Linear Algebra - P1

线性方程组 (linear equations)，对于实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$，变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

有方程 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

称为含有n个未知量的线性方程

扩展到实数 a_{ij}, b_i，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$

则有方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

称为含有m个方程和n个未知量的线性方程组

如果有序n元组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足 $m\times n$ 方程组中的所有方程

则称其为 $m\times n$ 方程组的解 (solution)

线性方程组的所有解的集合称为方程组的解集 (solution set)

$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \subseteq R^n \mid (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是方程组的解$\}$

如果方程组无解，则称方程组是不相容的 (inconsistent)

如果线性方程组至少存在一个解，则称方程组是相容的 (consistent)

于是有 方程组是相容的 $\longleftrightarrow$ 方程组的解集非空

等价方程组 (equivalent system)，对于两个含有相同变量的方程组

如果两个方程组具有相同的解集

则称两个方程组是等价的 (equivalent)

可以通过三种基本运算得到与给定方程组等价的新方程组

1. 交换任意两个方程的顺序
2. 任一方程的两侧同时乘以一个非零实数
3. 将任一方程的倍数加到另一个方程上

严格三角形 (strict triangular form)，对于 $n\times n$ 线性方程组，称为严格三角形的

如果第k个方程的前k-1个系数为0，且 x_k 的系数不为0，$k=1,2,\cdots,n$

如

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

其中 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为非零实数

Linear Algebra - P2

回代法 (back substitution)，对于任意包含n个方程和n个未知量(n×n)的方程组

如果n×n方程组是严格三角形方程组

则通过第n个方程得到未知量 x_n 的解

将其代入第n-1个方程得到未知量 x_{n-1} 的解

…

将 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2$ 代入第1个方程得到未知量 x_1 的解

如
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &[\,4x_4 = 4 &&\longrightarrow x_4 = 1 \\ &[\,4x_3 + 3\times 1 = 3 &&\longrightarrow x_3 = 0 \\ &[\,x_2 - 2\times 0 + 3\times 1 = 2 &&\longrightarrow x_2 = -1 \\ &[\,2x_1 - (-1) + 3\times 0 - 2\times 1 = 1 &&\longrightarrow x_1 = 1 \end{aligned}$$

对于给定的n×n线性方程组，

有唯一解当且仅当可以将其简化为严格三角形方程组

所以可以尽可能通过运算1和3转化为等价的严格三角形方程组

再使用回代法进行求解

矩阵 (matrix)，矩形的数字阵列，包含m行与n列的矩阵称为m×n矩阵

行数m与列数n相等的矩阵称为方阵(square matrix)

系数矩阵 (coefficient matrix)，对于m×n的方程组，可以生成相关联的m×n矩阵

使得矩阵中第i行第j列的元素等于方程组中第i个方程中未知量 x_j 的系数

其中 $i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$

增广矩阵 (augmented matrix)，对于m×n的矩阵A与m×r矩阵B

可以通过将矩阵B附加到A的右侧以形成一个m×(n+r)的新矩阵

称为增广矩阵，记为(A|B)

如 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{bmatrix}$

则有 $(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{array}\right]$

对于系数矩阵，可以在右侧添加一列方程组的右端项

从而获得一个新的m×(n+1)增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

Linear Algebra - P3

矩阵行运算 与等价方程组运算类似地定义矩阵的初等行运算

1. 交换两行
2. 以非零实数乘以某一行的每个元素
3. 将某行替换为其与其他行的倍数的和

主行 (pivotal row),通常地称矩阵的第一行为主行

主元 (pivot),矩阵主行中第一个非零元素称为主元

将系数增广矩阵

一般地,对于$n\times n$的线性方程组,以如下步骤循环尝试转换为等价的严格三角形式

for $k := 1$ to $n-1$

  在矩阵的第k行至第n行中选择第k列元素不为0的一行为主行

  将主行与当前的第k行交换

  第k+1行至第n行减去主行的倍数,使得第k列元素为0

如果在循环终止时矩阵转换为严格三角形式

则可以进一步使用回代法得到$n\times n$线性方程组的唯一解

如方程组
$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$
对应系数增广矩阵
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

