Discrete Mathematics - P199

常系数线性齐次递推关系 (linear homogeneous recurrence relation with constant coefficient)

除初始项外，将序列的项表示成前面的项的线性组合的递推关系

对于序列 $\{a_n\}$，存在实数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 且 $c_k \neq 0$

满足递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$

线性的：递推关系右侧为序列前项的倍数之和

齐次的：递推关系右侧各项均为 a_j 的倍数，其中 $j<n$

常系数：递推关系右侧各 a_j 项的系数都是常数，而非依赖于 n 的函数

阶 (degree)：递推关系中 a_n 由序列前面的 k 项来表示，其中 $k \in Z^+$

称为常系数的 k 阶线性齐次递推关系

根据数学归纳法第二原理，满足常系数的 k 阶线性齐次递推关系的序列 $\{a_n\}$

可以唯一地由递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$

以及 k 个初始条件 $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \cdots, a_{k-1} = C_{k-1}$ 确定

求解常系数线性齐次递推关系的基本方法是寻找形如 $a_n = r^n$ 的解，其中 r 为常数

则 $a_n = r^n$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ 的解

当且仅当 $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$

由于一般认为常数 r 不平凡地等于 0

则有 $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$

于是序列 $\{a_n\}$ 以 $a_n = r^n$ 作为解当且仅当 r 为方程的解

称该方程为递推关系的特征方程 (characteristic equation)

称该方程的解为递推关系的特征根 (characteristic root)

对于实数 c_1, c_2，假设方程 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 有两个不相等的根 r_1, r_2

则序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解

当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$，其中 α_1, α_2 为常数，$n = 0, 1, 2, \cdots$

首先证明如果 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$，则序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解

由于有 $r_1^2 - c_1 r_1 - c_2 = 0$ 且 $r_2^2 - c_1 r_2 - c_2 = 0$

则
$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = a_n \end{aligned}$$

于是可知序列 $\{a_n\}$ 以 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ 作为递推关系的解

Discrete Mathematics - P200

常系数线性齐次递推关系，对于实数 c_1, c_2，假设方程 $r^2-c_1r-c_2=0$ 有两个不相等的根 r_1, r_2

则序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ 的解

当且仅当 $a_n=\alpha_1 r_1^n+\alpha_2 r_2^n$，其中 α_1, α_2 为常数，$n=0,1,2,\cdots$

已经证明 $a_n=\alpha_1 r_1^n+\alpha_2 r_2^n$ 满足递推关系 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$

则考虑对于序列 $\{a_n\}$ 的初始条件 a_0, a_1

即对于任意常数 C_0, C_1，使得 $a_0=C_0$，$a_1=C_1$

都存在常数 α_1, α_2 使得 $\begin{cases}\alpha_1 r_1^0+\alpha_2 r_2^0=C_0\\ \alpha_1 r_1^1+\alpha_2 r_2^1=C_1\end{cases}$

于是有解为 $\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{C_1-C_0r_2}{r_1-r_2}\\ \alpha_2=\dfrac{C_0r_1-C_1}{r_1-r_2}\end{cases}$

由于已知 r_1 与 r_2 为不相等的根，即 $r_1-r_2\neq 0$

于是可知对于任意常数 C_0, C_1，都存在常数 r_1, r_2

使得 $\alpha_1+\alpha_2=C_0$，$\alpha_1r_1+\alpha_2r_2=C_1$

于是 $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$ 同时满足初始条件 $a_0=C_0$，$a_1=C_1$

于是序列 $\{a_n\}$ 和 $\{\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n\}$ 都是递推关系 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ 的解

而具有2个初始条件的2阶常系数线性齐次递推关系只有唯一解

则有对于任意非负整数 n，有 $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$

特别地有，常系数线性齐次递推关系的特征根可以是复数

如对于递推关系 $a_n=a_{n-4}$ 和初始条件 $a_0=1$，$a_1=0$，$a_2=-1$，$a_3=1$

首先有特征方程 $r^4=1$，即 $(r^2+1)(r^2-1)=0$

于是有特征根 $r_1=1$，$r_2=-1$，$r_3=i$，$r_4=-i$

则有 $a_n=\alpha_1+\alpha_2(-1)^n+\alpha_3 i^n+\alpha_4(-i)^n$

$=\alpha_1+\alpha_2(-1)^n+\alpha_3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})^n+\alpha_4(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})^n$

$=\alpha_1+(-1)^n\alpha_2+\alpha_3(\cos\frac{n}{2}\pi+i\sin\frac{n}{2}\pi)+\alpha_4(\cos\frac{n}{2}\pi-i\sin\frac{n}{2}\pi)$

$=\alpha_1+(-1)^n\alpha_2+(\alpha_3+\alpha_4)\cos\frac{n}{2}\pi+(\alpha_3-\alpha_4)i\sin\frac{n}{2}\pi$

