Calculus - P34

柯西中值定理(Cauchy mean value theorem)，对于函数$f(x)$和$F(x)$，如果满足

在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，且对任意$x\in(a,b)$，都有$F'(x)\neq 0$

则在开区间(a,b)上存在至少一点ξ $(a<\xi<b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

证明过程有，对于函数$F(x)$，已知满足拉格朗日中值定理条件

则存在 $a<\eta<b$，使得 $F(b)-F(a) = F'(\eta)(b-a)$

又 $\forall x\in(a,b)$ $F'(x)\neq 0$，且 $b-a\neq 0$，于是有 $F(b)-F(a)\neq 0$

可取辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F(x)$

可知在闭区间$[a,b]$上 $\varphi(x)$连续，

又 $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F'(x)$，又$f(x)$，$F(x)$在$(a,b)$上可导

可知$\varphi'(x)$在开区间(a,b)上可导，即$\varphi'(x)$存在

又 $\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F(a) = \frac{f(a)[F(b)-F(a)]-F(a)[f(b)-f(a)]}{F(b)-F(a)}$

$= \frac{f(a)F(b)-F(a)f(b)}{F(b)-F(a)}$

$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F(b) = \frac{f(b)[F(b)-F(a)]-F(b)[f(b)-f(a)]}{F(b)-F(a)}$

$= \frac{f(a)F(b)-F(a)f(b)}{F(b)-F(a)} = \varphi(a)$，则可知$\varphi(x)$满足拉罗尔定理条件

于是存在ξ $(a<\xi<b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$.

即 $f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F'(\xi) = 0$，又 $F'(\xi)\neq 0$

于是有 $\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$

对于函数$y=f(x)$在$x=0$的某个邻域内具有n阶导数，且有$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$

则有 $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ $(0<\theta<1)$

证明过程，取辅助函数 $F(x)=x^n$，可知在$x=0$的某个邻域内，考虑$x>0$的情形

$F(x)=x^n$在闭区间$[0,x]$上连续，在开区间$(0,x)$上可导 且$\forall_{\xi\in(0,x)}$ $F'(\xi)\neq 0,\cdots,F^{(n)}(\xi)\neq 0$

且 $F(0)=F'(0)=\cdots=F^{(n-1)}(0)=0$，$F^{(n)}(x)=n!\neq 0$

则存在ξ_1 $(0<\xi_1<x)$，使得 $\frac{f'(\xi_1)}{F'(\xi_1)} = \frac{f(x)-f(0)}{F(x)-F(0)}$，即 $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{F'(\xi_1)-F'(0)}$

于是可知，对于$f'(x)$和$F'(x)$，在$[0,\xi_1]$上连续，在$(0,\xi_1)$上可导 且$\forall_{\xi\in(0,\xi_1)}$ $F''(\xi)\neq 0$

于是存在ξ_2 $(0<\xi_2<\xi_1)$，使得 $\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{F'(\xi_1)-F'(0)} = \frac{f''(\xi_2)}{F''(\xi_2)}$

即 $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f''(\xi_2)-f''(0)}{F''(\xi_2)-F''(0)}$

于是类推可知，存在 $0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_2<\xi_1<x$，

使得 $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{F'(\xi_1)-F'(0)} = \cdots = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{F^{(n-1)}(\xi_{n-1})-F^{(n-1)}(0)} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{F^{(n)}(\xi_n)}$

即 $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$，$= \frac{f(x)}{x^n}$，$0<\xi_n<x$

又存在$0<\theta<1$，使得 $\xi_n=\theta x$

即 $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ $(0<\theta<1)$，对于$x>0$成立

考虑$x<0$的情形，则存在 $x<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_{n-1}<\eta_n<0$，使得有类似证明

于是存在$0<\theta<1$ 使得$\eta_n=\theta x$，且 $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ $(0<\theta<1)$，对于$x<0$成立.

Calculus - P35

未定式 (indeterminate form)，又称不定式，指对于自变量x的同一变化过程 $x\to a$（或$x\to\infty$）函数$f(x)$与$F(x)$都趋于0或都趋于无穷大，

则极限 $\lim\limits_{x\to a(或x\to\infty)}\frac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在也可能不存在，故称为未定式，简记为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$

洛必达法则 (L'Hospital's rule)，指在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值

对于函数$f(x)$与$F(x)$，当$x\to a$时，$f(x)$与$F(x)$都趋于0，即$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$且$\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$

在点a的某个去心邻域$\mathring{U}(a)$内，$f'(x)$与$F'(x)$都存在，即$f(x)$与$F(x)$可导，且$F'(x)\neq0$

若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为无穷大），则有$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

证明过程有，由于$\frac{f(x)}{F(x)}$在$x\to a$时，与$f(a)$和$F(a)$无关，所以可以假定$f(a)=F(a)=0$

则由$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$与$\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$可知，

在a的某个邻域$U(a)$内，$f(x)$与$F(x)$连续，

可知$f(x)$与$F(x)$满足柯西中值定理的条件，

则对于$x\in\mathring{U}(a)$，在(a,x)（或(x,a)）内存在一点ξ

使得$\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，即$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

于是当$x\to a$时，$\xi\to a$，即$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为无穷大），则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$存在（或为无穷大）

