Calculus - P45

方程的近似解 对于函数$f(x)=0$的实根，首先是确定根的大致范围，使所求的根是这个区间内的唯一实根

称这过程为根的隔离．称区间$[a,b]$为所有实根的隔离区间

然后以根的隔离区间端点a，b为根的初始近似值，并逐步改善根的近似值的精确度

重复改善步骤，直至求得满足精确度要求的近似解

二分法 (bisection method)，对于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$

且方程$f(x)=0$在(a,b)内有且仅有一个实根ξ，于是有$[a,b]$为ξ的隔离区间

取$[a,b]$的中点$\xi_1=\frac{a+b}{2}$，并计算$f(\xi_1)$，如果$f(\xi_1)=0$，则可知实根为ξ_1

如果$f(\xi_1)$与$f(a)$同号，则更新$a_1=\xi_1$，如果$f(\xi_1)$与$f(b)$同号，则更新$b_1=\xi_1$

可知$f(a_1)\cdot f(b_1)<0$，于是根在(a_1,b_1)内，且$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$

重复以上步骤，直到某个ξ_k使得$f(\xi_k)=0$，或对于误差$\delta>0$，有$\delta>b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$

```
bisection :: (Fractional a, Ord a) => (a -> a) -> a -> a -> a -> (a, a)
                                      传入函数f(x)  传入隔离区间  传入误差限
bisection f a0 b0 s =
  let func a b
        | b - a < s  = (a, b)          ] 当b-a<s时，返回结果(a,b)
        | otherwise  = let m = (a+b)/2
            in if (f m) == 0 then (m, m)     ] 如果f((a+b)/2)=0，则返回((a+b)/2, (a+b)/2)
               else if (f m)*(f a) > 0 then func m b   ] 如果f((a+b)/2)·f(a)>0 则更新a=(a+b)/2
               else func a m   ] 否则更新b=(a+b)/2
  in func a0 b0
```

切线法 又称牛顿-拉弗森法 (Newton-Raphson method)，对于函数$f(x)$，在区间$[a,b]$上有二阶导数

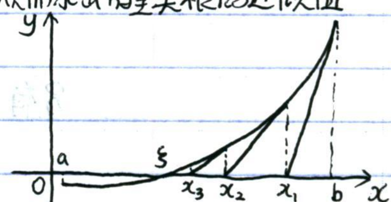
有$f(a)\cdot f(b)<0$，且$f'(x)$，$f''(x)$在区间$[a,b]$上保持定号．

若方程$f(x)=0$在(a,b)内有且仅有一个实根ξ，则称$[a,b]$为实根ξ的隔离区间

考虑用曲线弧纵坐标与$f''(x)$同号的一端的切线代替曲线弧，从而求出方程实根的近似值

即切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，求$y=0$的实根x，

即有$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，且可知$x_1$比$x_0$更接近实根$\xi$



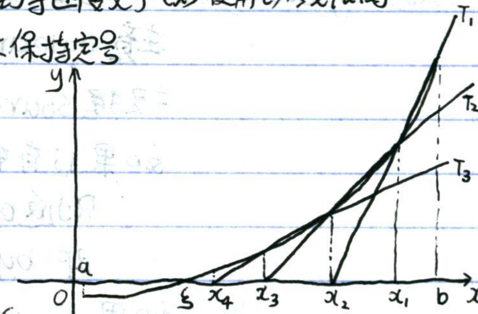
重复以上步骤，直到某个x_n使得对于误差$\delta>0$，有$|x_n-x_{n-1}|<\delta$.

```
newtonRaphson :: (Fractional a, Ord a) => (a->a) -> (a->a) -> a -> a -> a
newtonRaphson f f' a s =      传入函数f(x)和导数f'(x)
  let a' = a - (f a)/(f' a)   ] 计算 x1 = x0 - f(x0)/f'(x0)
  in if (abs (a' - a)) < s then a'   ] 如果|xn - xn-1|<δ，则返回xn
     else newtonRaphson f f' a' s    ] 否则递归地调用自身
newtonRaphson (\x -> x^2 - x - 1) (\x -> x*2 - 1) 2 0.000001 --> 1.618033988749989
```

