Calculus - P64

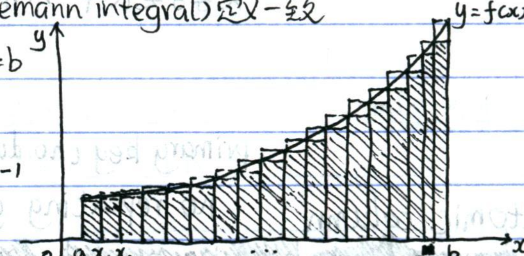
定积分"ε-δ" 对于函数$f(x)$，设存在常数I，使得对于任意正数ε，总存在一个正数δ，
使得对于区间$[a,b]$的任何划分法，即 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$
不论ξ_i在$[x_{i-1},x_i]$上如何选取，其中$i=1,2,\cdots,n$
只要 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}<\delta$，其中$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$
总有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon$ 成立，称 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为函数$f(x)$的积分和
则称I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)dx$
称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上是可积的(integrable)

不变性 当 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 极限I存在时，则I仅与函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关，
而与积分变量符号无关，即 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$

可积 对于函数$f(x)$，如果在区间$[a,b]$上连续，则函数$f(x)$在$[a,b]$上可积
即函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有原函数$F(x)$
对于函数$f(x)$，如果在区间$[a,b]$上有界，且只有有限多个间断点，则函数$f(x)$在$[a,b]$上可积
即函数$f(x)$在区间$[a,b]$不存在无穷间断点，

近似计算 对于函数$f(x)$，在区间$[a,b]$上连续，则可知函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分$\int_a^b f(x)dx$存在

矩形法(Riemann sum)，指在积分过程中用窄矩形面积代替窄曲边梯形面积，
当矩形法不断细分矩形时，其和的形式与黎曼积分(Riemann integral)定义一致
计算过程为，对区间$[a,b]$进行等分，即取 $a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b$
将区间$[a,b]$分成n个长度相等的小区间，
其中小区间长度 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$，并取$[x_{i-1},x_i]$上的$\xi_i=x_{i-1}$
于是有 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_{i-1})$
即对于任意正整数n，有 $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})$
记 $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$，则有 $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$
如果取$[x_{i-1},x_i]$上的$\xi_i=x_i$，则有$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$



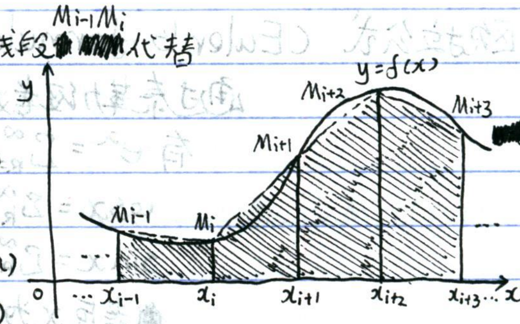

```
riemannIntegral :: (Fractional a, Ord a) => (a -> a) -> a -> a -> Int -> a
riemannIntegral f a b n
  | a == b     = 0
  | otherwise  =            fromIntegral :: (Integral a, Num b) => a -> b
    let dx  = (b - a) / (fromIntegral n)   将Int类型的n转换为Fractional
        lst = f <$> (take n (iterate (+ dx) a))
    in dx * (sum lst)
```

如 riemannIntegral (\x -> x * x) 0 1 100000 ⟶ 0.3333283333349371８

Calculus - P65

近似计算

梯形法 (trapezoidal rule)，指曲线 $y=f(x)$ 上的弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 用直线段代替



即在积分过程中用窄梯形面积代替窄曲边梯形面积

计算过程为，对区间 $[a,b]$ 进行等分，即取 $a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b$

将区间 $[a,b]$ 分成 n 个长度相等的小区间

其中小区间长度为 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$，并取 $y_i=f(x_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$

于是有 $[x_{i-1},x_i]$ 上的窄梯形面积为 $\frac{1}{2}\Delta x(y_{i-1}+y_i)$

又 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$，则有对任意 $n\in Z^+$，有 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x$