若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$仍为未定式，且$f'(x)$和$F'(x)$满足洛必达法则的条件

则有$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)}$

则可以重复此过程直到确认$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$的值，或者某阶导数不符合条件

$\frac{0}{0}(x\to\infty)$ 对于函数$f(x)$与$F(x)$，当$x\to\infty$时，$f(x)$与$F(x)$都趋于0，即$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$且$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$

对于某个正整数N，当$|x|>N$时，$f'(x)$与$F'(x)$都存在且$F'(x)\neq0$

若$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为无穷大），则有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

$\frac{\infty}{\infty}(x\to a)$ 对于函数$f(x)$与$F(x)$，当$x\to a$时，$f(x)$与$F(x)$都趋于无穷大，即$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$且$\lim\limits_{x\to a}F(x)=\infty$

在点a的某个去心邻域$\mathring{U}(a)$内，$f'(x)$与$F'(x)$都存在且$F'(x)\neq0$

若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为无穷大），则有$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

$\frac{\infty}{\infty}(x\to\infty)$ 对于函数$f(x)$与$F(x)$，当$x\to\infty$时，$f(x)$与$F(x)$都趋于无穷大，即$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$且$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$

对于某个正整数N，当$|x|>N$时，$f'(x)$与$F'(x)$都存在且$F'(x)\neq0$

若$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为无穷大），则有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

对于形如$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0，也可以通过变型为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型式的未定式来计算

Calculus - P36

函数近似表示，考虑使用更高次的多项式来逼近函数，而误差则是更高阶的无穷小

对于函数 $f(x)$，若在点 x_0 处具有 n 阶导数，则定义关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式近似地表达 $f(x)$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

使得当 $x \to x_0$ 时 $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^n = 0$，而 $P_n(x_0) - f(x_0) = \alpha$，其中 α 为 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小

假设 $P_n(x)$ 在 x_0 处的函数值与各阶导数在 x_0 处的值 $P_n'(x_0), \cdots, P_n^{(n)}(x_0)$

与 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值与各阶导数在 x_0 处的值 $f'(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0)$ 分别相等

即 $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0)$, $\cdots$, $P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

又 $P_n(x_0) = a_0$, $P_n'(x_0) = a_1 \cdot 1!$, $P_n''(x_0) = 2! \cdot a_2$, $\cdots$, $P_n^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n$

于是有 $P_n(x)$ 多项式的各项系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{1}{1!}f'(x_0),\ a_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0),\ \cdots,\ a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

代入有 $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$

泰勒中值定理 (Taylor mean value theorem). 对于函数 $f(x)$，若在点 x_0 处有 n 阶导数

则对于点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，对于任意 $x \in U(x_0)$ 其中 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$

有 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$,

证明过程：由于 $P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，可知 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

又 $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0)$, $\cdots$, $P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

于是有 $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$

则取极限 $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$，可知 $R_n(x)$ 与 $(x-x_0)^n$ 满足洛必达法则的条件

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{(x-x_0)^{n-1}},$$

重复利用洛必达法则，$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0}$，又 $R_n^{(n-1)}(x_0) = 0$

则 $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0) = 0$

于是 $R_n(x)$ 为当 $x \to x_0$ 时，$(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小，称为佩亚诺余项 (Peano form of the remainder)

对于函数 $f(x)$，若在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数 ξ 为 x_0 与 x 之间的值

则对于任意 $x \in U(x_0)$，有 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$，其中 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

证明过程，由 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 可知 $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$，

则取 $F(x) = (x-x_0)^{n+1}$，可知对任意 $x \in U(x_0)$，$F(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上连续，在 (x_0, x) 上可导

则根据柯西中值定理，存在 $x_0 < \xi_{n+1} < \xi_n < \cdots < \xi_1 < x$

又 $F(x_0) = F'(x_0) = \cdots = F^{(n)}(x_0) = 0$，$F^{(n+1)}(x) = (n+1)!$

有 $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{F'(\xi_1) - F'(x_0)} = \cdots = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$

又 $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$，于是 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 为 x_0 与 x 之间的值

称 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉格朗日余项 (Lagrange form of the remainder)

而 $f(x)$ 的展开称为带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式 (n-th order Taylor polynomial)

Calculus - P37

麦克劳林公式 (Maclaurin's formula) 为泰勒公式在 $x_0=0$ 处的一种特殊形式

即对于函数 $f(x)$ 在点 0 的某个邻域 $U(0)$ 内具有 n 阶导数

则对于任意 $x\in U(0)$，$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

称为带有佩亚诺余项的麦克劳林公式，其中 $o(x^n)$ 为佩亚诺余项

如果 $f(x)$ 在 $U(0)$ 内还具有 $(n+1)$ 阶导数，则对于任意 $x\in U(0)$

存在 $0<\theta<1$，使得 $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

称为带有拉格朗日余项的麦克劳林公式，其中 $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 为拉格朗日余项

泰勒公式误差　当用 $(x-x_0)$ 的 n 阶多项式 $P_n(x)$ 表示 $f(x)$ 的时候，其误差为拉格朗日余项，

即误差 $\delta_A=|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$，其中 ξ 为 x 与 x_0 之间的实数

