Calculus - P23

单侧导数

参考极限中对左极限 $f(x_0^-)$ 和右极限 $f(x_0^+)$ 可以有单侧导数的定义

即有 左导数 $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

右导数 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

则参考 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在的定义为左右极限存在且相等的定义

可知 $f(x)$ 在 x_0 处可导，即导数 $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件为

$f(x)$ 在 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等

闭区间上可导

参考函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的定义为在 (a,b) 上连续且在 a 右连续 且在 b 左连续

则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导的定义为

$f(x)$ 在开区间 (a,b) 上处处可导 即 $\forall x_0 \left(x_0\in(a,b) \longrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\text{ 存在}\right)$

$f(x)$ 在点 a 处有右导数 $f'_+(a)$ 存在，且在点 b 处有左导数 $f'_-(b)$ 存在

几何意义

已知函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x)$，

表示 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率

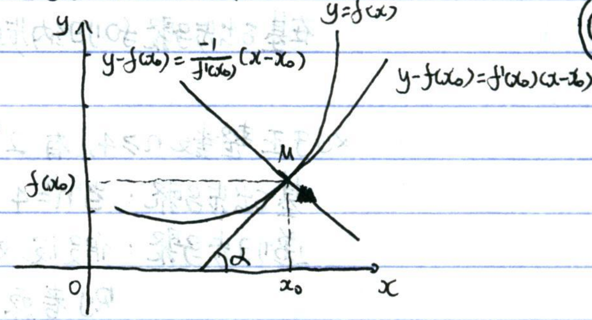
即 $f'(x)=\tan\alpha$，其中 α 为切线的倾角

则有 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

而 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线方程为

$$y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$



特别地有：当 $f'(x_0)=\infty$ 时，切线方程为 $x=x_0$

当 $f'(x_0)=0$ 时，法线方程为 $x=x_0$

可导与连续

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则有 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x$

又根据极限与无穷小的关系，可知 $\Delta y/\Delta x = f'(x)+\alpha$，其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小

则 $\Delta y = f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$，于是当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$

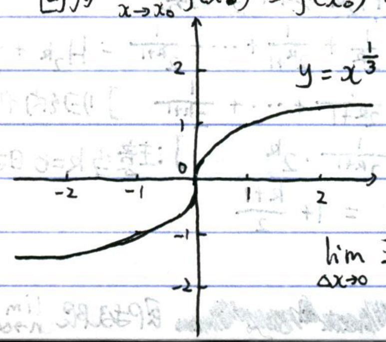
又 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，则 $f(x)$ 必定存在 且有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$

于是可知函数 $y=f(x)$ 在点 x 处连续

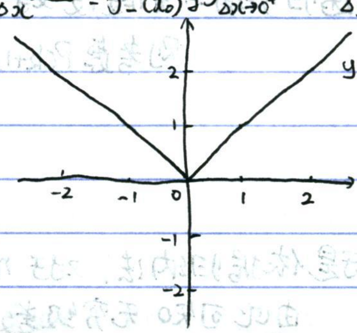
即有 函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导 $\longrightarrow$ $y=f(x)$ 在 x 处连续

但注意逆命题 $y=f(x)$ 在 x 处连续 $\longrightarrow$ $y=f(x)$ 在 x 处可导 不成立

因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 并不蕴含着 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$ 和 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)$ 存在且相等



$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\infty$



$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-1$

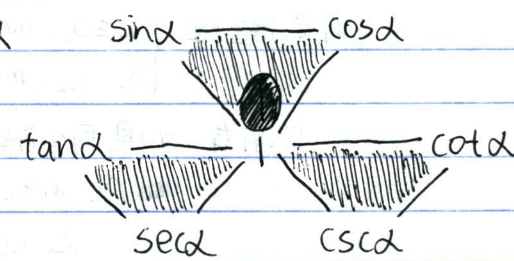
$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1$

Calculus - P24

三角函数

倒数关系

$\sin\alpha = 1/\csc\alpha$, $\cos\alpha = 1/\sec\alpha$, $\tan\alpha = 1/\cot\alpha$

