Discrete Mathematics- P9

定理陈述 数学定理通常断言一个性质相对于论域中所有元素都成立，数学里的标准约定是省略全称量词

其证明 第一步通常选择论域里的一个一般性元素

随后证明这个元素具有所考虑的性质] 证明对论域的任意元素c $P(c) \to Q(c)$ 为真

最后 全称引入蕴含着定理对论域里所有的元素都成立] 全称引入 $\forall x(P(x) \to Q(x))$

直接证明法 (direct proof) 通过证明当p为真时q必然为真来证明 $p \to q$ 为真

假设p为真，用推理规则构造，再表明q必须为真

奇数/偶数 ，$\forall_{n\in Z}((\exists_{k\in Z}\ n=2k+1) \to n$是奇数$)$，$\forall_{n\in Z}((\exists_{k\in Z}\ n=2k) \to n$是偶数$)$

间接证明法 不从前提开始以结论结束来证明形如 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 的定理的方法

反证法 (proof by contraposition) 利用条件语句 $p \to q$ 等价于其逆否命题 $\neg q \to \neg p$

通过证明当q是假时p一定是假来证明 $p \to q$ 为真

空证明 (vacuous proof) 利用p为假时 $p \to q$ 一定为真的事实证明 $p \to q$ 为真，常用于证明定理的特例

注意 空证明由前提着手，而平凡证明由结论着手

平凡证明 (trivial proof) 基于q为真的事实而对蕴含式 $p \to q$ 的证明，也常用于证明定理的特例

有理数 $\forall_{r\in R}((\exists_{p\in Z, q\in Z, q\neq 0}\ r=p/q) \to r \in Q)$，不是有理数的实数为无理数，有理数都能写成既约分数

归谬证明法 (proof of contradiction)，利用永真式 $((\neg p \to q) \land \neg q) \to p$，类似于取拒式

通过对某个命题r，$\neg p \to (r \land \neg r)$ 为真，则p为真，$(r \land \neg r \equiv F)$

通常用于证明单个命题，也可以用于证明条件语句

等价证明法 利用重言式 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q) \land (q \to p)$ 证明一个双条件命题的定理

当定理阐述多个命题等价，利用永真式 $(p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow p_n) \leftrightarrow (p_1 \to p_2) \land (p_2 \to p_3) \land \cdots \land (p_n \to p_1)$

反例 (counterexample)，使 $P(x)$ 为假的元素x，用于证明形如 $\forall x P(x)$ 的语句为假，

注意反例必须在论域中，否则无法证明 $\forall x P(x)$ 为假

错误证明 数学中的错误证明经常是算术和基本代数方面的，或是源于引入了不是前述步骤得出的逻辑推导

Discrete Mathematics - P10

循环论证 (circular reasoning) 或窃取命题 (begging the question)

指论证中一个或多个步骤是基于待证命题的真实性的推理

分情形证明 (proof by cases) 利用永真式 $[(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \to q] \leftrightarrow [(p_1 \to q) \wedge \cdots \wedge (p_n \to q)]$

即通过分别证明每条件语句 $p_i \to q$，进而推出命题 $p_1, \cdots, p_n$ 为前提的 $[(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \to q]$ 为真的结论

注意一定要覆盖定理中出现的所有可能情况，

即必须满足原前提 $p \to (p_1 \vee \cdots \vee p_n)$，才能经由分情形证明 $p \to q$

另外如果分情形的额外信息可能推进证明时，可以尝试分情形证明

穷举证明 (exhaustive proof, 或 proof by exhaustion) 是分情形证明的一种特例，适用于较少例子时

即在可以穷举论域中的元素时，通过检验每个元素为前提的语句来证明定理

不失一般性 (without loss of generality, WLOG)，断言通过证明一个情形，不需要额外地证明其他特定情形

特别注意假设可能忽略了一个情形可能与其他情形有着巨大的差异，导致失去一般性

注意分情形的常见错误之一是从个例中得出不正确的结论，除非每一种情形均覆盖

另一个是做出错误的假设导致在分情形中没有考虑所有情形

存在性证明 (existence proof)，通常断言在论域中特定类型对象的存在性，即形如 $\exists x P(x)$ 的命题

构造性 (constructive)，具有特定性质的元素存在并通过显式方式来寻找这样元素的证明

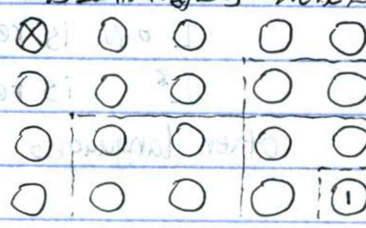
即找出一个使得 $P(a)$ 为真的元素 a (称为物证)，通过存在引入证明 $\exists x P(x)$ 为真

