Calculus - P120

数量积 对于向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 和数λ，μ

交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

证明过程有：$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$，$\vec{b}\cdot\vec{a} = \|\vec{b}\|\|\vec{a}\|\cos(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$

由于 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$

于是有 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

证明过程有：当 $\vec{c} = \vec{0}$ 时，平凡地有 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{0} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

当 $\vec{c} \neq \vec{0}$ 时，有 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \|\vec{c}\|\cdot Prj_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$

又根据投影的分配律

有 $Prj_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = Prj_{\vec{c}}\vec{a} + Prj_{\vec{c}}\vec{b}$

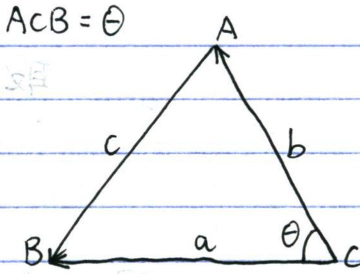
于是有 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \|\vec{c}\| Prj_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \|\vec{c}\|(Prj_{\vec{c}}\vec{a} + Prj_{\vec{c}}\vec{b})$

$= \|\vec{c}\| Prj_{\vec{c}}\vec{a} + \|\vec{c}\| Prj_{\vec{c}}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$，$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

更一般地有 $(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$

余弦定理 (law of cosines)，对于 $\triangle ABC$，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，$\angle ACB = \theta$



则有 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

通过向量证明有，取 $\vec{CB} = \vec{a}$，$\vec{CA} = \vec{b}$，$\vec{AB} = \vec{c}$

于是有 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

则 $\|\vec{c}\|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

于是有 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

数量积坐标表示，对于相互垂直的单位向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$，向量 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$，$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$

$= a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k} + a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}$

$a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}$

$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

特别地有，当 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是非零向量时，$\theta = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Calculus - P121

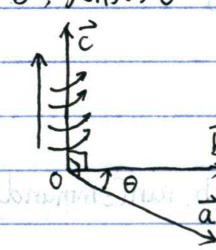
向量积 (cross product, vector product)，对于三维空间中的向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，夹角为 θ

取向量 $\vec{c}$，有 $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$

$\vec{c}$ 垂直于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所确定的平面

$\vec{c}$ 的指向按右手规则 (right-hand rule) 从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 确定

称向量 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量积，记为 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$



对于向量 $\vec{a}$，有 $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

由于向量 $\vec{a}$ 与其自身的夹角 $\theta=0$

于是 $\|\vec{a}\times\vec{a}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{a}\|\sin\theta = 0$，即 $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

对于非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，$\vec{a} /\!/ \vec{b}$ 当且仅当 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

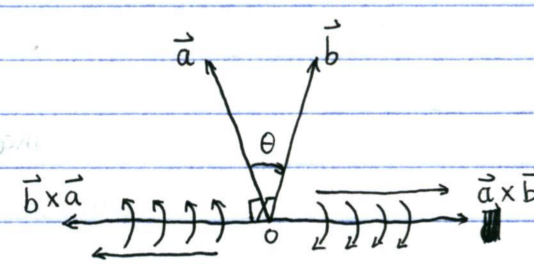
当 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$ 时，夹角 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，

于是 $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta = 0$，即 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

当 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ 时，又 $\|\vec{a}\|\neq 0$，$\|\vec{b}\|\neq 0$

则 $\sin\theta = \dfrac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = 0$，

于是有 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，即 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$



对于向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$，$\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b})$

首先有 $\|\vec{b}\times\vec{a}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$

而 $\vec{b}\times\vec{a}$ 与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 都垂直于 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所确定的平面，于是有 $\vec{b}\times\vec{a} /\!/ \vec{a}\times\vec{b}$

但是根据右手规则，$\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{b}\times\vec{a}$ 的指向相反

于是可知 $\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b})$，即交换律对向量积不成立

分配律：对于向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$，有 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

结合律：对于向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 和数 λ，有 $\vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

向量积的坐标表示，对于相互垂直的单位向量 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$，向量 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

则 $\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$= a_x\vec{i}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) + a_y\vec{j}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) + a_z\vec{k}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

又 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

$= a_xb_x\vec{i}\times\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\times\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\times\vec{k} + a_yb_x\vec{j}\times\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\times\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\times\vec{k} + a_zb_x\vec{k}\times\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\times\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}$

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$

$= (a_yb_z-a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x-a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$，$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

于是向量积可写作三阶行列式

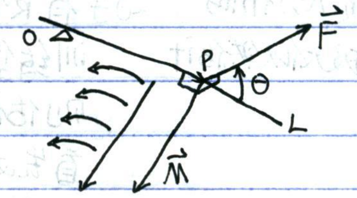
$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$，$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Calculus - P122