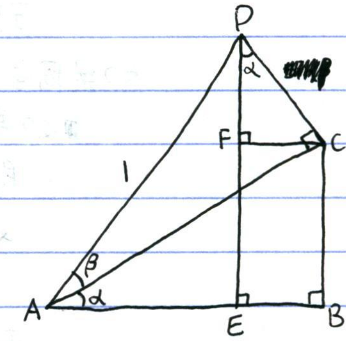


平方和

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

和角公式

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta) = (\tan\alpha \pm \tan\beta)/(1 \mp \tan\alpha\tan\beta)$$



证明过程有，令 $AD=1$，$\angle CAD=\beta$，$\angle BAC=\alpha=\angle CDF$

则有 $CD=\sin\beta$，$AC=\cos\beta$，

$BC=\cos\beta\sin\alpha$，$AB=\cos\beta\cos\alpha$，$EF=BC$

$DF=\sin\beta\cos\alpha$，$CF=\sin\beta\sin\alpha$，$BE=CF$

于是有 $\sin(\alpha+\beta)=DE=DF+BC=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=AE=AB-BE=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

倍角公式

$\sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$，$\cos2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta = 2\cos^2\theta-1 = 1-2\sin^2\theta$，$\tan2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\sin3\theta = 3\sin\theta-4\sin^3\theta$，$\cos3\theta = 4\cos^3\theta-3\cos\theta$

半角公式

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{(1-\cos\theta)/2}$，$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{(1+\cos\theta)/2}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{(1-\cos\theta)/(1+\cos\theta)} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

和差化积

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

证明过程有，$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

则有 $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

积化和差

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$，$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$，$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

万能公式

$\sin2\theta = 2\tan\theta/(1+\tan^2\theta)$，$\cos2\theta = (1-\tan^2\theta)/(1+\tan^2\theta)$

$\tan2\theta = 2\tan\theta/(1-\tan^2\theta)$

Calculus - P25

函数运算的求导 对于函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都在点 x 有导数 $u'(x)$ 和 $v'(x)$

和/差 $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$

证明过程有 $[u(x)\pm v(x)]' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{[u(x+\Delta x)\pm v(x\pm\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u'(x)\pm v'(x)$$

可以简写为 $(u\pm v)' = u' \pm v'$

积 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

证明过程有 $[u(x)v(x)]' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)]/\Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

由于 $v(x)$ 在 x 处可导，即有在 x 处连续 $= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

可以简写为 $(uv)' = u'v+uv'$

商 $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $(v(x)\neq 0)$

证明过程有 $[u(x)/v(x)]' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[u(x+\Delta x)/v(x+\Delta x) - u(x)/v(x)]/\Delta x$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)]-[u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$= \left[v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\Big/\left[v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\right]$$

由于 $v(x)$ 在 x 处可导，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x) = v(x)$ $= (u'(x)v(x)-u(x)v'(x))/v^2(x)$

可以简写为 $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$

反函数求导 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 内单调、可导且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在（严格单调）

反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在区间 $I_y=\{y\mid y=f(x), x\in I_x\}$ 内也可导，

有 $[f^{-1}(y)]' = 1/f'(x)$，或 $dx/dy = 1/(dy/dx)$

证明过程有，函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上严格单调，可导且 $f'(x)\neq 0$

则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在，且在 $I_y=\{y\mid y=f(x), x\in I_x\}$ 上连续，

则 $[f^{-1}(y)]' = \lim\limits_{\Delta y\to 0} = \dfrac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{\Delta y}$

取 $\Delta x = f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)\neq 0$，由于 $y=f(x)$ 是严格单调

$\because$ $\Delta y\to 0$ 时，有 $\Delta x\to 0$，

于是 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 1/(\Delta x/\Delta y)$，即 $[f^{-1}(y)]' = 1/f'(x)$

$y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-\sin^2 y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = 1/(\tan y)' = 1/\sec^2 y = 1/(1+\tan^2 y) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Calculus - P26

