Calculus - P97

1) 线性微分方程(linear differential equation)，对于任意可导函数 $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), b(x)$

方程 $a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = b(x)$，其中 $y', \cdots, y^{(n)}$ 为未知函数 y 的各阶导数

对于一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

如果 $Q(x)$（或一般形式中的 $b(x)$）$\equiv 0$，则称为齐次的(homogeneous)

如果 $Q(x)$（或 $b(x)$）$\not\equiv 0$，则称为非齐次的(non-homogeneous)

对于非齐次的一阶线性微分方程

可以先设 $Q(x)=0$，从而转换为齐次的一阶线性微分方程

即 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$

称为对应于非齐次线性方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的齐次线性方程

注意到 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 是可分离变量的

于是有 $\frac{1}{y}dy = -P(x)dx$

对两侧积分有 $\ln|y| = \int -P(x)dx + C_1$，其中 C_1 为任意常数

即有 $y = \pm e^{\int -P(x)dx + C_1} = Ce^{-\int P(x)dx}$，其中 $C = \pm e^{C_1}$

注意，取 $y=0$ 时，$\frac{dy}{dx} = 0$，则 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 恒成立

于是常数 C 可以取 0，即 C 为任意常数

则 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ 称为对应的齐次线性方程的通解

常数变易法(variation of parameters, 或 variation of constants)

基于对应的齐次线性方程的通解，求非齐次线性方程的通解

对于 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$，令 $C = u(x)$，即 x 的未知函数 $u = u(x)$

则有 $y = ue^{-\int P(x)dx}$

$$\frac{dy}{dx} = u'e^{-\int P(x)dx} + u\cdot(-P(x))e^{-\int P(x)dx}$$

代入原方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

有 $u'e^{-\int P(x)dx} - uP(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)ue^{-\int P(x)dx} = Q(x)$

$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$

即 $u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$

对两侧积分有 $u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$，其中 C 为任意常数

于是有 $y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$

$$= e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

$$= Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

注意到 $Ce^{-\int P(x)dx}$ 为对应齐次线性方程的通解

取 $C=0$ 时，$y = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 为非齐次线性方程的一个特解

于是非齐次线性方程的通解等于对应齐次线性方程的通解

与非齐次线性方程的一个特解的和

Calculus - P98

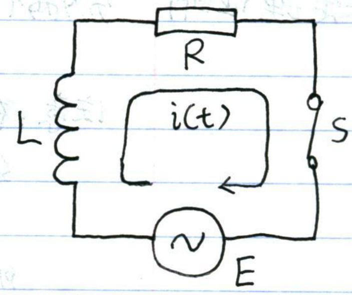
电感电路

在电感电路中，电阻R与电感L为常量

电源电动势E为时间t的函数

有 $E(t)=E_m\sin\omega t$，其中 E_m，ω 为常量

则求回路电流 $i(t)$



由于电流是关于时间t的变量，

则对于变化的电流 i，电感L有感应电动势 $-L\frac{di}{dt}$

又电阻两端电动势为 $-iR$

则由回路电压定律可知 $E-L\frac{di}{dt}-iR=0$

整理可得微分方程 $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}=\frac{E_m}{L}\sin\omega t$

即回路电流 $i(t)$ 为非齐次线性微分方程的解

令开关S闭合的时间 $t=0$，则有初值条件 $i|_{t=0}=0$

首先求对应齐次线性方程的通解，

即令 $P(t)=\frac{R}{L}$，$Q(t)=\frac{E_m}{L}\sin\omega t$

则有齐次线性方程 $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0$

即有通解为 $i(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}$，其中C为任意常数

再通过常数变易法求非齐次方程的通解，

取 $i(t)=u(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

$\frac{di}{dt}=u'(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}-\frac{R}{L}u(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

又 $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i(t)=\frac{E_m}{L}\sin\omega t$

则 $u'(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}-\frac{R}{L}u(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{R}{L}u(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E_m}{L}\sin\omega t$

$u'(t)=\frac{E_m}{L}\sin\omega t\cdot e^{\frac{R}{L}t}$

即 $u(t)=\int\frac{E_m}{L}\sin\omega t\cdot e^{\frac{R}{L}t}dt=\frac{E_m}{L}\int\sin\omega t\cdot\frac{L}{R}d(e^{\frac{R}{L}t})$

$=\frac{E_m}{R}[(e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t)-\int e^{\frac{R}{L}t}\omega\cos\omega t\,dt]$

$=\frac{E_m}{R}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t-\frac{E_mL\omega}{R^2}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t-\frac{L^2\omega^2}{R^2}u(t)$