Calculus - P46

割线法 (secant method) 又称弦截法. 用于当$f(x)$较复杂而难以得到导函数$f'(x)$使用切线法时

对于函数$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且$f'(x)$与$f''(x)$在$[a,b]$上保持定号



且有 $f(a)\cdot f(b)<0$, 且$f(x)$在(a,b)内有唯一实根ξ

考虑纵坐标的符号与$f''(x)$相同一侧的端点, 取为点x_0,

再选点$x_1\in(a,b)$使得$f(x_1)\cdot f(x_0)>0$,

则取割线方程 $\frac{y-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, 求$y=0$的实根

则有 $x_2=x_1-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}f(x_1)$, 可知$x_2$比$x_0, x_1$更接近$\xi$

以x_2代替x_1, x_1代替x_0并重复上述步骤. 直到有某个x_n使得对误差$\delta>0$, 有$|x_n-x_{n-1}|<\delta$

```
secant :: (Fractional a, Ord a) => (a -> a) -> a -> a -> a -> a
secant f x0 x1 δ
  | (abs (x1-x0)) < δ = x1
  | otherwise = let x2 = x1 - (f x1)*(x1-x0)/((f x1) - (f x0))
                in secant f x1 x2 δ
```

如 $|x_1-x_0|<\delta$ 则返回x_1的值

否则递归调用 secant f x_1 $[x_1-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}f(x_1)]$ δ

如 `secant (\x -> x^2 - x - 1) 3 2 0.000001` → 1.6180339887499087

原函数 (primitive function): 如果在区间I上, 可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$

则对于任意$x\in I$, 有 $[F(x)]'=F'(x)=f(x)$, 或 $dF(x)=f(x)dx$

则称函数$F(x)$为$f(x)$ (或$f(x)dx$) 在区间I上的一个原函数

原函数存在定理 (existence theorem of primitive function): 指对于在区间I上连续的函数$f(x)$

则存在原函数$F(x)$在区间I上可导, 且对任意$x\in I$, 有 $[F(x)]'=F'(x)=f(x)$

简单地说, 连续函数一定有原函数

证明过程有, 如果存在函数$F(x)$在区间I上可导, 且$F'(x)=f(x)$

即对于任意$x\in I$, 有 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)$

若给自变量x的增量Δx, 使得$x+\Delta x\in I$, 取$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

则有 $F(x+\Delta x)-F(x)=\int_{-\infty}^{x+\Delta x}f(x)dx-\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

$=\int_{x}^{x+\Delta x}f(x)dx$

根据积分中值定理, 可知存在ξ在x与$x+\Delta x$之间, 使得 $\int_{x}^{x+\Delta x}f(x)dx=f(\xi)$

又当$\Delta x\to 0$时, 有$\Delta x\neq 0$, 则有 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)$

又当$\Delta x\to 0$时, $x+\Delta x\to x$, $f(x)$在区间I上连续

则有 $\Delta x\to 0$时, $\xi\to x$, 即 $\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$

于是有 $F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)$

即如果函数$f(x)$在区间I上连续, 则存在可导的原函数$F(x)$使得 $\forall x\in I$ $F'(x)=f(x)$

Calculus - P47

如果函数$f(x)$在区间I上有原函数，即存在函数$F(x)$使得对任意$x\in I$，有$F'(x)=f(x)$

则对于任意常数C，有$[F(x)+C]' = F'(x)+0 = f(x)$

即函数$F(x)+C$也是$f(x)$在区间I上的原函数

也就是说，如果$f(x)$在区间I上有一个原函数，则$f(x)$在区间I上有无[redacted]限多个原函数

如果函数$f(x)$在区间I有原函数，则取$F(x)$与$G(x)$[redacted]为两个不同的原函数

则对任意$x\in I$，有$F'(x)=f(x)$且$G'(x)=f(x)$

取辅助函数$\varphi(x)=F(x)-G(x)$，则$\varphi(x)$在区间I上可导

$\varphi'(x) = [F'(x)-G'(x)]' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$.

