Calculus - P86

极坐标

对于封闭曲线围成的面积，如果以极坐标形式表示的方程更简单

则可以考虑利用极坐标形式的积分

对于曲线方程 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$ 围成的图形

可以看作是一个曲边扇形，

其中 $\rho(\theta)\geq 0$，$0\leq\alpha<\beta\leq 2\pi$，且 $\rho(\theta)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续

则取极角 θ 为积分变量，其变化区间为 $[\alpha,\beta]$

取任意小区间 $[\theta, \theta+d\theta]$

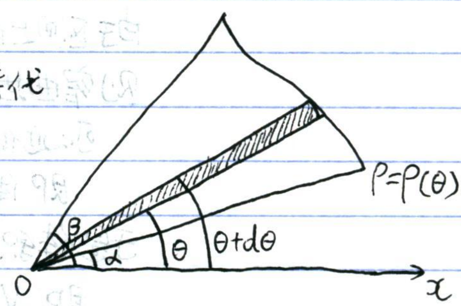
则对应的面积元素 dA 可用窄曲边扇形面积替代

而 dA 可用半径 $\rho(\theta)$ 和极角 $d\theta$ 计算

即 $dA=\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta$

则面积 A 为面积元素 dA 的积分

即 $A=\int dA=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta$



阿基米德螺线 (Archimedean spiral)，又称等速螺线 (arithmetic spiral)

曲线方程为 $\rho=a\theta$，其中 $a>0$

则取封闭图形由曲线 $[0,2\pi]$ 的部分与极轴 $\theta=0$ 围成

则可知面积元素 $dA=\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta$

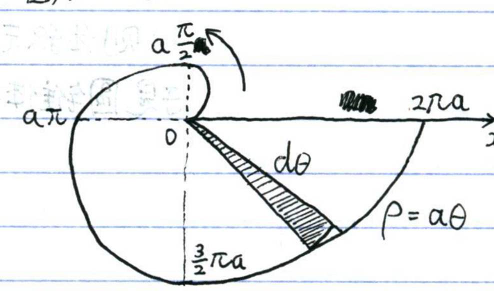
即 $dA=\frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta$

于是有面积 $A=\int dA=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta$

$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2 d\theta$

$=\frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$

$=\frac{4}{3}a^2\pi^3$



心型线 (cardioid) 曲线方程为 $\rho=a(1+\cos\theta)$，$a>0$

取封闭图形由曲线 $[0,2\pi)$ 的部分围成

可见图形关于极轴对称，于是可取 $[0,\pi]$ 部分的积分

则面积元素 $dA=\frac{1}{2}[a(1+\cos\theta)]^2 d\theta$

于是面积 $A=\int dA$

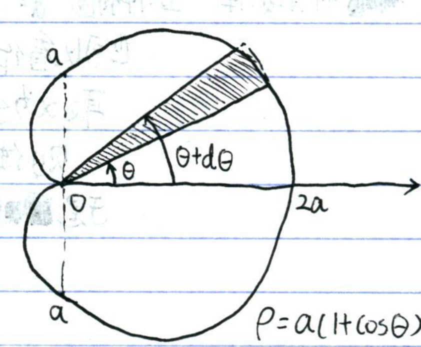
$=2\int_0^\pi \frac{1}{2}[a(1+\cos\theta)]^2 d\theta$

$=a^2\int_0^\pi[1+2\cos\theta+\cos^2\theta]d\theta$

$=a^2\int_0^\pi\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$

$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi$

$=\frac{3}{2}\pi a^2$



Calculus - P87

旋转体

指由一个平面图形绕此平面的一条直线旋转一周形成的立体(solid of revolution)，直线称为旋转轴(axis of revolution)

可以看作 由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$，x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而形成的立体

