Calculus - P_1

映射 又称算子. 在不同的数学分支中, 根据集合X, Y的不同情形, 映射又有不同的惯用名称

如: 从非空集X到数集Y的映射称为X上的泛函

从非空集X到其自身的映射又称为X上的变换(关系)

从实数集(或其子集)X到实数集Y的映射通常称为定义在X上的函数

设有数集 $D \subset R$, 称 $f: D \to R$ 为定义在D上的函数, 简记为 $y=f(x)$, $x \in D$

其中 x 为自变量, y 为因变量, D为定义域, 记作 D_f

自然定义域 相较于对有实际背景的函数, 根据实际背景中变量的实际意义而确定

如 自由落体中下落距离 $s=\frac{1}{2}gt^2$, $t \in [0,T]$

自然定义域是抽象地用算式表达的函数, 通常约定这类函数的定义域

为使得算式有意义的一切实数组成的集合

如, 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$

分段函数, 指在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数

范德瓦耳斯 (van der Waals)方程表示等温过程中, 气体压强p和体积V的函数关系. (V相当小时)

$$p = \gamma/(V-\beta) - \alpha/V^2, \quad (\beta < V < V_0)$$

玻意耳 (Boyle)定律则表示V不太小时的函数关系

$$p = k/V \qquad (V \geq V_0)$$

有界性 若有函数 $f(x)$ 的定义域为D, 如果有数集 $X \subset D$

如果 $\exists K_1\, \forall x\, (x \in X \to f(x) \leq K_1)$, 则称 $f(x)$ 在X上有上界, 称 K_1 为 $f(x)$ 在X上的上界

如果 $\exists K_2\, \forall x\, (x \in X \to f(x) \geq K_2)$, 则称 $f(x)$ 在X上有下界, 称 K_2 为 $f(x)$ 在X上的下界

如果 $\exists M>0\, \forall x\, (x \in X \to |f(x)| \leq M)$, 则称 $f(x)$ 在X上有界

$\forall M>0\, \exists x\, (x \in X \land |f(x)| > M)$, 则称 $f(x)$ 在X上无界

偶函数 如果 $\forall x\, (x \in D \to (-x) \in D \land f(-x)=f(x))$, 则 $f(x)$ 为偶函数

且偶函数的图形关于y轴是对称的

奇函数 如果 $\forall x\, (x \in D \to (-x) \in D \land f(-x)=-f(x))$, 则称 $f(x)$ 为奇函数

且奇函数的图形关于原点是对称的

注意: 在讨论函数的奇偶性前, 首先有定义域D是关于原点对称的

即 $\forall x\, (x \in D \to (-x) \in D)$

Calculus - P2

周期性 对于定义域D上的函数$f(x)$，$\exists l>0\ \forall x\in D\ ((x+l)\in D \land f(x+l)=f(x))$，则称$f(x)$为周期函数

称l为$f(x)$的周期，且 $\forall n\in Z^+$ (l是$f(x)$的周期 $\rightarrow nl$是$f(x)$的周期)

而通常[redacted]指函数的周期是最小正周期

狄利克雷 (Dirichlet)函数，属于无最小正周期的周期函数。 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$

$\forall l\in Q^+$ l是$D(x)$的周期，但不存在最小正周期

函数运算 对于函数$f(x)$，$g(x)$，若其定义域分别为D_f，D_g且$D=D_f\cap D_g\neq\emptyset$

则有 $(f\pm g)(x)=f(x)+g(x)$，$x\in D$

$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$，$x\in D$

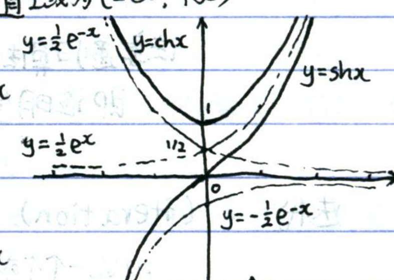
$(f/g)(x)=f(x)/g(x)$，$x\in D\setminus\{x\mid g(x)=0, x\in D\}$，注意此处为差集的另一种记法

双曲函数 (hyperbolic function)，主要讨论[redacted]双曲正弦(sinh, sh)，[redacted]双曲余弦(cosh, ch)，双曲正切(tanh, th)

双曲正弦 $sh=(e^x-e^{-x})/2$，[redacted]为定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，值域为$(-\infty,+\infty)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调增加

在第一象限渐近于$y=\frac{1}{2}e^x$，在第三象限渐近于$y=-\frac{1}{2}e^{-x}$

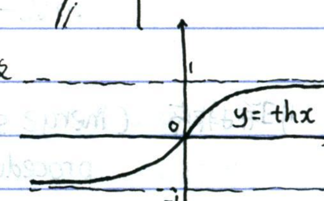


双曲余弦 $ch=(e^x+e^{-x})/2$，为定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数

值域为[redacted]$[1,+\infty)$，在$(-\infty,0)$内单调递减，在$(0,+\infty)$内单调递增

在第一象限渐近于$y=\frac{1}{2}e^x$，在第二象限渐近于$y=\frac{1}{2}e^{-x}$

双曲正切 $thx=shx/chx=(e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x})$，为定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数



