Calculus - P133

椭球面 (ellipsoid)，对于空间直角坐标系 $Oxyz$

将 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转

可以得到旋转椭球面 (ellipsoid of revolution)

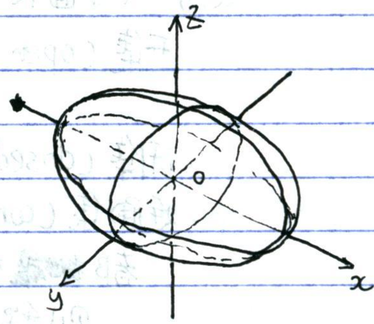
曲面方程为 $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

再将旋转椭球面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍

则可以得到一般化的椭球面

曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

提当 $a=b=c$ 时，椭球面退化为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$



单叶双曲面 (one-sheet hyperboloid)，对于空间直角坐标系 $Oxyz$

将 xOz 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转

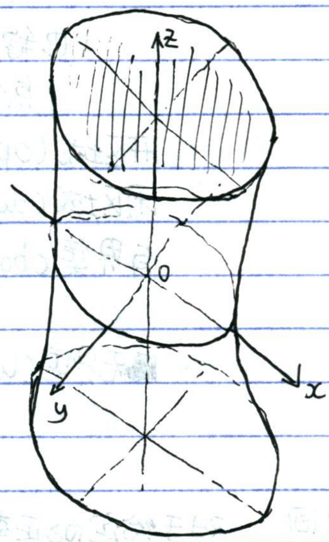
可以得到旋转单叶双曲面

曲面方程为 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

再将旋转单叶双曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍

则可以得到单叶双曲面

曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



双叶双曲面 (two-sheet hyperboloid)，对于空间直角坐标系 $Oxyz$

将 xOz 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转

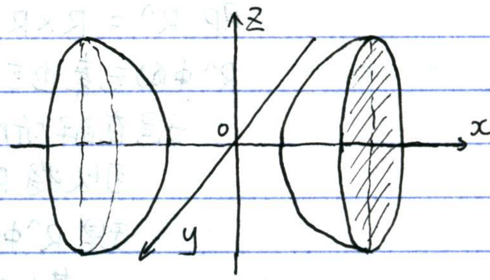
可以得到旋转双叶双曲面

曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$

再将旋转双叶双曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{c}$ 倍

则可以得到双叶双曲面

曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



椭圆抛物面 (elliptic paraboloid)，对于空间直角坐标系 $Oxyz$

将 xOz 面上的抛物线 $\frac{x^2}{a^2}=z$ 绕 z 轴旋转

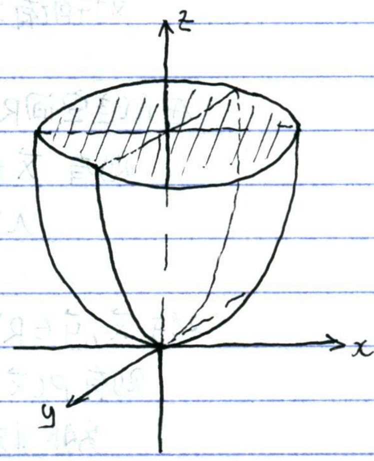
可以得到旋转抛物面 (paraboloid of revolution)

