Linear Algebra - P29

对于n×n矩阵A，如果A为三角形矩阵，则A的行列式等于其对角线元素的乘积

即 $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

证明过程为：首先考虑 n×n 矩阵A为下三角矩阵

即 对于 $1 \le i < j \le n$, $a_{ij} = 0$

基础步骤：当 $n=1$ 时，矩阵 $A = [a_{11}]$

则 $\det(A) = a_{11} = \sum_{i=1}^{1} a_{ii}$ 平凡地成立

递归步骤：假设对于任意正整数n，$P(n)$为真，则考虑$P(n+1)$

由于$(n+1)\times(n+1)$下三角矩阵A的第一行元素中

除 a_{11} 外的其他元素 $a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1,n+1}$ 均为0

则对于 $\det(A)$ 按第一行进行展开

则有 $\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) + \cdots + a_{1,n+1}\det(M_{1,n+1})$

$= a_{11}\det(M_{11})$

注意 a_{11} 的子式 M_{11} 由A删除第1行与第1列得到

所以 M_{11} 为 n×n 的下三角矩阵

且其对角线元素为 $a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{n+1,n+1}$

于是 $\det(A) = a_{11}\det(M_{11})$

$\overset{\text{归}}{=} a_{11} \cdot \prod_{i=2}^{n+1} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}$

于是根据数学归纳法有，对于任意正整数n，

n×n下三角矩阵A的行列式 $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

又对于任意 n×n 上三角形矩阵A，其转置A^T为下三角形矩阵，且具有相同的对角线元素

于是有 $\det(A) = \det(A^T) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

对于 2×2 矩阵 A，B，以及2×2矩阵 C，D

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

则有 $\det(A+B) = \det(A) + \det(B) + \det(C) + \det(D)$

证明过程有，$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，$\det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$

$\det(C) = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}$，$\det(D) = b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}$

又矩阵 $A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

则 $\det(A+B) = (a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22}) - (a_{12}+b_{12})(a_{21}+b_{21})$

$= a_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} + b_{11}b_{22} - a_{12}a_{21} - a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} - b_{12}b_{21}$

$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$

$= \det(A) + \det(C) + \det(D) + \det(B)$

Linear Algebra - P30

对于2×2矩阵A, B, 以及实数α, β，

如果有 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ (2X2矩阵), $B = EA = \begin{bmatrix} \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ \beta a_{11} & \beta a_{12} \end{bmatrix}$

则有 $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

证明过程有，$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\det(B) = \alpha\beta a_{21}a_{12} - \alpha\beta a_{22}a_{11}$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} \\ a_{21}+\beta a_{11} & a_{22}+\beta a_{12} \end{bmatrix}$$

于是 $\det(A+B) = (a_{11}+\alpha a_{21})(a_{22}+\beta a_{12}) - (a_{12}+\alpha a_{22})(a_{21}+\beta a_{11})$

$= a_{11}a_{22} + \beta a_{11}a_{12} + \alpha a_{21}a_{22} + \alpha\beta a_{21}a_{12}$

$- a_{12}a_{21} - \beta a_{11}a_{12} - \alpha a_{21}a_{22} - \alpha\beta a_{22}a_{11}$

$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (\alpha\beta a_{21}a_{12} - \alpha\beta a_{22}a_{11})$

$= \det(A) + \det(B)$

对于n×n矩阵A，且有当$|i-j|>1$时，$a_{ij}=0$，其中$n>2$

$(n-2)\times(n-2)$矩阵B为A删除前两行和前两列所形成的矩阵

则有 $\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}a_{21}\det(B)$

证明过程有：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \left[\begin{array}{c|cccc} a_{21} & a_{23} & 0 & & \\ \hline & a_{33} & a_{34} & 0 & \\ & a_{43} & a_{44} & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ & 0 & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}\right]$$

于是有 $\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12})$

$= a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}a_{21}\det(B) + a_{23}\cdot 0$

$= a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}a_{21}\det(B)$

对于n×n矩阵A，令A_{jk}表示a_{jk}的余子式，其中$k=1,2,\cdots,n$

则有 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det(A), & i=j \quad (\det(A)\text{的第}i\text{行展开}) \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