非构造性 (nonconstructive)，具有特定性质的元素存在，但不显式地寻找这样元素的证明

通常使用归谬证明，即通过寻找命题 r 使 $\neg(\exists x P(x)) \to (r \wedge \neg r)$，进而推出 $\exists x P(x)$ 为真

蚕食游戏 (Chomp)，轮流吃掉 $m \times n$ 块曲奇中的一块和其右下的所有曲奇，吃到左上角有毒曲奇的玩家失败

第一个玩家的必胜策略存在，



首先一定有胜负，不存在平手

第一个玩家step1可以选只吃右下，或包括右下的一堆

如果只吃右下不存在获胜策略，则表示第二个玩家

有基于step1只吃右下的获胜策略，又其可能选择与第一个玩家step1吃包括右下的一堆相同

即第一个玩家可以通过使用第二个玩家的第一步作为自己第一步从而达成获胜策略

如果只吃右下有获胜策略，则可知所有情形已覆盖

于是可以断言第一个玩家的获胜策略存在，但并没有实际刻画策略

Discrete Mathematics - P11

唯一性证明 (uniqueness proof), 通常断言在论域中具有特定性质的元素唯一存在, 即形如 $\exists! x P(x)$ 的命题

利用永真式 $\exists! x P(x) \leftrightarrow (\exists x (P(x) \land \forall y((y \neq x) \rightarrow \neg P(y))))$, 注意其中量词论域一致

即存在性 ($P(x)$): 存在某个元素 x 具有期望的性质

唯一性 ($\forall y((y \neq x) \rightarrow \neg P(y))$): 如果 $y \neq x$, 则 y 不具有期望的性质,

注意唯一性的等价形式 $\forall y(P(y) \rightarrow (y = x))$, 即具有期望的性质的 y 都与 x 相等

正向推理 (forward reasoning), 利用前提以及公理和已知定理, 用导向结论的一系列步骤来构造证明

反向推理 (backward reasoning), 寻找命题 p 并证明具有性质 $p \rightarrow q$, 以此反向推理证明 q

调和均值 (harmonic mean)　几何均值　算术均值　平方均值 (quadratic mean)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$　$2xy/(x+y) \leq \sqrt{xy} \leq (x+y)/2 \leq \sqrt{(x^2+y^2)/2}$, 当且仅当 $x=y$ 时取得等号

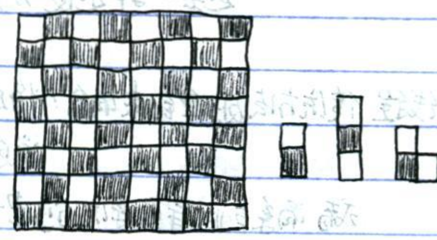
改编　可以通过改编现有的证明用于证明其他结论, 需要特别注意过程中的前提, 假设, 逻辑推理

拼接　标准棋盘 (standard checkerboard)

拼板 (board), 任意大小的矩形棋盘

骨牌 (domino): 1×2 的方格

拼接 (tiled): 拼板所有方格由不重叠, 不悬空的骨牌覆盖



多联骨牌 (polyomino), 直三联骨牌 (straight triomino), 直角三联骨牌 (right triomino)

费马大定理　只要 n 是满足 $n > 2$ 的整数, 方程 $x^n + y^n = z^n$ 就没有满足 $xyz \neq 0$ 的整数解 x, y, z

$\forall n \in \mathbb{Z}((n>2) \rightarrow \neg(\exists x, y, z \in \mathbb{Z}((xyz \neq 0) \land (x^n + y^n = z^n))))$

满足 $x^2 + y^2 = z^2$ 的整数解称为毕达哥拉斯三元组 (或称勾股数组)

