Discrete Mathematics - P213

可以通过生成函数求解递推关系

对于序列$\{a_k\}$满足初始条件$a_0=2$和递推关系$a_k=3a_{k-1}$, $k=1,2,3,\cdots$

以通常的方法可知递推关系的解为$a_k=2\cdot 3^k$, $k=0,1,2,\cdots$

令$G(x)$是序列$\{a_k\}$的生成函数，即$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$

注意有 $xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k$

则根据递推关系$a_k=3a_{k-1}$有

$$G(x)-3xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-3\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k$$
$$=a_0x^0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-3a_{k-1})x^k$$
$$=a_0=2$$

于是有$G(x)=\frac{2}{1-3x}=2\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot 3^k\cdot x^k$

则有$a_k=2\cdot 3^k$，其中$k=0,1,2,\cdots$

与常规方法得到的答案一致

对于序列$\{a_n\}$，其中a_n表示包含偶数个0的n位十进制数字串，$n=1,2,3,\cdots$

首先对序列进行扩充，令空串λ为包含偶数个0的0位十进制数字串

则有初始条件$a_0=1$，$a_n=(10^{n-1}-a_{n-1})+9\cdot a_{n-1}$，$n=1,2,3,\cdots$

通过常规方法可得解为$a_n=\frac{1}{2}\cdot 8^n+\frac{1}{2}\cdot 10^n$

令$G(x)$是序列$\{a_n\}$的生成函数，即$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

将递推关系两侧同时乘以x^n，有$a_nx^n=(8a_{n-1}+10^{n-1})x^n$

$$\text{则}G(x)-1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-a_0x^0=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(8a_{n-1}+10^{n-1})x^n$$
$$=8\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}10^{n-1}x^n$$
$$=8x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+x\sum_{n=1}^{\infty}10^{n-1}x^{n-1}$$
$$=8x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x\sum_{n=0}^{\infty}10^nx^n$$

于是有$G(x)-1=8xG(x)+x/(1-10x)$

$$\text{则}G(x)=(1-9x)/(1-8x)(1-10x)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1-8x}+\frac{1}{1-10x}\right]$$

取$|10x|<1$，同时有$|8x|<1$

$$\text{即}G(x)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(8x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(10x)^n\right]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(8^n+10^n)x^n$$

则有$a_n=\frac{1}{2}(8^n+10^n)$，$n=0,1,2,\cdots$

与常规方法得到的答案一致

Discrete Mathematics - P214

可以通过生成函数证明恒等式

对于非负整数n，令 $\binom{0}{0}=1$，有 $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

注意 根据二项式定理有，$\binom{2n}{n}$ 为 $(1+x)^{2n}$ 展开式中 x^n 项的系数

令 $G(x)=(1+x)^{2n}$ 为序列 $\{a_k\}$ 的生成函数

又 $G(x)=(1+x)^{2n}=[(1+x)^n]^2$，

则 $H(x)=(1+x)^n$ 为序列 $\{b_k\}$ 的生成函数，且 $b_k=\binom{n}{k}$

$$G(x)=[H(x)]^2=\sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{k}b_j b_{k-j}\right)x^k$$

于是 x^n 的系数为 $\sum_{j=0}^{n}b_j b_{n-j}$

即 $\binom{2n}{n}=\sum_{j=0}^{n}b_j b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{n-j}$

$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

对于正整数 $k<n$，有帕斯卡恒等式 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

取生成函数 $G(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

生成函数 $H_1(x)=(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$

生成函数 $H_2(x)=x(1+x)^{n-1}=x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$

$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k$

再有 $\binom{n-1}{n}=0$，$\binom{n-1}{-1}=0$

于是 $(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k+\binom{n-1}{n}x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}x^k$

$x(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k+\binom{n-1}{-1}x^0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k$

则 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n=(1+x)(1+x)^{n-1}=(1+x)^{n-1}+x(1+x)^{n-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$

$=\binom{n-1}{0}\cdot x^0+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]x^k+\binom{n-1}{n-1}\cdot x^n$

于是可知对于正整数 $k<n$，有 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

对于非负整数 $k\le m,n$，有范德蒙德恒等式 $\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{k-j}\binom{n}{j}$

取生成函数 $(1+x)^{m+n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+n}{k}x^k$

生成函数 $(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$，$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$