代入初始条件则有方程组 $\begin{cases}(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)=1\\ (\alpha_1-\alpha_2)+i(\alpha_3-\alpha_4)=0\\ (\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_3+\alpha_4)=-1\\ (\alpha_1-\alpha_2)-i(\alpha_3-\alpha_4)=1\end{cases}$

于是有解 $\alpha_1=\frac{1}{4}$，$\alpha_2=-\frac{1}{4}$，$\alpha_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i$，$\alpha_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i$

则有序列 $a_n=\frac{1}{4}-(-1)^n\frac{1}{4}+\cos\frac{n}{2}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{n}{2}\pi$

Discrete Mathematics - P201

常系数线性齐次递推关系 对于实数 c_1, c_2 有 $c_2 \neq 0$, 假设方程 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 有相等的实根 r_0

则序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解

当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, 其中 α_1, α_2 为常数, $n = 0, 1, 2, \cdots$

证明过程有, 由于 $a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) r_0^n$, r_0 是 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 的相等实根

于是有 r_0 是 $2r - c_1 = 0$ 的根

则 $c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

$= c_1 [\alpha_1 + \alpha_2 (n-1)] r_0^{n-1} + c_2 [\alpha_1 + \alpha_2 (n-2)] r_0^{n-2}$

$= r_0^{n-2} [\alpha_1 (c_1 r_0 + c_2) + \alpha_2 (c_1 r_0 (n-1) + c_2 (n-2))]$

$= r_0^{n-2} [\alpha_1 r_0^2 + \alpha_2 (n-2) r_0^2 + \alpha_2 c_1 r_0]$

又 $r_0 = c_1/2$ $\quad = r_0^{n-2} [\alpha_1 r_0^2 + \alpha_2 (n-2) r_0^2 + 2\alpha_2 r_0^2]$

$= (\alpha_1 + \alpha_2 n) r_0^n = a_n$

于是有 $a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) r_0^n$ 满足递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

再考虑初始条件 $a_0 = C_0$, $a_1 = C_1$, 其中 C_0, C_1 为常数

则有 $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 = C_0 \\ \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0 = C_1 \end{cases}$, 又 $c_2 \neq 0$, 于是方程 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 的根 $r_0 \neq 0$

于是有 $\alpha_1 = C_0$, $\alpha_2 = C_1 / r_0 - C_0$

于是有 $a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) r_0^n$ 满足任意初始条件 $a_0 = C_0$, $a_1 = C_1$

即序列 $\{a_n\}$ 和 $a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) r_0^n$ 都是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解

又具有两个初始条件的2阶常系数线性齐次递推关系有唯一解

于是序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解

当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, 其中 α_1, α_2 为常数, r_0 为方程 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 的单根

进一步扩展至实数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 特征方程 $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$, $c_k \neq 0$

有 k 个不相等的特征根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$

则序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ 的解

当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 为常数, $n = 0, 1, 2, \cdots$

如果对于实数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 特征方程 $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$

有 t 个不相等的特征根 $r_1, \cdots, r_t$, 根的重数分别为 $m_1, \cdots, m_t \in Z^+$, $m_1 + \cdots + m_t = k$

则序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ 的解

当且仅当 $a_n = (\alpha_{10} + \alpha_{11} n + \cdots + \alpha_{1 m_1 - 1} n^{m_1 - 1}) r_1^n$

$\quad + (\alpha_{20} + \alpha_{21} n + \cdots + \alpha_{2 m_2 - 1} n^{m_2 - 1}) r_2^n$

$\quad + \cdots + (\alpha_{t0} + \alpha_{t1} n + \cdots + \alpha_{t m_t - 1} n^{m_t - 1}) r_t^n$

其中 α_{ij} 为常数, $1 \le i \le t$, $0 \le j \le m_i - 1$

Discrete Mathematics - P202

常系数线性非齐次线性递推关系(linear nonhomogeneous recurrence relation with constant coefficient)

对于实数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 和仅依赖于n且不恒为0的函数 $F(n)$

有常系数线性非齐次线性递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$

而齐次递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$

称为相伴的齐次递推关系(associated homogeneous recurrence relation)

如果 $\{a_n^{(p)}\}$ 是常系数非齐次线性递推关系的一个特解

$\{a_n^{(h)}\}$ 是相伴的齐次递推关系的一个解

则常系数非齐次线性递推关系的每个解都为 $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ 的形式

证明过程有，令 $\{b_n\}$ 为常系数非齐次线性递推关系的另一个解

则有 $a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p)} + F(n)$

$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_k b_{n-k} + F(n)$

则 $(b_n - a_n^{(p)}) = c_1(b_{n-1} - a_n^{(p)}) + \cdots + c_k(b_{n-k} - a_n^{(p)})$