三角不等式　$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|x| + |y| \geq |x+y|$, 当且仅当 $xy > 0 \lor \binom{x \geq 0}{y = 0} \lor \binom{x = 0}{y \geq 0}$ 时取得等号

伴随游戏 (obligato game), 老师依次给出断言, 学生选择接受或拒绝, 将断言或否定添加为承诺

测试过程中所有承诺保持相容, 则通过测试

由于每个断言均可写作命题的析取范式, 则可以确定使所有承诺相容的接受/拒绝顺序

获胜策略是, 假定所有命题为真, 则根据断言的真值选择接受/拒绝

Löb's Theorem (或 Löb 悖论). "If this sentence is true, the Santa Claus exists" 不是命题,

因为 "this sentence is true" 不是 valid mathematical assertion (有效数学断言)

no language can encode a truth predicate for itself, some can encode assertions about provability

Discrete Mathematics - P12

集合 (set)是对象[redacted]的一个无序的聚集，对象也称为集合的元素(element)或成员(member)
集合包含(contain)元素，用 $a\in A$ 表示 a 是集合A中的元素，$a\notin A$ 表示 a 不是集合A中的元素

花名册方法(roster method)，通过列出所有元素来描述一个集合的方法，形如 $\{a_1,\dots,a_n\}$

集合构造器记号(set builder notation)，通过描述作为集合的成员必须具有的性质来描述集合，形如 $\{x \mid x\in Z^+, x<10\}$

自然数集[redacted]	整数集[redacted]	正整数集[redacted]	有理数集[redacted]	实数集[redacted]	正实数集[redacted]	复数集
N	Z	Z^+	Q	R	R^+	C

数据类型 计算机中的type概念建立在集合之上，是一个集合的名字，连同可以作用于集合对象的一组操作的集合

集合相等 (set equality) 当且仅当拥有相同的元素，即 $(A=B)\leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)\leftrightarrow (A\subseteq B)\wedge(A\supseteq B)$

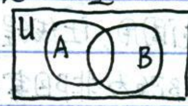
空集 (empty set，或null set)指不含任何元素的集合，用 $\emptyset$ 或 $\{\}$ 表示，有 $A=\emptyset \leftrightarrow \forall x\ x\notin A$

单元素集 (singleton set)即只有一个元素的集合，有 A is [redacted] singleton $\leftrightarrow \exists! x\ x\in A$

朴素集合论 (naïve set theory)，由集合的直觉定义以及无论什么性质都存在一个恰好由具有该性质的对象组成的集合这种直觉概念的使用所产生的理论，会导致悖论(paradox)

全集 (universal set)包含当前所考虑的全部对象，类似于量词论域的隐式表示(即有的时候不指明)

文氏图 (Venn diagram)一个或多个集合的图形表示，如



子集 (subset)，$A\subseteq B$ 表示[redacted]集合A是集合B的子集，有 $A\subseteq B\leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$
$A\nsubseteq B$ 表示集合A[redacted]不是集合B的子集，即 $\exists x(x\in A\wedge x\notin B)$
注意[redacted]对于任意集合S，有 $\emptyset\subseteq S$，$S\subseteq S$，$S\subseteq U$

真子集 (proper subset)，$A\subset B$ 表示集合A是集合B的真子集，有 $A\subset B\leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\exists x((x\in B)\wedge(x\notin A))$
注意 集合A与集合B相等逻辑等价于集合A与集合B互为子集，即 $A=B\leftrightarrow(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$

有限集 (finite set)指集合S中恰有n个不同元素，且n为非负整数，称n为S的基数，记为 $|S|$

基数 (cardinality)源于术语(cardinal number)作为有限集大小的常用语

Discrete Mathematics - P13

无限集 (infinite set), 即不是有限集的集合

幂集 (power set), 集合S所有子集的集合, 记为$P(S)$, 有 $P(S)=\{x \mid x\subseteq S\}$, $|P(S)|=2^{|S|}$

有序n元组 (ordered n-tuple), $(a_1,\cdots,a_n)$是以a_1为第1个元素, $\cdots$, a_n为第n个元素的有序聚集

$(a_1,\cdots,a_n)=(b_1,\cdots,b_n) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} a_i=b_i$ 是判断n-tuple相等的条件

