Discrete

Mathematics - P79

同余方程组 $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$，有解 当且仅当 $\gcd(m_1, m_2) \mid a_1 - a_2$
且解模 $\mathrm{lcm}(m_1, m_2)$ 唯一

证明有，如果同余方程组有解，则存在 $k, l \in \mathbb{Z}$，使得 $a_1 + km_1 = a_2 + lm_2$

则 $a_1 - a_2 = lm_2 - km_1 = (l \cdot {m_2}/{\gcd(m_1,m_2)} - k \cdot {m_1}/{\gcd(m_1,m_2)}) \cdot \gcd(m_1, m_2)$

又 $(l \cdot m_2/\gcd(m_1,m_2) - k \cdot m_1/\gcd(m_1,m_2)) \in \mathbb{Z}$，

于是有 $\gcd(m_1, m_2) \mid a_1 - a_2$

如果同余方程组无解，则有 $a_1 \neq a_2$，取 $x_1 = a_1 + km_1$，$x_2 = a_2 + lm_2$，其中 $k, l \in \mathbb{Z}$

如果解不存在，则对任意 k, l，有 $a_1 + km_1 \neq a_2 + lm_2$

即 $a_1 - a_2 \neq (l \cdot {m_2}/{\gcd(m_1,m_2)} - k \cdot {m_1}/{\gcd(m_1,m_2)}) \cdot \gcd(m_1, m_2)$

又 $\gcd({m_1}/{\gcd(m_1,m_2)}, {m_2}/{\gcd(m_1,m_2)}) = 1$，

即存在整数 s, t，使得 $sm_1/\gcd(m_1,m_2) + tm_2/\gcd(m_1,m_2) = 1$

于是有对任意整数 n，有 ns, nt 使得，ns, nt 为整数

$nsm_1/\gcd(m_1,m_2) + ntm_2/\gcd(m_1,m_2) = n$

则如果 $\gcd(m_1, m_2) = 1$，取 $n = a_1 - a_2$ 则等式成立，即解存在

解不存在，于是有 $\gcd(m_1, m_2) > 1$ 且 $\gcd(m_1, m_2) \nmid a_1 - a_2$

于是可知 同余方程组有解，当且仅当 $\gcd(m_1, m_2) \mid a_1 - a_2$

假设 两个根 x 和 y，则有 $m_1 \mid x - y$，$m_2 \mid x - y$，$x \neq y$

于是存在整数 k, l，使得 $x - y = km_1 = lm_2$

又 $x - y \neq 0$，于是有 $x - y = n\,\mathrm{lcm}(m_1, m_2)$，其中 n 为非零整数

即有 同余方程组的解模 $\mathrm{lcm}(m_1, m_2)$ 唯一

数学归纳法 (mathematical induction)，基于推理规则，如果 $P(1)$ 和 $\forall_k (P(k) \to P(k+1))$ 均成立，那么 $\forall_n P(n)$ 成立

用于证明对于正整数成立的某个命题，即对于论域为正整数 Z⁺ 的命题 $P(n)$

即有 $(P(1) \land \forall_k (P(k) \to P(k+1))) \to \forall_n P(n)$

数学归纳法的原理为完成两个步骤

基础步骤 (base case)，证明命题 $P(1)$ 为真

递归步骤 (step case, inductive case)，证明对每个正整数 k，蕴含式 $P(k) \to P(k+1)$ 为真

由于数学归纳法并未假设对所有正整数 $P(k)$ 为真，所以不属于回避问题或循环论证的情形

特别注意与逻辑学中术语的异同：

演绎推理 (deductive reasoning)，the process of reasoning from statements (premises) to logically certain conclusion

即结论可从称为前提的已知事实，必然地得出的推理

归纳推理 (inductive reasoning)，the premises are viewed as supplying evidence for truth of the (probable) conclusion

即论证的前提支持结论但不确保结论的推理过程

于是 数学归纳法属于演绎推理而非归纳推理

Discrete Mathematics - P80

数学归纳法的优点与缺点：

优点在于能用于证明已经构造好的猜想是正确的，

尤其是对于可以定义在正整数集合的非空子集上的命题

缺点在于只能证明通过其他方式获得的结论，但不是发现公式或定理的工具

数学归纳法证明模板，对于可以描述为"对于所有 $n \geq b$，$P(n)$ 为真"形式的命题

对于基础步骤：选择正确的 b 或数个 $b_1, \cdots, b_k$，证明 $P(b)$ 或 $P(b_1) \wedge \cdots \wedge P(b_k)$ 为真

对于归纳步骤：有归纳假设为"假设 $P(k)$ 为真，对于任意固定的整数 $k \geq b$"

采用 $P(k)$ 为真的前提，证明 $P(k+1)$ 为真

确保对于所有 $k \geq b$ 是有效的，特别是当 k 值较小的情形。

得出归纳步骤的明确结论

在基础步骤和归纳步骤之后，依据归纳法，对于所有的 $n \geq b$，$P(n)$ 为真

对于正整数 $n \geq 4$，有 $2^n < n!$

基础步骤：当 $n=4$ 时，$2^4 = 16 < 24 = 4!$

递归步骤：假设对 $k \geq 4$，$2^k < k!$ 为真

则考虑 $k+1$，$2^{k+1} < 2 \cdot 2^k \overset{IH}{<} 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!$

