Calculus - P151

对于函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有连续偏导数

且有 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 　　函数 $y=f(x)$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内恒能唯一地确定连续且有连续导数的

满足条件 $y_0=f(x_0)$，且 $\frac{dy}{dx}=\frac{-F_x}{F_y}$

如果 $F(x,y)$ 的二阶偏导数也均连续，则可以视为 x 的复合函数进一步求导

$$\text{则 } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=-\frac{F_{xx}F_y-F_{yx}F_x}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$
$$=-(F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2)/F_y^3$$

隐函数存在定理：对于函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有连续偏导数

且有 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内

恒能唯一确定连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$

满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，且有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组　对于函数 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内具有对各变量的连续偏导数

又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ 且 $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$

则雅可比行列式 (Jacobian)，即偏导数组成的函数行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于 0

则方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内

恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$

满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$ 且 $v_0=v(x_0,y_0)$

$$\text{且有 } \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

Calculus - P152

隐函数方程组，对于函数 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内具有对各变量的连续偏导数

又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ 且 $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$

则雅可比行列式 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于0

则方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内

恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$

满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$

由于有 $\begin{cases}F[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0\\ G[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0\end{cases}$

则对方程组恒等式两侧分别对变量 x 求导，并应用复合函数求导法则

$\begin{cases}F_x+F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ G_x+G_u\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$，其中 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 系数即雅可比矩阵 $\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}$

从而有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

类似地对变量 y 求导，可以得到 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

对于函数 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在点 (u,v) 的某邻域内连续且有连续偏导数

且有 $\partial(x,y)/\partial(u,v)\neq 0$

则方程组 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在点 (x,y,u,v) 的某邻域内

唯一确定一组连续且具有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$

证明过程有，取方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=x-x(u,v)\equiv 0\\ G(x,y,u,v)=y-y(u,v)\equiv 0\end{cases}$，又 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

于是根据隐函数存在定理，可以在点 (x,y,u,v) 的某邻域内

唯一确定一组连续且具有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$

再代入方程组有 $\begin{cases}x\equiv x[u(x,y),v(x,y)]\\ y\equiv y[u(x,y),v(x,y)]\end{cases}$

分别对x求偏导数 则有 $1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

于是有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

又 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -\frac{\partial x}{\partial v}\\ 0 & -\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=-\dfrac{\partial y}{\partial v}$，类似地有 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\dfrac{\partial y}{\partial u}$

于是有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial v}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{-1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial u}$

类似地有 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial v}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial u}$

Calculus - P153

一元向量值函数(unary vector-valued function)，对于空间曲线Γ的参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}，\text{其中 } t\in[\alpha,\beta]$$

于是可以写作向量形式 $\vec{r}=\vec{f}(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$

其中 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，$\vec{f}(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\omega(t)\vec{k}$

于是可知映射 $\vec{f}:[\alpha,\beta]\to R^3$

则对于数集 $D\subset R$，映射 $\vec{f}:D\to R^n$ 称为一元向量值函数

通常记为 $\vec{r}=\vec{f}(t)$，$t\in D$

其中数集D称为函数的定义域，t为自变量，$\vec{r}$为因变量

也称一元向量值函数为向量函数

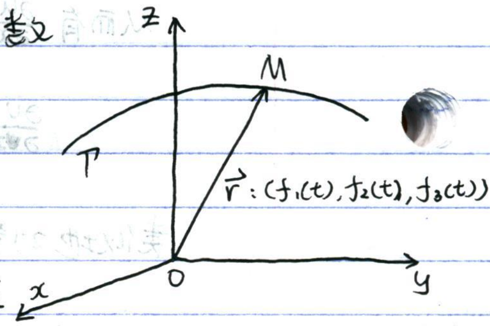
而普通实值函数为数量函数

在R^3中，如果向量值函数 $\vec{f}(t)$，$t\in D$ 的三个分量函数

$f_1(t)$，$f_2(t)$，$f_3(t)$，$t\in D$

则 $\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$，$t\in D$

或 $\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$，$t\in D$



在R^3中，向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$，$t\in D$ 与空间曲线Γ对应

因此 $\vec{r}=\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ 称为曲线Γ的向量方程

对于向量值函数 $\vec{f}(t)$ 在点 t_0 的某去心邻域内有定义

如果存在常向量 $\vec{r}_0$，对于任意给定的正数ε，总存在正数δ

使得当t满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，都满足 $\|\vec{f}(t)-\vec{r}_0\|<\varepsilon$

则称常向量 $\vec{r}_0$ 为向量值函数 $\vec{f}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限

记做 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{r}_0$，或 $\vec{f}(t)\to\vec{r}_0$，$t\to t_0$

