Linear Algebra - P12

等价方程组 对于 m×n 的线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$

通过在方程两端同时乘一个非奇异的 m×m 矩阵 M

则有方程组 $MA\vec{x}=M\vec{b}$

于是任意方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解 $\vec{x}$ 同时也是方程组 $MA\vec{x}=M\vec{b}$ 的解

又非奇异矩阵 M 有矩阵的逆 M^{-1}，

则有 $A\vec{x}'=M^{-1}(MA\vec{x}')=M^{-1}(M\vec{b})=\vec{b}$

于是任意方程组 $MA\vec{x}=M\vec{b}$ 的解 $\vec{x}'$ 同时也是方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解

则有两个方程组是等价的

于是可以选取一系列非奇异 m×m 矩阵 $E_1,E_2,\cdots,E_k$

并分别乘到方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的两端

从而得到较简单的方程组 $U\vec{x}=\vec{c}$

其中 m×n 矩阵 $U=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A$

m 维列向量 $\vec{c}=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1\vec{b}$

由于矩阵 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 为非奇异矩阵，

则 m×m 矩阵 $M=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1$ 也是非奇异矩阵

于是方程组 $U\vec{x}=\vec{c}$ 和 $A\vec{x}=\vec{b}$ 是等价的

初等矩阵 (elementary matrix)，指从单位矩阵 I 开始，只进行一次初等行运算得到的矩阵

分别对应于交换两行/某一行乘以一个非零常数/将某一行的倍数加到另一行

类型I：由交换单位矩阵 I 的两行得到

左乘交换对应的两行，右乘交换对应的两列

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{12}&a_{11}&a_{13}\\a_{22}&a_{21}&a_{23}\\a_{32}&a_{31}&a_{33}\end{bmatrix}$$

类型II：由单位矩阵某一行乘以一个非零常数得到

左乘将非零常数乘到对应行，右乘将非零常数乘到对应列

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\3a_{31}&3a_{32}&3a_{33}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&3a_{13}\\a_{21}&a_{22}&3a_{23}\\a_{31}&a_{32}&3a_{33}\end{bmatrix}$$

类型III：由单位矩阵将某一行的倍数加到另一行得到

左乘对矩阵的行进行相同操作，右乘对矩阵的列进行相同操作

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+2a_{31}&a_{12}+2a_{32}&a_{13}+2a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&2a_{11}+a_{13}\\a_{21}&a_{22}&2a_{21}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}&2a_{31}+a_{33}\end{bmatrix}$$

Linear Algebra - P13

对于 $n\times n$ 初等矩阵E，则矩阵E是非奇异的，

且矩阵E的逆 E^{-1} 为与矩阵E相同类型的初等矩阵

证明过程为：对于类型I，假设交换了第i行和第j行

即有

$$E=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & 1 & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & 1\end{bmatrix}$$

，其中 $e_{ij}=e_{ji}=1$

则有 $EE=I$，即类型I的初等矩阵是对合矩阵

也称为矩阵E是自逆的（self inverse），即 $E=E^{-1}$

也可以描述为再次交换E的第i行和第j行重新得到单位矩阵I

对于类型II，假设对第i行乘以非零实数 α

即有 $e_{ii}=\alpha$

再取初等矩阵 E' 为对第i行乘以非零实数 $\frac{1}{\alpha}$

即有 $e_{ii}=1/\alpha$

可知 $E'E=EE'=I$，即有 $E^{-1}=E'$

也可以描述为对类型II的初等矩阵的第i行乘以非零实数 α 的倒数 $\frac{1}{\alpha}$

可以重新得到单位矩阵

对于类型III，假设将第i行的 λ 倍加到第j行

即有

$$E=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & \lambda & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}$$

，其中 $e_{ji}=\lambda$

再取初等矩阵 E' 为将第i行的 $-\lambda$ 倍加到第j行

即有

$$E'=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & -\lambda & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}$$

，其中 $e_{ji}=-\lambda$

可知 $E'E=E'E=I$，即有 $E^{-1}=E'$

也可以描述为对类型III的初等矩阵的第i行的 $-\lambda$ 倍加到第j行

可以重新得到单位矩阵

于是初等矩阵E是非奇异的，且矩阵的逆 E^{-1} 也是相同类型的初等矩阵

Linear Algebra - P14

行等价 (row equivalent)，对于 $m\times n$ 矩阵 A, B

如果存在一个有限的初等矩阵序列 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ ($m\times m$ 矩阵)