即对于正整数 $k \geq 4$，如果 $P(k)$ 为真，则有 $P(k+1)$ 为真

于是依据归纳法，对于正整数 $n \geq 4$，有 $2^n < n!$

归纳假设 (induction hypothesis, IH)，用于在等式或不等式中，或多行推理中指出归纳假设的步骤

调和级数 (harmonic series)，用 H_j $(j=1,2,\cdots)$ 表示，$H_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{j}$

则无穷级数 $H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

对于非负整数 n，有 $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

基础步骤：当 $n=0$ 时，$H_{2^0} = \sum_{k=1}^{2^0} \frac{1}{k} = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$

递归步骤：假设对 $k \in N$，命题 $P(k)$：$H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ 为真

则考虑 $P(k+1)$：$H_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$

$\overset{IH}{\geq} (1 + \frac{k}{2}) + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$] 归纳假设

$\geq (1 + \frac{k}{2}) + \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 2^k$] 注意当 $k=0$ 时，取得等号

$= (1 + \frac{k}{2}) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}$

于是依据归纳法，对于 $n \in N$，有 $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

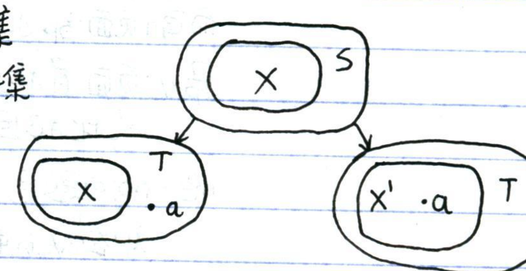
由此可知无穷级数 H 是发散的。[redacted] 即极限 $\lim_{n \to \infty} H_n$ 不存在

Discrete Mathematics - P81

对于非负整数n，有n个元素的集合有2^n个子集

基础步骤：当$n=0$时，有0个元素的集合$S=\varnothing$，$\varnothing$的子集仅有$\varnothing$，即有$1=2^0$个子集

递归步骤：假设对$k\in N$，有k个元素的集合有2^k个子集



则对于$P(k+1)$，假定S为k个元素的子集

而集合$T=S\cup\{a\}$，

对于S的任意子集X，首先有$X\subseteq T$

而后有集合$X'=X\cup\{a\}$，且$X'\subseteq T$

于是对于S的2^k个子集，有$2\cdot 2^k=2^{k+1}$个集合T的子集 (IH)

于是依据归纳法，对于非负整数n，有n个元素的集合有2^n个子集

德·摩根律

对于正整数$n\geq 2$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，其中$A_1,A_2,\cdots,A_n$是全集U的子集，而$\overline{A_i}$为$A_i$的补集

基础步骤：当$n=2$时，根据德摩根律，有$\overline{A_1\cap A_2} = \overline{A_1}\cup\overline{A_2}$

递归步骤：假设对正整数$k\geq 2$，$P(k)$：$\overline{\bigcap_{i=1}^{k} A_i} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}$为真

则对于$P(k+1)$，即对于$A_1,A_2,\cdots,A_{k+1}$为全集U的子集

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i} = \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)\cap A_{k+1}} = \overline{\bigcap_{i=1}^{k} A_i}\cup\overline{A_{k+1}}$$

$$\overset{IH}{=} \left(\bigcup_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)\cup\overline{A_{k+1}} = \bigcup_{i=1}^{k+1}\overline{A_i}$$

于是依据归纳法，对于正整数$n\geq 2$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

对于一组预先确定开始和结束时间的讲座，用贪婪算法安排尽可能多的讲座，总能得到最优结果

贪婪算法：排序讲座，使得结束时间$e_1\leq e_2\leq\cdots\leq e_m$，

然后在每一步选择不冲突的且结束时间最早的讲座

基础步骤：$P(1)$：如果贪婪算法只安排了1个讲座，则这个安排为最优的

如果贪婪算法只安排了一个讲座，结束时间为e_1

对于其他讲座，可知$\forall_{2\leq i\leq m}$ 开始时间$s_i<e_1$ $\wedge$ 结束时间$e_i\geq e_1$，

所以无法安排更多讲座，则这个安排为最优的

递归步骤：假设$\forall k\in Z^+$ $P(k)$为真，即贪婪算法在安排了k个讲座时是最优的

则考虑$P(k+1)$，注意到有一个包含讲座t_1的安排，

如果安排以t_i $(i>1)$为第1个讲座，则可知$e_1\leq e_i$，

所以以讲座t_1替换t_i可得到一个包含t_1的安排

则去掉讲座t_1之后，可知对讲座$t_2,t_3,\cdots,t_n$

有一个初始时间为e_1的k个讲座的安排，

可知这个安排是最优的 (IH)

