Calculus - P109

对于二阶常系数齐次线性微分方程，可以扩展至n阶的情形

即形如 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$

其中 y 为具有n阶导数的未知函数，$p_1,\cdots,p_n$ 为常数

微分算子(differential operator)，表示对自变量求导的运算，如 $\frac{d}{dx}$ 记为 D

即有 $\frac{dy}{dx}$ 可记作 Dy，$\frac{d^ny}{dx^n}$ 记作 D^ny

于是微分方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$

可记作 $(D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n)y=0$

令 $L(D)=D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n$ 为微分算子D的n次多项式

于是微分方程可记作 $L(D)y=0$

与二阶常系数齐次线性微分方程类似，令方程有特解 $y=e^{rx}$

于是有 $De^{rx}=re^{rx}$，$D^2e^{rx}=r^2e^{rx}$，$\cdots$，$D^ne^{rx}=r^ne^{rx}$

于是有 $L(D)y=L(r)e^{rx}=0$，即 $L(r)=0$

可知 $L(r)=r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$ 为微分方程的特征方程

于是根据特征方程解的情况列出对应的微分方程通解中的项

	单实根 r	对应1项：Ce^{rx}
	一对共轭单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	对应2项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
$k>1$	k重实根 r	对应k项：$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{rx}$
$k>1$	一对共轭k重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	对应2k项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

由于每个根对应着通解中的一项，且每项包含一个任意常数

于是得到n阶常系数齐次线性微分方程的通解 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$

如对于微分方程 $\frac{d^4w}{dx^4}+\beta^4w=0$，其中 $\beta>0$

则有特征方程 $r^4+\beta^4=0$

$$r^4+\beta^4=r^4+2r^2\beta^2+\beta^4-2r^2\beta^2=(r^2+\beta^2)^2-(\sqrt{2}r\beta)^2$$

$$=(r^2+\sqrt{2}\alpha\beta+\beta^2)(r^2-\sqrt{2}\alpha\beta+\beta^2)=0$$

于是有两对共轭复根 $r_{1,2}=\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)$，$r_{3,4}=-\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

即分别对应 $e^{\beta x/\sqrt{2}}(C_1\cos(\beta x/\sqrt{2})+C_2\sin(\beta x/\sqrt{2}))$

和 $e^{-\beta x/\sqrt{2}}(C_3\cos(-\beta x/\sqrt{2})+C_4'\sin(-\beta x/\sqrt{2}))$

于是微分方程有通解 其中 $C_4=-C_4'$

$$w=e^{\beta x/\sqrt{2}}[C_1\cos(\beta x/\sqrt{2})+C_2\sin(\beta x/\sqrt{2})]+e^{-\beta x/\sqrt{2}}[C_3\cos(\beta x/\sqrt{2})+C_4\sin(\beta x/\sqrt{2})]$$

Calculus - P110

常系数非齐次线性微分方程，即形如 $y''+py'+qy=f(x)$ 的（二阶）微分方程

可知非齐次线性微分方程的通解可归结为

对应齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解

非齐次方程的一个特解 y^*

待定系数法（method of undetermined coefficients），用于 $f(x)$ 取两种常见形式时求特解 y^*

$e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，即对于形如 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$，其中 λ 为常数，$P_m(x)$ 为 x 的常系数 m 次多项式

即有 $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$，其中 $a_0,\cdots,a_m$ 为常数且 $a_0\neq0$

又有多项式与指数函数的乘积的导数仍是多项式与指数函数的乘积

即 $[e^{\lambda x}P_m(x)]'=\lambda e^{\lambda x}P_m(x)+e^{\lambda x}P_m'(x)=e^{\lambda x}Q_m(x)$，

于是假定特解 $y^*=R(x)e^{\lambda x}$，其中 $R(x)$ 为 x 的常系数多项式

于是有 $(y^*)'=e^{\lambda x}[\lambda R(x)+R'(x)]$

$(y^*)''=e^{\lambda x}[\lambda^2R(x)+2\lambda R'(x)+R''(x)]$

代入微分方程则有 $R''(x)+(2\lambda+p)R'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)R(x)=P_m(x)$