注意 Haskell和Python中的tuple都是基于这个定义设计的

序偶 (ordered pair) 即有序二元组, 有 $(a,b)=(c,d)\leftrightarrow a=c\wedge b=d$, $(a,b)=(b,a)\leftrightarrow a=b$

注意 Racket 中的 pair 是基于这个定义设计的

笛卡尔积 (Cartesian product), 用$A\times B$表示集合A与集合B的笛卡尔积, 即所有序偶(a,b)的集合, 其中$\begin{smallmatrix}a\in A\\ b\in B\end{smallmatrix}$

有 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$, 在Python中有形如 {(a,b) for a in A for b in B}

注意笛卡尔积不服从交换律, 即$A\times B$与$B\times A$不一定相等, $B\times A=\{(b,a)\mid b\in B\wedge a\in A\}$

用$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$表示集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$的笛卡尔积,

即有序n元组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的集合, $a_i\in A_i$, 其中$i=1,2,\cdots,n$.

有$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid \bigwedge_{i=1}^{n} a_i\in A_i\}$, 类似于Python中n层嵌套循环的列表生成式

注意笛卡尔积不服从结合律, 即$A\times B\times C$不等于$(A\times B)\times C$, 即$A\times B\times C=\{(a,b,c)\mid \begin{smallmatrix}a\in A\wedge\\ b\in B\wedge\\ c\in C\end{smallmatrix}\}$

而$(A\times B)\times C=\{((a,b),c)\mid (a,b)\in\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}\wedge c\in C\}$

用A^n表示$A\times A\times\cdots\times A$ (n个A), 即集合A自身的笛卡尔积. 通常$n\in N\wedge n>1$,

有 $A^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A,\ i=1,2,\cdots,n\}$,

关系 (relation), 笛卡尔积$A\times B$的一个子集R称为从集合A到集合B的一个关系, 注意R的元素都是序偶

而从集合A到其自身的一个关系称为定义在A上的一个关系

带量词的集合符号 通过使用特定的符号来显式地限定一个量化命题的论域

用$\forall x\in S(P(x))$表示$P(x)$在集合S所有元素上的全称量化, 即$\forall x(x\in S\rightarrow P(x))$

用$\exists x\in S(P(x))$表示$P(x)$在集合S所有元素上的存在量化, 即$\exists x(x\in S\wedge P(x))$

注意实际中并不经常使用这种记法, 有时可能产生误解

真值集 (truth set) 为给定谓词P和论域D, D中使$P(x)$为真的元素组成的集合, 记为$\{x\in D\mid P(x)\}$

$\forall x P(x)$在论域U上为真 $\leftrightarrow$ $P(x)$在U上的真值集等于集合U

$\exists x P(x)$在论域U上为真 $\leftrightarrow$ $P(x)$在U上的真值集非空

Discrete Mathematics - P14

罗素悖论 (Russel's paradox), 令S为包含集合x, 如果集合x不属于它[redacted]自己的集合, 即 $S=\{x \mid x \notin x\}$

注意S不可能是其定义所描述的集合, 但这个悖论可以通过限制集合可包含的元素类型来避免

并集 (union), 用 $A\cup B$ 表示集合A与B的并集, 该集合包含[redacted]至少属于A和B之一的元素

有[redacted] $A\cup B=\{x \mid x\in A \lor$ [redacted] $x\in B\}$

交集 (intersection), 用 $A\cap B$ 表示[redacted]集合A与B的交集, 该集合包含既属于A又属于B的元素

有 $A\cap B=\{x \mid x\in A \land x\in B\}$

如果两个集合的交集为空集, 即 $A\cap B=\varnothing$, 则称两个集合是不相交的

容斥原理 (principle of inclusion-exclusion) 计数中的一项重要技术, 或称包含排斥原理

如集合并集的基数 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

差集 (difference), 用 $A-B$ 表示集合A和B的差集, 也称B相对于A的补集, 也记为 $A\setminus B$

该集合包含属于A而不属于B的元素, 有 $A-B=\{x \mid x\in A\land x\notin B\}$

补集 (complement), 用 $\overline{A}$ 表示集合A相对于全集U的补集, 即补集为 $U-A$

该集合包含全集U中不属于A的元素, 有 $\overline{A}=\{x\in U \mid x\notin A\}$

注意 $A-B=\{x \mid x\in A\land x\notin B\}=\{x \mid x\in A\}\cap\{x\in U \mid x\notin B\}=A\cap\overline{B}$

