Discrete Mathematics - P183

比安内梅公式证明，特别注意 对于两两独立的随机变量 X_1, X_2, X_3

X_1+X_2 与 X_3 独立是不一定成立的

证明过程有：令 X_1, X_2 是相互独立的概率为 $\frac{1}{2}$ 的伯努利试验

再令 $X_3 = (X_1+X_2) \bmod 2$，于是 X_3 的样本空间为 $\{0,1\}$

且 $Pr\{X_3=1\} = Pr\{X_3=0\} = \frac{1}{2}$

则对于 $i, j = 0, 1$，考虑 X_3 与 X_1 的独立性

有 $Pr\{X_3=i \wedge X_1=j\} = \frac{1}{4} = Pr\{X_3=i\} \cdot Pr\{X_1=j\}$

于是 X_3 与 X_1 是独立的，同理有 X_3 与 X_2 是独立的

即 X_1, X_2, X_3 是两两独立的

再考虑 X_1+X_2 与 X_3 的独立性

有 $Pr\{X_1+X_2=1 \wedge X_3=0\} = 0 \neq Pr\{X_1+X_2=1\} \cdot Pr\{X_3=0\}$

于是 X_1+X_2 与 X_3 不是独立的

于是可知，在比安内梅公式的证明过程中，对于假设当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 时成立

由于无法确保 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 与 X_{n+1} 相互独立

则无法分解 $V(X_1+X_2+\cdots+X_n+X_{n+1}) = V(X_1+X_2+\cdots+X_n) + V(X_{n+1})$

于是数学归纳法的证明是无效的

对于两两独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其中 $n \geq 2$

则对于任意 $1 \leq i < j \leq n$，X_i 与 X_j 是相互独立的

即有 $E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j)$

则 $V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = E[(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2] - [E(X_1+X_2+\cdots+X_n)]^2$

$= E(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2+2X_1X_2+\cdots+2X_{n-1}X_n) - [E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)]^2$

$= E(X_1^2)+E(X_2^2)+\cdots+E(X_n^2)+2E(X_1X_2)+\cdots+2E(X_{n-1}X_n)$

$\quad - E(X_1)^2 - E(X_2)^2 - \cdots - E(X_n)^2 - 2E(X_1)E(X_2) - \cdots - 2E(X_{n-1})E(X_n)$

$= (E(X_1^2)-E(X_1)^2) + (E(X_2^2)-E(X_2)^2) + \cdots + (E(X_n^2)-E(X_n)^2)$

$= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

条件期望 (conditional expectation)，对于样本空间 S 中的事件 A 和随机变量 X

记 $E(X|A)$ 为随机变量 X 给定事件 A 的条件期望

则有 $E(X|A) = \sum_{x \in X(S)} x \cdot Pr\{X=x|A\}$

$= [\sum_{x \in X(S)} x \cdot Pr\{X=x \wedge A\}] / Pr\{A\}$

$= [\sum_{x \in X(A)} x \cdot Pr\{X=x \wedge A\}] / Pr\{A\}$

Discrete Mathematics - P184

全期望定理(law of total expectation)，对于样本空间S和随机变量X

对于互斥事件集合$S_1, S_2, \cdots, S_n$，有$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n = S$

则有$E(X) = \sum_{j=1}^{n} E(X \mid S_j) Pr(S_j)$

证明过程有，$\sum_{j=1}^{n} E(X \mid S_j) Pr(S_j)$

$= \sum_{j=1}^{n} [\sum_{r \in X(S)} r \cdot Pr(X=r \mid S_j)] Pr(S_j)$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r \in X(S)} r \cdot [Pr(X=r \mid S_j) Pr(S_j)]$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r \in X(S)} r \cdot$ [redacted] $Pr(X=r \wedge S_j)$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r \in X(S)} r \cdot [Pr(S_j \mid X=r) Pr(X=r)]$

$=$ [redacted] $\sum_{r \in X(S)} r \cdot Pr(X=r) \cdot [\sum_{j=1}^{n} Pr(S_j \mid X=r)]$

$= \sum_{r \in X(S)} r \cdot Pr(X=r) \cdot Pr(\bigcup_{j=1}^{n} S_j \mid X=r)$

$= \sum_{r \in X(S)} r \cdot Pr(X=r) \cdot Pr(S \mid X=r)$

$= \sum_{r \in X(S)} r \cdot Pr(X=r) = E(X)$

极大可满足性问题(maximum [redacted] satisfiability problem)，对于给定复合命题[redacted]有n个逻辑变量

对于复合命题的合取范式(conjunctive normal form, CNF)

即表示为子句(clause)的合取(conjunction)，如$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

而子句为两个或更多逻辑变量或它们的非的析取式(disconjunction)

则考虑对逻辑变量赋真值，使得复合命题中尽可能多的子句为真

用概率方法提供由于变量赋值而可能为真的子句个数的一个下界

假设合取范式的子句恰为两个不同变量或它们的非的析取式

并将每个逻辑变量[redacted]等概率地赋值为真或假

[redacted]且在复合命题的合取范式中有D个子句，其中$D \in Z^+$

则令指示器变量 $I_j = \begin{cases} 1, & \text{当第}j\text{个子句为真} \\ 0, & \text{当第}j\text{个子句为假} \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, D$

于是有[redacted] $Pr(I_j) = 1 - (1/2)^2 = 3/4$

则对于复合命题，令随机变量X表示其中为真的子句个数

于是有$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_D$

即$E(X) = E(I_1 + I_2 + \cdots + I_D) = \sum_{j=1}^{D} E(I_j) = \frac{3}{4} D$

假设[redacted]存在某个复合命题，不存在一组变量赋值使得至少$3/4$的子句为真

即[redacted] 2^n种变量赋值中的任意一种S_i，有$X(S_i) <$ [redacted] $\frac{3}{4} D$

则其期望$E(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} X(S_i) < \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{3}{4} D = \frac{3}{4} D$