如果对于固定的 n 值，对任意 $x\in U(x_0)$，有 $|f^{(n+1)}(x)|\le M$，其中 M 为非负常量

则有误差 $|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$

对于麦克劳林公式，可以相似地取得用拉格朗日余项表示的误差

即对于函数 $f(x)$，和固定的正整数 n

则有误差 $|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

对于函数 $f(x)=e^x$，$f'(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$，$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$，$f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$

于是 $e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$，其中 $0<\theta<1$

即 $e^x\approx1+\frac{1}{1!}x+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$，误差 $|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

于是有 $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$，则 $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

$\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

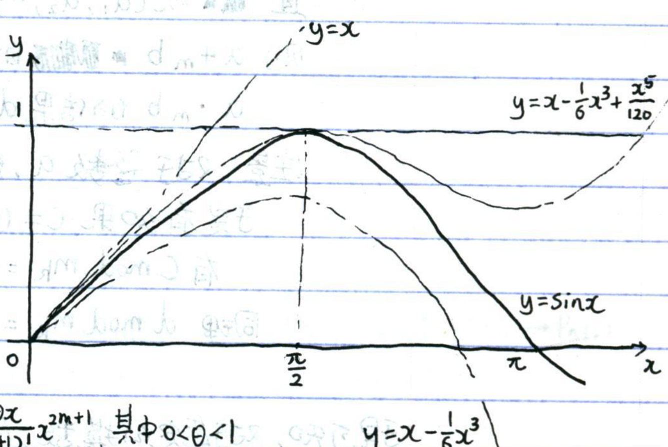
对于函数 $f(x)=\sin x$，可知对于任意 $n\in Z^+$，$f^{(n)}(x)$ 存在

且 $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$，则对于 $x_0=0$ 时

$f^{(4k)}(0)=\sin0=0$，$f^{(4k+1)}(0)=\cos0=1$

$f^{(4k+2)}(0)=-\sin0=0$，$f^{(4k+3)}(0)=-\cos0=-1$

则取 $n=2m$，其中 $m\in Z^+$



于是 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$

其中 $R_{2m}(x)=\frac{\sin[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}$，其中 $0<\theta<1$

误差 $|R_{2m}(x)|=\left|\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right|\le\frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$，且 $\lim_{m\to\infty}|R_{2m}(x)|=0$

于是有 $\sin x=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$

类似地有，$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$，其中 $m\in N$

其中 $R_{2m+1}(x)=\frac{\cos[\theta x+(2m+2)\frac{\pi}{2}]}{(2m+2)!}x^{2m+2}=(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$，其中 $0<\theta<1$，且 $|R_{2m+1}(x)|\le\frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$

于是有 $\cos x=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$

Calculus - P38

$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ 对于函数 $f(x)=\ln(1+x)$ $(x>-1)$，可知对任意正整数 n，$f(x)$ 有 n 阶导数

可知 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(x>-1)$，即有 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

于是有 $\ln(1+x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$，又 $f(0)=0$

$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+R_n(x)$，其中 $R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$ $(0<\theta<1)$

于是有 $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\frac{x^k}{k}+R_n(x)$，[redacted] $(x>-1)$

误差 $|R_n(x)|=\left(\frac{1}{\frac{1}{x}+\theta}\right)^{n+1}/n+1$，如果有 $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$，则应有 $\frac{1}{x}+\theta\geq1$，即 $x\leq\frac{1}{1-\theta}$

对于函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$，可知对任意正整数 n，$f(x)$ 在点 $x=0$ 有 n 阶导数

可知 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=[\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha-i)]\cdot(1+x)^{\alpha-n}$，则 $f^{(n)}(0)=\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$

于是有 [redacted] $(1+x)^\alpha=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$，又 $f(0)=1$　　其中 $0<\theta<1$

$=1+\alpha x+\cdots+[\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha-i)]x^n/n!+R_n(x)$，其中 $R_n(x)=[\prod_{i=0}^{n}(\alpha-i)](1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}/(n+1)!$

于是有 $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}[\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)]x^k/k!+R_n(x)$

带有佩亚诺余项的麦克劳林公式可用于求未定式的[redacted]值，如 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3x}$

[redacted] 由于 $\sin^3x\sim x^3$ $(x\to0)$，于是 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

[redacted] 那么可以用带有形如 $o(x^3)$ 的佩亚诺余项的麦克劳林公式表示 $\sin x-x\cos x$

则有 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+$ [redacted] $o(x^2)$

则 $x\cos x=x-\frac{x^3}{2!}+o(x^3)$，即 $\sin x-x\cos x=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

于是 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$

单调性判定　对于函数 $y=f(x)$，在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导

如果在开区间 (a,b) 内 $f'(x)\geq0$，且等号仅在有限多个点处成立

则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加

如果在开区间 (a,b) 内 $f'(x)\leq0$，且等号仅在有限多个点处成立

则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少

特别地有，对于无穷区间，则要求对无限区间内的任意有限的子区间内满足条件，

即在无穷区间可以有无穷多点的 $f'(x)=0$，但是在任意有限的子区间内仅有有限多个点，

证明过程有，$y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导

则对于任意 $x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $x_1<x_2$，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上 [redacted] 满足拉格朗日中值定理