复合函数求导 如果函数 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，

则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 处可导，

且有导数 $\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

证明有，由于 $y=f(u)$ 的导数存在，有 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$

根据无穷小的规则，$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha(\Delta u)$，其中 $\alpha(\Delta u)\to 0\ (\Delta u\to 0)$

又 $\Delta u\neq 0$，则有 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u$

考虑 $\Delta u=0$ 的情况，指定 $\alpha(\Delta u)=0$，则有 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0=\alpha(0)$，即 $\alpha(\Delta u)$ 在0处连续

则 $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=f(u)-f(u)=0$

所以 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u$ 对 $\Delta u=0$ 也成立

而当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta x\neq 0$，则有 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}$

于是有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}]$

又 $u=g(x)$ 在点 x 可导，即有 $\Delta u\to 0\ (\Delta x\to 0)$

则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0$，以及 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x)$

于是有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\cdot g'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$

常用导数

常数 $(C)'=0$，C 为一个常数，$f(x)=C$

幂函数 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，其中 $\mu\in R$，即 $f(x)=x^{\mu}$

指数函数 $(a^x)'=a^x\ln^x$，其中 $a\in R$ 且 $a>0, a\neq 1$，特别的有 $(e^x)'=e^x$

对数函数 $(\log_a^x)'=\frac{1}{x\ln a}$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，特别的有 $(\ln^x)'=\frac{1}{x}$

三角函数 $(\sin x)'=\cos x$，$(\tan x)'=\sec^2 x$，$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\cos x)'=-\sin x$，$(\cot x)'=-\csc^2 x$，$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

反三角函数 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，$(\mathrm{arccot}\, x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

双曲函数 $(\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x$，$(\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x$，$(\mathrm{th}\,x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

$\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$\mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，$\mathrm{th}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

反双曲函数 $(\mathrm{arsh}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$(\mathrm{arch}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，$(\mathrm{arth}\,x)'=\frac{1}{1-x^2}$

$\mathrm{arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$\mathrm{arch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，$\mathrm{arth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

Calculus - P27

高阶导数

如果函数 $f(x)=y$ 在点 x 处可导，即有导数 $y'=f'(x)$，通常称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的一阶导数

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f''(x)$ 存在，则称 $f''(x)=y''$ 为 $f(x)$ 的二阶导数

即有 $y''=(y')'$，且 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy'}{dx}$

可以此类推地定义函数 $y=f(x)$ 的高阶导数，如三阶导数，…，n阶导数。

通常记作 $y''', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)}$ 或 $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$

如果函数 $y=f(x)$ 具有n阶导数，也称函数 $f(x)$ 为n阶可导

即 $y=f(x)$ 的n阶导数 $f^{(n)}(n)$ 存在，

并且有 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处有n阶导数，那么在点 x 的某个邻域 $U_{(x)}$ 中

$f(x)$ 必定具有一切低于n阶的导数

$(e^x)^{(n)}$

对于指数函数 $y=e^x$，$\forall_{k\in Z^+}\ y^{(k)}$ 存在，且 $y^{(k)}=e^x=y$

$(\sin x)^{(n)}$

对于三角函数 $y=\sin x$，$y'=(\sin x)'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$y''=(y')'=(\sin(x+\frac{\pi}{2}))'=\cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot(x+\frac{\pi}{2})'=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$

则推测有 $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$

基础步骤：$y^{(1)}=(\sin x)'=\sin(x+\frac{1}{2}\pi)$

递归步骤：假设 $\forall_{k\in Z^+}\ (\sin x)^{(k)}=\sin(x+\frac{k}{2}\pi)$

则对于 $(\sin x)^{(k+1)}=[(\sin x)^{(k)}]'=[\sin(x+\frac{k}{2}\pi)]'$

又 $\sin(x+\frac{k}{2}\pi)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，又 $k\in Z^+$

则有 $(\sin x)^{(k+1)}=\cos(x+\frac{k}{2}\pi)\cdot(x+\frac{k}{2}\pi)'=\sin(x+\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{k+1}{2}n)$