于是序列 $\{b_n - a_n^{(p)}\}$ 是相伴的齐次递推关系的一个解 $\{a_n^{(h)}\}$

即对任意n，有 $b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$

如果函数 $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n$

其中 $b_t, b_{t-1}, \cdots, b_1, b_0, s$ 为实数，则考虑s的取值

如果s不是相伴的齐次递推关系特征方程的特征根

则有形如 $(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 t + p_0) s^n$ 的特解

如果s是相伴的齐次递推关系特征方程的特征根，且重数为m

则有形如 $n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 t + p_0) s^n$ 的特解

其中 $p_t, p_{t-1}, \cdots, p_1, p_0$ 为实数

对于常系数非齐次线性递推关系 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

有相伴的齐次线性递推关系 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

于是有特征方程 $r^2 - 5r + 6 = 0$ 及特征根 $r_1 = 2, r_2 = 3$

即有解 $a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot 3^n$

又有 $F_1(n) = 1 \cdot 2^n$，$F_2(n) = 3n \cdot 1^n$，$F(n) = F_1(n) + F_2(n)$

于是分别有形如 $pn \cdot 2^n$ 和 $(q_1 n + q_0) \cdot 1^n$ 的特解

则根据叠加原理，非齐次递推关系有形如 $pn2^n + (q_1 n + q_0)$ 的特解

即非齐次线性递推关系有通解

$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot 3^n + pn \cdot 2^n + q_1 n + q_0$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, p, q_1, q_0$ 为实数

Discrete Mathematics - P203

对于非负整数 $n \in N$，有非零函数 $f(n)$，$g(n)$ 以及函数 $h(n)$

考虑非常数系数线性递推关系的求解

即形如 $f(n)a_n = g(n)a_{n-1} + h(n)$ 的递推关系，其中 $n \geq 1$

并有初始条件 $a_0 = C$，其中 C 为常数

考虑将非常系数线性递推关系转换为常系数线性递推关系

取函数 $Q(n) = [f(1)f(2)\cdots f(n-1)] / [g(1)g(2)\cdots g(n)]$

$= \prod_{i=1}^{n-1} f(i) / \prod_{j=1}^{n} g(j)$

由于对于任意 $n \in N^+$，有 $f(n) \neq 0$，$g(n) \neq 0$

即函数 $Q(n)$ 是良定义的且 $Q(n) \neq 0$

取序列 $b_n = g(n+1)Q(n+1)a_n$

则有常系数线性递推关系 $b_n = b_{n-1} + Q(n)h(n)$

基础步骤：当 $n=0$ 时，$b_0 = g(n+1)Q(n+1)a_0$

$= g(n+1)\frac{1}{g(n+1)}a_0 = a_0 = C$

[redacted]

当 $n=1$ 时，$b_1 = g(2)Q(2)a_1 = \frac{g(2)Q(2)}{f(1)}[g(1)a_0 + h(1)]$

$= \frac{g(2)}{f(1)} \cdot \frac{f(1)}{g(1)\cdot g(2)}[g(1)a_0 + h(1)]$

$= a_0 + \frac{1}{g(1)}h(1) = b_0 + Q(1)h(1)$

递归步骤：假设对于任意 $n > 1$，有 $P(n-1)$ 为真，则考虑 $P(n)$

则 $b_n = g(n+1)Q(n+1)a_n$

$= g(n+1) \cdot \prod_{i=1}^{n} f(i) / \prod_{j=1}^{n+1} g(j) \cdot a_n$

$= f(n) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f(i) / \prod_{j=1}^{n} g(j) \cdot a_n$

$= Q(n) \cdot f(n)a_n = Q(n) \cdot [g(n) \cdot a_{n-1} + h(n)]$

$= Q(n)g(n)a_{n-1} + Q(n)h(n) = b_{n-1} + Q(n)h(n)$

于是根据数学归纳法，序列 $b_n = g(n+1)Q(n+1)a_n$ 满足初始条件 $b_0 = C$

以及递推关系 $b_n = b_{n-1} + Q(n)h(n)$

于是可以求得序列 $\{b_n\}$ 的显式公式

有 $b_n = b_0 + \sum_{i=1}^{n} Q(i)h(i) = C + \sum_{i=1}^{n} Q(i)h(i)$

又有 $b_n = g(n+1)Q(n+1)a_n$

则序列 $\{a_n\}$ 有显式公式

$a_n = [C + \sum_{i=1}^{n} Q(i)h(i)] / g(n+1)Q(n+1)$

由于对于任意 $n \in N^+$，有 $g(n) \neq 0$，$Q(n) \neq 0$

则可知 $\{a_n\}$ 的显式公式是有效的

Discrete Mathematics - P204

对于以随机顺序输入的n个元素进行快速排序

考虑快速排序算法所做的平均比较次数

令C_n表示对随机[redacted]顺序的n个元素排序，快速排序算法的平均比较次数

首先有初始条件 $C_0=0$，$C_1=0$

当$n>1$时，在将$n-1$个数划分为大于/小于pivot的两个子序列时

需要使用$n-1$次比较

考虑pivot是序列中第k大的元素，且$k=1,2,\cdots,n$是等概率的

则两个子序列长度分别为$k-1$和$n-k$

于是递归地应用快速排序平均比较次数为C_{k-1}与C_{n-k}

于是有递推关系 $C_n = n-1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[C_{k-1}+C_{n-k}]$