值域为$(-1,1)$，在$(-\infty,+\infty)$[redacted]内单调递增

在第一象限渐近于$y=1$，在第三象限渐近于$y=-1$

注意有 $sh(x+y)=shx\,chy+chx\,shy$，$sh(x-y)=shx\,chy-chx\,shy$

$ch(x+y)=chx\,chy+shx\,shy$，$ch(x-y)=chx\,chy-shx\,shy$

证明如 $shx\,chy+chx\,shy=\frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})}{4}+\frac{(e^x+e^{-x})(e^y-e^{-y})}{4}$

$=(e^{x+y}+e^{x-y}-e^{y-x}-e^{-(x+y)}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{y-x}-e^{-(x+y)})/4$

$=(e^{x+y}-e^{-(x+y)})/2=sh(x+y)$

另外[redacted]令$x=y$，又$ch0=1$，则有$chx^2-shx^2=1$

注意此处与普通正余弦函数略有区别，即$\cos^2x+\sin^2x=1$

另外令$x=y$，则有 $sh2x=2shx$[redacted]chx，$ch2x=chx^2+shx^2$

于是有 $ch2x+sh2x=$[redacted]$chx^2+shx^2+2shx\,chx=(chx+shx)^2$

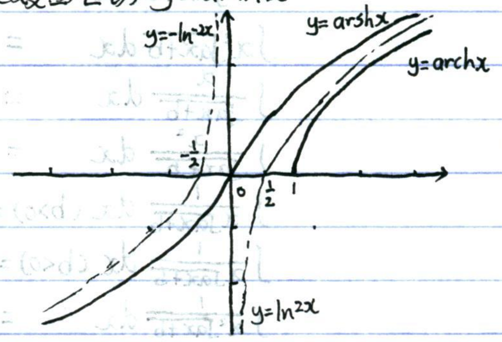
证明如，$(chx+shx)^2=(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2=e^{2x}=(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2})=ch2x+sh2x$

注意与普通正余弦公式的区别，$\sin2x=2\sin x\cos x$，$\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$

Calculus - P3

反双曲函数 (Inverse hyperbolic function)，为双曲函数的反函数

有 反双曲正弦 $y=\mathrm{arsh}\,x$，反双曲余弦 $y=\mathrm{arch}\,x$，反双曲正切 $y=\mathrm{arth}\,x$



反双曲正弦 $\mathrm{arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

由 $y=\mathrm{arsh}x$ 得 $x=\mathrm{sh}y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

令 $u=e^y$，则有 $u^2-2ux-1=0$

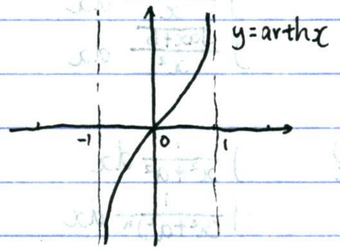
于是有 $u=x\pm\sqrt{x^2+1}$

又 $u>0$，于是 $u=x+\sqrt{x^2+1}$，即 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

反双曲余弦 $\mathrm{arch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

与反双曲正弦类似，可得 $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$

又有 $x\geq1$，且 $y\geq0$，则有 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$



反双曲正切 $\mathrm{arth}\,x=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

由 $y=\mathrm{arth}\,x$ 得 $x=\mathrm{th}y=(e^y-e^{-y})/(e^y+e^{-y})$

$(1-x)e^{2y}=(1+x)$，则有 $y=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

$y=\mathrm{arsh}x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的单调递增奇函数，值域为 $(-\infty,+\infty)$

$y=\mathrm{arch}\,x$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 的单调递增函数，值域为 $[0,+\infty)$

$y=\mathrm{arth}\,x$ 是定义在 $(-1,1)$ 的单调递增奇函数，值域为 $(-\infty,+\infty)$

通项　(或称一般项)，指数列 $\{x_n\}$ 中的第 n 项 x_n，其中 $n\in Z^+$

数列极限　称数列(或称序列) $\{x_n\}$ 收敛于 a，或称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，

当且仅当对于数列 $\{x_n\}$，存在常数 a，对于任意正数 ε，都存在 $N\in Z^+$，使得 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$

通常记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或是 $x_n\to a\ (n\to+\infty)$

即有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in Z^+\ \forall n\ (n>N\longrightarrow|x_n-a|<\varepsilon)$

如果这样的常数 a 不存在，则称数列 $\{x_n\}$，或称 $\{x_n\}$ 是发散的

证明　重要的是对于任意给定的正数 ε，要能指出定义中所说的这种正整数 N 确实存在

可以具体地找出一个满足定义要求的正整数 N，即证明了这种 N 的存在

也可以通过 $|x_n-a|$ 小于某个与 n 存在函数关系的量，若令这个量小于 ε 能推出符合定义要求的 N 存在

唯一性　指如果数列 $\{x_n\}_{(n\to\infty)}$ 收敛，那么数列的极限唯一

假设 $x_n\to a\wedge x_n\to b\wedge a<b$，取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$，

