Discrete Mathematics - P235

关系数量

如果定义在有限集A上的关系R是对称的，其中$|A|=n$

对于任意 $a,b\in A$，只要 $(a,b)\in R$，则有 $(b,a)\in R$

可知对于每一对 $a,b\in A$，或者 (a,b)，(b,a) 都包含于R

或者 (a,b)，(b,a) 都不包含于R

又当 $a=b$ 时，(a,b) 有 n 种不同选择

当 $a\neq b$ 时，(a,b) 有 $\binom{n}{2}$ 种不同选择

于是定义在n元素集合A的对称关系R共有 $2^{n+\binom{n}{2}} = 2^{n(n+1)/2}$ 个

如果定义在有限集A上的关系R是自反的且对称的，其中$|A|=n$

可知对于任意 $a\in A$，有 $(a,a)\in R$

而对于任意 $a,b\in A$ 且 $a\neq b$，$(a,b),(b,a)$ 或者同时包含于R，或者同时不包含于R

于是定义在n元素集合A的自反且对称的关系R共有 $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)/2}$ 个

如果定义在有限集A上的关系R是反对称的，其中$|A|=n$

可知对于任意 $a,b\in A$，如果有 $(a,b)\in R$ 且 $(b,a)\in R$，则有 $a=b$

则对于任意 $a\in A$，(a,a) 包含或不包含于R均满足反对称的要求

对于任意 $a,b\in A$，且 $a\neq b$，考虑 (a,b) 与 (b,a) 可知

或者 $(a,b)\in R$ 但 $(b,a)\notin R$

或者 $(a,b)\notin R$ 但 $(b,a)\in R$

或者 $(a,b)\notin R$ 且 $(a,b)\notin R$

于是对于每一对 a,b，均有3种不同的选择

于是定义在n元素集合A的反对称关系R共有 $2^n\cdot 3^{\binom{n}{2}} = 2^n\cdot 3^{n(n-1)/2}$ 个

如果定义在有限集A上的关系R是非对称的，其中$|A|=n$

可知对于任意 $a,b\in A$，如果有 $(a,b)\in R$，则有 $(b,a)\notin R$

则对于任意 $a\in A$，可知 $(a,a)\notin R$

对于任意 $a,b\in A$，且 $a\neq b$，有 $(a,b)\notin R \vee (b,a)\notin R$

于是对于每一对 a,b，均有3种不同选择

于是定义在n元素集合A的非对称关系R共有 $3^{\binom{n}{2}} = 3^{n(n-1)/2}$ 个

对于定义在n元素集合A上的传递关系R的个数，目前没有显式公式

令 T_n 为n元素集合的传递关系个数，P_n 为n元素集合上的偏序个数，$S(n,k)$ 为第二类斯特林数

则有 $T_n=\sum_{k=1}^{n} N_k(n)P_n$，其中 $N_k(n)=\sum_{s=0}^{k}\binom{n}{s}S(n-s,k-s)$

Discrete Mathematics - P236

逆关系 (inverse relation)，对于从集合A到集合B的关系R

则有关系R的逆关系为从集合B到集合A的关系，记为R^{-1}

有 $R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$，其中 $R^{-1}\subseteq B\times A$

补关系 (complementary relation)，对于从集合A到集合B的关系R

则有关系R的补关系为从集合A到集合B的关系，记为$\overline{R}$

有 $\overline{R}=\{(a,b)\mid(a,b)\notin R\}$，其中 $\overline{R}\subseteq A\times B$

且有 $R\cap\overline{R}=\emptyset$，$R\cup\overline{R}=A\times B$

对于定义在集合A上的关系R，关系R是对称的当且仅当 $R=R^{-1}$

证明过程有，当定义在集合A上的关系R是对称的

则对于任意 $a,b\in R$，或者有 $(a,b)\in R\land(b,a)\in R$

或者有 $(a,b)\notin R\land(b,a)\notin R$

又 R^{-1}也是定义在集合A上的关系，且 $(a,b)\in R\longrightarrow(b,a)\in R^{-1}$

于是当 $(a,b)\in R$ 时，有 $(b,a)\in R$，对于任意 $a,b\in A$

则有 $(b,a)\in R^{-1}$ 且 $(a,b)\in R^{-1}$

当 $(a,b)\notin R$ 时，有 $(b,a)\notin R$

则有 $(b,a)\notin R^{-1}$ 且 $(a,b)\notin R^{-1}$

于是有关系 $R=R^{-1}$

当定义在集合A上的关系R满足 $R=R^{-1}$

则对于任意 $a,b\in A$，如果有 $(a,b)\in R$，则有 $(b,a)\in R^{-1}$

又 $R=R^{-1}$，于是有 $(b,a)\in R$

即对于任意 $a,b\in A$，有 $(a,b)\in R\longrightarrow(b,a)\in R$

于是有关系R是对称的

于是对定义在集合A上的关系R是对称的当且仅当 $R=R^{-1}$

合成 (composite)，对于从集合A到集合B的关系R和从集合B到集合C的关系S

则关系R与关系S的合成为从集合A到集合C的关系记为 $S\circ R$

对于任意 $a\in A$，$c\in C$，如果存在 $b\in B$，

使得 $(a,b)\in R$，$(b,c)\in S$，则有 $(a,c)\in S\circ R$

即 $\forall_{a\in A}\forall_{c\in C}((a,c)\in S\circ R\longleftrightarrow\exists_b((a,b)\in R\land(b,c)\in S))$

