Discrete Mathematics - P164

对于正整数n，任何n+1个不超过2n的正整数中，必定存在2个数互素

证明过程有，对于不超过2n的正整数

可以分成(1,2),(3,4),(5,6),…,(2n-1,2n)共n个整数对

其中每一对整数都是互素的

又从不超过2n的正整数中选择n+1个

这些正整数必定属于这些整数对

于是根据鸽巢原理，必定有2个数来自同一个整数对

则这2个正整数互素

于是对任意$n\in Z^+$，任何n+1个不超过2n的正整数中，必定存在2个数互素

对于正整数n，任何n+1个不超过2n的正整数中，必定存在2个数，其中一个可以整除另一个

证明过程有，对于不超过2n的正整数构成的集合

可以产生如下划分 $P_1, P_3, \cdots, P_k, \cdots, P_{2n-1}$

其中 $P_k = \{x \in [1,2n] \mid x = k\cdot 2^i, i \in N\}$

于是可知k的取值范围为小于2n的奇数

即这个划分共有n个集合

且对于同一个集合的任意两个元素，其中一个可以整除另一个

如对于 $x, y \in P_k$，则有 $x = k\cdot 2^i$，$y = k\cdot 2^j$，$i<j$

于是有 $x \mid y$

又从不超过2n的正整数中选择n+1个

则这些正整数中至少有2个存在于划分的同一个集合中

即这两个数中的一个可以整除另一个

于是对任意$n\in Z^+$，任何n+1个不超过2n的正整数中

总是存在x, y，使得$x \mid y$

对于任意m个整数的序列中，总是存在一个连续子数列，其和可以被m整除

证明过程有，如果序列中有整数被m整除，则命题平凡地为真

令序列$\langle a_1, a_2, \cdots, a_m \rangle$，其中$a_1, a_2, \cdots, a_m \in Z^+$

再取 $l_1 = a_1$，$l_2 = a_1 + a_2$，$\cdots$ $l_m = \sum_{i=1}^{m} a_i$

如果$l_1, \cdots, l_m$中存在 $m \mid l_j$，则命题成立，子序列为$\langle a_1, \cdots, a_j \rangle$

如果有 $l_j \bmod m \neq 0$，则 $l_j \bmod m \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$ 共有m-1种可能

于是必定有两个序列 l_i, l_j，使得 $l_i \equiv l_j \pmod m$，即 $m \mid (l_j - l_i)$

即序列 $\langle a_{i+1}, \cdots, a_j \rangle$ 即为所求

于是对任意$m\in Z^+$个序列中，总是存在一个子序列，其和可以被m整除

Discrete Mathematics - P165

可2涂色的(2-colorable)，指对于集合S的子集族$A_1, A_2, \cdots, A_n$，$A_1, A_2, \cdots, A_n \subseteq S$