容易证明向量值函数 $\vec{f}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限存在的充分必要条件为

$\vec{f}(t)$ 的三个分量函数 $f_1(t)$，$f_2(t)$，$f_3(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限都存在

即有 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to t_0}f_1(t),\lim\limits_{t\to t_0}f_2(t),\lim\limits_{t\to t_0}f_3(t))$

如果向量值函数 $\vec{f}(t)$ 在点 t_0 的某邻域内有定义，$t\in D$

如果 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$ 称向量值函数 $\vec{f}(t)$ 在 t_0 连续

可知 $\vec{f}(t)$ 在 t_0 连续的充分必要条件为 $\vec{f}(t)$ 的三个分量函数 $f_1(t)$，$f_2(t)$，$f_3(t)$ 均在 t_0 处连续

如果有 $D_1\subset D$，且 $\vec{f}(t)$ 在 D_1 的任意点，均连续，则称 $\vec{f}(t)$ 在 D_1 上连续

并称 $\vec{f}(t)$ 是 D_1 上的连续函数

Calculus - P154

向量值导数

对于向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 在点 t_0 的某邻域内有定义

如果有 $\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r}/\Delta t=\lim_{\Delta t\to 0}[\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)]/\Delta t$ [redacted] 极限存在

则称这个极限向量为向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 在点 t_0 处的导数或导向量

记为 $\vec{f}'(t_0)$ 或 $\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=t_0}$

[redacted]

对于向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$, $t\in D$, 如果对于 $D_1\subset D$, $\vec{f}(t)$ 在 D_1 中任意点 t 处均存在导向量 $\vec{f}'(t)$

则称向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 在 D_1 上可导

对于向量值函数 $\vec{f}(t)$ 在点 t_0 处可导当且仅当分量函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 在点 t_0 处均可导

且有导向量 $\vec{f}'(t_0)=f_1'(t_0)\vec{i}+f_2'(t_0)\vec{j}+f_3'(t_0)\vec{k}$

向量值函数具有与数量函数类似的求导法则

对于可导的向量值函数 $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, 常向量 $\vec{C}$, 可导的数量函数 $\varphi(t)$, 常数 C

$$\frac{d}{dt}\vec{C}=\vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}[C\vec{u}(t)]=C\vec{u}'(t)$$

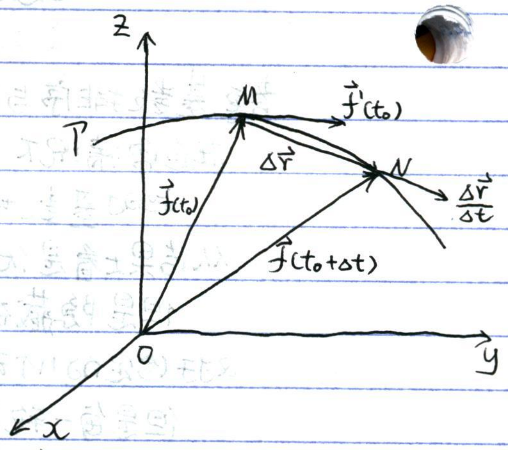
$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\pm\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\pm\vec{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)\vec{u}(t)]=\varphi'(t)\vec{u}(t)+\varphi(t)\vec{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{u}[\varphi(t)]=\varphi'(t)\cdot\vec{u}'[\varphi(t)]$$



几何意义

对于空间曲线Γ为向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$, $t\in D$ 的终端曲线

向量 $\overrightarrow{OM}=\vec{f}(t_0)$, $\overrightarrow{ON}=\vec{f}(t_0+\Delta t)$, 且假设向量 $\vec{f}'(t_0)\neq\vec{0}$

则当 $\Delta t>0$ 时, 向量 [redacted] $\Delta\vec{r}=\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)$ 的方向与 t 增大时点 M 的移动方向一致

当 $\Delta t<0$ 时, 向量 $\Delta\vec{r}=\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)$ 的 [redacted] 方向与 t 增大时点 M 的移动方向相反

但不论 [redacted] $\Delta t>0$ 或 $\Delta t<0$, 向量 $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\Delta\vec{r}$ 的指向始终与 t 增大方向一致

于是导向量 $\vec{f}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r}/\Delta t$

为向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 的终端曲线Γ在点 M 处的一个切向量, 其指向与 t 的增长方向一致

如果向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 为沿空间光滑曲线运动的质点 M 的位置向量

则 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 的导向量 $\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}$ 为质点 M 的速度向量, 其方向与曲线相切

$\vec{v}=\vec{f}'(t)$ 的导向量 $\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ 为质点 M 的加速度向量