注意这种关系合成的记法与函数合成是一致的，如 $f:A\to B$，$g:B\to C$，$g\circ f:A\to C$

但是在部分环境下，关系R与S的合成也可以记为 $R\circ S$

Discrete Mathematics - P237

关系的幂 (powers)，对于定义在集合A上的关系R，可以递归地定义关系R的幂

有 $R^1 = R$，$R^{n+1} = R^n \circ R$，其中 $n = 1, 2, 3, \cdots$

对于定义在集合A上的关系R，关系R是传递的当且仅当对任意 $n \in N^+$，有 $R^n \subseteq R$

证明过程有，当对于任意 $n = 1, 2, 3, \cdots$，有 $R^n \subseteq R$ 时

则特别地有 $R^2 \subseteq R$

对于任意 $a, b, c \in A$，如果有 $(a,b) \in R \land (b,c) \in R$

则根据合成定义有 $(a,c) \in R^2$，

又 $R^2 \subseteq R$，于是有 $(a,c) \in R$

则对于任意 $a,b,c \in A$，有 $(a,b) \in R \land (b,c) \in R \to (a,c) \in R$

即关系R是传递的

当关系R是传递的，基础步骤：对于 $n=1$，$R^1 = R \subseteq R$ 平凡地成立

递归步骤：假设对于任意 $n \in N^+$，有 $R^n \subseteq R$，则考虑 R^{n+1}

对于任意 $a, b \in A$，如果有 $(a,b) \in R^{n+1}$

又根据关系幂的定义有 $R^{n+1} = R^n \circ R$

则存在 $x \in A$，使得 $(a,x) \in R \land (x,b) \in R^n$

(IH) 由于 $R^n \subseteq R$，于是有 $(x,b) \in R$

又关系R是传递的，于是有 $(a,x) \in R \land (x,b) \in R \to (a,b) \in R$

即 $(a,b) \in R^{n+1} \to (a,b) \in R$，即 $R^{n+1} \subseteq R$

于是根据数据归纳法，如果关系R是传递的，则对于任意 $n \in N^+$，有 $R^n \subseteq R$

对于定义在集合A上的关系R，关系R是反对称的当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$

其中 Δ 为定义在A上的恒等关系 (diagonal relation)，有 $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$

证明过程有，当关系R是反对称时，$\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} ((a,b) \in R \land (b,a) \in R \to a = b)$

即对于任意 $a \neq b$，有 $(a,b) \notin R \lor (b,a) \notin R$

又关系R的逆关系 $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

于是对于任意 $a \neq b$，有 $(a,b) \notin R \lor (a,b) \notin R^{-1}$，即 $(a,b) \notin R \cap R^{-1}$

则对于任意 $a, b \in A$，有 $(a,b) \in R \cap R^{-1} \to a = b$，

于是有 $(a,b) \in R \cap R^{-1} \to (a,b) \in \Delta$，即 $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$

当 $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$ 时，又 $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$，

于是对于任意 $a \neq b$，$(a,b) \notin \Delta$，即有 $(a,b) \notin R \cap R^{-1}$

则有 $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} ((a \neq b) \to (a,b) \notin R \lor (a,b) \notin R^{-1})$

$\equiv \forall_{a \in A} \forall_{b \in A} ((a \neq b) \to (a,b) \notin R \lor (b,a) \notin R^{-1})$

即关系R是反对称的

Discrete Mathematics - P238

对于定义在集合A的关系R，R是自反的当且仅当 R^{-1} 是自反的

证明过程有，当定义在集合A上的关系R是自反的，则对于任意 $a\in A$，有 $(a,a)\in R$

又关系R的逆关系 $R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$

则对于任意 $a\in A$，有 $(a,a)\in R \longrightarrow (a,a)\in R^{-1}$

于是有关系 R^{-1} 是自反的

当定义在集合A上的关系R的逆关系 R^{-1} 是自反的

则可知对于任意 $a\in A$，有 $(a,a)\in R^{-1}$

假设存在 $a\in A$，有 $(a,a)\notin R$，即R不是自反的

则由于 $(a,a)\notin R$，必定有 $(a,a)\notin R^{-1}$，与 R^{-1} 是自反的矛盾

于是有对于任意 $a\in A$，有 $(a,a)\in R$，即关系R为自反的

于是有定义在集合A上的关系R是自反的当且仅当 R^{-1} 是自反的

对于定义在集合A上的关系R，R是自反的当且仅当 $\overline{R}$ 是反自反的

证明过程有，当定义在集合A上的关系R是自反的，则对于任意 $a\in A$，有 $(a,a)\in R$

又关系R的补关系 $\overline{R}=\{(a,b)\mid(a,b)\notin R\}$

则对于任意 $a\in A$，有 $(a,a)\in R \longrightarrow (a,a)\notin \overline{R}$

于是有关系 $\overline{R}$ 是反自反的

当定义在集合A上的关系R的补关系 $\overline{R}$ 是反自反的

则可知对于任意 $a\in A$，有 $(a,a)\notin \overline{R}$

假设存在 $a\in A$，有 $(a,a)\notin R$，即R不是自反的

则由于 $(a,a)\notin R$，必定有 $(a,a)\in \overline{R}$，与 $\overline{R}$ 是反自反的矛盾

于是有对于任意 $a\in A$，有 $(a,a)\in R$，即关系R是自反的

于是有定义在集合A上的关系R是自反的当且仅当 $\overline{R}$ 是反自反的

对于定义在集合A上的自反关系R，对于任意 $n\in N^+$，有 R^n 是自反的

证明过程有，基础步骤：当 $n=1$ 时，$R^1=R$ 是自反的平凡地为真

递归步骤：假设对任意 $n\in N^+$，有 R^n 是自反的，则考虑 R^{n+1}

根据关系幂的定义有 $R^{n+1}=R^n\circ R$

又对于任意 $a\in A$，则有 $(a,a)\in R$

又(IH) R^n 是自反的，则有 $(a,a)\in R^n$

于是对于任意 $a\in A$，$(a,a)\in R\wedge(a,a)\in R^n\longrightarrow(a,a)\in R^{n+1}$

于是根据数学归纳法，对于定义在集合A上的自反关系R

则对于任意 $n\in N^+$，有 R^n 是自反的

Discrete Mathematics - P239

对于定义在集合A上的关系R，如果R是自反的和传递的，则对于任意 $n\in N^+$，有 $R^n = R$

证明过程有，基础步骤：当 $n=1$ 时，$R^1 = R$ 平凡地为真

当 $n=2$ 时，根据定义有 $R^2 = R\circ R$

由于关系R是自反的，于是有 $\forall_{a\in A}\ (a,a)\in R$

则对于任意 $(a,b)\in R$，又有 $(a,a)\in R$

则有 $(a,a)\in R \land (a,b)\in R \rightarrow (a,b)\in R^2$

假设存在 $(a,b)\in R^2$ 有 $(a,b)\notin R$

则可知存在 $c\in R$，使得 $(a,c)\in R$ 且 $(c,b)\in R$

满足 $(a,c)\in R \land (c,b)\in R \rightarrow (a,b)\in R^2$

又关系R是传递的，则有 $(a,c)\in R \land (c,b)\in R \rightarrow (a,b)\in R$

与 $(a,b)\notin R$ 相矛盾

于是对于任意 $(a,b)\in R^2$，有 $(a,b)\in R$

于是有 $R^2 = R$

递归步骤：假设对任意正整数 $n\geq 2$，有 $R^n = R$，则考虑 R^{n+1}

则有 $R^{n+1} = R^n\circ R = R\circ R = R^2 = R$

于是根据数学归纳法，对于定义在集合A上的关系R

如果R是自反的和传递的，则对于任意 $n\in N^+$，有 $R^n = R$

对于定义在集合A上的对称关系R，对于任意 $n\in N^+$，有 R^n 是对称的

证明过程有，基础步骤：当 $n=1$ 时，$R^1 = R$ 是对称的平凡地为真

递归步骤：对于任意正整数n，假设 R^n 是对称的，则考虑 R^{n+1}

有 $R^{n+1} = R^n\circ R = R\circ R\circ\cdots\circ R = R\circ R^n$

对于任意 $(a,b)\in R^{n+1}$，存在 $x\in A$，使得 $(a,x)\in R\land (x,b)\in R^n$

又 $(a,x)\in R \xrightarrow{(IH)} (x,a)\in R$，$(x,b)\in R^n \xrightarrow{(IH)} (b,x)\in R^n$

