Discrete Mathematics - Pao

多边形 (polygon) 指一个由一系列的边(edge)的线段 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 所构成的封闭图形
对于每一对相邻的边 s_i 和 s_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 及最后一对边 s_n 和 s_1,
都相交于一个公共的端点,，称为顶点(vertex)
如果任意不相邻的边没有交点，则称多边形为简单多边形(simple polygon)

每个简单多边形都把整个平面划分为两个区域，内部区域和外部区域(interior/exterior region)
内部区域由曲线内部的点构成，外部区域由曲线外部的点构成

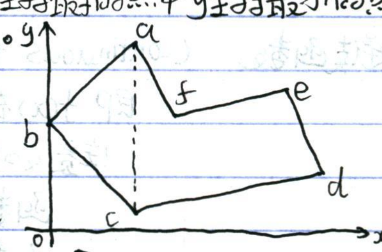
乔丹曲线 (Jordan curve)，又称平面简单闭曲线(plane simple closed curve)
指一个平面上的非自交环路(non-self-intersecting continuous loop)

乔丹曲线定理 (Jordan curve theorem)，指任意乔丹曲线将平面划分为内部区域(interior region)和外部区域(exterior region)
且任何从一个区域到另一个区域的连续路径都必然在某处与闭曲线相交
every continuous path connecting point of one region to point of the other
intersect with the continuous loop somewhere

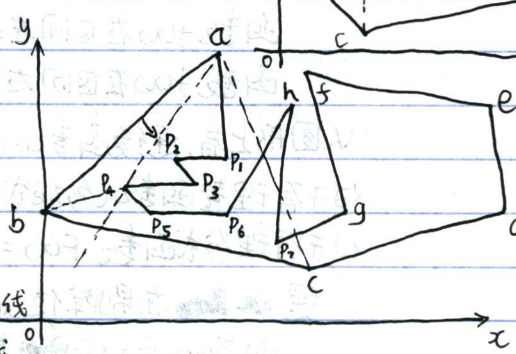
凸多边形 (convex polygon)，指连接多边形内部任意两点的线段都完整地包含在该多边形内部
等价地有，凸多边形的所有内角(interior angle)均小于180°

对角线 (diagonal)，为简单多边形中连接多边形两个不相邻顶点的线段
如果对角线除了端点外都在多边形内部，则称该对角线为内部对角线

引理 每个至少四边的简单多边形都存在一条内部对角线
证明过程有，对于简单平面多边形P，令b为P上或P内一点，使得b为x坐标最小的点中y坐标最小的点
则有b必定为P的一个顶点，且如果a, c与b相邻，且 $\angle abc < 180°$



则对于三角形 $\triangle abc$，如果多边形P没有顶点在 $\triangle abc$ 内部
则ac即为多边形P的内部对角线
如果多边形P有点 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 在 $\triangle abc$ 内部
则对于任意 P_i，$0 < \angle baP_i < \angle bac$，
则使ba绕a向ac转动，则存在点 P_i
转动时ba最先接触 P_i，
即对 $\forall_{1\le j\le k}$ $\angle baP_i \le \angle baP_j$
连接 bP_i 可知 bP_i 为多边形P的内部对角线



提有每个至少四边的简单多边形都存在一条内部对角线

Discrete Mathematics - P91

三角形化 (polygon triangulation)，指对于简单多边形，用不相交的对角线划分成多个三角形

subdivision of a given polygon into triangles meeting edge-to-edge

the set of triangle vertices coincides with the set of vertices of the polygon

对于正整数 $n\geq3$，具有n条边的简单多边形能够被三角形化为 $n-2$ 个三角形

基础步骤：对于 $n=3$ 时，有n条边的多边形为一个三角形

而无需加入对角线，三角形即已被三角形化为其自身，即 $3-2=1$ 个三角形

归纳步骤：假设 $\forall n\in Z^+\wedge n\geq3$ $T(3)\wedge\cdots\wedge T(n)$ 为真

则考虑 $T(n+1)$，即对于有 $n+1$ 条边的简单多边形 P_{n+1}

由引理可知 $n+1\geq4$，则 P_{n+1} 至少存在一条内部对角线

设内部对角线ab将 P_{n+1} 划分为两个简单多边形 Q和R

且Q有s条边，R有t条边，Q与R有公共边ab

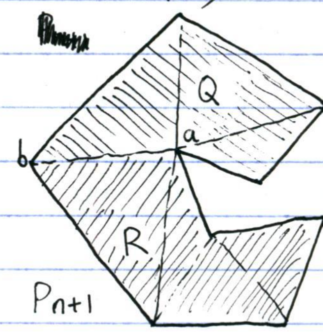
又Q与R的其他边都是 P_{n+1} 的边，且没有重复的边

于是有 $s+t=n+1+2$，且 $3\leq s\leq n$，$3\leq t\leq n$

于是可知 $T(s)$ 与 $T(t)$ 为真，即Q与R可划分成 $s-2$ 与 $t-2$ 个三角形

即 P_{n+1} 可划分成 $(s-2)+(t-2)=(n+1)-2$ 个三角形，于是有 $T(n+1)$ 为真

于是依据强归纳法，$\forall n\geq3$ 具有n条边的简单多边形可划分成 $n-2$ 个三角形



正整数集合公理为规定正整数集合作为整数集合的子集必须满足的4个关键性质

公理1 数1是正整数

公理2 如果n是正整数，则 $n+1$，即n的后继(successor)也是正整数

公理3 每个大于1的正整数都是一个正整数的后继，这个正整数也称为 predecessor

良序原理 (well-ordering principle)，正整数集合的每个非空子集都有一个最小元

在循环赛中，任意两位选手恰好比赛一次且分胜负，如果 P_1 赢 P_2，…，P_m 赢 P_1，则称 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 形成回路