使得 $B = E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A$

则称矩阵 A 与 B 是行等价的，即矩阵 B 可以由矩阵 A 经由有限次行运算得到

特别地对于两个 $m\times n$ 的线性方程组 $A\vec{x}=\vec{c}$ 和 $B\vec{x}=\vec{d}$

增广矩阵 $m\times(n+1)$ 矩阵 $(A|\vec{c})$ 和 $(B|\vec{d})$ 是行等价的

当且仅当 $A\vec{x}=\vec{c}$ 和 $B\vec{x}=\vec{d}$ 是等价方程组

对于 $m\times n$ 矩阵 A, B，如果 A 和 B 是行等价的，则 B 和 A 也是行等价的

存在 $m\times m$ 初等矩阵序列 $E_1, E_2, \cdots, E_k$，使得 $B = E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A$

又 $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \cdots, E_k^{-1}$ 也是有限的 $m\times m$ 初等矩阵序列

且有 $E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}B = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}E_k\cdots E_2E_1A = A$

于是 A 和 B 是行等价的 $\longleftrightarrow$ B 和 A 是行等价的

对于 $m\times n$ 矩阵 A, B, C，如果 A 和 B 是行等价的，B 和 C 是行等价的，则 A 和 C 是行等价的

存在 $m\times m$ 初等矩阵序列 $E_1, E_2, \cdots, E_k$，使得 $B = E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A$

$m\times m$ 初等矩阵序列 $F_1, F_2, \cdots, F_l$，使得 $C = F_lF_{l-1}\cdots F_2F_1B$

则有 $E_1, E_2, \cdots, E_k, F_1, F_2, \cdots, F_l$ 为有限的 $m\times m$ 初等矩阵序列

且有 $C = F_lF_{l-1}\cdots F_1B = F_lF_{l-1}\cdots F_1E_kE_{k-1}\cdots E_1A$

于是 A 和 B 是行等价的 $\wedge$ B 和 C 是行等价的 $\longrightarrow$ A 和 C 是行等价的

非奇异矩阵的等价条件，对于 $n\times n$ 矩阵 A，有命题等价关系

A 是非奇异的 $\longleftrightarrow$ $A\vec{x}=\vec{0}$ 仅有平凡解 $\vec{0}$ $\longleftrightarrow$ A 与单位矩阵 I 是行等价的

当 A 是非奇异的，且令 $\hat{\vec{x}}$ 为线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的一个解

则 $\hat{\vec{x}} = I\hat{\vec{x}} = (A^{-1}A)\hat{\vec{x}} = A^{-1}(A\hat{\vec{x}}) = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$

于是有 A 是非奇异的 $\longrightarrow$ 线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 仅有平凡解 $\vec{0}$

当 $A\vec{x}=\vec{0}$ 仅有平凡解 $\vec{0}$ 时，通过行运算得到等价方程组 $U\vec{x}=\vec{0}$，其中矩阵 U 为行阶梯形

如果 U 的对角线中有元素为 0，则矩阵 U 的最后一行全部为 0

则 $A\vec{x}=\vec{0}$ 等价于一个未知量个数多于方程组个数的方程组

即 $A\vec{x}=\vec{0}$ 应有非平凡解，与 $A\vec{x}=\vec{0}$ 仅有平凡解 $\vec{0}$ 相矛盾

于是 U 的对角线元素均为 1，于是单位矩阵 I 与 A 是 A 的行最简形，即是行等价的

当 A 与单位矩阵 I 是行等价的，则存在初等矩阵序列 $E_1, E_2, \cdots, E_k$

使得 $A = E_k\cdots E_2E_1I = E_k\cdots E_1$，且有 $(E_k\cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1} = A^{-1}$

于是有 A 与单位矩阵 I 是行等价的 $\longrightarrow$ A 是非奇异的

即有

A 是非奇异的

$\longleftrightarrow$ $A\vec{x}=\vec{0}$ 仅有平凡解 $\vec{0}$

$\longleftrightarrow$ A 与 I 是行等价的

Linear Algebra - P15

对于n×n的线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$，当且仅当n×n矩阵A为非奇异的，有唯一解