于是有 $\forall_{n\in Z^+}\ (\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$

同理有 对于 $n\in Z^+$，$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$

$(x^\mu)^{(n)}$

对于幂函数 $y=x^\mu$，其中 $\mu\in R$，则有 $y^{(n)}=[\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\mu-k)]\cdot x^{\mu-n}$

基础步骤：$y'=(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}=[\prod\limits_{k=0}^{1-1}(\mu-k)]\cdot x^{\mu-1}$

递归步骤：假设 $\forall_{n\in Z^+}\ (x^\mu)^{(n)}=[\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\mu-k)]\cdot x^{\mu-n}$

则对于 $(x^\mu)^{(n+1)}=([\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\mu-k)]\cdot x^{\mu-n})'=[\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\mu-k)]\cdot(x^{\mu-n})'$

又 $x^{\mu-n}$ 在其定义域上可导

则有 $(x^\mu)^{(n+1)}=[\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\mu-k)]\cdot(\mu-n)\cdot x^{\mu-n-1}=[\prod\limits_{k=0}^{(n+1)-1}(\mu-k)]\cdot x^{\mu-(n+1)}$

特别的有，当 μ 为整数时，对于 $n<\mu$，$(x^\mu)^{(n)}=\frac{\mu!}{(\mu-n)!}x^{\mu-n}$

对于 $\mu=n$，$(x^\mu)^{(n)}=\frac{\mu!}{0!}x^0=\mu!$

对于 $\forall_{n\in Z^+}(n>\mu\longrightarrow(x^\mu)^{(n)}=0)$

Calculus - P28

$[\ln(1+x)]^{(n)}$ 对于对数函数 $\ln(1+x)$，其中 $x>-1$，则其n阶导数为 $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

基础步骤：$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1-1}\frac{0!}{(1+x)^1}$

递归步骤：假设对 $\forall n\in Z^+$ $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

且 $y^{(n)}$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 上可导

则 $y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = [(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}]'$

$= (-1)^{n-1}(n-1)![(1+x)^{-n}]' = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-(n+1)}$

$= (-1)^{n+1-1}(n+1-1)!(1+x)^{-(n+1)}$

即有 $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!/(1+x)^n$

$(u\pm v)^{(n)}$ 对于函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都有n阶导数，则 $(u\pm v)^{(n)} = u^{(n)}\pm v^{(n)}$

基础步骤：$(u\pm v)' = u'\pm v'$

递归步骤：假设对 $\forall n\in Z^+$，$(u\pm v)^{(n)} = u^{(n)}\pm v^{(n)}$

且 $u^{(n)}$ 和 $v^{(n)}$ 皆可导

则 $(u\pm v)^{(n+1)} = [(u\pm v)^{(n)}]' = [u^{(n)}\pm v^{(n)}]'$

$= [u^{(n)}]'\pm[v^{(n)}]' = u^{(n+1)}\pm v^{(n+1)}$

即有 $\forall n\in Z^+$ $(u\pm v)^{(n)} = u^{(n)}\pm v^{(n)}$

莱布尼茨公式 (Leibniz)，指可指二项式展开为 $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^k$

$(uv)^{(n)}$ 对于函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都有n阶导数，则 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$

基础步骤：$(uv)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}u^{(1-k)}v^{k}$

递归步骤：假设 $\forall n\in Z^+$ $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$

且 $\forall 0\le i\le n$ $u^{(i)}$ 和 $v^{(i)}$ 都可导

则 $(uv)^{(n+1)} = [(uv)^{(n)}]' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[u^{(n-k)}v^{(k)}]'$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[u^{(n-k+1)}v^{(k)} + u^{(n-k)}v^{(k+1)}]$

$= \binom{n}{0}u^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}]u^{(n+1-k)}v^{(k)} + \binom{n}{n}v^{(n+1)}$

又 $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

于是有 $(uv)^{(n+1)} = \binom{n+1}{0}u^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}u^{[(n+1)-k]}v^{(k)} + \binom{n+1}{n+1}v^{(n+1)}$