由于对任意$x\in I$，$\varphi'(x)=0$，则可知$\varphi(x)$在区间I上取一个常量C

则有$F(x)-G(x)=C$，于是可知对于任意两个$f(x)$在区间I上的原函数

其间只差一个常量，即[redacted]$f(x)$的原函数除常量外的部分相同

不定积分 (antiderivative)，对于函数$f(x)$，称在区间I上带有任意常数项的原函数称为$f(x)$(或$f(x)dx$)的不定积分

记作$\int f(x)dx$，称$\int$为积分符号(integral symbol)

称$f(x)$为被积函数(integrand)，$f(x)dx$为被积表达式，x为积分变量(variable of integration)

已知函数$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数，则$F(x)+C$即$f(x)$的不定积分

即有$\int f(x)dx = F(x)+C$，其中C为任意常数项

如对于$f(x)=\frac{1}{x}$，求不定积分$\int \frac{1}{x}dx$

当$x\in(0,+\infty)$时，有$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以有$F(x)=\ln x$是$f(x)$在$(0,+\infty)$上的一个原函数

当$x\in(-\infty,0)$时，有$(\ln(-x))'=\frac{1}{x}$，所以有$G(x)=\ln(-x)$是$f(x)$在$(-\infty,0)$上的一个原函数

又$F(x)=\ln x$ [redacted] $(x>0)$和$G(x)=\ln(-x)$ $(x<0)$可以合并为$F(x)=\ln|x|$ $(x\neq 0)$

于是有$F(x)=\ln|x|$是$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的一个原函数

即有$\int\frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$，其中C为常数项

积分曲线 对于函数$f(x)$在区间I上有原函数$F(x)$，则称$F(x)$的图形为$f(x)$的积分曲线

又任何函数$f(x)$的原函数$G(x)$都与$F(x)$相差一个常量

则函数$f(x)$的任何积分曲线都可以从$F(x)$的图形沿y轴方向平移一个常量得到

注意不定积分与微分[redacted]的关系. 已知$\int f(x)dx = F(x)+C$为$f(x)$的一个原函数，也是$F'(x)$的原函数

则有$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x)$，或$d[\int f(x)dx] = f(x)dx$

$\int F'(x)dx = F(x)+C$，或$\int dF(x) = F(x)+C$

于是微分运算(记号d)与不定积分运算(记号$\int$)是互逆的，连用时或者抵消，或者抵消后相差一个常数

Calculus - P48

基本积分表

$\int dx = x + C$，其中C为常数项， $\int k\,dx = kx + C$，其中k是常数

$\int x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C \ (\mu \neq 1)$， $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$，

$\int e^{x} dx = e^{x} + C$， $\int a^{x} dx = \frac{1}{\ln a} a^{x} + C$，其中$a>0$且$a\neq 1$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$， $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$， $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$， $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$， $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

对于函数$f(x)$和$g(x)$都存在原函数，$F(x)$和$G(x)$

则有 $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

证明过程有，取辅助函数 $\varphi(x) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

则 $\varphi'(x) = [\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx]' = [\int f(x)\,dx]' \pm [\int g(x)\,dx]'$

$= F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

即$\varphi(x)$是函数$f(x) \pm g(x)$的一个原函数

即 $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

对于函数$f(x)$存在原函数$F(x)$，且k为非零常数

则有 $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

证明过程有，对等式右侧取导数，

则有 $[k \int f(x)\,dx]' = k[\int f(x)\,dx]' = k F'(x)$

$= k f(x)$

于是有 $k \int f(x)\,dx = \int k f(x)\,dx$

如果是基本积分表中没有的类型，可以考虑先利用三角函数恒等式变形

如 $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{4}(\sin x)^2} dx = 4 \int \csc^2 x\, dx = -4\cot x + C$

$\int \sin^2\frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\,dx$

$= \frac{1}{2}[\int dx - \int \cos x\, dx] = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$

$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \int \sec^2 x\, dx - \int dx = \tan x - x + C$

如果是多项分式，可以考虑通过多项式除法，化成基本积分表中的类型，并逐项积分

如 $\int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2+1} dx = \int (2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2+1})\,dx$