证明过程有，当n×n矩阵A是非奇异的，则有矩阵的逆 A^{-1}

令 $\hat{\vec{x}}$ 为线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的一个解

则有 $\hat{\vec{x}} = I\hat{\vec{x}} = (A^{-1}A)\hat{\vec{x}} = A^{-1}(A\hat{\vec{x}}) = A^{-1}\vec{b}$

于是可知线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $A^{-1}\vec{b}$

当n×n的线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $\hat{\vec{x}}$ 时

假设矩阵A是奇异的

则线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 有非平凡解 $\vec{z}\neq\vec{0}$

则取 $\vec{y}=\hat{\vec{x}}+\vec{z}$，可知 $\vec{y}\neq\hat{\vec{x}}$

有 $A\vec{y}=A(\hat{\vec{x}}+\vec{z})=A\hat{\vec{x}}+A\vec{z}=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$

于是可知 $\vec{y}$ 是线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 不等于 $\hat{\vec{x}}$ 的另一个解

与 $\hat{\vec{x}}$ 是线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的唯一解相矛盾

于是矩阵A是非奇异的

如果n×n矩阵A是非奇异的，则有矩阵A与I是行等价的

则存在初等矩阵序列 $E_1,\cdots,E_k$

使得 $E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A=I$

于是 $E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1I=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1AA^{-1}=A^{-1}$

即同样的初等矩阵序列 $E_1,\cdots,E_k$

将非奇异矩阵A转换为I

也将I转换为 A^{-1}

如果将矩阵A和I转换为增广矩阵 $(A|I)$

则 $E_1,\cdots,E_k$ 将其中的A转换为I，I转换为 A^{-1}

即有 $E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1(A|I)=(I|A^{-1})$

也可以描述为 $A^{-1}(A|I)=(I|A^{-1})$

即增广矩阵 $(A|I)$ 的行最简形为 $(I|A^{-1})$

对于 非奇异n×n矩阵A，n×r矩阵B

如果增广矩阵 $(A|B)$ 的行最简形为 $(I|C)$，则有 $C=A^{-1}B$

证明过程有，有初等矩阵序列 $E_1,E_2,\cdots,E_k$

使得 $E_k\cdots E_1(A|B)=(I|C)$

即 $E_k\cdots E_1A=I$ 且 $E_k\cdots E_1B=C$

又 $E_k\cdots E_1=A^{-1}$

于是有n×r矩阵 $C=A^{-1}B$

如 $(A|I)$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&3&1&0&0\\-1&-2&0&0&1&0\\2&2&3&0&0&1\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&3&1&0&0\\0&2&3&1&1&0\\0&0&6&1&3&1\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&2&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&6&1&3&1\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\end{array}\right]$$

$=(I|A^{-1})$

于是有 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$

Linear Algebra - P16

对于 $n\times n$ 矩阵 A, B，令 $n\times n$ 矩阵 $C=A-B$
如果存在向量 $\vec{x_0}\neq\vec{0}$ 且 $A\vec{x_0}=B\vec{x_0}$，则矩阵 C 是奇异的
证明过程有，$C\vec{x_0}=(A-B)\vec{x_0}=A\vec{x_0}-B\vec{x_0}=\vec{0}$
即线性方程组 $C\vec{x_0}=\vec{0}$ 有非平凡解 $\vec{x_0}\neq\vec{0}$
于是矩阵 $C=A-B$ 是奇异的

对于 $n\times n$ 矩阵 A, B，令 $n\times n$ 矩阵 $C=AB$
如果矩阵 B 是奇异的，则矩阵 C 必定是奇异的
证明过程有，由于矩阵 B 是奇异的，则线性方程组 $B\vec{x}=\vec{0}$ 有非平凡解 $\vec{x_0}\neq\vec{0}$
再考虑线性方程组 $C\vec{x}=\vec{0}$
则有 $C\vec{x_0}=(AB)\vec{x_0}=A(B\vec{x_0})=A\vec{0}=\vec{0}$
于是 $\vec{x_0}\neq\vec{0}$ 也是线性方程组 $C\vec{x}=\vec{0}$ 的非平凡解
于是矩阵 $C=AB$ 是奇异的