$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^{(n+1-k)}v^{(k)}$

即有 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$

如 $(xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x$

Calculus - P29

显函数 (explicit function) 指等号左端是因变量的符号，右端是含有自变量的表达式

隐式方程 (implicit equation)，指形如 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 的关系，其中 F 为多元函数

relation of the form $F(x_1, \cdots, x_n) = 0$, F is a function of several variables (or polynomial)

隐函数 (implicit function)，指由隐式方程所隐含定义的函数

defined implicitly by an implicit equation, by associating one of the variables (value) with the others (arguments)

隐函数求导 对于隐函数 $F(x, y) = 0$ 求因变量 y 对自变量 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$

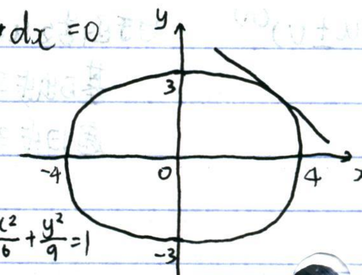
对 $F(x, y) = 0$ 左右分别求对 x 的导数，即有 $dF(x,y)/dx = 0$

又 $dF(x,y)/dx$ 中含有 dy/dx 的项，

则可以通过变换式解方程得到 $\frac{dy}{dx} = F'(x, y)$

如椭圆方程 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的求导，

对方程两侧求导 $\frac{x}{8} + \frac{2y}{9} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$，即有 $\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{16y}$



$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

对数求导法 指在对 $y = f(x)$ 不易求导时，可对函数两边分别取对数，即 $\ln y = \ln f(x)$

然后对等式两侧分别对 x 求导，于是 $y'/y = f'(x)/f(x)$

于是有 $\frac{dy}{dx} = y' = y f'(x)/f(x)$

注意：如果使用对数求导法，则要在 $f(x)$ 的定义域上皆有 $f(x) > 0$

$(u^v)'$ 对于函数 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$，且有 $u(x), v(x)$ 都可导，且 $u > 0$

则对于 $y = u^v$ 通常不易求导，则取 $\ln y = v \ln u$，再取导数 $(\ln y)' = (v \ln u)'$

于是有 $y'/y = v' \ln u + v(\ln u)' = v' \ln u + vu'/u$

即 $y' = y(v' \ln u + vu'/u) = u^v (v' \ln u + vu'/u)$

参数方程 对于由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所确定的 x 和 y 的函数关系

其中，$x = \varphi(t)$ 和 $y = \psi(t)$ 都对 t 可导，且 $x = \varphi(t)$ 的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ 存在

即对于 y 对 x 的导数 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

注意：也可以有 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$，即需要 $t = \varphi^{-1}(x)$ 存在且 $t' = [\varphi^{-1}(x)]' = 1/\varphi'(x)$

于是对于 x 的函数，$\frac{dy}{dx}$ 应表示为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \end{cases}$

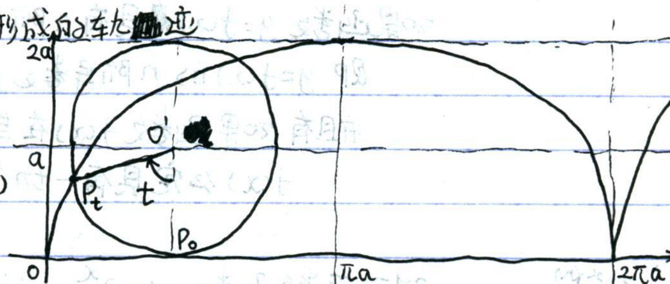
为方便起见通常省去 $x = \varphi(t)$

Calculus - P30

参数方程二阶导数 对于由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定的 x 与 y 函数关系，有一阶导数 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$，且 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 皆有二阶导数

则其二阶导数为
$$\frac{dy}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{dx/dt}$$
$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