曲面方程为 $\frac{x^2+y^2}{a^2}=z$

再将旋转抛物面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍

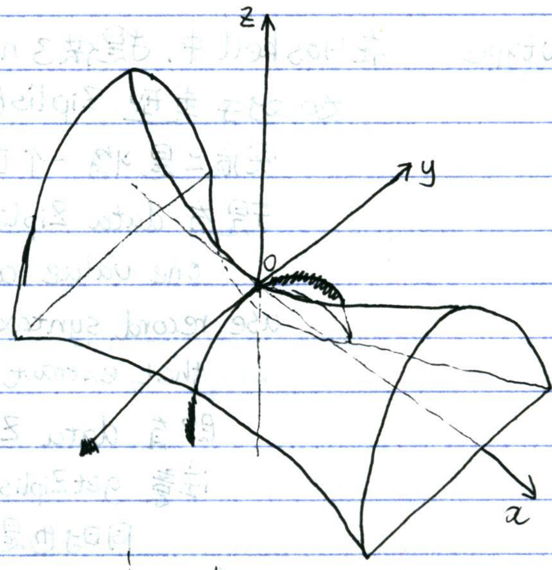
则可以得到椭圆抛物面

曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$



Calculus − P134

双曲抛物面(hyperbolic paraboloid)，又称马鞍面；



在空间直角坐标系Oxyz中，有实数a,b

有曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

以平面 $x=s$ 截双曲抛物面，

则有截痕曲线方程为 $z=-\frac{y^2}{b^2}+\frac{s^2}{a^2}$

即在yOz平面上开口向下的抛物线

以平面 $y=t$ 截双曲抛物面

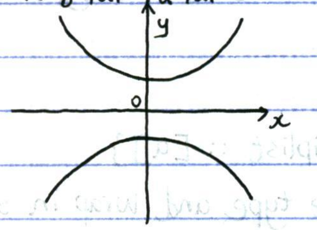
则有截痕曲线方程为 $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}$

即在xOz平面上开口向上的抛物线

以平面 $z=u$ 截双曲抛物面，

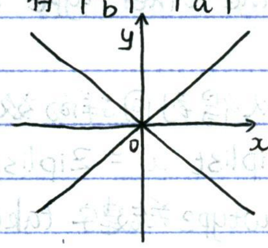
当 $u<0$ 时

有 $\frac{y^2}{b^2|u|}-\frac{x^2}{a^2|u|}=1$



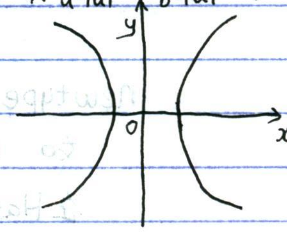
当 $u=0$ 时

有 $\left|\frac{y}{b}\right|=\left|\frac{x}{a}\right|$



当 $u>0$ 时

有 $\frac{x^2}{a^2|u|}-\frac{y^2}{b^2|u|}=1$



在空间直角坐标系Oxyz的曲面方程

椭圆柱面(elliptical cylinder)：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

双曲柱面(hyperbolic cylinder)：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

抛物柱面(parabolic cylinder)：$y=ax^2+b$

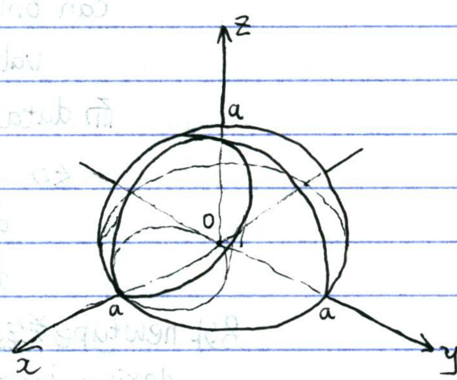
母线平行于z轴

空间曲线的一般方程，在空间直角坐标系Oxyz中，空间曲线可以看作两个空间曲面的交线

令 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$ 分别为两个空间曲面的方程

则方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 为两个空间曲面交线的方程

称为空间曲线的一般方程



如由方程组 $\begin{cases}z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\\(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2\end{cases}$