对于 $m\times n$ 矩阵 A, B，B 行等价于 A 当且仅当存在 $m\times m$ 非奇异矩阵 M，使得 $B=MA$
证明过程有，当矩阵 B 行等价于 A 时
存在 $m\times m$ 初等矩阵序列 $E_1, E_2, \cdots, E_k$，使得 $B=E_k\cdots E_1A$
再取 $m\times m$ 矩阵 $M=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1$
又 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 均为非奇异矩阵，则 M 也是非奇异矩阵
且有 $B=MA$
当存在 $m\times m$ 非奇异矩阵 M，使得 $B=MA$ 时
有非奇异矩阵 M 行等价于单位矩阵 I
即存在 $m\times m$ 初等矩阵序列 $E_1, \cdots, E_k$，使得 $M=E_kE_{k-1}\cdots E_1I$
则 $B=MA=(E_k\cdots E_1I)A=E_k\cdots E_1A$
于是矩阵 B 行等价于 A

对于 $m\times n$ 矩阵 A, B，如果 B 行等价于 A，且 $m\times n$ 矩阵 U 是 A 的任意行阶梯形，则有 B 行等价于 U
证明过程有，由于 B 行等价于 A，$m\times n$ 矩阵 U 是 A 的行阶梯形
则矩阵 A 行等价于 A 的任意行阶梯形 U
于是有矩阵 B 行等价于矩阵 U

对于任意非奇异的 $n\times n$ 矩阵 A, B，A 行等价于 B
证明过程有，由于矩阵 A, B 是非奇异的，则有矩阵 A 行等价于 I，I 行等价于 B，I 为单位矩阵
于是有矩阵 A 行等价于 B

Linear Algebra - P17

三角形矩阵　对于 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，

如果对任意 $i>j$，有 $a_{ij}=0$

则称为上三角形的(upper triangular)

如果对任意 $i<j$，有 $a_{ij}=0$

则称为下三角形的(lower triangular)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & 0 & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

如果矩阵A为上三角形或下三角形，则统称为三角形的(triangular)

对角矩阵(diagonal)，对于 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$

即矩阵A的非对角线元素均为0

三角形分解　对于 $n\times n$ 矩阵A，仅使用类型Ⅲ的初等行运算，即将某行的倍数加到另一行

如果矩阵A可以转换为对角元素非零的上三角形矩阵

则化简过程可以用矩阵分解的形式表示

即如果存在对角元素非零的 $n\times n$ 上三角形矩阵 U

类型Ⅲ的初等矩阵序列 $E_1, E_2, \cdots, E_k$

使得 $E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A=U$

由于初等矩阵均为非奇异的，则在等式两侧分别乘以 $E_1^{-1}, \cdots, E_k^{-1}$

则有 $A=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}U$

再令 $n\times n$ 矩阵 $L=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}I$，则有 $A=LU$

又初等矩阵的逆也是相同类型的初等矩阵

且对于任意 $i<j$，只进行至多一次将第i行的倍数加到第j行

而对于任意 $i>j$ 不进行操作，

于是矩阵L将表现为对角线元素全部为1的下三角形矩阵

称为单位下三角形矩阵(unit lower triangluar)

于是矩阵A可以分解一个单位下三角形矩阵与一个对角元素非零的上三角形矩阵的乘积，

称为LU分解(LU factorization)

