Haskell - P35

范畴论 (category theory) 是数学的一门学科，以抽象的方法来处理数学概念

represent abstractions of other mathematical concepts

范畴论试图以公理化的方法得到相关的数学结构中的共同特性

并以结构间的结构保持函数关联这些结构

因此允许任何一个此类数学结构的普遍结论由范畴的公理证明

use abstraction to make it possible to state and prove

many intricate and subtle mathematical results in a much simpler way

抽象废话 (abstract nonsense) 又称一般抽象废话，泛化抽象废话 (general abstract nonsense)

指数学家用于描述范畴论中概念和方法的幽默用语

由于范畴论研究数学理论的泛化形式，而不考虑其实际情形

基于范畴论的证明可能看起来不知所云，或滑稽的不合逻辑推论

the study of the general form, categories of mathematical theories, without regard to context

mathematical proof rely on category-theoretic idea

often seem out of context, somewhat akin to a non sequitur

称一个证明"抽象废话"是以轻松的方式提醒人们关注抽象特性

a ligh-hearted way of alering readers to abstract nature

范畴 (category) 范畴论将数学结构及其概念形式化为标记有向图，称为范畴

其中结点称为对象，标记有向边称为箭头 (态射)

formalize mathematical structure and its concepts

in terms of a labeled directed graph, called a category

nodes are called objects, labeled directed edges are called arrows (morphism)

基本性质 可以以结合的方式复合两个箭头，或是态射

the ability to compose the arrows associatively

在图中表现为传递性的 (transitive)

即 $(a,b)\in E \wedge (b,c)\in E \rightarrow (a,c)\in E$

每个对象都存在一个恒等箭头，或是恒等态射

the existence of an identity arrow for each object

在图中表现为自反的 (reflexive)

即 $\forall v\in V\ (v,v)\in E$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

注意这里表现了对象 X, Y, Z

态射 $f: X\rightarrow Y$, $g: Y\rightarrow Z$

$g\circ f: X\rightarrow Z$

省略了恒等态射

$1_X, 1_Y, 1_Z$

Haskell - P36

范畴表示了其他数学概念的抽象
categories represent abstractions of other mathematical concepts
数学领域可以在范畴论中形式化为范畴
areas of mathematics can be formalised as categories by category theory
通过使用抽象，可以用更简单的方法
陈述或证明在这些领域中的复杂或精巧的数学结果
use abstraction to make it possible to state and prove
many intricate and subtle mathematical results in much simple way

范畴(category) C 可由三个数学实体(mathematical entity)组成

对象 (object)，可以理解为可被归为同一类的物件所组成的类(class)，记为ob(C)
如在数学上有理数，无理数，群，环 皆可归为一个对象
在编程语言中，整型值，布尔值，字符，列表 皆可归为一个对象
即类型(type)可视为值的集合
是范畴论中的对象也可以简单地理解为值(value)的集合

态射 (morphism)，又称为映射(map)或箭头(arrow)，记为hom(C)
每个态射 f 都有一个源物件a和一个目标物件b，
称为从a至b的态射，记为 $f: a \to b$，其中a, b都在ob(C)中
each morphism "f" has a source object "a" and target object "b"
expression "$f: a \to b$" verbally stated as
"f" is a morphism from "a" to "b"
所有从a至b的态射所组成的类称为态射类，记为hom(a,b), $hom_C(a,b)$, mor(a,b)
expression hom(a,b), or $hom_C(a,b)$, mor(a,b), C(a,b)
denote the hom-class of all morphisms from "a" to "b"
是也可以简单地理解态射为数学中的映射(map)
把一个对象实例A的值 V_a 映射到一个对象实例 B中的值 V_b

范畴论最简单的样本为数学中的集合范畴
其对象为集合，而态射为从一个集合到另一个集合的函数
但是注意范畴论中的对象不一定是集合，态射也不一定是函数

Haskell - P37

态射的复合(composition of morphisms), 为一个二元运算符 $\circ$,

对于物件 a, b, c, 有 $\circ : hom(b,c) \times hom(a,b) \rightarrow hom(a,c)$

即对于 $f: a \rightarrow b$ 和 $g: b \rightarrow c$ 的复合, 写作 $g \circ f$ 或 gf

对于态射的复合, 符合以下两条公理:

结合律(associativity), 指对于态射 $f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow c$, $h: c \rightarrow d$

有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

单位元(identity), 指对于任意物件 x, 记作 1_x 或 id_x

存在一个单位态射(identity morphism), 即有 $1_x : x \rightarrow x$

于是对于任意态射 $f: a \rightarrow b$, 有单位态射 $1_a: a \rightarrow a$ 和 $1_b: b \rightarrow b$

使得 $1_b \circ f = f = f \circ 1_a$

可以证明, 对于任意物件, 有且仅有一个单位态射.