分别取 $[x_{i-1},x_i]$ 上的 $\xi_i=x_{i-1}$，$\eta_i=x_i$，其中 $i=1,2,\cdots,n$

则有 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$，$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

于是有 $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x+\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right]$

$\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\Delta x(y_{i-1}+y_i)$，即窄梯形面积之和。

```haskell
trapezoidalRule :: (Fractional a, Ord a) => (a->a) -> a -> a -> Int -> a
trapezoidalRule f a b n
  | a == b    = 0
  | otherwise =
    let dx = (b - a) / (fromIntegral n)
        func x = ((f x) + (f (x+dx))) / 2
        lst = func <$> (take n (iterate (+ dx) a))
    in dx * (sum lst)
```

trapezoidalRule (\x -> x*x) 0 1 100000 → 0.333333333349374

辛普森法 (Simpson's rule) 指将曲线 $y=f(x)$ 上的弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 和弧段 $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ 合并

并用过 M_{i-1}, M_i, M_{i+1} 的抛物线 $y=px^2+qx+r$ 上的弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_{i+1}}$ 代替

即积分过程中用曲边为抛物线的窄曲边梯形面积代替原曲边梯形

计算过程为，对区间 $[a,b]$ 进行等分，即取 $a=x_0, x_1, \cdots, x_{2k}=b$

将区间 $[a,b]$ 分成 $2k$ 个长度相等的小区间

其中小区间长度为 $\Delta x=\frac{b-a}{2k}$，并取 $y_i=f(x_i)\ (i=0,1,\cdots,2k)$

于是有 $[x_{i-2},x_i]$ 上的窄曲边梯形面积为 $\frac{1}{6}(y_{i-2}+4y_{i-1}+y_i)\cdot 2\Delta x$，其中，$i=1,2,\cdots,2k$

又 $\int_a^b f(x)=\lim\limits_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{6}(y_{i-2}+4y_{i-1}+y_i)\cdot 2\Delta x$

则有对于任意 $k\in Z^+$，$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{6}(y_{i-2}+4y_{i-1}+y_i)\cdot 2\Delta x$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{b-a}{6k}[y_0+4y_1+y_2+y_2+4y_3+y_4+\cdots+y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}]$$

$$=\frac{b-a}{6k}[y_0+y_{2k}+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2k-2})]$$

Calculus - P66

辛普森法

```haskell
simpsonRule :: (Fractional a, Ord a) => (a -> a) -> a -> a -> Int -> a
simpsonRule f a b k
  | a == b    = 0
  | otherwise =
    let dx = (b - a) / (2 * fromIntegral k)
        lst1 = f <$> (take k (iterate (+ (dx*2)) (a + dx)))
        lst2 = f <$> (take (k-1) (iterate (+ (dx*2)) (a + (dx*2))))
    in dx * ((f a) + (f b) + (sum lst1)*4 + (sum lst2)*2)/3
```

simpsonRule (\x -> 1/x) 1 10 100000 $\rightarrow 2.302585092993248 \approx \ln|x|\Big|_1^{10}$

补充规定

当 $a=b$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 上有定义，则有 $\int_a^b f(x)dx = 0$

[redacted] 注意如果函数 $f(x)$ 在 a 上无定义，则视情况可规定 $\int_a^b f(x) = 0$

当 $a<b$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有 $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

性质

对于[redacted]函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

对于常数 α，β，有 $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

证明过程有，根据定义有 $\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

对于 $a<c<b$，有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

证明有，根据定义，积分和的极限与对区间 $[a,b]$ 的划分方式无关，

则假定在划分区间时，始终保持 c 为其中一个分点，

即 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = c$，$c = x_n < x_{n+1} < \cdots < x_{n+m-1} < x_{n+m} = b$

于是 $\sum\limits_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x + \sum\limits_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x$，

又 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$，$[c,b]$ 上均连续，

且当 $n\to+\infty$，$m\to+\infty$ 时 $n+m\to+\infty$，$\lambda = \max\{\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n, \cdots \Delta x_{n+m}\}$，$\lambda\to 0$