则存在 $x_1<\xi<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$

如果 $f'(\xi)=0$，则 $f(x_2)-f(x_1)=0$，又 $\forall x\in(x_1,x_2)$ $f'(x)\geq0$，则 $\forall x\in(x_1,x_2)$ $f'(x)=0$

与等号仅在有限多个点处成立相矛盾，于是 $f'(\xi)>0$，即 $f(x_2)-f(x_1)>0$

于是有 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上单调增加，则在 $[a,b]$ 上单调增加

Calculus - P39

驻点，(Stationary point)，又称稳定点，或临界[redacted]点，指对于函数$f(x)$，使导数$f'(x)=0$的点，

如果函数$f(x)$在其定义区间上连续，[redacted]在任意有限区间内仅有有限个导数不存在的点，

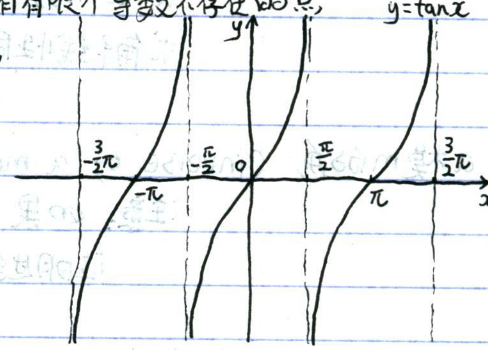
且在区间内只有有限个驻点，即只有有限个导数为0的点，

那么可以用函数的驻点，及导数不存在的点，来划分定义区间

只要导数$f'(x)$在各个部分区间内保持固定符号

或者说函数$f(x)$在各个部分区间满足单调性判定条件

则可以判定$f(x)$在每个部分区间上单调



(向上)凹的　对于函数$f(x)$，如果在区间I上连续

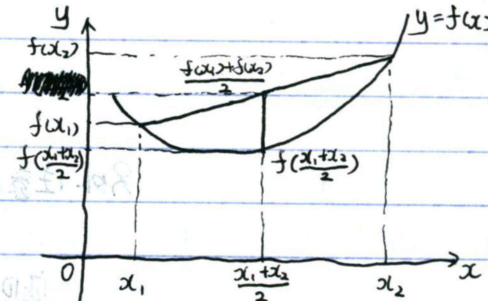
且对于I上任意两点x_1, x_2，$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$始终成立

则称函数$f(x)$在I上的图形是(向上)凹的，也称凹弧

特别注意：英文环境下称为[redacted]凸函数(convex function)，

即定义[redacted](strictly convex)为对于任意$x_1, x_2 \in I$且$x_1 \neq x_2$

$\forall t \in (0,1)$　$f(tx_1+(1-t)x_2) < tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$



(向上)凸的　对于函数$f(x)$，如果在区间I上连续

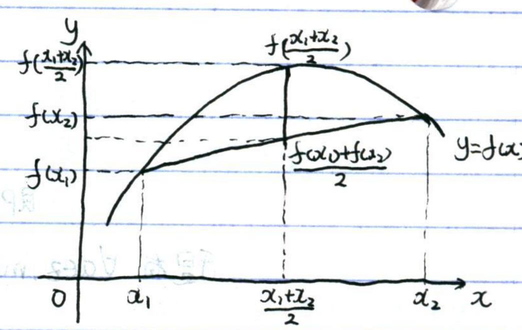
且对于I上任意两点x_1, x_2，$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$始终成立

则称函数$f(x)$在I上的图形是(向上)凸的，也称凸弧

特别注意：英文环境下称为凹函数(concave function)

即定义(strictly concave)为对于任意$x_1, x_2 \in I$且$x_1 \neq x_2$

$\forall t \in (0,1)$　$f(tx_1+(1-t)x_2) > tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$



凹凸与二阶导数　对于函数$y=f(x)$，在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上有二阶导数

[redacted]如果在开区间(a,b)上有$f''(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的

如果在开区间(a,b)上有$f''(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的

证明过程有，对[redacted]任意$x_1, x_2 \in [a,b]$且[redacted]$x_1 < x_2$，取$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$，$h = x_0 - x_1 = x_2 - x_0$

则可知函数$f(x)$[redacted]满足拉格朗日中值定理的条件

[redacted]即存在$0<\theta_1<1$，使得$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0+\theta_1 h)h$

存在$0<\theta_2<1$，使得$f(x_0)-f(x_0-h) = f'(x_0-\theta_2 h)h$

则有$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0) = [f'(x_0+\theta_1 h)-f'(x_0-\theta_2 h)]h$

又$f'(x)$在区间$[x_0-\theta_2 h, x_0+\theta_1 h]$上满足拉格朗日中值定理

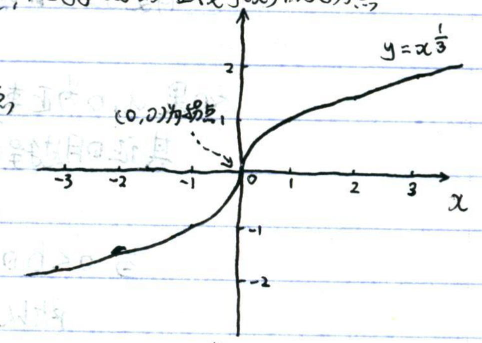
则存在$x_0-\theta_2 h < \xi < x_0+\theta_1 h$，使得$[f'(x_0+\theta_1 h)-f'(x_0-\theta_2 h)]h = f''(\xi)\cdot(\theta_1 h+\theta_2 h)h$