于是有
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -40 \end{array}\right]$$

此时已转换为严格三角形式
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

则有方程组解为 $x_1 = 4$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$

注意化简过程可能得到阶梯形的增广矩阵,而非严格三角形式

如
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Linear Algebra - P4

对于由系数[redacted]增广矩阵化简得到的非严格三角形矩阵

增广矩阵每一行第一个非零元素对应的变量称为首变量(lead variable)

而化简过程中跳过的列对应的变量称为自由变量(free variable)

行阶梯形矩阵(row echelon form),对于[redacted] $m \times n$ 矩阵,满足

1. 每一非零行中的第一个非零元为1
2. 第k行不全为0时,第k+1行首变量之前0的个数多于第k行首变量之前的0的个数
3. 所有元素均为0的行必须在不全为0的行之后

高斯消元法(Gaussian elimination),利用矩阵初等行运算

将线性方程组的增广矩阵化为行阶梯形矩阵的过程

如果方程组不相容,则必定包含如下形式的行

$[0 \; 0 \; \cdots \; 0 \,|\, c]$,其中c为非零常数

否则方程组必定是相容的,即方程组解集非空

如果此时非零行构成严格三角形的子矩阵

则方程组有唯一解

对于包含m个方程和n个未知量的线性方程组

如果方程的个数多于未知量的个数,即 $m>n$

则称方程组为超定的(overdetermined)

超定方程组通常但不总是不相容的

如果方程的个数少于未知量的个数,即 $m<n$

则称方程组为亚定的(underdetermined)

亚定方程组可能是不相容的,但通常有无穷多组解

但是亚定方程组不可能有唯一解,如果相容

由于亚定方程组行阶梯形矩阵中只有 $r \le m$ 个非零行

则有r个首变量和 $n-r$ 个自由变量

而 $n-r \ge n-m > 0$,于是不可能有唯一解

亚定方程组

$$\begin{cases} -x_1+x_2-x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2-2x_3-x_4=0 \end{cases}$$

$\downarrow$

系数增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\downarrow$ 行阶梯形

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

行最简形 $\downarrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

解集 $\downarrow$

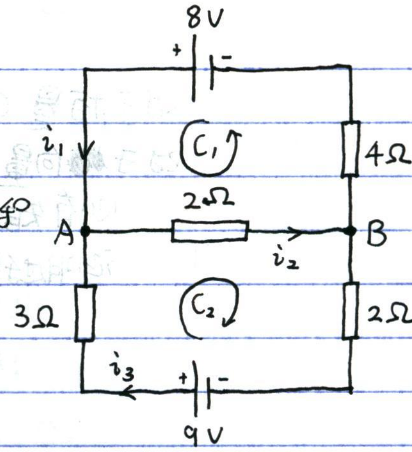
$\{(a,-a,a,a) \mid a \in R\}$

行最简形(reduced row echelon form),对于 $m \times n$ 矩阵,满足

1. 矩阵是行阶梯形的
2. 每一行的第一个非零元是该列唯一的非零元

通过基本行运算将矩阵化为行最简形的过程称为高斯-若尔当消元法(Gauss-Jordan reduction)

