Calculus - P12

自然对数的底(base of the natural logarithm)，用e表示 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

注意这是对于离散的情形，即数列$\{x_n\}$，$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 的极限

考虑 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$，其中$x\in R$，当 $x\to\infty$ 时的情形

首先考虑 $x\to+\infty$，可知对于任意 $x\in R^+$，存在 $n\in Z^+$，使得 $n\le x<n+1$，$(x\ge 1)$

于是有 $(1+\frac{1}{x})^x > (1+\frac{1}{n+1})^x \ge (1+\frac{1}{n+1})^n$

以及 $(1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{n})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

合并可得 $(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

当 $x\to+\infty$ 时，$n\to\infty$

而 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}/(1+\frac{1}{n+1})] = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}/\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})$

又当$n\to\infty$时，$1+\frac{1}{n+1}\ne 0$，$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})=1\ne 0$

则有 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e$

而 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})] = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = e$

则根据准则I'，有 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

而对于 $x\to-\infty$ 时，可知对于任意 $x\in R^-$，$x<-1$，存在 $t\in R^+$，使得 $x=-(t+1)$

可知当$x\to-\infty$时，$t\to+\infty$，又有 $\lim_{u} f(u) = \lim_{x} f[g(x)]$，其中 $u=g(x)$

$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{-(t+1)})^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t+1})^{-(t+1)}$

$= \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^t\cdot\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t}) = e$

于是有当$x\to\infty$时，$(1+\frac{1}{x})^x\to e$，

另外对于 $\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}$，

可令 $z=1/x$，于是有当$z\to 0$时，$x\to\infty$

于是有 $\lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

另外对于 $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$，

可令 $t=-x$，于是有当$x\to\infty$时，$t\to\infty$

则有 $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t} = \lim_{t\to\infty}1/(1+\frac{1}{t})^t = 1/e$

夹逼准则II'　如果函数$f(x)$在x_0的某个左邻域内单调并且有界，则$f(x)$在x_0的左极限存在

即有对于函数$f(x)$去心左邻域 $\mathring{U}^-_{(x_0)}$，$(f(x)$单调$\wedge f(x)$有界$)\to\exists_{A\in R}\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$

注意这条准则可改写为自变量不同变化过程的形式

函数$f(x)$在x_0的某个右邻域内单调并且有界，则$f(x)$在x_0的右极限存在

函数$f(x)$在x大于某个正数时单调并且有界，则$f(x)$在$x\to+\infty$的极限存在

函数$f(x)$在x小于某个负数时单调并且有界，则$f(x)$在$x\to-\infty$的极限存在

特别注意，邻域应参考去心邻域的定义，即左，右邻域不包含点x_0

Calculus - P13

柯西极限存在准则 (Cauchy's Convergence test) 柯西审敛法

对于数列$\{x_n\}$，$\{x_n\}$收敛当且仅当对于任意正数ε，存在正整数N，使得当$m>N$，$n>N$时，有$|x_m-x_n|<\varepsilon$

即有对于数列$\{x_n\}$，$\exists a\in R\ \lim_{n\to\infty}x_n=a \longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in Z^+\ \forall m,n\,(m>N\wedge n>N\longrightarrow |x_m-x_n|<\varepsilon)$

证明过程：如果对于数列$\{x_n\}$，有$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，即数列收敛于a

则取$\varepsilon/2>0$，则有$\forall\varepsilon/2>0\ \exists N\in Z^+\ \forall n\,(n>N\longrightarrow |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2})$

同样的有$\forall\varepsilon/2>0\ \exists N\in Z^+\ \forall n,m\,(n>N\wedge m>N\longrightarrow |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\wedge|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2})$

于是有$|x_m-x_n|=|(x_m-a)-(x_n-a)|\leqslant|x_m-a|+|x_n-a|$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

即有$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in Z^+\ \forall m,n\,(m>N\wedge n>N\longrightarrow|x_m-x_n|<\varepsilon)$

如果$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in Z^+\ \forall m,n\,(m>N\wedge n>N\longrightarrow|x_m-x_n|<\varepsilon)$

则取$m=N+1$，则有当$n>N$时

有$|x_n-x_{N+1}|<\varepsilon$

于是有$x_{N+1}-\varepsilon<x_n<x_{N+1}+\varepsilon$

即$\{x_n\}$在$n>N$时有上界与下界，所以是有界的

则加入$\{x_n\}$的前N项，由于仅有限项，所以可取得$M=\max(|x_1|,\cdots,|x_N|,|x_{N+1}|+\varepsilon)$

即$\{x_n\}$数列整体是有界的，即$\exists a,b\in R\ \{x_n\}\subseteq[a,b]$

又存在实数集$A\subset R$，使得$\forall c\,(c\in A\longrightarrow\{x_n\}$中仅有限项存在于$(-\infty,c)$中

