Linear Algebra - P40

牛顿力学

对于二维空间R^2或三维空间R^3中的向量$\vec{x}$，通常记$\vec{x}$的长度(length)为$\|\vec{x}\|$

通常定义$\|\vec{x}\|$为向量$\vec{x}$的l_2范数，即$\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|_2 = (\vec{x}^T\vec{x})^{1/2}$

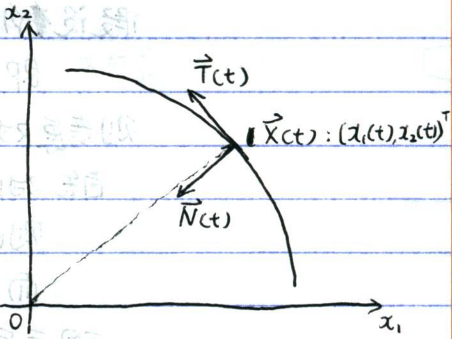
如果有$\|\vec{x}\|=1$，则称$\vec{x}$为单位向量(unit vector)

牛顿通过单位向量推导平面/三维空间中质点的运动规律

对于向量$\vec{x}, \vec{y} \in R^2$，且$\vec{x}, \vec{y}$均为非零向量

则定义$\vec{x}, \vec{y}$间的夹角θ为从$\vec{x}$向$\vec{y}$按逆时针方向旋转所需的最小角度

或者按顺时针/逆时针旋转的最小角度 且当逆时针时$\theta>0$，顺时针时$\theta<0$



对于在平面空间上移动的质点，其运动轨迹为一条平面曲线

则在任意时刻t，质点的位置可以表示为向量$\vec{x}(t)$

即有$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$

而将$\vec{x}(t)$表示为向量$\vec{T}(t)$和$\vec{N}(t)$的线性组合

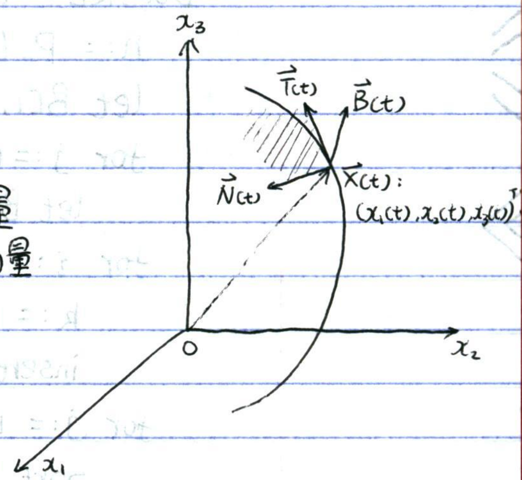
其中$\vec{T}(t)$为曲线在点$(x_1(t), x_2(t))$切线方向的单位向量

$\vec{N}(t)$为曲线在点$(x_1(t), x_2(t))$法线方向的单位向量

又$\vec{T}(t)$与$\vec{N}(t)$为平面空间中的单位正交向量(unit orthogonal vector)

于是有$\|\vec{T}(t)\| = \|\vec{N}(t)\| = 1$，且夹角$\theta = \frac{\pi}{2}$

则有$\vec{T}(t)^T\vec{N}(t) = 0$



对于三维空间中移动的质点，其运动轨迹为一条空间曲线

则在任意时刻t，质点的位置可以表示为向量$\vec{x}(t)$

即有$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$

而首先获取向量$\vec{T}(t)$和$\vec{N}(t)$

其中$\vec{T}(t)$为曲线在点$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$切线方向的单位向量

$\vec{N}(t)$为曲线在点$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$法线方向的单位向量

而在三维空间中需要第三个向量描述质点运动的规律

定义$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$

则$\vec{B}(t)$为由$\vec{T}(t)$和$\vec{N}(t)$确定平面的法线向量

且$\|\vec{B}(t)\| = \|\vec{T}(t)\| \|\vec{N}(t)\| \sin\theta = 1$

于是可知$\vec{T}(t)$，$\vec{N}(t)$，$\vec{B}(t)$构成一组三维空间中的单位正交向量

用于描述质点在三维空间中的运动

称$\vec{B}(t)$为副法线向量(binormal vector)

Linear

Algebra - P41

对于 [redacted] n维列向量 $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$

令 $n\times n$ 矩阵 B_j 为将单位矩阵 I 的第 j 列替换为 $\vec{b}$ 所得到的矩阵，其中 $j=1,2,\cdots,n$

则有 $b_j = \det(B_j)$，其中 $j=1,2,\cdots,n$

证明过程有，对于线性方程组 $I\vec{x} = \vec{b}$，有解为 $\vec{x} = \vec{b}$

又根据克拉默法则，有 $x_j = \det(B_j)/\det(I)$

于是有 $b_j = x_j = \det(B_j)/1 = \det(B_j)$，其中 $j=1,2,\cdots,n$

对于 $n\times n$ 矩阵 Q，如果有 $Q^{-1} = Q^T$，则有 $q_{ij} = \dfrac{Q_{ij}}{\det(Q)}$，其中 $1\leq i,j\leq n$

证明过程有，$Q = (Q^T)^T = (Q^{-1})^T = \left(\dfrac{1}{\det(Q)} \operatorname{adj} Q\right)^T$

$= \dfrac{1}{\det(Q)} (\operatorname{adj} Q)^T$

又矩阵 Q 的伴随 $\operatorname{adj} Q$ 是将元素 q_{ij} 替换为余子式 Q_{ij} 再取转置

则有 $(\operatorname{adj} Q)^T = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix}$