Linear Algebra - P5



基尔霍夫定律 (Kirchhoff's Law), 在电路分析中

1. 任一节点上流出电流的量等于流入电流的量
2. 任一回路上电压的代数和(升压)等于各元件压降的代数和

则可以通过以上规则对给定的电路进行分析

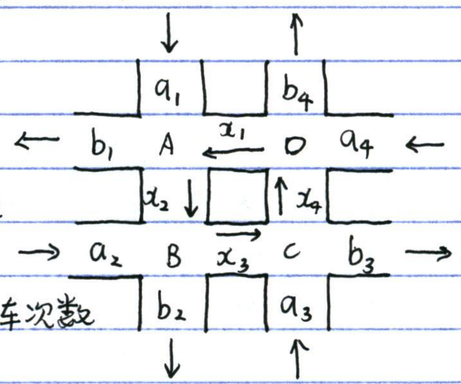
以各条通路上的电流为未知量构造线性方程组

再解方程组得到各分支电流

如
$$\begin{cases} A: i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ B: -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ C_1: 4i_1 + 2i_2 = 8 \\ C_2: 2i_2 + 5i_3 = 9 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -19 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

于是有 $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 1$



交通流量

假设城市的某个区域由四条单向车道交叉构成

其中 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ 为已知非负整数常数

x_1, x_2, x_3, x_4 为未知量

表示各个路段在交通高峰时段每小时通过该路段的车次数

则可以通过对路口 A, B, C, D 进行分析

由于进入该路口的车次数等于离开该路口的车次数

可以以此构造线性方程组，通过解方程组得到各段道路的车流量

$$\begin{cases} A: x_1 - x_2 = b_1 - a_1 \\ B: x_2 - x_3 = b_2 - a_2 \\ C: x_3 - x_4 = b_3 - a_3 \\ D: -x_1 + x_4 = b_4 - a_4 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & b_1 - a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b_2 - a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_3 - a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & b_4 - a_4 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & b_1 + b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & b_2 + b_3 - a_2 - a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_3 - a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \end{array}\right]$$

于是有解集 $\{(x + b_1 + b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3,\ x + b_2 + b_3 - a_2 - a_3,\ x + b_3 - a_3,\ x) \mid x \in N\}$

且方程组相容当且仅当 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0$

Linear Algebra - P6

齐次方程组 (homogeneous)，对于 $m\times n$ 的线性方程组，其中的右端常项全为0

注意齐次方程组总是相容的，只要令所有变量为0即可满足方程组

如果齐次方程组有唯一解，则必定是平凡解 $(0,0,\cdots,0)$

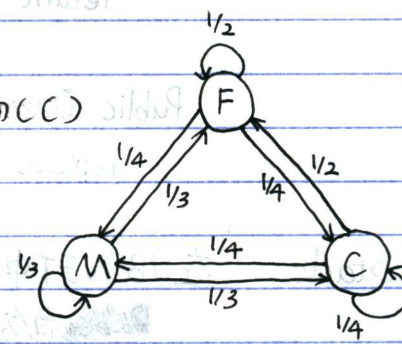
如果 $n>m$，则 $m\times n$ 的齐次线性方程组有非平凡解

齐次方程组总是相容的，其增广矩阵的行阶梯形最多有m个非零行

于是最多有m个首变量，又变量数 $n>m$，则必定存在自由变量

由于自由变量可取任意值，则任一组自由变量取值，均可得到方程组的一组解

列昂惕夫生产-消费模型，由经济学家列昂惕夫(Wassily Leontief)提出



假设在一个原始社会的部落中，成员有三种不同的分工

农业生产(F) / 工具和器皿的手工制作(M) / 缝制衣物(C)

假设部落中不存在货币制度，所有商品均进行实物交换

农民保留产品的 $1/2$，将 $1/4$ 给手工业者，$1/4$ 给制衣者

手工业者保留产品的 $1/3$，将 $1/3$ 给农民，$1/3$ 给制衣者

制衣者保留产品的 $1/4$，将 $1/2$ 给农民，$1/4$ 给手工业者

当部落规模扩大时，实物交易系统变得很复杂，因而决定使用货币系统

假设在这个经济体系中，没有资本的积累和债务，

且每一种产品的价格均可以反映实物交换系统中产品的价值

考虑如何定价以公平地体现当前的实物交换系统

令 x_1, x_2, x_3 分别表示农民，手工业者，制衣者所有产品的价值

如果实物交换系统公平，则有方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_2 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_3 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$ 于是有解集 $\{(5x,3x,3x) \mid x\in R^+\}$