可知 $\exists N_1\in Z^+\ \forall n>N_1\ |x_n-a|<\frac{b-a}{2}$，$\exists N_2\in Z^+\ \forall n>N_2\ |x_n-b|<\frac{b-a}{2}$，则取 $N=\max(N_1,N_2)$

当 $n>N$ 时，则有 $|x_n-a|<\frac{b-a}{2}$，即 $x_n<\frac{b+a}{2}$，且有 $|x_n-b|<\frac{b-a}{2}$，即 $x_n>\frac{b+a}{2}$

相互矛盾，于是有如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限唯一

Calculus - P4

有界性 对于数列$\{x_n\}$，如果存在正数M使得对于一切x_n都有$|x_n|\le M$
则称数列$\{x_n\}$是有界的，如果这样的正数M不存在，则称数列$\{x_n\}$是无界的
即有 数列$\{x_n\}$有界 $\longleftrightarrow \exists_{M>0} \forall_{x_n} |x_n|\le M$
并由此推出 数列$\{x_n\}$收敛 $\longrightarrow$ 数列$\{x_n\}$有界
即如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\exists_{N\in Z^+}\forall_{n>N} |x_n-a|<1$
即有 $\exists_{N\in Z^+}\forall_{n>N} |x_n| = |(x_n-a)+a| \le |x_n-a|+|a| < 1+|a|$
于是取 $M=\max(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|)$，
则有 $\forall_{x_n\in\{x_n\}} |x_n|\le M$
注意 数列$\{x_n\}$有界 $\longrightarrow$ 数列$\{x_n\}$收敛 不成立
对于数列$\{1,-1,1,-1,\cdots\}$，取$M=1$可得有界，但$\lim_{n\to\infty} x_n$不存在

保号性 对于数列$\{x_n\}$，如果有$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 且 $a>0$（或$a<0$），则存在正整数N，使得当$n>N$时，$x_n>0$（或$x_n<0$）
即有 $(\lim_{n\to\infty} x_n = a \land a>0$（或$a<0$）$) \longrightarrow (\exists_{N\in Z^+}\forall_{n>N}\ x_n>0$（或$x_n<0$）$)$
并由此推出 如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\ge 0$（或$x_n\le 0$），且$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则有 $a\ge 0$（或$a\le 0$）
注意这两个之间的区别在于 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 的情况，即无法指明x_n从哪一侧收敛于0
即对于数列$\{x_n\}$，如果其收敛于a，即$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则有
$a>0$（或$a<0$）$\longleftrightarrow \exists_{N\in Z^+}\forall_{n>N}\ x_n>0$（或$x_n<0$）
但 $\exists_{N\in Z^+}\forall_{n>N}\ x_n\ge 0$（或$x_n\le 0$）$\longrightarrow a\ge 0$（或$a\le 0$）

子数列 （或称子列）指从数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持项在$\{x_n\}$中先后次序而得到的数列
如从$\{x_n\}$中依次抽取$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$而形成的子数列$\{x_{n_k}\}$
注意：通常根据下标 x_{n_k}是数列$\{x_{n_k}\}$的第k项，
而在原数列$\{x_n\}$中是第n_k项

子数列收敛 指如果数列$\{x_n\}$收敛于a，则其任意子数列也收敛，并且极限也是a
即有 数列$\{x_n\}$收敛于a ($\lim_{n\to\infty} x_n = a$) $\longleftrightarrow \forall_{\{x_k\}}$ ($\{x_k\}$是$\{x_n\}$的子数列 $\longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = a$)
证明过程 假设数列$\{x_n\}$收敛于a，而其子数列$\{x_{n_k}\}$收敛于b，且$a\ne b$
则取 $\varepsilon = |a-b|/2$，不失一般性地假设$a>b$，则 $\varepsilon=(a-b)/2$
同时 $\exists_{N\in Z^+}\forall_{n>N} |x_n-a|<\varepsilon$，且 $\exists_{N_k\in Z^+}\forall_{n_k>N_k} |x_{n_k}-b|<\varepsilon$
取$N'=\max(N,N_k)$，则对于 $\forall_{n_k>N'} |x_{n_k}-b|<\frac{a-b}{2}$，即 $x_{n_k}<\frac{a+b}{2}$ 矛盾。
又$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$子数列，则对于 $\forall_{n_k>N'} |x_{n_k}-a|<\frac{a-b}{2}$，即 $x_{n_k}>\frac{a+b}{2}$ 于是有子数列极限也为a
另外可以推出，对于数列$\{x_n\}$，如果存在子数列$\{x_j\}$和$\{x_k\}$且$\lim_{j\to\infty} x_j = a$，$\lim_{k\to\infty} x_k = b$ 且 $a\ne b$
则数列$\{x_n\}$是发散的，即 $\exists_{\{x_j\},\{x_k\}}$ ($\{x_j\},\{x_k\}$是$\{x_n\}$子数列 $\land \lim_{j\to\infty} x_j = a \land \lim_{k\to\infty} x_k = b \land a\ne b$)
$\longrightarrow$ 数列$\{x_n\}$是发散的