则有 $(b,x)\in R^n \land (x,a)\in R \longrightarrow (b,a)\in R^{n+1}$

即关系 R^{n+1} 是对称的

于是根据数学归纳法，对于定义在集合A上的对称关系R，对于任意 $n\in N^+$，有 R^n 是对称的

结合律　对于关系 $R\subseteq A\times B$，$S\subseteq B\times C$，$T\subseteq C\times D$，有 $T\circ(S\circ R) = (T\circ S)\circ R$

证明过程有，对于任意 $(a,d)\in T\circ(S\circ R)$，其中 $a\in A$，$d\in D$，

则存在 $c\in C$，使得 $(c,d)\in T\land (a,c)\in S\circ R$，再存在 $b\in B$，使得 $(a,b)\in R$，$(b,c)\in S$

于是有 $(b,c)\in S\land (c,d)\in T \longrightarrow (b,d)\in T\circ S$，

$(a,b)\in R\land (b,d)\in (T\circ S) \longrightarrow (T\circ S)\circ R$，即有 $T\circ(S\circ R)\subseteq (T\circ S)\circ R$

同理地有 $(T\circ S)\circ R\subseteq T\circ(S\circ R)$，于是有 $T\circ(S\circ R) = (T\circ S)\circ R$

Discrete Mathematics - P240

关系运算 对于定义[redacted]在从集合A到集合B的关系 $R, S \subseteq A\times B$, 可以应用集合运算

并集(union): $R\cup S \subseteq A\times B$

交集(intersection): $R\cap S \subseteq A\times B$

差集([redacted] subtraction): $R-S$ 或 $R\setminus S \subseteq A\times B$

对称差(symmetric difference): $R\oplus S \subseteq A\times B$

于是有 $R\cup S$, $R\cap S$, $R\setminus S$, $R\oplus S$ 都是从集合A到集合B的关系

对于从集合A到集合B的关系 $R\subseteq A\times B$, 以及从集合B到集合C的关系 $S_1, S_2 \subseteq B\times C$

则有 $(S_1\cup S_2)\circ R = (S_1\circ R)\cup(S_2\circ R)$

$(S_1\cap S_2)\circ R \subseteq (S_1\circ R)\cap(S_2\circ R)$

证明过程有, 对于任意 $(a,c)\in(S_1\cup S_2)\circ R$, 其中 $a\in A$, $c\in C$

存在元素 $b\in B$, 使得 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in(S_1\cup S_2)$

又 $(S_1\cup S_2)$, S_1, S_2 均为从集合B到集合C的关系

于是有 $(b,c)\in S_1 \vee (b,c)\in S_2$

又 $(a,b)\in R \wedge ((b,c)\in S_1 \vee (b,c)\in S_2)$

$\equiv ((a,b)\in R \wedge (b,c)\in S_1) \vee ((a,b)\in R \wedge (b,c)\in S_2)$

即有 $(a,c)\in(S_1\circ R) \vee (a,c)\in(S_2\circ R) \longrightarrow (a,c)\in(S_1\circ R)\cup(S_2\circ R)$

于是[redacted]有 $(S_1\cup S_2)\circ R \subseteq (S_1\circ R)\cup(S_2\circ R)$

对于任意 $(a,c)\in(S_1\circ R)\cup(S_2\circ R)$, 即 $(a,c)\in S_1\circ R \vee (a,c)\in S_2\circ R$

存在元素 $b\in B$, 使得 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in S_1 \vee (b,c)\in S_2$

于是有 $(a,c)\in S_1\circ R \vee (a,c)\in S_2\circ R$

$\equiv ((a,b)\in R \wedge (b,c)\in S_1) \vee ((a,b)\in R \wedge (b,c)\in R_2)$

$\equiv (a,b)\in R \wedge ((b,c)\in S_1 \vee (b,c)\in S_2)$

$\equiv (a,b)\in R \wedge (b,c)\in(S_1\cup S_2) \longrightarrow (a,c)\in(S_1\cup S_2)\circ R$

于是有 $(S_1\circ R)\cup(S_2\circ R) \subseteq (S_1\cup S_2)\circ R$

于是有 $(S_1\cup S_2)\circ R = (S_1\circ R)\cup(S_2\circ R)$

对于任意 $(a,c)\in(S_1\cap S_2)\circ R$, 其中 $a\in A$, $c\in C$

存在元素 b, 使得 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in(S_1\cap S_2)$

于是有 $(a,b)\in R \wedge ((b,c)\in S_1 \wedge (b,c)\in S_2)$

$\equiv ((a,b)\in R \wedge (b,c)\in S_1) \wedge ((a,b)\in R \wedge (b,c)\in S_2)$

$\equiv (a,c)\in S_1\circ R \wedge (a,c)\in S_2\circ R \equiv (a,c)\in(S_1\circ R)\cap(S_2\circ R)$

于是有 $(S_1\cap S_2)\circ R \subseteq (S_1\circ R)\cap(S_2\circ R)$

注意对于 $R=\{(a,b_1),(a,b_2)\}$, $S_1=\{(b_1,c)\}$, $S_2=\{(b_2,c)\}$, $S_1\cap S_2=\emptyset$

于是 $S_1\circ R=\{(a,c)\}$, $S_2\circ R=\{(a,c)\}$, $(S_1\cap S_2)\circ R=\emptyset$, 于是不一定有 $(S_1\cap S_2)\circ R=(S_1\circ R)\cap(S_2\circ R)$

Discrete Mathematics - P241

关系运算

对于从集合A到集合B的关系 $R_1, R_2 \subseteq A\times B$，以及从集合B到集合C的关系 $S\subseteq B\times C$