$= \int 2x^2\,dx - \int dx + \int \frac{4}{x^2+1} dx$

$= \frac{2}{3}x^3 - x + \arctan x + C$

Calculus - P49

换元积分法 (integration by substitution)，将复合函数的微分法反过来用于求解不定积分

第一类换元法　对于函数 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，即有 $F'(u)=f(u)$，$\int f(u)du = F(u)+C$

如果存在中间变量 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 有微分，$du=\varphi'(x)dx$

则有 $dF[\varphi(x)] = f(u)\,d\varphi(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

于是有 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]+C = \int f(u)du\big|_{u=\varphi(x)}$

定理　对于存在原函数的函数 $f(u)$，且 $u=\varphi(x)$ 可导，

则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du\big|_{u=\varphi(x)}$

其应用方式为，对于所求积分 $\int g(x)dx$，如果函数 $g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$，其中 $f(u)$ 具有原函数

则 $\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du\big|_{u=\varphi(x)}$

如 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx \ (a\neq 0) = \int \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+(x/a)^2}dx = \frac{1}{a}\int\frac{1}{1+(x/a)^2}d\frac{x}{a}$

$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \ (a>0) = \int\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}d\frac{x}{a}$

$=\arcsin\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx \ (a\neq 0) = \int\frac{1}{2a}\cdot\frac{2a}{(x-a)(x+a)}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$

$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

对于形如 $\sin^{2k+1}x\cos^n x$ 或 $\sin^n x\cos^{2k+1}x$ $(k\in N)$ 型函数的积分

总可依次作变换 $u=\cos x$ 或 $u=\sin x$ 求解不定积分

如 $\int\sin^2x\cos^5x\,dx = \int\sin^2x\cos^4x\cos x\,dx = \int\sin^2x\cos^4x\,d\sin x$

$=\int\sin^2x(1-\sin^2x)^2\,d\sin x$

$=\int\sin^2x-2\sin^4x+\sin^6x\,d\sin x$

$=\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{2}{5}\sin^5x+\frac{1}{7}\sin^7x+C$

对于形如 $\sin^{2k}x\cos^{2l}x$ $(k,l\in N)$ 型函数的积分

总可利用三角函数恒等式 $\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x)$ 和 $\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos2x)$ 化成 $\cos2x$ 的多项式

如 $\int\sin^2x\cos^4x\,dx = \int\frac{1}{8}(1-\cos2x)(1+\cos2x)^2dx = \int\frac{1}{8}(1+\cos2x-\cos^22x-\cos^32x)dx$

$=\frac{1}{8}\left[\int\cos2x(1-\cos^22x)dx+\int(1-\cos^22x)dx\right]$

$=\frac{1}{8}\left[\int\sin^22x\cdot\frac{1}{2}d(\sin2x)+\int\frac{1}{2}\cdot(1+1-2\cos^22x)dx\right]$

$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\int\sin^22x\,d(\sin2x)+\frac{1}{2}\int(1-\cos4x)dx\right]$

$=\frac{1}{48}\sin^32x+\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin4x+C$

Calculus - P50

$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-1}{\cos x}d(\cos x) = -\ln|\cos x| + C$

$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin x}d(\sin x) = \ln|\sin x| + C$

对于形如 $\tan^n x\sec^{2k}x$ 或 $\tan^{2k-1}x\sec^n x$ $(n,k\in Z^+)$ 型函数的积分

可依次变换作 $u=\tan x$ 或 $u=\sec x$ 求解不定积分

如 $\int \sec^6 x\,dx = \int (\sec^2 x)^2\sec^2 x\,dx = \int (1+\tan^2 x)^2 d(\tan x)$

$= \int (1+2\tan^2 x+\tan^4 x)\,d(\tan x)$

$= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$

如 $\int \tan^5 x\sec^3 x\,dx = \int \tan^4 x\sec^2 x\tan x\sec x\,dx$

$= \int (\sec^2 x-1)^2\sec^2 x\,d(\sec x)$

$= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x)\,d(\sec x)$

$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

注意，类似地可以推广到形如 $\cot^n x\csc^{2k}x$ 或 $\cot^{2k-1}x\csc^n x$ $(n,k\in Z^+)$ 型函数积分

可依次变换作 $u=\cot x$ 或 $u=\csc x$，并利用 $\cot^2 x+1=\csc^2 x$ 求解不定积分

$\int \csc x\,dx = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})$

$= \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\,d(\frac{x}{2}) = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d(\tan\frac{x}{2})$