由 $\lambda^2+p\lambda+q$ 与特征方程 $r^2+pr+q=0$ 相似而考虑 λ 的取值

如果 λ 不是特征方程的根，则系数 $\lambda^2+p\lambda+q\neq0$

于是可令 $R(x)$ 为 $R_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$

代入原方程可得一个 $b_0,\cdots,b_m$ 的 $m+1$ 元一次方程组

解方程组得到 $b_0,\cdots,b_m$，从而得到特解 $y^*=R_m(x)e^{\lambda x}$

如果 λ 是特征方程的单根，则系数 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 且 $2\lambda+p\neq0$

于是 $R'(x)$ 应是 x 的 m 次多项式

则令 $R^*(x)=xR_m(x)$，并用同样方法确定系数 $b_0,\cdots,b_m$

注意，此处实际上避免了系数 b_{m+1} 的出现，即指定 $b_{m+1}=0$

如果 λ 是特征方程的重根，则系数 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 且 $2\lambda+p=0$

于是 $R''(x)$ 应是 x 的 m 次多项式　　忽略 b_{m+1},b_{m+2}

则令 $R^*(x)=x^2R_m(x)$，并用同样方法确定系数 $b_0,\cdots,b_m$

于是有 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 时，非齐次线性微分方程（二阶）有特解 $y^*=x^kR_m(x)e^{\lambda x}$

其中 $R_m(x)$ 为与 $P_m(x)$ 同次的 x 的多项数，系数由待定系数法得到

根据 λ 为特征方程的重根，单根或不是特征方程根，k 分别取 2，1，0

进而推广至 n 阶非齐次方程，如果 λ 是特征方程的 s 重根，则取 $k=s$

如果 λ 不是特征方程的根，则取 $k=0$

Calculus - P111

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx+Q_n(x)\sin wx]$ 型，对于型如 $y''+py'+qy=f(x)$ 的常系数非齐次线性微分方程

其中 λ 为常数，$P_l(x)$ 为 x 的常系数 l 次多项式，$Q_n(x)$ 为常系数 n 次多项式

应用欧拉公式，有 $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$，$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$

于是有 $\cos wx=\frac{1}{2}(e^{wxi}+e^{-wxi})$，$\sin wx=\frac{1}{2i}(e^{wxi}-e^{-wxi})$

则 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx+Q_n(x)\sin wx]$

$$=e^{\lambda x}[P_l\cdot\tfrac{1}{2}(e^{wxi}+e^{-wxi})+Q_n\cdot\tfrac{1}{2i}(e^{wxi}-e^{-wxi})]$$

$$=e^{\lambda x}[e^{wxi}(\tfrac{1}{2}P_l-\tfrac{1}{2}Q_ni)+e^{-wxi}(\tfrac{1}{2}P_l+\tfrac{1}{2}Q_ni)]$$

$$=(\tfrac{P_l}{2}-\tfrac{Q_n}{2}i)e^{(\lambda+wi)x}+(\tfrac{P_l}{2}+\tfrac{Q_n}{2}i)e^{(\lambda-wi)x}$$

$$=P(x)e^{(\lambda+wi)x}+\overline{P}(x)e^{(\lambda-wi)x}$$

其中 $P(x)=(\frac{P_l}{2}-\frac{Q_n}{2}i)$，$\overline{P}(x)=(\frac{P_l}{2}+\frac{Q_n}{2}i)$ 且有 $m=\max\{l,n\}$

则 $P(x)$ 与 $\overline{P}(x)$ 为共轭的 m 次多项式，即对应系数是共轭复数

又对于 $y''+py'+qy=P(x)e^{(\lambda+wi)x}$，属于 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型的非齐次方程

于是有一个 m 次多项式 $R_m(x)$，

使得 $y_1^*=x^kR_me^{(\lambda+wi)x}$ 为微分方程 $y''+py'+qy=P(x)e^{(\lambda+wi)x}$ 的一个特解