则有 $S\circ(R_1\cup R_2) = (S\circ R_1)\cup(S\circ R_2)$

$S\circ(R_1\cap R_2) \subseteq (S\circ R_1)\cap(S\circ R_1)$

证明过程有，对于任意 $(a,c)\in S\circ(R_1\cup R_2)$，其中 $a\in A$，$c\in C$

存在元素 $b\in B$，使得 $(a,b)\in R_1\cup R_2$ 且 $(b,c)\in S$

即有 $(a,b)\in R_1 \vee (a,b)\in R_2$

则 $((a,b)\in R_1 \vee (a,b)\in R_2)\wedge (b,c)\in S$

$\equiv ((a,b)\in R_1 \wedge (b,c)\in S)\vee((a,b)\in R_2\wedge (b,c)\in S)$

即 $(a,c)\in S\circ R_1 \vee (a,c)\in S\circ R_2 \longrightarrow (a,c)\in(S\circ R_1)\cup(S\circ R_2)$

于是有 $S\circ(R_1\cup R_2)\subseteq(S\circ R_1)\cup(S\circ R_2)$

对于任意 $(a,c)\in(S\circ R_1)\cup(S\circ R_2)$，其中 $a\in A$，$c\in C$

即有 $(a,c)\in(S\circ R_1) \vee (a,c)\in(S\circ R_2)$

存在元素 $b\in B$，使得 $(a,b)\in R_1\vee(a,b)\in R_2$ 且 $(b,c)\in S$

则 $(a,c)\in(S\circ R_1)\vee(a,c)\in(S\circ R_2)$

$\equiv((a,b)\in R_1\wedge(b,c)\in S)\vee((a,b)\in R_2\wedge(b,c)\in S)$

$\equiv((a,b)\in R_1\vee(a,b)\in R_2)\wedge(b,c)\in S$

即 $(a,b)\in(R_1\cup R_2)\wedge(b,c)\in S \longrightarrow (a,c)\in S\circ(R_1\cup R_2)$

于是有 $(S\circ R_1)\cup(S\circ R_2)\subseteq S\circ(R_1\cup R_2)$

于是有 $S\circ(R_1\cup R_2) = (S\circ R_1)\cup(S\circ R_2)$

对于任意 $(a,c)\in S\circ(R_1\cap R_2)$，其中 $a\in A$，$c\in C$

存在元素 $b\in B$，使得 $(a,b)\in(R_1\cap R_2)$ 且 $(b,c)\in S$

即有 $(a,b)\in R_1\wedge(a,b)\in R_2$

则 $((a,b)\in R_1\wedge(a,b)\in R_2)\wedge(b,c)\in S$

$\equiv((a,b)\in R_1\wedge(b,c)\in S)\wedge((a,b)\in R_2\wedge(b,c)\in S)$

即 $(a,c)\in S\circ R_1\wedge(a,c)\in S\circ R_2 \longrightarrow (a,c)\in(S\circ R_1)\cap(S\circ R_2)$

于是有 $S\circ(R_1\cap R_2)\subseteq(S\circ R_1)\cap(S\circ R_2)$

对于任意从集合A到集合B的关系 R，有 $\overline{(\overline{R})} = R$，$(R^{-1})^{-1} = R$

证明过程有，对于任意 $(a,b)\in R$，其中 $a\in A$，$b\in B$

有 $(a,b)\in R \longleftrightarrow (a,b)\notin\overline{R}\longleftrightarrow(a,b)\in\overline{\overline{R}}$

于是有 $\overline{\overline{R}} = R$

有 $(a,b)\in R\longleftrightarrow(b,a)\in R^{-1}\longleftrightarrow(a,b)\in(R^{-1})^{-1}$

于是有 $(R^{-1})^{-1} = R$

Discrete Mathematics - P242

对于有限集合A，且有 $|A|=n$，则对于任意定义在集合A上的关系R，有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

证明过程有，首先有 $\bigcup_{i=1}^{n} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 平凡地为真

则对于 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = (\bigcup_{i=1}^{n} R^i) \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^i)$

则考虑对于任意正整数 $k>n$，有关系 $R^k = R \circ R \circ \cdots \circ R$

对于任意 $(a,b) \in R^k$，则根据关系的幂的定义

存在 $a_0=a, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k=b \in A$

且有 $(a_0,a_1), (a_1,a_2), \cdots, (a_{k-1},a_k) \in R$

由于 $|A|=n$，而 $k>n$，则根据鸽笼原理

存在 $1 \le i < j \le k$，使得 $a_i = a_j$

则有序列 $(a_0,a_1), \cdots, (a_{i-1},a_i), \cdots, (a_{j+1},a_{j+2}), \cdots, (a_{k-1},a_k) \in R$

于是可知 $(a,b) = (a_0,a_k) \in R^{k'}$，其中 $k' = k-(j-i)$

当 $k' = k-(j-i) \le n$ 时

可知 $(a,b) \in R^{k'}$，即 $(a,b) \in \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

而当 $k' = k-(j-i) > n$ 时，则重复步骤直到存在 $k'' < n$

且有 $(a,b) \in R^{k''}$，即 $(a,b) \in \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

于是可知对于任意 $k>n$，有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

则有 $\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$，即 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

于是有对于定义在有限集A上的任意关系R，有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$，其中 $|A|=n \in N^+$

对于集合A与集合B，任意从集合A到集合B的关系R，有 $(\overline{R})^{-1} = \overline{(R^{-1})}$

证明过程有，首先有关系R的补关系 $\overline{R} \subseteq A \times B$，则 $(\overline{R})^{-1} \subseteq B \times A$，$\overline{(R^{-1})} \subseteq B \times A$