$= \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$

又有 $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$

于是有 $\int \csc x\,dx = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$

$\int \sec x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}dx$，注意到无法像 $\int \csc x\,dx$ 简单地换元

但有 $\sec x = \csc(x+\frac{\pi}{2})$, $d(x+\frac{\pi}{2}) = dx$

于是有 $\int \sec x\,dx = \int \csc(x+\frac{\pi}{2})\,d(x+\frac{\pi}{2})$

$= \ln|\csc(x+\frac{\pi}{2}) - \cot(x+\frac{\pi}{2})| + C$

$= \ln|\sec x + \tan x| + C$

可以利用三角函数积化和差公式，将乘积型的三角函数积分转换为和差型的三角函数积分

如 $\int \cos 3x\cos 2x\,dx$ 根据 $\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$

于是有 $\int \cos 3x\cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}[\cos(3x+2x)+\cos(3x-2x)]dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos 5x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx$

$= \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C$

Calculus - P51

第二类换元法 相比第一类换元法，是利用 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 可导，对[redacted]于形如 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的积分函数

将不定积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$，转换为 $\int f(u)du\big|_{u=\varphi(x)}$

第二类换元法则是选择一个具有反函数的函数 $x=\psi(t)$，且[redacted] $\psi(t)$ 可导，且 $\psi'(t)\neq 0$

将不定积分 $\int f(x)dx$ 转换为 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\big|_{t=\psi^{-1}(x)}$

定理 对于具有反函数的可导函数 $x=\psi(t)$，且有导数 $\psi'(t)\neq 0$，

如果函数 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，又有[redacted] $\psi^{-1}(x)$ 为 $x=\psi(t)$ 的反函数

则有 $\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\big|_{t=\psi^{-1}(x)}$

证明过程有，令[redacted] $\Phi(t)$ 为 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 的原函数，并令 $F(x)=\Phi[\psi^{-1}(x)]$

则 $F'(x)=\frac{d\Phi(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)\cdot[\psi^{-1}(x)]'$，又 $[\psi^{-1}(x)]'=\frac{1}{\psi(t)}$

$= f[\psi(t)]\cdot\frac{\psi'(x)}{\psi'(x)} = f(x)$

于是可知 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数

即有 $\int f(x)dx = F(x)+C = \Phi[\psi^{-1}(x)]+C = \Phi(t)+C$

$= \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\big|_{t=\psi^{-1}(x)}$

$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$ [redacted] 可以利用三角函数公式 $1-\sin^2 t=\cos^2 t$

令 $x=a\sin t$，又 $-a\leq x\leq a$ 且 $(a\sin t)'\neq 0$，则有 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

则有 $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a\sin^2 t}=a\cos t$，$(a\sin t)'=a\cos t$，即 $dx=a\cos t\,dt$

于是有 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos t\cdot a\cos t\,dt = a^2\int\cos^2 t\,dt$

$=a^2\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}[\int dt+\int\cos 2t\,dt]$

$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C = \frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C$

又 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\cos t=\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，$\sin t=\frac{x}{a}$

于是有 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+C$

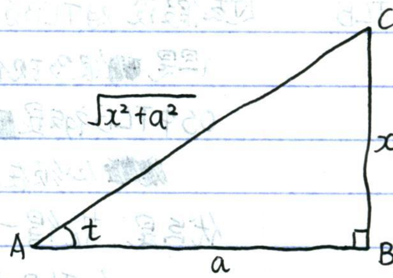
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$ 可以利用三角函数公式 $\tan^2 t+1=\sec^2 t$

令 $x=$[redacted] $a\tan t$，[redacted]有 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

则有 $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}=a\sec t$，$dx=a\sec^2 t\,dt$