则 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n+m\to\infty}\sum\limits_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

称为定积分对于积分区间的可加性

又 $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$，

则有 $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

于是可加性可以推广至任意不相等的[redacted]常量 a,b,c，$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

只要函数 $f(x)$ 在区间 $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$ 上是可积的

Calculus - P67

对于函数 $f(x)$，如果在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)\equiv 1$，则 $\int_a^b 1\,dx = \int_a^b dx = b-a$

证明过程，可知 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积

即对区间 $[a,b]$ 的任意划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$

有 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，其中 ξ_i 为 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点，$i=1,2,\cdots,n$

又 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)\equiv 1$

于是 $\int_a^b 1\,dx = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = x_n - x_0 = b-a$

对于函数 $f(x)$，如果在区间 $[a,b]$ 上可积

且 $f(x)\geq 0$，则有 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$，注意这里假定了 $a<b$

证明过程，由 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积可知，$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

又在 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 的划分中，

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$，又 $f(\xi_i)\geq 0$，$i=1,2,\cdots,n$

则有 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$，

即 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$

推论，对于函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，在区间 $[a,b]$ 上可积，其中 $a<b$

如果 $f(x)\leq g(x)$，则有 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

证明过程，取辅助函数 $\varphi(x) = g(x) - f(x)$，

则可知 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积且 $\varphi(x)\geq 0$

于是有 $\int_a^b \varphi(x) \geq 0$，即 $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx \geq 0$

即 $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

推论，对于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则有 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

证明过程有，已知 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

而 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则有 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积

于是 $\int_a^b -|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

对于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且有最大值 M 和最小值 m，

则 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

证明过程有，已知 $m\leq f(x)\leq M$，又 $\varphi(x)=m$ 和 $\psi(x)=M$ 在区间 $[a,b]$ 上可积

则有 $m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$

注意 可扩展为任意可积的 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，$\varphi(x)\leq f(x)\leq \psi(x)$，则 $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$

Calculus - P68

积分中值定理 (mean value theorem for definite integral) 揭示了一种将积分化为函数值的方法.

对于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 内保持同号

则存在一点 $\xi \in [a,b]$

使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

证明过程有, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则必然存在最大值 M 与最小值 m

于是有 $m g(x) \le f(x)g(x) \le M g(x)$

则有 $\int_a^b m g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b M g(x)dx$

如果 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 则有 $0 \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le 0$, 即 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$

则在区间 $[a,b]$ 任意取一点 ξ, 都有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

如果 $\int_a^b g(x)dx > 0$, 则 $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$

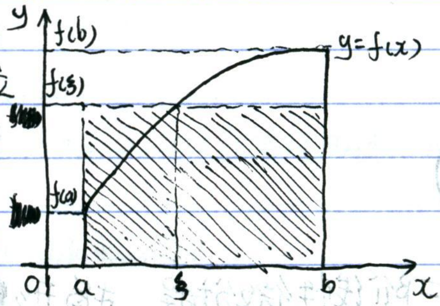
且对于 $\int_a^b g(x)dx < 0$, $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$ 也成立

又 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续 且有值域 $\in [m,M]$

则对于任意 $y \in [m,M]$, 存在点 x 使得 $f(x)=y$

于是存在区间 $[a,b]$ 上的 ξ, 使得 $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

于是有 $f(\xi)\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$



当取 $g(x)=1$ 时, 有 $\int_a^b g(x)dx = b-a$

则积分中值定理可简化为 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, 则 $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ 也称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值

另外积分中值定理对 $\xi \in (a,b)$ 也成立, 即开区间 (a,b) 中总能取到点 ξ

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则假设 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$

可知 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则根据拉格朗日中值定理

存在点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$

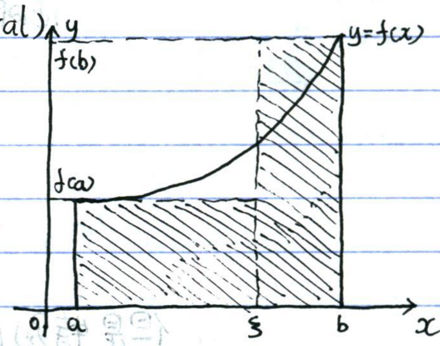
即 $f(\xi) = F'(\xi) = \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a} = \dfrac{\int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx}{b-a}$, 即 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