则有 $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+n}{k}x^k=(1+x)^{m+n}$

$=(1+x)^m\cdot(1+x)^n$

$=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\right]\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\right]$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{k-j}\binom{n}{j}\right]x^k$

于是可知对于非负整数 $k\le m,n$，有 $\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{k-j}\binom{n}{j}$

Discrete Mathematics - P215

对于斐波那契数 $F_0=0, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $n\in Z^+$ 且 $n>1$

可以通过生成函数求解斐波那契数的显式公式

取生成函数 $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$

则 $$\begin{aligned} G(x)-0-x &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0x^0 - F_1x^1 \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1}+F_{n-2})x^n \\ &= x(\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^{n-1} - F_0x^0) + x^2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^{n-2} \\ &= xG(x)+x^2G(x) \end{aligned}$$

于是有 $G(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$，又 $1-x-x^2 = (1-\frac{1+\sqrt5}{2}x)(1-\frac{1-\sqrt5}{2}x)$

令 $\phi = \frac{1+\sqrt5}{2}$，$\hat\phi = \frac{1-\sqrt5}{2}$，则 $1-x-x^2=(1-\phi x)(1-\hat\phi x)$

则 $$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x}{(1-\phi x)(1-\hat\phi x)} = \frac{1}{\sqrt5}\frac{\sqrt5 x}{(1-\phi x)(1-\hat\phi x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\phi x-\hat\phi x}{(1-\phi x)(1-\hat\phi x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1}{1-\phi x}-\frac{1}{1-\hat\phi x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\phi^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\hat\phi^n x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt5}(\phi^n-\hat\phi^n)x^n \end{aligned}$$

于是有 $F_n = \frac{1}{\sqrt5}(\phi^n-\hat\phi^n) = \frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]$

对于无穷序列 $\{a_n\}$，满足初始条件 $a_0=20, a_1=60$ 和递推关系 $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}+4^n+6$，$n\in Z^+$ 且 $n>1$

取生成函数 $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

则有 $$\begin{aligned} G(x)-20-60x &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n - a_0x^0 - a_1x^1 \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(2a_{n-1}+3a_{n-2}+4^n+6)x^n \\ &= 2x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 3x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}a^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty}4^nx^n + \sum_{n=2}^{\infty}6x^n \\ &= 2x(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n - a_0x^0) + 3x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \\ &\quad + (\sum_{n=0}^{\infty}4^nx^n - 4^0x^0 - 4^1x^1) + (\sum_{n=0}^{\infty}6x^n - 6x^0 - 6x^1) \\ &= 2xG(x) - 40x + 3x^2Gx + \frac{1}{1-4x} - 1 - 4x + \frac{6}{1-x} - 6 - 6x \end{aligned}$$

$$(1-2x-3x^2)G(x) = 13+10x+\frac{1}{1-4x}+\frac{6}{1-x}$$

$$G(x) = \frac{20-80x+2x^2+40x^3}{(1-4x)(1-x)(1+x)(1-3x)} = \frac{z_1}{1-4x}+\frac{z_2}{1-x}+\frac{z_3}{1+x}+\frac{z_4}{1-3x}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ -3 & -6 & -8 & -4 & -80 \\ -1 & 5 & 19 & -1 & 2 \\ 3 & 12 & -12 & 4 & 40 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 16/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31/20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 67/4 \end{array}\right]$$

于是 $G(x) = \frac{16}{5}\sum_{n=0}^{\infty}4^nx^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n + \frac{31}{20}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n + \frac{67}{4}\sum_{n=0}^{\infty}3^nx^n$

则有 $a_n = \frac{16}{5}\cdot4^n + \frac{67}{4}\cdot3^n + \frac{31}{20}(-1)^n - \frac{3}{2}$

Discrete Mathematics - P216

对于正整数n，有 $\binom{-1/2}{n} = \binom{2n}{n}/(-4)^n$

证明过程有，根据广义二项式定理，对于实数u和正整数k

有 $\binom{u}{k} = u(u-1)\cdots(u-k+1)/k! = [\prod_{j=0}^{k-1}(u-j)]/k!$

于是有 $\binom{-1/2}{n} = (-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)/n!$

$= (-1)^n(1/2)(1/2+1)\cdots(1/2+n-1)/n!$

$= 1\times 3\times\cdots\times(2n-1)/[(-2)^n\cdot n!]$

又 $2\times 4\times\cdots\times 2n = 2^n\times 1\times 2\times\cdots\times n = 2^n\cdot n!$