于是有矩阵 Q 中的元素 $q_{ij} = Q_{ij}/\det(Q)$，其中 $1\leq i,j\leq n$

对于 $n\times n$ 非奇异矩阵 A，有矩阵 A^TA 也是非奇异的

证明过程有，$\det(A^TA) = \det(A^T)\det(A)$

$= [\det(A)]^2$

又矩阵 A 是非奇异的，即 $\det(A) \neq 0$

于是有 $\det(A^TA) = [\det(A)]^2 > 0$，即 A^TA 是非奇异的

对于 $n\times n$ 矩阵 A，如果存在 $n\times n$ 矩阵 B 和 $n\times n$ 非奇异矩阵 S

使得 $B = S^{-1}AS$，则有 $\det(B) = \det(A)$

证明过程有，$\det(B) = \det(S^{-1}AS)$

$= \det(S^{-1})\det(A)\det(S)$

$= \dfrac{1}{\det(S)} \det(A)\det(S)$

$= \det(A)$

对于 [redacted] $n\times n$ 矩阵 A, B, C 有 $C = AB$

如果矩阵 A 或 B 是奇异的，则有 $\det(A) = 0$ 或 $\det(B) = 0$

于是 $\det(C) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$

则有矩阵 C 也是奇异的

Linear Algebra - P42

对于 $n\times n$ 矩阵 A 和标量 λ，有 $\det(A-\lambda I)=0$

当且仅当 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ 对于某个 $\vec{x}\neq\vec{0}$ 成立

证明过程有，当 $\det(A-\lambda I)=0$ 时，矩阵 $A-\lambda I$ 是奇异的

于是线性方程组 $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$ 有非平凡解

即存在非零向量 $\vec{x}$，使得 $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$，即 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$

当 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ 对于某个 $\vec{x}\neq\vec{0}$ 成立时

则线性方程组 $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$ 有非平凡解

于是矩阵 $A-\lambda I$ 是奇异的，即 $\det(A-\lambda I)=0$

对于 n 维向量 $\vec{x},\vec{y}\in R^n$，其中 $n>1$，则对于 $n\times n$ 矩阵 $A=\vec{x}\vec{y}^T$，则有 $\det(A)=0$

证明过程有，令 $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$

则矩阵 $A=\vec{x}\vec{y}^T=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ y_1\vec{x} & y_2\vec{x} & \cdots & y_n\vec{x} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

如果 $y_1=0$，则矩阵A的第一列为 $\vec{0}$，即有 $\det(A)=0$

如果 $y_1\neq 0$，则将矩阵A的第一列的 $-\frac{y_2}{y_1}$ 倍加到第二列

于是有矩阵A的第二列为 $\vec{0}$，即有 $\det(A)=0$

标量 (scalar)，通常指实数，在某些情形中也用于指复数

实向量空间 (real vector space)，表示标量集合，即实数集合

向量空间 (vector space)，令集合 $V=R^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 实数矩阵的集合

则集合V连同加法与标量乘法运算并满足公理 称为向量空间

封闭性：对于任意 $\vec{x}\in V$ 和标量 α，则 $\alpha\vec{x}\in V$

对于任意 $\vec{x},\vec{y}\in V$，则 $\vec{x}+\vec{y}\in V$

结合律：对于任意 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$，有 $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$

交换律：对于任意 $\vec{x},\vec{y}\in V$，有 $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

单位元：存在 $\vec{0}\in V$ 和标量1，对于任意 $\vec{x}\in V$，有 $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$，$1\cdot\vec{x}=\vec{x}$

加法逆元：对于任意 $\vec{x}\in V$，存在 $-\vec{x}\in V$，有 $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$

结合律：对于任意 $\vec{x}\in V$ 和标量 α,β，有 $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$

分配律：对于任意 $\vec{x},\vec{y}\in V$ 和标量 α,β

有 $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

$(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

注意向量空间的标量乘法运算不保证有标量乘法逆元

Linear Algebra - P43

向量空间 考虑对于矩阵集合$R^{m\times n}$连同矩阵加法和标量乘法，其中$m,n\in N^+$

封闭性：对于任意$m\times n$实数矩阵$A=(a_{ij})$，可知$A\in R^{m\times n}$，对有标量α

则有标量乘法 $\alpha A=(\alpha a_{ij})$，可知αA也是$m\times n$矩阵

且对于任意$1\le i\le m$和$1\le j\le n$，$\alpha a_{ij}\in R$

于是可知 $\alpha A\in R^{m\times n}$

对于任意$m\times n$实数矩阵$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，可知$A,B\in R^{m\times n}$

则有矩阵加法 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$，可知$A+B$也是$m\times n$矩阵

且对于任意$1\le i\le m$，$1\le j\le n$，$a_{ij}+b_{ij}\in R$

于是可知 $A+B\in R^{m\times n}$

交换律：对于任意$m\times n$实数矩阵$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，可知$A,B\in R^{m\times n}$

又有对任意$1\le i\le m, 1\le j\le n$，$a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$

于是有 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=B+A$

结合律：对于任意$m\times n$实数矩阵$A,B,C\in R^{m\times n}$，$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$C=(c_{ij})$

对于任意$1\le i\le m$，$1\le j\le n$，有$a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$

于是有 $A+(B+C)=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})=(A+B)+C$

对于任意$m\times n$实数矩阵$A\in R^{m\times n}$，有$A=(a_{ij})$，以及标量α,β

对任意$1\le i\le m$，$1\le j\le n$，有$(\alpha\beta)a_{ij}=\alpha(\beta a_{ij})$

于是有$(\alpha\beta)A=((\alpha\beta)a_{ij})=(\alpha(\beta a_{ij}))=\alpha(\beta A)$

分配率：对于任意$m\times n$实数矩阵$A,B\in R^{m\times n}$，$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，以及标量α

对任意$1\le i\le m$，$1\le j\le n$，有$\alpha(a_{ij}+b_{ij})=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}$

于是有$\alpha(A+B)=(\alpha(a_{ij}+b_{ij}))=(\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij})=\alpha A+\alpha B$

对于任意$m\times n$实数矩阵$A\in R^{m\times n}$，$A=(a_{ij})$，以及标量α,β

对任意$1\le i\le m$，$1\le j\le n$，有$(\alpha+\beta)a_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}$

于是有$(\alpha+\beta)A=((\alpha+\beta)a_{ij})=(\alpha a_{ij}+\beta a_{ij})=\alpha A+\beta A$