而有无限多项存在于$[c,+\infty)$中$)$

令$B=R-A$，即B为A在R中的补集

于是有$a\in A\wedge b\in B$，即A,B都不是空集 且$A\cup B=R$

且由定义可知$\forall c,d\ (c\in A\wedge d\in B\longrightarrow c<d)$

则由戴金德定理可知，$\exists!\eta\in R$ η或者是A中最大元素，或者是B中最小元素

$\forall\varepsilon>0$，$\eta-\varepsilon\in A$，则根据A的定义，$[\eta-\varepsilon,+\infty)$包含$\{x_n\}$中无限多个项

又$x_1,\cdots,x_N$仅有限多项，即$\exists m>N\ x_m\in[\eta-\varepsilon,+\infty)$ (对于任意$N\in Z^+$)

假设不存在$m>N$，使得$x_m\leqslant\eta+\varepsilon$，则$\forall m>N\ x_m\in(\eta+\varepsilon,+\infty)$

于是$(-\infty,\eta+\varepsilon)$ 则根据定义$\eta+\varepsilon\in A$，与前提矛盾

于是有$\exists m>N$ $\eta-\varepsilon\leqslant x_m<\eta+\varepsilon$

已知当$m,n>N$时，$|x_m-x_n|<\varepsilon$

则有$\forall n>N$ $\eta-2\varepsilon<x_n<\eta+2\varepsilon$

即有$\{x_n\}$收敛，且$\lim_{n\to\infty}x_n=\eta$

戴德金定理 (Dedekind theorem)，将实数集R拆分为$A|A'$，使得A,A'均非空，任何实数c属于且仅属于A,A'中之一，A中每个元素小于A'中每个元素，

则存在唯一的实数β，使得β或者是A中最大元素，或者是A'中最小元素

常称为实数域的完备性，连续性或密接性

Calculus - P14

无穷小的比较 指通过形如 $\lim \beta/\alpha$ 的极限，比较两个无穷小趋于0的"快慢"程度

比较的前提条件有，对于无穷小α和β

α和β是在自变量同一变化过程中的无穷小，

α和β在这个自变量变化过程中均有定义，且$\alpha \neq 0$

高阶无穷小 当 $\lim \beta/\alpha = 0$ 时，称β是α的高阶无穷小，通常记作 $\beta = o(\alpha)$ (small O notation)

低阶无穷小 当 $\lim \beta/\alpha = \infty$ 时，称β是α的低阶无穷小，通常记作 $\beta = \omega(\alpha)$ (small Omega notation)

同阶无穷小 当 $\lim \beta/\alpha = C \neq 0$ 时，称β和α是同阶无穷小

k阶无穷小 当 $\lim \beta/\alpha^k = C \neq 0$ 时，且$k>0$，称β是α的k阶无穷小

等阶无穷小 当 $\lim \beta/\alpha = 1$ 时，称β和α是等阶无穷小，通常记作 $\beta \sim \alpha$ (on the order)

如 $\sin x \sim x \,(x\to 0)$，$\tan x \sim x \,(x \to 0)$，$\arcsin x \sim x \,(x \to 0)$

$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}$ $(x\to 0)$ 对于 $\sqrt[n]{1+x}-1$ $(x\to 0)$ 和 $\frac{1}{n}x$ $(x \to 0)$，可知当$x\to 0$时，$\frac{1}{n}x \neq 0$

则 $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt[n]{1+x}-1)/\frac{1}{n}x$，令 $t = \sqrt[n]{1+x}$，当 $n \in Z^+$ 时

则有 $(t^n-1)/(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1) = t^n-1$

即 $(t-1)/\frac{1}{n}x = (t^n-1)/\frac{1}{n}x\,(t^{n-1}+\cdots+t+1)$

$= (1+x-1)/\frac{1}{n}x\,(t^{n-1}+\cdots+t+1)$

$= n/(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1)$

又当$x\to 0$时，$t\to 1$，则根据复合函数极限

$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[n]{1+x}-1)/\frac{1}{n}x = \lim\limits_{t\to 1} n/(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1) = 1$