Calculus - P5

函数极限 指在函数自变量的某个变化过程中，如果对应函数值无限接近于某个确定的数，则这个确定的数称为这一变化过程中的函数的极限

极限与自变量的变化过程密切相关，对于自变量不同的变化过程，极限表现为不同形式

$(x\to x_0)$ 表示自变量x任意地接近于有限值x_0或者说趋于有限值x_0时对应$f(x)$的变化情形

$(x\to\infty)$ 表示自变量x的绝对值$|x|$无限增大即趋于无穷大时，对应$f(x)$的变化情形

邻域 用$U(x_0)$表示以x_0为中心的任何开区间，即 $U(x_0)=\{x \mid |x-x_0|<\varepsilon, \varepsilon\in R^+\}$

去心邻域 用$\mathring{U}(x_0)$表示邻域$U(x_0)$去掉中心x_0后的区间，即 $\mathring{U}(x_0)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\varepsilon, \varepsilon\in R^+\}$

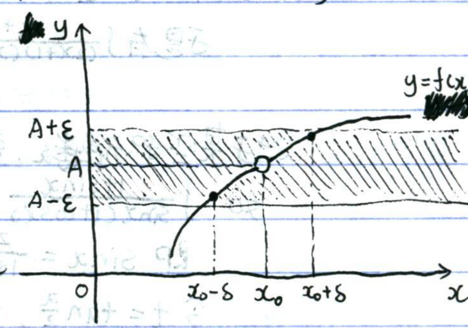
$x\to x_0$函数极限 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义

如果存在常数A，对于任意给定正数ε

总存在正数δ，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时

有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$



即有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \longleftrightarrow \exists A\in R\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$

点x_0的去心δ邻域，对于$x_0\in R$，$\delta>0$，开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$称为点x_0的δ邻域，记为$U(x_0,\delta)$，称δ为邻域半径

而开区间$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$称为点$x_0$的去心$\delta$邻域，记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$

$f(x_0)$ 注意在求$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限时，不要求$f(x)$在x_0处有定义，也不要求$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

单侧极限 左极限 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0^-)$，可理解为从左侧(负方向)接近x_0

即有 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \longleftrightarrow \exists A\in R\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (-\delta<x-x_0<0 \longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$

右极限 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0^+)$，可理解为从右侧(正方向)接近x_0

即有 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \longleftrightarrow \exists A\in R\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<x-x_0<\delta \longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$

由此推出函数$f(x)$当$(x\to x_0)$时极限存在当且仅当其左极限和右极限均存在且相等

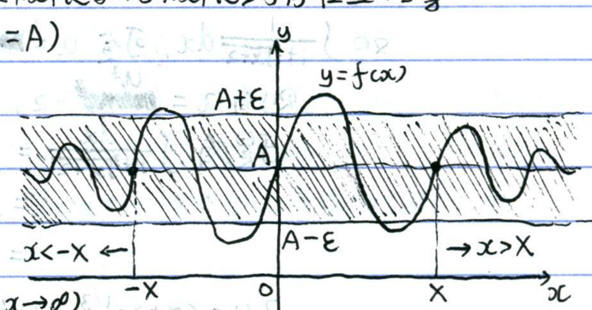
即有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \longleftrightarrow (\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \wedge \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A)$

$x\to\infty$函数极限 设函数$f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义

如果存在常数A，对于任意给定正数ε，总存在正数X

使得当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，称A为函数$f(x)$

当$(x\to\infty)$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$



即有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \longleftrightarrow \exists A\in R\ \forall\varepsilon>0\ \exists X>0\ \forall x\ (|x|>X \longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$

称 $y=A$ 是函数$f(x)$的水平渐近线

Calculus - P6

唯一性

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ / $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则极限唯一

即 $\lim_{x\to x_0} f(x) / \lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在 $\longrightarrow \exists! A\in R\ \lim_{x\to x_0} f(x) = A / \lim_{x\to\infty} f(x) = A$

局部有界性

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) / \lim_{x\to\infty} f(x) = A$，则存在常数 $M>0$，正数 δ / X，使得 $\begin{matrix} 0<|x-x_0|<\delta \\ |x|>X \end{matrix}$ 时，$|f(x)|\le M$

即 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \longrightarrow \exists_{M>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_x (0<|x-x_0|<\delta \longrightarrow |f(x)|\le M)$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \longrightarrow \exists_{M>0}\ \exists_{X>0}\ \forall_x (|x|>X \to |f(x)|\le M)$

局部保号性

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）

即 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \land A>0$（或 $A<0$）$\longrightarrow \exists_{\delta>0}\ \forall_x (0<|x-x_0|<\delta \to f(x)>0$（或 $f(x)<0$））

如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则存在常数 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）

即 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \land A>0$（或 $A<0$）$\longrightarrow \exists_{X>0}\ \forall_x (|x|>X \to f(x)>0$（或 $f(x)<0$））

函数极限有与数列极限相似的推论

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$），且 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）

即（$\exists_{\mathring{U}(x_0)}\ \forall_x (x\in \mathring{U}(x_0) \to f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$））$\land \lim_{x\to x_0} f(x) = A$）$\longrightarrow A\ge 0$（或 $A\le 0$）

