Haskell - P39

函子 (functor)，指范畴间的一类映射 (map between categories)
　　也可以解释为小范畴内的态射
　　借自哲学家鲁道夫·卡尔纳普 (Rudolf Carnap)
　　　用函子与函数间的相关来类比谓词与性质之间的相关 (linguistic context)
　　在代数拓扑学 (algebraic topology) 中
　　　拓扑空间的连续映射给出相应代数对象 (基本群/同调群/上同调群) 的代数同态
　　　　algebraic object associated to topological space
　　　　map between algebraic objects associated to continuous map between spaces

对于范畴 C 和 D，从 C 到 D 的函子为一个映射 (mapping) F，使得
　　将每个对象 $X \in C$ 映射至对象 $F(X) \in D$
　　　associate to each object X in C an object F(X) in D
　　将每个态射 $f: X \to Y \in C$ 映射至态射 $F(f): F(X) \to F(Y) \in D$
　　　associate to each morphism $f: X \to Y$ in C
　　　　　a morphism $F(f): F(X) \to F(Y)$ in D
　　且满足 对任意对象 $X \in C$，恒有 $F(id_X) = id_{F(X)}$
　　　　对任意态射 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z \in C$
　　　　　恒有 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
　　即函子要保持单位态射与态射的复合
　　　must preserve identity morphism and composition of morphism

反变函子 (contravariant functor)，对于范畴 C 和 D，从 C 到 D 的映射 F，使得
　　将每个对象 $X \in C$ 映射至对象 $F(X) \in D$
　　将每个态射 $f: X \to Y \in C$ 映射至态射 $F(f): F(Y) \to F(X) \in D$
　　　即反变函子反转了态射的方向 (turn morphism around)
　　　且满足 对任意对象 $X \in C$，恒有 $F(id_X) = id_{F(X)}$
　　　　对任意态射 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z \in C$
　　　　　恒有 $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
　　　　注意反变函子反转了复合方向 (reverse direction of composition)

协变函子 (covariant functor)，相对于反变函子，称一般函子为协变函子
　　反变函子也可以定义为在对偶范畴 (opposite category) C^{op} 上的协变函子
　　即对于反变函子 $F: C \to D$，也写作 $F: C^{op} \to D$ 或 $F: C \to D^{op}$

Haskell - P40

自然变换 (natural transformation)，可被认为是 函子的态射 (morphism of functor)
将一个函子变换为另一个函子，同时保持相关范畴的内在结构 (态射的复合)
provide way of transforming one functor into another
with repecting the internal structure of catagory involved
(composition of morphisms)

对于范畴 C 和 D，以及从 C 到 D 的函子 F 和 G　　记为 $\eta : F \to G$
从 F 到 G 的自然变换 η 是一族态射 (family of morphism)　或 $\eta : F \Rightarrow G$
对于范畴 C 中的每个对象 X 关联一个范畴 D 中的态射 $\eta_X : F(X) \to G(X)$
associate to every object $X \in C$
a morphism $\eta_X : F(X) \to G(X) \in D$
态射 η_X 称为 component of η at X (η 在 X 处的分量/组件)
对于范畴 C 中的每个态射 $f : X \to Y$，有自然变换组件 η_X，η_Y
$\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$
可以表示为交换图 (commutative diagram)

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F'(X) \arrow[d, "\eta_X"'] & F'(Y) \arrow[l, "F'(f)"'] \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G'(X) & G'(Y) \arrow[l, "G'(f)"] \end{tikzcd}$$

注意到有态射 $F(f) : F(X) \to F(Y)$，$G(f) : G(X) \to G(Y)$
于是有 $(F(Y) \to G(Y)) \circ (F(X) \to F(Y)) = \eta_Y \circ F(f)$
$= F(X) \to G(Y)$
$= (G(X) \to G(Y)) \circ (F(X) \to G(X)) = G(f) \circ \eta_X$
对于反变函子 F' 和 G'，则交换图的水平箭头方向相反

自然同构 (natural isomorphism)，又称自然等价 (natural equivalence) 或函子同构 (isomorphism of functors)
对于任意对象 $X \in C$，态射 η_X 是范畴 D 中的同构 (isomorphism in D)
如果函子 F，G 存在自然同构，则称 F 和 G 是同构的 (isomorphic)
或称 F 和 G 是自然同构的 (naturally isomorphic)
注意 同构即在范畴中存在态射 $g : G(X) \to F(X) \in D$
有 $g \circ \eta_X = id_{F(X)}$ 且 $\eta_X \circ g = id_{G(X)}$