则对于任意 $(b,a) \in (\overline{R})^{-1}$，其中 $a \in A$，$b \in B$

则有 $(a,b) \in \overline{R}$

假设 $(b,a) \notin \overline{(R^{-1})}$，则有 $(b,a) \in R^{-1}$

于是有 $(a,b) \in R$，与 $(a,b) \in \overline{R}$ 相矛盾

则有 $(b,a) \in \overline{(R^{-1})}$

于是有 $(\overline{R})^{-1} \subseteq \overline{(R^{-1})}$

再对于任意 $(b,a) \in \overline{(R^{-1})}$，其中 $a \in A$，$b \in B$

可知 $(b,a) \notin R^{-1}$，即有 $(a,b) \notin R$

假设 $(b,a) \notin (\overline{R})^{-1}$，则有 $(b,a) \notin \overline{R}$

于是有 $(a,b) \in R$，与 $(a,b) \notin R$ 相矛盾

则有 $(b,a) \in (\overline{R})^{-1}$

于是有 $\overline{(R^{-1})} \subseteq (\overline{R})^{-1}$

于是有对于任意从集合A到集合B的关系R，有 $(\overline{R})^{-1} = \overline{(R^{-1})}$

Discrete Mathematics - P243

对于从集合A到集合B的关系 $R, S \subseteq A\times B$，关系的逆服从分配律

有 $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$

$(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$

$(R\setminus S)^{-1} = R^{-1}\setminus S^{-1}$

证明过程有，首先有 $R, S, R\cup S, R\cap S, R\setminus S$ 都是从集合A到集合B的关系

于是 $R^{-1}, S^{-1}, (R\cup S)^{-1}, (R\cap S)^{-1}, (R\setminus S)^{-1}$ 都是从集合B到集合A的关系

则对于任意 $(b,a)\in(R\cup S)^{-1}$，其中 $b\in B$, $a\in A$

则有 $(b,a)\in(R\cup S)^{-1}$

$\longleftrightarrow (a,b)\in R\cup S$

$\longleftrightarrow (a,b)\in R \vee (a,b)\in S$

$\longleftrightarrow (b,a)\in R^{-1} \vee (b,a)\in S^{-1}$

$\longleftrightarrow (b,a)\in R^{-1}\cup S^{-1}$

于是有 $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$

而对于任意 $(b,a)\in(R\cap S)^{-1}$，其中 $b\in B$, $a\in A$

则有 $(b,a)\in(R\cap S)^{-1}$

$\longleftrightarrow (a,b)\in R\cap S$

$\longleftrightarrow (a,b)\in R \wedge (a,b)\in S$

$\longleftrightarrow (b,a)\in R^{-1} \wedge (b,a)\in S^{-1}$

$\longleftrightarrow (b,a)\in R^{-1}\cap S^{-1}$

于是有 $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$

而对于任意 $(b,a)\in(R\setminus S)^{-1}$，其中 $b\in B$, $a\in A$

则有 $(b,a)\in(R\setminus S)^{-1}$

$\longleftrightarrow (a,b)\in R\setminus S$

$\longleftrightarrow (a,b)\in R \wedge (a,b)\notin S$

$\longleftrightarrow (b,a)\in R^{-1} \wedge (b,a)\notin S^{-1}$

$\longleftrightarrow (b,a)\in R^{-1}\setminus S^{-1}$

于是有 $(R\setminus S)^{-1} = R^{-1}\setminus S^{-1}$

对于从集合A到集合B的关系 $F\subseteq A\times B$，如果有 $F=\emptyset$，则有 $F^{-1}=F$

证明过程有，根据关系的逆的定义，对于任意 $(b,a)\in B\times A$，

$(b,a)\in F^{-1} \longleftrightarrow (a,b)\in F$

又对于任意 $(a,b)\in A\times B$，有 $(a,b)\notin F$，于是对任意 $(b,a)\in B\times A$，$(b,a)\notin F^{-1}$

于是有 $F^{-1}=\emptyset=F$　而 F^{-1} 实际上是类型为 (b,a) 的空集 $\emptyset$

称 F 为从集合A到集合B的空关系(empty relation)，注意 F 实际上是类型为 (a,b) 的空集 $\emptyset$

Discrete Mathematics - P244

对于定义在集合A到集合B上的关系R，S，有 $R \subseteq S$ 当且仅当 $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

证明过程有，定义在集合A到集合B上的关系 $R, S \subseteq A \times B$，则有 $R^{-1}, S^{-1} \subseteq B \times A$

对于任意 $(a,b) \in R$，其中 $a \in A$, $b \in B$

由于 $R \subseteq S$，于是有 $(a,b) \in S$

又有 $(b,a) \in R^{-1} \longleftrightarrow (a,b) \in R$

$(a,b) \in R \longrightarrow (a,b) \in S$，而 $(a,b) \in S \longleftrightarrow (b,a) \in S^{-1}$

于是 $(b,a) \in R^{-1} \longrightarrow (b,a) \in S^{-1}$

即有 $((a,b) \in R \longrightarrow (a,b) \in S) \longleftrightarrow ((b,a) \in R^{-1} \longrightarrow (b,a) \in S^{-1})$

即 $R \subseteq S \longleftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$

n元关系 (n-ary relation)，对于集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 为有序n元组集合

即 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}$

则定义在集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上的n元关系 $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 称为关系的域 (domain)

正整数 n 称为关系的阶 (degree)

关系数据模型 (relational data model)，指使用n元关系表示数据库的模型

数据库由记录 (record) 组成，记录为由域 (field) 构成的n元组，域为n元组的数据项

用于表示数据库的关系称为表 (table)，表中的每个列对应于数据库的一个属性 (attribute)

主键 (primary key)，指n元关系中的一个域，使得一个n元组可以被这个域的值唯一地确定

即对于关系中在这个域中出现的所有值，

对每个值指派唯一一个n元关系中的n元组，即类似于一个函数关系

则称这个域为n元关系的主键

如果对于n元关系中的一组域，使得一个n元组可以被这一组域的值唯一地确定

即对于n元关系中在这一组域中出现的所有不同的有序元组

对每个有序元组可以指派唯一一个n元关系中的n元组

则称这一组域为n元关系的复合主键 (composite key)

对于给定的n元关系，通常选择无论数据库如何改变都持续存在的域作为主键

关系的外延 (extension) 为当前n元关系包含的所有n元组

关系的内涵 (intension) 为数据库中更持久的内容 (more permanent part)

including name and attribute

Discrete Mathematics - P245

选择运算 (selection operator)，在n元关系中选出满足特定条件的n元组

对于定义在集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上的n元关系R

命题C为关系R中元素可能满足的一个条件

则选择运算符 S_C 将n元关系R映射到R中满足条件C的所有n元组构成的n元关系

即有 $S_C(R) = \{t \in R \mid C(t)\}$

在关系代数中，也记为 $\sigma_{\varphi = P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m} R$

有 $\sigma_\varphi R = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in R \mid P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m\}$

投影运算 (projection operator)，从n元关系通过删除域产生一个阶更小的关系

对于定义在集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上的n元关系R

给定一组下标 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$，其中 $m \le n$

则投影运算符 $P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}$ 将n元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 映射到m元组 $(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m})$

或者说投影运算符 $P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}$ 删除了n元组中的 $n-m$ 个分量