Calculus - P155

空间曲线

对于空间曲线Γ的参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$，其中 $t\in[\alpha,\beta]$

假定 $\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 均在 $[\alpha,\beta]$ 上可导，且三个导数不同时为零

考虑空间曲线Γ上的点 $M(x_0,y_0,z_0)$，对应于参数 t_0

记向量值函数 $\vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$，$t\in[\alpha,\beta]$

则向量 $\vec{T}=\vec{f}'(t)=(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$ 为空间曲线Γ在点M处的切向量

于是空间曲线Γ在点M处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

对于通过点M且与切线垂直的平面称为空间曲线Γ在点M处的法平面(normal plane)

即通过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\vec{T}=\vec{f}'(t_0)$ 为法向量的平面

有法平面方程 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

如果空间曲线Γ的方程可以表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\omega(x) \end{cases}$，则取出x为参数以得到参数方程形式 $\begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\omega(x) \end{cases}$

如果 $\varphi(x),\omega(x)$ 均在点 $x=x_0$ 处可导，则有切向量 $\vec{T}=(1,\varphi'(x_0),\omega'(x_0))$

于是有在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程 $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(x_0)}$

有法平面方程 $(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\omega'(x_0)(z-z_0)=0$

如果空间曲线Γ方程表示为 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$，其中参数 $t\in R$

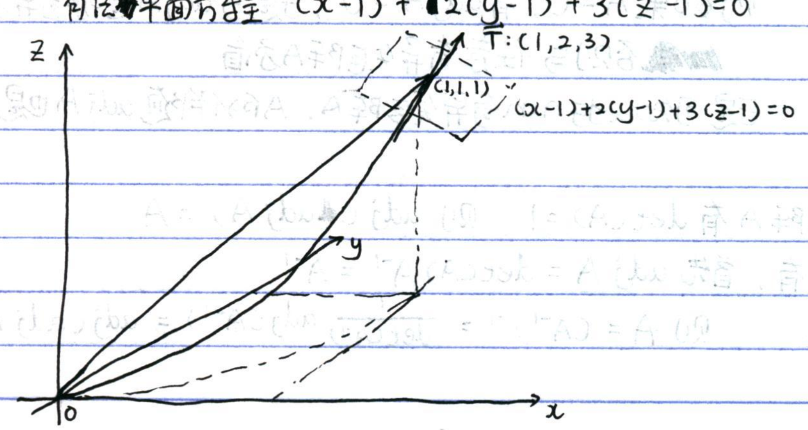
则考虑空间曲线Γ在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程与法平面方程

可知 $x'(t)=1$，$y'(t)=2t$，$z'(t)=3t^2$

如对于参数 $t_0=1$，则对应点 $M(1,1,1)$ 处，有切向量 $\vec{T}=(1,2,3)$

于是有在点 $M(1,1,1)$ 处的切线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

有法平面方程 $(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$



Calculus - P156

空间曲线

对于空间曲线Γ的方程表示为空间曲面方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

点$M(x_0,y_0,z_0)$为曲线Γ上的一个点

假设F, G对各个变量均具有连续偏导数

且 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$

则此时方程组在点$M(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内确定一组函数 $y=\varphi(x)$, $z=\omega(x)$

于是通过求 $\varphi'(x_0)$ 和 $\omega'(x_0)$ 可以得到切线方程和法平面方程

对于恒等式 $\begin{cases} F[x,\varphi(x),\omega(x)]\equiv 0 \\ G[x,\varphi(x),\omega(x)]\equiv 0 \end{cases}$ 的两侧分别求对变量x的全导数

则有
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial G}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

又根据假设可知在点$M(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内有 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$

于是有
$$\varphi'(x)=\frac{dy}{dx}=\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}$$
$$\omega'(x)=\frac{dz}{dx}=\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}$$

于是有向量 $\vec{T}=(1,\varphi'(x_0),\omega'(x_0))$ 为曲线Γ在点M处的一个切向量

且有
$$\varphi'(x_0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}\right|_M\Big/\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_M$$
$$\omega'(x_0)=\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_M\Big/\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_M$$

其中下标M表示行列式在点$M(x_0,y_0,z_0)$的值

于是有向量 $\vec{T}'=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right)$ 为曲线Γ在点M处的一个切向量

于是有空间曲线Γ在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为
$$\frac{x-x_0}{\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_M}$$

有空间曲线Γ在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的法平面方程为
$$\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_M\cdot(x-x_0)+\left.\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}\right|_M\cdot(y-y_0)+\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_M\cdot(z-z_0)=0$$

注意如果 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=0$，而 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M$，$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M$ 至少有一个不为0