摆线 (cycloid) 指一个圆沿直线运动时边界上定点所形成的轨迹



通常由参数方程定义 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

其中 $a\in\mathbb{R}^+$, $t\geq 0$

则有 $\begin{cases} x'=\varphi'(t)=a(1-\cos t) \\ y'=\psi'(t)=a\sin t \end{cases}$

注意当 $t=2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$ 时，$\varphi'(t)=0$

于是有一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{[1-(1-2\sin^2\frac{t}{2})]}=\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=\cot\dfrac{t}{2}$ $(t\neq 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z})$

有二阶导数
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{dx/dt}=-\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}$$
$$=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},\ (t\neq 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z})$$

相关变化率 (related rates)，指对于函数 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$，存在关系 $R(x,y)=0$

又 $x(t)$ 与 $y(t)$ 导数存在，则存在 $R'(x',y')=0$，其中 $x'=x'(t)$, $y'=y'(t)$

相关变化率即为研究参数方程变化率之间的关系

微分 (differential)，指对于函数 $y=f(x)$，且 x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在 $f(x)$ 的定义域内

则有函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

如果存在不依赖于 Δx 的常数 A，使得有 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 $o(\Delta x)$ 为当 $\Delta x\to 0$ 的无穷小

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微分的 (differentiable)

称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处对于自变量 Δx 的微分

记作 $dy=A\Delta x$

在 $\Delta x\to 0$ 的过程中，$\Delta x\neq 0$，于是有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$

又 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$，则有 $A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$

于是有，如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $f'(x)$ 存在，即 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且有 $A=f'(x_0)$

反之，如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，于是有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，其中 α 为 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小

于是有 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$，又 $f'(x_0)$ 不依赖于 Δx，则有 $f(x)$ 在 x_0 是可微的

且常数 $A=f'(x_0)$

即有对于 $f(x)$ 在 x_0 处 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$ 存在 $\longleftrightarrow \exists_{A\in\mathbb{R}}(A$ 不依赖于 $\Delta x \wedge \Delta y=A\Delta x+o(\Delta x))$

即对于一元函数 $f(x)$，可微与可导等价

Calculus - P31

线性主部 (principal (linear) part), 通常称微分 dy 是函数增量 Δx 的线性主部

对于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微, 于是有导数 $f'(x_0)$

而有微分 $dy = f'(x_0)\Delta x$, 如果 $f'(x_0) \neq 0$,

则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

于是有当 $\Delta x \to 0$ 时, Δy 与 dy 为等价无穷小

即 $\Delta y = dy + o(dy)$, 于是称 dy 为 Δy 的主部 (principal part)

而 $dy = f'(x_0)\Delta x$, 为 Δx 的线性函数, 故而称线性主部

于是有对于自变量的同一变化过程, α 和 β 都为无穷小, 且 α 和 β 为等价无穷小

则有 $\beta = \alpha + o(\alpha)$, 而称 α 为 β 的主部

对于函数 $y=f(x)$, 在任意点 x 的微分, 称为函数的微分,

记作 dy 或 $df(x)$, 有 $dy = f'(x)\Delta x$

通常将自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分,

记作 dx, 有 $dx = \Delta x$, 即有 $dy = f'(x)dx$

于是有 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, 即该函数的导数 $f'(x)$ 为函数的微分 dy 与自变量微分 dx 之商

故而也称导数为微商 (difference quotient)