于是有 $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x \,(x\to 0)$

定理1 β和α是等阶无穷小，当且仅当 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

证明有当$\alpha \sim \beta$时，有 $\lim \beta/\alpha = 1$，

则 $\lim (\beta-\alpha)/\alpha = \lim(\beta/\alpha - 1) = \lim \beta/\alpha - 1 = 0$

于是有 $\beta - \alpha = o(\alpha)$，即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

当 $\beta = \alpha + o(\alpha)$ 时，根据定义有 $\lim o(\alpha)/\alpha = 0$

有 $\lim \beta/\alpha = \lim (\alpha + o(\alpha))/\alpha = \lim \alpha/\alpha + \lim o(\alpha)/\alpha = 1$

于是有 $\alpha \sim \beta$

定理2 如果 $\alpha \sim \tilde{\alpha}$，$\beta \sim \tilde{\beta}$，且 $\lim \tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$ 存在，则有 $\lim \beta/\alpha = \lim \tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$

证明有 如果 $\alpha \sim \tilde{\alpha}$，$\beta \sim \tilde{\beta}$ 且 $\lim \tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$ 存在，

则 $\lim \beta/\alpha = \lim(\beta/\tilde{\beta} \cdot \tilde{\beta}/\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\alpha}/\alpha) = \lim \beta/\tilde{\beta} \cdot \lim \tilde{\beta}/\tilde{\alpha} \cdot \lim \tilde{\alpha}/\alpha = \lim \tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$

Calculus - P15

注意 同一自变量变化过程下的等价无穷小构成一个等价类

即假设对x的某一变化过程，集合$S = \{\alpha \mid \alpha \to 0$，且$\alpha \neq 0\}$

令关系R为定义在集合S上的关系，且有 $R = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \sim \beta\}$

即有 $\forall \alpha,\beta \in S\ (\lim \beta/\alpha = 1 \to (\alpha,\beta) \in R)$

则可以证明关系R是等价关系.

自反的：$\forall \alpha \in S\ (\lim \alpha/\alpha = 1 \to (\alpha,\alpha) \in R)$

于是可知关系R是自反的，即 $\forall \alpha \in S\ (\alpha \sim \alpha)$

对称的：对于任意$\alpha,\beta \in S$，可知α,β在自变量同一变化过程中均有$\alpha \neq 0 \land \beta \neq 0$

即由 $(\alpha,\beta) \in R$ 可知 $\lim \beta/\alpha = 1$

则 $\lim \alpha/\beta = 1$，于是根据定义有 $(\beta,\alpha) \in R$

即 $\forall \alpha,\beta \in S\ ((\alpha,\beta) \in R \to (\beta,\alpha) \in R)$

于是关系R是对称的，即 $\forall \alpha,\beta \in S\ (\alpha \sim \beta \to \beta \sim \alpha)$

传递的，对于任意$\alpha,\beta,\gamma \in S$，可知在自变量同一变化过程中均有$\alpha \neq 0 \land \beta \neq 0 \land \gamma \neq 0$

即由$(\alpha,\beta) \in R$，$(\beta,\gamma) \in R$可知 $\lim \beta/\alpha = 1$ 和 $\lim \gamma/\beta = 1$

则 $\lim \gamma/\alpha = \lim \gamma/\beta \cdot \beta/\alpha = \lim \gamma/\beta \cdot \lim \beta/\alpha = 1$，于是根据定义有 $(\alpha,\gamma) \in R$

即 $\forall \alpha,\beta,\gamma \in S\ ((\alpha,\beta) \in R \land (\beta,\gamma) \in R \to (\alpha,\gamma) \in R)$

于是关系R是传递的，即 $\forall \alpha,\beta,\gamma \in S\ (\alpha \sim \beta \land \beta \sim \gamma \to \alpha \sim \gamma)$

于是可知关系R是等价关系.