于是这个k+1个讲座的安排是最优的

于是依据归纳法，贪婪算法总能得到一个最优结果

Discrete Mathematics - P82

奇数个馅饼的战斗. 有奇数个人[redacted]彼此间的距离不同，每个人都同时用一个馅饼攻击离他最近的人

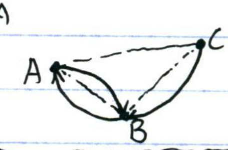
有结论为至少有一个人没有被馅饼攻击

令命题 $P(n)$ $(n\in Z^+)$ 为，$2n+1$个人彼此距离不同，并同时用一个馅饼攻击离他最近的人 则其中至少有一个人没有受到攻击

基础步骤：$P(1)$ 考虑3个人的情况，假设3个人A, B, C，其中 $AB<BC<CA$

[redacted]则A, B距离最近，会相互攻击，而C攻击B，

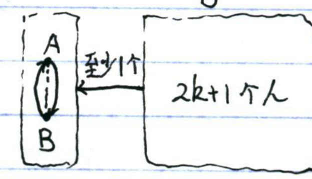
于是可知C并未受到攻击，即命题$P(1)$为真



递归步骤：[redacted]假设 $\forall k\in Z^+$ $P(k)$为真，则考虑$P(k+1)$的情形

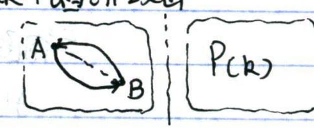
对于$2(k+1)+1$个人，令A, B为其中[redacted]距离最近的两人

可知A, B必定相互攻击，而考虑其余$2k+1$个人



如果$2k+1$个人中有人攻击A或B，则这$2k+1$个人中至多受到$2k$个馅饼攻击

于是至少有一个人没有受到攻击



如果$2k+1$个人中没有人攻击A或B，则可[redacted]去掉A,B[redacted]

其余$2k+1$个人符合$P(k)$的情形，即[redacted]其中至少有一个人未受攻击 (IH)

于是依据归纳法，$\forall n\in Z^+$ $P(n)$为真

对任意正整数$n>1$，有$n!<n^n$

基础步骤：当$n=2$时，$2!=2<4=2^2$

递归步骤：假设 $\forall k\in Z^+ (k>1\rightarrow k!<k^k)$为真，则考虑$P(k+1)$

[redacted] $(k+1)! = (k+1)\cdot k! \overset{(IH)}{<} (k+1)\cdot k^k$，又k为正整数且$k>1$

$< (k+1)\cdot(k+1)^k = (k+1)^{k+1}$，即$P(k+1)$为真

于是根据归纳法，有 $\forall n\in Z^+ (n>1\rightarrow n!<n^n)$

对任意正整数n，有 $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

基础步骤：当$n=1$时，$\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2 = (1-1)\cdot 2^{1+1}+2$

递归步骤：假设 $\forall n\in Z^+$ [redacted] $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)\cdot 2^{n+1}+2$，则考虑$P(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \overset{(IH)}{=} (n-1)\cdot 2^{n+1}+2+(n+1)\cdot 2^{n+1} = (n+1-1)\cdot 2^{(n+1)+1}+2$，即$P(n+1)$为真

于是依据归纳法，$\forall n\in Z^+$ $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

对任意正整数n，$1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

基础步骤：当$n=1$时，$1\times2 = 1\times(1+1)\times(1+2)/3$

递归步骤：[redacted]假设 $\forall k\in Z^+$ $1\times2+\cdots+k(k+1) = k(k+1)(k+2)/3$，则考虑$P(k+1)$

$1\times2+\cdots+(k+1)(k+2) \overset{(IH)}{=} k(k+1)(k+2)/3+(k+1)(k+2) = (k+1)(k+1+1)(k+1+2)/3$，即$P(k+1)$为真

于是依据归纳法，$1\times2+\cdots+n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$ [redacted] 其中$n\in Z^+$

Discrete Mathematics - P83

对于任意正整数 n，k，$\sum_{i=1}^{n}[\prod_{j=0}^{k}(i+j)] = [\prod_{i=0}^{k+1}(n+i)]/(k+2)$

对于任意给定的正整数 k

基础步骤：对于 n=1，$1\times2\times\cdots\times(k+1) = 1\times2\times\cdots\times(k+2)/k+2$

递归步骤：假设 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ $P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1}[\prod_{j=0}^{k}(i+j)] = \sum_{i=1}^{n}[\prod_{j=0}^{k}(i+j)] + \prod_{j=0}^{k}(n+1+j)$$
$$\overset{(IH)}{=} [\prod_{i=0}^{k+1}(n+i)]/(k+2) + \prod_{j=1}^{k+1}(n+j)$$
$$= [\prod_{i=1}^{k+1}(n+i)](n+k+2)/(k+2)$$
$$= [\prod_{i=0}^{k}(n+1+i)](n+1+k+1)/(k+2)$$
$$= [\prod_{i=0}^{k+1}(n+1+i)]/(k+2)$$
，即 $P(n+1)$ 为真

于是依据归纳法 $\sum_{i=1}^{n}[\prod_{j=0}^{k}(i+j)] = [\prod_{i=0}^{k+1}(n+i)]/(k+2)$

对于非负整数 n，调和数 $H_{2^n} \le 1+n$

基础步骤：当 n=0 时，$H_{2^0} = 1 \le 1+0$

递归步骤：假设 $\forall k\in\mathbb{N}$ $H_{2^k} \le 1+k$ 为真，则考虑 $P(k+1)$

$$H_{2^{k+1}} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}} = H_{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$$
$$\overset{(IH)}{\le} 1+k+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$$
$$< 1+k+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k} = 1+k+\frac{1}{2^k}\cdot 2^k = 1+(k+1)$$
，即 $P(k+1)$ 为真