对于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，取x为积分变量

则对于区间$[a,b]$上的任意小区间$[x, x+dx]$

由于区间上的窄曲边梯形可以近似地表示为以$f(x)$为高的窄矩形

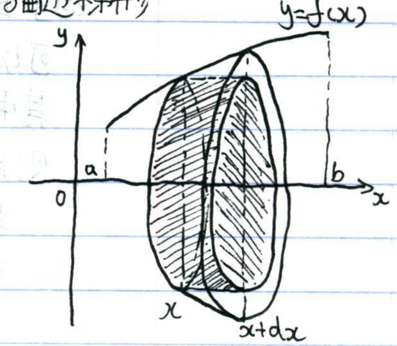
则窄曲边梯形绕x轴旋转而成的薄片

可以近似于以$f(x)$为底半径，以dx为高的扁圆柱体

即体积元素 $dV = \pi[f(x)]^2dx$，也称 representative disk

于是体积V为体积元素的积分

即 $V=\int dV=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$



圆锥体

由连接原点与(h,r)的直线，直线$x=h$和x轴围成的三角形绕x轴旋转一周形成

则直线方程为 $y=\frac{r}{h}x$

取x为积分变量，则积分区间为$[0,h]$

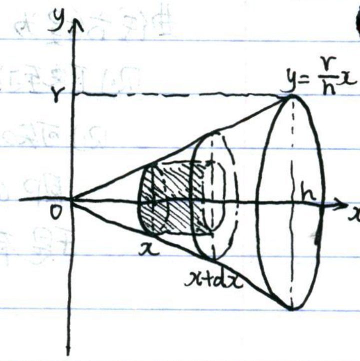
则体积元素 $dV=\pi(\frac{r}{h}x)^2dx$

于是圆锥体体积 $V=\int dV=\int_0^h \pi(\frac{r}{h}x)^2dx$

$=\pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx$

$=\pi\frac{r^2}{h^2}[\frac{1}{3}x^3]_0^h$

$=\frac{1}{3}\pi r^2h$



椭球体

由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕x轴旋转一周形成，也称旋转椭球体

也可以看作由半椭圆 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 绕x轴旋转形成

取x为积分变量，则积分区间为$[-a,a]$

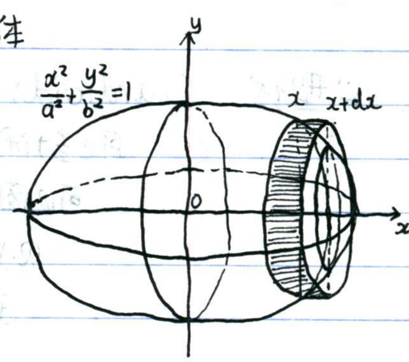
则体积元素 $dV=\pi(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2})^2dx$

于是椭球体体积 $V=\int dV=\int_{-a}^{a}\pi(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2})^2dx$

$=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx$

$=\pi\frac{b^2}{a^2}[a^2x-\frac{1}{3}x^3]_{-a}^{a}$

$=\frac{4}{3}\pi ab^2$



特别地当椭圆方程中的 $a=b$ 时

旋转椭球体的体积退化为球体积方程 $\frac{4}{3}\pi a^2$

Calculus - P88

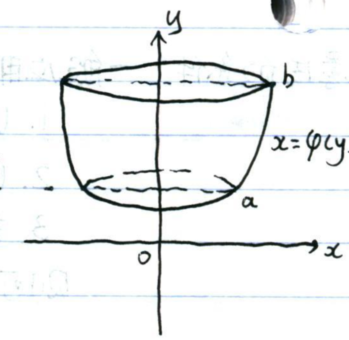
对于旋转体,也可以绕y轴旋转获得

即对于曲线 $x=\varphi(y)$,在区间 $[c,d]$ 上连续

则取与直线 $y=c$, $y=d$, y轴围成的曲边梯形绕y轴旋转

则旋转体的体积元素 $dV=\pi[\varphi(y)]^2dy$

于是体积 $V=\int dV=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2dy$



如椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,绕y轴旋转而形成另一个旋转椭球体

可看作由半个椭圆 $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ 绕y轴旋转

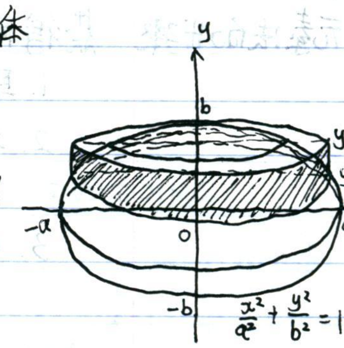
则积分变量为y,变化区间为 $[-b,b]$

对于任意小区间 $[y,y+dy]$,体积元素 $dV=\pi[\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}]^2dy$

于是体积 $V=\int dV=\int_{-b}^{b}\pi[\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}]^2dy$

$=2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b(b^2-y^2)dy$

$=2\pi\frac{a^2}{b^2}[b^2y-\frac{1}{3}y^3]_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2b$



摆线旋转体 对于摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$,其中 $0\le t\le 2\pi$.