几何意义 对于函数 $y=f(x)$ 曲线上的一点 $M(x_0, y_0)$

当自变量 x 有增量 Δx 时, 有点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

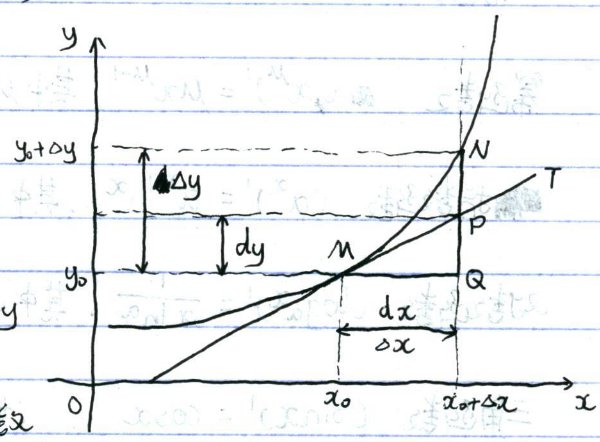
于是有 $MQ = \Delta x$, $NQ = \Delta y$

切线 MT 的倾角为 α, 有 $QP = MQ \cdot \tan\alpha$

又有 $f'(x_0) = \tan\alpha$, 于是有 $QP = f'(x_0)\Delta x = dy$

于是当 $|\Delta x|$ 很小时, $|dy - \Delta y| = |o(\Delta x)|$ 远小于 Δx

即在局部范围内可用线性函数代替非线性函数



微分公式 由 $dy = f'(x)dx$ 可以得到基本初等函数的微分公式

	$f'(x)$	$df(x)$
如	$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx$
	$(a^x)' = a^x \ln a$	$d(a^x) = a^x \ln a \, dx$
	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ $(a>0$ 且 $a \neq 1)$	$d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$
对于 $u=u(x)$	$(Cu)' = Cu'$	$d(Cu) = Cdu$
和 $v=v(x)$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u\pm v) = du \pm dv$
	$(uv)' = u'v + uv'$	$d(uv) = vdu + udv$
	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$	$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ $(v\neq 0)$

Calculus - P32

微分形式不变性 对于函数 $y=f(u)$ 和 $u=u(x)$，且 $f(u)$ 与 $u(x)$ 都可导

则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分为 $dy=(f[g(x)])'dx=f'(u)g'(x)dx$

又 $u=u(x)$ 的微分为 $du=g'(x)dx$，

即复合函数微分 $dy=f'(u)g'(x)dx=f'(u)du$，

于是可知对于函数 $y=f(u)$，不论 u 是自变量或中间变量，

均有函数微分 $dy=f'(u)du$，即为微分形式不变性

函数近似计算 对于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，

则有在 $|\Delta x|$ 足够小时，有 $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$

即 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$，取 $x=x_0+\Delta x$

于是有 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，$(x=x_0+\Delta x$ 且 $\Delta x<<x_0)$

又或者有 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

取 $x=x_0+\Delta x$，即有 $\Delta x=x-x_0$

于是有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$

有 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

于是有常用的函数近似计算公式，假定 $|x|$ 非常小

$(1+x)^a=1+ax+o(x)\approx 1+ax\ (a\in R)$

$\sin x=x+o(x)\approx x$，$\tan x=x+o(x)\approx x$（其中 x 表示为弧度）

$e^x=1+x+o(x)\approx 1+x$，$\ln(1+x)=x+o(x)\approx x$

误差估计 测量仪器测得的数据通常带有误差，而由此计算得到的结果误差称为间接测量误差

对于某个量的精确值是 A，测得近似值为 a，

则有绝对误差(absolute error) $|A-a|$，有相对误差(relative error)为 $\frac{|A-a|}{|a|}$

如果有绝对误差 $|A-a|\leq\delta_A\ (\delta_A>0)$，

则称 δ_A 为绝对误差限，而 $\frac{\delta_A}{|a|}$ 为相对误差限

对于函数 $y=f(x)$，如有 x 的绝对误差限 $|\Delta x|\leq\delta_x$

则有 $|\Delta y|\approx|dy|=|\Delta x|\cdot|y'|\leq|y'|\cdot\delta_x$，即 y 的绝对误差限 $\delta_y=|y'|\cdot\delta_x$

费马引理 (Fermat's theorem)，对于函数 $f(x)$，在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 有定义，且在 x_0 处可导

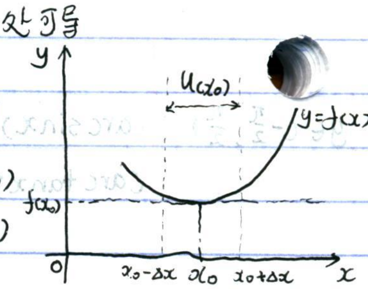
如对任意 $x\in U(x_0)$ 有 $f(x)\leq f(x_0)$（或 $f(x)\geq f(x_0)$），则有 $f'(x_0)=0$