于是依据归纳法，$\forall n\in\mathbb{N}$ $H_{2^n} \le 1+n$

对于正整数 n，调和数 $H_1+H_2+\cdots+H_n = (n+1)H_n - n$

基础步骤：当 n=1 时，$H_1 = 1 = (1+1)\cdot 1 - 1$

递归步骤：假设 $\forall k\in\mathbb{Z}^+$ $H_1+H_2+\cdots+H_k = (k+1)H_k - k$ 为真，则考虑 $P(k+1)$

$$H_1+H_2+\cdots+H_k+H_{k+1} \overset{(IH)}{=} (k+1)H_k - k + H_{k+1}$$
$$= (k+1)(H_{k+1}-\frac{1}{k+1}) - k + H_{k+1}$$
$$= (k+2)H_{k+1} - (k+1)$$
，即 $P(k+1)$ 为真

于是依据归纳法，$\forall n\in\mathbb{Z}^+$ $H_1+H_2+\cdots+H_n = (n+1)H_n - n$

伯努利不等式 (Bernoulli's inequality)，对于实数 $r>-1$，非负整数 n，$1+nr \le (1+r)^n$

基础步骤：当 n=0 时，$1+0\cdot r = 1 \le (1+r)^0$，其中 $r+1>0$

递归步骤：假设 $\forall k\in\mathbb{N}$ $1+k\cdot r \le (1+r)^k$ 为真，则考虑 $P(k+1)$

$$(1+r)^{k+1} = (1+r)\cdot(1+r)^k \overset{(IH)}{\ge} (1+r)(1+k\cdot r)$$
$$= 1+r+kr+k\cdot r^2 \ge 1+(k+1)r$$
，即 $P(k+1)$ 为真

于是依据归纳法，对于任意实数 $r>-1$，非负整数 n，$1+nr \le (1+r)^n$

Discrete Mathematics - P84

对于大于1的正整数n，$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$

基础步骤：当n=2时，$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}<\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$

递归步骤：假设对于$\forall k\in Z^+$ $1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$为真，则考虑$P(k+1)$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\overset{(IH)}{<}2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$，又$k\in Z^+$

$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}=2-\frac{k+1-1}{k(k+1)}=2-\frac{1}{k+1}$$，即$P(k+1)$为真

于是依据归纳法，$\forall n\in Z^+(n>1\to 1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n})$

可见无穷级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$收敛，即$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=2$

对于正整数n，$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)$

基础步骤：当n=1时 $1>2(\sqrt{1+1}-1)=2(\sqrt{2}-1)$

递归步骤：假设对于$\forall k\in Z^+$ $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-1)$为真，则考虑$P(k+1)$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\overset{(IH)}{>}2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2(k+1)+1}{\sqrt{k+1}}-2$$

$$=\frac{2(k+2)}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}-2>\frac{2(k+2)}{\sqrt{k+1}}-2$$

$$>\frac{2(k+2)}{\sqrt{k+2}}-2=2\sqrt{k+2}-2=2(\sqrt{(k+1)+1}-1)$$，即$P(k+1)$为真

于是依据归纳法，$\forall n\in Z^+$ $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)$

即无穷级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$是发散的

对于命题$P_1,P_2,\cdots,P_n$，其中n为大于1的正整数，

$$[(P_1\to P_2)\land(P_2\to P_3)\land\cdots\land(P_{n-1}\to P_n)]\to[(P_1\land\cdots\land P_{n-1})\to P_n]\equiv T$$

基础步骤：当n=2时，$(P_1\to P_2)\to(P_1\to P_2)\equiv T$

当n=3时 $(P_1\to P_2)\land(P_2\to P_3)\to(P_1\to P_3)\equiv T$，$\neg P_1\lor P_3\equiv P_1\to P_3$

又对于任意命题p,q，$p\to(p\lor q)\equiv\neg p\lor(p\lor q)\equiv T\lor q\equiv T$

于是 $\neg P_1\lor P_3\to\neg P_1\lor\neg P_2\lor P_3\equiv T$

又 $\neg P_1\lor\neg P_2\lor P_3\equiv\neg(P_1\land P_2)\lor P_3\equiv(P_1\land P_2)\to P_3$

于是有 $[(P_1\to P_2)\land(P_2\to P_3)]\to[(P_1\land P_2)\to P_3]\equiv T$

递归步骤：假设$\forall n\in Z^+(n>2\to P(n))$为真，则考虑$P(n+1)$

(IH) $(P_1\to P_2)\land(P_2\to P_3)\land\cdots\land(P_{n-1}\to P_n)\land(P_n\to P_{n+1})\equiv[(P_1\land\cdots\land P_{n-1})\to P_n]\land(P_n\to P_{n+1})$

取$q=P_1\land\cdots\land P_{n-1}$，于是有$(q\to P_n)\land(P_n\to P_{n+1})\overset{\equiv T}{\to}q\to P_{n+1}\equiv\neg q\lor P_{n+1}$