又$f''(\xi)>0$，于是有$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)>0$，即$\frac{f(x_2)+f(x_1)}{2} > f(\frac{x_2+x_1}{2})$

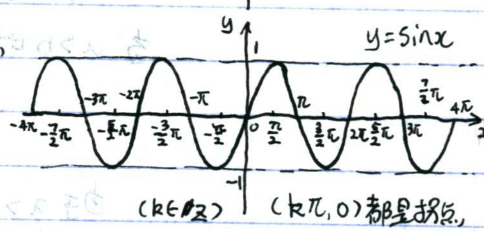
即$f(x)$在$[a,b]$上是(向上)凹的，

Calculus - P40

拐点　(inflection point)，又称反曲点，指对于函数$y=f(x)$在区间I上连续，x_0为区间I内的点，
如果曲线$f(x)$在经过$(x_0, f(x_0))$时，曲线$f(x)$的凹凸性改变，则称x_0为曲线$f(x)$的拐点



对于$y=f(x)$，可由$f''(x)$的符号判定曲线$f(x)$的凹凸性
如果$f''(x)$在点x_0的左、右两侧异号，那么点x_0为$f(x)$的拐点，
所以如果$f(x)$在开区间(a,b)内有二阶导数，则必有$f''(x_0)=0$
另外如果$f(x)$在某一点的二阶导数不存在，也可能是拐点，
提有判定区间I上的连续曲线$y=f(x)$的拐点的方法
首先判定函数$f(x)$在区间I上二阶导数的存在性
然后求出$f''(x)=0$在区间I上的实根，并求出$f''(x)$不存在的点
且假设这两种点在区间I内的个数均为有限个
最后检查每一个x_0点左右两侧的$f''(x)$是否符号相反
如果符号相反则可知x_0为曲线$f(x)$的拐点



极值　(extrema)，通常指对于函数$f(x)$，在其定义区间的某个子区间内，一个非端点的点取得最大值或最小值

极大值　(maxima)，对于函数$f(x)$，在点x_0的某个邻域$U(x_0)$内有定义
如果对其去心邻域$\mathring{U}(x_0)$的任意点$x\in\mathring{U}(x_0)$，有$f(x)<f(x_0)$
则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的一个极大值

极小值　(minima)，对于函数$f(x)$，在点x_0的某个邻域$U(x_0)$内有定义
如果对其去心邻域$\mathring{U}(x_0)$的任意点$x\in\mathring{U}(x_0)$，有$f(x)>f(x_0)$
则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的一个极小值

注意：函数的极值概念是局部性的，即$f(x_0)$是$f(x)$的极值是就x_0的邻域而言的

极值必要条件　对于函数$f(x)$，在x_0处可导，且在x_0处取得极值，则有$f'(x_0)=0$
函数$f(x)$在x_0的某个邻域$U(x_0)$上连续，且在x_0处可导
又对任意$x\in\mathring{U}(x_0)$，有$f(x)<f(x_0)$（或$f(x)>f(x_0)$）
提依据费马引理，可知$f'(x_0)=0$

第一充分条件　对于函数$f(x)$，在点x_0处连续，且在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内可导
如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)>0$，而对$x\in(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)<0$
则$f(x)$在x_0处取得极大值
如果对$x\in(x_0-\delta,x_0)$，$f'(x)<0$，而对$x\in(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)>0$
则$f(x)$在x_0处取得极小值
如果对$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，$f'(x)$的符号保持不变，则$f(x)$在$x_0$处没有取到极值

Calculus - P41

对于函数$f(x)$在区间I上连续，除有限个点之外处处可导，则可以按步骤求$f(x)$的极值

首先判断$f(x)$在区间I上一阶导数的存在性，求出所有$f'(x)=0$的实根和一阶导数不存在的点，

然后在每个驻点和不可导点的左右两侧检查$f'(x)$的符号，以确定是否为极值点

最后求出各极值点的函数值，即为$f(x)$的全部极值

对于判断方法的证明，对于函数$y=f(x)$在x_0处连续，且在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内可导

若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)>0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0取得极大值

对于任意$x\in(x_0-\delta,x_0)$，函数$f(x)$在$[x,x_0]$上连续，在(x,x_0)上可导

则存在$x<\xi<x_0$，使得$f(x_0)-f(x)=f'(\xi)(x_0-x)$

又$f'(\xi)>0$，于是有$f(x_0)-f(x)>0$，即$f(x_0)>f(x)$

对于任意$x\in(x_0,x_0+\delta)$，函数$f(x)$在$[x_0,x]$上连续，在(x_0,x)上可导

则存在$x_0<\xi<x$，使得$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x_0-x)$

又$f'(\xi)<0$，于是有$f(x_0)-f(x)<0$，即$f(x_0)<f(x)$

于是有在x_0的邻域$U(x_0)$内，$f(x_0)$是$f(x)$的极大值

极值第二充分条件 对于函数$f(x)$，在x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，且$f''(x_0)\neq0$，

则有当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值

当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值

证明过程有，考虑当$f''(x_0)<0$时的情形

根据二阶导数的定义，有$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)<0$

又根据极限的保号性，存在x_0的去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$

使得对任意$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$，又$f'(x_0)=0$，于是有$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$