于是有 $u(t)=\frac{E_m}{R^2+L^2\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t)+C_1$，其中 C_1 为任意常数

即有 $i(t)=\frac{E_m}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t)+C_1e^{-\frac{R}{L}t}$

代入初值条件 $i|_{t=0}=0$，有 $C_1=\frac{E_mL\omega}{R^2+L^2\omega^2}$

于是有 $i(t)=\frac{E_m}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t)+\frac{E_mL\omega}{R^2+L^2\omega^2}e^{-\frac{R}{L}t}$

再取 $\cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$，$\sin\varphi=\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$，即有 $\varphi=\arctan\frac{L\omega}{R}$

则 $i(t)=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}(\cos\varphi\sin\omega t-\sin\varphi\cos\omega t)+\frac{E_mL\omega}{R^2+L^2\omega^2}e^{-\frac{R}{L}t}$

$=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\sin(\omega t-\varphi)+\frac{E_mL\omega}{R^2+L^2\omega^2}e^{-\frac{R}{L}t}$

注意：$\frac{E_mL\omega}{R^2+L^2\omega^2}e^{-\frac{R}{L}t}$ 称为暂态电流(transient current)，随着时间增长逐渐衰减而趋于0

$\frac{E_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\sin(\omega t-\varphi)$ 称为稳态电流(steady-state current)

为周期与电压相同的正弦函数，但落后于电压 $\varphi=\arctan\frac{L\omega}{R}$ (相角)

Calculus - P29

变量代换 一种最常用的解微分方程的方法，指在解微分方程过程中
利用因变量的变量代换或自变量的变量代换
将一个微分方程转换为可分离变量的微分方程
或其他已知求解步骤的微分方程

伯努利方程(Bernoulli differential equation)，对于实数 $n \neq 0$ 且 $n \neq 1$

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$

注意到当 $n=0$ 或 $n=1$ 时，方程退化为一阶线性微分方程的形式

当 $n \neq 1$ 且 $n \neq 0$ 时，假定 $y \neq 0$，

则有 $y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}P(x) = Q(x)$

再令 $z = y^{1-n}$，则有 $\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^{1-n})}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}(1-n)$

于是 $(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)y^{1-n}P(x) = Q(x)$

即 $\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = Q(x)$

于是微分方程转换为一阶线性微分方程的形式

求出其通解 $F(z,x)=0$ 后，代入 $z = y^{1-n}$

则有原微分方程的通解 $F'(x,y)=0$

如对于微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a(\ln x)y^2$

有 $y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\cdot y^{-1} = a\ln x$

令 $z = y^{-1}$，则 $\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^{-1})}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$

于是有 $\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -a\ln x$

则有 $P(x) = -\frac{1}{x}$，$Q(x) = -a\ln x$

于是有通解 $z = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$，其中C为任意常数

$= x\left(\int -\frac{1}{x}a\ln x\, dx + C\right) = x\left[-\frac{a}{2}(\ln x)^2 + C\right]$

代入 $z = y^{-1}$，则有 $xy\left[-\frac{a}{2}(\ln x)^2 + C\right] = 1$

对于微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$

可令 $u = x+y$，则 $y = u - x$，即 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

于是有 $\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u}$，$\frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u}$

$\frac{u}{u+1}du = dx$

对两侧积分有 $u - \ln|u+1| = x + C$，其中C为任意常数

代入 $u = x+y$，则有 $y - \ln|x+y+1| = C$

即 $x+y+1 = C_1 e^y$，其中 $C_1 = \pm e^{-C}$

Calculus - P100

对于高阶微分方程 (high-order differential equation)
有时可以通过代换或其他方式化为较低阶的方程求解

$y^{(n)}=f(x)$ 型

对于型如 $y^{(n)}=f(x)$ 的微分方程，其中 $n>1$
则可知对两侧同时积分可以得到关于 $y^{(n-1)}$ 的微分方程
即有 $y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$.
$y^{(n-2)}=\int[\int f(x)dx+C_1]dx+C_2$
在 n 次积分以后可以得到 y 的通解，其中有 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$
所以消除所有任意常数需要 n 个初值条件

如 $y'''=e^{2x}-\cos x$
则有 $y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C$
$y'=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+Cx+C_2$
$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$ ，其中 $C_1=\frac{1}{2}C$

