρατηρώ ότι το μη γραμμικό στοιχείο που έχουμε είναι άθροισμα 2 γνωστών μη γραμμικών στοιχείων, το **στοιχείο μεταφοράς με κορεσμό** και το **στοιχείο μεταφοράς με νεκρή ζώνη.**

2) Η ανάλυση του κώδικα θα μπορούσε να έχει υλοποιηθεί και με την συνάρτηση event στις ρυθμίσεις της ode45 για καλύτερη ανάλυση, καθώς οι ode του Matlab δεν διαχειρίζονται πάντα με πλήρη ακρίβεια της ασυνέχειες.

3) Η πρόβλεψη της ύπαρξης των οριακών κύκλων είναι πολύ σημαντική καθώς τις περισσότερες φορές δεν τους θέλουμε (οι οριακοί κύκλοι ως ένας τρόπος αστάθειας, τείνουν να προκαλούν μικρή ικανότητα/ακρίβεια ελέγχου στο σύστημα). Στο παραπάνω πρόβλημα/σύστημα, μπορούμε να κάνουμε ανάλυση με περιγραφική συνάρτηση (describing function analysis) έτσι ώστε να έχουμε μία πληρέστερη γνώση του συστήματος μας. Συνήθως έτσι μπορούμε να έχουμε εκτίμηση του μεγέθους και της συχνότητας του οριακού κύκλου, σε περίπτωση που θέλουμε να προχωρήσουμε στην εξάλειψή του(ς) χρησιμοποιώντας κάποιον αντισταθμιστή.

<u>Προβληματισμός</u>:

Γνωρίζουμε λόγω του Θεωρήματος Poincare, ότι ένας οριακός κύκλος πάντα περιέχει ένα σημείο ισορροπίας. Παρόλα αυτά, αυτό ισχύει δεδομένου ότι η συνάρτηση που περιγράφει το σύστημά μας, δηλαδή η f όπου $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(\mathbf{t})]$, είναι ομαλή. Εδώ, προφανώς έχουμε ασυνέχεια και συνεπώς μία μη ομαλή συνάρτηση.

<u>Αναφορές</u>:

[1] ZDENĚK ÚŘEDNÍČEK, Describing functions and prediction of limit cycles (2018)

2/1/2021
Καβελίδης Φραντζής Δημήτριος