于是有对于$x\in(x_0-\delta,x_0)$，有$f'(x)>0$，对于$x\in(x_0,x_0+\delta)$，有$f'(x)<0$

即$f(x_0)$为函数$f(x)$的极大值

对于函数$f(x)$在x_0处有n阶导数，且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq0$

当n为奇数时，$f(x)$在x_0处不取得极值，当n为偶数时，如果$f^{(n)}(x_0)<0$时，$f(x_0)$为极大值，如果$f^{(n)}(x_0)>0$ $f(x_0)$为极小值

证明过程有，考虑$f^{(n)}(x_0)>0$的情形，可知$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}>0$，

可知在x_0的去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta_1)$中，$f^{(n-1)}(x)$在$(x_0-\delta_1,x_0)$上小于0，在$(x_0,x_0+\delta_1)$上大于0

类推可知在x_0的去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta_2)$中，$f^{(n-2)}(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta_2)$上都大于0

由此可知，当n为奇数时，$f'(x)$在某个去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta_{n-1})$上都大于0，$f(x_0)$不是极值

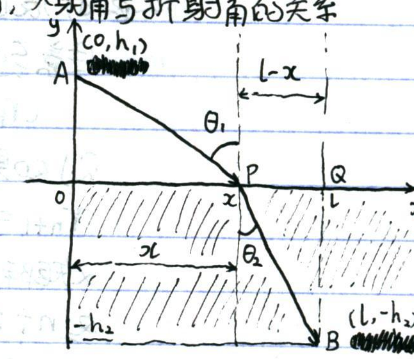
当n为偶数时，$f'(x)$在某一去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta_{n-1})$左右两侧异号，

且在$(x_0-\delta_{n-1},x_0)$上小于0，在$(x_0,x_0+\delta_{n-1})$上大于0，即$f(x_0)$为极小值

于是当$f^{(n)}(x_0)<0$时，如果n为偶数，则$f(x_0)$为极大值

Calculus - P42

折射定律 (Snell's law)，指光从一种介质传播到另一种折射率不同的介质时，入射角与折射角的关系



如一束光线由空气中点A经过水面折射到达水中点B

光在空气中和水中传播速度分别为 v_1 和 v_2

又已知光线在介质中总是沿着耗时最少的路径传播

取点 $A(0, h_1)$ 和 $B(l, -h_2)$，光线经点 $P(x, 0)$ 折射

则 $AP = \sqrt{h_1^2 + x^2}$，$PB = \sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}$，$x \in [0, l]$

于是有耗时 $T(x) = \dfrac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}{v_2}$，$x \in [0, l]$

可知 $T(x)$ 在 $[0, l]$ 上连续，在 $(0, l)$ 上可导

$T'(x) = \dfrac{1}{v_1} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}} - \dfrac{1}{v_2} \cdot \dfrac{l-x}{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}$，$x \in [0, l]$，且有 $T'(0) < 0$，$T'(l) > 0$

又 $T'(x)$ 在 $[0, l]$ 上连续，则存在 $0 < \xi < l$，使得 $T'(\xi) = 0$

$T''(x) = \dfrac{1}{v_1} \cdot \dfrac{h_1^2}{(h_1^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{v_2} \cdot \dfrac{h_2^2}{[h_2^2+(l-x)^2]^{\frac{3}{2}}} > 0$，$x \in [0, l]$

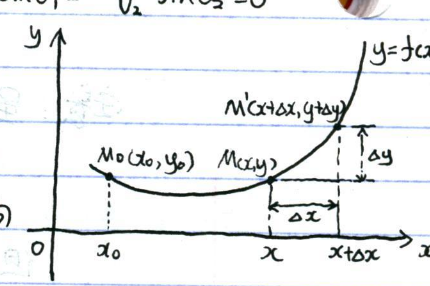
于是可知存在唯一一点 x_0，使得 $T'(x_0) = 0$，

而对 $x \in [0, x_0)$，有 $T'(x) < 0$，对 $x \in (x_0, l]$，有 $T'(x) > 0$

于是 $\dfrac{1}{v_1} \cdot \dfrac{x_0}{\sqrt{h_1^2+x_0^2}} - \dfrac{1}{v_2} \cdot \dfrac{l-x_0}{\sqrt{h_2^2+(l-x_0)^2}} = 0$，

又 $\dfrac{x_0}{\sqrt{h_1^2+x_0^2}} = \sin\theta_1$，$\dfrac{l-x_0}{\sqrt{h_2^2+(l-x_0)^2}} = \sin\theta_2$，于是有 $\dfrac{1}{v_1}\sin\theta_1 - \dfrac{1}{v_2}\sin\theta_2 = 0$

即可得折射定律 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$



弧微分 (arc differential)，对于函数 $f(x)$，在区间 (a, b) 间有连续导数，

取点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 为弧长的度量基点，以 x 增大方向为曲线正方向

对曲线上任一点 $M(x, y)$，规定有向弧段 $\overset{\frown}{M_0M}$ 的值 s，

令弧 s 的绝对值等于弧段的长度，如果 $\overset{\frown}{M_0M}$ 与曲线同向，则 $s > 0$，否则 $s < 0$

则弧 s 与 x 存在函数关系 $s = s(x)$，可知 $s(x)$ 是单调递增的

取 x 与 $x + \Delta x$，则弧 s 的增量 $\Delta s = \overset{\frown}{M_0M'} - \overset{\frown}{M_0M} = \overset{\frown}{MM'}$