于是 $\binom{-1/2}{n} = 1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times(2n-1)\times 2n/[(-2)^n\cdot n!\cdot 2^n\cdot n!]$

$= (2n)!/[n!\times n!\times(-4)^n]$

$= \binom{2n}{n}/(-4)^n$

对于无穷序列$\{a_n\}$，有$a_n=\binom{2n}{n}$，则$\{a_n\}$的生成函数为$G(x)=(1-4x)^{-1/2}$，其中$n=0,1,2,\cdots$

证明过程有，对于$n=0$，根据广义二项式定理 $\binom{-1/2}{n} = 1 = \binom{2n}{n}/(-4)^n$

则 $G(x) = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-4x)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}[\binom{2n}{n}/(-4)^n]\cdot(-4)^n x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$

于是可知 $G(x)=(1-4x)^{-1/2}$ 是无穷序列 $a_n=\binom{2n}{n}$ 的生成函数

对于无穷序列$\{a_n\}$，有 $a_n = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$

则$\{a_n\}$的生成函数 $G(x) = (x^2+x)/(1-x)^4$

证明过程有，无穷序列$\{a_n\}$满足初始条件$a_0=0$和递推关系$a_n=a_{n-1}+n^2$

则 $a_n x^n = a_{n-1}x^n + n^2x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n-1}x^n + n^2x^n)$

$= x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$

于是 $(1-x)G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\binom{n}{2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{1}x^n$

$= 2x^2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n + x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n$

$= 2x^2/(1-x)^3 + x/(1-x)^2$

$= (x+x^2)/(1-x)^3$

则有 $G(x) = (x+x^2)/(1-x)^4$

又 $G(x) = (x+x^2)/(1-x)^4 = (x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{3}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{3}x^n$

于是有 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的显式公式 $a_n = \binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

与常规方法得到的结果一致

Discrete Mathematics - P217

对于无穷序列$\{C_n\}$，其中C_n为卡塔兰数，$n=0,1,2,\cdots$

满足初始条件$C_0=C_1=1$和递推关系$C_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k}$，其中$n>1$

考虑无穷序列$\{C_n\}$的生成函数$G(x)$

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n+C_0x^0$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k}\right)x^n+1$$
$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k}\right)x^{n-1}+1$$
$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}\right)x^n+1$$
$$=x\cdot G(x)\cdot G(x)+1$$

于是有$x[G(x)]^2-G(x)+1=0$

则有$G(x)=(1\pm\sqrt{1-4x})/2x$

令$G(x)=[1+\alpha_0(1-4x)^{1/2}]/2x$，其中$\alpha_0=1$或$-1$

$$=\frac{1}{2}x^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_0\binom{1/2}{n}(-4x)^n/2x$$
$$=\frac{1}{2}x^{-1}+\frac{\alpha_0}{2}x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_0}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^nx^{n-1}$$

又$C_0=1$，则$G(x)$中x^0项的系数为1

即$\frac{\alpha_0}{2}\binom{1/2}{1}(-4)^1=1$，有$\alpha_0=-1$

于是$G(x)=(1-\sqrt{1-4x})/2x$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^nx^{n-1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-n-1+1)}{(n+1)!}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)^{n+1}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)}{n+1}\cdot\frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(-4)^{n+1}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\binom{-1/2}{n}\cdot(-4)^n\cdot x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left[\binom{2n}{n}/(-4)^n\right]\cdot(-4)^n\cdot x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

于是有卡塔兰数的显式公式为$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$，其中$n=0,1,2,\cdots$

指数生成函数(exponential generating function, EGF)，对于无穷序列$\{a_n\}$，其中$n=0,1,2,\cdots$

有$\{a_n\}$的指数生成函数$EG(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n/n!$

特别地有对于无穷序列$\{1,1,\cdots\}$，其中$a_n=1$，$n=0,1,2,\cdots$

其指数生成函数$EG(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!=e^x$

当$\{a_n\}$为等比序列$\{1,q,q^2,\cdots\}$，其中$a_n=q^n$，q为实数，$n=0,1,2,\cdots$

其指数生成函数$EG(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q^nx^n/n!=e^{qx}$