单位元：对于任意$m\times n$实数矩阵$A\in R^{m\times n}$，$A=(a_{ij})$

有$m\times n$全零矩阵$O\in R^{m\times n}$，其中所有元素均为0

则有 $A+O=(a_{ij}+0)=(a_{ij})=A$

对于任意$m\times n$实数矩阵$A\in R^{m\times n}$，$A=(a_{ij})$

存在标量$1\in R$，

则有 $1\cdot A=(1\cdot a_{ij})=(a_{ij})=A$

加法逆元：对于任意$m\times n$实数矩阵$A\in R^{m\times n}$，$A=(a_{ij})$

则存在$m\times n$实数矩阵$(-A)\in R^{m\times n}$，有$(-A)=(-a_{ij})$

于是有 $A+(-A)=(a_{ij}+(-a_{ij}))=(0)=O$

Linear Algebra - P44

向量空间

对于实数 a, b，令 $C[a,b]$ 表示所有定义域为闭区间 $[a,b]$ 的实值连续函数，

即有函数集合 $C[a,b] = \{ f(x) \mid f: [a,b] \to R \}$

封闭性：对于任意实值连续函数 $f(x) \in C[a,b]$，以及实数 α

则有函数标量乘法 $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

对于任意 $x \in [a,b]$，$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in R$，可知 $(\alpha f)(x) \in C[a,b]$

对于任意实值连续函数 $f(x), g(x) \in C[a,b]$，

则有函数加法 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

对于任意 $x \in [a,b]$，$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in R$，可知 $(f+g)(x) \in C[a,b]$

交换律：对于任意实值连续函数 $f(x), g(x) \in C[a,b]$

则有 $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

对于任意 $x \in [a,b]$ 成立

结合律：对于任意实值连续函数 $f(x), g(x), h(x) \in C[a,b]$

则对于任意 $x \in [a,b]$

$[f+(g+h)](x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x)$

$= (f+g)(x) + h(x) = [(f+g)+h](x)$

对于任意实值连续函数 $f(x) \in C[a,b]$，以及实数 α, β

$[\alpha(\beta f)](x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha\beta f(x) = [(\alpha\beta) f](x)$

对于任意 $x \in [a,b]$ 成立

分配律：对于任意实值连续函数 $f(x), g(x) \in C[a,b]$，以及实数 α

$[\alpha(f+g)](x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha[f(x) + g(x)] = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$

对于任意 $x \in [a,b]$ 成立

对于任意实值连续函数 $f(x) \in C[a,b]$，以及实数 α, β

$[(\alpha+\beta) f](x) = (\alpha+\beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$

对于任意 $x \in [a,b]$ 成立

单位元：对于任意实值连续函数 $f(x) \in C[a,b]$，

有实值连续函数 $z(x) \in C[a,b]$，对于任意 $x \in [a,b]$，$z(x) = 0$

则对任意 $x \in [a,b]$，$(f+z)(x) = f(x) + z(x) = f(x) + 0 = f(x)$

对于任意实值连续函数 $f(x) \in C[a,b]$，有实数 $1 \in R$

则对任意 $x \in [a,b]$，$(1f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$

加法逆元：对于任意实值连续函数 $f(x) \in C[a,b]$

存在实值连续函数 $(-f)(x)$，对于任意 $x \in [a,b]$，$(-f)(x) = -f(x)$

则对于任意 $x \in [a,b]$，$[f + (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + [-f(x)]$

$= 0 = z(x)$

Linear Algebra - P45

向量空间

令P_n表示次数小于n的所有实系数多项式的集合，其中$n \in N^+$

即有 $P_n = \{P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in R\}$

则定义标量乘法为 $(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$，其中$p(x)$为多项式，$\alpha$为标量

多项式加法为 $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$，其中$p(x), q(x)$为多项式

封闭性：对于任意多项式 $p(x) = a_0x^0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$，可知$p(x) \in P_n$，又有标量$\alpha$

则有 $(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = \alpha(a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$

$= \alpha a_0x^0 + \alpha a_1x^1 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1}$

于是有 $(\alpha p)(x) \in P_n$，由于$\alpha a_0, \alpha a_1, \cdots, \alpha a_{n-1} \in R$

对于任意多项式 $p(x) = a_0x^0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$，$q(x) = b_0x^0 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$，可知$p(x), q(x) \in P_n$

则有 $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0x^0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + (b_0x^0 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1})$

$= (a_0+b_0)x^0 + (a_1+b_1)x^1 + \cdots + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$

又$a_0+b_0, a_1+b_1, \cdots, a_{n-1}+b_{n-1} \in R$，于是有$(p+q)(x) \in P_n$

交换律：对于任意多项式$p(x) = a_0x^0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$，$q(x) = b_0x^0 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$，可知$p(x), q(x) \in P_n$

则有 $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0+b_0)x^0 + (a_1+b_1)x^1 + \cdots + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$

$= (b_0+a_0)x^0 + (b_1+a_1)x^1 + \cdots + (b_{n-1}+a_{n-1})x^{n-1}$

$= q(x) + p(x) = (q+p)(x)$

结合律：对于任意多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i$，$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_ix^i$，$r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_ix^i$，可知$p(x), q(x)$, $r(x) \in P_n$

则有 $[(p+q)+r](x) = (p+q)(x) + r(x)$

$= [(a_0+b_0)+c_0]x^0 + [(a_1+b_1)+c_1]x^1 + \cdots + [(a_{n-1}+b_{n-1})+c_{n-1}]x^{n-1}$

$= [a_0+(b_0+c_0)]x^0 + [a_1+(b_1+c_1)]x^1 + \cdots + [a_{n-1}+(b_{n-1}+c_{n-1})]x^{n-1}$

$= p(x) + (q+r)(x) = [p+(q+r)](x)$

对于任意多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i$，可知$p(x) \in P_n$，以及标量$\alpha, \beta$

则有 $[(\alpha\beta)p](x) = (\alpha\beta)a_0x^0 + (\alpha\beta)a_1x^1 + \cdots + (\alpha\beta)a_{n-1}x^{n-1}$