集合恒等式

恒等律: $A\cap U=A$, $A\cup\varnothing=A$

支配律: $A\cup U=U$, $A\cap\varnothing=\varnothing$

幂等律: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$

补律: $\overline{(\overline{A})}=A$

互补律: $A\cup\overline{A}=U$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$

交换律: $A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

吸收律: $A\cup(A\cap B)=A$

$A\cap(A\cup B)=A$

德摩根律: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

成员表 (membership table), 显示集合中元素的成员关系的表格, 类似于真值表, 可用于证明集合恒等式

A	B	$A-B$	$\overline{B}$	$A\cap\overline{B}$	$\overline{A}$	$A\cap B$	$\overline{A}\cup\overline{B}$	$\overline{A\cap B}$
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1

如证明

$A-B=A\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Discrete Mathematics - P15

扩展并集/交集 用 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集，即包含至少是这组集合中一个集合成员的元素的集合。

有 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid \bigvee_{i=1}^{n} x \in A_i\}$

用 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集，即包含属于这组集中所有成员集合的元素的集合

有 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid \bigwedge_{i=1}^{n} x \in A_i\}$

当 I 是一个集合时，用 $\bigcap_{i\in I} A_i$ 和 $\bigcup_{i\in I} A_i$ 分别表示对于 $i \in I$ 的集合 A_i 的交集和并集

有 $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall_{i\in I}(x \in A_i)\} = \{x \mid \forall_i (i \in I \to x \in A_i)\}$

$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists_{i\in I}(x \in A_i)\} = \{x \mid \exists_i (i \in I \wedge x \in A_i)\}$

扩展德·摩根律 集合的德·摩根律可扩展为 $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

位串表示 如果集合 A 和 B 都是某个有限全集 S 的子集，则可表示为一个 $|S|$ 位的位串，第 i 位表示 S 的第 i 个元素是否成员

如 $S = \{1,2,3,4,5\}$，$A = \{1,2,3\}$，$B = \{3,4\}$，则 $S(A) = 11100$，$S(B) = 00110$

可用按位或(bitwise OR)计算集合并集，用按位与(bitwise AND)计算集合交集

如 $S(A) \vee S(B) = 11110$，$A \cup B = \{1,2,3,4\}$，$S(A) \wedge S(B) = 00100$，$A \cap B = \{3\}$

另外，按位取反(bitwise NOT)计算集合补集，按位异或(bitwise XOR)计算集合对称差

对称差 (symmetric difference)，用 $A \oplus B$ 表示集合 A 和 B 的对称差，包含恰属于 A 和 B 之一的元素的集合

有 $A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

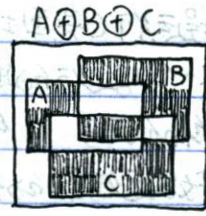
同时 $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

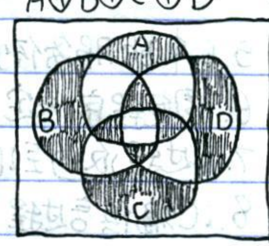
注意，对称差满足交换律和结合律

即 $A \oplus B \oplus C \oplus D = (A \oplus C) \oplus (B \oplus D)$

$A \oplus B \oplus C$



$A \oplus B \oplus C \oplus D$



后继 定义集合 A 的后继为 $A \cup \{A\}$

多重集 同一个元素作为成员可以出现不止一次的无序元素集，用 $\{m_1 \cdot a_1, \cdots, m_r \cdot a_r\}$ 表示

用 $m_i \cdot a_i$ 表示元素 a_i 在集合中出现 m_i 次，m_i 称为 a_i 的重数，$m_i \in N$，$i = 1, 2, \cdots, r$