又 $\neg q\lor P_{n+1}\to\neg q\lor\neg P_n\lor P_{n+1}\equiv T$

又 $\neg q\lor\neg P_n\lor P_{n+1}\equiv(q\land P_n)\to P_{n+1}$

于是有 $[(q\to P_n)\land(P_n\to P_{n+1})]\to[(q\land P_n)\to P_{n+1}]\equiv T$

即 $[(P_1\to P_2)\land\cdots\land(P_n\to P_{n+1})]\to[(P_1\land\cdots\land P_n)\to P_{n+1}]\equiv T$，即$P(n+1)$为真

于是依据归纳法，$\forall n\in Z^+$且$n>2$ $[(P_1\to P_2)\land\cdots\land(P_n\to P_{n+1})]\to[(P_1\land\cdots\land P_n)\to P_{n+1}]\equiv T$

Discrete Mathematics - P85

名人问题 (celebrity problem)，指在一个有n个人的聚会上，其中n为正整数且$n\geq 2$，

定义名人为其中一位客人，满足条件：名人不认识任何其他客人，且任何其他客人都认识名人

即 对于某个客人 c，$\forall g\in G$ ($c\neq g \to$ c不认识g $\wedge$ g认识c))，则c为名人

于是可知在n个人的聚会，或者没有名人，或者仅有1位名人，

[redacted] 假设判断的方法仅有一种提问方式，

即向一位客人询问是否认识另一位客人，而这位客人将如实回答

则命题为：对于$n(n\geq 2)$位客人，可用不多于$3(n-1)$次提问，判断名人是否存在且找出名人

基础步骤：对于$P(2)$，令客人A, B，向A询问是否认识B，向B询问是否认识A

则用 $\binom{2}{2}\times 2! = 2 \leq 3\cdot(2-1)$ 次问题，可得答案

对于$P(3)$，可用 $\binom{3}{2}\times 2! = 6 \leq 3\cdot(3-1)$ 次问题，可得答案

递归步骤：假设$\forall n\in Z^+$且$n\geq 3$ $P(n)$为真，则考虑$P(n+1)$

对于客人$A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$，首先向$A_1$询问是否认识$A_2$

如果A_1认识A_2，则A_1必然不是名人，

如果A_1不认识A_2，则A_2必然不是名人，

将必然不是名人的人定为B，其余有n名客人

可知用不超过$3(n-1)$次问题可从其中找到一个可能的名人A'

如果B认识A'且A'不认识B，则确认A'为n+1位客人中的名人

否则n+1位客人中没有名人

而总共用不超过 $1+3(n-1)+2 = 3(n+1-1)$ 次问题得到答案，即$P(n+1)$为真

于是依据归纳法，$\forall n\in Z^+\wedge n\geq 2$ 可用不多于$3(n-1)$次提问判断n位客人中的名人

归纳载入 指对于用数学归纳法无法直接证明为真的结论，却可以用数学归纳法证明更强的结论

[redacted] 对于命题：对于正整数n，有 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$

基础步骤：当n=1时，$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

递归步骤：假设$\forall n\in Z^+$ $P(n)$为真，则考虑$P(n+1)$

$$\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n+1}{2(n+1)} \overset{(IH)}{<} \frac{1}{\sqrt{3n}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)} = \text{[redacted]}\ \frac{\sqrt{3(n+1)}}{\sqrt{3n}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3(n+1)}}$$

$\left(\frac{\sqrt{3(n+1)}}{\sqrt{3n}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)} = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n} > 1$，即无法判断$P(n+1)$是否为真

于是构造更强的命题：对于正整数$n>1$，有 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

基础步骤：当n=2时，$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{8} <$ [redacted] $\frac{1}{\sqrt{7}}$

递归步骤：假设$\forall n\in Z^+$且$n\geq 2$ $P(n)$为真，则考虑$P(n+1)$

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n+1}{2(n+1)} \overset{(IH)}{<} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{3(n+1)+1}}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

$\left(\frac{\sqrt{3(n+1)+1}}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)^2 = \frac{12n^3+28n^2+19n+4}{12n^3+28n^2+20n+4} < 1$，即可确定$P(n+1)$为真

于是依据归纳法，$\forall n\in Z^+\wedge n\geq 2$ $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$

再加上n=1时的结论，可知对于任意正整数n：$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$

Discrete Mathematics - P86

流言问题

对于一个有n个人的人群，其中n为正整数，每个人都知道一个其他人都不知道的流言

假设人与人之间可以进行一对一的电话交流，并会共享两个人已知的所有流言

如 A_1 知道 M_1，A_2 知道 M_2，则 A_1 与 A_2 电话后，A_1 与 A_2 都知道 M_1 与 M_2

流言问题为求 $G(n)$，其中 $n\in Z^+$，为使n个人都知道全部n个流言所需的最少电话次数

注意有，$G(1)=0$，$G(2)=1$，$G(3)=3$，对于 $n\geq 4$，$G(n)\leq 2n-4$

基础步骤：当 $n=4$ 时，对于 A_1, A_2, A_3, A_4，分别知道 M_1, M_2, M_3, M_4

则 $A_1 - A_2$，$A_1: M_1M_2$，$A_2: M_1M_2$

$A_3 - A_4$，$A_3: M_3M_4$，$A_4: M_3M_4$

$A_1 - A_3$，$A_1: M_1M_2M_3M_4$，$A_3: M_1M_2M_3M_4$

$A_2 - A_4$，$A_2: M_1M_2M_3M_4$，$A_4: M_1M_2M_3M_4$

即共用 $4\leq 2\cdot 4-4$ 次电话次数，即 $G(4)\leq 2\cdot 4-4$

递归步骤：假设 $\forall_{k\in Z^+}(k\geq 4 \rightarrow G(k)\leq 2k-4)$，则考虑 $P(k+1)$

对于 $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$，分别知道 $M_1, M_2, \cdots, M_{k+1}$，