其中$i,j=1,2,\cdots,n$

证明过程有：当$i\neq j$时，取n×n矩阵A^*

为将矩阵A的第j行替换为第i行，即

$$A^* = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \end{array}$$

于是有 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$

$= a_{i1}A^*_{j1} + a_{i2}A^*_{j2} + \cdots + a_{in}A^*_{jn}$ ($\det(A^*)$的第j行展开)

$= \det(A^*) = 0$

Linear Algebra - P31

行列式

对于 $n\times n$ 矩阵A进行初等行运算：

行运算Ⅱ：对矩阵A的一行乘以非零常数 λ

令初等矩阵E为第Ⅱ类初等矩阵，由I的第i行乘以非零常数 λ 得到

又初等矩阵E是三角形矩阵，则其行列式为对角线元素之积

即 $\det(E) = 1^{n-1}\cdot\lambda = \lambda$

则对 $\det(EA)$ 按第i行进行余子式展开

有 $\det(EA) = \lambda a_{i1}A_{i1} + \lambda a_{i2}A_{i2} + \cdots + \lambda a_{in}A_{in}$

$= \lambda(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})$

$= \lambda\det(A) = \det(E)\det(A)$

行运算Ⅲ：将矩阵A的第i行的c倍加到第j行，其中c为实数

令初等矩阵E为第Ⅲ类初等矩阵

由I的第i行的c倍加到第j行得到

又初等矩阵E是三角形矩阵，则其行列式为对角线元素之积

即 $\det(E) = 1^n = 1$

则对 $\det(EA)$ 按第j行进行余子式展开

有 $\det(EA) = (a_{j1}+ca_{i1})A_{j1} + (a_{j2}+ca_{i2})A_{j2} + \cdots + (a_{jn}+ca_{in})A_{jn}$

$= (a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}) + c(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn})$

$= \det(A) + c\cdot 0$

$= \det(A) = \det(E)\det(A)$

行运算Ⅰ：将矩阵A的第i行与第j行交换

令初等矩阵 E_{ij} 为第Ⅰ类初等矩阵，由I交换第i行与第j行得到

注意行运算Ⅰ可以由行运算Ⅱ和行运算Ⅲ构成，有初等矩阵序列

E_1：将第i行的1倍加到第j行

E_2：将第j行的-1倍加到第i行

E_3：将第i行的1倍加到第j行

E_4：将第i行乘以非零常数 $\lambda=-1$

于是有 $E_4E_3E_2E_1I = E$

则 $\det(E) = \det(E_4)\det(E_3)\det(E_2)\det(E_1)\det(I) = -1$

则有 $\det(EA)$

$= \det(E_4E_3E_2E_1A)$

$= \det(E_4)\det(E_3)\det(E_2)\det(E_1)\det(A)$

$= -\det(A) = \det(E)\det(A)$

Linear Algebra - P32

行列式

对于 $n\times n$ 矩阵 A 和 $n\times n$ 初等矩阵 E

有 $\det(EA)=\det(E)\det(A)$

其中

$$\det(E)=\begin{cases}-1 & ,E\text{为第Ⅰ类初等矩阵}\\ \lambda\neq 0 & ,E\text{为第Ⅱ类初等矩阵}\\ 1 & ,E\text{为第Ⅲ类初等矩阵}\end{cases}$$