如果选手中存在长度为 $m(m\geq3)$ 的回路，则必定存在这些选手中三个选手的回路

假设循环赛中至少有一个回路，所以集合 $\{n\in Z^+ \mid$ 存在长度为n的回路$\}$ 非空

可知这个集合有最小元k，如果不存在长度为3的回路，则 $k>3$

且循环赛中不存在长度小于k的回路

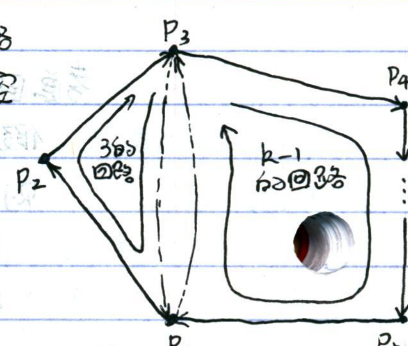
考虑 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 的前三个选手 P_1,P_2,P_3，则有 P_1 胜 P_2，P_2 胜 P_3

如果 P_3 胜 P_1，则 P_1,P_2,P_3 形成3回路

如果 P_1 胜 P_3，又 P_3 胜 P_4，…，P_k 胜 P_1，则 $P_1,P_3,P_4,\cdots,P_k$ 形成长度 $k-1$ 的回路

与假设长度为k的回路最短矛盾

于是如果存在长度为 $m(m\geq3)$ 的回路，则必定存在这些选手中3个选手的回路

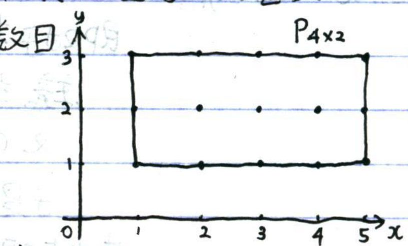


Discrete Mathematics - Pq2

Pick 定理 (Pick's theorem)，对于平面上的简单多边形，且其顶点均为格点，(即横、纵坐标均为整数)

取 $I(P)$ 为简单多边形 P 内部格点数目，$B(P)$ 为 P 边界上格点数目

则简单多边形 P 的面积 $S(P) = I(P) + B(P)/2 - 1$



首先考虑矩形 $P_{a\times b}$ 的情形，且 $P_{a\times b}$ 顶点均在格点

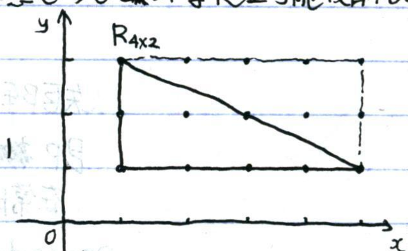
则 $I(P_{a\times b}) = (a-1)(b-1)$，$B(P_{a\times b}) = (a+b)\times 2$

于是有 $I(P_{a\times b}) + B(P_{a\times b})/2 - 1 = (a-1)(b-1) + (a+b)\times 2/2 - 1$

$= ab = S(P_{a\times b})$

(不计入斜边的两个端点)

考虑直角三角形 $R_{a\times b}$ 的情形，假设斜边上格点数为 c，注意 $c \geq 0$ 即斜边上可能没有格点



注意到 $R_{a\times b}$ 可由矩形 $P_{a\times b}$ 划分获得。

即有 $I(R_{a\times b}) = (I(P_{a\times b}) - c)/2$，$B(R_{a\times b}) = a+b+c+1$

则 $I(R_{a\times b}) + B(R_{a\times b})/2 - 1 = \frac{[(a-1)(b-1)-c]}{2} + \frac{a+b+c+1}{2} - 1$

$= ab/2 = S(R_{a\times b})$

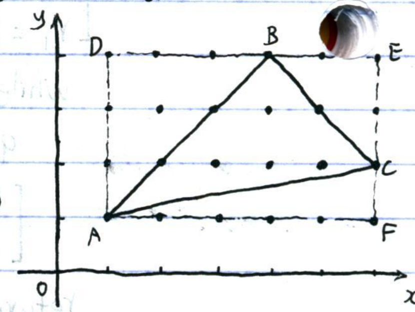
即定理对直角三角形 $R_{a\times b}$ 成立

(不计入斜边端点)

考虑任意[redacted]三角形 T_{ABC}，可知点 $A.B.C$ 为格点，令三边上的格点数 $a.b.c$，且 $a.b.c \geq 0$

注意到 $\triangle ABC$ 可由一个矩形去掉若干个直角三角形获得

即 $\triangle ABC$ 由矩形 $ADEF$ 去掉 $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle AFC$ 获得



$B(T_{ABC}) = 3+a+b+c$ [redacted]