如 $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

于是有 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U}$

Linear Algebra - P18

对于对角线元素非零的 $n\times n$ 上三角形矩阵 U

有矩阵 U 为非奇异的，且 U^{-1} 必定为上三角矩阵

证明过程有，由于矩阵 U 的对角线元素均非零

且矩阵 U 是上三角形矩阵，即对于 $i>j$，$u_{ij}=0$

则对于 $k=n, n-1, \cdots, 1$，

可以将第 k 行的倍数加到第 j 行，其中 $1\le j<k$

使得 $a_{jk}=0$，

由于第 k 行的前 $k-1$ 个元素均为 0，

所以类型Ⅲ的初等行操作对于第 j 行的前 $k-1$ 个元素没有影响

而由于第 k 行的第 $k+1, \cdots, n$ 个元素在之前的步骤已经置为 0

则该初等行操作对于第 j 行的第 $k+1, \cdots, n$ 个元素没有影响

于是存在类型Ⅱ的初等矩阵 $E_1, E_2, \cdots, E_n$

使得 $E_1E_2\cdots E_nU$ 为对角线元素为 1 的上三角形矩阵

再有类型Ⅲ的初等矩阵 $E_{12}, E_{13}, E_{23}, \cdots, E_{1n}, \cdots, E_{n-1n}$

使得 $E_{12}E_{13}E_{23}\cdots E_{n-1n}E_1\cdots E_nU=I$

于是矩阵 U 行等价于 I，即矩阵 U 是非奇异的

又对于初等矩阵 $E_1, \cdots, E_n$ 为对角矩阵，则 $E_1^{-1}, \cdots, E_n^{-1}$ 也是对角矩阵

而初等矩阵 E_{ij} 除对角线元素外仅有 $e_{ij}\ne 0$，则 E_{ij}^{-1} 也仅有 $e'_{ij}\ne 0$

于是 $U^{-1}=(E_{12}\cdots E_{n-1n}E_1\cdots E_n)^{-1}=E_n^{-1}\cdots E_1^{-1}E_{n-1n}^{-1}\cdots E_{12}^{-1}$

则 U^{-1} 也是上三角形矩阵

对于 $n\times n$ 对角矩阵 A, B，有 $AB=BA$

证明过程为：令矩阵 $A=(a_{ij})$，则有当 $i\ne j$ 时，$a_{ij}=0$

矩阵 $B=(b_{ij})$，则有当 $i\ne j$ 时，$b_{ij}=0$

于是 $AB=(c_{ii})=(a_{ii}\cdot b_{ii})$，其中 $i=1,2,\cdots,n$

$BA=(d_{ij})=(b_{ii}\cdot a_{ii})$，其中 $i=1,2,\cdots,n$

则有 $AB=BA$

对于 $n\times n$ 矩阵 A，有 $n\times n$ 矩阵 $B=\alpha_0I+\alpha_1A+\cdots+\alpha_kA^k$，其中 $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$ 为标量

则有 $AB=BA$

证明过程有，$AB=A(\alpha_0I+\alpha_1A+\cdots+\alpha_kA^k)$

$=\alpha_0A+\alpha_1A^2+\cdots+\alpha_kA^{k+1}$

$=(\alpha_0I+\alpha_1A+\cdots+\alpha_kA^k)A=BA$

Linear Algebra - P19

分块矩阵 对于矩阵C，可以通过在行中画横线/在列中画竖线 将其划分为较小的矩阵

如

$$5\times5\text{矩阵 } C = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \\ \hline C_{31} & C_{32} \end{array}\right]$$

其中 C_{11}, C_{31} 为 2×3 矩阵

C_{12}, C_{32} 为 2×2 矩阵

C_{21} 为 1×3 矩阵

C_{22} 为 1×2 矩阵

其中较小的矩阵称为 块 (block)

按列划分：对于 $m\times n$ 矩阵 B，将其划分为 n 个列子矩阵

即有 $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n)$，其中块 $\vec{b}_i$ 为 $m\times1$ 列向量，$i=1,2,\cdots,n$

对于 $r\times m$ 矩阵 A，在计算矩阵乘法 AB 时

有 $AB = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \cdots, A\vec{b}_n)$，其中块 $A\vec{b}_i$ 为 $r\times1$ 列向量，$i=1,\cdots,n$

按行划分：对于 $m\times n$ 矩阵 A，将其划分为 m 个行子矩阵

即有 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)^T$，其中块 $\vec{a}_i^T$ 为 $1\times n$ 行向量，$i=1,2,\cdots,m$

对于 $n\times r$ 矩阵 B，在计算矩阵乘法 AB 时

有 $AB = [\vec{a}_1^T B, \vec{a}_2^T B, \cdots, \vec{a}_m^T B]$，其中块 $\vec{a}_i^T B$ 为 $1\times r$ 行向量，$i=1,2,\cdots,m$