对于 $n\times n$ 初等矩阵 E，E^T 也是初等矩阵且与 E 为同类型初等矩阵

证明过程为：当 E 为第Ⅰ类初等矩阵时，

假设初等矩阵 E 由 I 交换 i,j 两行得到，其中 $1\le i<j\le n$

则 E 与 E^T 的对角元素对应相等

非对角元素中 $e^T_{ij}=e_{ji}=1=e_{ij}=e^T_{ji}$，其余元素均为 0

即有 $E^T=E$，于是 E^T 也是第Ⅰ类初等矩阵

当 E 为第Ⅱ类初等矩阵时，令 $e_{ii}=\lambda$，其中 $1\le i\le n$，$\lambda\neq 0$

则 E^T 中 $e^T_{ii}=\lambda$，其余对角元素为 1，非对角元素为 0

即有 $E^T=E$，于是 E^T 也是第Ⅱ类初等矩阵

当 E 为第Ⅲ类初等矩阵时，对于 $1\le i,j\le n$，$i\neq j$，$c\in R$

假设初等矩阵 E 由 I 将第 i 行的 c 倍加到第 j 行得到

则在 E^T 中 $e^T_{ij}=e_{ji}=c$，$e^T_{ii}=e_{ii}=1$

于是矩阵 E^T 可由 I 将第 j 行的 c 倍加到第 i 行得到

即 E^T 也是第Ⅲ类初等矩阵

于是有对于 $n\times n$ 初等矩阵 E，E^T 也是与 E 同类型的初等矩阵

于是有通过初等矩阵 E 对 $n\times n$ 矩阵 A 进行列操作后的行列式

$$\det(AE)=\det((AE)^T)=\det(E^TA^T)$$
$$=\det(E^T)\det(A^T)=\det(E)\det(A)$$

于是可以进一步地将行运算对行列式的影响扩展到行/列运算

Ⅰ：交换矩阵的两行/两列，改变行列式的符号

Ⅱ：对矩阵的一行/一列乘以一个标量，行列式也乘以相同的标量

Ⅲ：将矩阵的一行/一列的倍数加到另一行/另一列，行列式不改变

Ⅲ的推论：如果矩阵的一行/一列为另一行/另一列的倍数

则矩阵的行列式必定为 0

Linear Algebra - P33

对于 $n\times n$ 矩阵A，A是奇异的当且仅当 $\det(A)=0$

证明过程有，对于矩阵A可通过有限次行运算化为行阶梯形

即有行阶梯形矩阵U和初等矩阵序列 $E_1, E_2, \cdots, E_k$

使得 $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = U$

则有 $\det(U) = \det(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A)$

$= \det(E_k) \cdots \det(E_2)\det(E_1)\det(A)$

由于 $\det(E_1), \cdots, \det(E_k)$ 均不等于0

则 $\det(A)=0$ 当且仅当 $\det(U)=0$

如果矩阵A为奇异的，则行阶梯形矩阵U的最后一行全为0，且 $\det(U)=0$

如果矩阵A为非奇异的，则行阶梯形矩阵U为上三角形矩阵

且对角线元素均为1，即 $\det(U)=1$

于是可以通过将矩阵A化为行阶梯形矩阵U来计算 $\det(A)$

对于 $n\times n$ 矩阵A，可以通过初等矩阵序列 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 化简为行阶梯形矩阵U

即 $U = E_k \cdots E_1 A$，$\det(U) = \det(E_k) \cdots \det(E_1)\det(A)$

如果矩阵U最后一行元素均为0，则 $\det(U)=0$，即 $\det(A)=0$

否则矩阵U对角线元素均为1，则 $\det(U)=1$，即 $\det(A) = [\det(E_1) \cdots \det(E_k)]^{-1}$

也可以通常地描述为 $\det(A) = \det(U)[\det(E_1) \cdots \det(E_k)]^{-1}$

注意在初等矩阵序列 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 中包含I，II，III类初等矩阵

可以通过只包含第I类和第III类初等矩阵的序列 $E_1, E_2, \cdots, E_m$

将矩阵A转化为上三角形矩阵T，其对角线元素为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$

则有 $\det(T) = t_1 t_2 \cdots t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$

又对于第I类初等矩阵行列式为-1，第III类初等矩阵行列式为1

于是 $\det(A) = \det(E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1 T)$

$= \det(E_m)\det(E_{m-1}) \cdots \det(E_2)\det(E_1)\det(T)$

$= (-1)^j \sum_{i=1}^{n} t_i$，其中有j个第I类初等矩阵

对于 $n\times n$ 矩阵A，B，有 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

证明过程有，当矩阵A或矩阵B是奇异的，矩阵AB也是奇异的

于是有 $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$

当矩阵A矩阵B均为非奇异的，则存在初等矩阵序列 $E_k, E_{k-1}, \cdots, E_2, E_1$

则 $\det(AB) = \det(A E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1)$

$= \det(A)\det(E_k)\det(E_{k-1}) \cdots \det(E_2)\det(E_1)$

$= \det(A)\det(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1) = \det(A)\det(B)$