与$E(X) = \frac{3}{4} D$矛盾

于是可知对于每个合取范式的复合命题，存在一组变量赋值使得至少$\frac{3}{4}$的子句为真

Discrete Mathematics - P185

切比雪夫不等式 (Chebyshev's inequality)，对于样本空间 S 上概率函数为 p 的随机变量 X

对于正实数 r，有 $p(|X(s)-E(x)|\geq r)\leq V(x)/r^2$

即对于随机变量的值与其期望值之差

超过某个指定量的概率提供一个上界

证明过程有：令事件 A 是样本空间 S 的子集

且有 $A=\{s\in S \mid |X(s)-E(x)|\geq r\}$

于是有 $V(x)=\sum_{s\in S}(X(s)-E(x))^2p(s)$

$=\sum_{s\in A}(X(s)-E(x))^2p(s)+\sum_{s\notin A}(X(s)-E(x))^2p(s)$

注意有 $\sum_{s\notin A}(X(s)-E(X))^2p(s)\geq 0$

且 $\forall_{s\in A}\ |X(s)-E(x)|\geq r$

则 $V(X)=\sum_{s\in A}(X(s)-E(x))^2p(s)+\sum_{s\notin A}(X(s)-E(X))^2p(s)$

$\geq\sum_{s\in A}(X(s)-E(x))^2p(s)$

$\geq\sum_{s\in A}r^2p(s)$

$=r^2\sum_{s\in A}p(s)=r^2p(A)$

于是有 $p(|X(s)-E(x)|\geq r)=p(A)\leq V(x)/r^2$

考虑正实数 r 与随机变量 X 的标准差 σ 的关系，假定 $V(x)=\sigma^2>0$

取正实数 $0<\lambda\leq 1$，使得 $r=\frac{1}{\lambda}\sigma$

于是有 $p(|X(s)-E(x)|\geq\frac{\sigma}{\lambda})\leq V(x)/(\frac{\sigma}{\lambda})^2=\lambda^2$

即对于随机变量 X 和给定的正概率 λ^2

提供一个范围，使得超出范围的概率不大于 λ^2

固定元素 (fixed element)，对于 n 个不同元素的随机排列进行排序

称排序后仍旧在原来位置的元素为固定元素

取随机变量 X 为随机排列中固定元素的个数，

则考虑 $E(x)$ 与 $V(x)$

令指示器变量 $I_j=\begin{cases}1, & \text{当第 } j \text{ 小的元素排在第 } j \text{ 个位置上}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$j=1,2,\cdots,n$

又随机排列中，每个元素出现在某个位置的概率均为 $\frac{1}{n}$

于是 $E(X)=E(I_1+I_2+\cdots+I_n)=E(I_1)+E(I_2)+\cdots+E(I_n)$

$=Pr(I_1)+Pr(I_2)+\cdots+Pr(I_n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=1$

又指示器变量 I_j 的方差 $V(I_j)=\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})=\frac{n-1}{n^2}$

于是 $V(x)=V(I_1+I_2+\cdots+I_n)=V(I_1)+V(I_2)+\cdots+V(I_n)$

$=\sum_{j=1}^{n}\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}$

Discrete Mathematics - P186

递推关系 (recurrence relation)，对于一个序列，递推关系是一个公式

把序列中除了部分初始项外的项表示为序列在其之前一个或多个项的函数

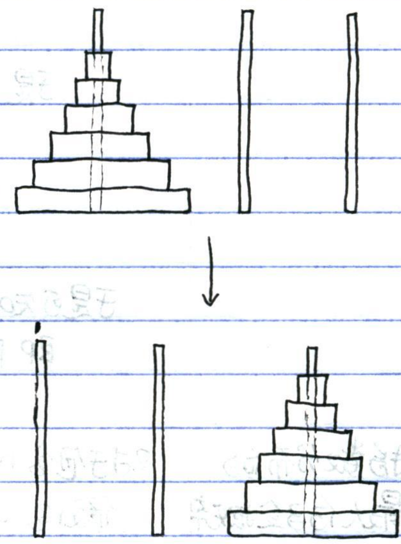
指定若干初始项以及由前项确定后项的规则

如果一个序列满足递推关系，则称序列为递推关系的解

满足递推关系的序列在递推关系生效前存在的项

称为递推关系的初始条件(initial condition for recurrence relation)

汉诺塔 (the tower of Hanoi)，给定三根柱子



有大小不同的若干圆盘，以从大到小的顺序放在第一根柱子

以如下规则移动圆盘到不同的柱子

每次只能移动一个圆盘

被移动的圆盘上不能存在其他圆盘

圆盘可以移动到另外两根柱子的任意一根

圆盘不可以放置在更小的圆盘之上

目标是将所有的圆盘从第一根柱子移动到第三根柱子

并且保持从大到小的顺序，最大的盘子在底部

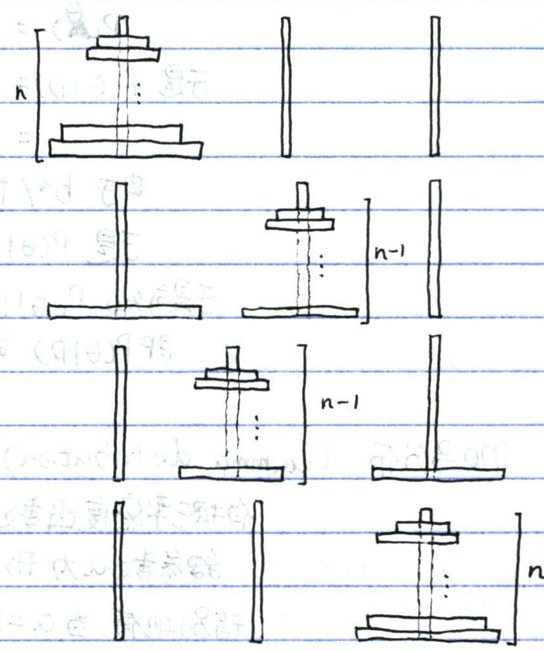
令 H_n 表示解 n 个盘子的汉诺塔问题所需的最小移动次数

则考虑序列 $\{H_n\}$ 是否为递推关系的解

当 $n=1$ 时，将一个盘子从第一根柱子移动到第三根柱子只需一次移动

即 $H_1=1$

当 $n>1$ 时，可用 H_{n-1} 次移动将上边的 $n-1$ 个盘子



从第一根柱子移动到第二根柱子

再用 1 次移动将最大的盘子移动到第三根柱子

最后用 H_{n-1} 次移动将另外 $n-1$ 个盘子

从第二根柱子移动到第三根柱子

于是有

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1}+1 \\ &= 2^2H_{n-2}+2+1 \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1}H_1+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1 \\ &= 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1 \\ &= 2^n-1 \end{aligned}$$