对于变力作用下的质点运动轨迹
假设质量为 m 的质点，受力 F 的作用自原点沿 x 轴正方向作直线运动
变力 F 为时间 t 的函数 $F=F(t)$，且当 $t=0$ 时，$F(0)=F_0$
随着时间增长，F 均匀减少，直到 $t=T$ 时，$F(T)=0$
如果质点初速度为 0，则求质点的运动轨迹，令 $t\in[0,T]$
令 $x=x(t)$ 表示质点在时间 t 的位置，则有 $x(0)=0$
由于初速度为 0，则有 $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=0$
由于受力与加速度的关系 $F=ma$
则 $F(t)=m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$
又 $F(t)=F_0(1-\frac{t}{T})$，即有 $m\frac{d^2x}{dt^2}=F_0(1-\frac{t}{T})$
即 $x''=\frac{F_0}{m}(1-\frac{t}{T})$
对两侧同时积分，有 $x'=\int\frac{F_0}{m}(1-\frac{t}{T})dt$
则 $x'=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})+C_1$
代入初值条件 $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=0$，即有 $C_1=0$
于是有 $x'=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})$
再对两侧同时积分，有 $x=\int\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})dt$
则 $x=\frac{F_0}{m}(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6T}t^3)+C_2$
代入初值条件 $x|_{t=0}=0$，即有 $C_2=0$
于是运动规律 $x(t)=\frac{F_0}{m}(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6T}t^3)$ ，$t\in[0,T]$

Calculus - P101

$y''=f(x,y')$型　对于形如 $y''=f(x,y')$ 的微分方程，其右端并不显式地含有未知函数 y

则设函数 $p(x)=y'(x)$，于是有 $y''=\frac{dp}{dx}=p'$

则方程转换为 $p'=f(x,p)$，为一阶线性微分方程

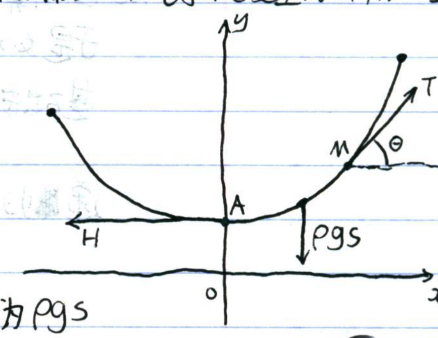
得到包含一个任意常数 C_1 的通解 $p=\varphi(x,C_1)$

代入有 $\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)$，

对两侧积分可得 y 的通解 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

悬链线　(catenary)，或 alysoid，chainette)，指一均匀、柔软的绳索，两端固定，绳索仅受重力作用下垂

悬链线为绳索在平衡状态时的曲线方程



令绳索的最低点为A，取轴过点A垂直向上，$|OA|$为常数

取x轴水平向右，曲线方程为 $y=\varphi(x)$

考虑点A到绳索上动点 $M(x,y)$ 的弧 $\overset{\frown}{AM}$

令 $\overset{\frown}{AM}$ 弧长为 s，均匀绳索密度为 ρ，重力常数为 g

如仅考虑绳索 $\overset{\frown}{AM}$ 上的受力分析，有重力垂直向下为 ρgs

点A上的张力沿水平切线方向，大小为 H

点M上的张力沿切线方向，倾角为 θ，大小为 T

由于三者相互平衡，于是有 $T\cos\theta=H$，$T\sin\theta=\rho gs$

则有 $\tan\theta=\frac{1}{a}s$，其中 $a=\frac{H}{\rho g}$

又 $\tan\theta=y'$，弧微分 $ds=\sqrt{1+y'}\,dx$

于是有 $y'=\frac{1}{a}\int_0^x\sqrt{1+y'}\,dx$

对两边同时求导，$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'}$

令 $|OA|=a$，即A坐标为 $(0,a)$，则有初值条件 $y|_{x=0}=a$，$y'|_{x=0}=0$

令 $p=y'$，则有 $y''=\frac{dp}{dx}$

代入微分方程有 $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}dp=\frac{1}{a}dx$

对两侧积分有 $\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+C_1$，其中$C_1$为任意常数

代入 $p|_{x=0}=0$，则有 $C_1=0$

于是有 $\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}$，即 $p+\sqrt{1+p^2}=e^{\frac{x}{a}}$

$e^{-\frac{x}{a}}=1/(p+\sqrt{1+p^2})=(\sqrt{1+p^2}-p)/[(1+p^2)-p^2]=\sqrt{1+p^2}-p$

即 $p=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$，

则 $y'=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$

对两侧积分有 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})+C_2$，其中$C_2$为任意常数

代入 $y|_{x=0}=a$，则有 $C_2=0$

于是有绳索的方程为 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$，其中 $a=\frac{H}{\rho g}$

