Discrete Mathematics - P142

帕斯卡三角形(Pascal's triangle)，又称杨辉三角形

指对于非负整数 n，三角形的第 n 层为二项式系数 $\binom{n}{k}$，$k=0,1,\cdots,n$

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\cdots$$

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$\cdots$$

其中相邻的二项式系数的和 即为 下一行在两个二项式系数之间的二项式系数

范德蒙德恒等式(Vandermonde's identity)，对于非负整数 $r \leq m, n$

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

证明过程为，$\binom{m+n}{r}$ 可描述为从 m+n 个元素中选取 r 个元素。

而 m+n 个元素的集合可划分为 m 个元素的集合 M 和 n 个元素的集合 N

则对于非负整数 $k=0,1,\cdots,r$

从 m+n 个元素的集合中取 r 个可分解为

从 M 中选 r-k 个元素，再从 N 中选 k 个元素。

即有 $\binom{m}{r-k}$ 种方法和 $\binom{n}{k}$ 种方法。

于是对每一个 $k=0,1,\cdots,r$，有 $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ 种选法

则 $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$

另外可以扩展至非负整数 $m \leq n_1, n_2, \cdots, n_p$ 的情形

即 $\binom{n_1+n_2+\cdots+n_p}{m} = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=m} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_p}{k_p}$

推论 对于非负整数 n，有 $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

证明过程有，取 $r=m=n$，则有 $\binom{2n}{n} = \binom{m+n}{r}$

即 $\binom{2n}{n} = \binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k}$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

对于非负整数 $r \leq n$，有 $\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$

证明过程有，$\binom{n+1}{r+1}$ 可描述为 n+1 位的位串中有 r+1 位 1 的不同位串数

则考虑第 r+1 个 1 出现的位置 $k=r+1, r+2, \cdots, n+1$

则对于每一个 k 值，在前 k-1 位中有 r 个 1，

即有 $\binom{k-1}{r}$ 种不同的排列方法

于是有 $\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{k-1}{r}$，取 $j=k-1$

$= \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$

Discrete Mathematics - P143

对于正整数n，有 $1=\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=\binom{n}{\lceil n/2\rceil}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}=1$

证明过程有：当 $n=1$ 时，$\binom{1}{0}=1=\binom{1}{1}$，即命题平凡地为真

当 $n>1$ 时，$\binom{n}{0}=1=\binom{n}{n}$

如果 $n=2k$，其中 $k\in Z^+$，则 $\lfloor n/2\rfloor = k = \lceil n/2\rceil$

则 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=\binom{n}{\lceil n/2\rceil}$ 平凡地为真

如果 $n=2k+1$，其中 $k\in Z^+$，则 $\lfloor n/2\rfloor+\lceil n/2\rceil = k+k+1=n$

于是有 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=\binom{n}{\lceil n/2\rceil}$

对于任意 $0\le i<\lfloor n/2\rfloor$，$i\in Z^+$

$$\binom{n}{i+1}=\frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!}=\frac{n-i}{i+1}\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{n-i}{i+1}\binom{n}{i}$$

由于 $i+1\le\lceil n/2\rceil<n-i$，即 $\frac{n-i}{i+1}>1$

于是 $\forall_{0\le i<\lfloor n/2\rfloor}\ \binom{n}{i}<\binom{n}{i+1}$

则对于 $\lceil n/2\rceil<j\le n$，$j\in Z^+$，$0\le n-j<\lfloor n/2\rfloor$

$$\binom{n}{j}=\binom{n}{n-j}<\binom{n}{n-j+1}=\binom{n}{j-1}$$

于是 $\forall_{\lceil n/2\rceil<j\le n}\ \binom{n}{j-1}<\binom{n}{j}$

于是对任意 $n\in Z^+$，$1=\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=\binom{n}{\lceil n/2\rceil}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}=1$

对于任意 $n\in Z^+$ 和 $0\le k\le n$ 有 $\binom{n}{k}\le 2^n$

证明过程为，对任意 $n\in Z^+$，$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

又 $\forall_{0\le k\le n}\ \binom{n}{k}>0$，

于是有 $\forall_{0\le k\le n}\ \binom{n}{k}<2^n$

注意，当且仅当 $n=0$，$k=0$ 时，取得等号 $\binom{n}{k}=1=2^n$

对于正整数 $n>1$，$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\ge 2^n/n$，

证明过程为，对于任意 $0\le i<n$，且 $i\ne\lfloor n/2\rfloor$，$i\ne\lceil n/2\rceil$

$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}>\binom{n}{i}$

则 $n\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}>\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}-\binom{n}{n}=2^n-1$