于是有 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t\,dt=\int\sec t\,dt$

$=\ln|\sec t+\tan t|+C$



又 $\tan t=\frac{x}{a}$，则可作辅助直角三角形 ABC，$\angle BAC=t$，$AB=a$，$BC=x$

于是有 $\sec t=\frac{1}{\cos t}=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$，且有对任意 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，$\sec t+\tan t>0$

则 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln|\sec t+\tan t|+C=\ln(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a})+C$

$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln a+C=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C_1$，其中 $C_1=C-\ln a$

Calculus - P52

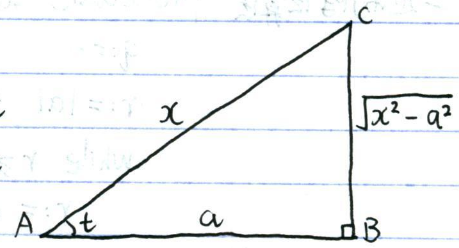
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$ 可以利用三角公式 [redacted] $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$

令 $x = a\sec t$，则有 $0<t<\frac{\pi}{2}$，则有 $x>a$

则有 $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\tan t$，$dx = a\sec t\tan t\,dt$

于是有 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{1}{a\tan t}\cdot a\sec t\tan t\,dt = \int \sec t\,dt$

$= \ln(\sec t+\tan t)+C$



又 $\sec t = \frac{x}{a}$，则可作辅助直角三角形ABC，有$\angle BAC=t$，则$BC=\sqrt{x^2-a^2}$，$AB=a$

于是 $\tan t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，则有 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(\sec t+\tan t)+C = \ln(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a})+C$

$= \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\ln a+C = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1$，其中$C_1=C-\ln a$

又当 $x<-a$ 时，有 $\frac{\pi}{2}<t<\pi$，再取 $u=-x$，于是有 $u>a$，$du=-dx$

即 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = -\int\frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}du =$ [redacted] $-\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+C$

$= -\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})+C = \ln\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}+C$

$= \ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{-[(\sqrt{x^2-a^2})^2-x^2]}+C = \ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C$

$= \ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})-2\ln a+C = \ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C_1$，其中$C_1=C-2\ln a$

[redacted] 于是可以合并 $x>a$ 与 $x<-a$ 的情形，即 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

对于形如 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 的被积函数，还可以利用双曲函数 $ch^2t - sh^2t = 1$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$ 令 $x = a\,sh\,t$，则有 $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2sh^2t+a^2} = a\,ch\,t$，且 $dx = a\,ch\,t\,dt$

于是有 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int\frac{1}{a\,ch\,t}\cdot a\,ch\,t\,dt = \int dt = t+C$

又 $t = arch\frac{x}{a} = \ln(\frac{x}{a}+\sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}) = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln a$

则 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = t+C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln a+C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C_1$，其中 $C_1=C-\ln a$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$ 首先考虑 $x>a$ 的情形，令 $x=a\,ch\,t$，

则有 $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2ch^2t-a^2}=a\,sh\,t$，且 $dx=a\,sh\,t\,dt$

于是有 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{1}{a\,sh\,t}\cdot a\,sh\,t\,dt=\int dt=t+C$

又 $t=$ [redacted] $arch\frac{x}{a}=\ln(\frac{x}{a}+\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1})=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\ln a$

则 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=t+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\ln a+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1$，其中 $C_1=C-\ln a$

又当 $x<-a$ 时，令 $x=-a\,ch\,t$，

则有 $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2ch^2t-a^2}=a\,sh\,t$，且 $dx=-a\,sh\,t\,dt$

于是有 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{1}{a\,sh\,t}\cdot(-a\,sh\,t)dt=-\int dt=-t+C$

又 $t=arch\frac{-x}{a}=\ln(-\frac{x}{a}+\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1})=\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})-\ln a$

则 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=-t+C=-\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})+\ln a+C=\ln\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}+C_1$ 其中$C_1=C+\ln a$

$=\ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{(-x)^2-(\sqrt{x^2-a^2})^2}+C_1=\ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C_1=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})-2\ln a+C_1$

