Discrete Mathematics - P224

错位排列数(derangement)，对于n个对象，D_n表示没有一个对象在其初始位置的排列数

则有 $D_n = n![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}]$

证明过程有，对于n个对象，所有可能的排列数为n!

令性质P_i表示在排列中元素i的位置保持不变，其中$i=1,2,\cdots,n$

于是有错位排列数 $D_n = N(P_1'P_2'\cdots P_n')$

其中$N(P_1'P_2'\cdots P_n')$表示不满足$P_1,P_2,\cdots,P_n$任何一个的n个元素排列数

则根据容斥原理计算$N(P_1'P_2'\cdots P_n')$

$$D_n = N(P_1'P_2'\cdots P_n') = n! - N(P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n)$$
$$= n! - \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k})]$$

由于$N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k})$表示元素$i_1,i_2,\cdots,i_k$位置保持不变

则有 $N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k}) = (n-k)!$

且在n个元素中选择k个的方式数为$\binom{n}{k}$

于是
$$D_n = n! - \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k})]$$
$$= n! - \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(n-k)!]$$
$$= n! - \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!]$$
$$= n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!}$$
$$= n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$$，其中令$0!=1$
$$= n![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}]$$

对于n个元素的错位排列数D_n，序列$\{D_n\}$满足递推关系 $D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$

证明过程有，在n个元素的错位排列数D_n中

考虑位置1所包含的元素，一般地假定为元素k，其中$1<k\le n$，$n\ge 2$

则考虑错位排列中位置k所包含的元素

如果位置k上的元素正好是元素1，

则其余的排列正好符合n-2个元素的错位排列数

如果位置k上的元素不是元素1

则将位置k与元素1重新对应

而除位置1的排列正好符合n-1个元素的错位排列数

于是对于给定的元素k，共有$D_{n-2}+D_{n-1}$种错位排列

于是有 $D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$，$n\ge 2$

又$D_1=0$，再特别地指定$D_0=1$

则序列$\{D_n\}$满足初始条件 $D_0=1$，$D_1=0$

和递推关系 $D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$，$n\ge 2$

Discrete Mathematics - P225

错位排列数

对于n元素的错位排列数 D_n，序列 $\{D_n\}$ 满足递推关系 $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$，$n \geq 1$

证明过程有，由于 $D_0 = 1$，$D_1 = 0$，则有 $D_1 = 1 \cdot D_0 + (-1)^1$

又 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$，$n \geq 2$

$$
\begin{aligned}
D_n - nD_{n-1} &= -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] \\
&= (-1)^2 [D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}] \\
\cdots &= (-1)^{n-1} [D_1 - 1 \cdot D_0] \\
&= (-1)^n
\end{aligned}
$$

于是有 $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$，$n \geq 1$

可以通过递推关系 $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ 推导错位排列数的显式公式

$$
\begin{aligned}
D_n &= nD_{n-1} + (-1)^n = nD_{n-1} + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= n(n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1}\frac{n!}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= \cdots = n(n-1)\cdots 2 \times 1 \cdot D_0 + (-1)^1 \frac{n!}{1!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= n!\left[1 + (-1)^1 \cdot \frac{1}{1!} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right] \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k / k!
\end{aligned}
$$

对于n元素的错位排列数 D_n，有 $n! = \binom{n}{0}D_n + \binom{n}{1}D_1 + \cdots + \binom{n}{n-1}D_1 + \binom{n}{n}D_0$

证明过程有，考虑在n个元素的排列中，有k元素在初始位置上

则其余 $n-k$ 个元素的排列符合 $n-k$ 个元素的错位排列数 D_{n-k}

又对k个在初始位置的元素有 $\binom{n}{k}$ 种不同的选择方式

于是对于 $k = 0, 1, \cdots, n$，不同的k的排列之间是互不相交的

则 $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \binom{n}{0}D_n + \binom{n}{1}D_1 + \cdots + \binom{n}{n-1}D_1 + \binom{n}{n}D_0$