取其与x轴围成的封闭图形绕x轴旋转一圈

则旋转体的体积元素 $dV=\pi[y(t)]^2dx$

且 $y(t)=a(1-\cos t)$, $dx=a(1-\cos t)dt$

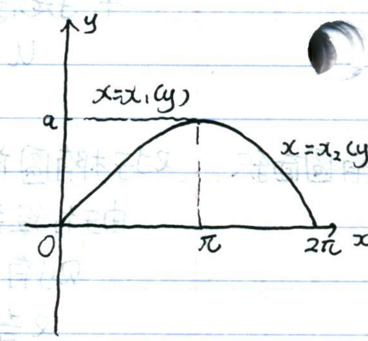
于是体积 $V=\int dV=\int\pi[y(x)]^2dx$

$=\int_0^{2\pi}\pi[a(1-\cos t)]^2\cdot a(1-\cos t)dt$

$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2t-\cos^3t)dt$

$=\pi a^3[[\frac{5}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t]_0^{2\pi}-[4\sin t-\frac{1}{3}\sin^3t]_0^{2\pi}]$

$=5\pi^2a^3$



取其与x轴围成的封闭图形绕y轴旋转一圈

则旋转体的体积元素. $dy=a\sin t\,dt$, $dV=\pi[x_2^2(y)-x_1^2(y)]dy$

于是体积 $V=\int dV=\int_{2\pi}^{\pi}\pi[x_2(y)]^2dy-\int_0^{\pi}\pi[x_1(y)]^2dy$

$=-\int_0^{2\pi}\pi[a(t-\sin t)]^2\cdot a\sin t\,dt$

$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}t^2\sin t-2t\sin^2t+\sin^3t\,dt$

$=-\pi a^3\cdot[[-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t]_0^{2\pi}$

$+[\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{1}{2}t^2]_0^{2\pi}$

$+[\frac{1}{3}\cos^3t-\cos t]_0^{2\pi}]$

$=6\pi^3a^3$

Calculus - P89

截面面积积分

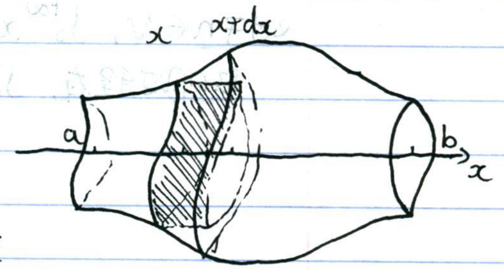
对于已知垂直于一定轴的各个截面的面积的立体

可以通过对截面面积的积分计算立体的体积

取定轴为x轴，则立体可描述为

在平面 $x=a$，$x=b$ 之间的立体。

取$A(x)$为区间$[a,b]$上的连续函数，x为积分变量

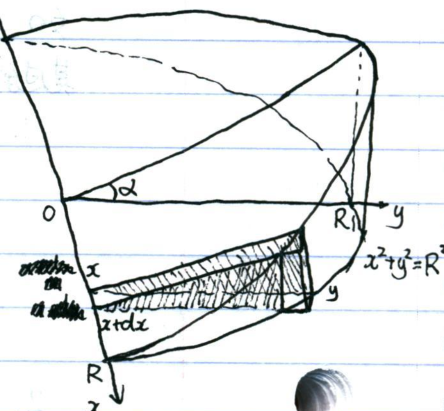


取区间$[a,b]$上的任意小区间$[x, x+dx]$，

则区间上薄片的体积近似于底面积$A(x)$，高为dx的扁柱体

即体积元素 $dV = A(x)dx$

于是 体积 $V = \int dV = \int_a^b A(x)dx$



对于半径为R的圆柱体，取经过底面圆心并与底面夹角为α的平面

计算截取部分的体积

取底面交线为x轴，底面与圆心相交与x轴垂直的直线为y轴

取立体的底面为圆 $x^2+y^2=R^2$ 在 $y\geq 0$ 上的半圆，

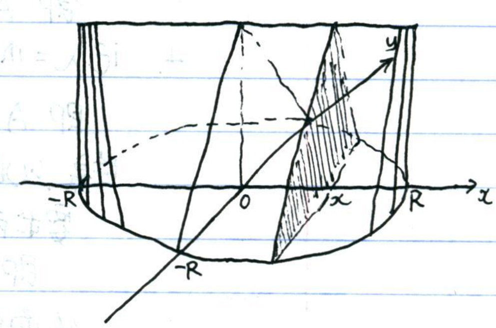
取截面为垂直于x轴且平行于y轴的一系列平面，

则有截面为底为$\sqrt{R^2-x^2}=y$，高为$\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$的直角三角形

于是有 $A(x) = \frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$

则体积元素 $dV = A(x)dx = \frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\, dx$

又立体关于平面$x=0$对称



于是体积 $V = \int dV = \int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\, dx$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\tan\alpha\int_0^R(R^2-x^2)dx$