Linear Algebra - P34

对于 $k\times k$ 矩阵 A 和 $(n-k)\times(n-k)$ 矩阵 B

有 $n\times n$ 矩阵 $E=\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}$，$F=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}$

则有 $\det(E)=\det(B)$，$\det(F)=\det(A)$，$\det(C)=\det(A)\det(B)$

证明过程有，对于 $\det(E)$ 按第1行进行展开

则有 $\det(E)=1\cdot\det(M_{11})+0\cdot\det(M_{12})+\cdots+0\cdot\det(M_{1n})$
$=\det(M_{11})$

又子式 $M_{11}=\begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}$

于是继续进行 $k-1$ 次按第1行进行展开

则有 $\det(E)=a_{11}a_{22}\cdots a_{kk}\det(B)$
$=1^k\det(B)=\det(B)$

类似地对于 $\det(F)$ 进行 $n-k$ 次按最后一行进行展开

则有 $\det(F)=a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{k+1,k+1}\det(A)$
$=1^{n-k}\det(A)=\det(A)$

注意到有矩阵 $C=FE$

则有 $\det(C)=\det(FE)=\det(F)\det(E)$
$=\det(A)\det(B)$

对于 $k\times k$ 矩阵 A 和 B，有 $2k\times 2k$ 矩阵 $M=\begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0\end{bmatrix}$

则有 $\det(M)=(-1)^k\det(A)\det(B)$

证明过程有，对于矩阵 M，有第I类初等矩阵序列 $E_1,E_2,\cdots,E_k$

其中 E_i 交换矩阵 M 的第 i 行和第 $k+i$ 行，其中 $i=1,2,\cdots,k$

可知 $E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1M=C$ 为形如 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}$ 的 $2k\times 2k$ 矩阵

有 $\det(C)=\det(A)\det(B)$

于是 $\det(A)\det(B)=\det(E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1M)$
$=\det(E_k)\cdots\det(E_1)\det(M)$
$=(-1)^k\det(M)$

于是有 $\det(M)=(-1)^k\det(A)\det(B)$

对于 $n\times n$ 非奇异矩阵 A，有 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

证明过程有，$\det(A)\det(A^{-1})=\det(AA^{-1})=\det(I)=1$

又 $\det(A)\neq 0$，于是有 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

Linear Algebra - P35

对于n×n矩阵A和标量α，有 $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

证明过程为，可以使用n次第II类初等行变换，来对第i行乘以标量α

即有第II类初等矩阵序列$E_1, E_2, \cdots, E_k$，使得$\alpha A = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$

于是 $\det(\alpha A) = \det(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A)$

$= \det(E_k)\det(E_{k-1}) \cdots \det(E_2)\det(E_1)\det(A)$

$= \alpha \times \alpha \times \cdots \times \alpha \det(A) = \alpha^n \det(A)$

对于n×n矩阵A，考虑使 $A^2 + I = 0$ 的矩阵A的存在性

如果 $A^2 + I = 0$，则有 $A^2 = -I$

于是 $\det(A^2) = \det(A)\det(A) = [\det(A)]^2 = \det(-I) = \det(-1 \cdot I) = (-1)^n$.

可知当n为奇数时，$[\det(A)]^2 = -1$，

则使 $A^2 + I = 0$ 成立的实数矩阵A不存在

而当n为偶数时，$[\det(A)]^2 = 1$　　如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

则使 $A^2 + I = 0$ 成立的实数矩阵A存在，且 $\det(A) = \pm 1$

反对称矩阵(skew symmetric matrix)，又称斜对称矩阵，对于n×n矩阵A

满足其转置矩阵和其加法逆元相等，即 $A^T = -A$，$a_{ji} = -a_{ij}$，$1 \le i, j \le n$

对于n×n反对称矩阵A，A^2是对称矩阵

对于n维列向量$\vec{x}$，$\vec{x}^T A \vec{x} = 0$

矩阵A的主对角线元素全部为0，即$a_{ii} = 0$，于是有矩阵A的迹(trace)为0

$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$

当n为奇数时，$\det(A) = -\det(A)$，即$\det(A) = 0$

此时反对称矩阵必定是奇异的

当n为偶数时，$\det(A)$可以写作部分原素的多项式平方

即有 $\det(A) = [Pf(A)]^2 \geq 0$

其中$Pf(A)$称为矩阵A的普法夫行列式(Pfaffian of matrix)