于是 $n\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\ge 2^n$，即 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\ge 2^n/n$

注意，当 $n=2$ 时，取得等号 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=2=2^n/n$

对于正整数n，$\binom{2n}{n}\ge 4^n/2n$

证明过程为，取 $m=2n$，则 $\lfloor m/2\rfloor=n$

于是有 $\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}\ge 2^m/m$

则 $\binom{2n}{n}\ge 2^{2n}/2n=4^n/2n$

Discrete Mathematics - P144

对于正整数 $1 \le k \le n$，有 $\binom{n}{k} \le n^k/2^{k-1}$

证明过程有，当 $k=1$ 时 $\binom{n}{1} = n = n^1/2^{1-1}$

当 $k>1$ 时，$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)/1\times2\times\cdots\times k$

由于 $(n-1),(n-2),\cdots,(n-k+1) < n$，

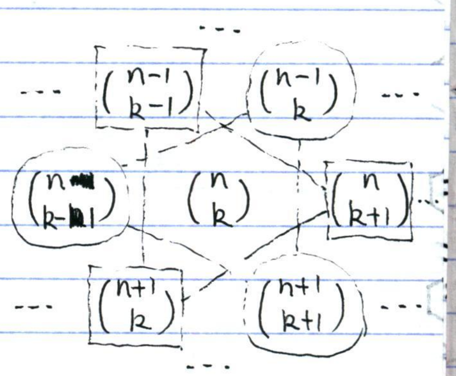
且 $2,3,\cdots,k \le 2$

则 $\binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)/1\times2\times\cdots\times k$

$< n\times n\times\cdots\times n/1\times2\times\cdots\times2$

$= n^k/2^{k-1}$

六边形恒等式 对于正整数 $1 \le k < n$，有 $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$



证明过程有，$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

对于非负整数 $k \le r \le n$，有 $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

代数证明过程有，$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{r!}{k!(r-k)!}$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}\cdot\frac{1}{k!(r-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-r)![(n-k)-(n-r)]!}$$

$$= \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

组合证明过程有，$\binom{n}{r}\binom{r}{k}$ 可描述为先从 n 个元素中选择 r 个元素

再从选出的 r 个元素中选择 k 个元素

即有 $\binom{n}{r}\binom{r}{k}$ 种选择方法

而从结果来看，选出了一组 k 个元素和另一组 $r-k$ 个元素

则可以描述为先从 n 个元素中选择 k 个元素

再从剩余的 $n-k$ 个元素中选择 $r-k$ 个元素

即有 $\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$ 种选择方法

又这两种选择方法是一一对应的，即 $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

对于正整数 n，$\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+2}{n+1}/2$

证明过程有，$\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$，又 $\binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n+1}{2n+1-n-1} = \binom{2n+1}{n}$

$= [\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n}]/2$

$= \binom{2n+2}{n+1}/2$

Discrete Mathematics - P145

对于正整数 $k \le n$，有 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

代数证明过程有，$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$

$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = n\binom{n-1}{k-1}$

组合证明过程有，$k\binom{n}{k}$ 可以描述为从n个元素的集合中

先选取k个元素，再从k个元素中选择1个元素

则有 $\binom{n}{k}\binom{k}{1} = k\binom{n}{k}$ 种选择方法

而 $n\binom{n-1}{k-1}$ 可以描述为从n个元素的集合中

先选取1个元素，再从剩余n-1个元素中选择k-1个元素

则有 $\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$ 种选择方法

由于从结果来看这两种过程是一一对应的

所以有 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

取正整数 n, k，则有 $k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}$

于是有 $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}$

可以递归地定义 $\binom{n}{k}$ 运算，其中 $n, k \in N$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & , k=0 \\ 0 & , n=0 \text{ 且 } k \ne 0 \\ \binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k} & , n \ne 0 \text{ 且 } k \ne 0 \end{cases}$$

```
myCombination :: Int -> Int -> Int
myCombination _ 0 = 1
myCombination 0 k = 0
myCombination n k = (myCombination (n-1) (k-1))
                    * n `div` k
```

对于正整数 $k \le n$，$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \binom{2n+2}{n+1}/2 - \binom{2n}{n}$