$= \tan\alpha\left[R^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R$

$= \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$

正劈锥体

对于以半径为R的圆为底，平行且等于底圆直径的线段为顶，高为h的正劈锥体

取平行于顶的底面直径为x轴，取与其垂直的直径为y轴

取截面为垂直于x轴且平行于y轴的一系列平面

则有截面为底为 $2\sqrt{R^2-x^2}$，高为h的三角形

于是有 $A(x) = h\sqrt{R^2-x^2}$

则体积元素 $dV = A(x)dx = h\sqrt{R^2-x^2}\,dx$

又立体关于平面$x=0$对称 $dx = -R\sin\theta\, d\theta$

则体积 $V = \int dV = \int_{-R}^{R} h\sqrt{R^2-x^2}\,dx$，取 $x = R\cos\theta$，则 $\sqrt{R^2-x^2} = R\sin\theta$

$= 2h\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 2h\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -R^2\sin^2\theta\, d\theta$

$= 2hR^2\left[\frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\pi R^2 h$

Calculus - P90

平面曲线的弧长 对于曲线AB，在弧$\overset{\frown}{AB}$上依次取分点，$A=M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n=B$

并依次连接相邻两点，而得到折线AB

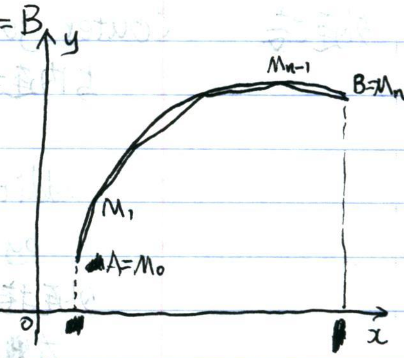
当分点数目$n\to+\infty$时，

曲线弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，$i=1,2,\cdots,n$均缩向一点，

如果折线的总长$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|=S$存在

则称此极限值S为曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长，

而弧$\overset{\frown}{AB}$是可求长的，注意光滑曲线弧是可求长的



对于由参数方程$x=\varphi(t), y=\psi(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$的曲线弧

其中$\varphi(t)$和$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续导数，且$\varphi'(t), \psi'(t)$不同时为0

则可以通过定积分元素法计算平面光滑曲线弧长

取积分变量为参数t，变化区间为$[\alpha,\beta]$

相应于区间$[\alpha,\beta]$上的任一小区间$[t, t+dt]$上的小弧段的长度Δs

当$dt\to 0$时，Δs趋近于线段$M_{i-1}M_i$的长度

即弦的长度$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

又$\Delta x=\varphi(t+dt)-\varphi(t)\approx dx=\varphi'(t)dt$

$\Delta y=\psi(t+dt)-\psi(t)\approx dy=\psi'(t)dt$

则弧长元素$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{[\varphi'(t)dt]^2+[\psi'(t)dt]^2}$

$=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

得弧长$s=\int ds=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

对于由直角坐标方程$y=f(x)$，$x\in[a,b]$确定的曲线弧

可看作参数方程$x=x$，$y=f(x)$，$x\in[a,b]$

则弧长元素$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

则弧长$s=\int ds=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

对于由极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$确定的曲线弧

可以先转换为直角坐标系下的参数方程

$$\begin{cases} x=x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases},\quad \theta\in[\alpha,\beta]$$

则弧长元素$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{[\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta]^2+[\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta]^2}\,d\theta$

$=\sqrt{\rho'^2(\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\rho^2(\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,d\theta$

$=\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\,d\theta$

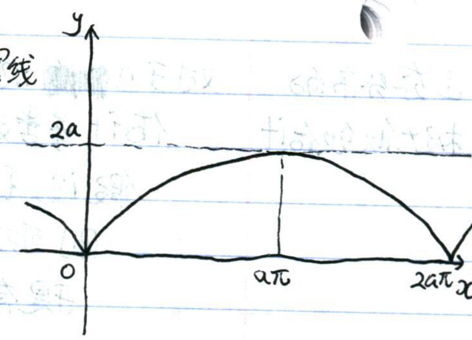
得弧长$s=\int ds=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\,d\theta$

Calculus - P91

摆线长度

对于由参数方程 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 确定的摆线

计算在 $\theta\in[0,2\pi]$ 上的一拱的长度



首先有 $x=\varphi(\theta)=a(\theta-\sin\theta)$

$y=\psi(\theta)=a(1-\cos\theta)$

则有 $dx=\varphi'(\theta)d\theta=a(1-\cos\theta)d\theta$

$dy=\psi'(\theta)d\theta=a\sin\theta\, d\theta$

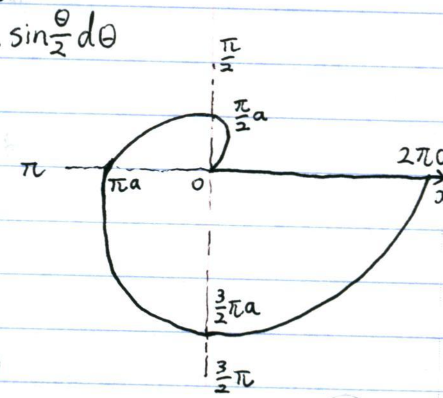
于是弧长元素 $ds=\sqrt{\varphi'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)}\,d\theta=a\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$