其中每个子集均含有$d \geq 2$个元素，且$A_1, \cdots, A_n$不相等

如果可以将2种颜色指派给集合S中的元素，

使得对于子集族(collection of subset)中的任意子集A_i

A_i都包含了两种颜色的元素，

则称子集族$A_1, A_2, \cdots, A_n$是可2涂色的

令$m(d)$为最大正整数，使得对包含$n < m(d)$个子集的子集族$A_1, A_2, \cdots, A_n$

且每个子集A_i均包含d个元素，则该子集族为可2涂色的

对于包含$2d-1$个元素的集合S，由其所有d子集构成的子集族是不可2涂色的

证明过程有，对$2d-1$个元素指派2种颜色，

则必定有至少$\lceil (2d-1)/2 \rceil = d$个元素被分配到同一种颜色

而由这些元素构成的d子集只包含一种颜色的元素

于是所有d子集构成的子集族是不可2涂色的

$m(2) = 3$，即包含少于3个2子集的子集族均是可2涂色的

证明过程有，对于子集族$\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}$，

不存在对$\{a,b,c\}$的颜色分配，使得3个集合均包含两种颜色

于是有$m(2) < 4$

又对于形如$\{a,b\}, \{a,c\}$的子集族，对于形如$\{a,b\}, \{c,d\}$的子集族

可对a和b,c分配两种颜色，可对a,c和b,d分配不同颜色

于是有$m(2) \geq 3$，即有$m(2) = 3$

$m(3) \leq 7$，即包含少于7个3子集的子集族均是可2涂色的

证明过程有，对于子集族$\{1,3,5\}, \{1,2,6\}, \{1,4,7\}, \{2,3,4\}, \{2,5,7\}, \{3,6,7\}, \{4,5,6\}$

假设固定1的颜色，则$\{3,5\}, \{2,6\}, \{4,7\}$至少各有一个与1不同色，

又从三个集合各取一个元素的3子集共有8个，且可按$\{3,2,4\}, \{5,6,7\}$分为4对

如果其中正好3个与1同色，3个与1不同色，

则$\{2,3,4\}, \{2,5,7\}, \{3,6,7\}, \{4,5,6\}$恰有一个包含3个同色元素

如果至少有4个与1不同色，则4个子集中至少有1个包含3个与1不同色的元素

于是有$m(3) < 8$，即$m(3) \leq 7$

Discrete Mathematics - P166

超图 (hypergraph)，指图 (graph) 在数学上的扩展 (generalization)
[redacted]与图的区别在于超图的边可以[redacted]连接任意数量的点
an edge can join any number of vertices
超图 H 通常记为一个序偶，即 $H = (X,$ [redacted] $E)$
其中 X 是一个非空点集，称为 nodes 或 vertices
E 是包含 X 的非空子集的集合，称为 hyperedges 或 edges
is a set of non-empty subsets of X
即 $E \subseteq P(X) \setminus \{\emptyset\}$，其中 $P(X)$ 为 X 的幂集 (power set)

超图有时也称为集合[redacted] X 的集合系统，或集合族，集合 X 称为全集
set system (or family of sets) drawn from the universal set X
而超图与集合族的差别通常体现在研究的问题
如超图理论的问题更接近于图论中的问题
如连通性 (connectivity) 和[redacted]着色 (colorability)
而集合族通常讨论非图论的问题，如 Sperner 定理

Sperner family，指对于集合族[redacted] S 中的任意两个集合 X, Y，都不满足 $X \subset Y$
如对于包含 n 个元素的集合，其所有 k 元素子集即构成一个 Sperner family
由于集合的基数必定严格大于一个被它包含但不等于它的集合
即 $X \subseteq Y \wedge X \neq Y \longleftrightarrow X \subset Y$
a containing set has to be strictly bigger than the set it contains

Sperner 定理 (Sperner's theorem)，对于定义在 n 个元素的全集上的 Sperner family S，有 $|S| \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$
证明过程有，对于任意[redacted]非负整数 $0 \le k \le n$，
有 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \ge \binom{n}{k}$
令 S_k 表示定义在 n 个元素的全集 U [redacted] 的任意一个 Sperner family S 中，k 元素集合的个数
于是有 $S_k / \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \le S_k / \binom{n}{k}$

LYM 不等式
Lubell - [redacted] Yamamoto - Meshalkin inequality

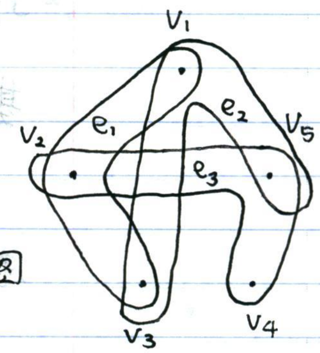
[redacted]考虑 S 中某一集合 A，可知 $0 \le |A| \le n$，$\bar{A} =$ [redacted] $U \setminus A$
则可知 A 的排列与 $\bar{A}$ 的排列可以组成 U 的一个排列
而对应于 A 的排列有 $|A|!(n-|A|)!$ 个，
而包含 k 个元素的集合 A 有 S_k 个
于是 $\sum_{A \in S} |A|!(n-|A|)! = \sum_{k=0}^{n} S_k \cdot k!(n-k)! \le n!$，即 $\sum_{k=0}^{n} S_k / \frac{n!}{k!(n-k)!} \le 1$
则有 [redacted] $\sum_{k=0}^{n} S_k / \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \le \sum_{k=0}^{n} S_k / \binom{n}{k} \le 1$
即 $|S| = \sum_{k=0}^{n} S_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