对于n个元素的排列中，没有偶数位置元素在其初始位置的错位排列数

令性质 P_i 表示位置 $2i$ 上的元素在排列中在其初始位置，其中 $i = 1, \cdots, \lfloor n/2 \rfloor$

$$
\begin{aligned}
\text{则 } N(P_1' P_2' \cdots P_{\lfloor n/2 \rfloor}') &= n! - N(P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{\lfloor n/2 \rfloor}) \\
&= n! - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor}\left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq \lfloor n/2 \rfloor} N(P_{i_1}' P_{i_2}' \cdots P_{i_k}')\right] \\
&= n! - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor}\left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq \lfloor n/2 \rfloor} (n-k)!\right] \\
&= n! - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor}\left[(-1)^{k+1} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k} (n-k)!\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k} (n-k)!
\end{aligned}
$$

于是可知 n个元素的没有偶数位置元素在其初始位置的错位排列数为

$$ED_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k} (n-k)!$$

Discrete Mathematics - P226

考虑通过容斥原理求解欧拉函数的显式公式，

对于正整数 n，欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示不超过 n 的正整数中与 n 互素的正整数个数

令正整数 n 有素因子分解 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 为互不相同的质数，$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为正整数，$m \in N$

令性质 P_i 表示正整数可以被素数 p_i 整除

于是可知 $\varphi(n) = N(P_1' P_2' \cdots P_m') = n - N(P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_m)$

$$= n - [\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} N(P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k})]$$

$$= n - [\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}]$$

$$= n[1 - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}]$$

$$= n \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$$

$$= n \cdot \sum_{k=0}^{m} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \prod_{j=1}^{k} \frac{-1}{p_{i_j}}$$

$$= n \cdot \prod_{i=1}^{m} (1 - \frac{1}{p_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{m} p_i^{a_i - 1} (p_i - 1)$$

对于无穷序列 $\{a_n\}$，有初始条件 $a_0 = 1$，$a_1 = 2$ 和递推关系 $a_n = a_{n-1}^2 / a_{n-2}$

可以取无穷序列 $\{b_n\}$，并令 $b_n = \lg^{a_n}$

于是 $\{b_n\}$ 满足初始条件 $b_0 = 0$，$b_1 = 1$

且有递推关系 $b_n = \lg^{a_n} = \lg(a_{n-1}^2 / a_{n-2}) = 2\lg^{a_{n-1}} - \lg^{a_{n-2}} = 2b_{n-1} - b_{n-2}$

令 $G(x)$ 为无穷序列 $\{b_n\}$ 的生成函数

则 $G(x) - 0 - x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 x^0 - b_1 x = \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (2b_{n-1} - b_{n-2}) x^n$$

$$= 2x \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{n-2}$$

$$= 2x G(x) - x^2 G(x)$$

于是有 $G(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

则有 $b_n = n$，即 $a_n = 2^n$，其中 $n \in N$

对于无穷序列 $\{a_n\}$，有初始条件 $a_0 = 2$，$a_1 = 2$ 和递归关系 $a_n = a_{n-1}^3 a_{n-2}^2$

可以取 $G(x)$ 为无穷序列 $\{b_n\}$ 的生成函数，其中 $b_n = \lg^{a_n}$

则 $\{b_n\}$ 有初始条件 $b_0 = 1$，$b_1 = 1$ 和递推关系 $b_n = 3b_{n-1} + 2a_{n-2}^2$

则 $G(x) - 1 - x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 x^0 - b_1 x^1 = \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (3b_{n-1} + 2b_{n-2}) x^n = 3x[G(x) - 1] + 2x^2 G(x)$$

于是有 $G(x) = \frac{1 - 2x}{1 - 3x - 2x^2} = \frac{7+\sqrt{17}}{17+3\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{1 - 4x/(\sqrt{17}-3)} + \frac{10+2\sqrt{17}}{17+3\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{1 - 4x/(-\sqrt{17}-3)}$

则有 $a_n = 2^{\{\frac{7+\sqrt{17}}{17+3\sqrt{17}} \cdot (\frac{\sqrt{17}+3}{2})^n + \frac{10+2\sqrt{17}}{17+3\sqrt{17}} \cdot (\frac{3-\sqrt{17}}{2})^n\}}$

Discrete Mathematics - P227

单峰序列 (unimodal sequence)，对于序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，该序列是单峰的当且仅当