其中 k 根据 $\lambda+wi$ 是否特征方程的根分别取 0 或 1

又由于 $\overline{P}(x)e^{(\lambda-wi)x}$ 与 $P(x)e^{(\lambda+wi)x}$ 成共轭

于是取 $R_m(x)$ 的共轭 m 次多项式 $\overline{R}_m(x)$，则有

$y_2^*=x^k\overline{R}_me^{(\lambda-wi)x}$ 为微分方程 $y''+py'+qy=\overline{P}(x)e^{(\lambda-wi)x}$ 的一个特解

其中 k 根据 $\lambda-wi$ 是否特征方程的根分别取 0 或 1

于是根据叠加原理，$y^*=y_1^*+y_2^*=x^kR_me^{(\lambda+wi)x}+x^k\overline{R}_me^{(\lambda-wi)x}$

为原方程 $y''+py'+qy=P(x)e^{(\lambda+wi)x}+\overline{P}(x)e^{(\lambda-wi)x}$ 的特解

则有 $y^*=x^ke^{\lambda x}[R_me^{wxi}+\overline{R}_me^{-wxi}]$，注意 $\lambda\pm wi$ 为共轭复数，或者同为根 或者都不为根

$$=x^ke^{\lambda x}[R_m(\cos wi+i\sin wx)+\overline{R}_m(\cos wi-i\sin wx)]$$

注意对于共轭复数 $a\pm bi$ 和 $c\pm di$，

有 $(a+bi)(c+di)+(a-bi)(c-di)=ac-bd$，即消去了所有虚部

于是 $y^*=x^ke^{\lambda x}[S_m(x)\cos wx+T_m(x)\sin wx]$

其中 $S_m(x)$ 和 $T_m(x)$ 为实系数的 m 次多项式

于是对于有 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx+Q_n(x)\sin wx]$ 型的二阶常系数非齐次线性微分方程

有形如 $y^*=x^ke^{\lambda x}[S_m(x)\cos wx+T_m(x)\sin wx]$ 的特解

其中 $S_m(x)$，$T_m(x)$ 为实系数 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$

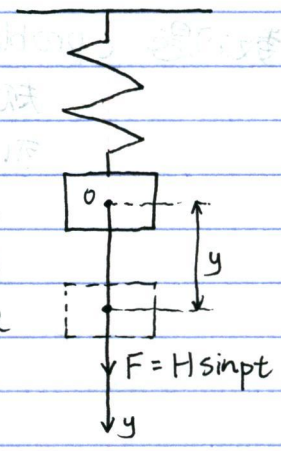
k 根据 $\lambda\pm wi$ 是否为特征方程的共轭复根分别取 0 或 1

扩展至 n 阶非齐次线性微分方程，则 k 为特征方程中共轭复根 $\lambda\pm wi$ 的重复次数

Calculus - P112

无阻尼的强迫振动方程，对于 $y''+k^2y=h\sin pt$

受铅直干扰力 $F=H\sin pt$，其中 H, p 为常数，且有 $h=\frac{H}{m}$



对于对应的齐次线性方程 $y''+k^2y=0$

有特征方程 $r^2+k^2=0$，

则有共轭复根 $r_{1,2}=\pm ki$

于是有通解 $y=C_1\cos kt+C_2\sin kt$，其中 C_1, C_2 为任意常数

令 $C_1=A\sin\varphi$，$C_2=A\cos\varphi$，其中 A, φ 为常数

则有通解 $y=A\sin(kt+\varphi)$

注意到方程右侧有 $f(t)=h\sin pt$

比较 $f(t)=e^{\lambda t}[P_l(t)\cos\omega t+Q_n(t)\sin\omega t]$

则有 $\lambda=0$，$P_l(t)=0$，$Q_n(t)=h$，$\omega=p$

当 $p\neq k$ 时，则 $\lambda\pm\omega i=\pm pi\neq\pm ki$，即不是特征方程的共轭复根

于是设特解 $y^*=a_1\cos pt+b_1\sin pt$

则有 $y^{*''}=-a_1p^2\cos pt-b_1p^2\sin pt$

代入方程有 $-a_1p^2\cos pt-b_1p^2\sin pt+a_1k^2\cos pt+b_1p^2\sin pt\equiv h\sin pt$

于是有 $a_1(-p^2+k^2)=0$，$b_1(k^2-p^2)=h$

即 $a_1=0$，$b_1=\frac{h}{k^2-p^2}$

则有特解 $y^*=\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt$

于是 $p\neq k$ 时，方程有通解 $y=A\sin(kt+\varphi)+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt$