而集合S中的等价无穷小可以据此划分为不同的等价类

增量

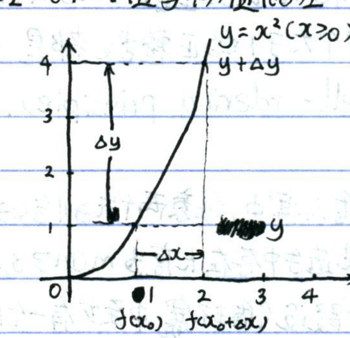
对于变量u，用Δu表示从一个初值u_1到一个终值u_2时，终值与初值的差

即 $\Delta u = u_2 - u_1$，或者写作 $u_2 = u_1 + \Delta u$

特别注意：虽然称Δu为增量，但并不代表正数

$\Delta u > 0$ 时，$u_2 = u_1 + \Delta u$ 为增大的

$\Delta u < 0$ 时，$u_2 = u_1 + \Delta u$ 为减小的



考虑因变量 $y=f(x)$ 的增量，

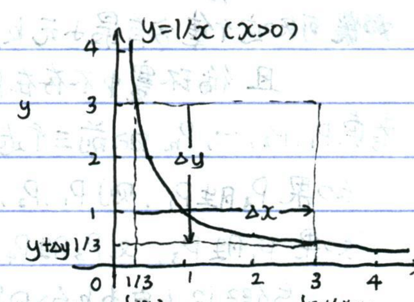
假设$f(x)$在x_0的某一邻域内有定义

则对于 $x = x_0 + \Delta x$，

因变量y的增量 $\Delta y = y - y_0$

于是有 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

$= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



Calculus - P16

函数连续 对于函数 $y=f(x)$，如果在 x_0 的某一邻域内有定义，即在 $U(x_0)$ 内有定义

且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续

另外有 $x=x_0+\Delta x$，所以当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$

又 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$，即有 $f(x)=f(x_0)+\Delta y$

于是 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=f(x_0)$

即有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=f(x_0)$

于是可有如下定义

对于函数 $y=f(x)$，如果 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义

且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续

则有 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+x_0)-f(x)]=0$

并有 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\,(0<|x-x_0|<\delta \longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$

并可由此得到单边连续的定义

如果有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续，($\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$)

即有 $f(x)$ 在 x_0 处左连续 $\longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\,(-\delta<x-x_0<0 \longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$

如果有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续 ($\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$)

即有 $f(x)$ 在 x_0 处右连续 $\longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\,(0<x-x_0<\delta \longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$

则可以进一步地定义函数连续为，如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义

$f(x)$ 在 x_0 处连续的条件为:

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$ 存在 $\land \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$ 存在

$\land$ $f(x)$ 在 x_0 处有定义 $\land f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$

连续函数 (continuous function)，指函数 $f(x)$ 在某一区间内的每个点上连续，称函数在该区间上连续

即 $f(x)$ 在区间 D 上连续 $\longleftrightarrow \forall x_0\,(x_0\in D \longrightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续$)$

注意 如果区间包括端点，即闭区间的端点处

函数 $f(x)$ 在区间左端点处的连续指右连续

函数 $f(x)$ 在区间右端点处的连续指左连续

从图形上看，连续函数的图像为连续且不间断的曲线

对于有理整函数(多项式)，对任意 $x_0\in R$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，所以 $f(x)$ 在实数范围上连续

对于有理分式函数 $F(x)=P(x)/Q(x)$，只要 $Q(x)\neq 0$，有 $\lim F(x)=\lim P(x)/\lim Q(x)$

于是 在剔除使 $Q(x)=0$ 的 x_0 值后的实数集上，$\forall x_0\in R'\ \lim\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$

则可知 $F(x)$ 在其有定义的区间上连续

Calculus - P17

不连续点, 或称间断点, 指函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 但不满足 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

根据细化的定义可知, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续指 $f(x)$ 虽在 x_0 的某个去心邻域内有定义

但是 或者 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ 不存在, 或者 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ 不存在, 或者 $f(x_0)$ [redacted] 对 $x=x_0$ 无定义

或者 [redacted] 不满足 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$

第一类间断点, [redacted]

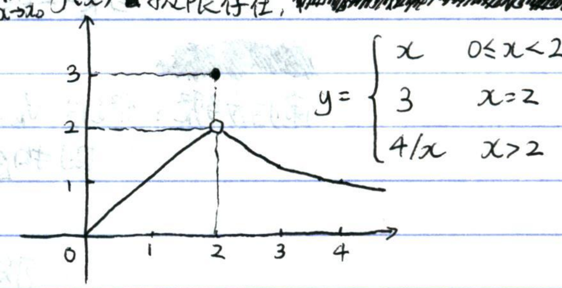
可去间断点(removable discontinuity), 指 [redacted] 对于函数 $f(x)$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 极限存在, [redacted]