存在一个下标 $1 \le m \le n$，使得

对任意 $1 \le i < m$，有 $a_i < a_{i+1}$，即前m项为严格递增的

对任意 $m \le i < n$，有 $a_i > a_{i+1}$，即后 $n-m+1$ 项为严格递减的

于是 a_m 是单峰序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大项

对于单峰序列 $a_1, \cdots, a_n$，a_m 是唯一大于其前项和其后项的元素

证明过程有，假设存在下标 $1 \le i \le n$ 且 $i \ne m$，使得 a_i 大于其前项和其后项

如果 $i < m$，则与 $a_i < a_{i+1}$ 矛盾

如果 $i > m$，则与 $a_{i-1} > a_i$ 矛盾

于是可知不存在这样的下标i，于是 a_m 是唯一大于其前项和其后项的元素

对于下标 $1 \le i < n$，如果有 $a_i < a_{i+1}$，则 $i+1 \le m \le n$

如果有 $a_i > a_{i+1}$，则 $1 \le m \le i$

证明过程有，如果 $m \le i$ 且 $a_i < a_{i+1}$，则与 $a_i > a_{i+1}$ 矛盾

如果 $i < m$ 且 $a_i > a_{i+1}$，则与 $a_i < a_{i+1}$ 矛盾

于是可知 当 $a_i < a_{i+1}$ 时，有 $i+1 \le m \le n$，

当 $a_i > a_{i+1}$ 时，有 $1 \le m \le i$

于是可以利用这个性质设计分治算法，对于给定单峰序列求最大值

```
MAXIMUM-OF-UNIMODAL(A, p, r)
  if p = r
    return A[p]
  else
    mid := ⌊(p+r)/r⌋
    if A[mid] < A[mid+1]
      return MAXIMUM-OF-UNIMODAL(A, mid+1, r)
    else
      return MAXIMUM-OF-UNIMODAL(A, p, mid)
```

于是 MAXIMUM-OF-UNIMODAL(A, 1, A.length)

可以在时间复杂度 $\Theta(\lg n)$ 找到给定单峰序列的最大值

Discrete Mathematics - P228

背包问题 (knapsack problem)，对于一个包含n个对象的集合，选择一个子集 S

集合中的每个对象i都有一个正整数权重 w_i，

要求子集S中的对象权重之和最大化且不超过固定权重限度W

令$M(j,w)$表示不超过权重限度w的前j个对象的子集合的最大权重之和

则有 $M(j,w) = \begin{cases} M(j-1,w) & , w_j > w \\ \max\{M(j-1,w),\ w_j + M(j-1, w-w_j)\} & , w_j \le w \end{cases}$

证明过程有，当 $w_j > w$ 时，则从前j个对象中选择的子集S

必定不可能包含第j个对象

于是等价于从前j-1个对象选择的不超过限度w的子集最大权重之和

于是有$M(j,w) = M(j-1,w)$ ，$j \in N^+$

当 $w_j \le w$ 时，则选择的子集或者包含对象j，或者不包含对象j

如果不包含对象j，则与 $w_j > w$ 的情形类似

于是有不包含对象j的最大权重之和为 $M(j-1,w)$

如果包含对象j，则对于其他对象的选择

相当于不超过权重限度 $w-w_j$ 的前j-1个对象的子集的最大权重之和

于是有 包含对象j的最大权重之和为 $w_j + M(j-1, w-w_j)$

于是有$M(j,w) = \begin{cases} M(j-1,w) & , w_j > w \\ \max\{M(j-1,w),\ w_j + M(j-1, w-w_j)\} & , w_j \le w \end{cases}$

又有基础情形 $M(0,w) = 0$ ，$M(j,0) = 0$，其中 $j \in N$，$w \in N$

```
KNAPSACK-PROBLEM(<w1, w2, ..., wn>, W)
  let M be new (n+1) x (W+1) array
  for i := 0 to n
    M[i, 0] := 0
  for j := 0 to W
    M[0, j] := 0
  for i := 1 to n
    for j := 1 to W
      if j ≥ wi
        M[i, j] := max{M[i-1, j], M[i-1, j-wi] + wi}
      else
        M[i, j] := M[i-1, j]
  return M[n, W]
```