于是可知两部分都是简谐振动 (simple harmonic motion)

第一项表示自由振动，后一项表示强迫振动

当干扰力角频率 p 接近 k 时，振幅 $\left|\frac{h}{k^2-p^2}\right|$ 可以很大

当 $p=k$ 时，则 $\lambda\pm\omega i=\pm pi=\pm ki$，即是特征方程的一对共轭复根

于是设特解 $y^*=t(a_1\cos pt+b_1\sin pt)=t(a_1\cos kt+b_1\sin kt)$

则有 $y^{*''}=(2b_1k-a_1k^2t)\cos kt+(-2a_1k-b_1k^2t)\sin kt$

代入方程有 $2b_1k\cos kt-2a_1k\sin kt\equiv h\sin pt$

于是有 $2b_1k=0$，$-2a_1k=h$

即 $a_1=-\frac{h}{2k}$，$b_1=0$

则特解为 $y^*=-\frac{h}{2k}t\cos kt$

于是 $p=k$ 时，方程有通解 $y=A\sin(kt+\varphi)-\frac{h}{2k}t\cos kt$

后一项强迫振动 $-\frac{h}{2k}t\cos kt$，

注意到当 $t\to\infty$ 时，振幅 $\left|\frac{h}{2k}t\right|\to\infty$

称为共振 (resonance)

Calculus - P113

欧拉方程(Euler equation)，指形如 $x^n y^{(n)} + x^{n-1} p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n x^0 y = f(x)$ 的变系数微分方程

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数，

可以通过变量代换化为常系数线性微分方程，从而易于求解

令 $x = e^t$，则有 $t = \ln x$，即 $dt = \frac{1}{x} dx$

则 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$

$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$

如果记 D 为对 t 求导运算 $\frac{d}{dt}$，即有 $\frac{dy}{dt} = Dy$

则有 $Dy = xy'$，

$x^2y'' = D(D-1)y$，$x^3y''' = D(D-1)(D-2)y$

于是一般地有 $x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$

代入原微分方程则可得到以 t 为自变量的常系数线性微分方程

即 $D^n y + q_1 D^{n-1} y + q_2 D^{n-2} y + \cdots + q_n y = f(e^t)$

可以通过一般常系数微分方程的方式得到通解再代入 $t = \ln x$ 得到关于 x 的通解

微分方程组，指由几个微分方程联立，共同确定几个具有同一自变量的函数的情形

常系数线性微分方程组，指微分方程组中每个微分方程都是常系数的

通常的求解过程为

1. 从方程组中消去部分未知函数及其各阶导数

   从而得到只含一个未知函数的高阶常系数线性微分方程

2. 解高阶微分方程，得到满足该方程的未知函数

3. 将已求得的函数代入原方程组，通常不必积分即可求得其他未知函数

如对于方程组 $\frac{dy}{dx} = 3y - 2z$，$\frac{dz}{dx} = 2y - z$

则有 $y = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} + z\right)$

对两侧同时求导，则有 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\right)$

代入则有 $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{dz}{dx} + z\right) - 2z$