Discrete Mathematics - P167

索引集 (index set), 记 I_v 为点集的索引集, I_e 为超边集的索引集

即超图 $H(X,E)$ 可以表述为

$X=\{x_i \mid i\in I_v\}$, $E=\{e_i \mid i\in I_e \wedge e_i\subseteq X \wedge e_i\neq\emptyset\}$



k-均匀超图 (k-uniform hypergraph), 指超图中的超边的大小均为 k

或可以认为如果超图 $H(X,E)$ 为 k-均匀超图

则有超边集 E 为点集 X 的一个 k 子集族

a collection of set, each is a hyperedge connecting k vertice

clutter 指在有限集的子集族中, 任意两个子集都不满足其中一个是另一个的子集

实际上 clutter 是 Sperner family 的别名, 区别在于实际研究的问题

对于超图 $H(X,E)$,

如果对于任意超边 $A,B\in E$ 且 $A\neq B$, 都有 $A\not\subseteq B$

则称超图 $H(X,E)$ 是 clutter

blocker 指对于超图 $H(X,E)$ 是 clutter, 记 $b(H)$ 为超图 H 为 blocker

$b(H)$ 也是 clutter, 且 $b(H)=(X,E')$, 即点集与超图H相同

超边集 E' 包括所有的最小集合 $B\subseteq V$ 使得对每一个 $A\in E$, 都有 $B\cap A\neq\emptyset$

all minimal sets $B\subseteq V$, so that $B\cap A\neq\emptyset$ for every $A\in E$

特别的有, $b(b(H))=H$,

于是可知 blocker 与 clutter 提供了一类对偶性 (type of duality)

另外, 定义 $\nu(H)$ 为超图 H 中最大的不相交的超边的集合族的大小

the size of largest collection of disjoint edges in clutter H

定义 $\tau(H)$ 为 $b(H)$ 中最小边的大小, 则有 $\nu(H)\leq\tau(H)$

子超图 (subhypergraph), 指从超图中移除部分点的子图,

即对于超图 $H(X,E)$, 定义由 $A\subseteq X$ 得出的 subhypergraph H_A

有 $H_A=(A,\{e\cap A \mid e\in E \wedge e\cap A\neq\emptyset\})$

子超图的扩展 (extension of subhypergraph), 记为 $Ex(H_A)$

有 $Ex(H_A)=(A\cup A', E')$, 其中 $A'=\bigcup_{e\in E} e\setminus A$ 且 $E'=\{e\in E \mid e\subseteq (A\cup A')\}$

即超图H的边部分包含在 H_A 中且完整包含在 $Ex(H_A)$ 中

a hypergraph where each hypergraph of H is partially contained in the subhypergraph H_A, and is fully contained in the extension $Ex(H_A)$