积分第二中值定理, 为与积分中值定理相互独立但更精细的积分中值定理, 所以上述定理被称积分第一中值定理

对函数 $g(x)$, $(f\cdot g)(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积 (Riemann integral),

且 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则存在点 $\xi \in [a,b]$

使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$



当取 $g(x)=1$ 时, 有 $\int_a^b g(x)dx = b-a$.

则定理可简化为 $\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi-a) + f(b)(b-\xi)$

Calculus - P69

积分上限函数 对于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则设x为区间$[a,b]$上的一点

则有积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$

$\Phi(x)$在区间$[a,b]$上可导，且导数 $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$，$x\in[a,b]$

证明过程有，首先$f(x)$在$[a,x]$上依旧连续

于是$f(x)$在$[a,x]$上也是可积的，即$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上有定义

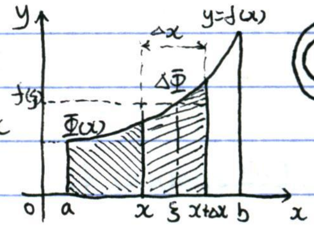
则对于$x\in(a,b)$，$x+\Delta x$为x的某个去心邻域$\mathring{U}(x)$内的一点

如果Δx足够小，使得$x+\Delta x\in(a,b)$

则 $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt$

由此 $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$

$=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$



又根据积分中值定理，则存在$\xi\in[x,x+\Delta x]$

使得 $\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x$

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，于是当$\Delta x\to0$时，$\xi\to x$

即 $\lim_{\Delta x\to0}f(\xi)=f(x)$，又$\Delta x\neq0$，

则 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}f(\xi)=f(x)$，即$\Phi(x)$在$x$处的导数$\Phi'(x)$存在

即 $\Phi'(x)=f(x)$

同理当$x=a$时，可取过程$\Delta x\to0^+$，则有$\Phi'_+(a)=f(a)$

当$x=b$时，可取过程$\Delta x\to0^-$，则有$\Phi'_-(b)=f(b)$

于是可知 对于积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$

有 $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$，$x\in[a,b]$

且由此可以推出，积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数

一方面由此证明了连续函数的原函数的存在性

另一方面揭示了连续函数的定积分与其原函数的关系

牛顿-莱布尼茨公式(Newton-Leibniz formula)，也称微积分基本定理(fundamental theorem of calculus)

对于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$F(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数

则有 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$，或记为 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b$

证明过程有，已知积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$在$[a,b]$上的原函数

则可知 $F(x)-\Phi(x)=C$，其中C为一个常量，$x\in[a,b]$

取$x=a$，则有$F(a)-\Phi(a)=C$，

又$\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0$，于是有$F(a)=C$

于是有 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$

则取$x=b$，即 $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

表明连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分等于任意原函数$F(x)$在区间$[a,b]$上的增量

Calculus - P70

定积分换元法 对于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则如果函数$x=\varphi(t)$满足

(1) $\varphi(\alpha)=a$ 且 $\varphi(\beta)=b$；

(2) $\varphi(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上有连续导数，且值域$R_\varphi=[a,b]$

则有 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$，称为定积分的换元公式

证明过程有，已知$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上连续

则$f(x)$和$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在各自的区间上可积，且具有原函数

假设$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数

则有 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

又令 $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$，其中$F[\varphi(t)]$由$F[x]$和$\varphi(t)$复合而成

则 $\Phi'(t)=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$，其中$t\in[\alpha,\beta]$

于是可知$\Phi(t)$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上的一个原函数

即 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$

又 $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$，且$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$

于是有 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$

$= F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx$

注意：实际上即用$x=\varphi(t)$，$\varphi'(t)dt=dx$代替，使得 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b}$