则有 $\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx} + z = 0$

于是得到 z 的通解 $z = (C_1 + C_2 x)e^x$，其中 C_1, C_2 为任意常数

代入则有 $y = \frac{1}{2}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x)e^x$

在讨论常系数线性微分方程或方程组时

常采用记号 D 表示对方程或方程组的自变量 x 的求导运算 $\frac{d}{dx}$

Calculus - P114

向量 (vector, 矢量), 客观世界中既有大小, 也有方向的量
用 $\overrightarrow{AB}$ 表示以点A为起点, 以点B为终点的有向线段

自由向量 (free vector), 在数学上通常只研究与起点无关的向量, 记为 $\vec{a}$, $\vec{r}$, $\vec{0}$ 等
即只考虑向量的大小和方向, 而不论起点在空间中的什么位置

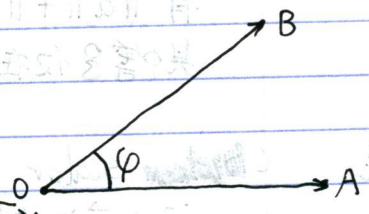
相等 (equality), 对于自由向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 大小相等且方向相同
则称向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是相等的, 记作 $\vec{a}=\vec{b}$
也可以描述为, 在空间中的向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$
如果 $\vec{b}$ 可以由向量 $\vec{a}$ 经过平行移动得到, 即完全重合
则称向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是相等的

模 (magnitude, norm, length), 指向量的大小,
$\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\vec{a}\|$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\vec{a}$ 的大小, 也可以表示为 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $|\vec{a}|$

单位向量 (unit vector), 指大小为1的向量,
通常将不同方向的单位向量记为 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, ...

零向量 (zero vector), 指大小为0的向量, 记为 $\vec{0}$
零向量的起点与终点重合, 其方向可以视为任意方向

夹角 (included angle), 指对于非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$,
任取空间内一点O, 作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 和 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,
规定角 $\varphi=\angle AOB$, 有 $0\le\varphi\le\pi$,
称 φ 为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角, 记作 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$
特别地有, 如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 中存在零向量 $\vec{0}$
则 $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 可取 $[0,\pi]$ 中的任意值



平行 (parallel), 对于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 如果有夹角 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$
则称向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 平行, 记为 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 也称为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线

垂直 (perpendicular), 对于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 如果有夹角 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,
则称向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 垂直, 记为 $\vec{a}\perp\vec{b}$
特别地有, 零向量 $\vec{0}$ 可视为与任意向量平行, 也可以视为与任意向量垂直

Calculus - P115

共面　对于k个向量 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_k}$，其中 $k \geq 3$

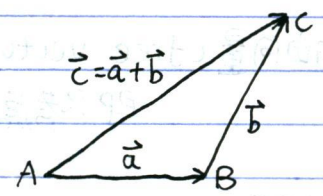
使向量有公共起点O，即有 $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a_1}$，$\overrightarrow{OA_2} = \vec{a_2}$，$\cdots$，$\overrightarrow{OA_n} = \vec{a_n}$

如果点 $O, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 共面，则称向量 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}$ 共面

和　三角形法则(triangle rule)，对于向量 $\vec{a}, \vec{b}$

在空间任取一点A，作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

作向量 $\overrightarrow{AC}$，并令 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$，则有 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

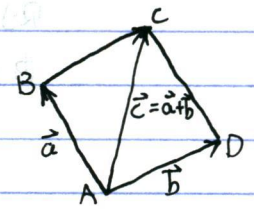


平行四边形法则(parallelogram rule)，对于不平行的向量 $\vec{a}, \vec{b}$

在空间任取一点A，作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

以AB, AD为边作平行四边形ABCD，并连接对角线AC

作向量 $\overrightarrow{AC}$，并令 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$，则有 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



交换律(commutative)：$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

结合律(associative)：$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

负向量　(opposite)，对于向量 $\vec{a}$，与其模相同而方向相反的向量

记为 $-\vec{a}$，称为 $\vec{a}$ 的负向量，

并规定向量的差 $\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$

三角不等式(triangle inequality)，对于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$

有 $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \geq \|\vec{a} + \vec{b}\|$ 且 $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \geq \|\vec{a} - \vec{b}\|$