$=a\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta=a\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$

则弧长 $S=\int ds=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=[-4a\cos\frac{\theta}{2}]_0^{2\pi}$

$=8a$

阿基米德螺线



对于由极坐标方程 $\rho=a\theta\ (a>0)$ 所确定的阿基米德螺线

计算在 $\theta\in[0,2\pi]$ 上的一段的弧长

能转换为直角坐标系方程 $x=a\theta\cos\theta$, $y=a\theta\sin\theta$

则有 $dx=a(\cos\theta-\theta\sin\theta)d\theta$, $dy=a(\sin\theta+\theta\cos\theta)d\theta$

于是弧长元素 $ds=\sqrt{a^2(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+a^2(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$

$=a\sqrt{\cos^2\theta+\theta^2\sin^2\theta+\sin^2\theta+\theta^2\cos^2\theta}\,d\theta=a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$

注意直接通过 $ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$ 可以得到同样的公式

则弧长 $S=\int ds=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$

$=a[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})]_0^{2\pi}$

$=\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}a\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$

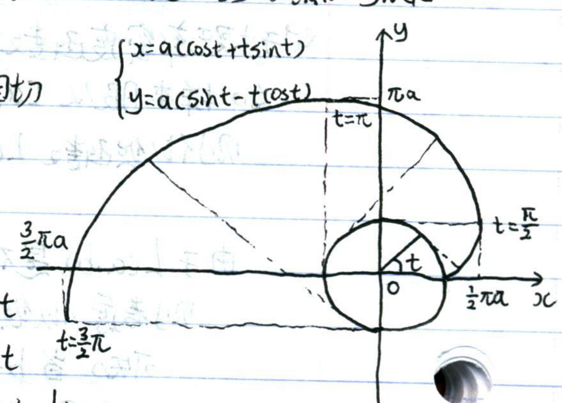
渐伸线

(involute)，取曲线切线上的一段，其一端点为切点，长度为从曲线上定点到切点的弧长

则另一端点所形成的曲线即为原曲线的渐伸线，

也可看作是将曲线的一段放开拉直并始终与原曲线相切

圆的渐伸线可描述为 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$



计算在 $t\in[0,\pi]$ 上的一段的弧长

有 $dx=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)dt=at\cos t\,dt$

$dy=a(\cos t-\cos t+t\sin t)dt=at\sin t\,dt$

于是弧长元素 $ds=\sqrt{a^2t^2\cos^2t+a^2t^2\sin^2t}\,dt=at\,dt$

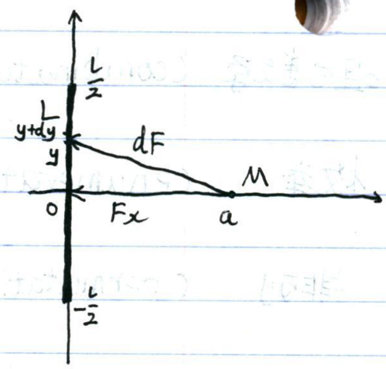
则弧长 $S=\int ds=\int_0^{\pi}at\,dt=[a\cdot\frac{1}{2}t^2]_0^{\pi}$

$=\frac{1}{2}a\pi^2$

Calculus - Pa2

引力的定积分

对于质量分别为 m_1, m_2 的质点，其距离为 r，有引力常数 G



则两质点间引力为 $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$，方向为沿质点连线方向

考虑均匀细棒对质点的引力

对于长度为 l，线密度为 μ 的均匀细直棒 L

在其中垂线上距离为 a 处有质量为 m 的质点 M

则均匀细棒 L 对质点 M 产生的引力为 F

取参数 y 为积分变量，则有变化区间为 $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$

取变化区间上任一小区间 $[y, y+dy]$，区间上细棒长度为 dy

则引力元素 $dF = Gm \cdot \frac{m_l}{r_l^2}$

又区间上细棒质量 $m_l = \mu dy$

距离 r_l 近似于 $\sqrt{a^2+y^2}$

由于参数 y 的变化区间 $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ 关于原点对称，

于是 dF 在 y 轴方向上的分量 $dF_y = Gm \cdot \frac{\mu dy}{(a^2+y^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$ 为奇函数