于是 KNAPSACK-PROBLEM 在时间复杂度 $\Theta(nW)$ 内求解背包问题

Discrete Mathematics - P229

背包问题

对于包含n个对象的集合，每个对象都具有一个正整数权重 w_i 和一个正整数价值 v_i

选择一个子集S使得权重之和不超过固定权重限度W且最大化价值之和

令 $V(j,w)$ 表示不超过权重限度w的前j个对象的子集的最大价值之和

则与最大化权重之和的递推关系类似

有 $V(j,w) = \begin{cases} V(j-1,w) & , w_j > w \\ \max\{V(j-1,w),\ v_i + V(j-1, w-w_j)\} & , w_j \le w \end{cases}$

则考虑在返回最大化价值之和的同时也返回对象的子集

```
KNAPSACK-VALUE-PROBLEM(<w1, w2, ..., wn>, <v1, v2, ..., vn>, W)
  let V, S be new (n+1)x(W+1) array
  for i := 0 to n              for j := 0 to W
    V[i,0] := 0                  V[0,j] := 0
  for i := 0 to n              for j := 0 to W
    S[i,0] := ∅                  S[0,j] := 0
  for i := 1 to n
    for j := 1 to W
      if j ≥ wi
        V[i,j] := max{V[i-1,j], vi + V[i-1, j-wi]}
      else
        V[i,j] := V[i-1,j]
      if V[i,j] = V[i-1,j]
        S[i,j] := S[i-1,j]
      else
        S[i,j] := S[i-1,j-wi] U {i}
  return V[n,W], S[n,W]
```

V/A \ W

w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0, ∅	0, ∅	0, ∅	0, ∅	0, ∅	0, ∅	0, ∅	0, ∅	0, ∅	0, ∅	0, ∅	0, ∅
1	1	0, ∅	1, {1}	1, {1}	1, {1}	1, {1}	1, {1}	1, {1}	1, {1}	1, {1}	1, {1}	1, {1}	1, {1}
2	3	0, ∅	1, {1}	3, {2}	4, {1,2}	4, {1,2}	4, {1,2}	4, {1,2}	4, {1,2}	4, {1,2}	4, {1,2}	4, {1,2}	4, {1,2}
3	4	0, ∅	1, {1}	3, {2}	4, {3}	5, {1,3}	7, {2,3}	8, {1,2,3}	8, {1,2,3}	8, {1,2,3}	8, {1,2,3}	8, {1,2,3}	8, {1,2,3}
5	7	0, ∅	1, {1}	3, {2}	4, {3}	5, {1,3}	7, {5}	8, {1,5}	10, {2,5}	11, {3,5}	12, {1,3,5}	14, {2,3,5}	13, {1,2,3,5}
8	13	0, ∅	1, {1}	3, {2}	4, {3}	5, {1,3}	7, {5}	8, {1,5}	10, {2,5}	13, {8}	14, {1,8}	16, {2,8}	17, {3,8}
11	18	0, ∅	1, {1}	3, {2}	4, {3}	5, {1,3}	7, {5}	8, {1,5}	10, {2,5}	13, {8}	14, {1,8}	16, {2,8}	18, {11}

Discrete Mathematics - P230

最长相同子序列(longest common subsequence)，

对于输入序列 $a_1a_2\cdots a_m$ 和 $b_1b_2\cdots b_n$，找到最长相同子序列 $c_1c_2\cdots c_p$，其中 $m,n\in N^+$ $p\in N$

考虑将两个输入序列拆分为 $a_1a_2\cdots a_{m-1}; a_m$，$b_1b_2\cdots b_{n-1}; b_n$

则当 $a_m=b_n$ 时，取 $c_p=a_m=b_n$

而 $c_1c_2\cdots c_{p-1}$ 为子序列 $a_1a_2\cdots a_{m-1}$ 与 $b_1b_2\cdots b_{n-1}$ 的最长相同子序列

而当 $a_m\neq b_n$ 时，则 考虑 c_p 与 a_m, b_n 的关系

当 $c_p\neq a_m$ 时，最长相同子序列 $c_1c_2\cdots c_p$ 与 $a_1a_2\cdots a_m$ 不共有最后一位

于是 $c_1c_2\cdots c_p$ 为 $a_1a_2\cdots a_{m-1}$ 与 $b_1b_2\cdots b_n$ 的最长相同子序列

当 $c_p\neq b_n$ 时，最长相同子序列 $c_1c_2\cdots c_p$ 与 $b_1b_2\cdots b_n$ 不共有最后一位

于是 $c_1c_2\cdots c_p$ 为 $a_1a_2\cdots a_m$ 与 $b_1b_2\cdots b_{n-1}$ 的最长相同子序列

令 $L(i,j)$ 表示子序列 $a_1a_2\cdots a_i$ 与 $b_1b_2\cdots b_j$ 的最长相同子序列长度，其中 $0\le i\le m, 0\le j\le n$