其中等号仅在 $\vec{a}, \vec{b}$ 同向 或 $\vec{a}, \vec{b}$ 反向(antiparallel)时取得

数乘：(scalar multiplication)，对于向量 $\vec{a}$ 与实数 λ，

记 $\lambda\vec{a}$ 为向量 $\vec{a}$ 与实数 λ 的乘积的向量

且有 $\lambda\vec{a}$ 的模 $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$，

当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向

对于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，实数 λ, μ

结合律：$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$

分配律(distributive)：$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$，$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

更一般地有，$(\lambda + \mu)(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{b}$

Calculus - P116

线性运算 (linear operation)，指向量的相加和数乘

对于非零向量 $\vec{a}$，记 $\vec{e}_a$ 为与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量

由于 $\|\vec{a}\|>0$，则 向量 $\|\vec{a}\|\vec{e}_a$ 与 $\vec{e}_a$ 方向相同，

又 $\|\|\vec{a}\|\vec{e}_a\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{e}_a\| = \|\vec{a}\|\cdot 1 = \|\vec{a}\|$

于是有 $\|\vec{a}\|\vec{e}_a$ 与 $\vec{a}$ 方向相同且模也相同

即有 $\|\vec{a}\|\vec{e}_a = \vec{a}$

又对于向量数乘，令 对于 $\lambda\neq 0$，

有 $\vec{a}/\lambda = (1/\lambda)\vec{a}$

则有 $\vec{e}_a = \vec{a}/\|\vec{a}\|$

即与非零向量同方向的单位向量，等于非零向量除以向量的模

数轴理论依据 对于向量 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 和 $\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$ 当且仅当存在唯一实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$

充分性的证明有，当 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ 时，即向量 $\vec{b}$ 为向量 $\vec{a}$ 与实数 λ 的数乘

则当 $\lambda>0$ 时，$\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时，$\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向

当 $\lambda=0$ 时，$\vec{b}=\vec{0}$，则可视为与 $\vec{a}$ 平行

于是有 $\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$，即 $\vec{a}\parallel\vec{b}$

必要性的证明有，当 $\vec{b}\parallel\vec{a}$ 时，取实数 $|\lambda| = \|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|$

并且当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时，λ 取正值，当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时 λ 取负值

特别地当 $\lambda<0$ 时，$\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向

且有 $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{a}\| = (\|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|)\cdot\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$

于是有 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ 对于 实数 λ 成立，即实数 λ 存在

再假定存在实数 λ，μ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，$\vec{b}=\mu\vec{a}$

则有 $\vec{b}-\vec{b} = \lambda\vec{a}-\mu\vec{a} = (\lambda-\mu)\vec{a} = \vec{0}$

于是 $\|(\lambda-\mu)\vec{a}\| = |\lambda-\mu|\cdot\|\vec{a}\| = \|\vec{0}\| = 0$

又 $\vec{a}\neq\vec{0}$，于是 $\|\vec{a}\|\neq 0$，则有 $|\lambda-\mu|=0$，于是 $\lambda=\mu$

于是有对于向量 $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\parallel\vec{b} \longleftrightarrow \exists!_{\lambda\in\mathbb{R}}\ \vec{b}=\lambda\vec{a}$

给定原点 O，单位向量 $\vec{i}$，则确定数轴 Ox，

对于数轴上任意一点 P，对应唯一的向量 $\overrightarrow{OP}$

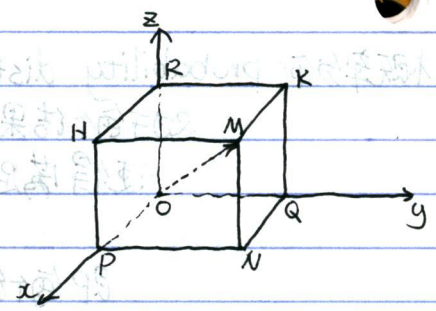
由于 $\overrightarrow{OP}\parallel\vec{i}$，则存在唯一实数 x，使得 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$

则实数 x 恰为数轴上有向线段 $\overline{OP}$ 的值

于是有一一对应关系，数轴上点 P $\longleftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$ $\longleftrightarrow$ 实数 x