力矩 (torque)，对于杠杆L，有支点为O

有一个力$\vec{F}$作用于杠杆L上的点P，　　为向量$\vec{M}$



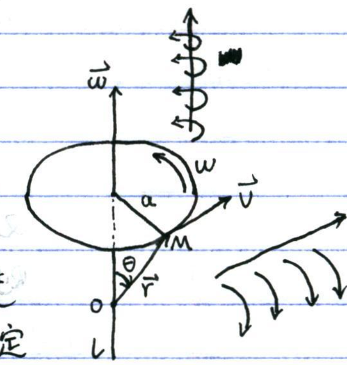
$\vec{F}$与$\vec{OP}$的夹角为θ，则规定力$\vec{F}$对支点O的力矩

且有 $\|\vec{M}\| = \|\vec{OP}\|\|\vec{F}\|\sin\theta$

$\vec{M}$垂直于 $\vec{OP}$和$\vec{F}$确定的平面

$\vec{M}$的指向按右手规则从$\vec{OP}$转向$\vec{F}$确定

于是有力矩 $\vec{M} = \vec{OP}\times\vec{F}$



对于以等角速度$\vec{\omega}$绕轴l旋转的刚体

考虑刚体上一点M的线速度$\vec{v}$

当刚体绕l轴旋转时，取沿l轴的向量$\vec{\omega}$表示角速度

且有 $\|\vec{\omega}\| = \omega$，$\vec{\omega}$的指向按右手规则和转动方向确定

令点M到轴l的距离为a，即点M的旋转半径为a

在轴l上任取一点O，并作向量 $\vec{r} = \vec{OM}$

则有向量$\vec{OM}$与$\vec{\omega}$的夹角为θ，即有 $a = \|\vec{r}\|\sin\theta$

设点M的线速度为向量$\vec{v}$，

则有 $\|\vec{v}\| = \omega a = \|\vec{\omega}\|\|\vec{r}\|\sin\theta$

又$\vec{v}$垂直于由向量$\vec{\omega}$和$\vec{r}$确定的平面，且指向按右手规则从$\vec{\omega}$转向$\vec{r}$确定

于是有 $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

特别地有，当点O为点M的旋转路径的圆心时

$\vec{r}$与$\vec{\omega}$垂直 且 $\|\vec{r}\| = a$

则 $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ 平凡地转换为 $v = \|\vec{v}\| = \|\vec{\omega}\|\|\vec{r}\|\sin\theta = \omega a$

混合积 (scalar triple product)，对于向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$

先作向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的向量积$\vec{a}\times\vec{b}$，其结果再与$\vec{c}$作数量积 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

称为向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积，记为 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，也记作 $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$

坐标表示，对于相互垂直的单位向量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$，向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$

则有 $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ a_x & a_y \end{vmatrix}\vec{k}$

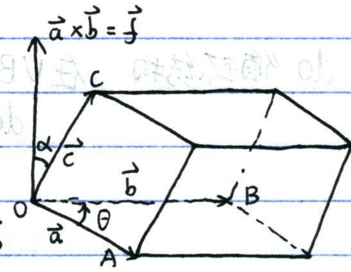
$$\text{于是 } [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Calculus - P123

混合积几何意义

对于向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，有混合积 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

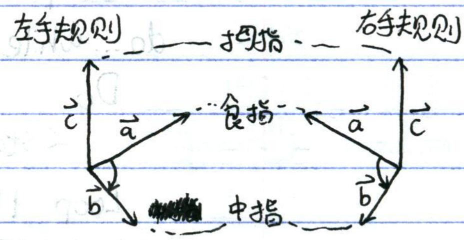


任取原点O，并作 $\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$，$\vec{OC}=\vec{c}$

则 $|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]|$ 为以OA,OB,OC为棱的平行六面体的体积

且当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 组成右手系，即 $\vec{c}$ 的指向按右手规则从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 确定

则混合积的符号为正



当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 组成左手系，即 $\vec{c}$ 的指向按左手规则

从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 确定，则混合积符号为负

取向量 $\vec{f}=\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ

则有 $\|\vec{f}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$

即 $\|\vec{f}\|$ 等于以OA,OB为边的平行四边形面积

且 $\vec{f}$ 垂直于平行四边形所在的平面

$\vec{f}$ 的指向按右手规则从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 确定

于是当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 组成右手系时，向量 $\vec{f}$ 与 $\vec{c}$ 指向平行四边形的同侧

夹角 α 为锐角，即有 $\cos\alpha>0$

于是当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 组成左手系时，向量 $\vec{f}$ 与 $\vec{c}$ 指向平行四边形的异侧

夹角 α 为钝角，即有 $\cos\alpha<0$

又 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{f}\cdot\vec{c}$

$=\|\vec{f}\|\|\vec{c}\|\cos\alpha$

即当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 组成右手系时，$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ 为正数