$= \alpha(\beta a_0)x^0 + \alpha(\beta a_1)x^1 + \cdots + \alpha(\beta a_{n-1})x^{n-1}$

$= \alpha(\beta p)(x) = [\alpha(\beta p)](x)$

分配律：对于任意多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i$，$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_ix^i$，可知$p(x), q(x) \in P_n$，以及标量$\alpha$

则有 $[\alpha(p+q)](x) = \alpha(p+q)(x) = \alpha(a_0+b_0)x^0 + \alpha(a_1+b_1)x^1 + \cdots + \alpha(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$

$= (\alpha a_0 + \alpha b_0)x^0 + (\alpha a_1 + \alpha b_1)x^1 + \cdots + (\alpha a_{n-1} + \alpha b_{n-1})x^{n-1}$

$= (\alpha p)(x) + (\alpha q)(x) = [(\alpha p) + (\alpha q)](x)$

对于任意多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i$，可知$p(x) \in P_n$，以及标量$\alpha, \beta$

则有 $[(\alpha+\beta)p](x) = (\alpha+\beta)p(x) = (\alpha+\beta)a_0x^0 + (\alpha+\beta)a_1x^1 + \cdots + (\alpha+\beta)a_{n-1}x^{n-1}$

$= (\alpha a_0 + \beta a_0)x^0 + (\alpha a_1 + \beta a_1)x^1 + \cdots + (\alpha a_{n-1} + \beta a_{n-1})x^{n-1}$

$= (\alpha p)(x) + (\beta p)(x) = [(\alpha p) + (\beta p)](x)$

Linear Algebra - P46

向量空间

令P_n表示次数小于n的所有实系数多项式的集合，并有标量乘法和多项式加法，其中 $n\in N^+$

单位元：对于任意多项式 $p(x)=a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，可知 $p(x)\in P_n$

可知有多项式 $z(x)=0\cdot x^0+0\cdot x^1+\cdots+0\cdot x^{n-1}$，有 $z(x)\in P_n$

则有 $(p+z)(x)=(a_0+0)x^0+(a_1+0)x^1+\cdots+(a_{n-1}+0)x^{n-1}$

$=a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}=p(x)$

对于任意多项式 $p(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$，可知 $p(x)\in P_n$，有标量 $1\in R$

则有 $(1\cdot p)(x)=(1\cdot a_0)x^0+(1\cdot a_1)x^1+\cdots+(1\cdot a_{n-1})x^{n-1}$

$=a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}=p(x)$

加法逆元：对于任意多项式 $p(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$，可知 $p(x)\in P_n$

则有多项式 $(-p)(x)=\sum_{i=0}^{n-1}(-a_i)x^i$，可知 $(-p)(x)\in P_n$

有 $[p+(-p)](x)=[a_0+(-a_0)]x^0+[a_1+(-a_1)]x^1+\cdots+[a_{n-1}+(-a_{n-1})]x^{n-1}$

$=0\cdot x^0+0\cdot x^1+\cdots+0\cdot x^{n-1}=z(x)$

对于正实数集合 R^+，定义标量乘法运算 $\circ$ 和加法运算 $\oplus$

对于任意 $x\in R^+$ 和标量 $\alpha\in R$，有 $\alpha\circ x=x^\alpha$

对于任意 $x,y\in R^+$，有 $x\oplus y=x\cdot y$

封闭性：对于任意正实数 $x\in R^+$ 和标量 $\alpha\in R$

于是可知 $\alpha\circ x=x^\alpha\in R^+$

对于任意正实数 $x,y\in R^+$

于是可知 $x\oplus y=x\cdot y\in R^+$

交换律：对于任意正实数 $x,y\in R^+$

有 $x\oplus y=x\cdot y=y\cdot x=y\oplus x$

结合律：对于任意正实数 $x,y,z\in R^+$

有 $x\oplus(y\oplus z)=x\oplus(y\cdot z)=x\cdot(y\cdot z)$

$=(x\cdot y)\cdot z=(x\oplus y)\oplus z$

对于任意正实数 $x\in R^+$，以及标量 $\alpha,\beta\in R$

有 $(\alpha\beta)\circ x=x^{\alpha\beta}=(x^\beta)^\alpha=(\beta\circ x)^\alpha=\alpha\circ(\beta\circ x)$

分配律：对于任意正实数 $x,y\in R^+$，以及标量 $\alpha\in R$

有 $\alpha\circ(x\oplus y)=\alpha\circ(x\cdot y)=(x\cdot y)^\alpha$

$=x^\alpha\cdot y^\alpha=(\alpha\circ x)\cdot(\alpha\circ y)=(\alpha\circ x)\oplus(\alpha\circ y)$

对于任意正实数 $x\in R^+$，以及标量 $\alpha,\beta\in R$

有 $(\alpha+\beta)\circ x=x^{\alpha+\beta}=x^\alpha\cdot x^\beta=(\alpha\circ x)\cdot(\beta\circ x)$

$=(\alpha\circ x)\oplus(\beta\circ x)$

Linear Algebra - P47

向量空间

对于正实数集合 R^+，并有标量乘法运算 $\circ$ 和加法运算 $\oplus$

单位元：对于任意正实数 $x \in R^+$，存在正实数 $1 \in R^+$

则有 $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$

对于任意正实数 $x \in R^+$，存在标量 $1 \in R$

则有 $1 \circ x = x^1 = x$

加法逆元：对于任意正实数 $x \in R^+$，存在正实数 $\frac{1}{x} \in R^+$

则有 $x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$

考虑对于所有实数无限序列的集合 S，定义标量乘法运算和无限序列加法

对于任意实数无限序列 $\{a_n\}$，以及标量 $\alpha \in R$，有 $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$

对于任意实数无限序列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in S$，有 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$