$I(T_{ABC}) = I(P_{ADEF}) - I(R_{ADB}) - I(R_{BEC}) - I(R_{AFC}) - (a+b+c)$

$S(T_{ABC}) = S(P_{ADEF}) - S(R_{ADB}) - S(R_{BEC}) - S(R_{AFC})$

又定理对矩形和直角三角形成立

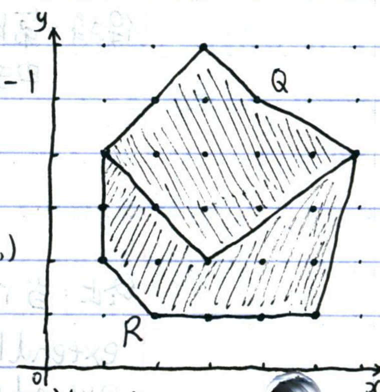
$S(P_{ADEF}) - S(R_{ADB}) - S(R_{BEC}) - S(R_{AFC})$

$= (I(P_{ADEF}) - I(R_{ADB}) - I(R_{BEC}) - I(R_{AFC})) + (B(P_{ADEF}) - B(R_{ADB}) - B(R_{BEC}) - B(R_{AFC}))/2 + 2$

$= I(T_{ABC}) + (a+b+c) + (-3-a-b-c)/2 + 2$

$= I(T_{ABC}) + (a+b+c+3)/2 - 3 + 2 = I(T_{ABC}) + B(T_{ABC})/2 - 1$

即定理对任意三角形 T_{ABC} 成立



考虑任意两个有公共边的简单多边形 Q, R 拼接为 P 的情形

假设 Q, R 的公共边上共有 k 个格点，且 $k \geq 0$ (不计入公共边端点)

假设定理对 Q, R 成立，则考虑拼接成的多边形 P

则有 $I(P) = I(Q) + I(R) + k$，$B(P) = B(Q) + B(R) - 2k - 2$

则 $I(P) + B(P)/2 - 1 = I(Q) + I(R) + k + (B(Q) + B(R) - 2k - 2)/2 - 1$

$= (I(Q) + B(Q)/2 - 1) + (I(R) + B(R)/2 - 1)$

$= S(Q) + S(R) = S(P)$，即定理对 P 成立

又任意 n 条边的简单多边形 P 都可划分为 $n-2$ 个三角形，

如果 P 的顶点均为格点，则 $n-2$ 个三角形顶点均为格点，即定理成立

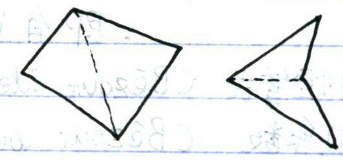
Discrete Mathematics - Pg3

对于一个 n $(n\geq 4)$ 条边的简单多边形的三角形化，那么至少有两个三角形有两条边是多边形外部边界

基础步骤：对于 $n=4$，可知一个四边形可以三角形化成两个三角形

而这两个三角形有一条公共边为内对角线，

而各有两条边是四边形的外部边界



递归步骤：假设 $\forall n\in Z^{+}\wedge n\geq 4$，$P(4)\wedge\cdots\wedge P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

已知 $n+1$ 条边的简单多边形存在一条内对角线，将 P_{n+1} 划分成简单多边形 Q 与 R

如果 Q 与 R 中有一个为三角形，假设为 Q，

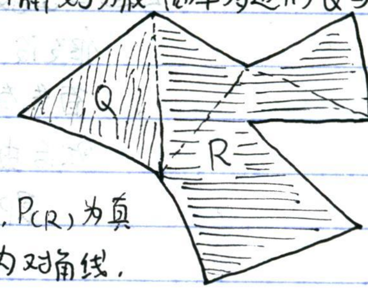
则三角形 Q 有一条边为 P_{n+1} 内对角线，

另外两条边为 P_{n+1} 的外部边界

而 R 为 n 条边的简单多边形，则依据归纳假设，$P(R)$ 为真

而 $P(R)$ 中至多有一个三角形的一条边为 P_{n+1} 的内对角线，

则另一个三角形有两条边是 P_{n+1} 的外部边界，(R 与 P_{n+1} 公共的外部边界)



如果 Q 与 R 都是至少 4 条边的简单多边形，则 $4\leq n_Q\leq n$ 且 $4\leq n_R\leq n$

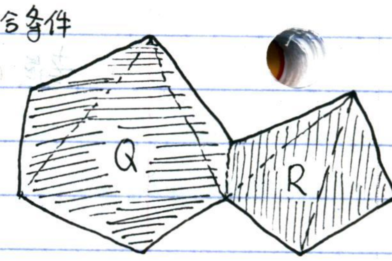
即依据归纳假设 Q，R 都有两个三角形符合条件

而各自至多有一个三角形的一条边是公共内对角线

于是另两个三角形是 P_{n+1} 三角形化的三角形

且有两条边是 P_{n+1} 的外部边界，

即命题对 $n+1$ 条边的简单多边形成立



于是根据强归纳法：对至少 4 条边的简单多边形三角形化，则至少有两个三角形有两条边是多边形外部边界

对于简单多边形 P，若其顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，且对 v_i 和 v_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 和 v_n 与 v_1 之间有一条边