$$= n-1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}$$

$$= n-1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}C_k$$

注意这个[redacted]序列$\{C_n\}$同时满足递推关系 $nC_n=(n+1)C_{n-1}+2(n-1)$，$n\geq 1$

[redacted]：当$n=1$时，[redacted] $2\cdot C_0+2\cdot(1-1)=0=1\cdot C_1$

当$n>1$时，有 $C_n = n-1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}C_k$

$$C_{n-1} = n-2+\frac{2}{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}C_k$$

则 $nC_n-(n-1)C_{n-1} = [n(n-1)+2\sum_{k=0}^{n-1}C_k]-[(n-1)(n-2)+2\sum_{k=0}^{n-2}C_k]$

$$= 2(n-1)+2C_{n-1}$$

于是有 $nC_n = (n+1)C_{n-1}+2(n-1)$

则取 $f(n)=n$，$g(n)=n+1$，$h(n)=2(n-1)$

可知对任意 $n\in N^+$，有$f(n)\neq 0$，$g(n)\neq 0$，

再取 $Q(n)=\prod_{i=1}^{n-1}f(i)/\prod_{j=1}^{n}g(j) = (n-1)!/(n+1)! = \frac{1}{n(n+1)}$

则序列$\{C_n\}$有显式公式，对于$n\geq 1$

$$C_n = [C_0+\sum_{i=1}^{n}Q(i)h(i)]/g(n+1)Q(n+1)$$

$$=[\sum_{i=1}^{n}\frac{2(i-1)}{i(i+1)}]/[(n+2)\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$

$$=2(n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{i(i+1)}$$

$$=2(n+1)\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{i+1}-\frac{1}{i})$$

$$=2(n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}+2(n+1)[\frac{1}{n+1}-1]$$

$$=2(n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}-2(n+1)+2$$

又调和级数$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}$是$\Theta(\lg n)$的

于是可知对随机排序的n个元素应用快速排序的平均比较次数

$C_n\in\Theta(n\lg n)$

即快速排序以$\Theta(n\lg n)$的平均情形时间复杂度实现对n个元素排序

Discrete Mathematics - P205

分治算法 (divide-and-conquer algorithm) 求解问题的一种算法

求解中递归地把问题划分成固定数目的较小的同种类型的问题

分治递推关系 (divide-and-conquer recurrence relation)

假设一个递归算法将一个规模为 n 的问题分成 a 个子问题

其中每个子问题的规模为 n/b (假定 n 为 b 的倍数)

实际中较小问题的规模通常是 [redacted] 不大于或不小于 n/b 的最近整数

此外 $g(n)$ 表示划分为 a 个规模为 n/b 的子问题

以及将子问题的解组合为原问题的解的算法处理中所需的额外运算

令 $f(n)$ 表示求解规模为 n 的问题所需的运算数

5是有递推关系 $f(n) = af(n/b) + g(n)$

对于递增函数 (increasing function) f

满足分治递推关系 $f(n) = af(n/b) + c$

其中 $a \geq 1$, 整数 $b > 1$, c 为正实数

则有 $f(n) \in \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & , a > 1 \\ O(\log n) & , a = 1 \end{cases}$

对于递增函数 f

满足分治递推关系 $f(n) = af(n/b) + cn^d$

其中 $a \geq 1$, 整数 $b > 1$, 实数 $c > 0$ 和 $d \geq 0$

则有

$$f(n) \in \begin{cases} O(n^d) & , \text{if } a < b^d \\ O(n^d \log n) & , \text{if } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & , \text{if } a > b^d \end{cases}$$

整数快速乘法 (fast multiplication of integer), 对于以 $2n$-bit 表示的整数 a, b

即 $a = (a_{2n-1}a_{2n-2}\cdots a_1a_0)_2$, $b = (b_{2n-1}b_{2n-2}\cdots b_1b_0)_2$

令 $a = 2^n A_1 + A_0$, $b = 2^n B_1 + B_0$

其中 $A_1 = (a_{2n-1}a_{2n-2}\cdots a_n)_2$, $A_0 = (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0)_2$