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 组成左手系时，$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ 为负数

再考虑以OA,OB,OC为棱的平行六面体

以OA,OB为边的平行四边形的底面面积 $S=\|\vec{f}\|$

而高h等于向量 $\vec{c}$ 在向量 $\vec{f}$ 上的投影的绝对值

即 $h=|Prj_{\vec{f}}\vec{c}|=|\|\vec{c}\|\cos\alpha|=\|\vec{c}\||\cos\alpha|$

于是有以OA,OB,OC为棱的平行六面体的体积

$V=Sh=\|\vec{f}\|\|\vec{c}\||\cos\alpha|=|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]|$

则由混合积的几何意义可知

当混合积 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\neq0$ 时，则可以以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱构造平行六面体

从而有 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面

当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面时，则必定能以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱构造平行六面体

于是有混合积 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\neq0$

于是向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面当且仅当混合积 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$，即

如果有 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$，

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

Calculus - P124

混合积的循环变换(circular shift)，对于向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

且有 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$

则有 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

即 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}]$

证明过程有，$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]$

同理地有 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}]$

于是有 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

特别地有，由于向量的数量积符合交换律

于是有 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

所以在某些环境的定义中，混合积的表示方法不同

即有 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

注意这两种表示方法不影响混合积的结果

又对于向量的向量积在交换时取负号(方向取反)

于是有 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = [-(\vec{b}\times\vec{a})]\cdot\vec{c} = -(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$

则有 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b} = -(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$

即可以表示为 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}] = -[\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}] = -[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}] = -[\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}]$

当混合积中的向量中有任意两个相等，则混合积为0

取向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的混合积 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$，不失一般性地假设 $\vec{b} = \vec{c}$

则 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{0} = 0 = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{b}]$

且有 $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{b}) = 0$

于是可知当混合积中任意两个向量相等，则混合积为0

对于任意实数 $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$，

有 $\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2} \geq |a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|$

证明过程有，取向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 θ，$\cos\theta \in [-1, 1]$

$|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z| = |\vec{a}\cdot\vec{b}| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\,|\cos\theta|$，且 $|\cos\theta| \leq 1$

$\leq \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$

当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，不等式取得等号

Calculus - P125

空间曲面方程 (surface equation)，在空间解析几何 (analytic geometry) 中

任何曲面和曲线都看作点的几何轨迹

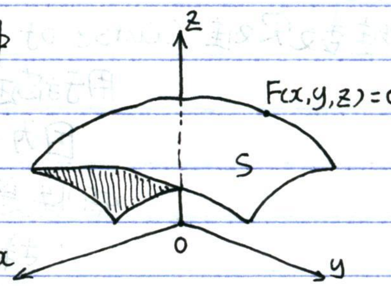
对于曲面 S 和三元方程 $F(x,y,z)=0$ 满足

曲面 S 上的任意一点 (x,y,z) 均满足方程 $F(x,y,z)=0$

不在曲面 S 上的点，均不满足方程 $F(x,y,z)=0$

则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 S 的方程

曲面 S 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形



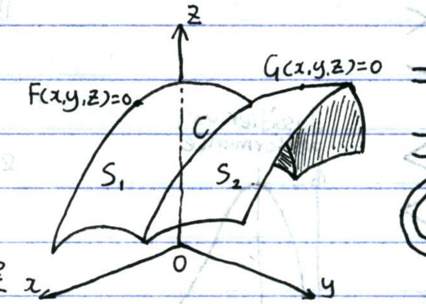
空间曲线方程 (curve equation)，空间曲线可以看作两曲面 S_1, S_2 的交线

取曲面 S_1 的方程 $F(x,y,z)=0$，曲面 S_2 的方程 $G(x,y,z)=0$

曲线 C 是曲面 S_1 和 S_2 的交线 (intersection)

可知曲线 C 上的任意一点，(x,y,z) 应同时满足两曲面方程

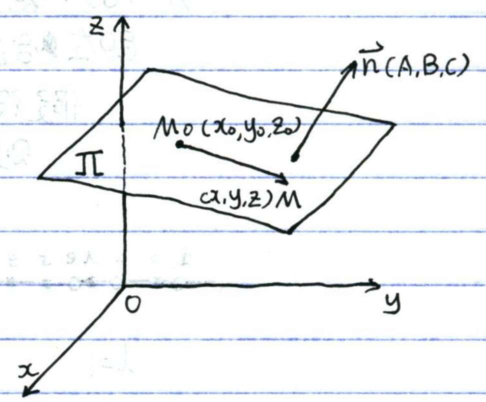
即为方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 的解