于是序列 $\{H_n\}$ 是递推关系 $H_1=1$，$H_n=2H_{n-1}+1$ 的解

序列 $\{H_n\}$ 的显式公式为 $H_n=2^n-1$，$n\in Z^+$

Discrete Mathematics - P187

位串

对于不含2个连续0的n位二进制位串个数，考虑初始关系和递推关系

令 a_n 表示不含2个连续0的n位二进制位串个数，其中 $n \in N$

注意到对于 a_0，有位串为 $\{\lambda\}$，即 $a_0 = 1$

对于 a_1，有位串为 $\{0, 1\}$，即 $a_1 = 2$

考虑 $n \geq 2$ 时，考虑位串的最后一位

当位串以1结尾时，则前 $n-1$ 位符合 a_{n-1} 的条件

不含2个连续0的n-1位二进制位串	1

于是这样的位串有 a_{n-1} 个

当位串以0结尾时，由于不含2个连续0，则第 $n-1$ 位必定是1

不含2个连续0的n-2位二进制位串	1	0

于是这样的位串有 a_{n-2} 个

于是可知有递推关系 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

又 $a_0 = 1 = f_2$，$a_1 = 2 = f_3$

于是可知 a_n 等于 f_{n+2}，即第 $n+2$ 个斐波那契数

对于包含01的n位二进制位串个数，考虑初始关系和递推关系

令 a_n 表示包含01的n位二进制位串个数，其中 $n \in N$

b_n 表示不包含01的n位二进制位串个数，且有 $a_n + b_n = 2^n$

注意到对于 b_0，有位串 $\{\lambda\}$，即 $b_0 = 1$，$a_0 = 2^0 - b_0 = 0$

对于 b_1，有位串 $\{0, 1\}$，即 $b_1 = 2$，$a_1 = 2^1 - b_1 = 0$

注意对于n位二进制位串，如果不包含01

则位串可以表示为 $\{1^k 0^{n-k} \mid 0 \leq k \leq n\}$

$$\underbrace{11\cdots1}_{k个}\ \underbrace{00\cdots0}_{n-k个}$$

于是有 $b_n = n+1$

则当 $n \geq 2$ 时，b_n 有递推关系 $b_n = b_{n-1} + 1$

又 $a_n + b_n = 2^n$

于是有 $(2^n - a_n) = (2^{n-1} - a_{n-1}) + 1$

则有 $a_n = 2^{n-1} + a_{n-1} - 1$

则可知包含01的n位二进制位串个数满足递推关系

初始条件：$a_0 = 0$，$a_1 = 0$

递推关系：$a_n = 2^{n-1} + a_{n-1} - 1$，$n \geq 2$

Discrete Mathematics - P188

位串

对于n位三进制位串，其中$n \in N$，考虑不含2个连续的0或2个连续的1的位串个数

令a_n表示不包含2个连续的0或2个连续的1的n位三进制位串个数

则有当$n=0$时，有位串$\{\lambda\}$，于是$a_0=1$

当$n=1$时，有位串$\{0,1,2\}$，于是$a_1=3$

考虑$n\geq 2$时，对于任意的在a_{n-1}中的n-1位位串s

考虑位串s的最后一位分别取0，1，2的情形

当s的最后一位是0，1时

可以在位串后添加1，2/0，2以形成合法的n位位串

不含2个连续的0或2个连续的1的n-1位位串	0	1/2
不含2个连续的0或2个连续的1的n-1位位串	1	0/2

当s的最后一位是2时，在位串后添加0，1以形成合法的n位位串

于是合计有$2a_{n-1}$种合法的n位位串

但是生成的n位位串中缺少以22结尾的合法位串

而此类型的合法位串可以由任意n-2位位串之后添加22得到

于是有 $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$，$n \geq 2$

令b_n表示包含2个连续的0或2个连续的1的n位三进制位串个数

于是有 $a_n + b_n = 3^n$，即有 $b_0 = 0$，$b_1 = 0$

且有 $(3^n - b_n) = 2(3^{n-1} - b_{n-1}) + (3^{n-2} - b_{n-2})$

于是有 $b_n = 2\cdot 3^{n-2} + 2b_{n-1} + b_{n-2}$，$n \geq 2$

对于n位三进制位串，其中$n \in N$，考虑不含连续相同字符的位串个数

令a_n表示不含连续相同字符的n位三进制位串个数

则有当$n=0$时，有位串$\{\lambda\}$，于是$a_0=1$

当$n=1$时，有位串$\{0,1,2\}$，于是$a_1=3$

考虑$n\geq 2$时，对于任意在a_{n-1}中的n-1位位串s，考虑其最后一位

不含连续相同字符的n-1位位串	0	1/2
	1	0/2
	2	0/1

于是有 $a_n = 2a_{n-1}$，$n \geq 2$

令b_n表示包含连续相同字符的n位三进制位串个数

于是有 $a_n + b_n = 3^n$，即有 $b_0 = 0$，$b_1 = 0$

且有 $(3^n - b_n) = 2(3^{n-1} - b_{n-1})$

于是有 $b_n = 3^{n-1} + 2b_{n-1}$，$n \geq 2$

Discrete Mathematics - P189

对于从m个元素集合到n个元素集合的映上函数，令 $S(m,n)$ 为映上函数的个数

其中 $m \geq n \geq 1$，则有初始条件 $S(m,1)=1$

并有递推关系 $S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S(m,k)$，$m \geq n > 1$