当$\{a_n\}$为无穷序列$\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，其中$a_n=n$，$n=0,1,2,\cdots$

其指数生成函数$EG(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n/n!=x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}/(n-1)!$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!=xe^x$$

Discrete Mathematics - P218

考虑一个用四进制数字串对信息编码的编码系统，其中数字来自集合 $\{0,1,2,3\}$

取 a_n 为具有偶数个0和偶数个1的n位四进制数字串个数

b_n 为具有偶数个0和奇数个1的n位四进制数字串个数

c_n 为具有奇数个0和偶数个1的n位四进制数字串个数

d_n 为具有奇数个0和奇数个1的n位四进制数字串个数

注意到 a_n, b_n, c_n, d_n 互不相交，且每个n位四进制数字串必定属于其一

于是有 $a_n+b_n+c_n+d_n=4^n$，即 $d_n=4^n-a_n-b_n-c_n$，$n=0,1,2,\cdots$

无穷序列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{d_n\}$ 满足初始条件和递推关系

对于 $n=0$，即长度为0的空串 λ，有初始条件

有 $a_0=1$，$b_0=0$，$c_0=0$，$d_0=0$，$a_1=2$，$b_1=1$，$c_1=1$，$d_1=0$

考虑数字串的最后一位的可能，对于 $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$

a_{n+1} 可以由 a_n 之后添加2或3，由 b_n 后添加1，由 c_n 后添加0得到

于是有 $a_{n+1}=2a_n+b_n+c_n$

b_{n+1} 可以由 a_n 之后添加1，由 b_n 后添加2或3，由 d_n 后添加0得到

于是有 $b_{n+1}=a_n+2b_n+d_n=4^n+b_n-c_n$

c_{n+1} 可以由 a_n 之后添加0，由 c_n 后添加2或3，由 d_n 后添加1得到

于是有 $c_{n+1}=a_n+2c_n+d_n=4^n-b_n+c_n$

取生成函数 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

则有
$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}\\ \sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}4^nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}\\ \sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}4^nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}A(x)-a_0x^0=x[2A(x)+B(x)+C(x)]\\ B(x)-b_0x^0=x[\frac{1}{1-4x}+B(x)-C(x)]\\ C(x)-c_0x^0=x[\frac{1}{1-4x}-B(x)+C(x)]\end{cases}$$

于是有 $B(x)=C(x)=\frac{x}{1-4x}$，$(1-2x)A(x)=1+\frac{2x^2}{1-4x}$

$$A(x)=\frac{1-4x+2x^2}{(1-4x)(1-2x)}=\frac{1-3x}{1-4x}+\frac{x}{1-2x}$$

则有 $B(x)=C(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}x^n+0\cdot x^0$

$$\begin{aligned}A(x)&=(1-3x)\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n+x\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n\\&=1\cdot x^0+\sum_{n=1}^{\infty}4^nx^n-3\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n\\&=1\cdot x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(4^{n-1}+2^{n-1})x^n\end{aligned}$$

则有 $a_0=1$，$a_n=4^{n-1}+2^{n-1}$，其中 $n=1,2,\cdots$

$b_0=0$，$b_n=4^{n-1}$

$c_0=0$，$c_n=4^{n-1}$

$d_0=0$，$d_n=4^{n-1}-2^{n-1}$

Discrete Mathematics - P219

正整数分拆

指对于正整数n，将n写成允许重复且不考虑次序的正整数之和的方法数

考虑无穷序列$\{p(n)\}$，其中$p(n)$表示正整数n的分拆数

由于和中的正整数允许重复且不考虑次序

则$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{2k}+\cdots)\cdots$

中x^n项的系数即为正整数n的分拆数

即无穷序列$\{p(n)\}$有生成函数$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}$

考虑无穷序列$\{p_o(n)\}$，其中$p_o(n)$表示正整数n分拆成奇整数之和的分拆数

且和中的奇整数允许重复且不考虑次序

则$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots(1+x^{2k-1}+x^{2(2k-1)}+\cdots)\cdots$

中x^n项的系数即为正整数n的奇整数分拆数

即无穷序列$\{p_o(n)\}$有生成函数$G_o(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$

考虑无穷序列$\{p_d(n)\}$，其中$p_d(n)$表示正整数n分拆成不相等的正整数的分拆数

且和中的正整数不允许重复但不考虑次序

则$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^k)\cdots$

中x^n项的系数即为正整数n分拆成不相等的正整数的分拆数

即无穷序列$\{p_d(n)\}$有生成函数$G_d(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$