如果点不在曲线 C 上，则其不可能同时在平面 S_1, S_2 上，于是不可能是方程组的解

则称方程组为曲线 C 的方程

曲线 C 为方程组的图形



平面点法式方程 (point-normal equation)，对于空间中的平面 M

如果存在非零向量 $\vec{n}$，且垂直于平面 M

则称 $\vec{n}$ 为平面 M 的法线向量 (normal vector)

于是有平面 M 上的任一向量均与法线向量 $\vec{n}$ 垂直

由于过空间内一点，可作[redacted]且仅能作一个平面垂直于已知直线

则当平面 π 上的一点，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与其法线向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ 已知时

取平面[redacted] π 上任意一点，$M(x,y,z)$

则可知向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 必定与法线向量 $\vec{n}$ 垂直

于是可知[redacted] $\overrightarrow{M_0M}$ 和 $\vec{n}$ 的数量积 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

即 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，A, B, C 为不全为零的常数

于是平面 π 上任意一点均满足方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

如果点 $M(x,y,z)$ 不在平面 π 上，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\vec{n}$ 不垂直

于是 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq0$，即不满足方程

于是[redacted] $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 是平面 π 的方程

又方程由平面上一点，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和法线向量[redacted] $\vec{n}=(A,B,C)$ 确定

于是称为平面的点法式方程

Calculus - P126

平面一般方程

注意到平面的点法式方程为坐标 x, y, z 的三元一次方程

而对于任意平面，都可以用平面上一点 M 与法线向量 $\vec{n}$ 确定其点法式方程

于是对于任意平面，都可以用三元一次方程表示

于是对于三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$，其中 A, B, C 为不全为零的常数

则任取一组满足方程的 x_0, y_0, z_0

即有 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

相减可得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

于是可知这是一个平面的点法式方程

平面由平面上一点 (x_0, y_0, z_0) 和法线向量 (A, B, C) 确定

于是可知满足该方程的点，均在该平面上

而不满足该方程的点，均不在该平面上

则称方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 为平面一般方程 (general equation)

特别地有，对于 A, B, C, D 中有常数为 0 的情形，在空间坐标系 $Oxyz$ 中

当 $D=0$ 时，$Ax+By+Cz=0$ 表示一个过原点的平面

当 $A=0$ 时，$By+Cz+D=0$ 表示一个平行/包含 x 轴的平面

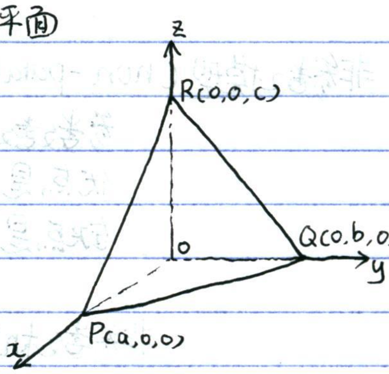
当 $B=0$ 时，$Ax+Cz+D=0$ 表示一个平行/包含 y 轴的平面

当 $C=0$ 时，$Ax+By+D=0$ 表示一个平行/包含 z 轴的平面

当 $A=B=0$ 时，$Cz+D=0$ 表示一个平行/重合于 xOy 的平面

当 $A=C=0$ 时，$By+D=0$ 表示一个平行/重合于 xOz 的平面

当 $B=C=0$ 时，$Ax+D=0$ 表示一个平行/重合于 yOz 的平面



平面截距式方程 (intercept equation)，对于空间直角坐标系 $Oxyz$

平面与 x 轴，y 轴，z 轴的交点分别为 P, Q, R

即有 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$

其中 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$

则令平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$

由于平面不过原点 O，于是 $D\neq 0$

于是有方程组 $\begin{cases} aA+D=0 \\ bB+D=0 \\ cC+D=0 \end{cases}$，有解 $\begin{cases} A=-\frac{D}{a} \\ B=-\frac{D}{b} \\ C=-\frac{D}{c} \end{cases}$

于是有 $-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$，即 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

称为平面的截距式方程，a, b, c 分别为平面在 x 轴，y 轴，z 轴的截距

Calculus - P127

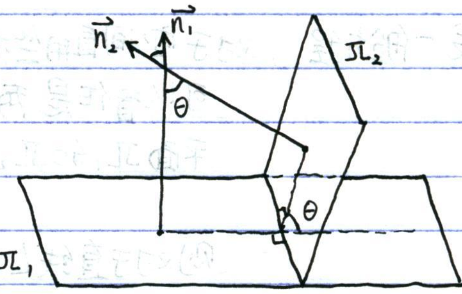
平面的夹角

在空间直角坐标系中，有平面π_1和π_2

其法线向量分别为$\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$

则法线向量的夹角称为两平面的夹角

且通常为锐角或直角



于是令平面π_1和π_2的夹角为θ

则有 $\theta=(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})$ 或 $\theta=\pi-(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})$

$$\text{即 } \cos\theta = |\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})| = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}$$

$$= \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

对于平面π_1，π_2，分别有法线向量$\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$

π_1，π_2互相垂直，即$\pi_1\perp\pi_2$

当且仅当 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$，即法线向量$\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$