则首先 $A_1 - A_{k+1}$，则 $A_1: M_1M_{k+1}$，$A_{k+1}: M_1M_{k+1}$

则此时 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 分别知道 $M_1M_{k+1}, M_2, \cdots, M_k$

根据归纳假设，经过不超过 $2k-4$ 次电话

$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都知道 $M_1M_2\cdots M_kM_{k+1}$

最后 $A_1 - A_{k+1}$，则 $A_{k+1}: M_1M_2\cdots M_{k+1}$

于是 $G(k+1) = 1+G(k)+1 \leq 2k-4+2 = 2(k+1)-4$ 次电话

于是根据归纳法：$\forall_{n\in Z^+}(n\geq 4 \rightarrow G(n)\leq 2n-4)$

对于流言问题，可以证明当 $n\geq 4$ 时，$G(n)=2n-4$

方法一是在归纳法中，由于基础步骤中 $G(4)=4=2n-4$

所以在归纳步骤中可有 $G(k+1) = 2+G(k) = 2+2n-4 = 2(n+1)-4$

方法二是构造算法使得对于正整数 $n\geq 4$，$G(n)=2n-4$

首先有 $A_1 - A_2$ 和 $A_n - A_{n-1}$，则有 $A_1, A_2: M_1M_2$，$A_{n-1}, A_n: M_{n-1}M_n$

然后 A_1 依序与 $A_3, \cdots, A_{n-1}$ 电话，则最终有 $A_1, A_{n-1}: M_1M_2\cdots M_n$

最后 A_n 依序与 $A_{n-2}, A_{n-3}, \cdots, A_2$ 电话，$A_n - A_{n-2}$，$A_n, A_{n-2}: M_1M_2\cdots M_n$

之后 $\forall_{i\in Z^+}(2\leq i< n-2 \longrightarrow A_n - A_i,\ A_i: M_1M_2\cdots M_n)$

所以 $G(n) = 2+(n-3)+(n-3) = 2n-4$

	A_1	A_2	A_3	$\cdots$	$A_{\lfloor n/2\rfloor}$	$A_{\lfloor n/2\rfloor+1}$	$\cdots$	A_{n-2}	A_{n-1}	A_n
	M_1	M_2	M_3		$M_{\lfloor n/2\rfloor}$	$M_{\lfloor n/2\rfloor+1}$		M_{n-2}	M_{n-1}	M_n
①	M_1M_2	M_1M_2	M_3		$M_{\lfloor n/2\rfloor}$	$M_{\lfloor n/2\rfloor+1}$		M_{n-2}	$M_{n-1}M_n$	$M_{n-1}M_n$
②,③	$M_1\cdots M_n$	$\cdots$	$\cdots$		$M_1\cdots M_n$	$\cdots$		$M_1\cdots M_n$	$\cdots$	$M_1\cdots M_n$

Discrete Mathematics - P87

对于正整数 n，$\sum_{\{a_1,\cdots,a_k\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}} \frac{1}{a_1a_2\cdots a_k} = n$.

注意这个求和是对前 n 个正整数所构成的集合的所有非空子集

基础步骤：当 $n=1$ 时，$\{1,\cdots,n\}$ 的唯一非空子集为 $\{1\}$，

则 $\frac{1}{1}=1$，即有 $\sum_{\{a_1,\cdots,a_k\}\subseteq\{1,\cdots,n\}} \frac{1}{a_1\cdots a_k} = n$

递归步骤：假设 $\forall_{n\in Z^+}\ P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$，对于集合 $\{1,2,\cdots,n,n+1\}$

其非空子集可以分为三部分，$\forall_{\text{非空集合}X}\ (X\subseteq S_n \longrightarrow X\subseteq S_{n+1})$

且 $\sum_X \frac{1}{a_1a_2\cdots a_k} = n$ (IH)

另外 $\forall_{\text{非空集合}X}\ (X\subseteq S_n \longrightarrow X\cup\{n+1\}\subseteq S_{n+1})$，且有 $\sum_{X\cup\{n+1\}} = \frac{n}{n+1}$ (IH)

最后有一个非空集合 $\{n+1\}$，有贡献为 $\frac{1}{n+1}$

这三部分的和为 $\sum_{\{a_1,\cdots,a_k\}\subseteq\{1,\cdots,n+1\}} \frac{1}{a_1a_2\cdots a_k} = n + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n+1$，即 $P(n+1)$ 为真

于是依据归纳法，$\forall_{n\in Z^+} \sum_{\{a_1,\cdots,a_k\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}} \frac{1}{a_1a_2\cdots a_k} = n$