即有 $P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R) = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}) \mid (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in R\}$

在关系代数中，也记为 $\pi_{a_1, a_2, \cdots, a_m} R$，关系R有属性集合 $r_1, r_2, \cdots, r_n$

有 $\pi_{a_1, a_2, \cdots, a_m} R = \{(a_1, a_2, \cdots, a_m) \mid (r_1, r_2, \cdots, r_n) \in R\}$，$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \subseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$

连接运算 (join operator)，把具有部分相同的域的n元关系组合起来

对于定义在集合 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-k}, C_1, C_2, \cdots, C_k$ 上的n元关系R，其中 $k \le n$

和定义在集合 $B_1, B_2, \cdots, B_{m-k}, C_1, C_2, \cdots, C_k$ 上的m元关系S，其中 $k \le m$

则连接运算符 $J_k(R, S)$ 返回一个 $n+m-k$ 元关系

包含所有 $n+m-k$ 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k, b_1, b_2, \cdots, b_{m-k})$

其中 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k) \in R$

$(b_1, b_2, \cdots, b_{m-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k) \in S$

即有 $J_k(R, S) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_{n-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k, b_1, b_2, \cdots, b_{m-k}) \mid$
$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k) \in R, (b_1, b_2, \cdots, b_{m-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k) \in S\}$

在关系代数中，也记为 $R \bowtie_{c_1, c_2, \cdots, c_k} S$

对于n元关系R，以及R中元素可能满足的条件 C_1, C_2，则有 $S_{C_1 \wedge C_2}(R) = S_{C_1}(S_{C_2}(R))$

证明过程有，首先有 $S_{C_2}(R) = \{t \in R \mid C_2(t)\}$

于是有 $S_{C_1}(S_{C_2}(R)) = \{t \in S_{C_2}(R) \mid C_1(t)\}$

$= \{t \in \{t \in R \mid C_2(t)\} \mid C_1(t)\}$

$= \{t \in R \mid C_2(t) \wedge C_1(t)\}$

$= S_{C_1 \wedge C_2}(R)$

Discrete Mathematics - P246

对于n元关系R，以及R中元素可能满足的条件C_1, C_2，则有$S_{C_1}(S_{C_2}(R)) = S_{C_2}(S_{C_1}(R))$

证明过程有，$S_{C_1}(S_{C_2}(R)) = S_{C_1 \land C_2}(R)$

$$= \{t \in R \mid C_1(t) \land C_2(t)\}$$

$$= \{t \in R \mid C_2(t) \land C_1(t)\}$$

$$= S_{C_2 \land C_1}(R) = S_{C_2}(S_{C_1}(R))$$

对于定义在集合$A_1, \cdots, A_n$上的n元关系R, S，以及R, S中元素可能满足的条件C

有$S_C(R \cup S) = S_C(R) \cup S_C(S)$

证明过程有，对于任意n元组$t \in S_C(R \cup S)$

则有$t \in S_C(R \cup S) \longleftrightarrow t \in (R \cup S) \land C(t)$

$$\longleftrightarrow (t \in R \lor t \in S) \land C(t)$$

$$\longleftrightarrow (t \in R \land C(t)) \lor (t \in S \land C(t))$$

$$\longleftrightarrow (t \in S_C(R)) \lor (t \in S_C(S))$$

$$\longleftrightarrow t \in S_C(R) \cup S_C(S)$$

对于定义在集合$A_1, \cdots, A_n$上的n元关系R, S，以及R, S中元素可能满足的条件C

有$S_C(R \cap S) = S_C(R) \cap S_C(R)$

证明过程有，对于任意n元组$t \in S_C(R \cap S)$

则有$t \in S_C(R \cap S) \longleftrightarrow t \in (R \cap S) \land C(t)$

$$\longleftrightarrow (t \in R \land t \in S) \land C(t)$$

$$\longleftrightarrow (t \in R \land C(t)) \land (t \in S \land C(t))$$

$$\longleftrightarrow (t \in S_C(R)) \land (t \in S_C(S))$$

$$\longleftrightarrow t \in S_C(R) \cap S_C(S)$$

对于定义在$A_1, \cdots, A_n$上的n元关系R, S，以及R, S中元素可能满足的条件C

有$S_C(R \setminus S) = S_C(R) \setminus S_C(S)$

证明过程有，对于任意n元组$t \in S_C(R \setminus S)$

则有$t \in S_C(R \setminus S) \longleftrightarrow t \in (R \setminus S) \land C(t)$

$$\longleftrightarrow (t \in R \land t \notin S) \land C(t)$$

$$\longleftrightarrow (t \in R \land C(t)) \land (t \notin S \land C(t))$$

$$\longleftrightarrow (t \in S_C(R)) \land (t \notin S_C(S))$$

$$\longleftrightarrow t \in S_C(R) \setminus S_C(S)$$

Discrete Mathematics - P247

对于定义在集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$上的n元关系R, S，对于任意$m \leq n$个下标$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$

有$P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R \cup S) = P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R) \cup P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(S)$

证明过程有，对于任意m元组$t_m \in P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R \cup S)$

存在n元组$t_n \in R \cup S$，使得t_m由t_n中的$i_1, i_2, \cdots, i_m$属性构成

又$t_n \in R \cup S \longleftrightarrow t_n \in R \vee t_n \in S$

故有$t_m \in P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R) \vee t_m \in P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(S)$

$\longleftrightarrow t_m \in P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R) \cup P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(S)$

但是注意对于投影运算，并不满足对交集与差集的分配律

即$P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R \cap S) = P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R) \cap P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(S)$

$P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R \setminus S) = P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(R) \setminus P_{i_1, i_2, \cdots, i_m}(S)$

不一定成立

如对于定义在$R \times R \times R$上的关系$R = \{(1,2,3)\}$，$S = \{(1,2,4)\}$

有$R \cap S = \emptyset$，$R \setminus S = \{(1,2,3)\}$

则$P_{1,2}(R \cap S) = \emptyset$，$P_{1,2}(R) \cap P_{1,2}(S) = \{(1,2)\}$

$P_{1,2}(R \setminus S) = \{(1,2)\}$，$P_{1,2}(R) \setminus P_{1,2}(S) = \emptyset$

对于定义在有穷集$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$上的二元关系R

可以用$m \times n$的0-1矩阵$M_R = (m_{ij})$表示

有$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$，其中$1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq n$

如$\{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$\updownarrow$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