Discrete Mathematics - P168

部分超图 (partial hypergraph)，指从超图中移除一些超边而形成的超图

对于超图 $H(X,E)$，有超边索引集 I_e，有索引 $J\subset I_e$

则有超图 $H'(X,\{e_i|i\in J\})$，称为由J生成的部分超图

截面超图 (section hypergraph)，指超图在其点集的一个子集上的投影

对于超图 $H(X,E)$，有点集 $A\subseteq X$

则有 $H\times A=(A,\{e\in E|e\subseteq A\})$

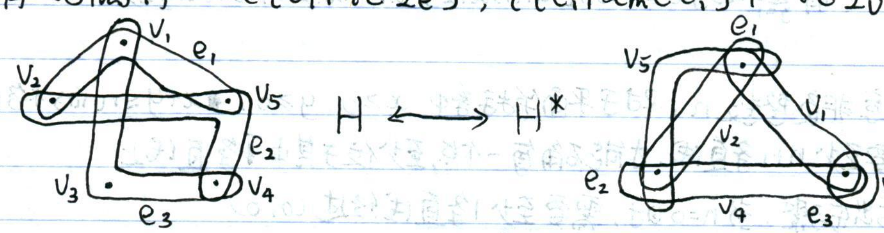
称为由A生成的截面超图

对偶 (dual)，指交换(interchange)超图的点集与超边集而形成的超图

对于超图 $H(X,E)$，有点索引集 I_v 和超边索引集 I_e

则有对偶 $H^*=(\{e_i|i\in I_e\},\{\{e_i|x_m\in e_i\}|m\in I_v\})$

如



注意，对于超图H的对偶，有 $(H^*)^*=H$

主图 (host graph)，对于连通的超图 $H(X,E)$，有连通图 $G(V,E_G)$，其中点集 $X=V$

如果对于任意超边 $e\in E$，都满足连通图G在e上的投影，

$G_e=(e,\{(u,v)\in E_G|\{u,v\}\subseteq e\})$ 且 G_e 是连通图

则称连通图G是超图H的一个主图

当扩展到超图 $H(X,E)$ 是不连通图时，有连通分支 $H_1,H_2,\cdots,H_n$

如果有图G，具有连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_n$

且存在一个一一对应 $f:\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}\to\{H_1,H_2,\cdots,H_n\}$

使得对每个连通分支 G_i，都有 G_i 是 $f(G_i)$ 的主图

则称不连通图G是不连通超图H的一个主图

2-section (或称 clique graph, representing graph, primal graph, Gaifman graph)

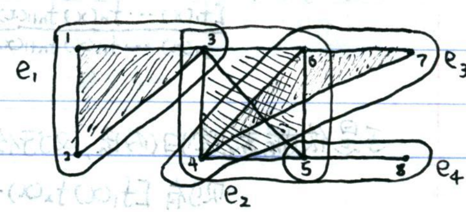
对于超图 $H(X,E)$，H的2-section为图 $G(X,E_G)$

使得对于任意超边 $e\in E$

都满足 G_e 为G在e上的投影

且 G_e 为完全图

如



Discrete Mathematics - P169

等级 (rank)，指超图的超边中的最大基数，记为 $r(H)$
the maximum cardinality of any of the edges in the hypergraph
即有 对于超图 $H(X,E)$，$r(H) = \max\{|e| \mid e \in E\}$

等价 (equivalent)，指对于超图 $H(X,E)$ 和 $G(Y,F)$，其中 $|X| = |Y|$，$|E| = |F| = m$
如果存在一个一一对应 $\phi: X \to Y$，有 $\phi(x_i) = y_i$，其中 $x_i \in X$，$y_i \in Y$
且有 π 是集合 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的一个排列，
满足 $\phi(e_j) = f_{\pi(j)}$，其中 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$，$e_j \in E$，$f_{\pi(j)} \in F$
则称超图 H 和 G 是等价的，记为 $H \equiv G$

相等 (equal)，指对于超图 $H(X,E)$ 和 $G(Y,F)$
如果有 $H \equiv G$，且对于一一对应 $\phi: X \to Y$ 和排列 π
满足排列 π 是恒等排列 (identity)，即有 $\phi(e_j) = f_j$，$j = 1, 2, \cdots, m$
则称超图 H 和 G 是相等的 (H is equal to G)，记为 $H = G$