即 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M$，$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M$，$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M$ 不同时为0时

可以得到相同的切线方程与法平面方程

Calculus - P157

空间曲面

对于空间曲面Σ表示为隐式方程 $F(x,y,z)=0$

令点$M(x_0,y_0,z_0)$为曲面Σ上的一点，

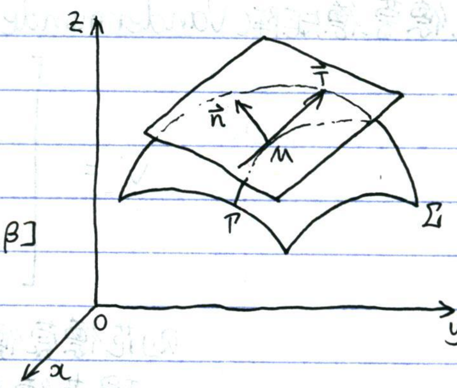
且函数$F(x,y,z)$在点M有连续偏导数且不同时为0

则取空间曲面Σ上任意过点M的空间曲线Γ

且曲线Γ有参数方程 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),\ t\in[\alpha,\beta]$

其中参数$t=t_0$对应于点$M(x_0,y_0,z_0)$

且有导数$\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0)$不全为0



于是有过点M的曲线Γ的切线方程 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

由于曲线Γ完全在曲面Σ上，即曲线Γ内的每一点都在曲面上

有恒等式 $F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\equiv 0$

又$F(x,y,z)$在点M处有连续偏导数，且$\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0)$均存在

于是有恒等式左侧的全导数在$t=t_0$处存在且等于0

即 $\dfrac{d}{dt}F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\Big|_{t=t_0}=0$

则有 $F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0$

再引入向量 $\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),\ F_y(x_0,y_0,z_0),\ F_z(x_0,y_0,z_0))$

又曲线Γ在点M处有切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0))$

于是有切向量$\vec{T}$与向量$\vec{n}$是相互垂直的

又曲线Γ为空间曲面Σ上过点M的任意曲线，则所有的切线均与向量$\vec{n}$相互垂直

于是曲面Σ上所有过点M的曲线在点M处的切线均在同一个平面上

则这个平面称为曲面Σ在点M处的切平面(tangent plane)

切平面方程为 $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

而过点M且垂直于切平面的直线称为曲面Σ在点M处的法线，称$\vec{n}$为在点M处的法向量

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

对于空间曲面Σ表示为显式方程 $z=f(x,y)$，则取方程 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$

于是有 $F_x(x,y,z)=f_x(x,y),\quad F_y(x,y,z)=f_y(x,y),\quad F_z(x,y,z)=-1$

则有法向量 $\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ -1)$

切平面方程为 $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

即有 $z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$，即$z=f(x,y)$在点$M$的全微分

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

再取向上的法向量 $(-f_x(x_0,y_0),\ -f_y(x_0,y_0),\ 1)$

则有方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$

其中 $f_x=f_x(x_0,y_0),\ f_y=f_y(x_0,y_0)$

Calculus - P158

方向导数 (direction derivative)，对于空间平面 xOy 上以 $P_0(x_0, y_0)$ 为起点的射线 l

向量 $\vec{e_l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 为与射线 l 同方向的单位向量，

其中 $\cos\alpha$ 与 $\cos\beta$ 为方向余弦

于是射线 l 有参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \end{cases}$

其中 $t \geq 0$

假设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义

且有 $P(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ 为射线 l 上的另一点，且 $P \in U(P_0)$

如果函数增量 $f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)$ 与 P 到 P_0 的距离 $|PP_0| = t$ 的比值

$\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$ 当 P 沿射线 l 接近 P_0 时极限存在，即 $t \to 0^+$

即有 $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$ 存在

则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 沿方向 l 的方向导数

记为 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)} = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$

于是方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)}$ 即函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的变化率

如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的偏导数存在

则对于 $\vec{e_l} = \vec{i} = (1, 0)$，于是有 $\cos\alpha = 1$，$\cos\beta = 0$

有 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)} = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = f_x(x_0, y_0)$

对于 $\vec{e_l} = \vec{j} = (0, 1)$，于是有 $\cos\alpha = 0$，$\cos\beta = 1$

有 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)} = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = f_y(x_0, y_0)$

但是注意当 $e_l = \vec{i}$ 时，$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)}$ 存在时，$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)}$ 未必存在

如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微分，则函数在该点沿任一方向 l 的方向导数存在

且有 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$，其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为方向 l 的方向余弦

证明过程有，由于函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微分

于是有 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$

又由于点 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 在以 (x_0, y_0) 为起点，方向为 l 的射线上