如果在 $|x|$ 大于某一正数时 $f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$），且 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，则 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）

即（$\exists_{X>0}\ \forall_x (|x|>X \to f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$））$\land \lim_{x\to\infty} f(x) = A$）$\longrightarrow A\ge 0$（或 $A\le 0$）

另外有推论

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A\ (A\ne 0)$，则存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in \mathring{U}(x_0)$ 时，$|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

可推广至任意正数（大于1的）

即有 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \land A\ne 0 \longrightarrow \forall_{n>1}\ \exists_{\mathring{U}(x_0)}\ \forall_x (x\in \mathring{U}(x_0) \longrightarrow |f(x)| > |A|/n)$

如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A\ (A\ne 0)$，则存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

即有 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \land A\ne 0 \longrightarrow \forall_{n>1}\ \exists_{X>0}\ \forall_x (|x|>X \longrightarrow |f(x)| > |A|/n)$

与数列极限

如果极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内收敛于 x_0 的数列，且 $x_n\ne x_0$（$n\in \mathbb{Z}^+$）

那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必定收敛，且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

即有当 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}\subset D_f \land \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \land \forall_{x_n}\ x_n\ne x_0 \longrightarrow$ 对于 $\{f(x_n)\}$，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

证明如 $\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 定义域 D_f 内的数列，即 $\forall_{x_n}\ f(x_n)$ 有定义

$\{x_n\}$ 收敛于 x_0，即 $\forall_{\delta>0}\ \exists_{N>0}\ \forall_{n} (n>N \to |x_n-x_0|<\delta)$

又 $x_n\ne x_0$ 对所有 x_n 成立，即 $\forall_{\delta>0}\ \exists_{N>0}\ \forall_{n} (n>N \to 0<|x_n-x_0|<\delta)$

又 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，即 $\exists$ 常数 $A\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_x (0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)-A|<\varepsilon)$

又根据假言三段论，$(n>N \longrightarrow 0<|x_n-x_0|<\delta) \land (0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)-A|<\varepsilon)$

$\equiv (n>N \longrightarrow |f(x_n)-A|<\varepsilon)$

于是有当 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，$\{x_n\}$ 为定义在 D_f 上收敛于 x_0 的序列，且 $\forall_{x_n}\ x_n\ne x_0$

则有 $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N>0}\ \forall_{n} (n>N \longrightarrow |f(x_n)-A|<\varepsilon)$，即对于数列 $\{f(x_n)\}$，有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

$= \lim_{x\to x_0} f(x)$

Calculus - P7

无穷小 (infinitesimal). 如果函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时极限为零, 则称函数$f(x)$为$x\to x_0$ ($x\to\infty$)时的无穷小

即有 ($f(x)\to 0$ ($x\to x_0$或$x\to\infty$)) $\longleftrightarrow$ $f(x)$为($x\to x_0$或$x\to\infty$)时的无穷小

即 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)|<\varepsilon) \longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=0$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall x\ (|x|>N \to |f(x)|<\varepsilon) \longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=0$

并由此推出, 在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或$x\to\infty$)中,

函数$f(x)$具有极限A 当且仅当 $f(x)=A+\alpha$, 其中α是无穷小

证明过程如: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)-A|<\varepsilon)$

令$\alpha=|f(x)-A|$, 则α为当$x\to x_0$时的无穷小.

若 $f(x)=A+\alpha$, 而α是为当$x\to x_0$时的无穷小

则 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to |\alpha|<\varepsilon)$

代入$\alpha=f(x)-A$, 则有 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

而不失一般性地可证明 $x\to\infty$ 的情形

无穷大 (infinity). 如果在自变量的变化过程 $x\to x_0$(或$x\to\infty$)中, $|f(x)|$可以大于预先指定的任意大的正数M

即有 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \longleftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)|>M)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \longleftrightarrow \forall M>0\ \exists X>0\ \forall x\ (|x|>X \to |f(x)|>M)$

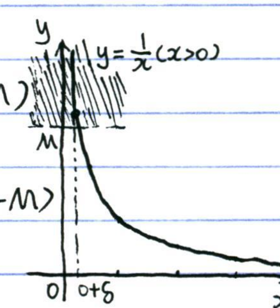
另外 无穷大可拆分为 $\to+\infty$ 和 $\to-\infty$ 两种情形

即有 $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \longleftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to f(x)>M)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty \longleftrightarrow \forall M>0\ \exists X>0\ \forall x\ (|x|>X \to f(x)>M)$

$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \longleftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to f(x)<-M)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty \longleftrightarrow \forall M>0\ \exists X>0\ \forall x\ (|x|>X \to f(x)>M)$



在 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 时, 称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的铅垂渐近线

在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或$x\to\infty$)中,

如果$f(x)$是无穷大, 那么 $1/f(x)$ 为无穷小, 即有 $\lim_{x\to x_0 (x\to\infty)} f(x)=\infty \to \lim_{x\to x_0 (x\to\infty)} 1/f(x)=0$

如果$f(x)$是无穷小且$f(x)\neq0$, 则$1/f(x)$为无穷大, 即有 $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)=0 \wedge (f(x)\neq 0) \to \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} 1/f(x)=\infty$