但是 $f(x)$ 或者在 x_0 处无定义, 或者 $f(x_0) \ne \lim_{x\to x_0} f(x)$

[redacted] 对于函数 $f(x)$ 的可去间断点 x_0

可以通过对 x_0 重新指派值 $\lim_{x\to x_0} f(x)$

使得 $f(x)$ 在 x_0 变为连续的



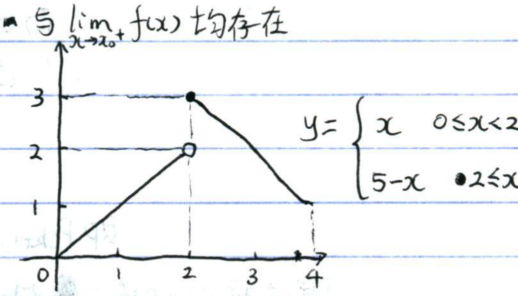
跳跃间断点(jump discontinuity), 指对于函数 $f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在

但 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \ne \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, 即 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

注意: 对于跳跃间断点, [redacted] 根据 $f(x_0)$ 的不同取值可能产生连续(单侧的)

即有 $f(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 时 $f(x)$ 在 x_0 处左连续

$f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 时 $f(x)$ 在 x_0 处右连续



第二类间断点 不属于第一类间断点的任何间断点均视为第二类间断点, 又称 [redacted](essential discontinuity)

[redacted] 注意对于第二类间断点, 无论 $f(x_0)$ 是否有定义或如何指派值, [redacted]一侧无法单侧连续

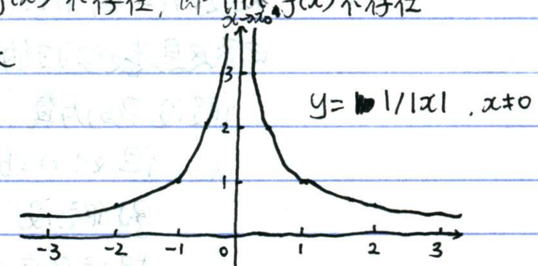
无穷间断点(infinite dicontinuity), 指对于函数 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 或 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 不存在, 即 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

但 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ [redacted] 和 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 如果不存在, 则为无穷大

即 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少有一个为无穷大,

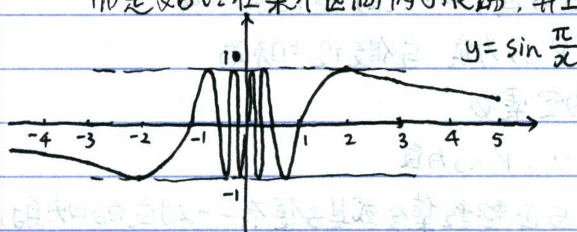
且另一个或者存在, 或者也是无穷大

所以还是可以广义地认为能给出一个极限表示



振荡间断点 指对于 $f(x)$, [redacted] 当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 的极限不存在且 $f(x)$ 也不是无穷大

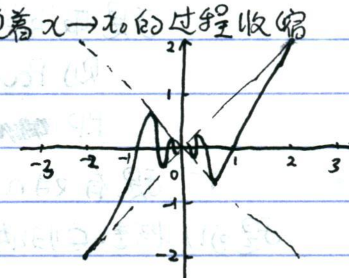
而是始终在某个区间内振荡, 并且振荡范围不随着 $x \to x_0$ 的过程收缩



与之相比

$y = |x| \sin\frac{\pi}{x}$

则是可去间断点



Calculus - P18

连续函数运算 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 连续，则其和、差、积和商(如有定义)都在 x_0 连续

即有 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\land$ $g(x)$ 在 x_0 处连续 $\longrightarrow$ $(f\pm g)(x)$ 和 $(f\cdot g)(x)$ 在 x_0 处连续

$f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续 $\land$ $g(x_0)\neq 0$ $\longrightarrow$ $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ 在 x_0 处连续

反函数连续性 如果函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加/减少且连续，

那么反函数 $f^{-1}(y)$ 在对应的区间 $I_y = \{f(x) \mid x\in I_x\}$ 上单调增加/减少且连续

注意通常称的单调增加/减少为严格单调增加/减少

即 $\forall x_1, x_2 \in I_x \ (x_1 < (\text{或} >) x_2 \longleftrightarrow f(x_1) < (\text{或} >) f(x_2))$

又 $f(x)$ 严格单调增加/减少 $\longrightarrow$ $f(x)$ 是一对一的，即 $f(x)$ 有反函数 $f^{-1}(y)$

$\forall x_0 \in I_x \ (\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \longleftrightarrow \lim\limits_{f(x)\to f(x_0)} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0))$，于是有 $f^{-1}(y)$ 在 I_y 上连续