对于集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，其中 $n\geq 2$，对于所有整数 $1\leq i<j\leq n$，要么 A_i 是 A_j 的子集，要么 A_j 是 A_i 的子集

则存在整数 $1\leq i\leq n$，使得对任意整数 $1\leq j\leq n$，有 $A_i\subseteq A_j$

基础步骤：[redacted] 当 $n=2$ 时，如果 $A_1\subseteq A_2$，则 A_1 符合要求

如果 $A_2\subseteq A_1$，则 A_2 符合要求，于是有 $P(2)$ 为真

递归步骤：假设 $\forall n\in Z^+$ 且 $n\geq 2$ $P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$，对于 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_{n+1}$

对于任意整数 $1\leq i<j\leq n+1$，要么 A_i 是 A_j 的子集，要么 A_j 是 A_i 的子集

则对于前 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，符合 $P(n)$ 的条件，

于是依据归纳假设 $\exists_{1\leq i\leq n}\forall_{1\leq j\leq n}\ A_i\subseteq A_j$

考虑 A_i 与 A_{n+1} 的关系，如果 $A_i\subseteq A_{n+1}$，则有 $\forall_{1\leq j\leq n+1}\ A_i\subseteq A_j$，即 A_i 为所求集合

如果 $A_{n+1}\subseteq A_i$，则有 $\forall_{1\leq j\leq n}((A_{n+1}\subseteq A_i \wedge A_i\subseteq A_j)\longrightarrow A_{n+1}\subseteq A_j)$

又 $A_{n+1}\subseteq A_{n+1}$，则有 $\forall_{1\leq j\leq n+1}\ A_{n+1}\subseteq A_j$，即 A_{n+1} 为所求集合，即 $P(n+1)$ 为真

于是依据归纳法，对于 $A_1,A_2,\cdots,A_n\ (n\geq 2)$，[redacted] $\forall_{1\leq i<j\leq n}\ A_i\subseteq A_j \oplus A_j\subseteq A_i$，$\exists_{1\leq i\leq n}\forall_{1\leq j\leq n}\ A_i\subseteq A_j$

对于实数轴上的一组开区间 $I_1,I_2,\cdots,I_n\ (n\geq 2)$，如果任意两区间的交非空，即 $1\leq i<j\leq n$，$I_i\cap I_j\neq\emptyset$

则有所有集合的交集非空，即 $I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n=\emptyset$

基础步骤：当 $n=2$ 时，$I_1\cap I_2\neq\emptyset$，则结论平凡地为真

递归步骤：假设 $\forall_{n\in Z^+ \text{且} n}$ 对任意 $1\leq i<j\leq n$，$I_i\cap I_j\neq\emptyset$，则 $I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n\neq\emptyset$

令 I_i 为 (a_i,b_i)，并将 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 重新排序，使得 $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_{n+1}$

根据归纳假设 $I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n\neq\emptyset$，即有 $I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n=(\max(a_2,\cdots,a_n),b_1)$

又 $I_1\cap I_{n+1}\neq\emptyset$，[redacted] 又 $b_1\leq b_{n+1}$，于是有 $a_{n+1}<b_1$

取 $I'=(\max(\max(a_2,\cdots,a_n),a_{n+1}),b_1)$，可知 $I'=I_1\cap\cdots\cap I_{n+1}$ 且 $I'\neq\emptyset$，即 $P(n+1)$ 为真

于是依据归纳法，对于一组开区间 $I_1,\cdots,I_n$，如果 $\forall_{1\leq i<j\leq n}\ I_i\cap I_j\neq\emptyset$，则 $I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n\neq\emptyset$

Discrete Mathematics - P88

对于正整数1,2,⋯,n，可以将这些数排成一个序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得任何两个数均值不在两项之间

使得 对于任意 a_i 和 a_j，$\forall_{k\in Z^+} (i<k<j \rightarrow a_k \neq \frac{a_i+a_j}{2})$

证明过程仅考虑 $n=2^k$ ($k\in N$) 的情形，其他n值可由 $n\leq 2^k$ 的序列得到

基础步骤：当k=0时，序列只有1个元素，结论平凡地为真

当k=1时，序列有$2^1=2$个元素，不论是1,2或2,1都符合条件

当k=2时，可以构造序列如 3,1,2,4 符合条件

其构造方法为 $1+2^{2-1}, 1, 2, 2+2^{2-1}$

递归步骤：假设 $\forall_{k\in Z^+且k\geq 2}$ P(k)为真，且P(1),P(2),⋯,P(k)皆由上述方法构造

则构造用于P(k+1)的序列，对于 $i\leq 2^{k-1}$，将 a_i+2^k 插入 a_i之前

对于 $2^{k-1}<i\leq 2^k$，将 a_i+2^k 插入a_i之后

可知 对 $1\leq i\leq 2^k$，a_i为奇数，对 $2^k<i\leq 2^{k+1}$，a_i为偶数

由归纳假设可知 $\forall_{1\leq i,j\leq 2^k} \forall_{l\in Z^+} (i<l<j \rightarrow a_l \neq \frac{a_i+a_j}{2} \wedge a_l+2^k \neq \frac{a_i+2^k+a_j+2^k}{2})$