即 $F_y = \int dF_y = 0$

于是仅考虑 dF 在 x 轴方向上的分量 $dF_x = Gm \cdot \frac{\mu dy}{a^2+y^2} \cdot \frac{-a}{\sqrt{a^2+y^2}}$

于是引力 $F = F_x = \int dF_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} Gm \cdot \frac{-a\mu dy}{(a^2+y^2)^{3/2}}$

$= -Gma\mu \cdot \left[\frac{y}{a^2(a^2+y^2)^{1/2}}\right]_{-l/2}^{l/2}$

$= -(Gml\mu/a) \cdot \frac{2}{(4a^2+l^2)^{1/2}}$，即方向指向 x 轴负方向

可知当 $l \to +\infty$ 时，即均匀细棒的长度远大于距离 a 时，可看作均匀细棒为无限长

有 $\lim_{l\to+\infty} F = \frac{2Gm\mu}{a}$，方向为垂直地指向细棒 L

微分方程 (differential equation)：对于自变量 x 和未知函数 $y=f(x)$

表示自变量 x，未知函数 y，未知函数的导数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}, \cdots$ 之间关系的方程

其中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶 (order)

所以 n 阶微分方程有一般形式

$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$.

由于是 n 阶微分程，所以方程 $F(x, y, \cdots, y^{(n)})$ 中 $y^{(n)}$ 的系数必不为0

所以也可写成 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$

如果函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶导数，且满足 $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$

则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$ 在区间 I 上的解

如果微分方程的解 $y=\varphi(x)$ 中有任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$

如果常数个数与微分方程阶数相同，且常数是相互独立

即不能通过合并而减少出现的常数个数

则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程的通解 (general solution)

Calculus - P93

微分方程特解(particular solution)，指确定了通解中的任意常数后所得到的微分方程的解
由于通解中含有任意常数，所以尚无法完全确定地反映某一客观事物的规律性
如对于微分方程中的未知函数 $y=\varphi(x)$，
如果微分方程是一阶的，则通常用于确定任意常数的条件为
$x=x_0$ 时 $y=y_0$，或记为 $y|_{x=x_0}=y_0$，其中 x_0，y_0 为给定的值
如果微分方程是二阶的，则通常有
$\begin{cases} x=x_0 \text{ 时 } y=y_0 \\ x=x_0 \text{ 时 } y'=y_0' \end{cases}$，或记为 $\begin{cases} y|_{x=x_0}=y_0 \\ y'|_{x=x_0}=y_0' \end{cases}$ 其中 x_0，y_0，y_0' 为给定的值
称这些用于确定微分方程的特解的条件为初值条件(initial condition)

初值问题(initial value problem)，又称 Cauchy problem
指对于一阶微分方程 $y'=f(x,y)$，满足初值条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解
记作 $\begin{cases} y'=f(x,y) & \text{，微分方程} \\ y|_{x=x_0}=y_0 & \text{，初值条件} \end{cases}$
微分方程的解的图形为一条曲线，称为微分方程的积分曲线(integral curve)
初值问题的几何意义是求通过点 (x_0, y_0) 的积分曲线
而对于二阶微分方程的初值问题
$\begin{cases} y''=f(x,y,y') & \text{，微分方程} \\ y|_{x=x_0}=y_0 \text{，} y'|_{x=x_0}=y_0' & \text{，初值条件} \end{cases}$
其几何意义为求微分方程的通过点 (x_0, y_0) 且在该点处的切线斜率为 y_0' 的积分曲线

可分离变量的微分方程(separable differential equation)
对于一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 可写作
$g(y)dy=f(x)dx$ 的形式，且其中 $g(y)\neq 0$
则称为可分离变量(separable variable)的微分方程
假定函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 都是连续的，则令 $y=\varphi(x)$ 为微分方程的通解
代入则有 $g(y)dy=g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=f(x)dx$
于是有 $\int f(x)dx=\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int g[\varphi(x)]\,d\varphi(x)=\int g(y)dy$
则令 $F(x)$，$G(y)$ 分别为 $f(x)$，$g(y)$ 的原函数
于是有 $F(x)+C=G(y)$，其中 C 为常数
反之，如果 $y=\Phi(x)$ 是由 $F(x)+C=G(y)$ 确定的隐函数
则当 $g(y)\neq 0$ 时，$\Phi'(x)=\frac{F'(x)}{G'(y)}=\frac{f(x)}{g(y)}$，即 $\Phi(x)$ 满足微分方程 $f(x)dx=g(y)dy$
于是称 $y=\Phi(x)$ 为微分方程的隐式通解