于是有 $\Delta x = t\cos\alpha$，$\Delta y = t\cos\beta$，$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = t$

即 $o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) = o(t)$

则有 $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{t}$

$= \lim\limits_{t \to 0^+} [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})]/t$

$= \lim\limits_{t \to 0^+} [f_x(x_0, y_0)t\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)t\cos\beta + o(t)]/t$

$= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$

于是可知对于任意具有方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 的方向 l，方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)}$ 均存在

且有 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$

Calculus - P159

方向导数　对于三元函数 $f(x,y,z)$，在空间中点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 有沿方向 $\vec{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

如果函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微分，则函数在该点沿方向 $\vec{e_l}$ 的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

梯度　(gradient)，对于函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数

则对于区域 D 内任意点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，存在向量 $f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$

称为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的梯度，

记为 $\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$

其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ 称为 Nabla operator

或称向量微分算子 (vector differential operator)

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微分，$\vec{e_l}$ 为沿方向 l 的单位向量

又向量 $\vec{e_l}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}$

则方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$

$= \overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\cdot\vec{e_l} = \|\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|\cdot\|\vec{e_l}\|\cdot\cos\theta$

$= \|\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|\cos\theta$，其中 $\theta = (\widehat{\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0),\vec{e_l}})$

可知方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 为梯度 $\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)$ 在 $\vec{e_l}$ 上的投影

即 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = \|\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|\cos\theta = \frac{1}{\|\vec{e_l}\|}\cdot\|\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|\,\|\vec{e_l}\|\cos\theta$

$= \frac{1}{\|\vec{e_l}\|}\cdot\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\cdot\vec{e_l} = Prj_{\vec{e_l}}\,\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)$

注意到当 $\theta=0$ 时，即 $\vec{e_l}$ 与梯度 $\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)$ 的方向相同时，函数 $f(x,y)$ 沿方向 $\vec{e_l}$ 的增加最快

此时函数在此方向 $\vec{e_l}$ 的方向导数达到最大值，即 $\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)$ 的模

即方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = \|\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|\cdot\cos\theta = \|\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|$

当 $\theta=\pi$ 时，即 $\vec{e_l}$ 与梯度 $\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)$ 的方向相反时，函数 $f(x,y)$ 沿方向 $\vec{e_l}$ 的减少最快

此时函数在此方向 $\vec{e_l}$ 的方向导数达到最小值，

即方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = \|\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|\cdot\cos\theta = -\|\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $\vec{e_l}$ 与梯度 $\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)$ 相垂直时，函数 $f(x,y)$ 沿方向 $\vec{e_l}$ 的变化率为 0

此时函数在此方向 $\vec{e_l}$ 的方向导数为 0

即方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = \|\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|\cdot\cos\theta = 0$

于是可知对于二元函数 $f(x,y)$，在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微分时

首先可以得到梯度向量 $\overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$

再根据不同的方向单位向量 $\vec{e_l}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}$

得到在该方向上的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = \overline{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\cdot\vec{e_l}$

$= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$

Calculus - P160

等值线

对于二元函数 $z=f(x,y)$，在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中表示一个空间曲面

则以平行于 xOy 平面的平面 $z=C$ 截此曲面

可得截取曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=C \end{cases}$

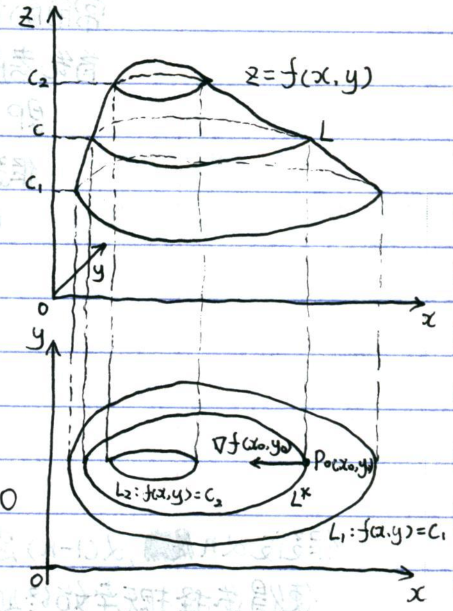
由于联立方程组可得方程 $f(x,y)=C$

则对于给定的常数 C，且令 $f(x,y)=C$ 的 $\{(x,y)\}$ 非空

则曲线 L 在 xOy 平面上的投影曲线 L^*

满足方程 $f(x,y)=C$

则称平面曲线 L^* 为函数 $z=f(x,y)$ 的等值线(contour line)



如果对于二元函数 $f(x,y)$，$f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 均存在且不同时为0