组合证明过程有，$\binom{n}{k-1} = \binom{n}{n+1-k}$

考虑从有2n个元素的集合中选取n+1个元素的方法

可将2n个元素划分为两个n个元素的集合

则对于 $1 \le k \le n$，可以分成两个步骤

从前n个元素中选取k个元素，即$\binom{n}{k}$种方法

再从后n个元素中选取n+1-k个元素，即$\binom{n}{n+1-k}$种方法

合并有 $\binom{n}{k}\binom{n}{n+1-k} = \binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$ 种方法

则总计有 $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n+1-k} = \binom{2n}{n+1}$

又对于正整数n，有 $\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1}/2$

则有 $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n+1-k}$

$= \binom{2n}{n+1}$

$= \binom{2n+2}{n+1}/2 - \binom{2n}{n}$

Discrete Mathematics - P146

对于正整数 n, r，有 $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$

代数证明过程，考虑对于任意正整数 n

基础步骤：当 $r=1$ 时 $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}$

$$=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}=\binom{n+2}{1}=\binom{n+r+1}{r}$$

递归步骤：假设对任意 $r\in Z^+$，$\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$，则考虑 $r+1$ 的情形

$$\sum_{k=0}^{r+1}\binom{n+k}{k}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}+\binom{n+r+1}{r+1}$$

$$\overset{(IH)}{=}\binom{n+r+1}{r}+\binom{n+r+1}{r+1}$$

$$=\binom{n+r+2}{r+1}$$

根据数学归纳法，可知对于任意 $n, r\in Z^+$，$\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$

组合证明过程，考虑包含n个0和不超过r个1的位串个数，有两种计数方法

一、对于 $0\le k\le r$，计算包含n个0和k个1的不同位串个数

则有 $\binom{n+k}{k}$ 种不同位串

求和可得 $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}$ 即包含n个0和不超过r个1的位串个数

二、考虑包含n+1个0和r个1的位串个数，即 $\binom{n+1+r}{r}$

截取第n+1个0之前的部分，可知包含n个0和不超过r个1

由于对于 $\binom{n+1+r}{r}$ 每个位串的截取均不相同

则可知 $\binom{n+1+r}{r}$ 即包含n个0和不超过r个1的位串个数

即 $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$

对于正整数 n，有 $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$

代数证明过程，对于任意正整数 n

$$有\ \binom{2n}{2}=\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}=\frac{2n(2n-1)}{2}$$

$$=\frac{2n(n-1)+2n\cdot n}{2}=\frac{2n(n-1)}{2}+n^2$$

$$=2\frac{n!}{2!(n-2)!}+n^2$$

$$=2\binom{n}{2}+n^2$$

组合证明过程，考虑从2n个元素的集合中选择2个元素的不同方式数

即有 $\binom{2n}{2}$ 直接选择的方式数

又可以将2n个元素划分为两个包含n个元素的集合，则选择可划分为

一、从前n个元素选择2个元素，即 $\binom{n}{2}$

二、从后n个元素选择2个元素，即 $\binom{n}{2}$

三、分别从前n个和后n个元素各选择1个元素，即 $\binom{n}{1}\binom{n}{1}$

求和则有 $2\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}$ 种方式

提有 $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}=2\binom{n}{2}+n^2$

Discrete Mathematics - P147

对于正整数n，有 $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

代数证明过程，对于正整数 $1 \le k \le n$，有 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