矩阵　一般地，以 a_{ij} 表示 $m\times n$ 矩阵A中第i行第j列的元素，其中 $1\le i\le m$，$1\le j\le n$

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$，也简记矩阵A为 $A=(a_{ij})$

矩阵中的元素为标量(scalar)，通常为实数或复数

Linear Algebra - P7

向量 (vector)，在线性代数中将由实数组成的n元组称为向量

行向量(row vector)：将n元组表示为一个$1\times n$的矩阵

记为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

列向量(column vector)：将n元组表示为一个$n\times 1$的矩阵

记为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，而依据形状也可以记为 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

所有$n\times 1$的实矩阵构成的集合记为R^n

称为n维欧几里得空间(Euclidean n-space)

矩阵相等 对于$m\times n$的矩阵A和B，

如果对于任一i和j，均满足$a_{ij}=b_{ij}$，则称A和B是相等的(equal)

即有 $A_{m\times n}=B_{m\times n} \longleftrightarrow \forall_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n}\ a_{ij}=b_{ij}$

标量乘法 对于$m\times n$的矩阵A和标量$\alpha\in R$

有矩阵与标量乘积αA为$m\times n$矩阵，且有$\alpha A=[\alpha a_{ij}]$

矩阵加法 对于$m\times n$的矩阵A和B，记矩阵A与B的和(sum)为$A+B$

则矩阵$A+B$也是$m\times n$矩阵，且有$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$

类似地定义矩阵A与B的差$A-B$，则有矩阵$A-B$也是$m\times n$矩阵

且有$A-B = A+(-1)B = [a_{ij}+(-1)b_{ij}] = [a_{ij}-b_{ij}]$

零矩阵 (zero matrix)，对于$m\times n$的矩阵，其中元素全部为0，记为O

对于任意$m\times n$的矩阵A，有$A+O=O+A=A$

且存在唯一的加法逆元$-A$

使得有$A+(-A)=(-A)+A=O$

标量积 (scalar product)，对于$1\times n$的行向量$\vec{a}$和$n\times 1$的列向量$\vec{x}$，记标量积$\vec{a}\vec{x}$

则有$\vec{a}\vec{x} = a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$为一个标量

在$m\times n$的线性方程组的左侧，可以看作$m\times n$系数矩阵A与$n\times 1$矩阵$\vec{x}$的乘积

即 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{x} \\ \vec{a}_2\vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_m\vec{x} \end{bmatrix}$

Linear Algebra - P8

线性组合 (linear combination) 对于向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in R^m$，标量 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in R$

则称和式 $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_n\vec{a}_n$ 为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 的线性组合

线性组合的表示也用于定义矩阵与向量的乘积

即对于 $m \times n$ 矩阵 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$

n 维列向量 $\vec{x} \in R^n$，$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

则有 $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

相容性定理 对于 $m \times n$ 的线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ 是相容的

当且仅当向量 $\vec{b}$ 可以表示为矩阵 A 列向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 的一个线性组合

矩阵乘法，对于矩阵 A 与矩阵 B，其中矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数

则在矩阵 A 与矩阵 B 的乘积中，第 k 列由矩阵 B 的第 k 列求得

即有 $AB = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \cdots, A\vec{b}_r)$

而 AB 的 (i,j) 元素为列向量 $A\vec{b}_j$ 的第 i 个元素

由矩阵 A 的第 i 个行向量与矩阵 B 的第 j 个列向量的标量积得到

对于 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ik})$ 和 $n \times r$ 矩阵 $B = (b_{kj})$

则记 AB 为矩阵 A 与矩阵 B 的乘积，AB 为 $m \times r$ 矩阵

且有 $AB = (c_{ij}) = (\vec{a}_i^T \vec{b}_j) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj})$