证明过程有，当 $n=1$ 时，则对于任意 $m \geq n$，令集合 $|X|=m$，$|Y|=n$

可知对于任意 $x \in X$，有且仅有一个元素 $y \in Y$ 指派给 x

于是对于任意 $m \geq 1$，$n=1$，仅有一种指派方法

即 $S(m,1)=1$，$m \in N^+$

当 $n>1$ 时，考虑任意函数 $f: X \to Y$，

可知从m个元素的集合X到n个元素的集合Y的函数共有 n^m 个

于是需要从中剔除非映上函数以得到 $S(m,n)$

注意到如果函数 $f: X \to Y$ 不是映上函数

则其值域 $Y' \subset Y$，令 $|Y'| = k < n$

对于给定的 $1 \leq k < n$，注意到 $f: X \to Y$ 同时也是 $X \to Y'$ 的函数

且 $f: X \to Y'$ 是 X 到 Y' 的映上函数，则考虑这样的函数个数

可知对于给定的k个元素集合Y'，符合 $S(m,k)$ 的定义

又对于不同的Y'，函数没有重叠　而共有 $\binom{n}{k}$ 个不同的k个元素集合Y'，即共有 $\binom{n}{k} S(m,k)$ 个

于是对于所有的 $1 \leq k < n$，共有 $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S(m,k)$

于是有递推关系 $S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S(m,k)$，$m \geq n > 1$

矩阵乘法链　对于 $n+1$ 个矩阵相乘的运算 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_{n+1}$，共有n次乘法，$n \in N$

由于矩阵乘法服从结合律，考虑不同的乘法次序的方式数

令 C_n 表示 $n+1$ 个矩阵相乘 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_{n+1}$ 的乘法次序方式数

注意到当 $n=0$ 时，只有1个矩阵且进行0次乘法，即 M_1，

则有 $C_0 = 1$

当 $n=1$ 时，只有2个矩阵且进行1次乘法，即 $M_1 \times M_2$

则有 $C_1 = 1$

当 $n>1$ 时，考虑最后一次乘法的位置，即最后一个乘法是第k个乘法运算

$$\underbrace{(M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k)}_{k-1\text{次乘法}} \underset{\text{第}k\text{个}}{\times} \underbrace{(M_{k+1} \times M_{k+2} \times \cdots \times M_{n+1})}_{n-k\text{次乘法}}$$

且可知前一个括号满足 C_{k-1}，后一个括号满足 C_{n-k}

于是对于给定的 $1 \leq k \leq n$，有 $C_{k-1} C_{n-k}$ 种不同次序

则总共有 $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0$

$= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$，$n \geq 2$

Discrete Mathematics - P190

卡塔兰数 (Catalan number)，对于序列 $\{C_n\}$, $n\in N$ 满足递推关系

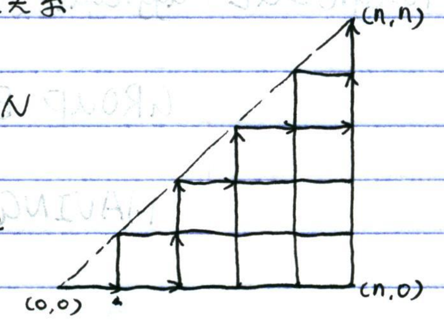
$$C_0=1,\ C_1=1,\ C_n=\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k},\ n>1$$

称序列 $\{C_n\}$ 为卡塔兰数，且有 $C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}$, $n\in N$

证明过程有，卡塔兰数 C_n 可描述为

沿着 $n\times n$ 的直角三角形，从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的不同路径数

只能向右或向上移动



考虑在完整的 $n\times n$ 正方形中从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的路径

可知符合卡塔兰数的路径为合法路径

在 $n\times n$ 正方形中始终在对角线的下方

则考虑不符合卡塔兰数的路径

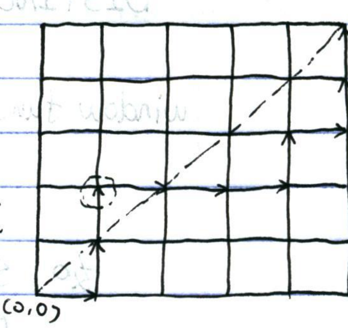
注意到这些路径至少有一次向上跨越对角线

对于任意一条不合法的路径，考虑其第一次跨越对角线

注意到这必定是第 $2m+1$ 步，且 $0\le m<n$

且之前有 m 步向右和 $m+1$ 步向上

之后有 $n-m$ 步向右和 $n-m-1$ 步向上



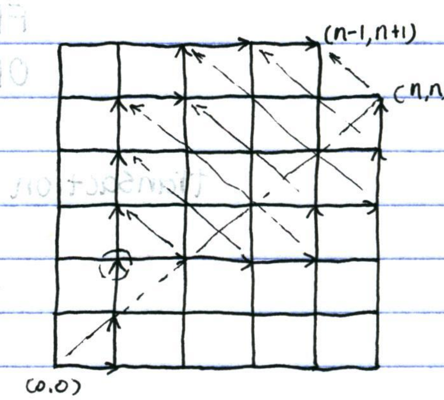
则作如下变换，将所有向右变为向上，向上变为向右

变换后合计有 $n-1$ 步向右和 $n+1$ 步向上

此时终点变为 $(n-1,n+1)$

可知对任意一条非法路径，均可指派唯一一条

从 $(0,0)$ 到 $(n-1,n+1)$ 的路径



再考虑从 $(0,0)$ 到 $(n-1,n+1)$ 的路径

可知对任一一条从 $(0,0)$ 到 $(n-1,n+1)$ 的路径

至少有一次接触虚线 $(0,1)-(n-1,n)$ 上的点，

则对任一一条路径考虑第一次接触虚线

注意到必定为第 $2m+1$ 步，且 $0\le m<n$

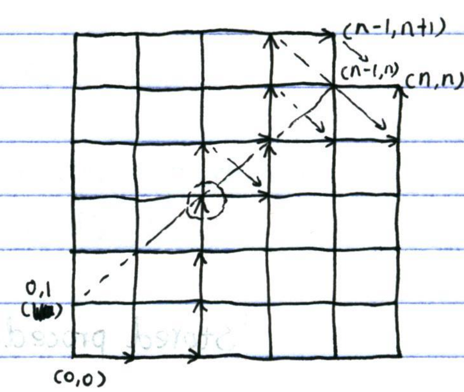
且之前有 m 步向右和 $m+1$ 步向上

之后有 $n-1-m$ 步向右和 $n-m$ 步向上

则作变换将所有的向右变为向上，向上变为向右

变换后合计有 n 步向右和 n 步向上

且必定跨越对角线 $(0,0)-(n,n)$



于是可知对任一一条从 $(0,0)$ 到 $(n-1,n+1)$ 路径，可指派唯一一条 $n\times n$ 中的非法路径

于是可知 $n\times n$ 中的非法路径与 $(0,0)$ 到 $(n-1,n+1)$ 的路径是一一对应的

则有 $C_n=\binom{n+n}{n}-\binom{(n-1)+(n+1)}{n+1}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}$, $n\in N$