同构 (isomorphic)，指对于超图 $H(X,E)$ 和 $G(Y,F)$，其中 $|X| = |Y|$，$|E| = |F| = m$
如果存在一个一一对应 $\phi: X \to Y$，即有 $y = \phi(x)$，其中 $x \in X$，$y \in Y$
且有 π 是集合 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的一个排列
满足 $\phi(e_j) = f_{\pi(j)}$，其中 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$，$e_j \in E$，$f_{\pi(j)} \in F$
则称超图 H 和 G 是同构的，记为 $H \simeq G$，
其中一一对应 $\phi: X \to Y$ 称为同构关系 (isomorphism)
特别地有，如果有超图 H 和 G 的对偶 H^* 和 G^*
则有 $H \simeq G \longleftrightarrow H^* \simeq G^*$

强同构 (strongly isomorphic)，指对于超图 $H(X,E)$ 和 $G(Y,F)$
如果有 $H \simeq G$，且对于一一对应 $\phi: X \to Y$ 和排列 π
满足排列 π 是恒等排列，即有 $\phi(e_j) = f_j$，$j = 1, 2, \cdots, m$
则称超图 H 和 G 是强同构的，记为 $H \cong G$

自同构 (automorphism)，指对于超图 $H(X,E)$，
存在一个同构关系 $\phi: X \to X$，且 ϕ 不是恒等函数，使得 $H \simeq H'$
则称超图 H 是自同构的，或者说是点集的重命名 (relabeling of vertices)
超图 H 的自同构的集合称为自同构群 (automorphism group)，记作 $\mathrm{Aut}(H)$

Discrete Mathematics - P170

度 (degree)，记 $d(v)$ 为超图 $H(X,E)$ 中包含点 v 的超边数

即有 $d(v) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$

k-正则超图 (k-regular)，指对于超图 $H(X,E)$，对任意点 $v \in X$，有 $d(v)=k$

特别地有，均匀超图的对偶是正则超图

dual of uniform hypergraph is regular and vice versa

对称 (symmetric)，对于超图 $H(X,E)$，如果存在一个自同构的映射 $\phi: X \to X$

对于 $x, y \in X$，如果有 $\phi(x)=y$，则称 x, y 是对称的

对于超边 $e_i, e_j \in E$，如果有 $\phi(e_i)=e_j$，则称 e_i 和 e_j 是对称的

传递 (transitive)，对于超图 $H(X,E)$，

如果对于所有的点都是相互对称的，则称为点传递的 (vertex-transitive, vertex-symmetric)

如果对于所有的超边都是相互对称的，则称边传递的 (edge-transitive, edge-symmetric)

当超图 $H(X,E)$ 即是点传递也是边传递的，则称超图 H 为传递的

特别地有，由于超图的对偶，对于边传递的研究实际上等同于点传递的研究

截面 (transversal)，或称碰撞集 (hitting set)，指对于超图 $H(X,E)$

如果集合 $T \subseteq X$ 满足，与每一条超边的交集非空，即 $\forall e \in E \ T \cap e \neq \phi$

则称集合 T 是超图 H 的截面，(has nonempty intersection with every edge)

如果对任意 $T' \subset T$，T' 都不是超图 H 的截面，则称 T 是极小的 (minimal)

截面超图 (transversal hypergraph)，指对于超图 $H(X,E)$

有超图 $G(X,F)$，使得对于 F 中的每一条超边 f，都是 H 的极小截面

且 F 包含了超图 H 的所以极小截面

关联矩阵 (incidence matrix)，对于超图 $H(X,E)$，其中 $X=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$

则有 $n \times m$ 的 0-1 矩阵 $A=(a_{ij})$ 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 其中 $i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$