π_1，π_2互相平行或重合，即$\pi_1 \parallel \pi_2$

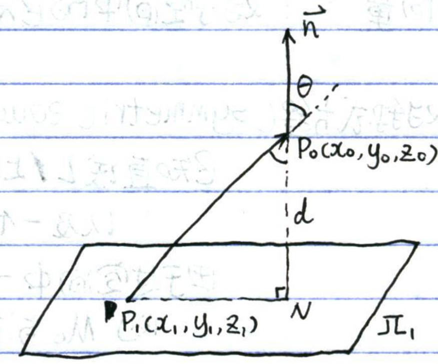
当且仅当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

点到平面距离

在空间直角坐标系中有点$P_0(x_0,y_0,z_0)$在平面π_1之外

平面π_1的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$

考虑点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离



在平面π_1上任取一点，$P_1(x_1,y_1,z_1)$

并作法线向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

向量 $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)$

由于向量$\vec{n}$与$\overrightarrow{P_1P_0}$的夹角可能为钝角

则P_0到平面π_1的距离为d

$$\text{于是有 } d = \|\overrightarrow{P_1P_0}\|\cdot|\cos\theta|$$

$$= \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{\|\overrightarrow{P_1P_0}\|\cdot\|\vec{n}\|}\cdot\|\overrightarrow{P_1P_0}\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= |(Ax_0+By_0+Cz_0)-(Ax_1+By_1+Cz_1)| / \sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

又点$P_1(x_1,y_1,z_1)$在平面$Ax+By+Cz+D=0$

于是 $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$

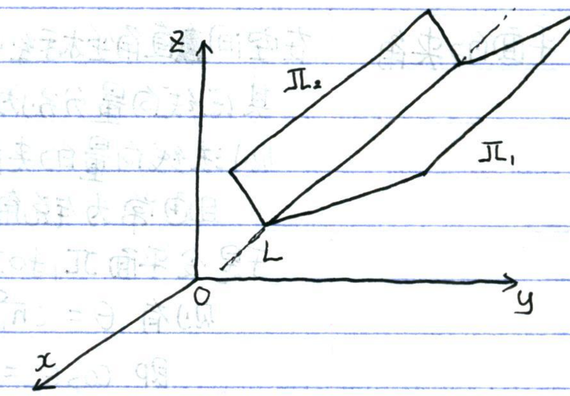
$$\text{则有 } d = |Ax_0+By_0+Cz_0+D| / \sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

$$= |Ax_0+By_0+Cz_0+D| / \|\vec{n}\|$$

$$= |\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP_0}+D| / \|\vec{n}\|$$

其中$\overrightarrow{OP_0}=(x_0,y_0,z_0)$，即点$P_0$的位置向量

Calculus - P128



直线一般方程，对于空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的直线 L

可以看作是两个平面 Π_1 和 Π_2 的交线

平面 Π_1 和 Π_2 的方程为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

则对于直线 L 上的任意一点，M

都满足方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

而对于[redacted]不在直线 L 上的任意一点，M'，不可能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上

即不可能满足方程组

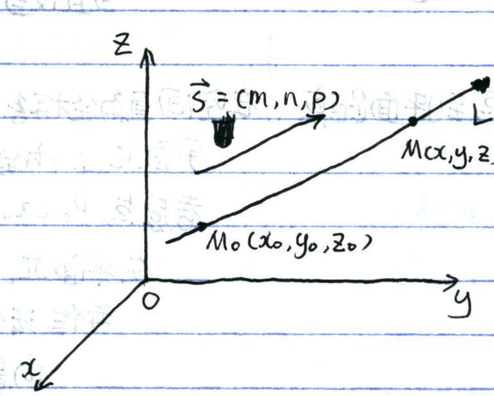
于是直线 L 可以用方程组表示，方程组是直线 L 的方程

称为空间直线的一般方程 (general equation)

注意 由于空间上过同一直线 L 的平面有无穷多个

则从中任取两个平面并联立方程组，则有直线 L 的方程

方向向量　对于空间中的已知直线，与直线平行的非零向量



直线对称式方程 (symmetric equation)，对于空间直角坐标系 $Oxyz$

已知直线 L 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ [redacted]