$B_1 = (b_{2n-1}b_{2n-2}\cdots b_n)_2$, $B_0 = (b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0)_2$

则有 $a * b = 2^{2n}A_1B_1 + 2^nA_1B_0 + 2^nA_0B_1 + A_0B_0 + 2^nA_1B_1 - 2^nA_1B_1 + 2^nA_0B_0 - 2^nA_0B_0$

$= (2^{2n} + 2^n)A_1B_1 - 2^n(A_1 - A_0)(B_1 - B_0) + (2^n + 1)A_0B_0$

5是有按位运算次数 $f(2n) = 3f(n) + C_n$

其中 C_n 表示加法/减法, 移位所使用的按位运算次数, 为 n 的倍数

Discrete Mathematics - P206

最近点对问题(the closest-pair problem)，对于平面上的n个点的点集 $T\subseteq R\times R$

即有 $T=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)\}$，

求欧几里得距离 $\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$ 最小的点对 (x_i,y_i) 和 (x_j,y_j)

考虑蛮力算法为比较每个点对的距离

则时间复杂度为 $O(n^2)$，因为有 $\binom{n}{2}$ 个点对

考虑一个分治算法

首先将点集分别依据x坐标和y坐标进行排序

根据x坐标将点集分为左右两部分，分界为 $x=l$

每一部分各有 $n/2$ 的点，

并对应地将y坐标排序拆分为两部分

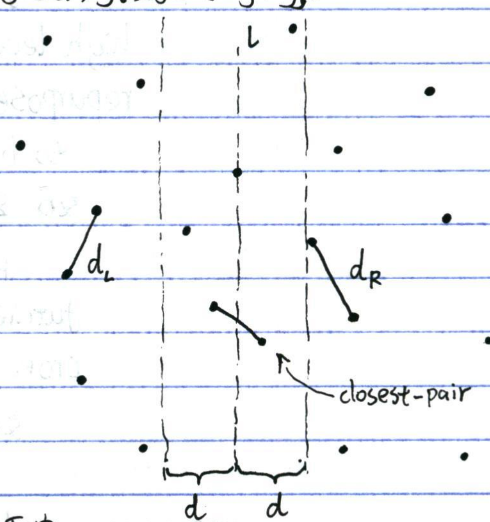
于是递归地调用算法计算左右两部分的最近点对

距离分别为 d_L，d_R，并取 $d=\min(d_L,d_R)$

注意最近点对有三种情况，都在左边或右边，或分在左右两边

则筛选出x坐标在 $l\pm d$ 范围内的点集

从y坐标最小的点开始，顺序地检查带状区域中的点，以找到带状区域中的最近点对

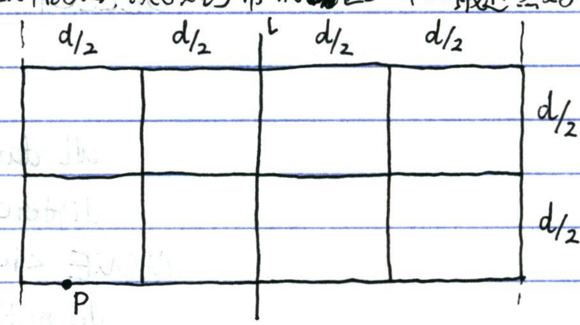


CLOSEST-PAIR$(\{(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\})$

X := 将点集按x坐标排序 ⎫ 时间复杂度

Y := 将点集按y坐标排序 ⎭ 为 $O(n\lg n)$

return CP-HELPER(X, Y)



$T(n)$ [CP-HELPER(X, Y):

$O(n)$ [X_L, X_R := 将X按x坐标拆分为左右两边

Y_L, Y_R := 对应于 X_L, X_R 拆分点集Y

$2T(n/2)$ [d_L, CP_L := CP-HELPER(X_L, Y_L)

d_R, CP_R := CP-HELPER(X_R, Y_R)

l := $X[\lfloor X.size/2\rfloor]$的横坐标

d := $\min(d_L, d_R)$

$O(n)$ [X_M := 横坐标在 $[l-d, l+d]$ 的点的子集

Y_M := Y中对应于 X_M 的子集

$O(n)$ [对于 Y_M 中的每个点P，检查与P相近的点，

以获得带状区域中的最近点对 d_M，CP_M

return (d_L, CP_L)，(d_R, CP_R)，(d_M, CP_M)

中距离最近的元组

取以P点所在位置为底 为2d

高为d的矩形区域

并划分为边长为 $d/2$ 的8个正方形区域

区域之外的点与P距离必定大于d

矩形中左右两侧分别至多有4个点

相互之间距离至少为d

于是对于每个P，至多需要检查7个点，

则有递归式

$T(n)=2T(n/2)+O(n)$

于是有 $T(n)=O(n\lg n)$

则CLOSEST-PAIR在时间复杂度

$O(n\lg n)$ 内解决最近点对问题

Discrete Mathematics - P207

最长递增子序列 (longest increasing subsequence)