封闭性：对于任意实数无限序列 $\{a_n\} \in S$，以及标量 $\alpha \in R$

有标量乘法 $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$

可知对于序列中的任意元素 a_n，有 $\alpha a_n \in R$

于是可知 $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\} \in S$

对于任意实数无限序列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in S$，

有无限序列加法 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$

可知对于序列中的任意对应元素 a_n, b_n 有 $a_n + b_n \in R$

于是可知 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \in S$

交换律：对于任意实数无限序列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in S$

对于序列中的任意对应元素 a_n, b_n，有 $a_n + b_n = b_n + a_n$

于是有 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} = \{b_n + a_n\} = \{b_n\} + \{a_n\}$

结合律：对于任意实数无限序列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in S$

对于序列中的任意对应元素 a_n, b_n, c_n，有 $a_n + (b_n + c_n) = (a_n + b_n) + c_n$

于是有 $\{a_n\} + (\{b_n\} + \{c_n\}) = \{a_n + (b_n + c_n)\}$

$= \{(a_n + b_n) + c_n\} = (\{a_n\} + \{b_n\}) + \{c_n\}$

对于任意实数无限序列 $\{a_n\} \in S$，以及标量 $\alpha, \beta \in R$

对于序列中的任意元素 $a_n \in \{a_n\}$

有 $(\alpha\beta) a_n = \alpha\beta a_n = \alpha(\beta a_n)$

于是有 $(\alpha\beta)\{a_n\} = \{(\alpha\beta) a_n\} = \{\alpha(\beta a_n)\}$

$= \alpha\{\beta a_n\} = \alpha(\beta\{a_n\})$

Linear Algebra - P48

向量空间 对于所有实数无限序列的集合S，以及定义的标量乘法和无限序列加法

分配律：对于任意实数无限序列 $\{a_n\},\{b_n\}\in S$，以及标量 $\alpha\in R$

则对于序列中的任意对应元素 $a_n\in\{a_n\}$，$b_n\in\{b_n\}$

有 $\alpha(a_n+b_n)=\alpha a_n+\alpha b_n$

于是有 $\alpha(\{a_n\}+\{b_n\})=\alpha\{a_n+b_n\}=\{\alpha(a_n+b_n)\}$

$=\{\alpha a_n+\alpha b_n\}=\{\alpha a_n\}+\{\alpha b_n\}=\alpha\{a_n\}+\alpha\{b_n\}$

对于任意实数无限序列 $\{a_n\}\in S$，以及标量 $\alpha,\beta\in R$

则对于序列中的任意元素 $a_n\in\{a_n\}$，有 $(\alpha+\beta)a_n=\alpha a_n+\beta a_n$

于是有 $(\alpha+\beta)\{a_n\}=\{(\alpha+\beta)a_n\}=\{\alpha a_n+\beta a_n\}$

$=\{\alpha a_n\}+\{\beta a_n\}=\alpha\{a_n\}+\beta\{a_n\}$

单位元：对于任意实数无限序列 $\{a_n\}\in S$，存在标量 $1\in R$

使得对于序列中的任意元素 $a_n\in\{a_n\}$，有 $1\cdot a_n=a_n$

于是有 $1\cdot\{a_n\}=\{1\cdot a_n\}=\{a_n\}$

对于任意实数无限序列 $\{a_n\}\in S$，存在实数无限序列 $\{z_n\}\in S$

对于序列 $\{z_n\}$ 中的任意元素，均有 $z_n=0$

于是有 $\{a_n\}+\{z_n\}=\{a_n+z_n\}=\{a_n+0\}=\{a_n\}$

加法逆元：对于任意实数无限序列 $\{a_n\}\in S$，

对于序列中的任意元素 $a_n\in\{a_n\}$，存在实数 $-a_n\in R$，使得 $a_n+(-a_n)=0$

则构造实数无限序列 $\{-a_n\}$，其中每个元素对应于 a_n 的加法逆元

于是有 $\{a_n\}+\{-a_n\}=\{a_n+(-a_n)\}=\{0\}=\{z_n\}$

对于任意向量空间V，其加法单位元 $\vec{0}$ 是唯一的.

证明过程为，假设存在向量空间V及其定义的加法 $\oplus$，具有不相等的单位元 $\vec{0}$ 和 $\vec{0}'$

则有 $\vec{0}'=\vec{0}'\oplus\vec{0}=\vec{0}\oplus\vec{0}'=\vec{0}$，与 $\vec{0}$ 和 $\vec{0}'$ 不相等矛盾

所以对于任意向量空间V，其加法单位元 $\vec{0}$ 是唯一的

对于任意向量空间V，有加法单位元 $\vec{0}$，对于任意标量 $\alpha\in R$，有 $\alpha\vec{0}=\vec{0}$

证明过程为，$\alpha\vec{0}=\alpha(\vec{0}+\vec{0})=\alpha\vec{0}+\alpha\vec{0}$

分别对等式两侧加上 $\alpha\vec{0}$ 的加法逆元 $(-\alpha\vec{0})$

于是有 $\alpha\vec{0}+(-\alpha\vec{0})=\alpha\vec{0}+\alpha\vec{0}+(-\alpha\vec{0})$

则有 $\alpha\vec{0}=\vec{0}$

于是对于任意向量空间V，有加法单位元 $\vec{0}$，对于任意标量 $\alpha\in R$，有 $\alpha\vec{0}=\vec{0}$

Linear Algebra - P49

对于任意向量空间V，有加法单位元 $\vec{0}$，对于任意标量 $\alpha\in R$，$\vec{x}\in V$

如果有 $\alpha\vec{x}=\vec{0}$，则有 $\alpha=0$ 或 $\vec{x}=\vec{0}$

证明过程有，假设当 $\alpha\vec{x}=\vec{0}$ 时，有 $\alpha\neq 0$ 且 $\vec{x}\neq\vec{0}$

则取任意 $\vec{y}\in V$ 且 $\vec{y}\neq\vec{0}$，

$\alpha\vec{y}+\alpha\vec{x}=\alpha\vec{y}+\vec{0}=\alpha\vec{y}$

即 $\alpha(\vec{y}+\vec{x})=\alpha(\vec{y})$，则 $\vec{y}+\vec{x}=\vec{y}$

与 $\vec{x}\neq 0$ 相矛盾

再取任意 $\beta\in R$ 且 $\beta\neq 0$

$\beta\vec{x}+\alpha\vec{x}=\beta\vec{x}+\vec{0}=\beta\vec{x}$

即 $(\beta+\alpha)\vec{x}=\beta\vec{x}$，则 $\beta+\alpha=\beta$

与 $\alpha\neq 0$ 相矛盾

于是对于任意标量 $\alpha\in R$ 和 $\vec{x}\in V$，如果有 $\alpha\vec{x}=\vec{0}$，则有 $\alpha=0$ 或 $\vec{x}=\vec{0}$