而对于 a_i 和 a_j+2^k，则均值为 $\frac{a_i+a_j}{2}+2^{k-1}$

注意如果这个值出现在 a_i 和 a_j+2^k 之间

则也会出现在 $(a_i \bmod 2^{k-1})+2^{k-1}$ 和 $(a_j \bmod 2^{k-1})+2^{k-1}$ 之间

便与P(k)为真的前提相矛盾，于是 均值不在 a_i 和 a_j+2^{k-1} 之间

即 P(k+1) 所生成的序列也满足条件，即P(k+1)为真

于是依据归纳法，对于任意正整数n，存在一个1,2,⋯,n排列而成的序列

使得任何两个数的均值都不会出现在两个数之间

如果P(b)为真，且对满足k≥b的所有正整数k，蕴含式 $P(k)\rightarrow P(k+1)$为真，其中b为正整数

则对 n=b, b+1, b+2, ⋯, P(n)为真

注意这是数学归纳法的一种扩展，即可以从以P(1)为基础步骤扩展到以特定整数b的P(b)

假设P(b)为真，且对所有正整数 k≥b, $P(k)\rightarrow P(k+1)$为真，

但对 n=b, b+1, b+2, ⋯, P(n)不全为真

则假设一个正整数集合的子集 $S=\{x\in Z^+ \mid x\geq b \wedge P(x)为假\}$，S非空

根据良序性公理，集合S中必定存在一个最小的元素c

可知对于任意正整数 $b\leq k<c$，P(k)为真

于是取 k=c-1，则有P(k)为真，又 $P(k)\rightarrow P(k+1)$为真

则 $P(c-1)\rightarrow P(c)$，有P(c)为真，与假设相矛盾

即 集合S应为空集∅

于是有 对 n=b, b+1, b+2, ⋯, P(n)为真

于是可以将数学归纳法推广到任意与正整数集合或其子集有一一对应的映射的集合上

Discrete Mathematics - P89

强归纳法 (strong induction)，基于推理规则，如 $P(1)$ 为真且 $\forall k\,[P(1)\land\cdots\land P(k)] \rightarrow P(k+1)]$ 为真，则 $\forall n P(n)$ 为真

基础步骤：证明 $P(1)$ 为真

归纳步骤：证明对所有正整数 k，蕴含式 $[P(1)\land P(2)\land\cdots\land P(k)] \rightarrow P(k+1)$ 也为真

与数学归纳法相比，强归纳法利用所有 $P(1), P(2), \cdots, P(k)$ 来证明 $P(k+1)$ 为真

会比仅使用 $P(k)$ 证明 $P(k+1)$ 的数学归纳法更加灵活

数学归纳法的证明过程可以很容易地改写为强归纳法的证明过程

因为在数学归纳法的递归步骤中，当假设对任意正整数 k，有 $P(k)$ 为真时

等价于同时假定了 $P(1), P(2), \cdots, P(k-1)$ 均为真

但是将一个用强归纳法的证明过程转化为数学归纳法的证明要更困难

强归纳法也称数学归纳法第二原理，或称完全归纳法。

当称强归纳法为完全归纳法时，称数学归纳法原理为不完全归纳法

通常来说，除非数学归纳法的归纳步骤明显成立，否则应尽量使用强归纳法

与数学归纳法类似，强归纳法也可以扩展基础步骤的情形

对于固定的整数 b，和固定的正整数 j

基础步骤：证明 $P(b), P(b+1), \cdots, P(b+j)$ 为真

递归步骤：证明对所有整数 $k \geq b+j$，$[P(b)\land P(b+1)\land\cdots\land P(k)] \rightarrow P(k+1)$ 为真

即根据强归纳法，可以断言对所有整数 $n \geq b$，有 $P(n)$ 为真

对于任意大于等于12分的邮资，可以用4分和5分的邮票组成

数学归纳法基础步骤：12分的邮资可用3枚4分邮票组成

递归步骤：假设对任意 $k \geq 12$，$P(k)$ 为真，则考虑 $P(k+1)$

如果组成k分邮资的有4分邮票，则用一张5分替换4分邮票，

可以得到 $k+1$ 分邮资的组成，即 $P(k+1)$ 为真

如果组成k分邮资的全部为5分邮票，由于 $k \geq 12$，则至少有3张5分邮票

则用4张4分替换3张5分，则可以得到 $k+1$ 分邮资的组成，即 $P(k+1)$ 为真

于是根据数学归纳法：大于等于12分的邮资，可以用4分和5分的邮票组成

强归纳法基础步骤：$P(12)$：12分 $= 3\times4$分，$P(13)$：13分 $= 2\times4$分 $+ 1\times5$分

$P(14)$：14分 $= 1\times4$分 $+ 2\times5$分，$P(15)$：15分 $= 3\times5$分

递归步骤：假设对于正整数 $k \geq 15$，$\forall_{12\leq j\leq k} P(j)$ 为真，则考虑 $P(k+1)$

$k+1$分 $= k-3$分 $+ 4$分，由于 $k \geq 15$，可知 $12 \leq k-3 \leq k$，于是 $P(k-3)$ 为真

于是 $k+1$ 分可由 $k-3$ 分的组成加1张4分组成，即 $P(k+1)$ 为真

于是根据强归纳法：大于等于12分的邮资，可以用4分和5分的邮票组成