称为超图 H 的关联矩阵

特别地有，由矩阵 A 的转置 (transpose)，其中 $|X^*|=m$，$|E^*|=n$

A^T 定义的超图 $H^*(X^*,E^*)$ 为 H 的对偶　$v_j^* \in e_i^*$ iff $a_{ij}=1$

二分超图 (bipartite)，对于超图 $H(X,E)$，如果存在 X 的一个划分 $U \cup V$

使得每一条至少包含2个点的超边都包含分别至少1个 U 和 V 中的点，

即有 $\forall e \in E \ (|e| \geq 2 \to e \cap U \neq \phi \land e \cap V \neq \phi)$，则称超图 H 是二分的

Discrete Mathematics - P171

超图着色 (coloring), 对于超图 $H(X,E)$, 对于X中的每个点指派颜色集合 $\{1,2,\cdots,\lambda\}$ 中的一个元素
使得对于E中的每一条超边,都包含至少两种颜色. (每一条至少包含2个点的超边)
对于所有的着色,使用最少的颜色数称为超图H的着色数 (chromatic number)
可以用k种颜色着色的超图称为可k着色的 (k-colorable)
可2着色的超图即为二分超图

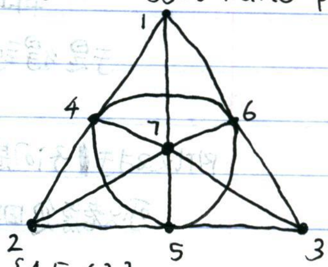
性质B (property B), 指对于有限集合X, 有一个X的n元素子集族C
如果可以划分X为 $Y \cup Z$, 使得C中的每个子集都包含Y和Z中的元素
注意性质B对于集合实际上等价于可2着色对于超图
对于给定的正整数n, 对于不满足 Property B 的 n元素子集族C
其中 $|C|$ 的最小值记为 $m(n)$

划分 (partition), 对于超图 $H(X,E)$, 如果H是边传递的, 则存在X的划分 $(X_1, X_2, \cdots, X_K)$
则 H_{X_k} 为超图H由 X_k 生成的子超图, $1 \le k \le K$
如果对于任意 H_{X_k} 都是传递的, 且 $\sum_{k=1}^{K} r(H_{X_k}) = r(H)$　bicolorable
有推论为 如果超图H是边传递的但不是点传递的, 则H是可2着色的

基于超图理论证明关于集合的可2着色的结论证明, n元素子集族C 可看作 n均匀超图H
对于任意 $k \ge 2$, 有 $m(k) \ge 2^{k-1}$
证明过程有, 考虑一个k均匀超图 $H(X,E)$, 且 $|E| < 2^{k-1}$
随机地将X中的点标记为红色或蓝色, 概率 $P(R) = P(B) = \frac{1}{2}$
则对于给定的超边 E_i, 令概率 $P(E_i)$ 表示 E_i 中的点全是红色或蓝色
即有 $P(E_i) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^k$
由于超图的边集 $|E| < 2^{k-1}$, 考虑任意的边是单色的概率
则有
$$P(\cup_{i=1}^{|E|} E_i) \le \sum_{i=1}^{|E|} P(E_i) = |E| \cdot 2 \cdot (\tfrac{1}{2})^k < 2^{k-1} \cdot 2 \cdot (\tfrac{1}{2})^k = 1$$
于是有非零的概率使得没有任何一条超边是单色的, 即可2着色的
于是可知 $m(k) \ge 2^{k-1}$

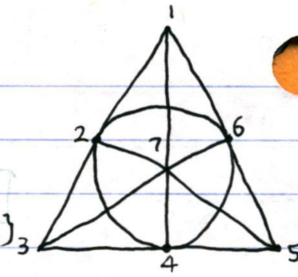
有限投影平面 (finite projective plane), 对于正整数 $n \ge 2$
如果平面包含 n^2+n+1 条线, 和 n^2+n+1 个交点
且每条线有 $n+1$ 个交点, 每个点被 $n+1$ 条线穿过
则称为 n阶投影平面 (projective plane of order n)

当n=2时, 称为 Fano plane



$\{1,2,4\}, \{2,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,5,7\}, \{2,6,7\}, \{3,4,7\}, \{4,5,6\}$