Calculus - P102

$y''=f(y,y')$型　对于形如 $y''=f(y,y')$ 的微分方程，其右侧不明显地包含自变量 x

可以令 $y'=p(x)$，则利用复合函数的求导方法

有 $y''=p'=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=y'\frac{dp}{dy}=p\frac{dp}{dy}$

于是方程可以转换为 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

求解关于 y,p 的一阶线性微分方程

可得通解 $p=\varphi(y,C_1)$，其中 C_1 为任意常数

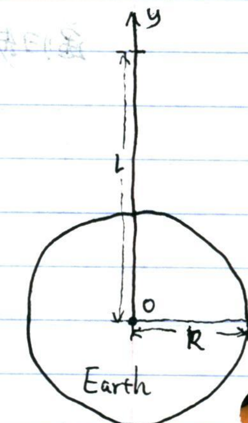
又 $\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$，即可分离变量的微分方程

$\int\frac{1}{\varphi(y,C_1)}dy=x+C_2$，其中 C_1,C_2 为任意常数

高处自由落体　对于一个离地面足够高的物体，高度并不远小于半径

物体受地球引力作用由静止作自由落体运动

如不计空气阻力，求落到地面时的速度和时间



取地球中心与物体连线为 y 轴，方向垂直向上

取地球中心为原点 O，地球半径为 R，地球质量为 M

物体质量为 m，下落时高度为 $l\ (l>R)$

取物体高度 y 为时间 t 的函数 $y=\varphi(t)$，于是有速度 $v=\frac{dy}{dt}$

则根据万有引力定律，有 $ma=F=-\frac{GMm}{y^2}$

于是有 $m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{GMm}{y^2}$

即有微分方程 $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{GM}{y^2}$

取 $g=\frac{GM}{R^2}$，则有 $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{gR^2}{y^2}$

且有初值条件 $y|_{t=0}=l$，$y'|_{t=0}=0$

令 $v=\frac{dy}{dt}$，则有 $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dy}$

则 $v\cdot\frac{dv}{dy}=-\frac{gR^2}{y^2}$，即 $v\,dv=gR^2\cdot-\frac{1}{y^2}dy$

两侧积分则有 $v^2=\frac{2gR^2}{y}+C_1$，其中 C_1 为任意常数

代入 $v|_{t=0}=0$，$y|_{t=0}=l$，则有 $C_1=-\frac{2gR^2}{l}$

于是 $v^2=2gR^2(\frac{1}{y}-\frac{1}{l})$，又速度沿 y 轴负方向

$v=-R\sqrt{2g(\frac{1}{y}-\frac{1}{l})}$，当 $y=R$ 时，$v=-R\sqrt{2g(\frac{1}{R}-\frac{1}{l})}$

又 $\frac{dy}{dt}=-R\sqrt{2g(\frac{1}{y}-\frac{1}{l})}=-R\sqrt{\frac{2g(l-y)}{ly}}$

则 $dt=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\sqrt{\frac{y}{l-y}}dy$

则有 $t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}})+C_2$，其中 C_2 为任意常数

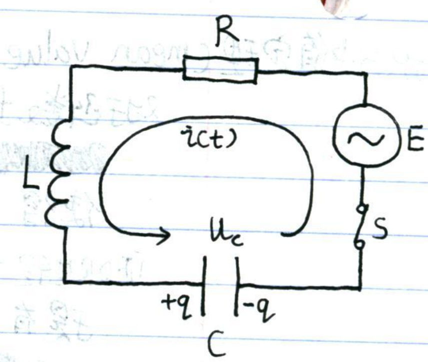
代入 $y|_{t=0}=l$，则有 $C_2=0$

于是有 $t(y)=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}})$

当 $y=R$ 时，$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}(\sqrt{lR-R^2}+l\arccos\sqrt{\frac{R}{l}})$

Calculus - P103

串联电路的振荡方程(electric oscillation of series RLC-circuit)



对于由电阻R，自感L，电容C和电源E串联成的电路

其中电源电动势 $E = E_m \sin\omega t$，R, L, L, E_m, ω 为常数

设电路中的电流为 $i(t)$，电容器极板电荷量为 $q(t)$

电容器极板间电压为 u_c，自感电动势为 E_L

于是有 $i = \frac{dq}{dt}$，$u_c = \frac{q}{C}$，$E_L = -L\frac{di}{dt}$

则根据回路电压定律

$$E - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} - Ri = 0, \quad 又 \ i = \frac{1}{C}\cdot\frac{du_c}{dt}$$

于是有 $LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c + RC\frac{du_c}{dt} = E_m \sin\omega t$

即 $\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\beta\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \frac{E_m}{LC}\sin\omega t$

称为串联电路的振荡方程

当电容充电后撤去外电源，即令 $E=0$

则有方程 $\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\beta\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$