以及一个[redacted]方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$

由于过空间中一点能且仅能作一条直线与已知直线平行

则 M_0 与 $\vec{s}$ 可以确定直线 L 的位置

取直线[redacted] L 上的任意一点，$M(x,y,z)$

则有向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与直线 L 的方向向量 $\vec{s}$ 平行

又向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$，$\vec{s}=(m,n,p)$

于是有 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

而对于不在直线 L 上的点，M'，有 $\overrightarrow{M_0M'}$ 与 $\vec{s}$ 不平行，即不满足方程

于是直线可以用方程 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 表示

称为直线的对称式方程 或点向式方程

m,n,p 称为直线 L 的一组方向数，$\vec{s}$ 的方向余弦称为直线 L 的方向余弦

直线参数[redacted]方程 (parametric equation)，令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，其中 t 为[redacted]任意实数

则方程组 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ 称为直线的参数方程

Calculus - P129

直线方向向量

令空间直角坐标系Oxyz中的直线L是平面π_1与π_2的交线

平面π_1，π_2的法线向量分别为 $\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$

则考虑直线L的方向向量 $\vec{s}$

注意 由于直线L是平面π_1与π_2的交线，于是直线L与$\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$分别垂直

即有 $\vec{s}\perp\vec{n_1}$ 且 $\vec{s}\perp\vec{n_2}$，而且$\vec{n_1}$与$\vec{n_2}$不平行

于是有 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=(B_1C_2-B_2C_1)\vec{i}+(A_2C_1-A_1C_2)\vec{j}+(A_1B_2-A_2B_1)\vec{k}$

直线夹角

对于空间直角坐标系Oxyz中的直线L_1，L_2

直线L_1和L_2的方向向量分别为 $\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$，$\vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$

则令夹角φ为 $(\widehat{\vec{s_1},\vec{s_2}})$ 和 $(\widehat{-\vec{s_1},\vec{s_2}})=\pi-(\widehat{\vec{s_1},\vec{s_2}})$ 中的锐角或直角

则称夹角φ为直线L_1与L_2的夹角

由于夹角φ为锐角或直角，则有 $0\le\cos\varphi\le 1$

即 $\cos\varphi=|\cos(\widehat{\vec{s_1},\vec{s_2}})|=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}=\dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{\|\vec{s_1}\|\cdot\|\vec{s_2}\|}$

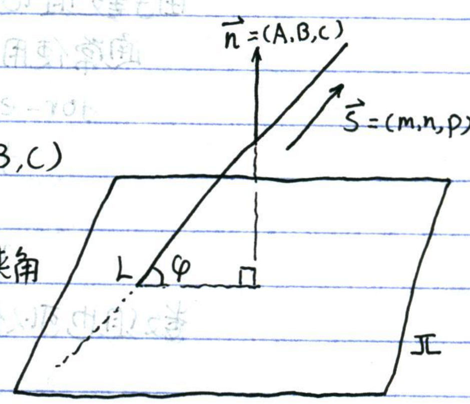
对于直线L_1，L_2，$L_1\perp L_2$ 当且仅当 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

即对于方向向量 $\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$，$\vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$，有 $\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0$

对于直线L_1，L_2，$L_1 /\!/ L_2$ 当且仅当 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}=\lambda$，其中$\lambda$为实数

即对于方向向量 $\vec{s_1}$，$\vec{s_2}$，$\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\vec{0}$

直线平面夹角



对于空间直角坐标系Oxyz中的直线L和平面π

直线L的方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$，平面π的法线向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

当直线L与平面π垂直时，规定夹角 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

当直线L与平面π不垂直时，令夹角 $0\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 为直线与平面的夹角

则有 $\varphi=|\dfrac{\pi}{2}-(\widehat{\vec{s},\vec{n}})|$，即 $\sin\varphi=|\cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}})|$

于是 $\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\cdot\|\vec{n}\|}$

对于直线L和平面π，$L\perp\pi$ 当且仅当 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}=\lambda$，其中$\lambda$为实数

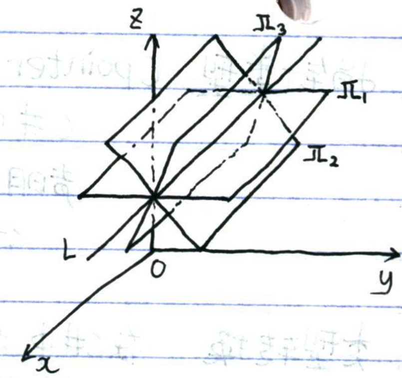
即对于方向向量$\vec{s}$和法线向量$\vec{n}$，$\vec{s}\times\vec{n}=\vec{0}$，即 $\vec{s}/\!/\vec{n}$

对于直线L和平面π，$L /\!/ \pi$ 当且仅当 $Am+Bn+Cp=0$

即对于方向向量$\vec{s}$和法线向量$\vec{n}$，$\vec{s}\cdot\vec{n}=0$

Calculus - P130

平面束　(plane pencil)，对于空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的直线 L



直线 L 的方程组为 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

注意其中 (A_1, B_1, C_1) 和 (A_2, B_2, C_2) 线性无关

则取任意常数 λ 建立三元一次方程

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

即 $(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+D_1+\lambda D_2=0$

由于 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例

则对于任意常数 λ，都满足

$A_1+\lambda A_2$，$B_1+\lambda B_2$，$C_1+\lambda C_2$ 不全为 0

从而可知方程 $(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+(D_1+\lambda D_2)=0$ 表示一个平面