对于定义在有限集$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$上的二元关系R

可知表示关系R的0-1矩阵M_R是$n \times n$矩阵

则如果关系R是自反的，即对于任意$1 \leq i \leq n$，有$(a_i, a_i) \in R$

即有矩阵M_R中，对于任意$1 \leq i \leq n$，有$m_{ii} = 1$，即主对角线元素均为1

类似地有如果关系R是反自反的，则对于任意$1 \leq i \leq n$，有$m_{ii} = 0$

如果关系R是对称的，则对于任意$1 \leq i \leq j \leq n$，有$(a_i, a_j) \in R \longleftrightarrow (a_j, a_i) \in R$

即有矩阵M_R中，对于任意$1 \leq i \leq j \leq n$，有$m_{ij} = m_{ji}$，即有$M_R = M_R^T$

故可知关系R是对称的当且仅当对应的0-1矩阵M_R是对称的

R是自反的 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$，R是对称的 $\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix}$

Discrete Mathematics - P248

对于定义在有限集$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$上的二元关系R，可知表示关系R的0-1矩阵M_R是$n\times n$矩阵

有对于布尔矩阵的并运算和交运算，即对于$m\times n$的布尔矩阵M,N

有 $M\vee N=(m_{ij}\vee n_{ij})$，$M\wedge N=(m_{ij}\wedge n_{ij})$

则对于定义在有限集A上的二元关系R_1,R_2，对应于矩阵M_{R_1},M_{R_2}

则对于二元关系$R_1\cup R_2$和$R_1\cap R_2$

对任意$1\le i,j\le n$，如果$(a_i,a_j)\in R_1\cup R_2$，则有$(a_i,a_j)\in R_1\vee(a_i,a_j)\in R_2$

则有在M_{R_1}中$m_{ij}=1\ \vee$ 在M_{R_2}中$m_{ij}=1$

于是有$M_{R_1}\cup M_{R_2}$表示关系$R_1\cup R_2$

对任意$1\le i,j\le n$，如果$(a_i,a_j)\in R_1\cap R_2$，则有$(a_i,a_j)\in R_1\wedge(a_i,a_j)\in R_2$

则有在M_{R_1}中$m_{ij}=1\ \wedge$ 在M_{R_2}中$m_{ij}=1$

于是有$M_{R_1}\cap M_{R_2}$表示关系$R_1\cap R_2$

有对于布尔矩阵的布尔积运算，即对于$m\times n$的布尔矩阵M_R，以及$n\times p$的布尔矩阵M_S

有 $M_R\odot M_S=(\bigvee_{k=1}^{n}(m_{Rik}\wedge m_{Skj}))=(t_{ij})$

其中二元关系R是定义在集合A到集合B上的二元关系

二元关系S是定义在集合B到集合C上的二元关系

而有限集$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$，$C=\{c_1,\cdots,c_p\}$

于是当且仅当存在$1\le k\le n$，有$(a_i,b_k)\in R$，且$(b_k,c_j)\in S$

于是有$(a_i,c_j)\in S\circ R$

于是可知$M_R\odot M_S=M_{S\circ R}$

对于$n\times n$的布尔矩阵M，有布尔幂 $M^{[k]}=\overbrace{M\odot M\odot\cdots\odot M}^{k}$，其中$k\in N^+$

则对于定义在有限集$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$上的关系R，有对应的布尔矩阵M_R

于是有 $M_{R^n}=M_R^{[n]}$，其中$n\in N^+$

证明过程有，基础步骤：当$n=1$时，$M_{R^1}=M_R^{[1]}$平凡地为真

递归步骤：假设对于任意$n\in N^+$，有$P(n)$为真，则考虑$P(n+1)$

有$R^{n+1}=R^n\circ R$，即对于任意$(a_i,a_j)\in R^{n+1}$

存在$1\le k\le n$，使得$(a_i,a_k)\in R\wedge(a_k,a_j)\in R^n$

又根据递归假设，有$M_{R^n}=M_R^{[n]}$

于是有$M_R^{[n+1]}=M_R\odot M_R^{[n]}$

$\overset{(IH)}{=}M_R\odot M_{R^n}=M_{R^n\circ R}=M_{R^{n+1}}$

于是根据数学归纳法，对于定义在有限集A上的二元关系R

对于任意正整数n，有$M_{R^n}=M_R^{[n]}$

Discrete Mathematics - P249

有向图 (directed graph, digraph), 指包含为顶点的元素和由这些元素构成的有序对(边)的集合

包含顶点(vertex)/结点(node)的集合 V

以及边(edge)/弧(arc)的集合 E, 其中元素为边集[redacted]V中元素的有序对, 即 $E \subseteq V \times V$

对于边 $(a,b) \in E$, 称点 a 为边 (a,b) 的起点(initial vertex)

点 b 为边 (a,b) 的终点(terminal vertex)

环(loop)为形如 (a,a) 的边, 表示为从顶点 a 到其自身的弧

对于定义在[redacted]有限集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的二元关系 R,

可以表示为有向图, 其点集 $V = A$, 且边 $(a_i, a_j) \in$ [redacted] E 当且仅当 $(a_i, a_j) \in R$

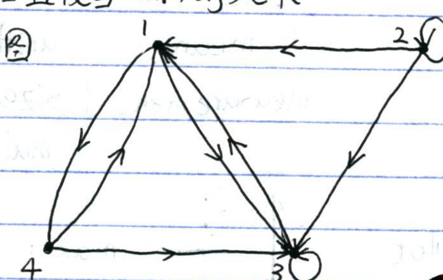
如 对于定义在 $\{1,2,3,4\}$ 上的二元关系 R, 表示为有向图

且有 $R = \{(1,3), (1,4),$

$(2,1), (2,2), (2,3),$

$(3,1), (3,3),$

$(4,1), (4,3)\}$



对于定义在有限集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的[redacted]二元关系 R, 以及表示其的有向图 $G(A, E)$

如果关系 R 是自反的, 即对于任意 $a \in A$, 有 $(a,a) \in R$

于是在有向图[redacted]G中, 有对于任意 $a \in A$, 有 $(a,a) \in E$

则[redacted]在有向图中每个顶点上均有一个环

如果关系 R 是反自反的, 即对于任意 $a \in A$, 有 $(a,a) \notin R$

于是在有向图 G 中, 有对于任意 $a \in A$, 有 $(a,a) \notin E$

则在有向图中, 所有的顶点上均不存在环

如果关系 R 是对称的, 即对于任意 $a, b \in A$, 有 $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$