Discrete

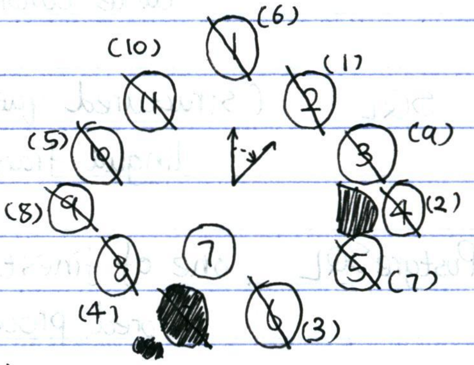
Mathematics - P191

约瑟夫问题(Josephus problem)，源于历史学家 Flavius Josephus 的记录

对于 n 个人站成一圈并指定某个人为第一个，然后顺序地编号其他人，$n \in N^+$

每一步，每第 2 个仍旧活着的人将被排除

直到剩下 1 个人为止，记存活的人编号为 $J(n)$



首先考虑 $J(n)$ 的初始条件和递推关系

当 $n=1$ 时，由于只有 1 个人，则直接结束

于是平凡地有 $J(n)=1$

当 $n>1$ 时，分别考虑 n 为奇数和偶数的情形

当 $n=2k$, $k \in N^+$ 时

当完成第一圈时，所有编号为偶数的人被排除

于是剩余 k 个人，并且从编号为 1 的人开始

可知在这 k 个人中存活的人是编号为 $J(k)$ 的人，且同时是 2k 个人中的存活

其相对位置 i 在 2k 个人中的绝对位置是 $2i-1$

于是有 $J(2k)=2J(k)-1$

当 $n=2k+1$, $k \in N^+$ 时

当完成第一圈后，所有编号为偶数的人与编号为 1 的人被排除

于是剩余 k 个人，并且从编号为 3 的人开始

可知在这 k 个人中存活的人是相对位置为 $J(k)$ 的人，且同时是 2k+1 个人中的存活

其相对位置 i 在 2k+1 个人中的绝对位置是 $2i+1$

于是有 $J(2k+1)=2J(k)+1$

于是可知 $J(n)$ 满足初始条件和递推关系

$J(1)=1$, $J(2n)=2J(n)-1$, $J(2n+1)=2J(n)+1$, $n \geq 1$

即 $0 \leq k < 2^m$

对于任意正整数 n，存在非负整数 m, k 使得 $2^m \leq n < 2^{m+1}$ 且 $n=2^m+k$

则有 $J(n)=2k+1$

基础步骤：当 $n=1$ 时，$m=0$, $k=0$，则有 $J(n)=1=2\times 0+1$

递归步骤：假设对于 $n \in N^+$，$P(1) \wedge \cdots \wedge P(2n-1)$ 为真，则考虑 $P(2n)$ 和 $P(2n+1)$

对于 n 有 $n=2^m+k$，其中非负整数 $0 \leq k < 2^m$

则对于 2n，有 $2n=2^{m+1}+2k$，且 $0 \leq 2k < 2^{m+1}$

对于 2n+1，有 $2n+1=2^{m+1}+2k+1$，且 $0 \leq 2k+1 < 2^{m+1}$

则有 $J(2n)=2J(n)-1 \overset{(IH)}{=} 2(2k+1)-1 = 2\times(2k)-1$

$J(2n+1)=2J(n)+1 \overset{(IH)}{=} 2(2k+1)+1$

即 $P(2n)$, $P(2n+1)$ 为真

于是根据数学归纳法：对于任意正整数 n，有 $J(n)=2k+1$

其中非负整数 m, k，使得 $n=2^m+k$，且 $0 \leq k < 2^m$

Discrete Mathematics - P192

雷夫难题(Reve's puzzle)，给定大小不同的若干圆盘，以及四根柱子

以从大到小的顺序放在第一根柱子上

遵循与汉诺塔相同的移动圆盘的规则

则考虑对于n个圆盘的最少移动次数

弗雷姆-斯图尔特算法(Frame-Stewart algorithm)，目前已证明是雷夫难题的最优解

对于给定输入为n个圆盘的雷夫难题

算法依赖于整数k的选择，其中 $1 \leq k \leq n$

当$n=1$时，直接将圆盘从第一根柱子移动到第四根柱子

则算法在一次移动后终止

当$n>1$时，递归地进行以下步骤：

对于选定的整数 $1 \leq k \leq n$

1. 使用全部4根柱子将最小的$n-k$个圆盘移动到第二根柱子
2. 使用除有$n-k$个圆盘的其他3根柱子
   利用汉诺塔的算法将k个最大的圆盘移动到第四根柱子
3. 使用全部4根柱子将最小的$n-k$个圆盘移动到第四根柱子