二阶线性微分方程，指形[redacted]如 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$ 的微分方程

其中 y 为关于 x 的未知函数，$P(x), Q(x), f(x)$ 为关于 x 的已知函数

当函数 $f(x) \equiv 0$ 时，称二阶线性微分方程为[redacted]齐次的

当函数 $f(x) \not\equiv 0$ 时，称为非齐次的

n阶线性微分方程，指由二阶线性微分方程扩展至n阶的情形

即形如 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$

其中 y 是关于 x 的未知函数，且有n阶导数

$a_1(x), \cdots, a_n(x), f(x)$ 是关于 x 的已知函数

对于二阶齐次[redacted]线性方程，$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$，如果 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 都是方程的解

则有 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 都是方程的解，其中 C_1, C_2 为任意常数

证明过程有，$y' = C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)$，$y'' = C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x)$

于是有 $C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x) + P(x)[C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)] + Q(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]$

$= C_1[y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)] + C_2[y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x)]$

$= 0$，即 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

于是有 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 都是方程的解，其中 C_1, C_2 为任意常数

但是特别注意，尽管 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 有两个任意常数，但不一定是方程通解

由于当 $y_2(x) = Cy_1(x)$，其中C为常数时，$y = C_1y_1(x) + C_2Cy_1(x) = C_3y_1(x)$，其中 $C_3 = C_1 + C_2C$

Calculus - P104

线性无关 (linear independence)，对于定义在区间 I 上的函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$

如果存在 n 个不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$

使得当 $x \in I$ 时，有 $k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n \equiv 0$

则称 n 个函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 在区间 I 上是线性相关的 (linearly dependent)

否则称这 n 个函数是线性无关的 (linearly independent)

对于微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

如果有函数 $y_1(x), y_2(x)$ 为微分方程两个线性无关的特解

则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 为微分方程的通解，其中 C_1, C_2 为任意常数

扩展到 n 阶微分方程 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n(x)y = 0$

如果方程有 n 个线性无关的特解 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$

则微分方程有通解 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数

对于二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

有函数 $y^*(x)$ 是非齐次方程的一个特解

函数 $Y(x)$ 是齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解

则非齐次方程有通解 $y = Y(x) + y^*(x)$

证明过程有，$y'' + P(x)y' + Q(x)y = [Y(x) + y^*(x)]'' + P(x)[Y(x) + y^*(x)]' + Q(x)[Y(x) + y^*(x)]$

$= [Y''(x) + P(x)Y'(x) + Q(x)Y(x)] + [y^{*''}(x) + P(x)y^{*'}(x) + Q(x)y^*(x)]$

$\equiv 0 + f(x) = f(x)$

于是有 $y = Y(x) + y^*(x)$ 为非齐次线性方程的通解

叠加原理 (superposition principle)，对于二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

有函数 $y_1^*(x)$ 为非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$ 的一个特解

函数 $y_2^*(x)$ 为非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$ 的一个特解

则非齐次方程有特解 $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$

证明过程有，$y^{*''}(x) + P(x)y^{*'}(x) + Q(x)y^*(x)$

$= [y_1^*(x) + y_2^*(x)]'' + P(x)[y_1^*(x) + y_2^*(x)]' + Q(x)[y_1^*(x) + y_2^*(x)]$

$= [y_1^{*''}(x) + P(x)y_1^{*'}(x) + Q(x)y_1^*(x)] + [y_2^{*''}(x) + P(x)y_2^{*'}(x) + Q(x)y_2^*(x)]$

$\equiv f_1(x) + f_2(x)$

于是有 $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 为原非齐次线性方程的特解

特别地有，二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$，有特解 $y^*(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i^*(x)$

其中函数 $y_i^*(x)$ 为非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_i(x)$ 的一个特解，$i = 1, 2, \cdots, n$

Calculus - P105

常数变易法　用于一阶非齐次线性微分方程的常数变易法也可以应用于高阶线性方程

对于二阶非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$

如果已知对于齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

有通解 $Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，其中 C_1, C_2 为任意常数

用未知函数 $v_1(x)$ 和 $v_2(x)$ 代替常数 C_1, C_2

则有非齐次线性方程通解 $y(x)=y_1(x)v_1+y_2(x)v_2$

对两侧求导 则有 $y'=y_1'v_1+y_1v_1'+y_2'v_2+y_2v_2'$

由于两个未知函数 v_1, v_2 仅需满足一个非齐次线性方程

则可规定再满足一个关系式

$y_1v_1'+y_2v_2'=0$

即有 $y=v_1y_1'+v_2y_2'$

于是在 y'' 中消除了 v_1'' 和 v_2''