复合函数连续性 如果函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成，

若 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0) \subseteq D_{f\circ g}$，且有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，而 $f(u)$ 在 u_0 处连续，

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$，

注意：与复合函数极限定义相比，没有在 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 中 $g(x)\neq u_0$ 的条件

这个条件是为了避免如果有 $g(x)=u_0$，而 $f(u)$ 在 u_0 处没有定义的情况

但有 $f(u)$ 在 u_0 处连续 则有 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$，即 $f(u)$ 在 u_0 处确有定义

而 $\mathring{U}(x_0)$ 中使 $g(x)=u_0$ 的点

使 $\forall \varepsilon>0 \ |f[g(x)] - f(u_0)| = 0 < \varepsilon$ 平凡地为真

如果函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成

若 对于 x_0 的某个邻域 $U(x_0) \subset D_{f\circ g}$

且 $g(x)$ 在 x_0 处连续，$f(u)$ 在 $u=g(x_0)=u_0$ 处连续

则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 x_0 处连续

证明过程有：若 $g(x)$ 在 x_0 处连续，$U(x_0) \subset D_{f\circ g}$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = u_0 \in D_f$

若 $f(u)$ 在 u_0 处连续，

则有 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$

于是有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f[g(x_0)]$.

即 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处连续

初等函数连续性 初等函数在其定义区间内都是连续的，定义区间即包含在定义域内的区间

Calculus - P19

$(x \to 0)$

$\ln(1+x) \sim x$ 对于 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \log_a (1+x)^{1/x} = \log_a(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x})$

$= \log_a e = \frac{1}{\ln a}$

当 $a=e$ 时, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, 即 $\ln(1+x) \sim x \ (x\to 0)$

$e^x - 1 \sim x$ 对于 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, 令 $t = a^x - 1$, 则 $x = \log_a(t+1)$,

当 $x \to 0$ 时, $t \to 0$, 于是有 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \ln a$

当 $a=e$ 时, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. 即 $e^x - 1 \sim x \ (x\to 0)$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ 对于 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, 令 $t = (1+x)^\alpha - 1$, 则 $\ln(t+1) = \ln(1+x)^\alpha$

且当 $x\to 0$ 时, $t \to 0$, 于是有 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^\alpha-1}{\ln(1+x)^\alpha} \cdot \frac{\ln(1+x)^\alpha}{x}\right]$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha \quad (\alpha \in R)$

则当 $\alpha \neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$, 即 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (x \to 0)$

幂指函数极限 对于形如 $u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0,\ u(x)\neq 1)$ 的函数

如果有 $\lim u(x) = a > 0$, $\lim v(x) = b$

则 $\lim u(x)^{v(x)} = a^b$,

证明过程有 令 $f(x) = \ln(u(x)^{v(x)}) = v(x)\ln u(x)$

由于 $u(x)>0$, 则 $\ln u(x)$ 在 $u(x)$ 的定义区间内有定义

于是 $\lim f(x) = \lim[v(x)\ln u(x)] = \lim v(x) \cdot \lim[\ln u(x)]$

$= \lim v(x) \cdot \ln[\lim u(x)]$

又 $\lim u(x) = a > 0$, $\lim v(x) = b$, 则 $\lim f(x) = b \ln a$

则 $u(x)^{v(x)} = e^{f(x)}$, 于是在 $D_{u \cap v}$ 的区间内 $\lim u(x)^{v(x)} = \lim e^{f(x)}$

又 $\lim e^{f(x)} = e^{\lim f(x)} = e^{b\ln a} = a^b$

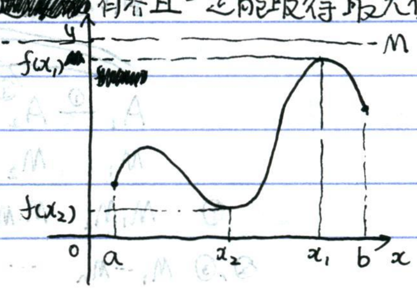
即 $\lim u(x)^{v(x)} = a^b$

闭区间上连续 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 而在左端点 a 右连续, 在右端点 b 左连续

则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

有界性定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在闭区间上有界且一定能取得最大值和最小值

$\exists_{M>0} \forall_x (x \in [a,b] \to |f(x)| \leq M)$



最大值最小值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

$\exists x_1 (x_1 \in [a,b] \land (\forall_x (x \in [a,b] \to f(x) \leq f(x_1))))$

$\exists x_2 (x_2 \in [a,b] \land (\forall_x (x \in [a,b] \to f(x) \geq f(x_2))))$