则对于等值线 $f(x,y)=C$ 上的任意一点 $P_0(x_0,y_0)$

在该点处有函数 $f(x,y)$ 的梯度向量

$$\vec{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0)\vec{j} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$$

再取与梯度向量同方向的单位向量

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$$

则单位向量 $\vec{n}$ 即函数 $f(x,y)=C$ 上点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的单位法向量

于是可知函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处的梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$ 的方向

即等值线 $f(x,y)=C$ 在点 (x_0,y_0) 处的法线方向 $\vec{n}$

又函数 $f(x,y)$ 沿方向向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)) \cdot \frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$$

$$= (f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)) / \sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}$$

$$= \sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)} = \|\vec{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)\|$$

于是有函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度向量等于方向导数与单位法向量的乘积

即 $\nabla f(x_0,y_0) = \|\nabla f(x_0,y_0)\| \cdot \vec{n} = \left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \vec{n}$

推广至三元函数 $f(x,y,z)$，如果函数 $f(x,y,z)$ 在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数

则在点 $P_0(x_0,y_0,z_0) \in G$ 处有梯度向量

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \vec{\text{grad}}\, f(x_0,y_0,y_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0,z_0)\vec{j} + f_z(x_0,y_0,z_0)\vec{k}$$

其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ 称为三维的向量微分算子或 Nabla 算子

则对于给定常数 C，引入曲面 $f(x,y,z)=C$，称为函数 $f(x,y,z)$ 的等值面(contour surface)

且梯度 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ 的方向即等值面 $f(x,y,z)=C$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的单位法向量 $\vec{n}$

梯度 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ 的模为函数 $f(x,y,z)$ 沿法向量方向的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$

即有 $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \vec{n}$

Calculus - P161

数量场 (scala field)，对于空间区域G，

如果对于空间区域G内的任意一点M，都存在一个确定的数量 $f(M)$

则称在空间区域G内确定了一个数量场

且数量场通过一个数量函数 $f(M)$ 确定

向量场 (vector field)，对于空间区域G

如果对于空间区域G内的任意一点M，都存在一个确定的向量 $\vec{F}(M)$

则称在空间区域G内确定了一个向量场

且向量场通过一个向量值函数 $\vec{F}(M)$ 确定

如对于三维空间区域G，向量值函数 $\vec{F}(M)$ 可以表示为

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$$

其中 $P(M), Q(M), R(M)$ 为点M对应的数量函数

势场 (potential field)，对于空间区域G中的数量函数 $f(M)$ 和向量值函数 $\vec{F}(M)$

如果向量值函数 $\vec{F}(M)$ 是数量函数 $f(M)$ 产生的梯度 $\overrightarrow{grad}\, f(M)$

则称向量场 $\vec{F}(M)$ 为数量函数 $f(M)$ 产生的一个势场

而数量函数 $f(M)$ 为向量场 $\vec{F}(M)$ 的一个势函数

注意任意向量场 $\vec{F}(M)$ 不一定是势场

而仅当存在数量函数 $f(M)$，使得 $\overrightarrow{grad}\, f(M) = \vec{F}(M)$ 时，向量场 $\vec{F}(M)$ 为势场

对于三维空间区域 R^3，对于点 $M(x,y,z)$，其到原点O距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

则有数量场 $f(M) = \frac{m}{r}$，其中常数 $m>0$

假定点 $M(x,y,z)$ 与原点O不同，于是有 x,y,z 不同时为0，即 $r \neq 0$

则有向量场 $\vec{F}(M) = \overrightarrow{grad}\, f(M) = f_x(M)\vec{i} + f_y(M)\vec{j} + f_z(M)\vec{k}$

$$f_x(M) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{r}\right) = -\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= -\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{m}{r^3}x$$

同理地有 $f_y(M) = -\frac{m}{r^3}y$，$f_z(M) = -\frac{m}{r^3}z$

于是有 $\overrightarrow{grad}\, f(M) = -\frac{m}{r^3}x\vec{i} - \frac{m}{r^3}y\vec{j} - \frac{m}{r^3}z\vec{k}$

$$= -\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right)$$

又 $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = 1$，则取单位向量 $\vec{e}_r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}$

则有 $\overrightarrow{grad}\, \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^2}\vec{e}_r$

在物理上可以描述为，位于原点O的质量为m的质点对空间中点M处质量为1的质点的引力

引力大小与质点质量乘积成正比，而与质点间距离平方成反比，引力方向由点M指向原点，

称梯度场 $\overrightarrow{grad}\, \frac{m}{r}$ 为引力场 (gravitational field)，数量值函数 $\frac{m}{r}$ 为引力势 (gravitational potential)