而用$x=\varphi(t)$替代变量x时，定积分的积分限应转换为变量t的积分限

另外在求出$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数$\Phi(t)$后

不必像不定积分一样，利用$t=\varphi^{-1}(x)$替换，从而得到$\Phi[\varphi^{-1}(x)]$

而是直接利用变量t的积分限$[\alpha,\beta]$计算$\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$即可

奇偶函数 对于函数$f(x)$在区间$[-a,a]$上连续，其中$a>0$

则如果$f(x)$是偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

如果$f(x)$是奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

证明过程有，已知点$x=0$在区间$[-a,a]$内，

于是有 $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

令 $x=-t$，则$dx=-dt$，当$x=0$时，$t=0$，当$x=-a$时，$t=a$

于是 $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dx = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$

则有 $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$

于是当$f(x)$为偶函数时，有$f(x)+f(-x)=2f(x)$

即 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

当$f(x)$为奇函数时，有$f(x)+f(-x)=0$

即 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Calculus - P71

对于函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则有

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

证明过程有，可知当 $x\in[0,\pi/2]$ 时，$\cos x\in[0,1]$，于是 $f(\cos x)$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\in[0,1]$，于是 $f(\sin x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上连续

则令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，于是当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$

又 $dx=-dt$，

于是 $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_{\pi/2}^{0} f[\sin(\frac{\pi}{2}-t)]\cdot -dt$

$= \int_0^{\pi/2} f(\cos t)dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

又令 $x=\pi-t$，则 $dx=-dt$

且有当 $x=0$ 时，$t=\pi$，又当 $x=\pi$ 时，$t=0$

于是 $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\cdot -dt$

$= \int_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)dt$

$= \int_0^{\pi}\pi f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx$

即 $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

对于函数 $f(x)$ 是连续周期函数，周期为 $T>0$，

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx\text{，其中 } n\in N$$

证明过程有，取积分上限函数 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$

又 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{a+T} f(x)dx$

$= \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \Phi(a+T)-\Phi(a)$

则 $[\int_a^{a+T} f(x)dx]' = [\Phi(a+T)-\Phi(a)]'$

$= f(a+T) - f(a) = 0$

即 $\int_a^{a+T} f(x)dx$ 是一个与 a 的取值无关的常量

则取 $a=0$，有 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

对于 $\int_a^{a+nT} f(x)dx$，可划分为 n 个积分区间长度为 T 的积分

即 $\int_a^{a+nT} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)T}^{a+kT} f(x)dx$

对于每一项都满足 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

于是 $\int_a^{a+nT} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)T}^{a+(k-1)T+T} f(x)dx$

$= \sum_{k=1}^{n}\int_0^T f(x)dx$

$= n\int_0^T f(x)dx$

注意这里假定了 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上是有定义的

Calculus - P72

定积分分部积分 对于函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$，在区间 $[a,b]$ 上都有连续导数

则有 $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int u(x)v'(x)dx \Big|_a^b$

根据不定积分的分部积分 $= [u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx]\Big|_a^b$

$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

或者记为 $\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx$

或 $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

其中 $uv\Big|_a^b$ 表明，对于原函数中已经积分得到的部分

可以先行使用积分上下限代入计算。

对于 $n\in N$，取 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}, \quad I_0=\frac{\pi}{2} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n\text{为奇数且}n>1, \quad I_1=1 \end{cases}$$

证明过程有：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}x\,\sin x\,dx$

$= -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}x\,d(\cos x)$

$= -\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,d(\sin^{n-1}x)$

又 $-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\pi/2}=0$ $\qquad = (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx$

$= (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx$

$= (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$

即有 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

又 $I_0 = \int_0^{\pi/2}dx = \frac{\pi}{2}$，$I_1 = \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = 1$，$\int_0^{\pi/2}(\cos x)^n dx = \int_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx$

于是可以递归地定义 I_n，$n\in N^+$，其中 $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$

$$I_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n=0 \\ 1, & n=1 \\ \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}, & n>1 \end{cases} \quad \text{即 } I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0, & n\text{为偶数}, I_0=\frac{\pi}{2} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1, & n>1\text{且}n\text{为奇数}, I_1=1 \end{cases}$$