注意对于$G_o(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$，补充$\frac{1}{1-x^{2k}}$的乘积

有$G_o(x)=1/[\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k-1})]$

$=[\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})]/[\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k-1})\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})]$

$=[\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})]/[\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)]$

$=\prod_{k=1}^{\infty}[(1-x^{2k})/(1-x^k)]$

$=\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)=G_d(x)$

于是有无穷序列$\{p_o(n)\}$与$\{p_d(n)\}$完全相同，

即对正整数n的奇整数分拆数等于分拆成不相等正整数的分拆数

考虑$G(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}$，由于$G(x)$为形式幂级数，取$0<x<1$

则有$p(n)x^n<G(x)$，即$\ln p(n)+n\ln x<G(x)$

提有$\ln p(n)<G(x)-n\ln x<2\cdot\frac{x}{1-x}+n\ln\frac{1}{x}$

$<2\cdot\frac{x}{1-x}+n(\frac{1}{x}-1)=2\cdot\frac{x}{1-x}+n\cdot\frac{1-x}{x}$

取$\frac{x}{1-x}=\sqrt{\frac{n}{2}}$，$=2\cdot\sqrt{\frac{n}{2}}+n/\sqrt{\frac{n}{2}}=2\sqrt{2n}$，即有$p(n)<e^{2\sqrt{2n}}$

另外Hardy和Ramanujan证明了$p(n)\sim\exp\{\pi\sqrt{2/3}\cdot\sqrt{n}\}/4\sqrt{3}n$

Discrete Mathematics - P220

概率生成函数(probability generating function)，对于样本空间S上的随机变量X

且对于任意 $s\in S$，$X(s)$均为非负整数，则有概率分布列 $p(k)=Pr\{X(s)=k\}$，其中$k\in N$

则对于无穷序列$\{p(k)\}$，有生成函数 $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k$

称为关于随机变量X的概率生成函数

对于定义在非负整数上的随机变量X，有概率分布列$p(k)$

有关于随机变量X的概率生成函数 $G_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k$

则考虑通过概率生成函数得到随机变量X的期望和方差

由于 $G_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k$ 为形式幂级数(formal power series)

则取$x=1$，即 $G_X(1)=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)=1$

取$G_X(x)$的一阶导数 $G_X'(x)$

有 $G_X'(x)=[\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k]'=\sum_{k=0}^{\infty}[p(k)x^k]'$

$=\sum_{k=0}^{\infty}kp(k)x^{k-1}$

则 $G_X'(1)=\sum_{k=0}^{\infty}kp(k)=E[X]$

再取$G_X(x)$的二阶导数 $G_X''(x)$

有$G_X''(x)=[\sum_{k=0}^{\infty}kp(k)x^{k-1}]'=\sum_{k=0}^{\infty}[kp(k)x^{k-1}]'$

$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)p[k]x^{k-2}$

则 $G_X''(1)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)p(k)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2p(k)-\sum_{k=0}^{\infty}kp(k)$

$=E[X^2]-E[X]$

于是 $Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=(E[X^2]-E[X])+E[X]-(E[X])^2$

$=G_X''(1)+G_X'(1)-[G_X'(1)]^2$

如对于独立重复进行的成功率为p的伯努利试验，

令随机变量X表示首次成功时已进行的试验次数，有概率分布列$p(k)$

则随机变量X的概率生成函数 $G_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k$

即 $G_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k=0x^0+p\cdot x^1+p(1-p)x^2+\cdots+p(1-p)^{k-1}x^k+\cdots$

$=px\cdot\sum_{k=0}^{\infty}[(1-p)x]^k=px/[1-(1-p)x]$

则 $G_X'(x)=[\frac{px}{1-(1-p)x}]'=\frac{p[1-(1-p)x]+(1-p)px}{[1-(1-p)x]^2}=\frac{p}{[1-(1-p)x]^2}$