则对于 v_i，如果连接其两个相邻点的线段为多边形 P 的一条内部对角线

则称顶点 v_i 是多边形 P 的一只耳朵

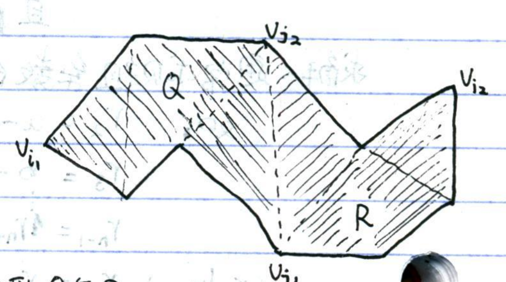
如果对于顶点 v_i 和 v_j 是 P 的耳朵，且 v_i 与邻点构成三角形内部没有 v_j 与邻点构成三角形内部的点，

则称耳朵 v_i 与耳朵 v_j 是不重叠的

对于任意至少 4 条边的简单多边形，至少有两只不重叠的耳朵

基础步骤：当 $n=4$ 时，四边形 P_4 可以划分为两个三角形

则这两个三角形即为两只不重叠的耳朵



递归步骤：假设 $\forall n\geq 4$ $P(4)\wedge\cdots\wedge P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

已知简单多边形 P_{n+1} 可以划分为两个简单多边形 Q 与 R，

如果其中一个为三角形，则其为耳朵，且在另一个多边形中至少有一个耳朵是 P_{n+1} 的耳朵且不重叠

如果 $4\leq n_Q\leq n$，$4\leq n_R\leq n$，则 Q 与 R 各有两个不重叠的耳朵

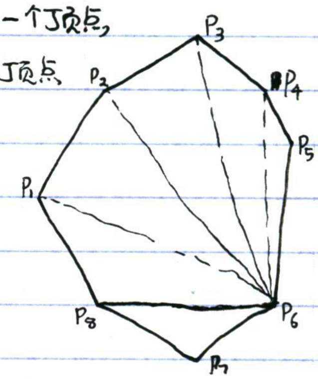
至多各有一个具有内部对角线为公共边，则另外两个为 P_{n+1} 的不重叠的耳朵

于是依据强归纳法，对于任意至少 4 条边的简单多边形，至少有两只不重叠的耳朵

Discrete Mathematics - Pg4

对于n条边的凸多边形P，且有相邻顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$. 简单凸多边形P可划分成n-2个三角形

则n-2个三角形可编号为 $T_1, T_2, \cdots, T_{n-2}$，使得 $\forall 1\le i\le n-2$，v_i 是 T_i 的一个顶点，



证明过程有，基础步骤：对于 $n=3$，可知三角形P划分为其自身，v_1 即 T_1 的顶点

递归步骤：假设 $\forall n\ge 3$ $P(3)\wedge\cdots\wedge P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

可知 P_{n+1} 为简单凸多边形，即任意对角线均为内部对角线

连接 v_{n-1} 与 v_{n+1}，则 $v_{n-1}v_{n+1}$ 将多边形 P_{n+1} 划分为两部分

三角形 $v_{n-1}v_nv_{n+1}$，和以 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}, v_{n+1}$ 为顶点的凸多边形Q

根据归纳假设，多边形Q使得 $P(Q)$ 为真，

即对Q划分成的n-2个三角形编号，使得 $\forall 1\le i\le n-2$ v_i 是 T_i 的一个顶点，

又 v_{n-1} 是三角形 $v_{n-1}v_nv_{n+1}$ 的一个顶点，即 $P(n+1)$ 为真

于是根据强归纳法，对于n条边的简单凸多边形P，顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，

可对P划分成的n-2个三角形编号，使得 $\forall 1\le i\le n-2$ v_i 是三角形 T_i 的一个顶点，

命题 $P(n)$ 为：对于n条边的简单凸多边形，当不相交的内部对角线画于多边形P内部时

多边形中至少有两个顶点不是这些对角线的端点，

注意这个命题如果选择 $P(3)$ 为基础步骤则无法在递归步骤得出 $(P(3)\wedge\cdots\wedge P(n))\to P(n+1)$ 为真

如基础步骤：对于 $n=3$，三角形没有内部对角线，则3个顶点都不是对角线的端点

递归步骤：假设对于 $\forall n\ge 3$ $P(3)\wedge\cdots\wedge P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

可知 P_{n+1} 中存在一条内部对角线将 P_{n+1} 划分为三角形Q，和n边多边形R

Q，R都满足使 $P(Q)$ 和 $P(R)$ 为真，

但是如果R中的满足条件的两个顶点恰为划分Q，R的内部对角线的顶点

则 P_{n+1} 仅能确定有一个顶点不是这些对角线的顶点，

但是可以用强归纳法证明一个更强的结论，

对于至少4条边的多边形，至少有两个不相邻的顶点不是不相交的内部对角线的顶点，

基础步骤：对于 $n=4$，四边形只能画出一条不相交的内对角线

则有两个不相邻顶点，不是这条内对角线的顶点，

递归步骤：假设 $\forall n\ge 4$ $P(4)\wedge\cdots\wedge P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