对于任意向量空间V，且有任意元素 $\vec{x}\in V$，有 $0\vec{x}=\vec{0}$，其中 $\vec{0}$ 为V的加法单位元

证明过程有，$\vec{x}=1\cdot\vec{x}=(1+0)\cdot\vec{x}=1\cdot\vec{x}+0\cdot\vec{x}=\vec{x}+0\cdot\vec{x}$

于是有 $0\cdot\vec{x}=\vec{0}+0\cdot\vec{x}=-\vec{x}+\vec{x}+0\cdot\vec{x}=-\vec{x}+\vec{x}=\vec{0}$

对于任意向量空间V，有加法单位元 $\vec{0}$，对于任意元素 $\vec{x}\in V$，其加法逆元是唯一的

即对于任意元素 $\vec{x},\vec{y}\in V$，如果有 $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$，则有 $\vec{y}=-\vec{x}$

证明过程有，当 $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$ 时，令 $\vec{x}$ 有加法逆元 $-\vec{x}$

于是 $-\vec{x}=-\vec{x}+\vec{0}=-\vec{x}+(\vec{x}+\vec{y})$

$=(-\vec{x}+\vec{x})+\vec{y}=\vec{y}$

对于任意向量空间V，对于任意元素 $\vec{x}\in V$，有 $(-1)\vec{x}=-\vec{x}$

证明过程有，对于任意元素 $\vec{x}\in V$，有 $0\in R$，使得 $0\vec{x}=\vec{0}$

则 $\vec{0}=0\cdot\vec{x}=[1+(-1)]\vec{x}=\vec{x}+(-1)\vec{x}$

又 $\vec{0}=\vec{x}+(-\vec{x})$，

于是有对于任意元素 $\vec{x}$，有 $(-1)\vec{x}=-\vec{x}$

对于任意向量空间V，任意元素 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$，如果有 $\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z}$，则有 $\vec{y}=\vec{z}$

证明过程有，对于任意元素 $\vec{x}\in V$，有唯一的加法逆元 $-\vec{x}$

则有 $\vec{y}=\vec{0}+\vec{y}=[\vec{x}+(-\vec{x})]+\vec{y}=(-\vec{x})+(\vec{x}+\vec{y})$

$=(-\vec{x})+(\vec{x}+\vec{z})=[\vec{x}+(-\vec{x})]+\vec{z}=\vec{0}+\vec{z}=\vec{z}$

Linear Algebra - P50

对于n维向量集合 R^n 以及定义在其上的标量乘法与向量加法

次数小于n的实系数多项式集合 P_n 以及定义在其上的标量乘法与多项式加法

对于 $p(x)\in P_n$ 与 $\vec{a}\in R^n$ 可以建立一一对应关系

$$p(x)=a_0+a_1x^1+\cdots+a_{n-1}x^{n-1} \longleftrightarrow (a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T=\vec{a}$$

则对于任意 $p(x),q(x)\in P_n$, $\vec{a},\vec{b}\in R^n$

如果有一一对应关系 $p(x)\longleftrightarrow\vec{a}$, $q(x)\longleftrightarrow\vec{b}$

则有 对于任意标量 $\alpha\in R$, 有 $(\alpha p)(x)\longleftrightarrow\alpha\cdot\vec{a}$

且有 $(p+q)(x)\longleftrightarrow\vec{a}+\vec{b}$

证明过程有，对于任意实系数多项式 $p(x)=a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，则有 $p(x)\in P_n$

则对于任意标量 $\alpha\in R$，又有n维向量 $\vec{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T\in R^n$

可知有 $p(x)\longleftrightarrow\vec{a}$

于是有

$$\begin{aligned}(\alpha p)(x) &= \alpha p(x)=\alpha(a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})\\ &=\alpha a_0x^0+\alpha a_1x^1+\cdots+\alpha a_{n-1}x^{n-1}\\ &\longleftrightarrow(\alpha a_0,\alpha a_1,\cdots,\alpha a_{n-1})^T\\ &=\alpha(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T=\alpha\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

再有任意实系数多项式 $q(x)=b_0x^0+b_1x^1+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$，则有 $q(x)\in P_n$

又有n维向量 $\vec{b}=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})^T\in R^n$，可知有 $q(x)\longleftrightarrow\vec{b}$

于是有

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x)+q(x)\\ &=(a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})\\ &\quad+(b_0x^0+b_1x^1+\cdots+b_{n-1}x^{n-1})\\ &=(a_0+b_0)x^0+(a_1+b_1)x^1+\cdots+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}\\ &\longleftrightarrow(a_0+b_0,a_1+b_1,\cdots,a_{n-1}+b_{n-1})^T\\ &=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T+(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})^T\\ &=\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

更一般地有，对于向量空间 V_1 以及定义在 V_1 上的标量乘法 $\cdot_1$ 和加法 $+_1$

和向量空间 V_2 以及定义在 V_2 上的标量乘法 $\cdot_2$ 和加法 $+_2$

如果存在一一对应的函数 $f: V_1\longrightarrow V_2$

使得对于任意向量空间 V_1 中的元素 $x,y\in V_1$，

有向量空间 V_2 中 x,y 对应的元素 $a=f(x)$, $b=f(y)\in V_2$

并且满足 对于任意标量 $\alpha\in R$, 有 $f(\alpha\cdot_1 x)=\alpha\cdot_2 f(x)=\alpha\cdot_2 a$