则有 $y''=v_1y_1''+v_1'y_1'+v_2y_2''+v_2'y_2'$

代入原非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$，

$[v_1y_1''+v_1'y_1'+v_2y_2''+v_2'y_2']+P(x)[v_1y_1'+v_2y_2']+Q(x)[v_1y_1+v_2y_2]=f(x)$

$v_1'y_1'+v_2'y_2'+v_1[y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1]+v_2[y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2]=f(x)$

又 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的线性无关特解

则有 $v_1'y_1'+v_2'y_2'=f(x)$

令方程组 $\begin{cases} y_1v_1'+y_2v_2'=0 \\ y_1'v_1'+y_2'v_2'=f(x) \end{cases}$ 的系数行列式为 $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

如果行列式 $W=y_1y_2'-y_1'y_2\neq 0$，

则方程组有解，$v_1'=-\frac{f(x)}{W}y_2$，$v_2'=-\frac{f(x)}{W}y_1$

假设 $f(x)$ 为连续函数，即 $f(x)$ 可积

于是有 $v_1=C_1+\int -\frac{1}{W}f(x)y_2(x)\,dx$

$v_2=C_2+\int -\frac{1}{W}f(x)y_1(x)\,dx$，其中 C_1, C_2 为任意常数

则非齐次方程有通解 $y=C_1y_1+C_2y_2+y_1\int -\frac{f(x)}{W}y_2\,dx+y_2\int -\frac{f(x)}{W}y_1\,dx$

如对于非齐次方程 $y''-2y'+y=\frac{1}{x}e^x$，已知 $y_1(x)=e^x$ 是齐次方程 $y''-2y'+y=0$ 的解

令 $y=e^xu(x)$，则有 $y'=e^x(u+u')$，$y''=e^x(u+2u'+u'')$

代入非齐次方程有 $e^x(u+2u'+u'')-2e^x(u+u')+e^xu=\frac{1}{x}e^x$

则有 $e^xu''=\frac{1}{x}e^x$，即 $u''=\frac{1}{x}$

于是 $u'=C+\ln|x|$

$u=C_1+Cx+x\ln|x|-x$　且有 $C_2=C-1$

则非齐次方程有通解 $y=C_1e^x+C_2xe^x+xe^x\ln|x|$，其中 C_1, C_2 为任意常数

Calculus - P106

欧拉公式 (Euler's formula)，对于任意实数 x，有 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，其中 i 为虚数

通过泰勒级数的证明过程有，对于任意实数 x

有 $e^{x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

$\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

考虑 x 为复数，即 $x=iz$，其中 z 为任意实数

于是有 $e^{iz}=1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\frac{(iz)^6}{6!}+\frac{(iz)^7}{7!}+\cdots$

$=1+iz-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+i\frac{z^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}-i\frac{z^7}{7!}+\cdots$

$=(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots)+i(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots)$

$=\cos x+i\sin x$

特别地有 $(e^{rx})'=re^{rx}$ 对 $r=a+bi$ 也成立，其中 a,b 为任意实数

证明过程有，$[e^{(a+bi)x}]'=[e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)]'$ 其中 a,b,x 为任意实数

$=ae^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+e^{ax}(-b\sin a+bi\cos x)$

$=(a+bi)e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)=(a+bi)e^{(a+bi)}$

常系数齐次线性微分方程，指对于二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

如果 $P(x),Q(x)$ 为常数 p,q，则称 $y''+py'+qy=0$ 为二阶常系数齐次线性微分方程

而当 p,q 不全为常数时，则称 $y''+py'+qy=0$ 为二阶变系数齐次线性微分方程

考虑指数函数 $y=e^{rx}$，其中 r 为常数，则有 $y'=re^{rx}$，$y''=r^2e^{rx}$

代入常系数方程 $y''+py'+qy=0$，又对于任意常数 r，有 $e^{rx}\neq 0$

则有 $r^2e^{rx}+pre^{rx}+qe^{rx}=0$，即有 $r^2+pr+q=0$

称 $r^2+pr+q=0$ 为原常系数齐次方程的特征方程 (characteristic equation)

当 $\Delta=p^2-4q>0$ 时，特征方程有不相等的实根 $r_1=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$，$r_2=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

则可知 $y_1=e^{r_1x}$，$y_2=e^{r_2x}$ 为原方程两个特解，又 $\frac{y_1}{y_2}=e^{(r_1-r_2)x}$ 不为常数