$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ 令 $\sqrt{x}=t$，则有 $x=t^2$，即 $dx=2t\,dt$

当 $x=0$ 时，$t=0$，当 $x=1$ 时，$t=1$

即 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 e^t\cdot 2t\,dt = \int_0^1 2t\,d(e^t)$

根据分部积分公式

$\int_0^1 2t\,d(e^t) = 2te^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t dt$

$= 2e - 2\cdot e^t\Big|_0^1$

$= 2e - 2(e-1)$

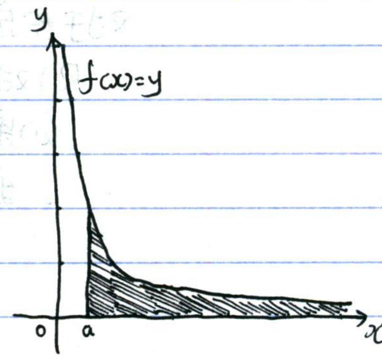
$= 2$

Calculus - P73

反常积分 (improper integral) 是对普通定积分的推广

无穷积分 又称无穷限的反常积分 (integral defined on an unbounded domain)

即积分区间的上限或下限为无穷大



对于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，则对于 $t\in[a,+\infty)$

有积分上限函数 $\Phi(t)=\int_a^t f(x)dx$

则有反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\Phi(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$

如果极限 $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ 存在，即 $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx=A$

则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，并有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=A$

否则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

可以类似地定义 对于函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续

则有反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\Phi(t)$，其中 $\Phi(t)$ 为积分下限函数

如果极限 $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$ 存在，即 $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx=B$

则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛，并有 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=B$

否则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散

对于函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则可对反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 进行划分

即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)dx$

如果反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 和 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 均收敛

即极限 $\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 f(x)dx=A$ 和 $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx=B$ 都存在

则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=A+B$

否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散

如果 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的一个原函数，

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}[F(t)-F(a)]=\lim_{t\to+\infty}F(t)-F(a)$

将 $\lim_{t\to+\infty}F(t)$ 记作 $F(+\infty)$

则可知，当极限 $F(+\infty)$ 存在时，反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，否则发散

且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(a)$

类似地有 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=F(b)-F(-\infty)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(-\infty)$

Calculus - P74

瑕积分

对于函数 $f(x)$，在点 a 的任一去心邻域 $\mathring{U}(a)$ 都无界，

则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点，又称无限间断点 (infinit discontinuity)

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，则取点 $t\in(a,b]$

取积分下限函数 $\Phi(t)=\int_t^b f(x)dx$

则极限 $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\Phi(t)=\Phi(a^+)$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分，即瑕积分

仍记为 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$

如果极限 $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx=A$ 存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

且 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx=A$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

对于函数 $f(x)$，在区间 $[a,b)$ 上连续，且点 b 为瑕点

取点 $t\in[a,b)$，则有 $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$

如果极限 $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx=B$ 存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

且 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx=B$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

对于函数 $f(x)$，在区间 $[a,c)\cup(c,b]$ 上连续，其中点 c 为瑕点，

则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的反常积分为区间 $[a,c)$ 上的反常积分与 $(c,b]$ 上反常积分之和

记为 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

$=\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx+\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$

如果极限 $\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx=A$ 和 $\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx=B$ 均存在

即反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 均收敛，

则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且 $\int_a^b f(x)dx=A+B$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

瑕积分同样可以使用原函数表示

即如果 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有原函数 $F(x)$

则 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}[F(b)-F(t)]=F(b)-\lim_{t\to a^+}F(t)=F(b)-F(a^+)$

即形式上仍有 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b$

对于形如 $[a,b)$ 的瑕积分同样适用

但是对于形如 $[a,c)\cup(c,b]$ 的瑕积分，不能直接使用 $F(x)\big|_a^b$

而是必须对 $[a,c)$ 和 $(c,b]$ 分段考虑