$P \cup Q$ 表示多重集的并集，其中每个元素的重数为该元素在 P 和 Q 中重数的最大值。

$P \cap Q$ 表示多重集的交集，其中每个元素的重数为该元素在 P 和 Q 中重数的最小值，不是成员重数为 0

$P - Q$ 表示多重集的差集，其中元素 a_i 的重数为 $m_{pi} - m_{qi}$，如果值为负数则置为 0

$P + Q$ 表示多重集的和集，其中元素 a_i 的重数为 $m_i = m_{pi} + m_{qi}$

在 Haskell 中，多重集可以用 `[(a, Int)]` 实现，或者用 `Map a Int` 实现。

在 Python 中，多重集可以视为一个字典 dict，keys() 保存元素 a_i 的值，values() 保存重数 m_i

Discrete

Mathematics - P16

模糊集合 指全集 U 的每个元素在模糊集合 S 中都有一个隶属度，隶属度为一个 $[0,1]$ 的实数，用于人工智能

表示法为列出元素及其隶属度（忽略隶属度为 0 的元素），如 $\{0.9\ e,\ 0.7\ i,\ 1.0\ s\}$

$\bar{S}$ 表示模糊集合 S 的补集，元素在 $\bar{S}$ 中的隶属度为 1 减去其在 S 中的隶属度

$S \cup T$ 表示模糊集合 S 和 T 的并集，元素在 $S \cup T$ 中的隶属度为其在 S 和 T 中隶属度的最大值

$S \cap T$ 表示模糊集合 S 和 T 的交集，元素在 $S \cap T$ 中的隶属度为其在 S 和 T 中隶属度的最小值

函数 (function) 也称映射 (mapping) 或变换 (transformation)，用 $f: A \to B$ 表示非空集合 A 到 B 的集合

是对元素的一种指派，对集合 A 中的每个元素恰好指派 B 的一个元素，

如果 B 中元素 b 是唯一由函数 f 指派给 A 中元素 a 的，则写作 $f(a) = b$

函数 $f: A \to B$ 可以视为一个从 A 到 B 的关系，即集合 $A \times B$ 的子集

如果对于 A 到 B 的关系，$\forall_{a \in A} \exists! (a,b) \in R$，则关系 R 定义了一个 A 到 B 的函数 $f: A \to B$

或者说 (a,b) 是关系中唯一以 a 为第一个元素的序偶

对函数 $f: A \to B$，集合 A 是 f 的定义域 (domain)，集合 B 是 f 的陪域 (codomain)

对 $f(a) = b$，称 b 是 f 之下 a 的像 (image)，a 是 f 之下 b 的原像 (preimage)

f 的值域 (range) 是 A 中元素的所有像的集合，即 $\{f(a) \in B \mid a \in A\}$，$\subseteq f$ 的陪域

相等 $f: A \to B$ 和 $g: C \to D$ 相等，当定义域 $A = C$，陪域 $B = D$，映射 $\forall_{a \in A, c \in C} (a = c \to f(a) = g(c))$

实值函数为陪域是实数集合的函数，整数值函数为陪域是整数集合的函数

对于 $f_1: A \to R$，$f_2: A \to R$ 则 $f_1 + f_2$ 和 $f_1 f_2$ 都是集合 A 到实数集 R 的函数

即有对于任意 $x \in A$，$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$，$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

对于 $f: A \to B$，$S \subseteq A$，则用 $f(S)$ 表示 S 在函数 f 下的像，即 S 中元素的像组成的 B 的子集

有 $f(S) = \{t \mid \exists_{s \in S} (t = f(s))\}$，也简写为 $\{f(s) \mid s \in S\}$

注意：$f(S)$ 是一个集合，而非函数 f 在集合 S 处的值

即在如 Haskell 中，可视为 `map f S` $\longrightarrow$ "$f(S)$"，有 `map :: (a -> b) -> [a] -> [b]`

一对一函数 (one-to-one function)，也称单射 (injection)，即定义域中每个元素的像都不相同的函数

即 f 是单射的 (injective) $\longleftrightarrow \forall_{a \in A} \forall_{b \in A} (f(a) = f(b) \to a = b)$，对于函数 $f: A \to B$

或者等价地有 $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} (a \neq b \to f(a) \neq f(b))$

即对于函数 $f: A \to B$，f 是一对一的当且仅当只要 $a \neq b$ 就有 $f(a) \neq f(b)$

只要 $f(a) = f(b)$ 就有 $a = b$