可知当 $i=0$ 或 $j=0$ 时，最长相同子序列为空，即 $L(i,j)=0$

而当 $i>0$ 且 $j>0$ 时，如果有 $a_i=b_j$，

则 $L(i,j)=L(i-1,j-1)+1$

而如果有 $a_i\neq b_j$，则最长相同子序列 $c_1c_2\cdots c_p$

或者是 $a_1a_2\cdots a_{m-1}$，$b_1b_2\cdots b_n$，或者是 $a_1a_2\cdots a_m$，$b_1b_2\cdots b_{n-1}$

则 $L(i,j)=\max\{L(i,j-1), L(i-1,j)\}$

于是有
$$L(i,j)=\begin{cases}0, & i=0 \text{ 或 } j=0\\ L(i-1,j-1)+1, & i>0\wedge j>0,\ a_i=b_j\\ \max\{L(i,j-1),L(i-1,j)\}, & i>0\wedge j>0,\ a_i\neq b_j\end{cases}$$

```
LONGEST-COMMON-SUBSEQUENCE(a1a2...am, b1b2...bn)
  let L be new (m+1)x(n+1) array with 0
  for i := 1 to m
    for j := 1 to n
      if ai = bj
        L[i,j] = L[i-1,j-1]+1
      else
        L[i,j] = max{L[i,j-1],
                     L[i-1,j]}
  return L[m,n]
```

b \ a		A	G	T	C	G	T
	0	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	1	1	1	1
A	0	1	1	1	1	1	1
C	0	1	1	1	2	2	2
T	0	1	1	2	2	2	3
G	0	1	2	2	2	3	3
C	0	1	2	2	3	3	3

于是 LONGEST-COMMON-SUBQUENCE 在时间复杂度 $\Theta(mn)$ 内找到 $a_1a_2\cdots a_m$ 与 $b_1b_2\cdots b_n$ 的最长相同子序列长度

Discrete Mathematics - P231

前向差分 (forward difference)，对于实数序列 $\{a_n\}$ 可以递归地定义前向差分

first forward difference : $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

k+1 st forward difference : $\Delta^{k+1} a_n = \Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n$，其中 $k \in N^+$

则有对于 $a_n = P(n)$，其中 $P(n)$ 为 n 的 d 次多项式

对于任意非负整数 n，有 $\Delta^{d+1} a_n = 0$

证明过程有，令 $P(n) = b_0 n^0 + b_1 n^1 + \cdots + b_d n^d$，其中 $b_0, b_1, \cdots, b_d$ 为实数常数

$$
\begin{aligned}
\text{则 } \Delta a_n &= a_{n+1} - a_n \\
&= [b_0 + b_1(n+1) + \cdots + b_d(n+1)^d] - [b_0 + b_1 n + \cdots + b_d n^d] \\
&= b_0^{(1)} + b_1^{(1)} n^1 + \cdots + b_{d-1}^{(1)} n^{d-1} + b_d n^d - b_d n^d \\
&= b_0^{(1)} + b_1^{(1)} n^1 + \cdots + b_{d-1}^{(1)} n^{d-1}
\end{aligned}
$$

其中 $b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \cdots, b_{d-1}^{(1)}$ 为实数常数

于是可知第一前向差分 Δa_n 为 n 的 $d-1$ 次多项式

则可以类似地推导出，对于正整数 $0 \leq k \leq d$

第k前向差分 $\Delta^k a_n$ 为 n 的 $d-k$ 次多项式

即 $\Delta^d a_n = b_0^{(d)}$ 其中 $b_0^{(d)}$ 为实数常数

于是有对于任意非负整数 n，有 $\Delta^{d+1} a_n = \Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n = b_0^{(d)} - b_0^{(d)} = 0$

对于实数序列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，则有 $\Delta(a_n b_n) = a_{n+1}(\Delta b_n) + b_n(\Delta a_n)$