于是微分方程有通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数

当 $\Delta=p^2-4q=0$ 时，特征方程有相等实根 $r_1=r_2=-\frac{p}{2}$，$y_1=e^{r_1x}$ 为特解

为了得到线性无关的特解，取 $y_2=u(x)e^{r_1x}$，于是 $y_2'=e^{r_1x}(u'+r_1u)$，$y_2''=e^{r_1x}(u''+2r_1u+r_1^2)$

代入方程则有 $e^{r_1x}[u''+(2r_1+p)u'+(r_1^2+pr_1+q)u]=0$，即 $u''=0$，

取 $u=x$，则微分方程有通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数

当 $\Delta=p^2-4q<0$ 时，特征方程有共轭复根　　于是有特解

$r_1=\alpha+\beta i$，$r_2=\alpha-\beta i$，其中 $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$，$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}$，$y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}$

取 $\bar{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$，$\bar{y}_2=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$

于是有 $\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}=\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=\cot\beta x$ 不为常数，所以有 $\bar{y}_1,\bar{y}_2$ 是线性无关的特解

其中 C_1,C_2 为任意常数 即微分方程有通解 $y=C_1\bar{y}_1+C_2\bar{y}_2=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

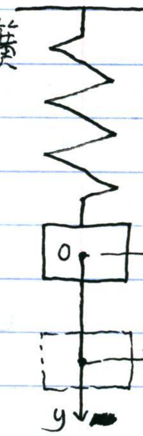
Calculus - P107

对于二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+q=0$

根据特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根的情况得出通解

两个不相等的实根 r_1, r_2	通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等实根 $r_1=r_2$	通解 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
两个共轭复根 $r_1, r_2=\alpha\pm\beta i$	通解 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

自由振动(free vibration)，假设有一个上端固定，下端挂有质量 m 的物体的弹簧



物体静止时，作用在物体上的重力与弹性力大小相等且方向相反

则这个位置即物体的平衡位置.

取平衡位置为原点 O，y 轴的方向铅直向下

如果使物体具有一个初始速度 $v_0\neq 0$

则使物体离开平衡位置，并在平衡位置附近做上下振动

——物体位置为时间 t 的函数 $y=y(t)$

弹簧有劲度系数 c，则物体受弹性恢复力 $f=-cy$

物体运动过程中受阻尼介质的阻力作用，使振动逐渐趋于停止

阻力 R 在运动速度不快时，大小与速度成正比，方向相反，

如果有比例系数 μ，则 $R=-\mu\frac{dy}{dt}$

于是有 $m\frac{d^2y}{dt^2}=-cy-\mu\frac{dy}{dt}$，即 $my''+\mu y'+cy=0$

令 $2n=\frac{\mu}{m}$，$k^2=\frac{c}{m}$，则有 $y''+2ny'+k^2y=0$

称为有阻尼的自由振动的微分方程

如果物体同时受铅直干扰力 $F=H\sin pt$，其中 H，p 为常数

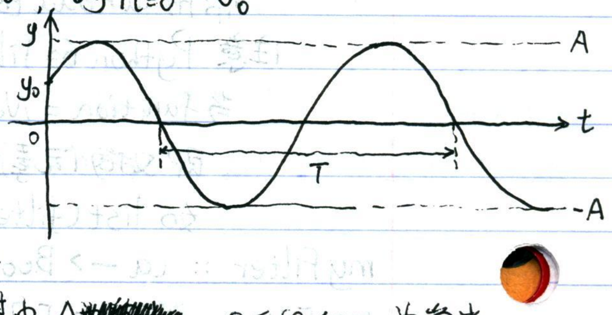
则有 $y''+2ny'+k^2y=h\sin pt$，其中 $h=\frac{H}{m}$

称为有阻尼的受迫振动(forced vibration)的微分方程

如果阻尼的阻力作用为零，即 $-\mu\frac{dy}{dt}=0$，称为无阻尼自由振动(free vibration without damping)

即有 $y''+k^2y=0$，且有初值条件 $y|_{t=0}=y_0$，$y'|_{t=0}=v_0$

于是有特征方程 $r^2+k^2=0$，



有共轭复根 $r_1, r_2=\pm ki$

于是有通解 $y=C_1\cos kt+C_2\sin kt$

代入初值条件 有 $C_1=y_0$，$C_2=\frac{v_0}{k}$

于是方程有特解 $y=y_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt$

再令 $y_0=A\sin\varphi$，$\frac{v_0}{k}=A\cos\varphi$，其中 A，$0\le\varphi<2\pi$ 为常数

于是有 $y=A\sin(kt+\varphi)$，其中 $A=\sqrt{y_0^2+v_0^2/k^2}$，$\tan\varphi=\frac{ky_0}{v_0}$