符号规则 与基本代数运算类似，在没有括号注明时，矩阵乘法优先于加法(减法)运算

对于任意矩阵 A, B, C 和标量 α, β，假定矩阵大小符合运算定义

交换律：$A + B = B + A$

但是注意一般而言，矩阵乘法不满足交换律，即 $AB \neq BA$

结合律：$(A+B)+C = A+(B+C)$，$(AB)C = A(BC)$

$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

分配律：$A(B+C) = AB + AC$，$(A+B)C = AC + BC$

$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$，$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

Linear Algebra - P9

转置 (transpose)，对于 $m\times n$ 的矩阵 $A=(a_{ij})$，记矩阵A的转置为 A^T

A^T 为 $n\times m$ 矩阵，且有 $A^T=(a'_{ji})$，其中 $a'_{ji}=a_{ij}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$

即 A^T 的第j行第i列元素 等于 A的第i行第j列元素

对称 (symmetric)，对于 $n\times n$ 的矩阵A

如果有 $A^T=A$，则称矩阵A是对称的

另外如果有 $A^T=-A$，则称矩阵A是反对称的(antisymmetric)

对于矩阵加法，有 $(A+B)^T=A^T+B^T$　且有 $(A^T)^T=A$，$(\alpha A)^T=\alpha A^T$

矩阵乘法，有 $(AB)^T=B^TA^T$　其中 α 为任意标量

单位矩阵 (identity matrix)，对于 $n\times n$ 矩阵 $I=(\delta_{ij})$

如果有 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，其中 $i,j=1,2,\cdots,n$

则称矩阵I为单位矩阵

对于任意 $m\times n$ 矩阵 B，$n\times r$ 矩阵 C

都有 $BI=B$，$IC=C$

矩阵I 也可以写作 $I=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n)$

其中 $\vec{e}_1=(1,0,\cdots,0)$，$\vec{e}_2=(0,1,\cdots,0)$，…，$\vec{e}_n=(0,0,\cdots,1)$

列向量 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 为用于定义n维欧几里得坐标空间的标准向量

逆 (inverse)，对于 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$

如果存在 $n\times n$ 矩阵B，使得 $AB=BA=I$

则称矩阵B为矩阵A的乘法逆元(multiplicative inverse)

称矩阵A为非奇异的(nonsingular)或可逆的(invertible)

如果 $n\times n$ 矩阵B和C均为矩阵A的乘法逆元

则有 $B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$

于是 对于任意矩阵，至多只有一个乘法逆元

对于非奇异矩阵A，称其矩阵乘法逆元为矩阵的逆(inverse)，并记为 A^{-1}

如果对于 $n\times n$ 矩阵，不存在乘法逆元

则称矩阵为奇异的(singular)

特别地有，只有 $n\times n$ 矩阵(方阵)有乘法逆元

而对于非方阵的矩阵，不使用术语 奇异/非奇异

Linear

Algebra - P10

对于非奇异的n×n矩阵A，B.