于是 $\left(\dfrac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\dfrac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\dfrac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{|MM'|}{\Delta x}\right)^2$

又 $|MM'|^2 = (x+\Delta x - x)^2 + (y + \Delta y - y)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

于是 $\left(\dfrac{|MM'|}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$

即 $\left(\dfrac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\dfrac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]$

又当 $\Delta x \to 0$ 时，$M' \to M$，于是有 $\lim\limits_{M' \to M} \left(\dfrac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 = 1$

又 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$，由于 $y = f(x)$ 在 (a, b) 有连续导数

于是 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1 + y'^2}$

又 $s = s(x)$ 是单调递增的

于是有 $s' = \sqrt{1+y'^2}$，即 $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

通常称为弧微分公式

Calculus - P43

光滑曲线 (smooth function)，指对于一个函数，在其定义域内存在所有有限阶导数

称 differentiability class，简记为 C^k ($k\in N$)，如果函数 $f(x)$ 连续，则其属于 C^0

而定义 C^k 为函数 $f(x)$ 及 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(k)}(x)$ 导数均存在且连续

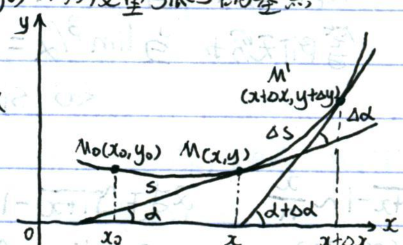
由于函数 $f(x)$ 有n阶导数，即蕴含着 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ 均存在且连续

于是如果函数 $f(x)$ 有n阶导数且n阶导数连续，则 $f(x)$ 为 C^n 函数 ($n\geq 1$)

如果对任意正整数n，$f(x)$ 是 C^n 函数，则特别地称为 C^∞ 函数

如果 $f(x)$ 为 C^∞ 函数，则称为光滑函数

曲率 (curvature)，对于光滑曲线 $C=f(x)$，在C上选取一点 $M_0(x_0,y_0)$ 作为度量弧s的基点，



设曲线上点M对应于弧s，且曲线 $f(x)$ 在M处切线倾角为 α

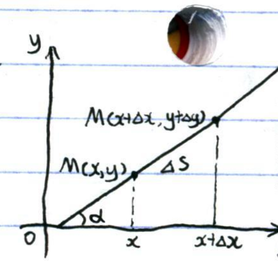
对曲线上点 $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$，点M'处的切线倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$

于是点M'对应于弧 $s+\Delta s$，则弧段 $\widehat{MM'}$ 长度为 $|\Delta s|$

而从点M到点M'转过的角度为 $|\Delta\alpha|$

于是得到描述曲线弯曲程度的曲率概念，记为 $\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$

即单位弧段上切线转过的角度来描述弧段 $\widehat{MM'}$ 的平均弯曲程度



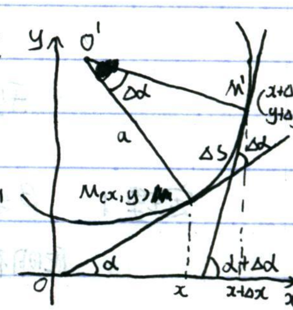
称比值为弧段 $\widehat{MM'}$ 的平均曲率，记作 $\bar{K} = \frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$

参考弧微分的定义，当 $\Delta s\to 0$ 时，有 $M'\to M$，于是有极限 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$

则称极限 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$ 为曲线C在点M处的曲率，记作 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$

如果存在 $\frac{d\alpha}{ds}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$，K也可以表示为 $K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$

对于直线，可知切线与直线本身重合，即点M沿直线移动时，切线倾角 α 不变



即有 $\Delta\alpha=0$，又 $\Delta s\to 0$ 时 $\Delta s\neq 0$，则 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}=0$

即直线上任意点的曲率都为0，直觉上即是"直线不弯曲"

对于圆O'，半径为a，则弧段 $\widehat{MM'}$ 上切线转过的角度 $\Delta\alpha$ 等于圆心角 $\angle MO'M'$

对弧段 $\widehat{MM'}=\Delta s=\angle MO'M'\cdot r=\Delta\alpha\cdot a$，又 $\Delta s\to 0$ 时 $\Delta\alpha\neq 0$

于是有圆的曲率 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta s|}{|\Delta\alpha|}=\frac{1}{a}$，即圆的半径越小，弯曲度越大

对于光滑曲线 $C=f(x)$，必定有连续的二阶导数 $f''(x)$，又对于切线倾角 $\tan\alpha=y'$

对等式两侧同时取x的导数，则 $\sec^2\alpha\,\frac{d\alpha}{dx}=y''$，又 $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=1+y'^2$

于是 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{y''}{1+y'^2}$，即 $d\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}dx$

又根据弧微分 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$，于是 $d\alpha=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}ds$