为了使用Frame-Stewart算法而获得最少的移动次数

令 t_k 表示第k个三角形数，即 $t_k = k(k+1)/2 = \sum_{i=1}^{k} i$，

则选择k为使得n不超过t_k的最小正整数

即 $k = \min\{k \in N^+ \mid t_{k-1} < n \leq t_k\}$

由于对于 $k \in N^+$，$k \leq t_k$ 且仅当$k=1$时取得等号

于是可知以此法选择的正整数k满足 $1 \leq k \leq n$

令$H(n)$表示n个圆盘的汉诺塔问题使用的最少移动次数

令$R(n)$表示n个圆盘的雷夫难题使用Frame-Stewart算法的最少移动次数

考虑$R(n)$满足的初始条件和递推关系

当$n=0$时，$R(0)$平凡地为0

当$n=1$时，Frame-Stewart算法使用1次移动，于是有$R(1)=1$

当$n>1$时，根据算法的递归定义有

$$R(n) = R(n-k) + H(k) + R(n-k)，其中 1 \leq k \leq n$$
$$= 2R(n-k) + 2^k - 1$$

于是$R(n)$满足递推关系，对于正整数 $1 \leq k \leq n$

$$R(0)=0,\ R(1)=1,\ R(n) = 2R(n-k) + 2^k - 1$$

Discrete Mathematics - P193

雷夫难题　令$R(n)$表示n个圆盘的雷夫难题使用Frame-Stewart算法的最少移动次数

则有 $R(n) - R(n-1) = 2^{k-1}$，$n \geq 1$

证明过程为，首先$R(n)$满足初始条件 $R(0) = 0$，$R(1) = 1$

以及递推关系 $R(n) = 2R(n-k) + 2^k - 1$

基础步骤：当$n=1$时，$R(1) - R(0) = 1$

此时$k=1$，则有 $R(1) - R(0) = 2^{1-1}$

当$n=2$时，$R(2) - R(1) = 3 - 1 = 2$

此时$k=2$，则有$R(2) - R(1) = 2^{2-1}$

递归步骤：假设对于$n>2$，$P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1)$为真，则考虑$P(n)$

令此时$R(n)$选择3正整数k，对应三角形数 $t_k = k(k+1)/2$

即有 $t_{k-1} < n \leq t_k$

当 $n = k(k-1)+1$，即 $n = t_{k-1}+1$ 时

于是 $n-1 \leq t_{k-1}$，则有$R(n-1)$选择$k-1$

$$R(n) - R(n-1) = [2R(n-k) + 2^k - 1] - [2R(n-1-k+1) + 2^{k-1} - 1] = 2^{k-1}$$

当 $t_{k-1}+1 < n \leq t_k$ 时，即 $t_{k-1} < n-1 \leq t_k$

于是$R(n-1)$也选择正整数k

$$R(n) - R(n-1) = [2R(n-k) + 2^k - 1] - [2R(n-1-k) + 2^k - 1] = 2[R(n-k) - R(n-k-1)]$$

由于$n>2$，此时有 $n > k \geq 2$

考虑此时$R(n-k)$和$R(n-k-1)$的选择

又 $k(k-1)/2 + 1 < n \leq k(k+1)/2$

$k(k-1)/2 - (k-1) < n-k \leq k(k+1)/2 - k$

$(k-1)(k-2)/2 < n-k \leq k(k-1)/2$

即有 $t_{k-2} < n-k \leq t_{k-1}$

于是$R(n-k)$选择正整数$k-1$，且有$n-k>0$

$$R(n) - R(n-1) = 2[R(n-k) - R(n-k-1)] \overset{(IH)}{=} 2 \cdot 2^{k-1-1} = 2^{k-1}$$

于是可知 $R(n) - R(n-1) = 2^{k-1}$，即$P(n)$为真

于是根据数学归纳法：对于n个圆盘的雷夫难题使用Frame-Stewart算法

有 $R(n) - R(n-1) = 2^{k-1}$，其中k是在$R(n)$中选择的正整数

Discrete Mathematics - P194

雷夫难题　令 $R(n)$ 表示 n 个圆盘的雷夫难题使用 Frame-Stewart 算法的最少移动次数

则有显式公式 $R(n)=\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{i-1}-(t_k-n)2^{k-1}$, $n\geq 1$

其中正整数 k 及对应的三角形数 t_k 满足 $t_{k-1}<n\leq t_k$

证明过程有：对于 $n=1$，取正整数 $k=1$，则有 $t_k=k(k+1)/2=1$

于是 $R(n)=1=1\cdot 2^{1-1}-(1-1)\cdot 2^{1-1}=1\cdot 2^{1-1}$

$=\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{i-1}-(t_k-n)\cdot 2^{k-1}$

对于 $n\geq 1$，有 $R(n)-R(n-1)=2^{k-1}$，其中 k 为 $R(n)$ 选择的正整数

$R(n)=R(n)-R(n-1)+R(n-1)-\cdots-R(1)+R(1)$

又 $R(0)$ 平凡地等于 0

则 $R(n)=[R(n)-R(n-1)]+[R(n-1)-R(n-2)]+\cdots+[R(1)-R(0)]$

$=2^{k-1}+\cdots+2^{1-1}$

则考虑对于 $i=1,2,\cdots,k$，等式中 2^{i-1} 的项数

注意到当 $t_{k-1}<n\leq t_k$ 时，$R(n)$ 选择 k

而 2^{i-1} 的项数取决于有多少个 $R(n)$ 选择了 i

对于 $j=1,2,\cdots,n$，且有 $t_{k-1}<n\leq t_k$

当 $j\leq t_{k-1}$ 时，令 l 为 $R(j)$ 选择的正整数

则对于 $1\leq l\leq k-1$，

有 $t_l-t_{l-1}=l$ 个 $R(j)$ 选择了 l，即有 l 项 2^{l-1}

当 $t_{k-1}<j\leq n$ 时，$R(j)$ 选择 k

则此时有 $n-t_{k-1}$ 项 2^{k-1}

于是有 $R(n)=\sum_{l=1}^{k-1} l\cdot 2^{l-1}+(n-t_{k-1})\cdot 2^{k-1}$

$=\sum_{l=1}^{k-1} l\cdot 2^{l-1}+k\cdot 2^{k-1}-(k+t_{k-1}-n)2^{k-1}$

$=\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{i-1}-(t_k-n)2^{k-1}$

考虑 Frame-Stewart 算法以移动次数衡量的复杂度

令 $S(k)=\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{i-1}$，其中 $k\in Z^+$

则 $S(k)=2S(k)-S(k)=\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{i}-\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{i-1}$

$=k\cdot 2^k+\sum_{j=2}^{k}(j-1)\cdot 2^{j-1}-\sum_{i=2}^{k} i\cdot 2^{i-1}-1\cdot 2^{1-1}$

$=k\cdot 2^k-\sum_{i=2}^{k} 2^{i-1}-1=k\cdot 2^k-\sum_{i=0}^{k-1} 2^{i}=(k-1)\cdot 2^k+1<k\cdot 2^k$

于是 $R(n)=\sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^{i-1}-(t_k-n)\cdot 2^{k-1}<k\cdot 2^k$