对于给定的包含 n 个元素的序列 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$，其中 $n \in N^+$

考虑最长的子序列 $\langle b_1, b_2, \cdots, b_k \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$

使得 $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$，其中 $k \in N^+$

令 L_i 表示 [redacted] 以元素 a_i 为最后一个元素的最长递增子序列

则有 L_1 平凡地为 $\langle a_1 \rangle$

而当 $i > 1$ 时，[redacted] L_i 包含 a_i，以及可能地包含 $a_1, \cdots, a_{i-1}$

则 L_i 有两种可能，或者只包含 a_i，即 $L_i = \langle a_i \rangle$

或者包含除 a_i 外的其他元素

假设 L_i 中在 a_i 之前的元素为 a_j，其中 $1 \le j < i$

则 L_i 在去掉元素 a_i 之后的序列以 a_j 结尾

则该序列即为 L_j

于是可以构造动态规划算法

有 [redacted] $L_i = \begin{cases} \langle a_1 \rangle, & i = 1 \\ \text{longest of } (\langle a_i \rangle, \{L_j + a_i \mid a_j < a_i, j < i\}), & i > 1 \end{cases}$

```
LONGEST-INCREASING-SUBSEQUENCE([redacted] A = [redacted] <a1, a2, ..., an>)
  初始化空列表 L
  L[1] = [redacted] <a1> [redacted]
  for i := 2 to n:
      len := 1
      lst := [redacted] <ai>
      for j := 1 to i-1:
          if aj < ai and L[j].size + 1 > len:
              len := L[j].size + 1
              lst := L[j] [redacted] + <ai>
      L[i] := [redacted] lst [redacted]
  return [redacted] longest of L[n]
```

A	L	len
6	<6>	1
9	<6, 9>	2
4	<4>	1
11	<6, 9, 11>	3
5	<4, 5>	2
2	<2>	1
1	<1>	1
3	<2, 3>	2
8	<4, 5, 8>	3
$\boxed{10}$	$\boxed{\langle 4, 5, 8, 10 \rangle}$	$\boxed{4}$
7	<4, 5, 7>	3

算法中共有两层循环，[redacted] 循环体中的语句均为 $\Theta(1)$ 的

两层循环共有 $\Theta(n^2)$ [redacted] 次循环迭代，而 return 的 [redacted] 扫描是 $\Theta(n)$ 的

于是算法以 $\Theta(n^2)$ 的时间复杂度实现 longest increasing subsequence

Discrete Mathematics - P208

乌拉姆问题(Ulam's problem)，对于n个数的集合，玩家一从其中选择一个数x

玩家二通过连续选取n个数的集合的子集猜测这个数

向玩家一提问是否在选择的子集中，玩家一回答"是"/"不是"

当玩家一的回答全部为真话时，每次询问可以将集合对半划分

于是可以使用 $\log^n$ 次询问找到x

考虑允许玩家一恰好说谎一次时，需要使用的询问次数

第一种策略为，在每一次选取子集并询问的时候，连续问2次相同的问题

如果2次回答相同，则可知答案为真，并对集合对半划分

如果2次回答不同，则可知其中必定有一次说谎

则再问一次相同的问题可以得到真实答案，并对集合对半划分

且之后每次选取子集可以只询问一次

于是最多使用 $2\lg^n+1$ 次询问找到x，复杂度是 $O(\lg^n)$ 的

第二种策略为，每个回合将集合划分为4部分，每个部分 $n/4$ 个元素

并标记为 n_1, n_2, n_3, n_4

每个回合进行2次询问：

是否在 $n_1 \cup n_2$ 中，是否在 $n_1 \cup n_3$ 中

	2.	
1.	n_1	n_2
	n_3	n_4

由于对 n_1, n_2, n_3, n_4 的划分是没有顺序差别的

于是考虑三种回答的情形，(1,1)/(1,0)/(0,0)

则分别考虑三种回答及是否存在一次说谎的情形

对于(1,1)：

(T,T)		(T,F)		(F,T)		可知	
1	0	0	1	0	0		
0	0	0	0	1	0		0

对于(0,0)：

(T,T)		(T,F)		(F,T)		可知	
0	0	0	0	0	1	0	
0	1	1	0	0	0		

对于(1,0)：

(T,T)		(T,F)		(F,T)		可知	
0	1	1	0	0	0		
0	0	0	0	0	1	0	

即不论玩家一作出什么回答，以及是否有一次说谎

在每个回合后都可以排除 $n/4$ 的元素

于是询问次数满足递归式 $T(n) = T(\frac{3}{4}n) + 2$

则有 $T(n) \in O(\log_{4/3}^n)$

于是相对而言第一种策略 $O(\lg^n)$ 效率更高

Discrete Mathematics - P209

序列生成函数(generating function of sequence)，指使用序列的第n项作为x^n系数的形式幂级数

对于序列$\{a_k\}$，$a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots$ 为实数

则有无穷级数 $G(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_kx^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