Calculus - Pg4

对于微分方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$

注意到方程是可分离变量，于是可利用分离变量的方法

有 $\frac{1}{y}dy=2x\,dx$

对等式两侧同时积分，有 $\ln|y|=x^2+C_1$，其中C_1为任意常数

则有 $|y|=e^{x^2+C_1}$，即 $y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$

又取函数 $y\equiv 0$，可知 $y\equiv 0$ 也是微分方程的解

对于任意常数C_1，$\pm e^{C_1}$值域为任意非零常数

于是可以用任意常数C代替 $\pm e^{C_1}$

即微分方程解为 $y=Ce^{x^2}$，其中C为任意常数

衰变 (decay)，在原子物理学中，放射性元素的衰变速度与当时未衰变的原子含量成正比

则对于在时间$t=0$时，放射性元素含量为M_0，求含量关于时间t的函数$M(t)$

其中衰变系数(exponential decay constant)为λ ($\lambda>0$)

于是有微分方程 $\frac{dM}{dt}=V=-\lambda M$

其中λ前置负号表示$M(t)$是单调递减的，即 $\frac{dM}{dt}<0$

且有初值条件 $M|_{t=0}=M_0$

则有 $\frac{1}{M}dM=-\lambda dt$

对等式两侧同时积分，有 $\ln M=-\lambda t+\ln C$，其中$\ln C$为任意常数且$C>0$

$M=Ce^{-\lambda t}$，又有初值条件 $M|_{t=0}=M_0$，

于是 $M_0=C\cdot e^{-\lambda\cdot 0}=C$

于是微分方程有特解 $M(t)=M_0e^{-\lambda t}$，$(t\geq 0)$

降落伞 假定在跳伞过程中，所受空气阻力与速度成正比，

则对于在时间$t=0$时，从空中跳下，初速度为0，求速度关于时间t的函数 $v=v(t)$

其中阻力 $F'=kv$，$(k>0)$，且方向与v的方向相反，

则降落伞所受外力 $F=G-F'=mg-kv$

又 $F=ma=m\frac{dv}{dt}$，

则有微分方程与初值条件 $\begin{cases} m\frac{dv}{dt}=mg-kv \\ v|_{t=0}=0 \end{cases}$

则有 $\frac{1}{mg-kv}dv=\frac{1}{m}dt$，即 $-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{1}{m}t+C_1$，其中$C_1$为任意常数

$mg-kv=e^{-\frac{kt}{m}-kC_1}$，即 $v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{kt}{m}}$，其中常数 $C=\frac{-e^{-kC_1}}{k}$

又 $v|_{t=0}=0$，则 $C=-\frac{mg}{k}$

于是微分方程有特解 $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{kt}{m}})$

即有随着t增大，v趋近于$\frac{mg}{k}$，即从加速运动趋近于匀速运动

Calculus - Pa5

齐次方程 (homogeneous equation) 指可化成形如 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 的一阶微分方程

可以进一步地化为可分离变量的微分方程求解

即引入新的未知函数 $u=\frac{y}{x}$

则有 $y=ux$, $dy=u\,dx+x\,du$

于是有 $u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$

$\frac{1}{\varphi(u)-u}du=\frac{1}{x}dx$

对等式两侧积分则有 $\int\frac{1}{\varphi(u)-u}du=\ln|x|+C_1$

如果 $\Phi(u)$ 是 $\frac{1}{\varphi(u)-u}$ 的一个原函数.

则齐次方程通解为 $\Phi(\frac{y}{x})=\ln|x|+C_1$

或者有 $x=C\,e^{\Phi(\frac{y}{x})}$, 其中 $C=e^{-C_1}$

特别注意: 在微分方程中齐次方程通常有两种含义

一是形如 $y'=\varphi(\frac{y}{x})$, 这里也指方程中每项关于 x,y 的次数均相等

如 y/x 可视为 0 次项, 于是 $a+b_1(\frac{y}{x})+\cdots+b_n(\frac{y}{x})^n$ 均为 0 次项

二是形如 $y''+py'+q=0$ 其中 $p=p(x)$, $q=q(x)$ 的微分方程,

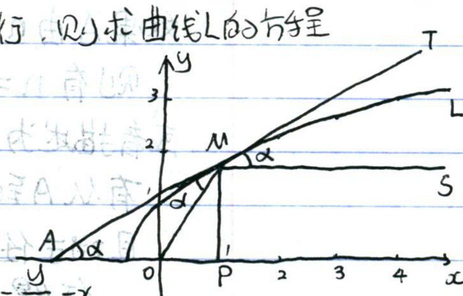
称为齐次线性方程 (homogeneous linear differential equation)