$=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C_2$，其中$C_2=C_1-2\ln a=C-\ln a$

于是可以合并 $x>a$ 与 $x<-a$ 的情形，即 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

Calculus - P53

$\int shx\,dx = \int \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx = \int \frac{e^x}{2}dx + \int \frac{-e^{-x}}{2}dx = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} + C = chx + C$

$\int chx\,dx = \int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx = \int \frac{e^x}{2}dx + \int \frac{e^{-x}}{2}dx = \frac{e^x}{2} + \frac{-e^{-x}}{2} + C = shx + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ 可利用三角恒等式 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

令 $x = a\sin t$，则 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$，$-a < x < a$

则有 $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\cos t$，且 $dx = a\cos t\,dt$

于是有 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{a\cos t} a\cos t\,dt = \int dt = t + C$

又 $t = \arcsin\frac{x}{a}$，于是有 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$

分部积分法 (partial intergration)，利用函数乘积的求导法则，推导得到的积分技巧

对于函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$，u 和 v 都有连续导数

则有 $(uv)' = u'v + uv'$，即 $uv' = (uv)' - u'v$

同时对等式两边求不定积分，则有 $\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx$

于是有分部积分公式，用于当形如 $\int uv'dx$ 的积分困难 而 $\int u'vdx$ 相对简单时

可简记为 $\int udv = uv - \int vdu$

选择 u 与 dv 为应用分部积分法的关键，通常考虑以下两点

(1) $v=v(x)$ 要容易求得微分与积分

(2) $\int vdu$ 比 $\int udv$ 更容易求解不定积分

对于形如幂函数 (x^a) 与正(余)弦函数或指数函数乘积的被积函数，

当幂函数指数为正整数时，可设 u 为幂函数，则每次使用分部积分法可使幂指数降低 1

$\int xe^x dx$ 令 $u = x$，$dv = e^x dx$，则有 $du = dx$，$v = e^x$

于是有 $\int xe^x dx = \int x\,d(e^x) = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C$

$\int x\cos x\,dx$ 令 $u = x$，$dv = \cos x\,dx$，则有 $du = dx$，$v = \sin x$

于是有 $\int x\cos x\,dx = \int x\,d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

$\int x^2 e^x dx$ 令 $u = x^2$，$dv = e^x dx$，则有 $du = dx$，$v = e^x$

于是有 $\int x^2e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2e^x - \int e^x d(x^2)$

$= x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2\int x\,d(e^x)$

$= x^2e^x - 2[xe^x - \int e^x dx] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

$= (x^2-2x+2)e^x + C$

Calcalus - P54

对于形如幂函数和对数函数或反三角函数的被积函数

可以令u是对数函数或反三角函数，并利用分部积分法

如 $\int x\ln x\,dx = \int \ln x\, d(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{x^2}{2}\, d(\ln x)$

$= \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

$\int \arccos x\,dx = \int \arccos x\, d(x) = x\cdot\arccos x - \int x\, d(\arccos x)$

$= x\cdot\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\cdot\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d(1-x^2)$

$= x\cdot\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

$\int x\arctan x\,dx = \int \frac{1}{2}\arctan x\, d(x^2) = \frac{1}{2}[x^2\arctan x - \int x^2\, d(\arctan x)]$

$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$

$= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \frac{1}{2}x + C$

对于某些被积函数，在使用分部积分法的过程中，会出现与原积分相同的积分在等号右侧的情形

如 $\int e^x \sin x\,dx = \int \sin x\, d(e^x) = \sin x\cdot e^x - \int e^x\, d(\sin x) = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$

$= e^x\sin x$ [redacted] $- \int \cos x\, d(e^x) = e^x \sin x - [e^x\cos x - \int e^x\, d(\cos x)]$

$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx$

于是有 $\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x\, d(\tan x) = \sec x\tan x - \int \tan x\, d(\sec x)$

$= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\,dx = \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx$

$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$

于是有 $\int\sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \int \sec x\,dx) = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

对于某些被积函数，积分过程中需要兼用换元法和分部积分法

$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ [redacted] 令 $t = \sqrt{x}$，于是有 [redacted] $x = t^2$，即 $dx = 2t\,dt$