另外对于任意n×n矩阵A，$A^T - A$是反对称矩阵

LU分解　对于n×n矩阵A，可以分解一个单位下三角形矩阵L与一个上三角形矩阵U的乘积

如 $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

则有 $\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

Linear Algebra - P36

行列式

考虑通过余子式方法和消元法计算 $n\times n$ 矩阵行列式的时间复杂度

分别考虑用到的加法次数 $A(n)$ 和乘法次数 $M(n)$

当使用余子式计算行列式时，用到 $(n!-1)$ 次加法和 $\sum_{k=1}^{n-1} n!/k!$ 次乘法

证明过程有，基础步骤：当 $n=1$ 时，使用 $0=n!-1$ 次加法和 $\sum_{k=1}^{n-1} n!/k! = 0$ 次乘法

递归步骤：假设对于任意 $n\in N$，$P(n)$ 为真，则考虑 $P(n+1)$

对 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵行列式按照第一行进行展开

则有 $a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1,n+1}\det(M_{1,n+1})$

其中 $M_{11}, M_{12}, \cdots, M_{1,n+1}$ 都是 $n\times n$ 矩阵

于是有 $A(n+1) = (n+1)A(n) + n \overset{IH}{=} (n+1)(n!-1) + n = (n+1)! - 1$

$$M(n+1) = (n+1)M(n) + (n+1)$$

$$\overset{IH}{=} (n+1)\sum_{k=1}^{n-1} n!/k! + \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (n+1)!/k!$$

于是根据数学归纳法，对于 $n\times n$ 矩阵使用余子式方法计算行列式

用到 $(n!-1) \in \Theta(n!)$ 加法和 $\sum_{k=1}^{n-1} n!/k! \in \Theta(n!)$ 次乘法

当使用消元法计算行列式时，用到 $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ 次加法和 $\frac{(n-1)(n^2+n+3)}{3}$ 次乘法/除法

证明过程有，首先考虑消除第 i 列中，从第 $i+1$ 行到第 n 行的值

由于此时从第 i 行到第 n 行，其第1列到第 $n-1$ 列元素均为0

于是只用考虑一个 $(n-i+1)\times(n-i+1)$ 区域内的操作

考虑消除 a_{ji} 的过程，其中 $i<j\le n$

需要先计算参数 $\lambda = a_{ji}/a_{ii}$，使用1次乘法/除法

对 a_{ik} 乘以参数 λ，其中 $i<k\le n$，使用 $n-i$ 次乘法/除法

从 a_{jk} 中减去 λa_{ik}，使用 $n-i$ 次加法

又 j 有 $i+1, i+2, \cdots, n$ 共 $n-i$ 个不同取值

所以消除第 i 列使用 $(n-i)(n-i+1)$ 次乘法/除法，$(n-i)^2$ 次加法

又共需要消除 $n-1$ 列，即第 $1, 2, \cdots, n-1$ 列

则有 $A(n) = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

而最后使用 $n-1$ 次乘法/除法计算对角线元素之积 $t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}$

则有 $M(n) = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1) + (n-1) = \sum_{i=1}^{n} i(i-1) + (n-1)$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i + (n-1) = \frac{(n-1)(n^2+n+3)}{3}$$

于是对于 $n\times n$ 矩阵使用消元法计算行列式

用到 $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \in \Theta(n^3)$ 次加法和 $\frac{(n-1)(n^2+n+3)}{3} \in \Theta(n^3)$ 次乘法/除法

即有消元法的时间复杂度远小于余子式方法

Linear Algebra - P37

范德蒙德矩阵(Vandermonde matrix)，对于实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，有 $n\times n$ 矩阵

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

，于是有 $v_{ij} = \alpha_i^{j-1}$，

其中 $1 \le i \le n$，$1 \le j \le n$

则范德蒙德矩阵行列式 $\det(V) = \prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j - \alpha_i)$