注意, 有时会出现一些偏离的对物件的定义

即将每个物件定义为其到本身的单位态射

deviate from the definition given by

identifying each object with it's identity morphism

单态射(monomorphism), 又称单态的(monic, mono)

对于态射 $f: X \rightarrow Y$, 如果对任意态射 $g_1, g_2: Z \rightarrow X$

都满足 $f \circ g_1 = f \circ g_2 \rightarrow g_1 = g_2$,

则称态射 f 是一个单态射, 即有 $Z \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$

单态射可以视为单射函数(一对一的)在范畴论上的扩展

categorical generalization of injective function (one-to-one)

即不存在两个X中的物件映射到同一个Y, 即 $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

满态射(epimorphism), 又称 epic morphism 或 epi, 相对地有 $X \xrightarrow{f} Y \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} Z$

对于态射 $f: X \rightarrow Y$, 如果对任意态射 $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$

都满足 $g_1 \circ f = g_2 \circ f \rightarrow g_1 = g_2$, 则称态射 f 是一个满态射

满态射可以视为映上函数(surjective, onto)在范畴论上的近似(analogue)

即对Y中的每个物件 y, 在X中都有至少一个源物件

但是注意, 并不满足所有情形 (may not exactly coincide in all contexts)

Haskell - P38

撤回射 (retraction)，对于态射 $f: X \to Y$，如果存在态射 $g: Y \to X$，且有 $g \circ f = 1_X$
则称 g 为 f 的左逆 (left inverse)，也称为撤回射
如果态射 f 具有左逆，则 f 必定是单态射，但是单态射不一定具有左逆
分裂单态射 (split monomorphism)，对于态射 $h: X \to Y$，如果有左逆 $g: Y \to X$
于是有 $g \circ h = id_X$，则 $h \circ g : Y \to Y$ 是幂等的 (idempotent)
即有 $(h \circ g)^2 = h \circ g \circ h \circ g = h \circ (g \circ h) \circ g = h \circ id_X \circ g = h \circ g$

部分射 (section)，对于态射 $f: X \to Y$，如果存在态射 $g: Y \to X$，且有 $f \circ g = 1_Y$
则称 g 为 f 的右逆 (right inverse)，也称为部分射
如果态射 f 具有右逆，则 f 必定是满态射，但是满态射不一定具有右逆
分裂满态射 (split epimorphism)，对于态射 $h: X \to Y$，如果有右逆 $g: Y \to X$
于是有 $h \circ g = id_Y$，则 $g \circ h : X \to X$ 是幂等的

特别地有，如果态射 $f: X \to Y$ 是分裂单态射且有左逆 $g: Y \to X$
则 态射 $g: Y \to X$ 是分裂满态射且有右逆 $f: X \to Y$

双态射 (bimorphism)，对于态射 $f: X \to Y$，如果即是单态射也是满态射，则称为双态射

同构 (isomorphism)，对于态射 $f: X \to Y$，如果存在态射 $g: Y \to X$
如果有 $g \circ f = id_X$ 且 $f \circ g = id_Y$，则称 f 和 g 是同构的 或等价的 (isomorphic / equivalent)
称 g 为 f 的逆 (inverse)，且如果 f 有逆为 g，则 g 是唯一的逆
如果态射 f 有逆 g，则 f 必定是双态射，但是双态射不一定具有逆
对于态射 f，f 是同构有两个等价的命题：
1. f 是单态射，且 f 是另一个态射 g 的撤回射
2. f 是满态射，且 f 是另一个态射 g 的部分射

自态射 (endomorphism)，对于态射 $f: X \to X$，即 f 有相同的源对象和目标物件 identical source and target)
则称 态射 f 是定义在 X 上的自态射，记 end(X) 为定义在 X 上的自态射的类 (class)
分裂自态射 (split endomorphism)，指态射 f 是幂等的自态射 (idempotent endomorphism)
即 f 可以分解为 $f = g \circ h$，且有 $h \circ g = id$

自同构 (automorphism)，对于态射 $f: X \to X$，如果即是自态射也是同构，则称为自同构
对于任意范畴，物件的自同构总是构成一个群 (automorphisms of an object form always a group)
称为物件的自同构群 (automorphism group of the object)，记为 aut(X)