证明有，取 $x=x_0+\Delta x\in U(x_0)$，则有 $f(x_0+\Delta x)\leq f(x_0)$

又 x_0 处导数存在，则 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0\ (\Delta x>0)$

$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0\ (\Delta x<0)$

即由极限保号性可知 $f'(x_0)=0$



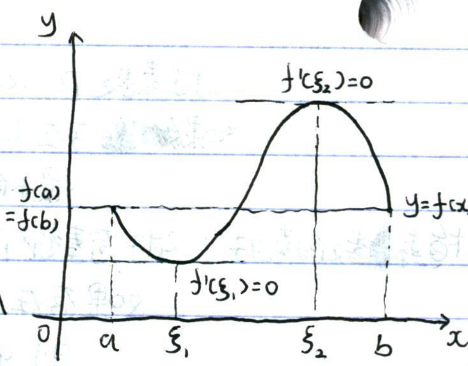
Calculus - P33

罗尔定理 (Rolle's theorem)，指对于函数 $f(x)$，如果满足

在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导

且在端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$

则在开区间 (a,b) 中至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi)=0$



证明有，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，设有最小值 m，最大值 M

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定可以取到 m 和 M

考虑 $M=m$ 的情形，则有 $\forall x\,(x\in[a,b]\rightarrow f(x)=M)$，即 $\forall x\,(x\in(a,b)\rightarrow f'(x)=0)$

考虑 $M>m$ 的情形，则可设 $f(a)\neq M$，于是 $\exists\xi\,(\xi\in(a,b)\land f(\xi)=M)$

则可知在点 ξ 的邻域 $U(\xi)$ 内，$f'(\xi)$ 存在，且 $\forall x\,(x\in U(\xi)\rightarrow f(x)\le f(\xi))$

于是根据罗尔定理，有 $\xi\in(a,b)\land f'(\xi)=0$

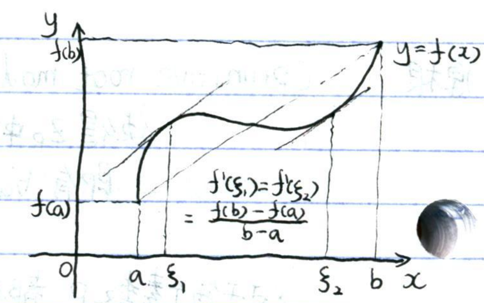
拉格朗日中值定理 (mean value theorem)，指对于函数 $f(x)$，如果满足

在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导

则在 (a,b) 内至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，

使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(a-b)$ 成立

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$



证明有，定义一个在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

则可知函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导

又 $\varphi(a)=0=\varphi(b)$，则在开区间 (a,b) 中至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$

又 $\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，即有 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

即在点 ξ $(a<\xi<b)$ 处，有 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(a-b)$ 成立

对于函数 $f(x)$，取闭区间 $[x,x+\Delta x]$ $(\Delta x>0)$，$f(x)$ 在 $[x,x+\Delta x]$ 上连续，在 $(x,x+\Delta x)$ 上可导

则可知存在实数 θ $(0<\theta<1)$，使得在点 $x+\theta\Delta x$，有 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$

有限增量公式　也可写作 $\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$，使得在 $|\Delta x|$ 为有限增量时，也可得到 Δy 的准确表达式

于是拉格朗日中值定理又称微分中值定理或有限增量定理

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在区间 I 内且不包括 I 的端点时，有导数且导数恒为 0，则 $f(x)$ 在 I 上为常数

证明有，对任意 $x_1,x_2\in I$，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$，即 $f(x_2)=f(x_1)$

当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，可以扩展为 $x>-1$ 时，$\dfrac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x$，当 $x=0$ 时取得等号

证明有，函数 $\ln(1+x)$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 上可导，于是有 $0<\xi<x$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$

于是有 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$，又 $0<\xi<x$，则有 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$，即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

注意当 $-1<x<0$ 时，也可以同理证明 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$