称为序列$\{a_k\}$的普通生成函数(ordinary generating function)

而对于有限序列 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$，

可以通过指定 $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots$ 均等于0来扩展为无穷序列

生成函数可以用于求解序列的递推关系：

先将关于序列项的递推关系转换成涉及生成函数的方程

再求解方程并得到关于生成函数的直接表达形式

从直接表达式可以找到生成函数的幂级数系数

从而求解原有序列的递推关系

注意在生成函数$G(x)$中，x的幂仅在生成函数中使用，通常忽略$G(x)$的自然定义域

当使用生成函数求解计数问题时，通常考虑为形式幂级数(formal power series)

于是讨论时通常忽略无穷级数的收敛问题

但是注意在应用某些微积分结果时，需要考虑使幂级数收敛的x取值

如对于序列$\{1,1,1,1,1,1,1\}$

有生成函数 $G(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6 = (x^7-1)/(x-1)$，$x \neq 1$

对于无穷序列 $\{1,1,1,1,\cdots\}$

有生成函数 $G(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$，$x<1$

对于无穷序列$\{a_k\}$和$\{b_k\}$，有生成函数 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$，$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$

则有 $f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k)x^k$，$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j})x^k$

证明过程有：$f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k)x^k$

$f(x)g(x) = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k)$

$= \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j) x^i$

则对于任意 $k \in N$，考虑无穷级数$f(x)g(x)$中的x^k项的系数

对于任意 $j \in N$，且 $0 \leq j \leq k$，

$a_j x^j$ 与 $b_{k-j} x^{k-j}$ 的乘积，在无穷级数中$f(x)g(x)$中合并入x^k项

于是x^k项的系数为 $\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$

于是有 $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j})x^k$

Discrete
Mathematics - P210

对于 $G(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ 对应的无穷序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$

有 $G_0(x)=\frac{1}{(1-x)}=1+x+x^2+x^3+\cdots$

则 $G(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=[G_0(x)]^2=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k}1\cdot 1)x^k$

$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$

另外 $G_0(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 中的每一项都是可微分的

于是有 $G(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=[\frac{1}{(1-x)}]'$

$=[G_0(x)]'=(1+x+x^2+\cdots)'$

$=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$

$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$

广义二项式定理(Newton's generalized binomial theorem)，对于实数 u 和非负整数 k

有广义二项式系数(generalized binomial coefficient)定义为

$$\binom{u}{k}=\begin{cases}u(u-1)\cdots(u-k+1)/k! = [\prod_{j=0}^{k-1}(u-j)]/k!, & k>0\\ 1, & k=0\end{cases}$$

于是有对于实数 u,x，且有 $|x|<1$

有 $(1+x)^u=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{u}{k}x^k$

称为广义二项式定理，可以通过麦克劳林级数(Maclaurin series)证明

特别地当 u 为正整数时，$\binom{u}{k}$ 即为普通二项式系数

于是有对于 $k>n$，有 $\binom{u}{k}=0$

则 $(1+x)^u=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{u}{k}x^k=\sum_{k=0}^{u}\binom{u}{k}x^k+\sum_{k=u+1}^{\infty}\binom{u}{k}x^k$

$=\sum_{k=0}^{u}\binom{u}{k}x^k$

即退化为普通二项式定理

对于正整数 n 和非负整数 r，并令 $0!=1$

有 $\binom{-n}{r}=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}$

证明过程有，当 $r=0$ 时，$\binom{-n}{0}=1=(-1)^0\binom{n+0-1}{0}$

当 $r>0$ 时，$\binom{-n}{r}=(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)/r!$