于是对于不同的 λ 值，方程表示通过 L 的不同平面

反之对于任何通过直线 L 的平面，都包含在方程表示的一族平面内

进一步地，取不同时为 0 的任意常数 λ_1, λ_2 构造方程

$$(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)x+(\lambda_1B_1+\lambda_2B_2)y+(\lambda_1C_1+\lambda_2C_2)z+(\lambda_1D_1+\lambda_2D_2)=0$$

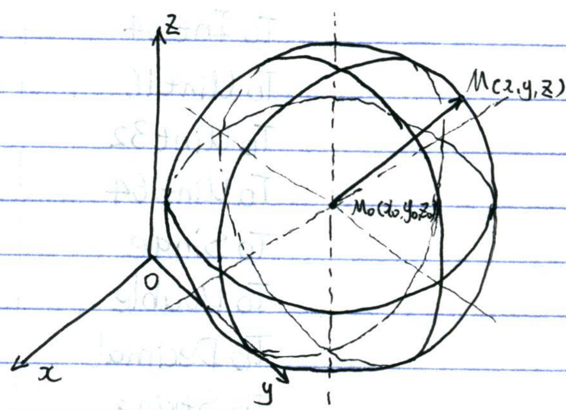
称为通过给定直线 L 的所有平面组成的平面束的方程

在空间解析几何中，关于曲面研究的两个基本问题

已知给定曲面作为点的几何轨迹时，建立曲面的方程

已知给定坐标 x, y, z 的方程，研究方程所表示的曲面形状

球面　(sphere)，对于空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的球面



球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，球面半径为 R

取球面上任意一点 $M(x, y, z)$，取向量 $\overrightarrow{M_0M}$

则有 $\|\overrightarrow{M_0M}\|=R$

且 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

于是 $\|\overrightarrow{M_0M}\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$

即 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

又不在球面上的点，均不满足方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

称方程 $(x_0-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 为球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 R 的球面方程

另外球面方程有一般的三元二次方程的形式

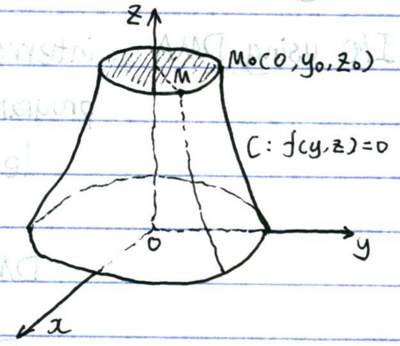
$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0$，其中常数 $A\neq0$

并且可以通过配方转换成 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 的形式

Calculus - P131

旋转曲面 (surface of revolution)，在空间坐标系中

以一条平面曲线绕其平面上的直线旋转一周形成的曲面



▲旋转曲线称为旋转曲面的母线(generatrix)

定直线称为旋转曲面的轴(axis of rotation)

如取坐标平面 yOz 上的已知曲线 C

有曲线方程为 $f(y,z)=0$

令曲线 C 绕 z 轴旋转一周，即得到一个以 z 轴为旋转轴的旋转[redacted]曲面

取曲线上的一点 $M_0(0,y_0,z_0)$ 则有 $f(y_0,z_0)=0$

当曲线 C 绕 z 轴旋转时，观察 M_0 的运动轨迹

可知对于轨迹上的任意一点，$M(x,y,z)$，有 $z=z_0$

且 M 到 z 轴的距离均等于 M_0 点到 z 轴的距离

于是有 $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+y_0^2}=|y_0|$

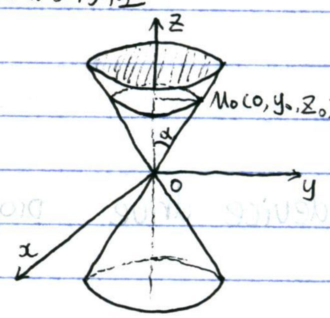
代入 $f(y_0,z_0)=0$，则有 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

于是可知 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$ 为绕 z 轴旋转的旋转曲面的方程

同理有 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ 为绕 x 轴旋转的旋转曲面的方程

$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$ 为绕 y 轴旋转的旋转曲面的方程

圆锥面 (conical surface)，在空间直[redacted]角坐标系 Oxyz 中



以一条直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转形成的旋转曲面

▲两直线的交点，称为圆锥面的顶点，(apex)

两直线的夹角 α ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) 称为圆锥面的半顶角 (half aperture)