Calculus - P20

零点定理 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，则开区间(a,b)存在点ξ，使$f(\xi)=0$

即有 $(f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续} \wedge f(a)\cdot f(b)<0) \longrightarrow \exists_\xi (\xi\in(a,b) \wedge f(\xi)=0)$

介值定理 (intermediate value theorem)，又称中间值定理

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且端点取到不同的函数值，即有$f(a)=A$和$f(b)=B$

则对于开区间A,B之间的任意一个数C，在开区间(a,b)存在一个点ξ，使$f(\xi)=C$

即有 $(f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续} \wedge f(a)=A \wedge f(b)=B \wedge A\neq B)$

$\longrightarrow \forall_C (C\in(A,B)\ (\text{或}\ C\in(B,A)) \longrightarrow \exists_\xi(\xi\in(a,b)\wedge f(\xi)=C))$

证明过程有：令$\varphi(x)=f(x)-C$，则可知$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续

又C是A与B之间的任意一个数

于是可知$\varphi(a)=A-C$与$\varphi(b)=B-C$异号，即$\varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$

即 $\exists_\xi(\xi\in(a,b)\wedge \varphi(\xi)=0)$，根据零点定理

于是对于ξ有$f(\xi)-C=0$，即$f(\xi)=C$

即可知 对于在A,B之间的任意一个数C

$\exists_\xi(\xi\in(a,b)\wedge f(\xi)=C)$

推论 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则其值域为$[m,M]$，其中m,M为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值 最大值

首先注意到对于介值定理，可以通过加入$f(a)=A$和$f(b)=B$，使$\xi\in[a,b]\wedge f(\xi)=A$或$B$ 平凡为真

使结论变为 $\forall_C (C\in[A,B]\ (\text{或}\ C\in[A,B]) \longrightarrow \exists_\xi(\xi\in[a,b]\wedge f(\xi)=C))$

则证明过程有，如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则必有最大值M和最小值m，

令$f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$，一般地假设$x_1<x_2$，则$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续

即 $\forall_C (C\in[m,M] \longrightarrow \exists_\xi(\xi\in[x_1,x_2]\wedge f(\xi)=C))$

又 $\forall_x (x\in[a,b] \longrightarrow m\le f(x)\le M)$，即 $\neg\exists_x(x\in[a,b]\wedge(f(x)>M \vee f(x)<m))$

于是可知$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的值域为$[m,M]$

一致连续性 (uniform continuity)，与连续性描述局部性质相比，一致连续性描述函数整体性质

如果函数$f(x)$在区间I上有定义，对于任意正数ε，总存在正数δ

使得对于区间I上任意两点x_1,x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

即有 对于函数$f(x)$，区间$I\subseteq D_f$，$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x_1,x_2\in I}\ (|x_1-x_2|<\delta \longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)$

注意：$f(x)$在区间I上一致连续 $\longrightarrow$ $f(x)$在区间I上连续，但逆命题不成立

如 $f(x)=1/x$ 在$(0,+\infty)$上连续，取$\varepsilon\le 1$，$n\in Z^+$

则$|f(1/(n+1))-f(1/n)|=1$，而 $|1/(n+1)-1/n| = \frac{1}{n(n+1)}$

于是对于任意正数δ，总有$n\in Z^+$，使得$\frac{1}{n(n+1)}<\delta$，但$|f(\frac{1}{n+1})-f(\frac{1}{n})|=1>\varepsilon$

所以$f(x)=1/x$在$(0,+\infty)$不是一致连续的

Calculus - P21

一致连续性定理　指如果函数f(x)在闭区间[a,b]上连续，则其在该区间上一致连续

即有 对于函数f(x)，f(x)在[a,b]上连续 $\longleftrightarrow$ f(x)在[a,b]上一致连续

注意：如果函数f(x)在开区间(a,b)上连续，

则如果 $\lim_{x\to a} f(x)=A$ 和 $\lim_{x\to b} f(x)=B$ 存在

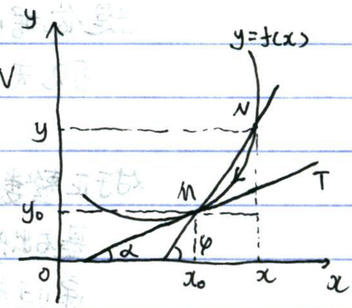
则有函数f(x)在(a,b)上一致连续

切线　对有曲线C及C上的点M，在点M外另取C上一点N，并作割线MN

当点N沿曲线C趋于点M时，割线MN绕点M旋转

当割线MN趋于极限位置MT，MT称为曲线C在M处的切线

极限位置的含义为，只要 $|MN|\to 0$，有 $\angle NMT\to 0$



若有M坐标为 $(x_0, f(x_0))$，而N坐标为 $(x, f(x))$

于是有割线MN斜率为 $\tan\varphi = (f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$，其中 φ 为割线MN的倾角