证明过程如: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 即 $\forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)|>M)$

则取 $\varepsilon=1/M$, 于是有 $|f(x)|>1/\varepsilon$, 即 $|1/f(x)|<\varepsilon$, ($|f(x)|>M>0$)

即 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \to \lim_{x\to x_0} 1/f(x)=0$. 不失一般性地可证明 $x\to\infty$ 的情形

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$. 即 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)|<\varepsilon)$

若 $f(x)\neq0$, 则取$M=1/\varepsilon$, $0<|f(x)|<1/M$, 即 $|1/f(x)|>M$

即 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \wedge f(x)\neq0 \to \lim_{x\to x_0} 1/f(x)=\infty$, 不失一般性地可证明 $x\to\infty$ 的情形

注意: 如果有同一变化过程 $x\to x_0$(或$x\to\infty$)中, 始终有 $f(x)\neq0$,

则有 $\lim_{x\to x_0 (x\to\infty)} f(x)=0$ (或者∞) $\longleftrightarrow \lim_{x\to x_0 (x\to\infty)} 1/f(x)=\infty$ (或者0)

Calculus - P8

极限定义

lim	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$ [redacted]	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ $\to\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon)$	$\forall M>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ $\to\lvert f(x)\rvert>M)$	$\forall M>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ $\to f(x)>M)$	$\forall M>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ $\to f(x)<-M)$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(0<x-x_0<\delta$ $\to\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon)$	$\forall M>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(0<x-x_0<\delta$ $\to\lvert f(x)\rvert>M)$	$\forall M>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(0<x-x_0<\delta$ $\to f(x)>M)$	$\forall M>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(0<x-x_0<\delta$ $\to f(x)<-M)$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(-\delta<x-x_0<0$ $\to\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon)$	$\forall M>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(-\delta<x-x_0<0$ $\to\lvert f(x)\rvert>M)$	$\forall M>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(-\delta<x-x_0<0$ $\to f(x)>M)$	$\forall M>0\ \exists\delta>0$ $\forall x\,(-\delta<x-x_0<0$ $\to f(x)<-M)$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(\lvert x\rvert>X$ $\to\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon)$	$\forall M>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(\lvert x\rvert>X$ $\to\lvert f(x)\rvert>M)$	$\forall M>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(\lvert x\rvert>X$ $\to f(x)>M)$	$\forall M>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(\lvert x\rvert>$[redacted]$X$ $\to f(x)<-M)$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(x>X$ $\to\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon)$	$\forall M>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(x>X$ $\to\lvert f(x)\rvert>M)$	$\forall M>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(x>X$ $\to f(x)>M)$	$\forall M>0\ \exists$ X [redacted] >0 $\forall x\,(x>X$ $\to f(x)<-M)$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(x<-X$ $\to\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon)$	$\forall M>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(x<-X$ $\to\lvert f(x)\rvert>M)$	$\forall M>0\ \exists X>0$ $\forall x\,(x<-X$ $\to f(x)>M)$	$\forall M>0\ \exists$[redacted]$X>0$ $\forall x\,(x<-X$ $\to f(x)<-M)$

[redacted] lim 若极限的运算或使用对于自变量的[redacted]某一变化过程 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 均成立
则记号"lim"下面无需标明自变量的变化过程

两个无穷小的和是无穷小，即有对于自变量的同一变化过程，α和β是无穷小，则$\gamma=\alpha+\beta$也是无穷小

即有对于自变量的同一变化过程 $\lim\alpha=0\wedge\lim\beta=0\longrightarrow\lim\alpha+\beta=0$

假设当$x\to x_0$时，$\lim_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim_{x\to x_0}\beta=0$，

即有 $\forall$[redacted]$\varepsilon/2>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x\,(0<\lvert x-x_0\rvert<\delta_1\to\lvert\alpha\rvert<\varepsilon_1)$

$\forall$[redacted]$\varepsilon/2>0\ \exists\delta_2>0\ \forall x\,(0<\lvert x-x_0\rvert<\delta_2\to\lvert\beta\rvert<\varepsilon_2)$

则取[redacted] $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时

$\lvert\gamma\rvert=\lvert\alpha+\beta\rvert\leq\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

即 $\lim_{x\to x_0}\gamma=0$，即当$x\to x_0$时，$\gamma=\alpha+\beta$是无穷小，

则在自变量的同一变化过程中，如果[redacted]对有限个无穷小求和也是无穷小

即[redacted]在自变量同一变化过程中：$(\bigwedge_{i=1}^{n}\lim\alpha_i=0)\longrightarrow$[redacted]$\lim(\sum_{i=1}^{n}$[redacted]$\alpha_i)=0$，其中 $n\in\mathbb{Z}^+$ 且 $n<+\infty$

Calculus - P9

常数与无穷小之积也是无穷小，即有 $(c\in R \wedge \lim\alpha=0)\longrightarrow \lim c\alpha=0$

有界函数与无穷小的乘积也是无穷小，注意必须指的是同一自变量变化过程

即有对于函数 $f(x)$ 在某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 上有界，而 α 是当 $x\to x_0$ 的无穷小