若一条内对角线将其划分成三角形Q与n边多边形R，则 $P(R)$ 为真

而R中最多有一个顶点为QR公共边的顶点，

则Q的顶点与R中另一个符合要求顶点，为 P_{n+1} 中符合要求的顶点

如果 $4\le n_Q<n$，$4\le n_R<n$，则 $P(Q)$ 与 $P(R)$ 都为真

又Q，R中各自最多有一个顶点是公共边的端点

则另外两个点为 P_{n+1} 中符合要求的顶点，即 $P(n+1)$ 为真

于是依据强归纳法，可知对于至少4条边的多边形，至少有两个不相邻的顶点不是不相交的内部对角线顶点，

Discrete Mathematics - P95

对于命题 $P(n)$，如果存在无限多个正整数 n 使 $P(n)$ 为真

又对所有正整数 n 有 $P(n+1) \to P(n)$ 为真，那么对所有正整数有 $P(n)$ 为真

假设存在正整数 n 使 $P(n)$ 为假，即集合 $S = \{n \in Z^+ \mid P(n) \text{为假}\}$ 非空

又集合 S 为正整数集合的非空子集，于是集合 S 中有最小元素 k

对于任意正整数 n，有 $P(n+1) \to P(n)$ 为真，则其逆否命题 $\neg P(n) \to \neg P(n+1)$ 为真

又对于正整数 k，$P(k)$ 为假，而对 $\forall n \in Z^+$ $\neg P(n) \to \neg P(n+1)$

于是可知 $\forall n \geq k$ $P(n)$ 为假，则对于命题 $P(n)$ 至多只有 $i = 1, 2, \cdots, k-1$ 使 $P(i)$ 为真

与前提中存在无限多个正整数 n 使 $P(n)$ 为真 相矛盾

于是可知集合 S 应为空集，即 $\forall n \in Z^+$ $P(n)$ 为真

对于定义在正整数上的命题 $P(n,k)$，$n \in Z^+$，$k \in Z^+$，如果满足条件之一，则有 $\forall n,k \in Z^+$ $P(n,k)$ 为真

对所有正整数 k，有 $P(1,k)$ 为真，且对所有正整数 n,k，有 $P(n,k) \to P(n+1,k)$ 为真

对所有正整数 n，有 $P(n,1)$ 为真，且对所有正整数 n,k，有 $P(n,k) \to P(n,k+1)$ 为真

$P(1,1)$ 为真，且对所有正整数 n,k，有 $P(n,k) \to [P(n+1,k) \wedge P(n,k+1)]$ 为真

证明过程有，假设存在正整数 n,k，使得 $P(n,k)$ 为假，

则令集合 $S = \{(n,k) \in Z^+ \times Z^+ \mid P(n,k) \text{为假}\}$ 非空，

令 (n_0,k_0) 为集合 S 中 n 最小的序偶中 k 最小的序偶

于是令集合 $S_{k_0} = \{n \in Z^+ \mid P(n,k_0) \text{为假}\}$，可知集合 S_{k_0} 非空，且有最小元素 n_0

而 $P(1,k_0)$ 为真，且对所有正整数 n，有 $P(n,k_0) \to P(n+1,k_0)$ 为真

则可知 $P(n_0-1,k_0)$ 为真 与 $P(n_0,k_0)$ 为假 相矛盾，

所以有集合 S_{k_0} 为空集，

于是令集合 $S_{n_0} = \{k \in Z^+ \mid P(n_0,k) \text{为假}\}$，可知集合 S_{n_0} 非空，且有最小元素 k_0

而 $P(n_0,1)$ 为真，且对所有正整数 k，有 $P(n_0,k) \to P(n_0,k+1)$ 为真

则可知 $P(n_0,k_0-1)$ 为真 与 $P(n_0,k_0)$ 为假 相矛盾

所以有集合 S_{n_0} 为空集

而对于 $P(1,1)$ 为真，且对所有正整数 n,k，有 $P(n,k) \to [P(n+1,k) \wedge P(n,k+1)]$ 为真

则有 $P(1,1) \to P(2,1) \to \cdots \to P(n_0,1) \to P(n_0,2) \to \cdots \to P(n_0,k_0-1)$ 为真

$P(1,1) \to P(1,2) \to \cdots \to P(1,k_0) \to P(2,k_0) \to \cdots \to P(n_0-1,k_0)$ 为真

则可知 $P(n_0-1,k_0) \wedge P(n_0,k_0-1)$ 为真 与 $P(n_0,k_0)$ 为假 矛盾

所以有集合 S 为空集

于是有当 对所有正整数 k，有 $P(1,k)$ 为真，且对所有正整数 n,k，有 $P(n,k) \to P(n+1,k)$ 为真

或 对所有正整数 n，有 $P(n,1)$ 为真，且对所有正整数 n,k，有 $P(n,k) \to P(n,k+1)$ 为真

或 有 $P(1,1)$ 为真，且对所有正整数 n,k，有 $P(n,k) \to [P(n+1,k) \wedge P(n,k+1)]$ 为真

则有 $\forall n,k \in Z^+$ $P(n,k)$ 为真

Discrete Mathematics - Pg6

对所有正整数n,k，有 $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\cdots(j+k-1) = n(n+1)\cdots(n+k)/(k+1)$

基础步骤：当n=1，k=1时，$\sum_{j=1}^{1} j = 1 = 1\cdot(1+1)/(1+1)$，即$P(1,1)$为真

当n=1时，$\forall k\in Z^+$ $\sum_{j=1}^{1} j(j+1)\cdots(j+k-1) = k! = 1\cdot(1+1)\cdots(1+k)/(k+1)$

即有 $\forall k\in Z^+$ 有$P(1,k)$为真

递归步骤：假设对任意正整数n,k，有$P(n,k)$为真，则考虑$P(n+1,k)$

$\sum_{j=1}^{n+1} j(j+1)\cdots(j+k-1) = \sum_{j=1}^{n} j(j+1)\cdots(j+k-1) + (n+1)(n+2)\cdots(n+k)$