且 $f(x+_1 y)=f(x)+_2 f(y)=a+_2 b$

则称向量空间 V_1 与 V_2 是同构的(isomorphic)

Linear Algebra - P51

子空间 (subspace)，对于向量空间V以及定义在其上的标量乘法与加法

如果对于向量空间V的非空子集 $S \subseteq V$，满足

① 对任意标量 $\alpha \in R$，以及任意元素 $x \in S$，有 $\alpha \cdot x \in S$

② 对任意元素 $x, y \in S$，有 $x + y \in S$

则称向量空间S是向量空间V的子空间

对于向量空间V的非空子集S，对S中元素的标量乘法与加法结果必定是向量空间V中的元素

于是如果以S作为全集的系统构成向量空间

则S必须对标量乘法和加法运算封闭

条件①说明非空子集S在标量乘法意义下是封闭的

即S中任意元素乘以一个标量后的结果仍是S中的元素

条件②说明非空子集S在加法意义下是封闭的

即S中任意两个元素的加法运算结果仍是S中的元素

于是向量空间V的子空间即是在V上的运算意义下封闭的子集

注意由子空间 $S \subseteq V$，且S在定义在V上的标量乘法和加法运算意义下封闭

则交换律：对于任意 $x, y \in S$，有 $x + y = y + x$

结合律：对于任意 $x, y, z \in S$，有 $x + (y + z) = (x + y) + z$

对于任意 $x \in S$ 以及标量 $\alpha, \beta \in R$，有 $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

分配律：对于任意 $x, y \in S$ 以及标量 $\alpha \in R$，有 $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

对于任意 $x \in S$ 以及标量 $\alpha, \beta \in R$，有 $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

单位元：对于任意 $x \in S$，存在标量 $1 \in R$，有 $1 \cdot x = x$

由于子空间 $S \subseteq V$，则平凡地成立

而对于加法单位元：对于向量空间V和定义的加法运算，存在加法单位元 $\vec{0} \in V$

又对于任意 $x \in S$，有 $x \in V$

则有 $0 \cdot x = \vec{0}$

又根据条件①，可知 $\vec{0} \in S$，于是 $\vec{0}$ 也是子空间S的加法单位元

加法逆元：对于向量空间V的子空间S，有加法单位元 $\vec{0} \in S$

对于任意 $x \in S$，则存在 $(-x) = (-1) \cdot x \in S$

且有 $x + (-x) = x + (-1) \cdot x = 0 \cdot x = \vec{0}$

于是以子空间S为全集的数学系统连同从向量空间V中继承的两个运算满足向量空间的所有条件

即向量空间的任何子空间仍是向量空间

Linear Algebra - P52

子空间

对于向量空间V以及定义在其上的标量乘法和加法

可知平凡地有向量空间V是其自身的子空间

对于向量空间V以及定义的加法，有加法单位元 $\vec{0} \in V$

则考虑仅包含加法单位元 $\vec{0}$ 的集合 $S = \{\vec{0}\}$，可知 $S \subseteq V$

令集合S继承定义在向量空间V上的标量乘法和加法

封闭性：对于任意标量 $\alpha \in R$，以及元素 $\vec{0} \in S$

则有 $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0} \in S$

对于任意元素 $x \in S$ 和 $y \in S$，

则有 $x + y = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in S$

于是可知 $\{\vec{0}\}$ 对于定义在向量空间V上的标量乘法和加法都是封闭的

即 $S = \{\vec{0}\}$ 是向量空间V的子空间

称 $\{\vec{0}\}$ 为向量空间V的零子空间(zero subspace)

对于任意不同于 $\{\vec{0}\}$ 和V的向量空间V的子空间

称为向量空间V的真子空间(proper subspace)

注意到为了证明向量空间V的子集S构成一个子空间

需要证明子集S非空且对于定义在向量空间V上的标量乘法和加法都是封闭的

由于对于任意的向量空间V的子空间V'，其加法单位元 $\vec{0} \in V'$

于是可以通过证明 $\vec{0} \in S$，蕴含子集S是非空子集

对于向量空间 R' 以及定义在其上的标量乘法和标量加法

如果子集 $S \subseteq R'$ 是向量空间 R' 的子空间，则或者有 $S = \{0\}$，或者有 $S = R'$

证明过程有，首先对于只包含0的集合 $S = \{0\} \subseteq R'$

且对于任意标量 $\alpha \in R$，以及元素 $0 \in S$

有 $\alpha \cdot 0 = 0 \in S$

对于任意元素 $x, y \in S$，则有 $x + y = 0 + 0 = 0 \in S$

于是可知 $\{0\}$ 为向量空间 R' 的子空间

假设子集S包含任意非零的元素 $a \in S$ 且 $a \neq 0$，并有 $a \in R'$

对于任意向量空间 R' 的元素 $b \in R'$

由于子空间S必定对于向量空间 R' 上的标量乘法封闭

则取标量 $\alpha = \frac{1}{a} \cdot b$，应有 $\alpha \cdot a = \frac{1}{a} \cdot b \cdot a = b \in S$

即有 $R' \subseteq S$

又子空间 $S \subseteq R'$，于是有 $S = R'$

即向量空间 R' 只有零子空间 $\{0\}$ 和子空间 R'，而不包含真子空间

Linear Algebra - P53

对于向量空间W以及定义在其上的标量乘法和加法

如果非空集合 U,V 均为向量空间 W 的子空间，则 $U\cap V$ 也是向量空间 W 的子空间

证明过程有，对于向量空间 W 以及定义在其上的加法，有加法单位元 $\vec{0}\in W$

又非空集合 U,V 均为向量空间 W 的子空间

则有 $\vec{0}\in U$ 且 $\vec{0}\in V$，即 $\vec{0}\in U\cap V$，

于是可知 $U\cap V$ 必定为非空集合

对于任意标量 $\alpha\in R$，以及元素 $\vec{x}\in U\cap V$，以及定义在 W 上的标量乘法

可知 $\vec{x}\in U \wedge \vec{x}\in V$，则有 $\alpha\cdot\vec{x}\in U$ 且 $\alpha\cdot\vec{x}\in V$