于是范德蒙德矩阵是非奇异的当且仅当对任意 $1\le i<j\le n$，$\alpha_i \ne a_j$

如对于 3×3 范德蒙德矩阵，利用消元法求行列式

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 \\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 \\ 0 & 0 & (x_3-x_1)(x_3-x_2) \end{bmatrix}$$

于是有 $\det(V) = \prod_{1\le i<j\le 3}(x_j - x_i) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$

对于 $n\times n$ 非奇异矩阵 A，且有非零余子式 A_{nn}，

令常数 $c = \det(A)/A_{nn}$，则从 a_{nn} 中减去常数 c 后，矩阵变为奇异的

证明过程有，令矩阵 A' 为从矩阵 A 的元素 a_{nn} 中减去常数 c 形成的新矩阵

则对 $\det(A')$ "按第 n 行" 进行展开

$$\begin{aligned} \det(A') &= a'_{n1}A'_{n1} + a'_{n2}A'_{n2} + \cdots + a'_{nn}A'_{nn} \\ &= a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + (a_{nn} - c)A_{nn} \\ &= a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} - \frac{\det(A)}{A_{nn}}\cdot A_{nn} \\ &= \det(A) - \det(A) = 0 \end{aligned}$$

于是可知矩阵 A' 是奇异的

伴随 (adjoint)，对于 $n\times n$ 矩阵 A，记 $n\times n$ 矩阵 $\mathrm{adj}\,A$ 为矩阵 A 的伴随

通过将原矩阵中的元素用该元素的余子式替代然后进行一次转置

如 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，$\mathrm{adj}\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$，$A\times\mathrm{adj}\,A = \begin{bmatrix} \det(A) & & & \\ & \det(A) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det(A) \end{bmatrix}$

于是有 $\det(A)\det(\mathrm{adj}\,A) = \det(A\times\mathrm{adj}A) = \det(\det(A)I)$，即 $A\times\mathrm{adj}A = \det(A)I$

当且仅当 $\det(A)\ne0$ 时，A 的逆为 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}\,A$

Linear Algebra - P38

克拉黙式法则(Cramer's rule)，对于 $n\times n$ 非奇异矩阵 A 以及 n 维列向量 $\vec{b}\in R^n$

令 $n\times n$ 矩阵 A_i 为将矩阵 A 的第 i 列替换为 $\vec{b}$ 所形成的矩阵，其中 $i=1,2,\cdots,n$

则如果 $\vec{x}\in R^n$ 为线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的唯一解

则有 $x_i=\det(A_i)/\det(A)$，其中 $i=1,2,\cdots,n$

证明过程有，由于矩阵 A 为 $n\times n$ 非奇异矩阵

则矩阵 A 的逆 $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A$，其中 $\operatorname{adj}A$ 为矩阵 A 的伴随

于是对于线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$

有 $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj}A)\vec{b}$

$$\text{又}\ (\operatorname{adj}A)\vec{b}=\begin{bmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

又 $b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\cdots+b_nA_{ni}$ 为 $\det(A_i)$ 按第 i 列进行展开，其中 $i=1,2,\cdots,n$

于是有 $x_i=\frac{1}{\det(A)}(b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\cdots+b_nA_{ni})=\det(A_i)/\det(A)$

注意虽然这个方法从操作上看更为简单，即解 $n\times n$ 线性方程组仅使用计算行列式

但是实际上需要计算 $n+1$ 个 $n\times n$ 矩阵的行列式

如果使用消元法计算行列式则总共使用 $\Theta(n^4)$ 的加法和 $\Theta(n^4)$ 的乘法

而如果直接使用高斯消元法计算线性方程组的解

则总共使用 $\Theta(n^3)$ 的加法和 $\Theta(n^3)$ 的乘法

信息编码　考虑通过将每个字母与一个整数对应，然后传输整数串的信息传递方法

考虑将不超过 n^2 个字母对应的整数装入 $n\times n$ 矩阵 M

令整数矩阵 $n\times n$ 矩阵 C 有 $\det(C)=\pm1$

则 $n\times n$ 矩阵 $D=C^{-1}=\pm\operatorname{adj}C$，有矩阵 D 的元素也均为整数

于是可以使用矩阵 C 和矩阵 D 对矩阵 M 进行编码与解码

如

$$\text{编码: SENDMONEY}\longrightarrow\begin{bmatrix}5&21&10\\8&7&8\\10&2&3\end{bmatrix},\quad C\times M=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&3\\2&3&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5&21&10\\8&7&8\\10&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31&37&29\\80&83&69\\54&67&50\end{bmatrix}$$