则 $\alpha f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 的无穷小

证明过程有，$f(x)$ 在 x_0 的去心邻域上有界，即 $\exists M>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta_1 \to |f(x)|\le M)$

又 α 是当 $x\to x_0$ 的无穷小，即 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta_2 \to |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M})$

则取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ 时，有 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to |\alpha f(x)|<\varepsilon)$

即 $(f(x)$有界 $\wedge \lim\alpha=0) \longrightarrow \lim\alpha f(x)=0$

由此推出，对于自变量的同一变化过程，$(\lim\alpha=0 \wedge \lim\beta=0) \longrightarrow \lim\alpha\beta=0$

进而推出，对于自变量的同一变化过程，$\bigwedge_{i=1}^{n}\lim\alpha_i=0 \longrightarrow \lim\prod_{i=1}^{n}\alpha_i=0$，其中 $n\in Z^+$ 且 $n<+\infty$

极限运算

又对于自变量的同一变化过程，$\lim f(x)=A$ 且 $\lim g(x)=B$

有 $\lim[f(x)\pm g(x)] = \lim f(x)\pm\lim g(x) = A\pm B$

$\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot\lim g(x) = A\cdot B$

若有 $B\neq0$，则 $\lim[f(x)/g(x)] = \lim f(x)/\lim g(x) = A/B$

证明过程有，设 $\gamma = f(x)/g(x) - A/B$，又 $f(x)=A+\alpha$，$g(x)=B+\beta$，其中 α,β 为无穷小

则有 $\gamma = (B\alpha - A\beta)/B(B+\beta)$

根据无穷小运算规则，则 $B\alpha-A\beta$ 为无穷小

由于 $\lim g(x)=B\neq0$，则存在 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 或正数 X

当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ (或 $|x|>X$) 时，$|g(x)|>|B|/2$，即 $|1/g(x)|<2/|B|$

即 $|1/B(B+\beta)| = (1/|B|)\cdot(|1/g(x)|) < (1/|B|)\cdot(2/|B|) = 2/B^2$

于是 γ 为有界函数与无穷小的乘积，也为无穷小

而 $f(x)/g(x) = A/B+\gamma$，即 $\lim[f(x)/g(x)] = A/B$.

则有推论：如果 $\lim f(x)$ 存在，若有常数 $c\in R$，则 $\lim[cf(x)] = c\cdot\lim f(x)$

如果 $\lim f(x)$ 存在，若有正整数 $n\in Z^+$，则 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

数列极限运算

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$

若 $y_n\neq0\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $B\neq0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n/y_n=A/B$

如果有 $\varphi(x)\ge\psi(x)$，而 $\lim\varphi(x)=A$ 且 $\lim\psi(x)=B$，则有 $A\ge B$

证明过程有，令 $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)\ge0$，则在自变量的同一变化过程中

$\lim f(x) = \lim[\varphi(x)-\psi(x)] = \lim\varphi(x)-\lim\psi(x) = A-B$.

又 $\lim f(x)\ge0$，则 $A-B\ge0$，即 $A\ge B$

Calculus - P10

有理整函数 (多项式)或有理分式函数当 $x\to x_0$ 时，其极限为用 x_0 代替函数自变量 x 求值.

即对于 $f(x)$ 为形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的多项式，其中 $n\in Z^+$，$a_n,\cdots,a_0\in R$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，

证明过程有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)$

$$= \lim_{x\to x_0} a_nx^n + \lim_{x\to x_0} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_1x + \lim_{x\to x_0} a_0$$

$$= a_n(\lim_{x\to x_0} x)^n + a_{n-1}(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1} + \cdots + a_1(\lim_{x\to x_0} x)^1 + a_0\lim_{x\to x_0} 1$$

$$= a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1x_0 + a_0 = f(x_0)$$

而对于有理分式函数 $F(x) = P(x)/Q(x)$，其中 $P(x)$, $Q(x)$ 为 x 的有理整函数

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = \lim\limits_{x\to x_0}(P(x)/Q(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} P(x)/\lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = P(x_0)/Q(x_0) = F(x_0)$

特别注意：应用 $\lim(f(x)/g(x)) = A/B$ 的前提为 $B\neq 0$

所以当 $Q(x_0)=0$ 时，不能直接使用 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$

复合函数极限 设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在 x_0 的某去心邻域有定义

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时有 $g(x)\neq u_0$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$

注意当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时有 $g(x)\neq u_0$ 是为了满足使 $g(x)\in u_0$ 的某去心邻域

证明过程有，由于 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，即有 $\forall\xi>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta_1 \to |g(x)-u_0|<\xi)$

又 $\exists\delta_0>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta_0 \to g(x)\neq u_0)$，即 $|g(x)-u_0|>0$

则取 $\delta = \min(\delta_0,\delta_1)$，则有 $\forall\xi>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to 0<|g(x)-u_0|<\xi)$

又有 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，即有 $\forall\varepsilon>0\ \exists\xi>0\ \forall u\ (0<|u-u_0|<\xi \to |f(u)-A|<\varepsilon)$