分块矩阵乘法 对于 $m\times n$ 矩阵 A 和 $n\times r$ 矩阵 B，计算矩阵乘法 AB

划分矩阵 $B = [B_1 \mid B_2]$，其中块 B_1 为 $n\times t$ 矩阵，B_2 为 $n\times(r-t)$ 矩阵，其中 $0<t<r$

则有 $AB = A(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_t, \vec{b}_{t+1}, \cdots, \vec{b}_r)$

$= (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \cdots, A\vec{b}_t, A\vec{b}_{t+1}, \cdots, A\vec{b}_r)$

$= [(A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \cdots, A\vec{b}_t) \mid (A\vec{b}_{t+1}, \cdots, A\vec{b}_r)] = [AB_1 \mid AB_2]$

于是更一般地有 $A[B_1 \mid B_2] = [AB_1 \mid AB_2]$，$A[B_1 \mid \cdots \mid B_s] = [AB_1 \mid \cdots \mid AB_s]$

划分矩阵 $A = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right]$，其中块 A_1 为 $k\times n$ 矩阵，A_2 为 $(m-k)\times n$ 矩阵，其中 $0<k<m$

则有

$$AB = \left[\begin{array}{c} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_k^T \\ \hline \vec{a}_{k+1}^T \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T \end{array}\right] B = \left[\begin{array}{c} \vec{a}_1^T B \\ \vdots \\ \vec{a}_k^T B \\ \vec{a}_{k+1}^T B \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T B \\ \vdots \\ \vec{a}_k^T B \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \vec{a}_{k+1}^T B \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T B \end{bmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_1 B \\ \hline A_2 B \end{array}\right]$$

于是更一般地有 $\left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_l \end{array}\right] B = \left[\begin{array}{c} A_1 B \\ \hline \vdots \\ \hline A_l B \end{array}\right]$

Linear Algebra - P20

分块矩阵乘法

对于 $m\times n$ 矩阵 A 与 $n\times r$ 矩阵 B，并进行更一般的矩阵划分

将矩阵 A 划分为 $s\times t$ 个子矩阵，其中子矩阵 A_{ij} 的大小为 $m_i\times n_j$

且有 $1\le m_i\le m$，$1\le n_j\le n$，$\sum_{i=1}^{s} m_i = m$，$\sum_{j=1}^{t} n_j = n$，$i=1,\cdots,s$，$j=1,\cdots,t$

将矩阵 B 划分为 $t\times u$ 个子矩阵，其中子矩阵 B_{jk} 的大小为 $n_j\times r_k$

且有 $1\le n_j\le n$，$1\le r_k\le r$，$j=1,\cdots,t$，$k=1,\cdots,u$，$\sum_{j=1}^{t} n_j = n$，$\sum_{k=1}^{u} r_k = r$

并且对于任意 $j=1,\cdots,t$，矩阵 A 划分中的 n_j 与矩阵 B 划分中的 n_j 相等

即有
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tu} \end{bmatrix}$$

考虑在计算矩阵乘法 AB 的过程中

矩阵 A 的第 i 行子矩阵 $A_{i1},\cdots A_{it}$ 与矩阵 B 的第 k 列子矩阵 $B_{1k},\cdots,B_{tk}$ 相乘

即 $[A_{i1} \mid \cdots \mid A_{it}] \times [B_{1k} \mid \cdots \mid B_{tk}]^T = C$，其中 $m_i\times r_k$ 矩阵 C

对于矩阵 C 中的元素 $c_{xy} = \sum_{l=1}^{n} a_{xl} b_{ly}$

记 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$

于是 $c_{xy} = \sum_{l=1}^{n_1} a_{xl} b_{ly} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2} a_{xl} b_{ly} + \cdots + \sum_{l=n_{t-1}+1}^{n} a_{xl} b_{ly}$

于是 $m_i\times r_k$ 矩阵 $C = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \cdots + A_{it}B_{tk}$

即有
$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{su} \end{bmatrix},\quad 其中\ C_{ik} = \sum_{j=1}^{t} A_{ij}B_{jk}$$

对于 $n\times n$ 矩阵 A 形如 $\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$，其中 O 为全零矩阵