$\overset{\text{IH}}{=} n(n+1)\cdots(n+k)/(k+1) + (n+1)(n+2)\cdots(n+k)$

$= (n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)/(k+1)$

$= (n+1)(n+1+1)\cdots(n+1+k-1)(n+1+k)/(k+1)$ 即$P(n+1,k)$为真

于是依据强归纳法：对所有$n,k\in Z^+$，有$\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\cdots(j+k-1) = n(n+1)\cdots(n+k)/(k+1)$

对于$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n个不同的实数，则在乘积式$a_1*a_2*\cdots*a_n$中无论插入多少对括号

计算乘积式$a_1*a_2*\cdots*a_n$都需要n-1次乘法计算

基础步骤：当n=1时，a_1即为乘积式a_1的结果，需要$0=1-1$次乘法计算

当n=2时，a_1*a_2中不论插入多少对括号，都只需要$1=2-1$次乘法计算

递归步骤：假设 $\forall n\in Z^+\wedge n\geq 2$ $P(1)\wedge P(2)\wedge\cdots\wedge P(n)$为真，则考虑$P(n+1)$

考虑乘积式$a_1*a_2*\cdots*a_{n+1}$中的最后一次乘法计算，

令其为e_1*e_2，其中e_1,e_2都是$a_1*a_2*\cdots*a_{n+1}$的部分乘积式

即e_1为n_1个不同实数的乘积，e_2为n_2个不同实数的乘积

且有$1\leq n_1\leq n$，$1\leq n_2\leq n$，$n_1+n_2=n+1$

于是根据归纳假设，e_1需要n_1-1次乘法计算，e_2需要n_2-1次乘法计算

即e_1*e_2需要$(n_1-1)+(n_2-1)+1=(n+1)-1$次乘法计算，即$P(n+1)$为真

于是根据强归纳法，对于n个实数$a_1*a_2*\cdots*a_n$的乘积式，不论插入多少对括号，都需要n-1次乘法计算

如果x,y是实数且满足$x<y$，则存在有理数r，满足$x<r<y$

由于$x<y$，则有$\frac{1}{y-x}>0$，则令集合$S=\{n\in Z^+ \mid n>\frac{1}{y-x}\}$

可知集合S是正整数集合的非空子集，则依据良序性，集合S有最小元素

取集合S的最小元素A，则有$A>\frac{1}{y-x}$，即$x+\frac{1}{A}<y$

又$\lfloor x\rfloor\leq x$，则存在整数j，且$0\leq j<A$，则$0\leq\frac{j}{A}<1$

则有 $\lfloor x\rfloor+\frac{j}{A}\leq x<\lfloor x\rfloor+\frac{j+1}{A}$

又 $\lfloor x\rfloor+\frac{j+1}{A} = \lfloor x\rfloor+\frac{j}{A}+\frac{1}{A}\leq x+\frac{1}{A}<y$

于是有 $x<\frac{A\lfloor x\rfloor+j+1}{A}<y$，又$A,\lfloor x\rfloor,j$均为整数且$A\neq 0$，

所以取$r=\frac{A\lfloor x\rfloor+j+1}{A}$，可知r为有理数且$x<r<y$

Discrete

Mathematics - P97

如果强归纳法作为公理，则数学归纳法是有效的

[redacted] 即对于定义在正整数上的命题 $P(n)$

如果 $P(n)$ 满足 $P(1)$ 为真 且 $\forall n \in Z^+ \ [P(1) \wedge \cdots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$ 为真 可推出 $\forall n \in Z^+ \ P(n)$ 为真

则 $P(n)$ 也满足 $P(1)$ 为真 且 $\forall n \in Z^+ \ P(n) \rightarrow P(n+1)$ 为真 也可以推出 $\forall n \in Z^+ \ P(n)$ 为真

如果存在命题 $P(n)$ 使得可被强归纳法证明，而无法被数学归纳法证明 [redacted]

则在数学归纳法证明过程中，会出现使命题 $P(n)$ 为假的元素

假设集合 $S = \{k \in Z^+ \mid P(k) \text{ 为假}\}$，可知集合 S 是正整数集合的非空集合

则考虑集合的最小元素 k，则可知 $\forall 1 \le i < k \ P(i)$ 为真

则依据强归纳法的证明过程，$P(1) \wedge \cdots \wedge P(k-1) \rightarrow P(k)$ 为真，与 $P(k)$ 为假矛盾

而对于数学归纳法，$P(k-1) \rightarrow P(k)$ 为真，同样与 $P(k)$ 为假矛盾，

所以如果强归纳法是公理，则数学归纳法是有效的

如果把数学归纳法作为公理，则良序性是可以证明的

令命题 $P(n)$ 为有 $n \in Z^+$ 个元素的正整数集合的子集拥有最小元素

基础步骤：当 $n=1$ 时，可知拥有1个元素的正整数集合的子集 S，

其最小元素即为其拥有的元素，即 $P(1)$ 为真

递归步骤：假设 $\forall n \in Z^+ \ P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