其中 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 为以O为圆心，a为半径

在z轴正半轴上的半球

$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$ 为圆柱面

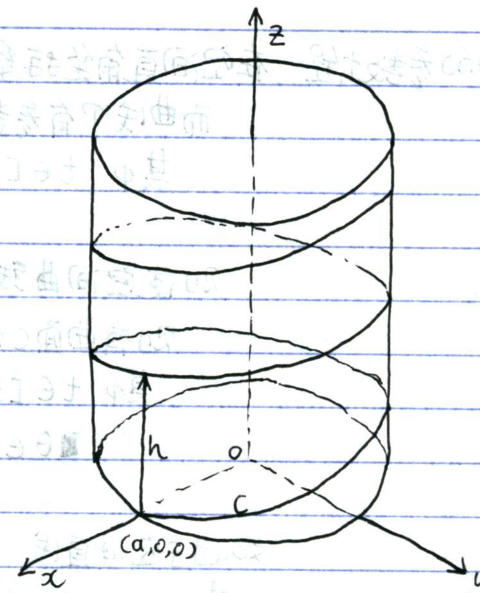
Calculus - P135

空间曲线的参数方程，在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的空间曲线 C

对于曲线 C 上的动点 (x,y,z)，有参数 t

可表示为参数方程组 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

则随着参数 t 的变化可以得到曲线 C 的所有点



螺旋线 (helix)，在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的点 $M(a,0,0)$

点 M 以角速度 ω 绕 z 轴方向转

同时以线速度 v 沿 z 轴正方向上升

取时间 t 为参数，当 $t=0$ 时，$M_0 = (a,0,0)$

在经过时间 t 后，点 M 绕 z 轴旋转过的角度为 ωt

于是有 $x(t) = a\cos\omega t$，$y(t) = a\sin\omega t$

又点 M 沿 z 轴正方向上升的[redacted]高度为 vt

于是有参数方程 $\begin{cases} x(t) = a\cos\omega t \\ y(t) = a\sin\omega t \\ z(t) = vt \end{cases}$，再取 $\theta = \omega t$，$b = \frac{v}{\omega}$，有 $\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta \\ y(\theta) = a\sin\theta \\ z(\theta) = b\theta \end{cases}$

称为螺旋线的参数方程

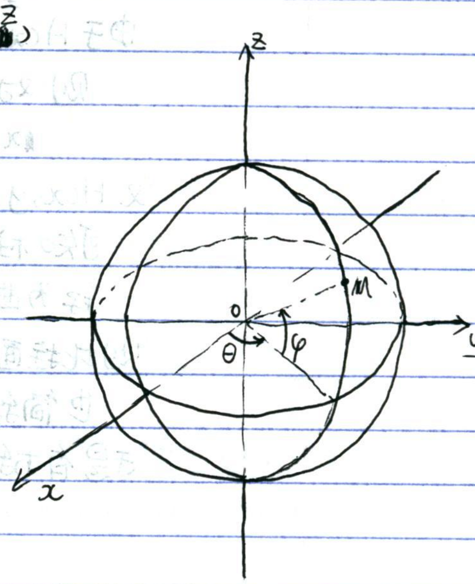
当参数 θ 从 θ_0 变化到 $\theta_0+2\pi$ 时，有 $x(\theta_0) = x(\theta_0+2\pi)$，$y(\theta_0) = y(\theta_0+2\pi)$

而 $z(\theta_0+2\pi) - z(\theta_0) = b(\theta_0+2\pi) - b(\theta_0) = 2\pi b$

即点 M 上升了固定的高度 $h = 2\pi b$，称为螺距 (pitch)

曲面的参数方程，在空间直角坐标系[redacted] $Oxyz$ 中，对于曲面 C 上的动点 (x,y,z)

通常其参数方程为含有两个参数 s,t 的参数方程 $\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$



如[redacted]球面方程 $x^2+y^2+z^2 = a^2$

则[redacted]取 $z = a\cos\varphi$，[redacted] $x^2+y^2 = a^2\sin^2\varphi$

再取 $x = a\sin\varphi\cos\theta$，$y = a\sin\varphi\sin\theta$

则有参数方程 $\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\varphi \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$

其中 $\varphi \in [0,\pi]$，$\theta \in [0,2\pi]$

Calculus - P136

曲面的参数方程，在空间直角坐标系Oxyz中，有空间曲线Γ

而曲线Γ有参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

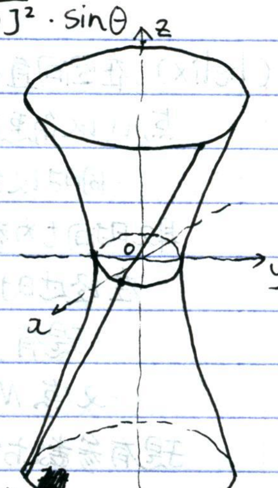
其中 $t\in[\alpha,\beta]$

则使空间曲线Γ绕z轴旋转得到旋转曲面C

则有曲面C的参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\cdot\cos\theta \\ y=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\cdot\sin\theta \\ z=\omega(t) \end{cases}$

其中 $t\in[\alpha,\beta]$

$\theta\in[0,2\pi]$



如对于空间直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$ ，绕z轴旋转得到旋转曲面

其中 $t\in(-\infty,+\infty)$

则曲面参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}\cos\theta \\ y=\sqrt{1+t^2}\sin\theta \\ z=2t \end{cases}$

其中 $t\in(-\infty,+\infty)$

$\theta\in[0,2\pi]$

于是可以消去参数 t 和 θ，有 $x^2+y^2=1+t^2$ $=1+\frac{z^2}{4}$

即单叶双曲面方程 $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$

坐标面投影，在空间直角坐标系Oxyz中，有空间曲线C

有一般方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

考虑消去变量z后所得的方程 $H(x,y)=0$

由于 $H(x,y)=0$ 可以由 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 消去z所得

则对于任意曲线C上的点 (x,y,z)

x,y 必定同时满足方程 $H(x,y)=0$

又 $H(x,y)=0$ 表示母线平行于z轴的柱面，即垂直于 xOy 平面

可知柱面包含曲线C且以曲线C为准线

称为曲线C关于 xOy 的投影柱面 (cylindrical projection)