则有 n×n 矩阵 AB也是非奇异的，且有 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

证明过程有，$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$

$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$

于是有 $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$

可以扩展为 对于非奇异的n×n矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_k$

则有矩阵链乘 $A_1A_2\cdots A_k$ 也是非奇异的

并有 $(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

对于n×n 矩阵A，向量 $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$

如果有 $A\vec{x} = A\vec{y}$ 且 $\vec{x} = \vec{y}$，则A必定是奇异的

证明过程为，假设A为非奇异矩阵，则存在矩阵A的逆 A^{-1}

则有 $A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}A\vec{y}$

即 $\vec{x} = \vec{y}$，与 $\vec{x} \neq \vec{y}$ 矛盾

于是可知 如果 $A\vec{x} = A\vec{y}$ 且 $\vec{x} = \vec{y}$，则矩阵A必定是奇异的

对于n×n 矩阵A，B，单位矩阵I

如果有 $AB = A$ 且 $B \neq I$，则矩阵A必定是奇异的

证明过程有，假设A为非奇异矩阵，则存在矩阵A的逆 A^{-1}

则有 $A^{-1}AB = A^{-1}A$

即 $B = I$，与 $B \neq I$ 矛盾

于是可知 如果 $AB = A$ 且 $B \neq I$，则矩阵A必定是奇异的

对于n×n的非奇异矩阵A，

矩阵A的逆 A^{-1} 也是非奇异矩阵 且有 $(A^{-1})^{-1} = A$

证明过程为，由于矩阵A为非奇异矩阵，则存在矩阵A的逆 A^{-1}

且对于矩阵 A^{-1}，有 $A^{-1}A = A^{-1}A = I$

于是矩阵 A^{-1} 也是非奇异矩阵

又矩阵至多只有一个逆，于是有 $(A^{-1})^{-1} = A$

Linear Algebra - P11

对于 $n\times n$ 非奇异矩阵 A，

矩阵 A 的转置 A^T 也是非奇异矩阵，且有 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

证明过程为，对于矩阵 A 为非奇异矩阵，则存在矩阵 A 的逆 A^{-1}

则对于矩阵 A 的转置 A^T

$$A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=I^T=I$$

$$(A^{-1})^TA^T=(AA^{-1})^T=I^T=I$$

于是矩阵 A^T 也是非奇异矩阵

又非奇异矩阵至多只有一个逆，则有 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

对于 $n\times n$ 非奇异矩阵 A，以及任意 $m\in N^+$

有 A^m 为非奇异矩阵，且有 $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$

证明过程为：基础步骤：当 $m=1$ 时，A^m 为非奇异矩阵且 $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$ 平凡地为真

递归步骤：假设对任意 $m\in N^+$，$P(m)$ 为真，则考虑 $P(m+1)$

对于矩阵 $(A^{-1})^{m+1}=(A^{-1})(A^{-1})^m$

$$\begin{aligned}A^{m+1}(A^{-1})^{m+1}&=(A^mA)(A^{-1}(A^{-1})^m)\\&=A^m(AA^{-1})(A^{-1})^m\\&\overset{(IH)}{=}A^m(A^m)^{-1}=I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{m+1}A^{m+1}&=((A^{-1})^mA^{-1})(AA^m)\\&=(A^{-1})^m(A^{-1}A)A^m\\&\overset{(IH)}{=}(A^m)^{-1}A^m=I\end{aligned}$$

又矩阵至多只有一个逆，于是 $(A^{-1})^{m+1}=(A^{m+1})^{-1}$

于是根据数学归纳法，对于 $n\times n$ 非奇异矩阵 A 以及任意 $m\in N^+$

有 A^m 为非奇异矩阵，且有 $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$

对合矩阵 (involutory matrix)，对于 $n\times n$ 矩阵 A，称 A 为对合矩阵

如果有 $(I-A)(I+A)=0$ 或者等价地有 $A^2=I$

对于 n 维单位向量 $\vec{u}\in R^n$，即有 $\|\vec{u}\|_2^2=\vec{u}^T\vec{u}=1$

有矩阵 $H=I-2\vec{u}\vec{u}^T$，则 $n\times n$ 矩阵 H 为对合矩阵

证明过程有：
$$\begin{aligned}H^2&=(I-2\vec{u}\vec{u}^T)(I-2\vec{u}\vec{u}^T)\\&=I^2-2\vec{u}\vec{u}^T-2\vec{u}\vec{u}^T+4\vec{u}\vec{u}^T\vec{u}\vec{u}\\&=I^2-4\vec{u}\vec{u}^T+4\vec{u}\vec{u}^T\\&=I\end{aligned}$$

于是 $n\times n$ 矩阵 $H=I-2\vec{u}\vec{u}^T$ 是对合矩阵