A_{11} 为 $k\times k$ 矩阵，A_{22} 为 $(n-k)\times(n-k)$ 矩阵，$1\le k<n$

则有 矩阵 A 是非奇异的当且仅当矩阵 A_{11}，A_{22} 为非奇异的

证明过程有，当 A_{11}，A_{22} 为非奇异矩阵时，

有 $\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & O \\ O & I_{22} \end{bmatrix} = I$，$\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & O \\ O & I_{22} \end{bmatrix} = I$

于是 矩阵 A 是非奇异的

当矩阵 A 是非奇异的，则令矩阵 A 的逆 $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

其中矩阵 B 采用与矩阵 A 相同的划分

则 $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}A_{11} & B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} & B_{22}A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & O \\ O & I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$

于是有 $B_{11}A_{11} = I_{11} = A_{11}B_{11}$，$B_{22}A_{22} = I_{22} = A_{22}B_{22}$

即矩阵 A_{11}，A_{22} 为非奇异矩阵

Linear Algebra - P21

内积 (inner product), 对于n维列向量 $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$

有内积 $\vec{x}^T\vec{y}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\times\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

即向量的标量积 (scalar product)

外积 (outer product), 对于n维列向量 $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$

有外积 $\vec{x}\vec{y}^T=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\times[y_1,y_2\cdots y_n]=\begin{bmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{bmatrix}$

外积展开 (outer product expansion), 对于 $m\times n$ 矩阵X和 $r\times n$ 矩阵Y

对矩阵X进行按列划分, 有 $X=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_n)$

对矩阵Y进行按列划分, 有 $Y=(\vec{y}_1,\vec{y}_2,\cdots,\vec{y}_n)$

其中 $\vec{x}_i$ 为m维列向量, $\vec{y}_i$ 为r维列向量, $i=1,2,\cdots,n$

则有外积 $XY^T=[\vec{x}_1 \mid \vec{x}_2 \mid \cdots \mid \vec{x}_n]\times\begin{bmatrix}\vec{y}_1\\ \hline \vec{y}_2\\ \hline \vdots\\ \hline \vec{y}_n\end{bmatrix}=\vec{x}_1\vec{y}_1^T+\vec{x}_2\vec{y}_2^T+\cdots+\vec{x}_n\vec{y}_n^T$

称 $XY^T=\vec{x}_1\vec{y}_1^T+\vec{x}_2\vec{y}_2^T+\cdots+\vec{x}_n\vec{y}_n^T$ 为外积展开

对于 $n\times n$ 矩阵A和 $n\times n$ 对角矩阵D, $I=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n)$

有矩阵 $D=(d_{11}\vec{e}_1,d_{22}\vec{e}_2,\cdots,d_{nn}\vec{e}_n)$

矩阵 $AD=(d_{11}\vec{a}_1,d_{22}\vec{a}_2,\cdots,d_{nn}\vec{a}_n)$

证明过程有, $\vec{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\vec{e}_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\vec{e}_n=(0,0,\cdots,1)^T$ 为n维欧几里得标准向量

由于矩阵D为对角矩阵, 即除了主对角线元素 $d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn}$ 外均为0

故有 $D=(d_{11}\vec{e}_1,d_{22}\vec{e}_2,\cdots,d_{nn}\vec{e}_n)$

又 $AD=A[d_{11}\vec{e}_1 \mid d_{22}\vec{e}_2 \mid \cdots \mid d_{nn}\vec{e}_n]$

$=[d_{11}A\vec{e}_1 \mid d_{22}A\vec{e}_2 \mid \cdots \mid d_{nn}A\vec{e}_n]$

又 $A\vec{e}_i=\vec{a}_i$, 其中 $\vec{a}_i$ 为矩阵A的第i列, $i=1,2,\cdots,n$

故有 $AD=(d_{11}\vec{a}_1,d_{22}\vec{a}_2,\cdots,d_{nn}\vec{a}_n)$

Linear Algebra - P22

对于 $m\times m$ 矩阵 U 和 $n\times n$ 矩阵 V，其中 $m \geq n$

令 $m\times n$ 矩阵 $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ O \end{bmatrix}$，其中 Σ_1 为 $n\times n$ 对角矩阵，对角元素为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$