则此柱面与 xOy 平面的交线称为空间曲线C在 xOy 平面上的投影曲线

也简称投影 (projection)

于是有方程 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

Calculus - P137

在引入平面直角坐标系 xOy 后，平面上的点 P 与有序二元组 (x,y) 之间建立了一一对应

于是二元有序实数组 (x,y) 的全体 $R^2=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$ 即表示坐标平面

则可以将数轴上的邻域概念扩展到 R^2

对于 xOy 平面上的任意一点 $P_0(x_0,y_0)$，以及正实数 δ

与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的集合称为 P_0 的 δ 领域 (neighbourhood)

记为 $U(P_0,\delta)=\{P\in R^2 \mid \|PP_0\|_2<\delta\}$

即 $U(P_0,\delta)=\{(x,y)\in R^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$

而点 P_0 的去心 δ 邻域 (deleted neighbourhood / punctured neighbourhood)

记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\in R^2 \mid 0<\|PP_0\|_2<\delta\}$

如果不需要强调邻域的半径 δ，

则记 $U(P_0)$ 为 P_0 的某个邻域，$\mathring{U}(P_0)$ 为 P_0 的某个去心邻域

对于平面上的任意一点 $P\in R^2$，以及任意一个点集 $E\subset R^2$

点 P 与点集 E 的关系并定属于三种关系之一

内点 (interior)：如果存在点 P 的邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点

即 $\exists_{\delta>0}\forall_{Q\in R^2}\ |PQ|<\delta\rightarrow Q\in E$

外点 (exterior)：如果存在点 P 的邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的外点

即 $\exists_{\delta>0}\forall_{Q\in R^2}\ |PQ|<\delta\rightarrow Q\notin E$

边界点 (boundary)：如果对于 P 的任意邻域都既包含属于 E 的点也包含不属于 E 的点

即 $\forall_{\delta>0}\exists_{Q,S\in R^2}\ (|PQ|<\delta\wedge Q\in E)\wedge(|PS|<\delta\wedge S\notin E)$

于是可知对于平面上的点集 $E\subset R^2$

E 的内点，外点，边界点形成了一个对平面 R^2 的划分

interior, exterior, boundary of subset E together partition whole space into ≤ 3 blocks

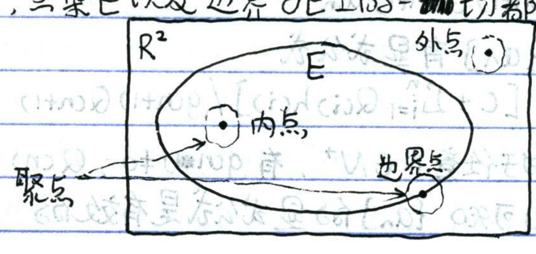
聚点 (cluster point / accumulation point)，又称极限点 (limit point)

对于平面上的点 $P\in R^2$ 与点集 $E\subset R^2$，则称 P 为 E 的聚点

如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 中总有属于 E 的点，

即有 $\forall_{\delta>0}\exists_{Q\in R^2}\ 0<|PQ|<\delta\wedge Q\in E$

通常而言，点集 E 以及边界 ∂E 上的一切都是 E 的聚点，不论是否属于 E



Calculus - P138

对于一个平面R^2上的点集$E \subset R^2$，有边界点集为∂E

开集（open set）：如果E中所有点均为E的内点，则称点集E为开集

即有 $\forall_{p \in E}$ p为E的内点，等价地有 E [redacted] $\cap \partial E = \varnothing$

闭集（closed set）：如果E的边界$\partial E \subseteq E$，则称点集E为[redacted]闭集

连通集（connected set）：对于点集内的任意两点a, b

都[redacted]存在一条从a到b的路径P，且路径P上的所有点，均在点集E中

则称点集E为连通集

即 $\forall_{a,b \in E} \exists_P$ (P is path from a to b) $\land P \subseteq E$

也称为路径连通性（path connectedness）

点集E也称为路径连通集（path-connected set / space）

开区域（open area）：如果点集E是开集，且是连通集，则称E为开区域

闭区域（closed area）：如果点集E是闭集，且是连通集，则称E为闭区域

有界集（bounded set）：如果对于点集E，存在正实数r，使得E包含于原点O的r邻域中

即[redacted] $E \subseteq U(O, r)$，则称点集E为有界集

[redacted]无界集（unbounded set）：如果点集E不是有界集，则称E为无界集

即 $\forall_{r>0}\ E \setminus U(O, r) \neq \varnothing$

n维空间

对于给定的正整数n，用R^n表示n元有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体所构成的集合

即 $R^n = R \times R \times \cdots \times R = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in R,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$