解码:

$$D\times M=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\\-4&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}31&37&29\\80&83&69\\54&67&50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&21&10\\8&7&8\\10&2&3\end{bmatrix}\longrightarrow\text{SENDMONEY}$$

注意，可以从单位矩阵 I 开始，利用行运算III将某一行的整数倍加到另一行 以及行运算I

构造编码矩阵 C，于是有 $\det(C)=\pm\det(I)=\pm1$

Linear Algebra - P39

对于 $n \times n$ 矩阵 A，有矩阵 A 的伴随 $\operatorname{adj} A$

于是有 $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = \det(A)I$

则当矩阵 A 为非奇异矩阵时，有 $\det(A) \neq 0$

于是 $\det(A(\operatorname{adj} A)) = \det(\det(A)I)$

$\det(A)\det(\operatorname{adj} A) = [\det(A)]^n \det(I)$

则 $\det(\operatorname{adj} A) = [\det(A)]^{n-1}$

而当矩阵 A 是奇异的，有 $\det(A) = 0$

于是矩阵 $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = O$，即 $A(\operatorname{adj} A)$ 为全零矩阵

对于 $n \times n$ 非奇异矩阵 A，则 A 的伴随 $\operatorname{adj} A$ 也是非奇异的

且有 $(\operatorname{adj} A)^{-1} = \det(A^{-1})A = \operatorname{adj} A^{-1}$

证明过程有，当矩阵 A 是非奇异的，则有 $\det(A) \neq 0$

于是 $\det(\operatorname{adj} A) = [\det(A)]^{n-1} \neq 0$，即 $\operatorname{adj} A$ 是非奇异的

又矩阵 A 的逆 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A$

于是有 $\operatorname{adj} A = \det(A) A^{-1}$

$[\det(A^{-1})A] \operatorname{adj} A = [\det(A^{-1})A]\det(A)A^{-1}$

$= \det(A^{-1})\det(A)AA^{-1} = I$

则有 $\operatorname{adj} A$ 的逆 $(\operatorname{adj} A)^{-1} = \det(A^{-1})A$

又 $(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det(A^{-1})} \operatorname{adj}(A^{-1})$，而 $A = \frac{1}{\det(A^{-1})} (\operatorname{adj} A)^{-1}$

于是 $\frac{1}{\det(A^{-1})} \operatorname{adj}(A^{-1}) = (A^{-1})^{-1} = A = \frac{1}{\det(A^{-1})} (\operatorname{adj} A)^{-1}$

即 $(\operatorname{adj} A)^{-1} = \operatorname{adj}(A^{-1}) = \det(A^{-1})A$

对于 $n \times n$ 奇异矩阵 A，则 A 的伴随 $\operatorname{adj} A$ 也是奇异的

证明过程有，对于任意奇异矩阵 A，假设 A 的伴随 $\operatorname{adj} A$ 是非奇异的

则 $(\operatorname{adj} A)^{-1}(\operatorname{adj} A)A = A = (\operatorname{adj} A)^{-1}\det(A)I = O$

则如果 $A = O$，有 $\operatorname{adj} A = O$，于是与 $\operatorname{adj} A$ 是非奇异矛盾

否则与任意奇异矩阵 A 矛盾

于是可知对于 $n \times n$ 奇异矩阵 A，A 的伴随 $\operatorname{adj} A$ 也是奇异的

对于 $n \times n$ 矩阵 A 有 $\det(A) = 1$，则 $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A$

证明过程有，首先 $\operatorname{adj} A = \det(A)A^{-1} = A^{-1}$

则 $A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det(A^{-1})} \operatorname{adj}(A^{-1}) = \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)$