则有 $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$

$= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n}\binom{n-1}{j}$

$= n\cdot 2^{n-1}$

组合证明过程，考虑从n个元素中选择若干元素，再从中选择1个元素

则对于正整数 $1 \le k \le n$

有 $\binom{n}{k}$ 种方式从n个元素中选择k个元素

再有 $\binom{k}{1}$ 种方式从k个元素中选择1个元素

求和可知有 $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ 种选择方式

另一种选择方式是先从n个元素中选择1个元素，有 $\binom{n}{1}$ 种方式

再分别决定是否选择其余$n-1$个元素，有 2^{n-1} 种方式

则有 $n\cdot 2^{n-1}$ 种方式

于是有 $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$

对于正整数n，$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$

组合证明过程，考虑一个有$2n$个元素的集合，其中包含两类元素

可以划分为两个n个元素的集合并分别包含一类元素。

从其中选出合计n个元素，再从其中的第一类元素中选出1个元素的方式数

一种过程是，对于正整数 $1 \le k \le n$，

选择k个第一类元素，即有 $\binom{n}{k}$ 种方式

选择$n-k$个第二类元素，即有 $\binom{n}{n-k}$ 种方式

再从k个第一类元素中选出1个，即有 $\binom{k}{1}$ 种方式

则求和可知有 $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}\binom{k}{1}$ 种方式

另一种过程是，先从n个第一类元素中选择1个，再从剩余$2n-1$个元素中选择$n-1$个元素

从n个第一类元素中选择1个，即有 $\binom{n}{1}$ 种方式

再从$2n-1$个元素中选择$n-1$个元素，即有 $\binom{2n-1}{n-1}$ 种方式

则总计有 $\binom{n}{1}\binom{2n-1}{n-1}$ 种方式

于是有 $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}\binom{k}{1} = \binom{n}{1}\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n-1}{n-1}$

对于素数p，以及正整数 $1 \le k < p$，有 $p \mid \binom{p}{k}$

证明过程有，对于正整数 $1 \le k \le p-1$，有 $\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$

由于 $\binom{p}{k}$ 为整数，且 $\gcd(p,k)=1$

则 $\binom{p}{k} = p[\binom{p-1}{k-1}/k]$ 且 $\binom{p-1}{k-1}/k$ 为整数，即 $p \mid \binom{p}{k}$

Discrete Mathematics - P148

路径 (path)，指由一系列步构成的从[redacted]原点 (0,0) 到 (m,n) 的路径，其中 $m,n\in N$

其中每一步 或者向右一个单位（横坐标+1），[redacted]

或者向上一个单位（[redacted]纵坐标+1）

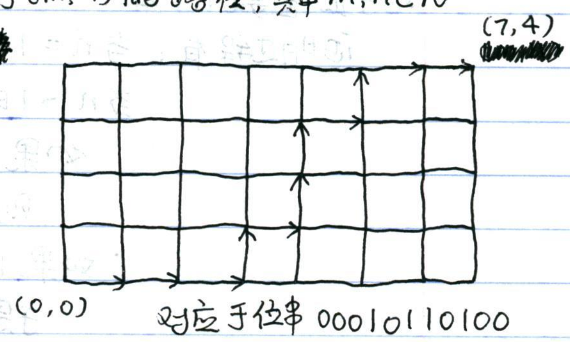
则从 (0,0) 到 (m,n) 的路径可以表示为

由 m 个 0 和 n 个 1 构成的位串。

其中 0 表示向右一个单位，1 表示向上一个单位

于是不同的路径数与位串数存在一一对应

即从 (0,0) 到 (m,n) 有 $\binom{m+n}{m}$ 种路径



对应于位串 00010110100

路径可用于证明与组合相关的命题，通常是证明存在与路径选择的一一对应的组合

如证明 $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$，其中非负整数 $k\le n$

$\binom{n}{k}$ 可以描述为从 (0,0) 到 (k, n-k) 的路径数

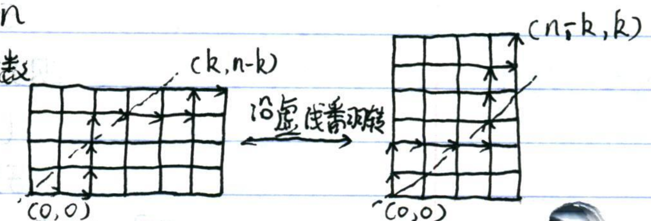
$\binom{n}{n-k}$ 可以描述为 (0,0) 到 (n-k, k) 的路径数

对于 $\binom{n}{k}$ 的每一条路径，

可以通过沿着反对角线翻转，

使得从 (0,0) 到 (k, n-k) 的路径转换为从 (0,0) 到 (n-k, k) 的路径，反之亦然

于是有 $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$



如证明帕斯卡恒等式 $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$，其中正整数 $k\le n$

对于 $\binom{n+1}{k}$，可以描述为

从 (0,0) 到 [redacted] (k, n+1-k) 的路径数

而在到达 (k, n+1-k) 之前

可以划分为两种不同情况，

一是先到达 (k, n-k)，共有 $\binom{n}{k}$ 条不同路径

然后从 (k, n-k) 向上一个单位到达 (k, n-k+1)