Calculus - P117

空间直角坐标系(space rectangular coordinate system)



在空间取定一点O和两两垂直的单位向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

确定以O为原点,并且两两垂直的数轴 x, y, z

构成空间直角坐标系 $Oxyz$, 又称 $[O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$

对于任意向量 $\vec{r}$, 存在对应点M, 使得 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

作正方体 RHMK - OPNQ,

则有 $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$

取实数 x, y, z, 使得 $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OR} = z\vec{k}$

则有 $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

称为向量 $\vec{r}$ 的坐标分解式(coordinate decomposition)

$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿坐标轴方向的分向量(subvector)

于是空间直角坐标系中的点M, 向量 $\vec{r}$, 有序数 (x, y, z) 之间存在一一对应关系

$M \longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \longleftrightarrow (x, y, z)$

有序数 (x, y, z) 称为向量 $\vec{r}$ 的坐标(coordinate), 记作 $\vec{r} = (x, y, z)$

也称为点M在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标, 记为 $M(x, y, z)$

向量 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ 称为点M关于原点O的向径(radius vector), 也称径向量

注意坐标系中的点与该点的向径有相同的坐标

于是 (x, y, z) 既表示点M, 也表示向径 $\vec{r}(M) = \overrightarrow{OM}$

坐标线性运算

对于向量 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 以及实数 λ

于是有 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

则有 $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$

$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}$

即 $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

当 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 当且仅当存在唯一实数 λ, 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$

于是有 $(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

即有 $\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$

特别地有, 当 a_x, a_y, a_z 中有一个为0时, 如 $a_x = 0$

则有 $b_x = 0$, $\frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$

当 a_x, a_y, a_z 中有两个为0时, 如 $a_x = 0$, $a_y = 0$

则有 $b_x = b_y = 0$, b_z 可取任意实数

Calculus - P118

λ分点

对于空间直角坐标系 $Oxyz$ 上的点，$A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$

对于实数 $\lambda \neq -1$，直线 AB 上的点，M，使得 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$

由于点 M 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 相对应，即有相同的 (x, y, z)

则点 M 的坐标即向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标

于是有 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$

则 $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$

$$(1+\lambda)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$$

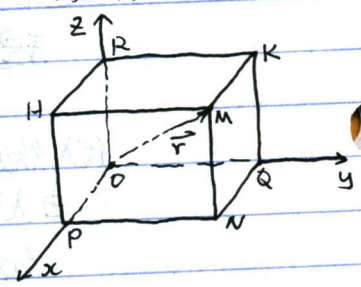
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

于是有 $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$

即点 M 坐标为 $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$

称点 M 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点，

特别地当 $\lambda = 1$ 时，$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点



模与两点间距离

对于向量 $\vec{r} = (x, y, z)$，作 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

于是有 $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$

则有 $\|\vec{r}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{OP}\|^2 + \|\overrightarrow{OQ}\|^2 + \|\overrightarrow{OR}\|^2}$

又 $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$，$\overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$，$\overrightarrow{OR} = z\vec{k}$

则有 $\|\overrightarrow{OP}\| = |x|$，$\|\overrightarrow{OQ}\| = |y|$，$\|\overrightarrow{OR}\| = |z|$

于是向量 $\vec{r} = (x, y, z)$ 的模 $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

对于点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，AB 间的距离 $|AB|$ 等于 $\|\overrightarrow{AB}\|$ 的模

由于 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$

$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

于是 $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} = |AB|$

方向角

(direction angle)，对于非零向量 $\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{r}$ 与坐标轴的夹角 α, β, γ 称为 $\vec{r}$ 的方向角

在直角三角形 $\triangle OPM$ 中，$|OM| = \|\vec{r}\|$

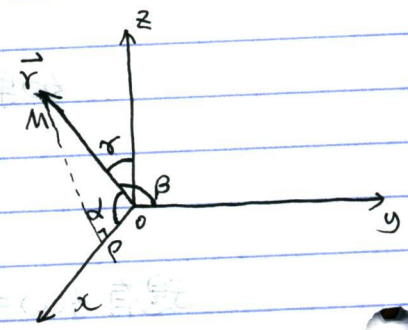
于是有 $\cos\alpha = \frac{x}{|OM|} = \frac{x}{\|\vec{r}\|}$