R^n中的元素也可以表示为n维向量的形式，即[redacted] $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

于是在解析几何中，通过数轴/直角坐标[redacted]系，

可以将$R^1/R^2/R^3$中的元素与坐标系中的向量实现一一对应

于是R^n中的元素$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$也称为R^n中的一个点或一个n维向量

其中x_i称为第i个坐标或向量$\vec{x}$的第i个分量

对于所有x_i均为0的元素$(0, 0, \cdots, 0)$，称为R^n的零元，记为$\vec{0}$或[redacted]原点O

在n维空间R^n上定义线性运算，对于$\vec{x}, \vec{y} \in R^n$，$\lambda \in R$，$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$，$\vec{y} = ($[redacted]$y_1, \cdots,$ [redacted]$y_n)^T$

则有 $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \cdots,\ x_n + y_n)^T$

$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \cdots,\ \lambda x_n)^T$

对于$\vec{x}, \vec{y} \in R^n$，取$\rho(\vec{x}, \vec{y})$为$\vec{x}, \vec{y}$之间的距离，也记作$\|\vec{x} - \vec{y}\|_2$

则有 $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$

另外 $\|\vec{x}\| = \rho(\vec{x}, \vec{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ 表示$\vec{x}$与原点之间的距离

Calculus - P139

可以将一维空间中变元的极限扩展到n维空间

对于 $\vec{x}, \vec{a} \in R^n$，$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$

其中 $\vec{x}$ 为变元，而 $\vec{a}$ 为固定元

如果有 $\|\vec{x} - \vec{a}\| \to 0$，则称变元 $\vec{x}$ 在 R^n 中趋于固定元 $\vec{a}$，记作 $\vec{x} \to \vec{a}$

则有 $\sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2} \to 0$

又 $(x_1-a_1)^2, (x_2-a_2)^2, \cdots, (x_n-a_n)^2$ 均为非负的

于是有 $\sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2} \to 0$

$\leftrightarrow (x_1-a_1)^2 \to 0 \wedge (x_2-a_2)^2 \to 0 \wedge \cdots \wedge (x_n-a_n)^2 \to 0$

则有 $\vec{x} \to \vec{a} \leftrightarrow x_1 \to a_1 \wedge x_2 \to a_2 \wedge \cdots \wedge x_n \to a_n$

可以将定义在 R^2 上的平面点集扩展到n维空间，其中 $n \geq 3$

对于 $\vec{a} \in R^n$，$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，以及正实数 δ

点集 $U(\vec{a}, \delta) = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in R^n, \rho(\vec{x}, \vec{a}) < \delta\}$

称为在 R^n 中的 $\vec{a}$ 的 δ 邻域

也可以类似地扩展到空心邻域、开集、闭集、连通集等概念

对于定义在 R^2 上的非空子集 $D \subset R^2$，称映射 $f: D \to R$ 为定义在D上的二元函数(bivariate function)

通常记为 $z = f(x, y)$，其中 $(x, y) \in D$，$z \in R$

或 $z = f(P)$，其中 $P \in D$，$z \in R$

其中点集D称为函数f的定义域(domain)

x, y 称为函数f的自变量(independent variable)

z 称为函数f的因变量(dependent variable)

集合 $f(D) = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为函数f的值域(codomain)

可以进一步扩展至n维空间 R^n，对于定义在 R^n 上的非空子集 $D \subset R^n$

称映射 $f: D \to R$ 为定义在D上的n元函数(multivariate function / function of n variables)

通常记为 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$，$z \in R$

或 $u = f(\vec{x})$，其中 $\vec{x} \in D$，$z \in R$

或 $u = f(P)$，其中 $P \in D$，$z \in R$

对于以算式表达的n元函数 $u = f(\vec{x})$

使算式有意义的自变量 $\vec{x}$ 的有序n元组所组成的集合

称为多元函数自然定义域