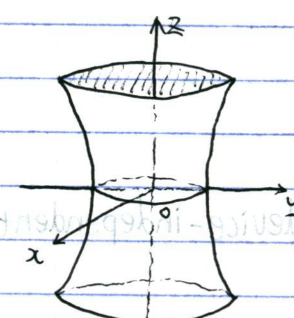
在坐标平面[redacted] yOz 上[redacted]取任意一点，$M_0(0,y_0,z_0)$

且有直线方程 $z=\cot\alpha\, y$，[redacted]绕 z 轴旋转一周

于是有 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$，即 $z^2=a^2(x^2+y^2)$，其中 $a=\cot\alpha$

即 $z^2=a^2(x^2+y^2)$ 为绕 z 轴旋转的圆锥面方程

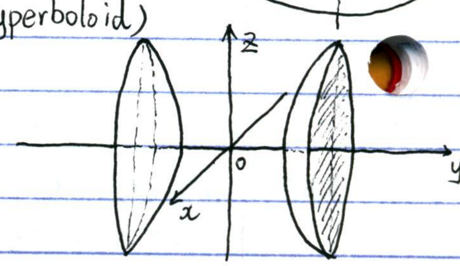
旋转双曲面 (hyperboloid of revolution)



对于坐标平面 yOz 上的双曲线 [redacted]$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

绕 z 轴旋转一周可以得到旋转单叶双曲面 (hyperbolic hyperboloid)

曲面方程为 $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



绕 y 轴旋转一周可以得到旋转双叶双曲面

(two-sheet hyperboloid / elliptic hyperboloid)

曲面方程为 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$

Calculus - P132

柱面 (cylinder surface)，在空间坐标系中

对于给定的直线L和平面曲线C

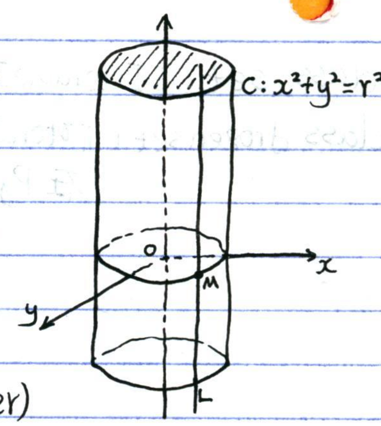
取直线L沿曲线C平行移动形成的轨迹称为柱面

平面曲线C称为柱面的准线(directrix)

动直线L称为柱面的母线(generatrix)

一般地当曲线C为圆时，称为圆柱面(circular cylinder)

当曲线C为抛物线时，称为抛物柱面(parabolic cylinder)



一般地，对于只含x,y而缺少z的方程$F(x,y)=0$

在空间直角坐标系$Oxyz$中表示母线平行于z轴的柱面

柱面的准线为xOy平面上的曲线$F(x,y)=0$

类似地有$F(x,z)=0$表示母线平行于y轴的柱面

$F(y,z)=0$表示母线平行于x轴的柱面

二次曲面 (quadric surface)，在空间直角坐标系$Oxyz$中，以三元二次方程$F(x,y,z)=0$所表示的曲面

一般地有 $F(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Gz + H = 0$

相对地称平面为一次曲面

椭圆锥面 (elliptic cone)，在空间直角坐标系$Oxyz$中

方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$，其中$a,b$为正实数

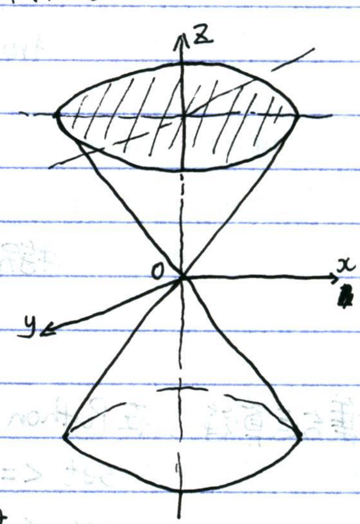
以垂直于z轴的平面截此曲面可得截痕

当$z=0$时，得到一点$(0,0,0)$

当$z\neq 0$时，在平面$z=t$上得到椭圆 $\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1$

当t变化时，$\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1$表示一组椭圆

椭圆相互平行且长短轴比例不变



一般地，通过综合截痕的变化了解曲面形状的方法称为截痕法

对于xOy平面上点$M(x,y)$的轨迹C沿y轴方向伸缩λ倍而得到点$M'(x,\frac{1}{\lambda}y)$的轨迹C'

如对于圆 $x^2+y^2=a^2$ 沿y轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍

则有 $x^2+(\frac{a}{b}y)^2=a^2 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

类似地对于圆锥面 $x^2+y^2=a^2z^2$ 沿y轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍

则有 $x^2+(\frac{a}{b}y)^2=a^2z^2 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$