类似地有 $\cos\beta = \frac{y}{\|\vec{r}\|}$，$\cos\gamma = \frac{z}{\|\vec{r}\|}$

于是有 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{x}{\|\vec{r}\|}, \frac{y}{\|\vec{r}\|}, \frac{z}{\|\vec{r}\|}\right) = \frac{1}{\|\vec{r}\|}(x, y, z) = e_r$

称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为向量 $\vec{r}$ 的方向余弦 (direction cosine)

且有 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \|\vec{e}_r\| = 1$



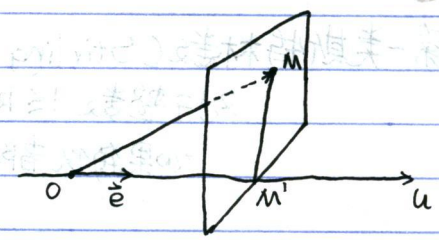
Calculus - P119

投影(scalar projection)，对于x轴与向量$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$

过点M作与x轴垂直的平面，交x轴于P

得到向量$\vec{r}$在x轴上的分量$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$

且有$x=\|\vec{r}\|\cos\alpha$



一般地有对于原点O和单位向量$\vec{e}$确定的u轴

对于任意向量$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$，过点$M$作与$u$轴垂直的平面，交$u$轴于$M'$

则称点M'为点M在u轴上的投影

称向量$\overrightarrow{OM'}$为向量$\vec{r}$在u轴上的分向量

设$\overrightarrow{OM}=\lambda\vec{e}$，则称实数$\lambda$为向量$\vec{r}$在$u$轴上的投影，记为$Prj_u\vec{r}$或$(\vec{r})_u$

于是对于空间直角坐标系$Oxyz$和向量$\vec{r}=(x,y,z)$

有$x=Prj_x\vec{r}$，$y=Prj_y\vec{r}$，$z=Prj_z\vec{r}$

向量的投影具有与坐标相同的性质：

$Prj_u(\vec{r})=\|\vec{r}\|\cos\varphi$，其中$\varphi$为向量$\vec{r}$与$u$轴的夹角

$Prj_u(\vec{a}+\vec{b})=Prj_u\vec{a}+Prj_u\vec{b}$

对于实数λ，有$Prj_u(\lambda\vec{r})=\lambda Prj_u(\vec{r})$

数量积(dot product，scalar product)，对于向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，有夹角θ

则取向量的模$\|\vec{a}\|$和$\|\vec{b}\|$以及夹角θ的余弦值$\cos\theta$

定义向量的数量积$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$

由于$\|\vec{b}\|\cos\theta=\|\vec{b}\|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$，当$\vec{a}\neq\vec{0}$时为向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$方向上的投影

于是有$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|Prj_{\vec{a}}\vec{b}$，

即有$Prj_{\vec{a}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}/\|\vec{a}\|$

同理当$\vec{b}\neq0$时，有$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{b}\|\cdot Prj_{\vec{b}}\vec{a}$

对于向量$\vec{a}$，有$\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2=x^2+y^2+z^2$

由于向量$\vec{a}$与自身的夹角$\theta=0$

于是有$\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|\|\vec{a}\|\cdot\cos\theta=\|\vec{a}\|^2$

对于非零向量$\vec{a},\vec{b}$，$\vec{a}\perp\vec{b}$当且仅当$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

当$\vec{a}\perp\vec{b}$时，夹角$\theta=\frac{\pi}{2}$，于是有$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta=0$

当$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$时，又$\|\vec{a}\|\neq0$，$\|\vec{b}\|\neq0$，则$\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}/\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|=0$

于是有$\theta=\frac{\pi}{2}$，即$\vec{a}\perp\vec{b}$