证明过程有，令实数序列 $\{C_n\}$ 有 $C_n = a_n b_n$

$$
\begin{aligned}
\text{则 } \Delta(a_n b_n) = \Delta C_n &= C_{n+1} - C_n \\
&= a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n \\
&= a_{n+1} b_{n+1} - a_{n+1} b_n + a_{n+1} b_n - a_n b_n \\
&= a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) + (a_{n+1} - a_n) b_n \\
&= a_{n+1}(\Delta b_n) + b_n(\Delta a_n)
\end{aligned}
$$

对于 $F(x)$，$G(x)$ 为无穷序列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的生成函数

则 $(cF + dG)(x)$ 为无穷序列 $\{ca_n + db_n\}$ 的生成函数

证明过程有，由于 $F(x)$，$G(x)$ 为无穷序列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的生成函数

则有 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$
\begin{aligned}
\text{于是 } (cF + dG)(x) &= cF(x) + dG(x) \\
&= c\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + d\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ca_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} db_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (ca_n + db_n) x^n
\end{aligned}
$$

于是可知 $(cF + dG)(x)$ 为无穷序列 $\{ca_n + db_n\}$ 的生成函数

Discrete Mathematics - P232

对于无穷序列$\{a_n\}$，满足初始条件 $a_0=1$ 和递推关系 $(n+1)a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n!}$，其中 $n=0,1,2,\cdots$

令 $G(x)$ 为无穷序列$\{a_n\}$的生成函数，即有 $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

则取 $G(x)$ 的导数

$$
\begin{aligned}
G'(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n x^n]' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{n!}\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= G(x) + e^x
\end{aligned}
$$

又有 $G(0) = a_0 = 1$

再取 $e^{-x}G(x)$ 的导数

$$
\begin{aligned}
[e^{-x}G(x)]' &= -e^{-x}G(x) + e^{-x}G'(x) \\
&= -e^{-x}G(x) + e^{-x}[G(x) + e^x] \\
&= -e^{-x}G(x) + e^{-x}G(x) + 1 = 1
\end{aligned}
$$

于是有 $e^{-x}G(x) = x + C$，其中 C 为常数

又 $e^{-0}G(0) = C = 1$，于是有 $G(x) = (1+x)e^x$

则有

$$
\begin{aligned}
G(x) = (1+x)e^x &= (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) x^n
\end{aligned}
$$

于是无穷序列$\{a_n\}$有显式公式 $a_0 = 1$，$a_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}$，其中 $n = 1,2,3,\cdots$

二元关系 (binary relation)，由有序对 (ordered pair) 组成的集合

对于集合A和B，则从A到B的二元关系是 $A \times B$ 的子集 R

R中的每个有序对的第一个元素取自集合A而第二个元素取自集合B

当 $(a,b) \in R$ 时，称 a与b有关系R (a related to b by R)，其中 $a \in A$，$b \in B$

记 aRb 为 $(a,b) \in R$

$a \not R b$ 为 $(a,b) \notin R$

函数 如果R为从A到B的关系，且使得A中的每个元素恰好是R中一个有序对的第一个元素

则关系R可以定义为一个函数 $f: A \to B$，且有 $b = f(a)$

且关系R可以视为有序对 $(a, f(a))$，$a \in A$ 的集合

定义在A上的关系 (relation on A)，指从集合A到其自身的二元关系，即 $A \times A$ 的子集

也称为集合A上的关系

如定义在 N^+ 上的整除关系 $\{(a,b) \mid a \mid b,\ a,b \in N^+\}$

Discrete Mathematics - P233

自反的 (reflexive) 对于定义在集合A上的关系R

如果对于任意 $a \in A$，都有 $(a,a) \in R$，则称关系R为自反的，R为集合A上的自反关系

即 $\forall_{a \in A} (a,a) \in R$

对称的 (symmetric) 对于定义在集合A上的关系R

如果对于任意 $a,b \in A$，只要有 $(a,b) \in R$，则有 $(b,a) \in R$

则称关系R是对称的，R为集合A上的对称关系

即 $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} ((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R)$

反对称的 (antisymmetric)，对于定义在集合A上的关系R

如果对于任意 $a,b \in A$，如果 $(a,b) \in R$ 且 $(b,a) \in R$，则必定有 $a=b$

则称关系R是反对称的，R为集合A上的反对称关系

即 $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} ((a,b) \in R \land (b,a) \in R \longrightarrow a=b)$