称为简谐振动(simple harmonic motion)，振幅为 A，初相为 φ，周期 $T=\frac{2\pi}{k}$

角频率(angular frequency) $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$ 也称为固有频率，反映振动系统特性

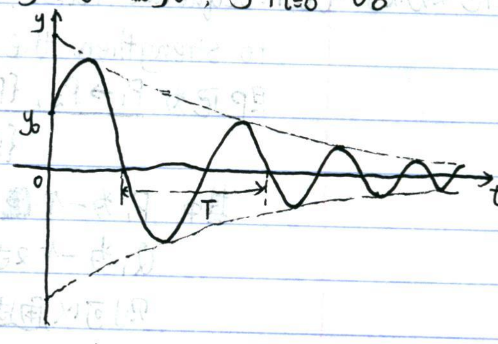
Calculus - P108

有阻尼的自由振动的微分方程 $y''+2ny'+k^2y=0$ 有初值条件 $y|_{t=0}=y_0$，$y'|_{t=0}=v_0$

于是有特征方程 $r^2+2nr+k^2=0$

$(r+n)^2=n^2-k^2$，于是有 $r=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$

则根据 $n<k$，$n>k$，$n=k$ 分情况讨论



小阻尼　当 $n<k$ 时，$n^2-k^2<0$，则特征方程有共轭复根

$r_1=-n+\omega i$，$r_2=-n-\omega i$，其中 $\omega=\sqrt{k^2-n^2}$

于是微分方程有通解 $y=e^{-nt}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)$，其中 C_1, C_2 为任意常数

代入初值条件，则有 $C_1=y_0$，$C_2=\frac{v_0+ny_0}{\omega}$

于是微分方程有特解 $y=e^{-nt}(y_0\cos\omega t+\frac{v_0+ny_0}{\omega}\sin\omega t)$

再取 $A\sin\varphi=y_0$，$A\cos\varphi=\frac{v_0+ny_0}{\omega}$，其中 $0\le\varphi<2\pi$

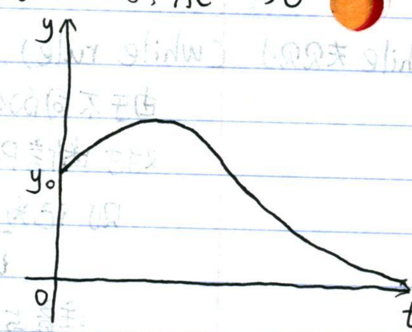
于是有 $y=Ae^{-nt}\sin(\omega t+\varphi)$

其中 $\omega=\sqrt{k^2-n^2}$，$A=\sqrt{y_0^2+(v_0+ny_0)^2/\omega^2}$，$\tan\varphi=\frac{y_0\omega}{v_0+ny_0}$

可知与简谐振动相似，振动的初相为 φ，周期 $T=2\pi/\omega$

但区别在于小阻尼自由振动的振幅为 Ae^{-nt}，当 $t\to\infty$ 时，$Ae^{-nt}\to 0$

即随着时间增大逐渐趋于平衡位置



大阻尼　当 $n>k$ 时，$n^2-k^2>0$，则特征方程有两个实根

$r_1=-n+\sqrt{n^2-k^2}$，$r_2=-n-\sqrt{n^2-k^2}$

于是微分方程有通解 $y=C_1e^{(-n+\sqrt{n^2-k^2})t}+C_2e^{(-n-\sqrt{n^2-k^2})t}$

又对于任意实数 $n>k>0$，有 $r_1, r_2<0$

而任意常数 C_1, C_2 可由初值条件确定

则可知使 $y=0$ 的 t 值最多只有一个

即物体至多越过平衡位置一次

又当 $t\to\infty$ 时，$y=C_1e^{(-n+\sqrt{n^2-k^2})t}+C_2e^{(-n-\sqrt{n^2-k^2})t}\to 0$，

即随着时间增大逐渐趋于平衡位置

临界阻尼　当 $n=k$ 时，特征方程有相等实根 $r_1=r_2=-n$

于是微分方程有通解 $y=(C_1+C_2t)e^{-nt}$，其中 C_1, C_2 为任意常数

而任意常数 C_1, C_2 可由初值条件确定

又使 $y=0$ 的 t 值最多只有一个，即物体至多越过平衡位置一次

又 $\lim_{t\to\infty}(C_1+C_2t)e^{-nt}=\lim_{t\to\infty}\frac{C_1+C_2t}{e^{nt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{C_2}{ne^{nt}}=0$

于是可知随着时间增大逐渐趋于平衡位置