线性指方程每一项均关于未知函数 y 或其导数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$

齐次指方程中不存在自由项, 即不存在与 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 无关的非零项

聚光镜 探照灯的聚光镜面为由 xOy 平面上的曲线 L 绕 x 轴旋转形成的旋转曲面

而从原点 O 射出的光线经旋转曲面反射后皆与旋转轴平行, 则求曲线 L 的方程



令点 $M(x,y)$ 为曲线 $L(x,y)=0$ 上的一点,

OM 经曲线 L 反射后的射线 MS 与 x 轴平行

又令过点 M 的 L 的切线 T 交 x 轴于 A 点, 夹角为 α

则有 $\angle OMA=\angle SMT=\angle OAM=\alpha$, 即 $OA=OM$

又 $OM=\sqrt{x^2+y^2}$, $AO=AP-OP=PM\cot\alpha-OP=\frac{y}{y'}-x$

即 $\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2}$, 考虑 $y>0$ 的情形

$\frac{1}{y'}=\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}+\frac{x}{y}$

令 $v=\frac{x}{y}$, 则有 $x=yv$, $\frac{dx}{dy}=v+\frac{dv}{dy}y$

于是有 $v+y\frac{dv}{dy}=v+\sqrt{v^2+1}$

$\frac{1}{\sqrt{v^2+1}}dv=\frac{1}{y}dy$, 同时积分有 $\int\frac{1}{\sqrt{v^2+1}}dv=\int\frac{1}{y}dy$

$\ln(v+\sqrt{v^2+1})=\ln y+\ln C_1$, $C_1y=v+\sqrt{v^2+1}$,

$(C_1y-v)^2=v^2+1$, $C_1^2y^2-2C_1yv=1$, 又 $x=vy$

$y^2=\frac{1}{C_1^2}(2C_1x+1)$

Calculus - P96

可化为齐次的微分方程. 对于形如 $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ 的微分方程，其中 a,b,c,a_1,b_1,c_1 为实数常数

当 $c_1=c=0$ 时，微分方程本身已是齐次的

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}=\frac{a+b(y/x)}{a_1+b_1(y/x)}=\varphi(\frac{y}{x})$

而当 c_1,c 不同时为零时，则可以将原方程化为齐次微分方程

令 $x=X+h$，$y=Y+k$，其中 h,k 为实数常数

则有 $dx=dX$，$dy=dY$，$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$

即有 $\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$

则当常数项 $ah+bk+c=a_1h+b_1k+c_1=0$ 时

原微分方程即转换为齐次微分方程

对于方程组 $\begin{cases}ah+bk+c=0\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}$ 或写作 $\begin{bmatrix}a & b & -c\\ a_1 & b_1 & -c_1\end{bmatrix}$

则当行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\neq 0$，即 $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$ 时

原方程组有解 h,k，使得 $ah+bk+c=a_1h+b_1k+c_1=0$

于是方程化为 $\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}=\frac{a+b(Y/X)}{a_1+b_1(Y_1/X_1)}=\varphi(\frac{Y}{X})$

根据齐次方程的解法可得通解 $Y=Y(X)$

又 $Y=y-k$，$X=x-h$，

则原方程的通解为 $y-k=Y(x-h)$

而当 $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\lambda$ 时，其中 λ 为实数常数

如果 $\frac{c}{c_1}=\lambda$，即有 $ax+by+c=\lambda(a_1x+b_1y+c_1)$

则原方程化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda(a_1x+b_1y+c_1)}{a_1x+b_1y+c_1}=\lambda$

于是有通解 $y=\lambda x+C$，其中 C 为任意常数

如果 $\frac{c}{c_1}\neq\lambda$，则方程组 $\begin{cases}ah+bk+c=0\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}$ 无解.

则有 $\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda(a_1x+b_1y)+c}{(a_1x+b_1y)+c_1}$

令 $u=a_1x+b_1y$，则有 $\frac{du}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx}$

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}(\frac{du}{dx}-a_1)$

又 $\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda(a_1x+b_1y)+c}{(a_1x+b_1y)+c_1}=\frac{\lambda u+c}{u+c_1}$

即有 $\frac{1}{b_1}(\frac{du}{dx}-a_1)=\frac{\lambda u+c}{u+c_1}$

于是可转换为可分离变量的微分方程

$\frac{u+c_1}{b_1(\lambda u+c)+a_1(u+c_1)}du=dx$

则原方程有通解 $a_1x+b_1y=u=u(x)$

注意. 可化为齐次的微分方程可以扩展为 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1})$ 的形式