于是在有向图 G 中, 有对于任意 $a, b \in A$, 有 $(a,b) \in E \rightarrow (b,a) \in E$

则在有向图中, 对于每一条不同顶点之间的边, 都存在一条方向相反的边

如果关系 R 是反对称的, 即对于任意 $a, b \in A$, 有 $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a = b$

于是在有向图中, 对于每一对不同顶点, 都不存在两条方向相反的边

如果关系 R 是非对称的, 即对于任意 $a, b \in A$, 有 $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$

于是在有向图中, 除了每一对不同顶点间都不存在两条方向相反的边

另外对每个顶点, 都不存在环

如果关系 R 是传递的, 即对于任意 $a, b, c \in A$, 有 $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

于是在有向图中, 对于任意 $a, b, c \in A$, 有 $(a,b) \in E \wedge (b,c) \in E \rightarrow (a,c) \in E$

即如果有一条从 a 到 b 的边且有一条从 b 到 c 的边, 则有一条从 a 到 c 的边

Discrete Mathematics - P250

对于定义在有限集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的二元关系 R

可以表示为 $n \times n$ 的 0-1 矩阵 M_R，或者表示为有向图 $G(A, E)$

则考虑二元关系 R 的逆 $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

又 R^{-1} 也是定义在有限集 A 上的二元关系

则表示关系 R^{-1} 的 0-1 矩阵 $M_{R^{-1}}$ 也是 $n \times n$ 矩阵

且有 $m'_{ij} = 1$ 当且仅当 $m_{ji} = 1$

于是可知 $M_{R^{-1}} = M_R^T$

则表示关系 R^{-1} 的有向图 G^{-1} 拥有相同的点集 A

且有 $(b,a) \in E^{-1}$ 当且仅当 $(a,b) \in E$

于是可知 $G^{-1}(A, E^{-1})$ 为 $G(A,E)$ 保留所有的环且将每一条不同顶点间的边反向得到

则考虑二元关系 R 的补关系 $\overline{R}$，$\overline{R} = \{(a,b) \in A \times A \mid (a,b) \notin R\}$

又 $\overline{R}$ 也是定义在有限集 A 上的二元关系

则表示关系 $\overline{R}$ 的 0-1 矩阵 $M_{\overline{R}}$ 也是 $n \times n$ 矩阵

定义对任意 $m \times n$ 的 0-1 矩阵 M 的非运算 $\neg M = (m'_{ij})$

有 $m'_{ij} = 1$ 当且仅当 $m_{ij} = 0$

于是可知 $M_{\overline{R}} = \neg M_R$

则表示关系 $\overline{R}$ 的有向图 $\overline{G}$ 拥有相同的点集 A

且有 $(a,b) \in \overline{E}$ 当且仅当 $(a,b) \notin E$

于是可知 $\overline{G}(A, \overline{E})$ 为 $G(A,E)$ 对每个顶点存在环则去掉环，不存在环则添加环

对每一对不同的顶点去掉已存在的边，并添加不存在的边

关系R关于性质P的闭包 (closure of relation R with respect to property P)

对于定义在集合A上的关系R，以及关系R可能具有性质P

如果存在包含关系R且具有性质P的定义在集合A上的关系S

且关系S是所有包含R且具有性质P的关系的子集

则称关系S是关系R关于性质P的闭包

对于定义在集合A上的关系R，以及关系R可能具有性质P

如果关系R关于性质P的闭包S存在，则S为所有包含R的具有性质P的关系的交集

证明过程有，令 $S_1, S_2, \cdots$ 为所有包含R的具有性质P的关系

则可知有对于任意 $i = 1, 2, \cdots$，$S \subseteq S_i$

即对于任意 $(a,b) \in S$，有 $(a,b) \in S_1 \wedge (a,b) \in S_2 \wedge \cdots \wedge (a,b) \in S_i \wedge \cdots$

于是有 $(a,b) \in S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_i \cap \cdots = \bigcap_i S_i$

于是有 $S = \bigcap_i S_i$，即 S 为所有包含R的具有性质P的关系的交集

Discrete Mathematics - P251

自反闭包 (reflexive closure)，对于定义在集合A上的二元关系R
如果定义在集合A上的二元关系S为包含关系R的最小的自反关系
则称关系S是关系R的自反闭包
对于给定的定义在集合A上的二元关系R，考虑构造关系R的自反闭包S
则对于任意元素 $a \in A$，向关系R中添加元素 (a,a)
于是可知最终结果为包含关系R的最小的自反关系，即关系R的自反闭包
对于给定的集合A，有定义在集合A上的关系 $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$
则称关系Δ为定义在集合A上的对角关系 (diagonal relation)
于是可知关系R的自反闭包 $S = R \cup \Delta$

对称闭包 (symmetric closure)，对于定义在集合A上的二元关系R
如果定义在集合A上的二元关系S为包含关系R的最小的对称关系
则称关系S是关系R的对称闭包
对于给定的定义在集合A上的二元关系R，考虑构造关系R的对称闭包S
则对于每个 $(a,b) \in R$，向关系R中添加有序对 (b,a)
于是可知最终结果为包含关系R的最小的对称关系，即关系R的对称闭包
对于给定的关系R，有逆关系 $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$
于是可知关系R的对称闭包 $S = R \cup R^{-1}$

注意对于其他定义在集合A上的二元关系R可能满足的性质：反自反，反对称，非对称
当关系R不是反自反的，则存在元素 $a \in A$，使得 $(a,a) \in R$
当关系R不是反对称的，则存在元素 $a, b \in A$，使得 $a \neq b \wedge (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$
当关系R不是非对称的，则存在元素 $a, b \in A$，使得 $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$
于是可知对于不满足反自反/反对称/非对称的二元关系R
无法通过向其中添加有序对 $(a,b) \in A \times A$ 使得新关系满足反自反/反对称/非对称
则关系R的反自反/反对称/非对称闭包S存在
当且仅当关系R是反自反/反对称/非对称的，
此时关系R的反自反/反对称/非对称闭包 $S = R$

可以非形式化地描述为，对于定义在集合A上的二元关系R可能满足的性质P
将性质P分解成两类性质的合取，即 $P_1 \wedge \cdots \wedge P_m \wedge Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n$，其中两两互不相关
$P_1, \cdots, P_m$ 可以描述为必须包含某些有序对，$Q_1, \cdots, Q_n$ 可以描述为必须排除某些有序对
则关系R关于性质P的闭包S存在当且仅当关系R满足 $Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n$
再通过添加有序对使得结果关系S满足 $P_1 \wedge \cdots \wedge P_m$，则关系S为关系R关于性质P的闭包