于是有 $G_X'(1)=\frac{p}{[1-(1-p)]^2}=\frac{1}{p}=E[X]$

$G_X''(x)=(\frac{p}{[1-(1-p)x]^2})'=\frac{2p(1-p)}{[1-(1-p)x]^3}$

于是有 $Var(X)=G_X''(1)+G_X'(1)-[G_X'(1)]^2$

$=\frac{2p(1-p)}{p^3}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}$

$=\frac{1-p}{p^2}$

可见$E[X]$，$Var(X)$与通过常规方法得到的结果相同

Discrete Mathematics - P221

概率生成函数 对于独立重复进行的成功率为p的伯努利试验，以及正整数m，其中 $0<p<1$

令随机变量 X_m 表示在得到m次成功前，出现的失败次数

有概率分布列 $p_m(n) = Pr\{X_m = n\} = \binom{n+m-1}{n} p^{m-1}(1-p)^n p$

则随机变量 X_m 的概率生成函数 $G_{X_m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} p^m q^n x^n$，其中 $q = 1-p$

即 $G_{X_m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} p^m q^n x^n$

$= p^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} (qx)^n$

$= p^m / (1-qx)^m$

则 $G_{X_m}'(x) = (-m)(-q)p^m / (1-qx)^{m+1}$

于是有 $E[X_m] = G_{X_m}'(1) = (-m)(-q)p^m/(1-q)^{m+1} = m(1-p)/p$

又 $G_{X_m}''(x) = [(-m)(-q)p^m/(1-qx)^{m+1}]'$

$= m(m+1)q^2p^m/(1-qx)^{m+2}$

于是有 $Var[X_m] = G_{X_m}''(1) + G_{X_m}'(1) - [G_{X_m}'(1)]^2$

$= m(m+1)q^2/p^2 + mq/p - m^2q^2/p^2$

$= mq/p^2 = m(1-p)/p^2$

对于样本空间S上的随机变量X和Y，X与Y相互独立且对于任意$s \in S$，$X(s), Y(s) \in N$

随机变量X的概率生成函数 $G_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_X(n) x^n$

随机变量Y的概率生成函数 $G_Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_Y(n) x^n$

则有随机变量X+Y的概率生成函数 $G_{X+Y}(x) = G_X(x) G_Y(x)$

证明过程有，对于随机变量X+Y，有概率分布列 $P_{X+Y}(n)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$

则 $P_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} Pr\{X=k \wedge Y=n-k\}$

又X与Y是相互独立的，则有 $Pr\{X=k \wedge Y=n-k\} = Pr\{X=k\} Pr\{Y=n-k\}$

于是 $P_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} Pr\{X=k\} Pr\{Y=n-k\}$

$= \sum_{k=0}^{n} P_X(k) P_Y(n-k)$

则 $G_{X+Y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{X+Y}(n) x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} [\sum_{k=0}^{n} P_X(k) P_Y(n-k)] x^n$

$= G_X(x) G_Y(x)$

容斥原理 (principle of inclusion-exclusion)，对于有穷集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$

$= \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$

$- \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$

$= \sum_{k=1}^{n} [(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|]$

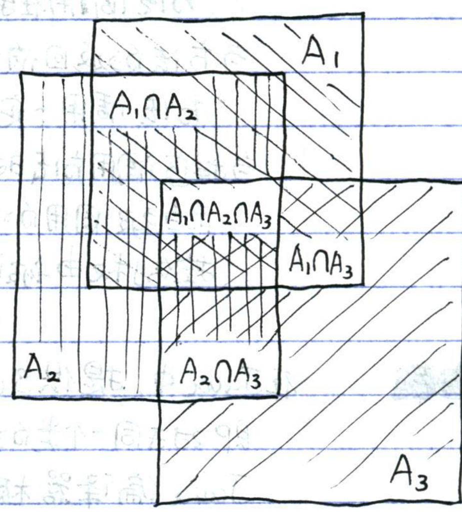
Discrete Mathematics - P222

容斥原理

对于有穷集序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，其中 $n \in N^+$

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|\right]$$



证明过程有，对于并集中的任意元素 $a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

对于 $1\le r\le n$，假设 a 恰好属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的 r 个集合，

则 a 被 $\sum|A_i|$ 计算了 $\binom{r}{1}$ 次

被 $\sum|A_i\cap A_j|$ 计算了 $\binom{r}{2}$ 次

对于 $1\le k\le n$，一般地有被 $\sum|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|$ 计算了 $\binom{r}{k}$ 次

又当 $r<k$ 时，a 不被包含于任意交集中，即 $\binom{r}{k}=0$

于是对元素 a 的计算次数合计为

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \cdots + (-1)^{r+1}\binom{r}{r}$$