对于拥有 $n+1$ 个元素的正整数集合子集 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$

则取集合 $S' = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，可知 S' 也是正整数集合的子集

于是 S' 使 $P(S')$ 为真，则依据归纳假设，S' 有最小元素 a_k

再比较 a_{n+1} 与 a_k，取其中小者即为集合 S 的最小元素，即 $P(n+1)$ 为真

于是依据数学归纳法，$\forall n \in Z^+$ 有 n 个元素的正整数集合的子集拥有最小元素

如果把强归纳法作为公理，则良序性是可以证明的

令命题 $P(n)$ 为有 $n \in Z^+$ 个元素的正整数集合的子集拥有最小元素

基础步骤：拥有1个元素的正整数集合的子集 S 拥有最小元素，即其拥有的元素

递归步骤：假设 $\forall n \in Z^+ \ P(1) \wedge \cdots \wedge P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

对于拥有 $n+1$ 个元素的正整数集合的子集 S，可划分为两个非空集合 Q 和 R

且有 $1 \le |Q| \le n$，$1 \le |R| \le n$，于是有 $P(Q)$ 和 $P(R)$ 为真

根据归纳假设，Q 与 R 中都有一个最小元素

取 Q 和 R 中最小元素相比，取较小者即为 S 的最小元素，即 $P(n+1)$ 为真

于是根据强归纳法，$\forall n \in Z^+$ 有 n 个元素的正整数集合的子集拥有最小元素

Discrete Mathematics - P98

函数的递归定义(recursive definition of a function)，[redacted] 通常用于定义以非负整数集合作为其定义域的函数

即规定一组初始的函数值以及从较小整数处的函数值获得较大整数处的函数值的规则

指对于定义在非负整数集合上的函数

基础步骤：规定这个函数在0处的值（或一组初始的值）

递归步骤：从较小的整数处的值来求出当前的值的规则

注意递归定义(recursive definition)和归纳定义(inductive definition)略有不同

递归定义中使用被定义对象来定义其自身

归纳定义中使用被定义对象的已经定义的部分来定义尚未定义的部分

注意对于一个定义在非负整数集合到实数集合的函数 $f(x)$

等价于一个序列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$，其中 $a_i \in R$，[redacted] $i = 0, 1, 2, \cdots$

如定义斐波那契数 f_n 为序列 $f_0, f_1, \cdots$ 中第n项 或 $f(n)$ 在n处的取值

基础步骤：$f_0 = 0$，$f_1 = 1$

递归步骤：$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$，$n \in N$ 且 $n \geq 2$

良定义的 (well-defined)，又称定义良好(well-definition) 指对于数学里的某个概念或对象 [redacted] (函数，性质，关系)

确认用一组基本公理以数学或逻辑的方式定义是完全无歧义的

对于良定义的函数，指对于每个非负整数，函数在该点处取值是清楚定义的

well-defined function gives the same [redacted] result

when the representation of the input is changed without changing the value of input

即 [redacted] 对于函数 $f(x)$，其定义域为 D_f，如果 $f(x)$ 是良定义的，则应满足

对任意 $x \in D_f$，都存在函数值 $f(x)$

对任意 $x, y \in D_f$，如果 $x = y$ 则有 $f(x) = f(y)$，即相同的自变量应保证有相同的函数值

注意：通过规定 $F(0)$ 和从 $F(n)$ 获得 $F(n+1)$ 的 [redacted] 规则所定义的函数F是良定义的

通过规定 $F(0)$ 和从 $F(k)$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 获得 $F(n+1)$ 的规则所定义的函数 F 是良定义的

如果对于某个 [redacted] 正整数 [redacted] m，有 $F(m)$ 未定义

则集合 $S = \{n \in Z^+ \mid F(n) \text{ 未定义}\}$ 为正整数集合的 [redacted] 非空集合，即存在最小元素 k

于是有 $F(k)$ 未定义 且 $F(0), F(1), \cdots, F(k-1)$ 都有定义，

则与用 $F(k-1)$ 获得 $F(k)$ 和从 $F(i)$ $(i = 0, 1, \cdots, k-1)$ 获得 $F(k)$ 的规则相矛盾

所以集合 S 必定为空集，于是对任意 $k \in N$，$F(k)$ 有定义

于是[redacted]可知，递归定义的函数是良定义的

Discrete

Mathematics - P99

对于大于等于3的正整数n，斐波那契数 $f_n > \phi^{n-2}$，其中 ϕ 为黄金分割率 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

基础步骤：当 $n=3$ 时，$f_3 = 2 > \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi^{3-2}$，即 $P(3)$ 为真

当 $n=4$ 时，$f_4 = 3 > \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \phi^{4-2}$，即 $P(4)$ 为真

递归步骤：假设 $\forall n \in Z^+ \wedge n \geq 4$ $P(3) \wedge P(4) \wedge \cdots \wedge P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

已知 $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的一个根，

于是有 $\phi^2 = \phi + 1$

则 $\phi^{n-1} = \phi^2 \cdot \phi^{n-3} = (\phi+1)\phi^{n-3} = \phi^{n-2} + \phi^{n-3}$

根据归纳假设，有 $\phi^{n-2} < f_n$，$\phi^{n-3} < f_{n-1}$

于是有 $\phi^{n-1} = \phi^{n-2} + \phi^{n-3} < f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$，即 $P(n+1)$ 为真

于是依据强归纳法，$\forall n \in Z^+ \wedge n \geq 3$ $f_n > \phi^{n-2}$，其中 $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