又 $t_{k-1}<n\leq t_k$，即 $k(k-1)/2<n$，其中 $n\geq 1$

于是 $(k-1)^2\leq k(k-1)<2n$，即 $k<\sqrt{2n}+1<2\sqrt{2n}$

则有 $R(n)<k\cdot 2^k<2\sqrt{2n}\cdot 2^{2\sqrt{2n}}$，即有 $R(n)\in O(\sqrt{n}\cdot 2^{\sqrt{2n}})$

Discrete Mathematics - P195

后向差分 (backward difference)，对于实数序列 $\{a_n\}$，有递归地定义，其中 $n \in N$

一阶差分 (first difference)：$\nabla a_n = a_n - a_{n-1}$，其中 $n \geq 1$

k+1阶差分 ((k+1)th difference)：$\nabla^{k+1} a_n = \nabla^k a_n - \nabla^k a_{n-1}$，其中 $n \geq k+1 \geq 1$

再特别地定义 $\nabla^0 a_n = a_n$

假设实数序列 $\{a_n\}$ 满足递推关系，考虑用 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n$ 表示递推关系 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

首先有 $\nabla a_n = a_n - a_{n-1}$，即有 $a_{n-1} = a_n - \nabla a_n$

$$\nabla^2 a_n = \nabla a_n - \nabla a_{n-1} = (a_n - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_{n-2})$$
$$= a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2(a_n - a_{n-1}) - a_n + a_{n-2}$$
$$= 2\nabla a_n - a_n + a_{n-2}$$，即有 $a_{n-2} = a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n$

于是有 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_n - \nabla a_n) + (a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n)$

即 $a_n = 3\nabla a_n - \nabla^2 a_n$

推广到对于任意整数 $0 \leq k \leq n$，有 a_{n-k} 可以用 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n, \cdots, \nabla^k a_n$ 的多项式表示

首先注意到，如果将 $\nabla^k a_n$ 视为一个新的序列，其中 $0 \leq k < n$

则令 $b_n = \nabla^k a_n$

于是 $\nabla(\nabla^k a_n) = \nabla b_n = b_n - b_{n-1} = \nabla^k a_n - \nabla^k a_{n-1} = \nabla^{k+1} a_n$

基础步骤：当 $k=0$ 时，平凡地有 $a_{n-k} = a_n$

递归步骤：假设对于任意 $0 < k \leq n$，有 $P(0) \wedge \cdots \wedge P(k-1)$ 为真，则考虑 $P(k)$

于是有 $a_{n-k} = a_{n-k+1} - \nabla a_{n-k+1}$

由于 a_{n-k+1} 可以用 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n, \cdots, \nabla^{k-1} a_n$ 的多项式表示

即存在系数 $b_0, b_1, \cdots, b_{k-1} \in R$，

使得 $a_{n-k+1} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i (\nabla^i a_n)$

则有 $a_{n-k} = a_{n-k+1} - \nabla a_{n-k+1}$

$$\overset{(IH)}{=} \sum_{i=0}^{k-1} b_i(\nabla^i a_n) - \nabla\left[\sum_{i=0}^{k-1} b_i(\nabla^i a_n)\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} b_i(\nabla^i a_n) - \sum_{i=0}^{k-1} \nabla[b_i(\nabla^i a_n)]$$
$$= b_0 a_n + \sum_{i=1}^{k-1} b_i(\nabla^i a_n) - \left[\sum_{j=1}^{k-1} b_{j-1}(\nabla^j a_n) + b_{k-1}(\nabla^k a_n)\right]$$
$$= b_0 a_n + \sum_{i=1}^{k-1} (b_i - b_{i-1})(\nabla^i a_n) - b_{k-1}(\nabla^k a_n)$$

于是根据强归纳法，对于任意整数 $0 \leq k \leq n$

有 a_{n-k} 可以用 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n, \cdots, \nabla^k a_n$ 的多项式表示

Discrete Mathematics - P196

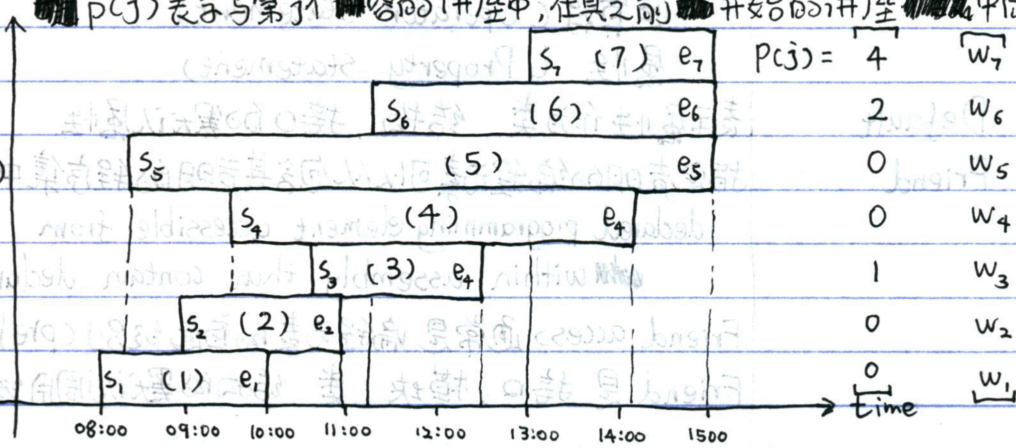
差分方程 (difference equation)，对于序列 $\{a_n\}$ 满足递推关系
且递推关系由 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n, \cdots$ 表示
则序列 $\{a_n\}$ 与差分的等式组成的关于序列 $\{a_n\}$ 的差分方程

对于任意实数序列 $\{a_n\}$ 满足的任意递推关系
都可以用包含 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n, \cdots$ 的多项式表示
首先任意递推关系都可以描述为
第n项 a_n 可以用前 $n-1$ 项 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的多项式表示
而对于任意整数 $0 \le k \le n$，
第n-k项 a_{n-k} 可以用 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n, \cdots, \nabla^k a_n$ 的多项式表示
于是代入递推关系可知
第n项 a_n 可以用 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n, \cdots$ 的多项式表示
于是递推关系转换为包含 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n, \cdots$ 的等式