则当点N→点M时，$x\to x_0$，如果同时有 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k$ 存在

则称k为切线斜率，即割线斜率的极限　且 $k=\tan\alpha$，α 为切线MT的倾角

又 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to f(x_0)$，$\varphi\to\alpha$，则有 $|MN|\to 0$ 且 $\angle NMT=\varphi-\alpha\to 0$。

注意：令 $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = f(x)-f(x_0) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则当 $x\to x_0$ 时，有 $\Delta x\to 0$

所以极限也可以写作 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x$ 或者 $\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))/\Delta x$

导数　(derivative) 如果函数f(x)在 x_0 的某个邻域内有定义，且对于x的增量 Δx，$x_0+\Delta x$ 也在定义域内

此时因变量 $y=f(x)$ 取得增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，

如果极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta y$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导 (differentiable)

导数记为 $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

或记为 $y'|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$，$\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

导数概念是函数变化率这一概念的精确描述，即用于数学上的函数变化率问题

如果 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x$ 不存在，则称函数f(x)在 x_0 处不可导

而如果 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x=\infty$，则也称函数f(x)在 x_0 处的导数为无穷大

导函数　(derivative function) 如果函数f(x)在开区间I内的每点处均可导，则称f(x)在开区间I上可导

对于任意 $x_0\in I$，都有一个确定的 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，则称这个对应为f(x)的导函数

记作 y'，$f'(x)$，dy/dx，$df(x)/dx$，且有 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$，$x\in I$

于是有函数f(x)在 x_0 处的导数即导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的值，即 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$

Calculus - P22

幂函数 $f(x)=x^{\mu}\ (\mu\in R)$ 的导数

考虑 x 在幂函数 x^{μ} 的定义域内且 $x\neq 0$ 的情形

则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^{\mu}-x^{\mu}}{h}=x^{\mu-1}\frac{(1+h/x)^{\mu}-1}{h/x}=x^{\mu-1}\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h/x)^{\mu}-1}{h/x}$

令 $t=h/x$，可知当 $x\neq 0$，$h\to 0$ 时，$t\to 0$，

于是有 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\mu}-1}{t}=\mu$，即 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\mu x^{\mu-1}$

于是有 $f'(x)=\mu x^{\mu-1}\ (x\neq 0,\ \mu\in R)$

考虑 $x=0$ 的情形，可知当 $\mu>1$ 时，

直接计算得极限为0，而 $f'(0)=\mu\cdot 0^{\mu-1}=0$，于是可知公式对 x 均适用

而当 $\mu=1$ 时，对一切 x 有极限为1，而公式在 $x\neq 0$ 时也为1，

于是特别约定 $x=0$ 时公式值为1，于是公式也对一切 x 适用

三角函数 $f(x)=\sin x$ 的导数

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

根据和差化积公式，$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

则有 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}[2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}]/h=\lim\limits_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}$

$=\cos x$，即 $(\sin x)'=\cos x$

三角函数 $f(x)=\cos x$ 的导数

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

根据和差化积公式 $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

则有 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}[-2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}]/h=-\lim\limits_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}$

$=-\sin x$，即 $(\cos x)'=-\sin x$

指数函数 $f(x)=a^{x}\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的导数

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^{x}}{h}=a^{x}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{h}-1}{h}$

令 $t=a^{h}-1$，则有 $h=\log_a(t+1)$，当 $h\to 0$ 时，$t\to 0$，

则有 $f'(x)=a^{x}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=a^{x}\cdot\ln a\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=a^{x}\ln a$，即 $(a^{x})'=a^{x}\ln a$

特别的有，当 $a=e$ 时，$\ln a=1$，则 $(e^{x})'=e^{x}$

对数函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的导数，自然定义域有 $x>0$

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\frac{1}{x\ln a}\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h/x}$

令 $t=h/x$，则当 $x>0$，$h\to 0$ 时，$t\to 0$.

则有 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x\ln a}$，即 $(\log_a x)'=1/x\ln a$

特别的有，当 $a=e$ 时，$(\ln x)'=1/x$