拉梅定理（Lamé's theorem）设正整数a, b有 $a \geq b$，并通过欧几里得算法求 $\gcd(a,b)$ 的值

则算法使用除法的次数小于或等于b的十进制位数的5倍。

证明过程有，当用欧几里得算法求满足 $a \geq b$ 的 $\gcd(a,b)$ 时，取 $r_0 = a$，$r_1 = b$

则在计算过程中，假设使用了n次除法求出结果，

于是有 $r_0 = q_1 r_1 + r_2$，$0 < r_2 < r_1$

$r_1 = q_2 r_2 + r_3$，$0 < r_3 < r_2$

$\vdots$

$r_{n-1} = q_n r_n$，$0 < r_n < r_{n-1}$

于是可知 $q_1, q_2, \cdots, q_{n-1}$ 都是至少为1的正整数，而 $q_n \geq 2$

则有 $r_n \geq 1 = f_2$

$r_{n-1} = q_n r_n \geq 2r_n \geq 2 = f_3$

$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n \geq r_{n-1} + r_n \geq f_2 + f_3 = f_4$

$\vdots$

$r_2 = q_3 r_3 + r_4 \geq r_3 + r_4 \geq f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$

$b = r_1 = q_2 r_2 + r_3 \geq r_2 + r_3 \geq f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$

于是有 $b \geq f_{n+1}$，其中n为使用的除法次数，f_{n+1} 为第n+1个斐波那契数

又 $\forall n \geq 3$ $f_n > \phi^{n-2}$，于是有 $b \geq f_{n+1} > \phi^{n-1}$，其中 $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

又 $\log \phi \approx 0.208 > \frac{1}{5}$，于是有 $\log b > (n-1)\log\phi > \frac{1}{5}(n-1)$

假设b有k个十进制位，于是有 $b < 10^k$，即 $\log b < k$

于是有 $\frac{1}{5}(n-1) < \log b < k$，即 $n < 5k+1$，又有n, k为正整数，则有 $n \leq 5k$

又 $k = \lfloor \log b \rfloor + 1$，于是有 $\log b < k \leq \log b + 1$，于是有 $n \leq 5(\log b + 1)$

于是有欧几里得算法计算 $\gcd(a,b)$ $(a \geq b)$ 时所用除法次数的时间复杂度为 $O(\log b)$

Discrete

Mathematics - P100

集合的递归定义 (recursive definition of set)，[redacted]与递归地定义函数类似

指规定集合里的一组初始元素以及从已知属于集合的元素获得其他元素的规则

基础步骤：规定属于集合的初始的一些元素

递归步骤：从已知属于集合的元素来构造集合中的新元素的规则

排斥规则：递归定义的集合仅包含基础步骤规定及递归步骤所生成的元素

Σ^* 记为定义在字母表(alphabet) Σ 上的字符串的集合

基础步骤：令 λ 为不包含任何字符的空串，则 $\lambda \in \Sigma^*$

递归步骤：如果有 $w \in \Sigma^*$ 且 $x \in \Sigma$，则 $wx \in \Sigma^*$

递归定义可用于[redacted]在递归定义的集合的元素上定义运算或函数

$\cdot$ 记为定义在 Σ^* 上的两个字符串的连接运算，其中 Σ^* 为定义在字母表 Σ 上的字符串的集合

基础步骤：如果有 $w \in \Sigma^*$ 且 λ 为空串，则 $w \cdot \lambda = w$

递归步骤：如果有 $w_1 \in \Sigma^*$ 且 $w_2 \in \Sigma^*$ 且 $x \in \Sigma$，则 $w_1 \cdot (w_2 x) = (w_1 \cdot w_2)x$

$l(w)$ 记为定义在 Σ^* 上的函数，$l(w)$ 给出自变量字符串 w 的长度

基础步骤：如果有 λ 为空串，则 $l(\lambda) = 0$

递归步骤：如果有 $w \in \Sigma^*$ 且 $x \in \Sigma$，则 $l(wx) = l(w) + 1$

合式公式 (Well-formed formula, WFF)，指由一个给定的形式文法(formal grammar)生成的任何字符串

a finite sequence of symbols from a given alphabet that is part of a formal language

公式指可以通过某种意义解释给出语义意义的句法对象

Formula is syntactic object that can be given a semantic meaning by means of an interpretation

复合命题 定义关于 T, F, 命题变元以及集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中运算的复合命题的合式公式集合 [redacted] W

基础步骤：如果 S 是命题变元，则 T, F, S 都是合式公式，即 $T, F, S \in W$

递归步骤：如果 E_1, E_2 都是合式公式，即 $E_1 \in W$ 且 $E_2 \in W$

则 $(\neg E_1)$, $(E_1 \wedge E_2)$, $(E_1 \vee E_2)$, $(E_1 \rightarrow E_2)$, $(E_1 \leftrightarrow E_2)$ 都是合式公式

运算符与运算数 定义关于变量，数字以及集合 $\{+, -, *, /, \uparrow\}$ 上的运算符所组成的合式公式的集合 W

基础步骤：如果 x 是数字或变量，则 x 是合式公式，即 $x \in W$

递归步骤：如果 E_1, E_2 都是合式公式，即 $E_1 \in W$ 且 $E_2 \in W$

则 $(E_1 + E_2)$, $(E_1 - E_2)$, $(E_1 * E_2)$, (E_1 / E_2), $(E_1 \uparrow E_2)$ 都是合式公式

注意：虽然 1/0 在数学上无意义，但依旧是符合语法的合式公式