即共有 $\binom{n}{k}\times 1=\binom{n}{k}$ 条不同路径

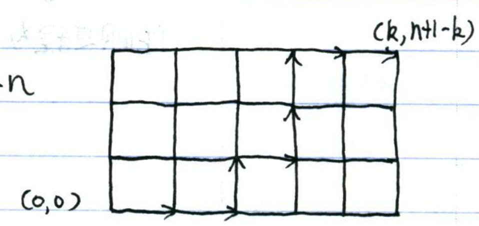
二是先到达 (k-1, n-k+1)，共有 $\binom{n}{k-1}$ 条不同路径

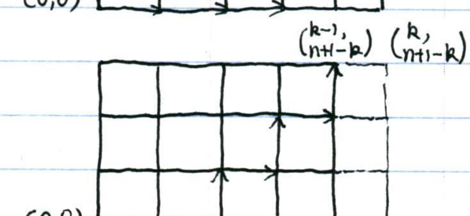
然后从 (k-1, n-k+1) 向右一个单位到达 (k[redacted], n-k+1)

即共有 $\binom{n}{k-1}\times 1=\binom{n}{k-1}$ 条不同路径

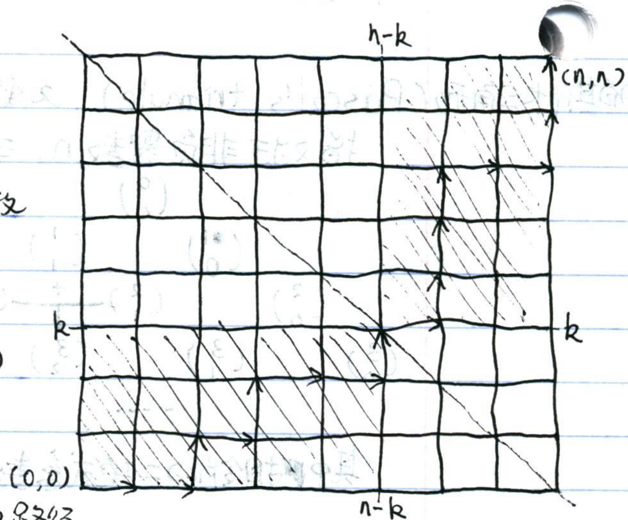
由于到达 (k, n-k+1) 的路径是且仅是两种情况中的一种

于是有 $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$





Discrete Mathematics - P149



对于非负整数 n，有 $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

路径证明过程有，对于 $\binom{2n}{n}$

可描述为从 (0,0) 到 (n,n) 的不同路径数

而考虑反对角线上的点 (0,n)，…，(n,0)

可以将路径划分为两个部分，

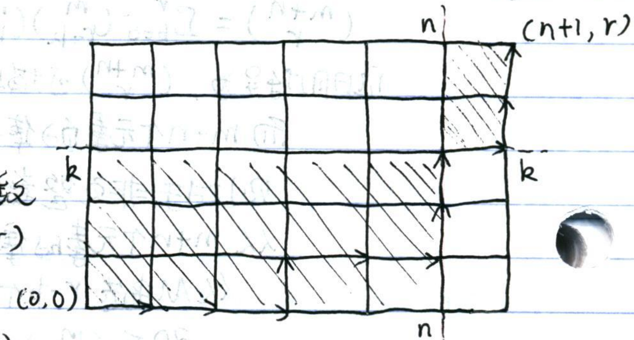
从 (0,0) 到达反对角线上的点 (k,n-k)

从 (k,n-k) 到达 (n,n)

则对于给定的非负整数 k≤n

有 $\binom{n}{k}\binom{(n-k)+(n-k+k)}{(n-k)} = \binom{n}{k}^2$ 种路径

于是共有 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ 种路径，即有 $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$



对于正整数 n，r，有 $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$

路径证明过程有，对于 $\binom{n+r+1}{r}$

可描述为从 (0,0) 到 (n+1, r) 的不同路径数

而考虑水平位置 n，有点 (n,0)，…，(n,r)

则可将路径划分两部分

从 (0,0) 到达水平位置 n 的一点 (n,k)