则有 $K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

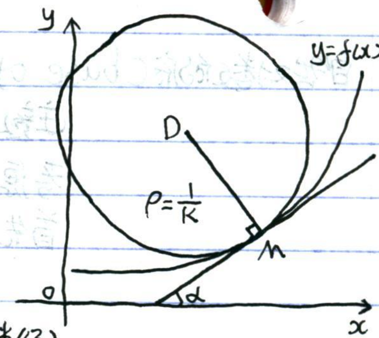
如果有参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定x,y函数关系，则有曲率 $K=\frac{[\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)]}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}$

其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 有二阶导数

注意在一些实际问题中，可能有 $|y'|<<1$，即 $1+y'^2\approx 1$，于是曲率K有近似公式 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\approx|y''|$

Calculus - P44

曲率圆 (curvature circle)，对于曲线 $c=f(x)$，在点 $M(x,y)$ 处曲率为 $K\ (K\neq0)$



在曲线凹的一侧取一点D，使D在M处的曲线法线上，

且取 $|DM|=\frac{1}{K}=\rho$，可以D为圆心，ρ为半径作圆

则称圆D为曲率圆，D为曲率中心(center of curvature)

称半径 ρ 为曲率半径(radius of curvature)

注意到在计算圆的曲率时，已知圆上任意一点的曲率均为 $K=\frac{1}{r}$ (r为半径)

于是可知曲率圆上点M的曲率 $K'=\frac{1}{\rho}=K$，即曲率圆在M处的曲率与曲线 $c=f(x)$ 相同

且曲率圆D与曲线 $y=f(x)$ 在点M处的切线也是相同的

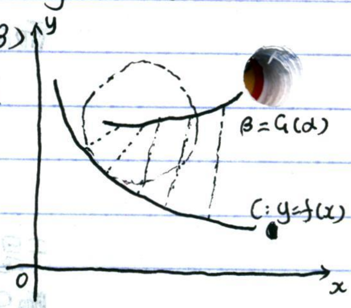
于是在实际问题中，常用点M处曲率圆D在M附近的一段弧来代替曲线 $c=f(x)$ 在M附近的一段弧

于是有曲线上一点处的曲率半径 ρ，与曲线在该点处的曲率互为倒数

即 $\rho=\frac{1}{K}$，$K=\frac{1}{\rho}$，其中 $K\neq0$，也可以直觉地说直线没有曲率圆或曲率半径无限大

渐屈线 (evolute)，对于曲线函数 $y=f(x)$，且其二阶导数 $y''=f''(x)$ 存在且在点 $M(x,y)$ 处不为0

于是可知曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x,y)$ 处可以构造曲率圆，曲率中心 $D(\alpha,\beta)$



则可知曲率圆方程为 $(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=\rho^2$，其中 ρ 为曲率半径

又曲率 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$，则可知 $\rho^2=\frac{1}{K^2}=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$

又点M也在曲率圆D上，所以有 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$

而点 $D(\alpha,\beta)$ 在曲线 $f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的法线上，

即有 $(y-\beta)=-\frac{1}{y'}(x-\alpha)$，即 $(x-\alpha)^2=y'^2(y-\beta)^2$

代入曲率圆方程则有 $(y-\beta)^2(1+y'^2)=\rho^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$，即有 $(y-\beta)^2=\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2$

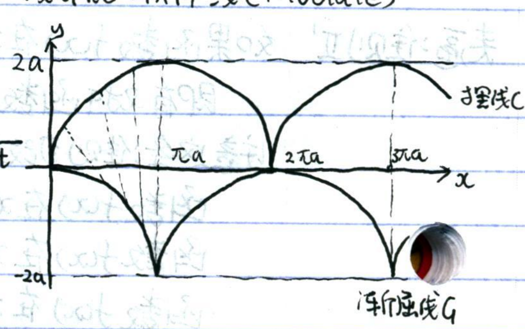
又当 $y''>0$ 时，曲线在M处为凹弧，即 $y-\beta<0$，而 $y''<0$ 时，曲线在M处为凸弧，即 $y-\beta>0$

于是有 $y-\beta=-\frac{1+y'^2}{y''}$，而 $x-\alpha=-y'(y-\beta)=\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$

于是对于曲线C上不同点 $(x, f(x)=y)$，曲率中心D的轨迹方程G为参数方程 $\begin{cases}\alpha=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$

称轨迹曲线G为曲线C的渐屈线，而称曲线C为轨迹曲线G的渐伸线(involute)

摆线渐屈线 对于由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 确定的摆线，



可知 $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\frac{dy}{dt}=a\sin t$，于是有 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$y''=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)/\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}/a(1-\cos t)=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$

代入轨迹方程有 $\begin{cases}\alpha=a(t+\sin t)\\ \beta=a(\cos t-1)\end{cases}$

取 $t=\pi+\tau$，则有 $\begin{cases}\alpha-\pi a=a(\tau-\sin\tau)\\ \beta+2a=a(1-\cos\tau)\end{cases}$，再取 $\begin{cases}\xi=\alpha-\pi a\\ \eta=\beta+2a\end{cases}$，则有 $\begin{cases}\xi=a(\tau-\sin\tau)\\ \eta=a(1-\cos\tau)\end{cases}$

于是可知轨迹曲线也是摆线，且由原曲线平移 $(\pi a,-2a)$ 获得