又 $[1+(-1)]^r = \binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \cdots + (-1)^r\binom{r}{r} = 0$

则元素 a 恰好被计算了 $\binom{r}{0}=1$ 次

也可以通过数学归纳法证明容斥原理

基础步骤：当 $n=1$ 时，$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |A_1| = \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|]$ 平凡地为真

当 $n=2$ 时，$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |A_1| + |A_2| - |A_1\cap A_2|$

$$= \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|]$$

递归步骤：假设对于任意 $n\in N^+$，$P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

$$|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\cap A_{n+1}|$$

$$= |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})|$$

$$\overset{IH}{=} \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|] + |A_{n+1}|$$

$$- \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\cap A_{n+1}|]$$

$$= \sum_{1\le i\le n+1}|A_i| + (-1)^{n+2}|\bigcap_{j=1}^{n+1} A_j|$$

不包含 A_{n+1} 的交集：$+ \sum_{k=2}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|]$

包含 A_{n+1} 的交集：$+ \sum_{k=2}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{k-1}\le n}|(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{i_j})\cap A_{n+1}|]$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n+1}|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|]$$

于是根据数学归纳法，对于有穷集序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，其中 $n\in N^+$

有 $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|]$

注意对于每个正整数 n，容斥原理对于 n 个集合并集的元素数给出了一个公式

对于 n 个集合的集合族 (collection of set) 的每一个非空子集的交集

在公式中都存在有且仅有一项计算了此交集的元素数

于是可知对于 n 个集合的容斥原理公式中共有 2^n-1 项

Discrete Mathematics - P223

容斥原理

考虑容斥原理用于求解集合中的元素数，使得这些元素不满足 n 个性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 中任何一个

假设全集为 N，有给定的性质序列 $P_1, P_2, \cdots, P_n$

令集合 A_i 表示集合 N 中具有性质 P_i 的元素所构成的子集

$N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k})$ 表示集合 N 中具有性质 $P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_k}$ 的元素个数

于是有 $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k})$

则不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 中任何一个的元素数可记为 $N(P_1'P_2'\cdots P_n')$

其中 P_i' 表示不满足性质 P_i

于是有

$$\begin{aligned} N(P_1'P_2'\cdots P_n') &= |N| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= |N| - \sum_{k=1}^{n}\Big[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\Big|\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j}\Big|\Big] \\ &= |N| - \sum_{k=1}^{n}\Big[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k})\Big] \\ &= |N| + \sum_{k=1}^{n}\Big[(-1)^{k}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k})\Big] \end{aligned}$$

埃拉托色尼筛 (sieve of Eratosthenes)，用于找出小于给定整数 $n>0$ 的素数的过程

令 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 表示不超过 $\sqrt{n}$ 的所有素数

P_i 表示可以被素数 p_i 整除，其中 $i = 1, 2, \cdots, k$

则小于给定整数 $n>0$ 的素数个数为 $k + N(P_1'P_2'\cdots P_k')$

于是有

$$\begin{aligned} T(n) &= k + N(P_1'P_2'\cdots P_k') \\ &= T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + (n-1) + \sum_{m=1}^{k}\Big[(-1)^{m}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le k}N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_m})\Big] \\ &= T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + (n-1) + \sum_{m=1}^{k}\Big[(-1)^{m}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le k}\lfloor n/p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_m}\rfloor\Big] \end{aligned}$$

且有初始条件 $T(1) = 0$

对于正整数 m, n，满足 $m \ge n$，则有 $n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m$

称为从 m 个元素集合到 n 个元素集合的映上函数个数

number of onto function from set with m element to set with n element

证明过程有，令事件 P_i 表示 n 个元素中的第 i 个元素未被指派给任何元素

而从 m 个元素集合到 n 个元素集合的函数共有 n^m 个

于是

$$\begin{aligned} N(P_1'P_2'\cdots P_n') &= n^m - |P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n| \\ &= n^m - \sum_{k=1}^{n}\Big[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k})\Big] \\ &= n^m - \sum_{k=1}^{n}\Big[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(n-k)^m\Big] \\ &= n^m - \sum_{k=1}^{n}\Big[(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)^m\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m \\ &= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m \end{aligned}$$

于是从 m 个元素集合到 n 个元素集合的映上函数个数为 $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$