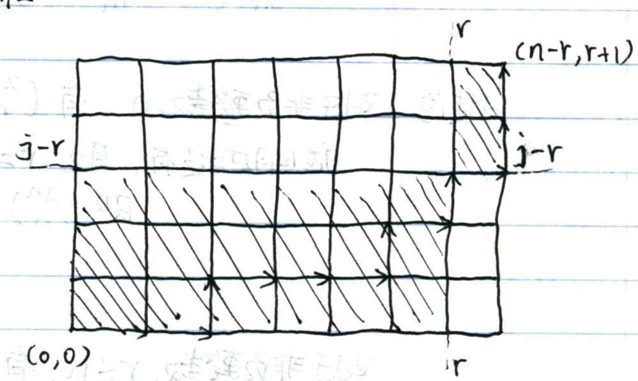
从 (n,k) 向右一单位到 (n+1, k)，再保持向上一单位直到到达 (n+1, r)

则对于给定的非负整数 0≤k≤r，

有 $\binom{n+k}{k}\times 1$ 种不同路径

于是共有 $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}$ 种不同路径

即 $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$



注意对于非负整数 r≤n，有 $\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r}$

可用同样的方法证明，如令 k = j-r，

则有 j=r 时，k=0，j=n 时 k=n-r

于是 $\sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r} = \sum_{k=0}^{n-r}\binom{k+r}{k}$

$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n+1}{n-r} = \binom{(n-r)+r+1}{(n-r)}$

再记 m = n-r，则有

$\binom{n+1}{r+1} = \binom{(n-r)+r+1}{n-r} = \binom{m+r+1}{m}$

$\sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r} = \sum_{k=0}^{n-r}\binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{r+k}{k}$

即 $\binom{n+1}{r+1} = \binom{m+r+1}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{r+k}{k} = \sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r}$

于是可知 $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$ 可以扩展到 n，r∈N 的情形

Discrete Mathematics - P150

对于正整数n，有$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$

组合证明过程，当n=1时，$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = 1 = n(n+1)2^{n-2}$

当n≥2时，可以描述为一个选择过程，

从n个元素的集合中选择k个元素，则有$\binom{n}{k}$种方式

再从k个元素中可重复地选择2个元素，则有$\binom{k}{1}\binom{k}{1}$种方式，有序地选择

即对于非负整数k≤n，有$\binom{k}{1}\binom{k}{1}\binom{n}{k}$种方式

于是合计有$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}\binom{k}{1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$种方式

而对于相同的选择，有另一种选择方式，并可划分为两类

一、先从n个元素中选择2个元素、有序地选择有$n(n-1)$种方式

再对剩余n-2个元素分别决定是否选入，则有2^{n-2}种方式

于是共有$n(n-1)2^{n-2}$种方式

二、先从n个元素中选择1个元素，有$\binom{n}{1}$种方式

再对剩余n-1个元素分别决定是否选入，则有2^{n-1}种方式

于是共有$n\cdot 2^{n-1}$种方式

即共有$n(n-1)2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$种方式

于是有对于正整数n，有$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$

对于具有n个对象的集合，允许重复的r排列数为n^r

对于具有n个对象的集合，允许重复的r组合数为$\binom{n-1+r}{r} = \binom{n-1+r}{n-1}$

对于n个元素

类型	允许重复	公式	
r排列	否	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	
r组合	否	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	
r排列	是	n^r	
r组合	是	$\binom{n-1+r}{r} = \binom{n-1+r}{n-1} = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!\,r!}$	
	是	$\binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}$	当r≥n且n中每个元素均存在于组合中

```
k := 0
for i_1 := 1 to n
  for i_2 := 1 to i_1
      ⋮
    for i_m := 1 to i_{m-1}
       k := k+1
```

注意这个过程的k返回值为$\binom{n+m-1}{m}$

等价于n个元素的允许重复的r组合数

可以看作$i_1, i_2, \cdots, i_m$为从$\{1, 2, \cdots, m\}$中可重复地选择

由于对于任意一个组合$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$

对其按非升序排序即可得$\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$

则k每次+1与某个组合是一一对应的

Discrete Mathematics - P151

对于正整数k，类型1的物体有n_1个，…，类型k的物体有n_k个，合计有n个物体

则n个物体的不同排列数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$，其中正整数 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$

组合证明过程有，对于n个物体的排列可划分为k个步骤

从n个位置中选择n_1个放入类型1的物体，有$\binom{n}{n_1}$种方式

从$n-n_1$个剩余位置中选择n_2个放入类型2的物体，有$\binom{n-n_1}{n_2}$种方式

…

从$n-n_1-\cdots-n_{k-1}$个剩余位置中选择n_k个放入类型k的物体，有$\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$种方式