动态规划 (dynamic programming)，一种求解优化问题的算法范式 (algorithmic paradigm)
通过递归地将问题分解为重叠子问题 (overlapping subproblem)
并通过递推关系合并子问题的答案
保存子问题解的过程称为记忆 (memoization)

对于 n 个讲座，讲座 j 开始于时间 s_j，结束于时间 e_j，有 w_j 个学生参与，其中 $1 \le j \le n$
假设对每个讲座，一旦开始将持续进行直至结束
任意两个讲座不能安排在同一时间段内
但一个讲座可以从另一个讲座结束时开始
目标是希望得到一组讲座规划，使得有最大的参与学生人次数，即安排讲座的 w_j 之和最大
令 $T(j)$ 表示由优化调度得到的前 j 个讲座的最大参与总数
$p(j)$ 表示与第 j 个相容的讲座中，在其之前开始的讲座中的最大编号

重新排序讲座
使得 $e_1 \le e_2 \le \cdots \le e_n$
与第 j 个相容 (compatible)
$e_i \le s_j \lor e_j \le s_i$
则 $P(j) = \max\{i<j \mid e_i \le s_j\}$



Discrete Mathematics - P197

对于n个讲座，讲座j开始于时间s_j，结束于时间e_j，有w_j个学生参与

每个讲座一旦开始即持续直到结束，任意两个讲座不能安排在同一时间段

但一个讲座可以在另一个讲座结束的时刻开始

目标是得到一组讲座的安排，使得参与讲座的总学生人次数最大

将n个讲座重新排序，使得有$e_1 \le e_2 \le \cdots \le e_n$

对于讲座$1 \le i < j \le n$，称讲座i, j相容，如果有$e_i \le s_j$

则令T(j)表示前j个讲座中，规划得到的最大参与人数

P(j)表示在讲座j之前与j相容的讲座中，编号最大的一个

即 $P(j) = \max\{1 \le i < j \mid e_i \le s_j\}$

注意对于任意讲座$1 \le j \le n$，考虑其是否属于T(j)的规划

如果讲座j不属于T(j)的规划

则T(j)的规划取自讲座$1, 2, \cdots, j-1$

于是等价于T(j-1)

如果讲座j属于T(j)的规划

则$p(j)+1, \cdots, j-1$讲座均不可能属于T(j)的规划

于是此时T(j)等价于T(p(j))的规划加上讲座j

于是有 $T(j) = \max(T(j-1), T(p(j)) + w_j)$

```
MAXIMUM-ATTENDEES(s1, ..., sn ; e1, ..., en ; w1, ..., wn)
  重新排序使得 e1 ≤ e2 ≤ ... ≤ en
  for j := 1 to n:
    if {i<j | ei ≤ sj} == ∅ :
      P[j] := 0
    else:
      P[j] := max{i<j | ei ≤ sj}
  T[0] = 0 , A[0] = { }
  for j := 1 to n:
    if wj + T[P[j]] > T[j-1] :
      T[j] := wj + T[P[j]] , A[j] := A[P[j]] ∪ {j}
    else:
      T[j] := T[j-1] , A[j] = A[j-1]
  return T[n], A[n] , 其中T[n]为最大参与人数，A[n]为最大人数的规划
```

Discrete Mathematics - P198

矩阵链乘

对于矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别是 $m_1\times m_2, m_2\times m_3, \cdots, m_n\times m_{n+1}$ 的矩阵

有矩阵链乘法 $A_1A_2A_3\cdots A_n$,

由于矩阵乘法满足结合律，即链乘中的乘法顺序不影响运算结果

于是考虑以最少的实数乘法次数计算 $A_1A_2\cdots A_n$

令 A_{ij} 表示矩阵 $A_iA_{i+1}\cdots A_j$ 的链乘，其中 $1\le i<j\le n$

$M(i,j)$ 表示矩阵链乘 $A_iA_{i+1}\cdots A_j$ 所用的最少乘法次数

考虑 A_{ij} 中最后一次矩阵乘法的位置 $i\le k<j$

即 A_{ij} 先计算 A_{ik} 和 $A_{k+1,j}$，再计算 $A_{ik}\times A_{k+1,j}$

于是对于给定的 $i\le k<j$,

可知最少的乘法次数为 $M(i,k)+M(k+1,j)+m_i\times m_{k+1}\times m_{j+1}$

则考虑 $k=i,i+1,\cdots,j-1$ 的不同选择

于是有递推关系 $M(i,j)=\min\{M(i,k)+M(k+1,j)+m_im_{k+1}m_{j+1} \mid i\le k<j\}$

且有初始条件 $M(i,i)=0$, $i=1,2,\cdots,n$; 其中 $1\le i\le k<j\le n$

```
MATRIX-MULTI-CHAIN(m1, m2, ..., mn+1):
    M := n×n 全0矩阵
    for d := 1 to n-1:
        for i := 1 to n-d:
            j := i + d
            min := +∞
            for k := i to j-1:
                temp = M[i,k] + M[k+1,j] + mi mk+1 mj+1
                if temp < min:
                    min := temp
                    M[j,i] = k
            M[i,j] = min
    return M
```

由于除循环外所有语句的时间复杂度均为 $\Theta(1)$，则算法的时间复杂度为 $O(n^3)$

如对于 A_1, A_2A_3, A_4A_5 分别为 $3\times6, 6\times4, 4\times2, 2\times5, 5\times7$

则 MATRIX-MULTI-CHAIN([3, 6, 4, 2, 5, 7])

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 72 & 84 & 114 & 196 \\ 1 & 0 & 48 & 108 & 202 \\ 1 & 2 & 0 & 40 & 126 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 70 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIX-MULTI-CHAIN-DISPLAY(M, 1, 5)

$\rightarrow ((A_1(A_2A_3))(A_4A_5))$

```
MATRIX-MULTI-CHAIN-DISPLAY(M, i, j):
    if i == j:
        return "A" + i
    else
        k := M[j,i]
        return "(" + MATRIX-MULTI-CHAIN-DISPLAY(M, i, k) + MATRIX-MULTI-CHAIN-DISPLAY(M, k+1, j) + ")"
```