$=(-1)^r\cdot n(n+1)\cdots(n+r-1)/r!$

$=(-1)^r(n-1)!\cdot n(n+1)\cdots(n+r-1)/r!(n-1)!$

$=(-1)^r(n+r-1)!/r!(n-1)!$

$=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}$

于是提供了一种当 u 为负整数时，

通过普通二项式系数表示广义二项式系数的方法

Discrete Mathematics - P211

对于正整数n，考虑生成函数$(1+x)^{-n}$和$(1-x)^{-n}$对应的无穷序列

根据广义二项式定理，$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k$

$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k$

于是对应的无穷序列 $a_k = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$

再用$-x$代替x可得 $(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$

则对应的无穷序列 $b_k = \binom{n+k-1}{k}$

生成函数$G(x)$	无穷序列$\{a_k\}$
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ $= 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$	$\binom{n}{k}$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kx^k$，其中$a\in R$ $= 1+\binom{n}{1}ax+\binom{n}{2}a^2x^2+\cdots+\binom{n}{n}a^nx^n$	$\binom{n}{k}a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{rn}$，其中$r\in N^+$ $= 1+\binom{n}{1}x^r+\binom{n}{2}x^{2r}+\cdots+\binom{n}{n}x^{nr}$	$\begin{cases}\binom{n}{k/r}, & r\mid k\\ 0, & r\nmid k\end{cases}$
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n}x^k = 1+x+x^2+\cdots+x^n$	当$k\le n$时，$a_k=1$，其余$a_k=0$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k = 1+x+x^2+\cdots$，其中$\lvert x\rvert<1$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty}a^kx^k = 1+ax+a^2x^2+\cdots$，其中$\lvert ax\rvert<1$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty}x^{kr} = 1+x^r+x^{2r}+\cdots$，其中$\lvert x^r\rvert<1$	当$r\mid k$时，$a_k=1$，其余$a_k=0$
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = 1+2x+3x^2+\cdots$，其中$\lvert x\rvert<1$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$，其中$n\in N^+$ $= 1+\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+\cdots$	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k$，其中$n\in N^+$ $= 1-\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2-\cdots$	$(-1)^k\binom{n+k-1}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{n-1}$
$\frac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}a^k\binom{n+k-1}{k}x^k$，其中$a\in R$ $= 1+\binom{n}{1}ax+\binom{n+1}{2}a^2x^2+\cdots$	$\binom{n+k-1}{k}a^k = \binom{n+k-1}{n-1}a^k$
$\frac{1}{(1-x^r)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{kr}$，其中$r\in N^+$ $= 1+\binom{n}{1}x^r+\binom{n+1}{2}x^{2r}+\cdots$	$\begin{cases}\binom{n+k/r-1}{k/r} = \binom{n+k/r-1}{n-1}, & r\mid k\\ 0, & r\nmid k\end{cases}$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ $= 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$	$\frac{1}{k!}$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$，其中$x>-1$ $= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$	$\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Discrete Mathematics - P212

可以通过生成函数求解计数问题

对于具有n个对象的集合，允许重复的r组合数 $\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{r+n-1}{r}$

令G(x)为关于无穷序列 $\{a_r\}$ 的生成函数，其中 a_r 为 n元素集合允许重复的r组合数

即有 $G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$

由于允许重复的r组合，则对n元素集合的元素选择不受限制

于是每个元素对G(x)的乘积展开式贡献因子 $(1+x+x^2+\cdots)$

相当于该元素被使用了 0, 1, 2, ⋯ 次

则有 $G(x) = (1+x+x^2+\cdots)^n = \left[\frac{1}{1-x}\right]^n$，其中 $|x|<1$

于是 $G(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = [1+(-x)]^{-n}$

$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} (-x)^r$

$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$

于是有 x^r 的系数 $a_r = \binom{n+r-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}$

其中 $r \geq n$

对于具有n个对象的集合，允许重复的r组合且每种对象至少选1个的方法数为 $\binom{r-1}{n-1} = \binom{r-1}{r-n}$

令G(x)为关于无穷序列 $\{a_r\}$ 的生成函数，其中 a_r 为所计算的方法数

即有 $G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$

由于允许重复的r组合，则对n元素集合的元素选择相互独立

于是每个元素对G(x)的乘积展开式贡献因子 $(x+x^2+x^3+\cdots)$

相当于该元素被选择了 1, 2, 3, ⋯ 次

则有 $G(x) = (x+x^2+x^3+\cdots)^n = x^n(1+x+x^2+\cdots)^n$

则 $G(x) = \frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n(1-x)^{-n}$，其中 $|x|<1$

$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$

$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^{n+r}$

$= \sum_{t=n}^{\infty} \binom{t-1}{t-n} x^t = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} x^r$

于是有 x^r 的系数 $a_r = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$

考虑使用任意数量的1元，2元，5元硬币支付总价为r元的自动售货机商品的方法数

令G(x)为关于无穷序列 $\{a_r\}$ 的生成函数，其中 a_r 为所计算的方法数

当不考虑投入顺序时，1元硬币贡献 $(1+x+x^2+\cdots)$，2元硬币贡献 $(1+x^2+x^4+\cdots)$，5元硬币贡献 $(1+x^5+x^{10}+\cdots)$

则有 $G(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$

当考虑投入顺序时，恰好投入n枚硬币的贡献是 $(x+x^2+x^5)^n$

则有 $G(x) = 1+(x+x^2+x^5)+(x+x^2+x^5)^2+\cdots$

$= \frac{1}{1-(x+x^2+x^5)} = \frac{1}{1-x-x^2-x^5}$