则总计有$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$种方式

又 $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_k)!}$

又 $n=n_1+\cdots+n_k$ $\quad = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

即不同的排列数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

将可区分的物体放入可区分的盒子的情况

将n个不同的物体放入k个不同的盒子，使得第i个盒子有n_i个物体，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$

其不同的方式数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

组合证明过程有，对于将n个不同物体放入k个不同盒子，可划分为k个步骤

从n个物体中选择n_1个放入盒子1，有$\binom{n}{n_1}$种方式

从$n-n_1$个剩余物体中选择n_2个放入盒子2，有$\binom{n-n_1}{n_2}$种方式

…

从$n-n_1-\cdots-n_{k-1}$个剩余物体中选择n_k个放入盒子k，有$\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$种方式

则合计有 $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$种方式

同时有，对于n个物体，可分为k个类型，则其不同的排列

与n个不同物体，放入k个不同盒子的不同方式，是一一对应的

以按如下方式进行对应

首先对n个不同物体进行排列，则有n!种方式，取一种记为原始排序

然后对第1到第n_1个物体标记为1，

对第n_1+1到第n_1+n_2个物体标记为2

…

对第$n_1+\cdots+n_{k-1}+1$到第$n_1+\cdots+n_k=n$个物体标记为k，

则对于物体获得不同标记的方式有 $n!/n_1!n_2!\cdots n_k!$ 种

将物体恢复到原始排序，并记录不同标记的排列

则等价于n个物体，可分为k个类型，的不同排列数

Discrete Mathematics - P152

将不可区分的物体放入可区分的盒子的情况

对于非负整数 n，正整数 k，将 n 个不可区分的物体放入 k 个可区分的盒子

等价于在允许重复的情况下，计算 k 个元素的集合的 n 组合数

同样等价于有 n 个 0 和 k-1 个 1 的不同位串个数

即有 $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$ 种不同的方法.

另外，对于盒子有容量下限的情形，

可先从 n 个物体中取出符合下限的个数，再对剩余部分考虑无限制情形的方式数

对于盒子有容量上限的情形，可先计算出无限制情形的方式数

再计算以超出上限为下限的情形的方式数，并从无限制的方式数中扣除

将不可区分的物体放入不可区分的盒子的情况

对于非负整数 n，正整数 k，将 n 个不可区分的物体放入 k 个不可区分的盒子

等价于将非负整数 n 划分成 k 个非负整数之和的不同方式数，按非递增排列

证明过程有，对于任意一种将 n 个不可区分的物体放入 k 个不可区分的盒子的方式

可以按盒中物体个数按非递增序排列，

则有 $a_1+a_2+\cdots+a_k=n$，$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_k$，$a_1,\cdots,a_k\in N$

即与将非负整数 n 划分成 k 个非递增非负整数之和的方法数

另一种表达为，对于正整数 n，将 n 划分为不超过 k 个正整数之和的方式数

即 $b_1+b_2+\cdots+b_j=n$，$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_j$，$b_1,\cdots,b_j\in Z^+$，$1\leq j\leq k$，$k\in Z^+$

如果 $P_k(n)$ 为将非负整数 n 划分为 k 个非递减的非负整数的方式数

则可知当 $n=0$ 时，对任意 $k\in Z^+$，有 $P_k(0)=1$，

当 $k=1$ 时，对任意 $n\in N$，有 $P_1(n)=1$，

而其余情形可划分为两种情况，

1. k 个整数均不为 0，则先从 n 个元素中取出 k 个，再分配剩余，即 $P_k(n-k)$
2. 至少有 1 个整数为 0，则先指定一个整数为 0，再分配剩余 k-1 个，即 $P_{k-1}(n)$

可以递归地定义函数 $P_k(n)$，其中 $n\in N, k\in Z^+$

$$P_k(n)=\begin{cases}1 & , n=0\\ 1 & , k=1\\ P_n(n) & , n<k \text{ 且 } \begin{matrix}n>0\\k>1\end{matrix}\\ P_k(n-k)+P_{k-1}(n) & , n>0 \text{ 且 } k>1 \text{ 且 } n\geq k\end{cases}$$

```haskell
naturalPartition :: Int -> Int -> Int
naturalPartition 0 _ = 1
naturalPartition _ 1 = 1
naturalPartition n k
    | n < k     = naturalPartition n n
    | otherwise = (naturalPartition (n-k) k)
                  +(naturalPartition n (k-1))
```