则 $\forall\varepsilon>0\ \exists\xi>0\ \exists\delta>0\ \forall x((0<|x-x_0|<\delta \to 0<|g(x)-u_0|<\xi)\ \land$
$(0<|g(x)-u_0|<\xi \to |f[g(x)]-A|<\varepsilon))$

即 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ (0<|x-x_0|<\delta \to |f[g(x)]-A|<\varepsilon)$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] = A$

另外 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且存在 $X>0$，有当 $|x|>X$ 时 $g(x)\neq u_0$，则有 $\lim\limits_{x\to\infty} f[g(x)]=A$

如果 $\lim g(x)=\infty$，$\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=A$，则有 $\lim f[g(x)]=A$

特别注意：如果复合函数中的某一个极限存在，则求下一个极限时须判断其函数值是否在极限值的去心邻域内

夹逼准则 (squeeze theorem)

准则 I：如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 有

(1) $\exists n_0\in Z^+\ \forall n\ (n>n_0 \to y_n\leq x_n\leq z_n)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \land \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则数列 $\{x_n\}$ 极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

准则 I'：(1) 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 或 $|x|>X$ 时，有 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$

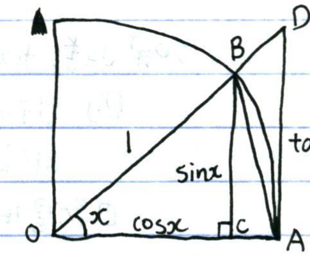
(2) $\lim\limits_{x\to x_0(x\to\infty)} g(x) = A \land \lim\limits_{x\to x_0(x\to\infty)} h(x) = A$ (自变量 x 的同一变化过程)

则 $f(x)$ 当 $x\to x_0$，或 $x\to\infty$ 时的极限存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x) = A$

Calculus - P11

夹逼准则应用

证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，首先注意到 $\frac{\sin x}{x}$ 对于 $x\neq0$ 都有定义



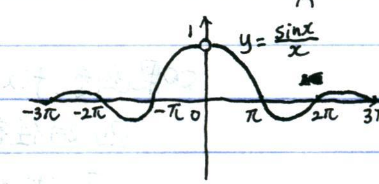
在四分之一单位圆 O 中，令 $\angle AOB = x \ (0<x<\frac{\pi}{2})$

可知 $BC=\sin x$，$AD=\tan x$，且在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时均有意义

观察可知面积大小关系 $S_{\triangle AOB} < S_{扇形AOB} < S_{\triangle AOD}$

即 $\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin x < \frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot1^2 < \frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x$

$\sin x < x < \tan x$



又 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $\sin x\neq0$，于是 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$

又 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则有 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$

又当取 $y=-x$ 时，$\cos y=\cos(-x)=\cos x$，$\frac{\sin y}{y}=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}$

即等式对 $-\frac{\pi}{2}<y<0$ 也成立，即有 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$

对于 $\cos x$，令 $f(x)=1-\cos x$

则当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$0<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{2}$

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2}=0$，于是有 $\lim\limits_{x\to0}1-\cos x=0$，即 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$

于是有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，或者有 $\sin x\sim x\ (x\to0)$

另外有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$，或者有 $\tan x\sim x\ (x\to0)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$，或者有 $\arcsin x\sim x\ (x\to0)$

单调数列

如果数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_n\leq x_{n+1}\leq\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的

如果数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1\geq x_2\geq x_3\geq\cdots\geq x_n\geq x_{n+1}\geq\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的

注意这里指广义的单调数列，即条件中包含相等的情形

准则II

单调有界数列必有极限，如果数列不仅有界，且是单调的，则该数列的极限必定存在，即数列一定收敛

即有对于数列 $\{x_n\}$，$(\exists M>0\ \forall n\in Z^+\ |x_n|\leq M)\wedge(\forall n\in Z^+\ x_n\leq x_{n+1}$ 或 $\forall n\in Z^+\ x_n\geq x_{n+1})\longrightarrow(\exists a\in R\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in Z^+(n>N\rightarrow|x_n-a|<\varepsilon))$

如对于数列 $\{x_n\}$，其中 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$，$n\in Z^+$

有 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n=1^n+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$

$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$

且有 $x_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$

对比 x_n 和 x_{n+1} 可知，前两项相同，其后每一项 x_{n+1} 的均大于 x_n 的对应项，且 x_{n+1} 最后一项大于0

于是有 $\forall n\in Z^+\ x_n<x_{n+1}$，即数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的

又 $x_n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$

($n\in Z^+$ 时) $\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ 注意仅当 $n=1$ 时等号成立

$\leq 1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})$ 注意仅当 $n=1$ 或 $n=2$ 时等号成立

$=1+(2-\frac{1}{2^{n-1}})=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$，即取 $M=3$，则有 $\forall n\in Z^+\ |x_n|\leq M$，即数列 $\{x_n\}$ 有界

所以数列 $\{x_n\}$，$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 的极限存在，即 $\exists a\in R\ \forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n\,(n>N\longrightarrow|(1+\frac{1}{n})^n-a|<\varepsilon)$