于是有 $\alpha\cdot\vec{x}\in U\cap V$

对于任意元素 $\vec{x},\vec{y}\in U\cap V$，则有 $\vec{x},\vec{y}\in U \wedge \vec{x},\vec{y}\in V$

对于定义在向量空间 W 上的加法，有 $\vec{x}+\vec{y}\in U$ 且 $\vec{x}+\vec{y}\in V$

于是有 $\vec{x}+\vec{y}\in U\cap V$

即非空集合 $U\cap V$ 对于定义在向量空间 W 上的标量乘法和加法都是封闭的

则有非空集合 $U\cap V$ 是向量空间 W 的子空间

对于向量空间 W 以及定义在其上的标量乘法和加法，以及 W 的子空间 U,V

如果有 $U+V=\{\vec{u}+\vec{v}\mid \vec{u}\in U, \vec{v}\in V\}$，则 $U+V$ 也是向量空间 W 的子空间

证明过程有，对于向量空间 W 以及定义在其上的加法，有加法单位元 $\vec{0}\in W$

则有 $\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}$，又由于 $\vec{0}\in U$ 且 $\vec{0}\in V$

于是根据定义有 $\vec{0}\in\{\vec{u}+\vec{v}\mid \vec{u}\in U, \vec{v}\in V\}$，即 $\vec{0}\in U+V$

即有 $U+V$ 必定为非空集合

对于任意标量 $\alpha\in R$，以及元素 $\vec{x}\in U+V$，以及定义在 W 上的标量乘法

可知存在 $\vec{u}\in U$，$\vec{v}\in V$，使得 $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$

则有 $\alpha\cdot\vec{x}=\alpha\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\cdot\vec{u}+\alpha\cdot\vec{v}$

又 $\alpha\cdot\vec{u}\in U$ 且 $\alpha\cdot\vec{v}\in V$

则根据定义有 $\alpha\cdot\vec{x}\in U+V$

对于任意元素 $\vec{x},\vec{y}\in U+V$，以及定义在向量空间 W 上的加法

可知存在 $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in U$，$\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$，使得 $\vec{x}=\vec{u}_1+\vec{v}_1$，$\vec{y}=\vec{u}_2+\vec{v}_2$

则有 $\vec{x}+\vec{y}=(\vec{u}_1+\vec{v}_1)+(\vec{u}_2+\vec{v}_2)$

$=(\vec{u}_1+\vec{u}_2)+(\vec{v}_1+\vec{v}_2)$

又 $\vec{u}_1+\vec{u}_2\in U$，$\vec{v}_1+\vec{v}_2\in V$

则根据定义有 $\vec{x}+\vec{y}\in U+V$

即非空集合 $U+V$ 对于定义在向量空间 W 上的标量乘法和加法都是封闭的

则有非空集合 $U+V$ 是向量空间 W 的子空间

Linear Algebra - P54

对于实数a.b，令$C[a.b]$表示所有定义域为闭区间$[a.b]$的实值连续函数

即有函数集合 $C[a.b] = \{f(x) \mid f:[a.b] \rightarrow R\}$

可知$C[a.b]$为向量空间，且有定义在$C[a.b]$上的标量乘法和函数加法

令$C^n[a.b]$表示定义在$[a.b]$上的n阶连续可导函数$f(x)$的集合，其中$n\in N^+$

则$C^n[a.b]$为$C[a.b]$的子空间

证明过程有，对于向量空间$C[a,b]$以及定义在其上的函数加法

有加法单位元 $z(x)=0$.

可知对于任意$n\in Z^+$，函数$z(x)$具有n阶导数 $z^{(n)}(x)=0$

则可知 $z(x)\in C^n[a,b]$，即集合$C^n[a,b]$非空

对于任意实值连续函数 $f(x)\in C^n[a,b]$，以及标量$\alpha\in R$

对于定义在$C[a.b]$上的标量乘法

有 $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$，

又$f(x)$具有n阶导数，则$(\alpha f)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x)$存在

则有$(\alpha f)(x) \in C^n[a,b]$

对于任意实值连续函数 $f(x), g(x)\in C^n[a,b]$，

对于定义在$C[a.b]$上的函数加法，有$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

又$f(x), g(x)$均具有n阶导数

则$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$存在

则有$(f+g)(x)\in C^n[a,b]$

即非空集合$C^n[a,b]$对于定义在向量空间$C[a,b]$上的标量乘法和函数加法封闭

则非空集合$C^n[a,b]$是向量空间$C[a,b]$的子空间

对于向量空间$C[a,b]$表示为$C^0[a,b]$，以及向量空间$C^n[a,b]$，其中$n\in N^+$

则对于任意正整数n，有$C^n[a,b]$是$C^{n-1}[a,b]$的真子空间

证明过程有，首先考虑$C^0[-1,1]$与$C^1[-1,1]$，取函数$f(x)=x$，$g(x)=|x|$

由于$f(x)$在$[-1,1]$上有导数$f'(x)=1$，且$f(x)\neq z(x)$

则是可知$f(x)\in C^1[-1,1]$，即$C^1[-1,1]$不是$C[-1,1]$的零子空间

由于$g(x)$在$x=0$处的导数不存在，而$g(x)\notin C^1[-1,1]$

又$g(x)\in C^0[-1,1]$，则$C^1[-1,1]$为$C^0[-1,1]$的真子空间

进一步地对于任意正整数n，考虑$C^n[-1,1]$和$C^{n-1}[-1,1]$

取函数 $f(x)=x^n$，$g(x)=x^{n-1}|x|$，有$f(x), g(x)\in C^{n-1}[-1,1]$

而类似地有$f(x)\in C^n[-1,1]$，$g(x)\notin C^{n-1}[-1,1]$

则对于任意正整数n，有$C^n[-1,1]$是$C^{n-1}[-1,1]$的真子空间

则可以进一步扩展到，对于任意实数a.b，有$C^n[a.b]$是$C^{n-1}[a.b]$的真子空间