Calculus - P162

多元函数极值，对于二元函数 $z=f(x,y)$ 有定义域 D，有点 $P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的内点，

如果存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset D$

使得对于该邻域内任意不同于 P_0 的点 $P(x,y)\in U(P_0)$ 且 $P\neq P_0$

均有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有极大值 $f(x_0,y_0)$

点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的极大值点，

如果存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset D$

使得对于该邻域内任意不同于 P_0 的点 $P(x,y)\in U(P_0)$ 且 $P\neq P_0$

均有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有极小值 $f(x_0,y_0)$

点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的极小值点，

于是有函数 $f(x,y)$ 的极大值和极小值统称为极值

极大值点与极小值点统称为函数 $f(x,y)$ 的极值点，

可以进一步地推广到n元函数 $u=f(P)$，有定义域 $D\subset R^n$，有点 P_0 为 D 的内点，

如果存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset D$，

对于该邻域内任意不同于 P_0 的点 $P\in U(P_0)$ 且 $P\neq P_0$

均有 $f(P)<f(P_0)$ / $f(P)>f(P_0)$

则称函数 $u=f(P)$ 在点 P_0 处有极大值 / 极小值

必要条件　假设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值

则有 $f_x(x_0,y_0)=0$ 且 $f_y(x_0,y_0)=0$

证明过程有，不失一般性地假设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极大值

则存在点 (x_0,y_0) 的某个邻域 U

对于任意邻域内不同于 (x_0,y_0) 的点，$(x,y)\in U$ 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$

均有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$

特别地对于 $y=y_0$ 且 $x\neq x_0$ 的点 (x,y_0)

有 $f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$

又 $f(x,y_0)$ 可以视为对于变量 x 的一元函数且在 $x=x_0$ 处取得极值

于是有 $f_x(x,y)=0$

再对于 $x=x_0$ 且 $y\neq y_0$ 的点 (x_0,y)

类似地有 $f_y(x,y)=0$

Calculus - P163

多元函数极值　对于空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的空间曲面 $z=f(x,y)$，在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处有切平面

则有切平面方程 $z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

如果点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是函数 $z=f(x,y)$ 的极值点，

则有 $f_x(x_0,y_0)=0$ 且有 $f_y(x_0,y_0)=0$

于是切平面为平行于 xOy 坐标面的平面 $z-z_0=0$

类似地扩展到 n 元函数 $u=f(P)$，在点 P_0 处具有偏导数

则有 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 处有极值的必要条件为

$f_{x_1}(P_0)=0$，$f_{x_2}(P_0)=0$，…，$f_{x_n}(P_0)=0$

类似于一元函数，对于二元函数 $z=f(x,y)$，

对于所有点 $P_0(x_0,y_0)$ 使得 $f_x(x_0,y_0)=0$ 且 $f_y(x_0,y_0)=0$

称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的驻点，

并且有对于具有偏导数的函数的极值点必定是函数的驻点，

但函数的驻点不一定是函数的极值点，

充分条件　对于二元函数 $z=f(x,y)$，在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内连续且具有一阶和二阶连续偏导数

且有 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，即 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的驻点，

则令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$

则当 $AC-B^2>0$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处取得极值

且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值

当 $AC-B^2<0$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处没有极值

当 $AC-B^2=0$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处可能有极值，也可能没有极值

如对于函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，可知定义域为 R^2

有方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

则有驻点 $(1,0)$，$(1,2)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$

又有 $f_{xx}(x,y)=6x+6$，$f_{xy}(x,y)=0$，$f_{yy}(x,y)=-6y+6$

在点 $(1,0)$ 处，$AC-B^2>0$ 且 $A>0$，于是函数在 $(1,0)$ 处有极小值

在点 $(1,2)$ 处，$AC-B^2<0$，于是函数在 $(1,2)$ 处没有极值

在点 $(-3,0)$ 处，$AC-B^2<0$，于是函数在 $(-3,0)$ 处没有极值

在点 $(-3,2)$ 处，$AC-B^2>0$，且 $A<0$，于是函数在 $(-3,2)$ 处有极大值

Calculus - P164

条件极值(conditional extremum)，对于函数 $u=f(P)$ 在其定义域 D 上的极值

如果[redacted]对于自变量除了[redacted]限制在函数的定义域内以外，没有其他限制条件

则称此时极值为无条件极值

如果除了定义域外，有对于函数自变量有其他附加条件

则称此时极值为条件极值

拉格朗日乘数法(Lagrange multipler method)，对于函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 的极值

考虑 $f(x,y)$ 在定义域内的点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有极值的必要条件，[redacted]