即 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\cdot 2t\,dt$

$= 2\int te^t\,dt$

$= 2(t-1)e^t + C$

将 $t=\sqrt{x}$ 代入原式

则有 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$

Calculus - P55

有理函数 (rational function) 指形如 $f(x)=\dfrac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$，其中 $a_m,\cdots,a_0,b_n,\cdots,b_0\in Z$，$m,n\in Z^+$，$a_m,b_n\neq 0$

又称有理分式，通常假定 $P_m(x)$ 与 $Q_n(x)$ 之间已经没有公因式

当分子多项式 $P_m(x)$ 的次数 m 小于分母多项式 $Q_n(x)$ 的次数 n 时，称为真分式

而假分式总是可以化成一个多项式与一个真分式之和，

即如果 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是假分式，则存在多项式 $P_0(x)$ 和真分式 $\dfrac{P'(x)}{Q'(x)}$，有 $f(x)=P_0(x)+\dfrac{P'(x)}{Q'(x)}$

又对于真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，如果分母 $Q(x)$ 可以分解为 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 的乘积

即存在多项式 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 使得 $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$

则存在多项式 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 使得 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$

部分分式分解 (partial fraction decomposition)，即将有理分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 分解为多项式和分母次数较低的真分式的形式

有理分式的部分分式分解需要满足两个条件：

各有理分式的分母为不可约多项式 (irreducible polynomial) 或其乘幂

各有理分式的分子多项式次数与分母多项式低，即为真分式

即分解式中只有三类函数，多项式 $P_0(x)$

真分式 $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^k}$，其中 $k\in Z^+$，$P_1(x)$ 为次数小于 k 的多项式

真分式 $\dfrac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$，其中 $p^2-4q<0$ 即 $x^2+px+q=0$ 无实根，$l\in Z^+$，$P_2(x)$ 为次数小于 $2l$ 的多项式

对于形如 $\dfrac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$ 的被积函数，可以对分母配方得到 $(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$，有 $q-\frac{p^2}{4}>0$

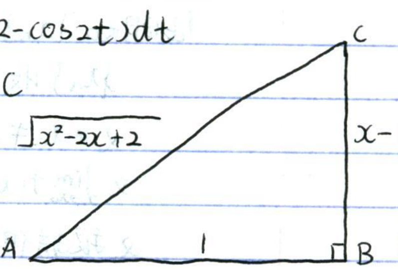
然后利用形如 $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx$ 的类似方法

如 $\int\dfrac{x^3}{(x^2-2x+2)^2}dx$，可知 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，则利用三角恒等式 $\tan^2t+1=\sec^2t$

令 $x-1=\tan t$，则 $(x-1)^2+1=\tan^2t+1=\sec^2t$，$dx=\sec^2t\,dt$

于是有
$$\int\frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int\frac{(\tan t+1)^3}{(\sec^2t)^2}\cdot\sec^2t\,dt$$
$$=\int\frac{\tan^3t+3\tan^2t+3\tan t+1}{(1/\cos t)^2}dt$$
$$=\int(\sin^3t\cos^{-1}t+3\sin^2t+3\sin t\cos t+\cos^2t)dt$$
$$=-\int[(1-\cos^2t)\cos^{-1}t+3\cos t]\,d(\cos t)+\int(3\sin^2t+\cos^2t)dt$$
$$=-\int(\cos^{-1}t+2\cos t)\,d(\cos t)+\int(2-\cos 2t)dt$$
$$=-\ln\cos t-\cos^2t+2t-\frac{1}{2}\sin 2t+C$$

又 $\tan t=x-1$，则作辅助直角三角形 ABC，



有 $\angle BAC=t$，$AB=1$，$BC=x-1$，$AC=\sqrt{x^2-2x+2}$

则有 $\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$，$\sin t=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

于是有
$$\int\frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2}dx=-\ln\cos t-\cos^2t+2t-\sin t\cos t+C$$
$$=-\ln\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\right)^2+2\arctan(x-1)-\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+2\arctan(x-1)-\frac{x}{x^2-2x+2}+C$$