Discrete Mathematics - P172



利用 Fano plane 证明 可2着色中的 $m(3) = 7$，

以超图 $H(X, E)$ 表示 Fano plane，则有 $X = \{1,2,\cdots,7\}$

$E = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{5,6,1\},\{1,7,4\},\{2,7,5\},\{3,7,6\},\{2,4,6\}\}$

$m(3) \le 7$ 可知在投影平面 H 中，任意两个点[redacted]有且仅有一条[redacted]线穿过两个点

假设存在一个2着色 $A_1 \cup A_2 = X$，$A_1 \cap A_2 = \emptyset$，且有 $|A_1| > |A_2|$

当 $|A_1| \ge 5$ 时，可知 A_1 中至少有 $\binom{5}{2} = 10$ 个点对

又每个点对确认一条[redacted]线，则可知 A_1 确认[redacted]至少 10条[redacted]线

但是由于 $H(X,E)$ 只有7条线，

则根据鸽笼定理，有至少 2 个点对确认[redacted]同一条线，即3个点在一条线上

即这三个点所构成的 $H(X,E)$ 的超边是单色的

当 $|A_1| = 4$ 时，可知 A_1 中有 $\binom{4}{2} = 6$ 个点对，并确认 6条线 $l_1, l_2, \cdots, l_6$

如果任意两条相同，则必有一条超边是单色的

如果 6条线 均不相同，则每个 A_1 中的点被 3条线穿过

又 Fano 平面中[redacted]有 7条线 且每条线穿过 3个交点，且每个点被 3条直线穿过

则可知第 7条线不穿过 A_1 中的任何点，并且穿过 A_2 中的 3个点，

于是由 A_2 中的3个点构成的超边是单色的

于是可知 Fano plane 是不可2着色的，于是有 $m(3) \le 7$

$m(3) \ge 7$ 考虑一个 3均匀超图 $H(X,E)$，且有 $|E| \le 6$，则考虑 $|X|$ 的值，

当 $|X| \le 6$ 时，考虑概率的证明方式，

由于总是[redacted]添加不属于任何超边的点，并且不影响着色，于是假设 $|X| = 6$

随机地选择 3个点指派为红色而其余 3个指派为蓝色，共有 $\binom{6}{3} = 20$ 种不同方式

则对于任意的超边，有 2种指派方式使其为全红或全蓝

令事[redacted]件 E_i 表示 超边 e_i 是单色的，则 $P(E_i) = 2/20 = \frac{1}{10}$

于是 $P(\bigcup_{i=1}^{|E|} E_i) \le \sum_{i=1}^{|E|} P(E_i) = |E| \cdot \frac{1}{10}$ [redacted] $\le \frac{6}{10} < 1$

即有非零概率使得没有一条超边是单色的

当 $|X| > 6$ 时，称两个点相邻 (connected) 当有一条边包含两个点

由于每条边贡献 3个点对，所以至多有18个点对，而 X 中至少有 $\binom{7}{2} = 21$ 个点对

[redacted] 于是至少存在两个点 $x, y \in X$，且 x, y 是不相邻的

将 x, y 合并为点 z，则有 $X' = X \setminus \{x,y\} \cup \{z\}$ 为新的超图 $H'(X', E')$ 的点集

$E' = \{e \in E \mid e \cap \{x,y\} = \emptyset\} \cup \{e \setminus \{x,y\} \cup \{z\} \mid e \in E \wedge e \cap \{x,y\} \ne \emptyset\}$

进而可知 $m(3) = 7$ 由于超图 $H'(X',E')$ 是 3均匀超图，且有 $|X'| = |X| - 1$，$|E| = |E'|$

于是有 $m(3) \ge 7$ 于是重复此步骤直到 $|X_i| \le 6$，于是可知 H_i 是可2着色的，进而 H 也是可2着色