由于应满足条件 $\varphi(x,y)=0$，于是有 $\varphi(x_0,y_0)=0$

假定在点 (x_0,y_0) 的某邻域内，函数 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均具有连续的一阶偏导数

且有 $\varphi_y(x,y)\neq 0$

则根据隐函数存在定理，函数 $\varphi(x,y)=0$ 可以唯一地确定函数 $y=\psi(x)$

$y=\psi(x)$ 连续且具有连续导数

于是有关于 x 的函数 $z=f[x,\psi(x)]$

于是函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得的极值，相当于函数 $f[x,\psi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处取得的极值

则一元函数 $z=f[x,\psi(x)]$ 在 $x=x_0$ 处取得极值的必要条件为

$$\frac{dz}{dx}\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0$$

而根据隐函数求导公式，有 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = -\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$

于是有 $f_x(x_0,y_0) - f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)} = 0$

取参数 $\lambda = -\frac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$，即有 $f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi(x_0,y_0)=0$

于是点 (x_0,y_0) [redacted]以及参数 λ 为方程组的解

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

如果引入辅助函数 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

则有 $L_x(x_0,y_0)=0$，$L_y(x_0,y_0)=0$

称函数 $L(x,y)$ 为拉格朗日函数(Lagrange function)

参数 λ 为拉格朗日乘子(Lagrange multiplier)

更一般地对于函数 $u=f(P)$，其中 P 为 n 维向量，满足条件 $\varphi_1(P)=0,\cdots,\varphi_k(P)=0$

定义拉格朗日函数 $L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=f(P)+\lambda_1\varphi_1(P)+\cdots+\lambda_k\varphi_k(P)$

求解方程组 $\begin{cases} \text{对于任意 } x_i,\ L_{x_i}(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=f_{x_i}(P)+\lambda_1\varphi_{1x_i}(P)+\cdots+\lambda_k\varphi_{kx_i}(P)=0 \\ \text{对于任意 } \lambda_j,\ L_{\lambda_j}(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=\varphi_j(P)=0 \end{cases}$

Calculus - P165

二元函数泰勒公式，对于函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某邻域内有直到 $(n+1)$ 阶导数，则对于任意 $x\in U(x_0)$

有 $0<\theta<1$，有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

则可以扩展至多元函数

对于二元函数 $z=f(x,y)$，在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有 $(n+1)$ 阶连续偏导数

则对于该邻域内任意一点，(x_0+h, y_0+k)

有 $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)$

其中 $0<\theta<1$ $\quad +\cdots+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

且有 $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)=hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$

$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)=h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0)$

$\cdots$

$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0,y_0)=\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}h^p k^{m-p}\frac{\partial^m f}{\partial x^p\partial y^{m-p}}\Big|_{(x_0,y_0)}$

证明过程有，引入一元函数 $\Phi(t)=f(x_0+ht, y_0+kt)$，其中 $0\le t\le 1$

则显然有 $\Phi(0)=f(x_0,y_0)$，$\Phi(1)=f(x_0+h,y_0+k)$

则依据 $\Phi(t)$ 的定义及多元复合函数的求导法则

有 $\Phi'(t)=hf_x(x_0+ht,y_0+kt)+kf_y(x_0+ht,y_0+kt)$

$=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0+ht,y_0+kt)$

$\Phi''(t)=h^2 f_{xx}(x_0+ht,y_0+kt)+2hkf_{xy}(x_0+ht,y_0+kt)+k^2 f_{yy}(x_0+ht,y_0+kt)$

$=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0+ht,y_0+kt)$

$\cdots$

$\Phi^{(n+1)}(t)=\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}h^p k^{n+1-p}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^{n+1-p}}\Big|_{(x_0+ht,y_0+kt)}$

$=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+ht,y_0+kt)$

由一元函数的麦克劳林公式可知 $\qquad$ 其中 $0<\theta<1$

$\Phi(1)=\Phi(0)+\Phi'(0)+\frac{1}{2!}\Phi''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta)$

其中 $\Phi(0)=f(x_0,y_0)$，$\Phi(1)=f(x_0+h,y_0+k)$

以及 $\Phi(t)$ 直到 n 阶导数在 $t=0$ 处的值，$\Phi(t)$ 的 $n+1$ 阶导数在 $t=\theta$ 处的值

于是有 $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)$

$+\cdots+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)+R_n$

其中 $R_n=\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

于是对于二元函数 $z=f(x,y)$，在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有 $(n+1)$ 阶连续偏导数

则对于该邻域内任意一点 (x_0+h, y_0+k) $\qquad$ 其中 $0<\theta<1$

$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^i f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

称为二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的 n 阶泰勒公式

$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$ 称为拉格朗日余项