$\equiv \forall_{a \in A} \forall_{b \in A} (a \neq b \longrightarrow (a,b) \notin R \lor (b,a) \notin R)$

也可以描述为对于任意不同的元素a,b，则有 $(a,b) \notin R$ 或 $(b,a) \notin R$

注意 对称的与反对称的不是对立的，且可以很容易构造出同时不满足两者的关系

而如果有 $\forall_{a \in A} (a,a) \in R$ 且 $\forall_{a \neq b} (a,b) \notin R \land (b,a) \notin R$

则此时关系R同时是对称的和反对称的

非对称的 (asymmetric) 对于定义在集合A上的关系R

如果对于任意 $a,b \in A$，只要有 $(a,b) \in R$，则有 $(b,a) \notin R$

则称关系R是非对称的，R为集合A上的非对称关系

即 $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} (a,b) \in R \longrightarrow (b,a) \notin A \equiv \forall_{a \in A} \forall_{b \in A} (a,b) \notin R \lor (b,a) \notin R$

$\equiv \forall_{a \in A} \forall_{b \in A} \neg((a,b) \in R \land (b,a) \in R)$

注意当关系R为非对称关系时，则必定是反对称关系

由于当 $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} \neg((a,b) \in R \land (b,a) \in R)$ 为真时

$\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} ((a,b) \in R \land (b,a) \in R \longrightarrow a=b)$ 必定为真

另外对称的与非对称的也不是对立的，同样可以很容易构造出同时不满足两者的关系

对于集合A，构造空关系 $R = \emptyset$，则R同时满足

$\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} ((a,b) \in R \longrightarrow (b,a) \in R)$

$\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} ((a,b) \in R \longrightarrow (b,a) \notin R)$

Discrete Mathematics - P234

反自反的 (irreflexive)，对于定义在集合A上的关系R

如果对于任意$a\in A$，都有$(a,a)\notin R$，则称关系R为反自反的，R为集合A上的反自反关系

即 $\forall a\in A\ (a,a)\notin R$

传递的 (transitive)，对于定义在集合A上的关系R

如果对于任意$a,b,c\in A$，只要$(a,b)\in R$且$(b,c)\in R$，则有$(a,c)\in R$

则称关系R是传递的，R为集合A上的传递关系

即 $\forall a\in A\ \forall b\in A\ \forall c\in A\ ((a,b)\in R \land (b,c)\in R \rightarrow (a,c)\in R)$

关系个数 对于有限集A和B，其中A包含m个元素，B包含n个元素，$m,n\in N$

则有有序对集合$A\times B$中包含$m\times n$个元素

定义从A到B的二元关系R为$A\times B$的子集 即$R\in P(A\times B)$

则从A到B的不同二元关系R共有2^{mn}个

对于有限集A，其中A包含n个元素，R为定义在A上的关系

则有有序对集合$A\times A$中包含n^2个元素，又关系$R\in P(A\times A)$

则定义在n个元素集合A上的关系R共有2^{n^2}个

如果定义在集合A上的关系R是自反的，其中$|A|=n$

对于任意$a\in A$，必定有$(a,a)\in R$

而对于任意$a,b\in A$且$a\neq b$，(a,b)可以包含/不包含于R中，且相互独立

而这样的有序对有$n(n-1)$个

于是定义在n个元素集合A上的自反关系R共有$2^{n(n-1)}$个

如果定义在集合A上的关系R是反自反的，其中$|A|=n$

对于任意$a\in A$，必定有$(a,a)\notin R$

而其余$n(n-1)$个有序对(a,b)不受限制，其中$a,b\in A$且$a\neq b$

于是定义在n个元素集合A上的反自反关系共有$2^{n(n-1)}$个

如果定义在集合A上的关系R即不是自反的也不是反自反的，其中$|A|=n$

则对于n个有序对(a,a)，不可同时包含于R，也不可同时不包含于R，其中$a\in A$

于是定义在n个元素集合A上的即非自反也非反自反的关系共有$(2^n-2)2^{n(n-1)}$个

即有 $2^{n^2}-2\cdot 2^{n(n-1)}$个