O 为 $(m-n)\times n$ 的全零矩阵

如果有矩阵划分 $U = (U_1 ; U_2) = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n ; \vec{u}_{n+1}, \cdots, \vec{u}_m]$

则有 $U\Sigma = U_1\Sigma_1$，且有 $U\Sigma V^T = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^T + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^T + \cdots + \sigma_n\vec{u}_n\vec{v}_n^T$

证明过程有：$U\Sigma = [U_1 \ U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ O \end{bmatrix} = U_1\Sigma_1 + U_2 O = U_1\Sigma_1$

而令 $I = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$

则有 $\Sigma_1 = (\sigma_1\vec{e}_1, \sigma_2\vec{e}_2, \cdots, \sigma_n\vec{e}_n)$

$U_1\Sigma_1 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n) \times (\sigma_1\vec{e}_1, \sigma_2\vec{e}_2, \cdots, \sigma_n\vec{e}_n)$

$= (\sigma_1\vec{u}_1, \sigma_2\vec{u}_2, \cdots, \sigma_n\vec{u}_n)$

令矩阵划分 $V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n]$

则有外积展开

$$U_1\Sigma_1 V^T = [\sigma_1\vec{u}_1 \ \sigma_2\vec{u}_2 \cdots \sigma_n\vec{u}_n] \times \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vdots \\ \vec{v}_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^T + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^T + \cdots + \sigma_n\vec{u}_n\vec{v}_n^T$$

即有 $U\Sigma V^T = U_1\Sigma_1 V^T = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^T + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^T + \cdots + \sigma_n\vec{u}_n\vec{v}_n^T$

对于 $2n\times 2n$ 矩阵 A 有划分 $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right]$，其中 $A_{11}, A_{12}, O, A_{22}$ 均为 $n\times n$ 矩阵

则当矩阵 A_{11}, A_{22} 均为非奇异时，矩阵 A 也是非奇异的

证明过程有：取矩阵 $\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & C \\ \hline D & A_{22}^{-1} \end{array}\right]$，其中 C, D 为 $n\times n$ 矩阵

假设该矩阵即为矩阵 A 的逆

则有 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & C \\ D & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n + A_{12}D & A_{11}C + A_{12}A_{22}^{-1} \\ A_{22}D & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & C \\ D & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & A_{11}^{-1}A_{12} + CA_{22} \\ DA_{11} & DA_{12} + I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} A_{11}C + A_{12}A_{22}^{-1} = A_{22}D = O \\ A_{11}^{-1}A_{12} + CA_{22} = A_{11}D = O \end{cases}$$

于是有 $C = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$，$D = O$，即存在矩阵 A 的逆

且有 $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

Linear Algebra - P23

对于 $n\times n$ 矩阵 A, B，有 $2n\times 2n$ 矩阵 $M=\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}$

则如果A或B为奇异的，则M为奇异的

证明过程有：如果 $M=\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}$ 为非奇异的，则有形如 $\begin{bmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{bmatrix}$ 的逆

即矩阵A, B均为非奇异的

提命题 M为非奇异 $\rightarrow$ (A为非奇异 $\wedge$ B为非奇异) 为真

则有逆否命题 $\neg$(A为非奇异 $\wedge$ B为非奇异) $\rightarrow$ $\neg$(M为非奇异)

即 A为奇异 $\vee$ B为奇异 $\rightarrow$ M为奇异

对于 $n\times n$ 矩阵 A, B，有 $2n\times 2n$ 矩阵 S, M

有 $S=\begin{bmatrix}I&A\\0&I\end{bmatrix}$，$M=\begin{bmatrix}AB&0\\B&0\end{bmatrix}$，

矩阵S为非奇异的且有矩阵S的逆 $S^{-1}=\begin{bmatrix}I&-A\\0&I\end{bmatrix}$

则考虑 $S^{-1}MS=\begin{bmatrix}I&-A\\0&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}AB&0\\B&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&A\\0&I\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&0\\B&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&A\\0&I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\B&AB\end{bmatrix}$

可知 矩阵M与 $S^{-1}MS$ 按反对角线对称

对于 $2n\times 2n$ 矩阵 $A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$，其中 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 均为 $n\times n$ 矩阵

且 A_{11} 为非奇异矩阵

则考虑对矩阵进行分解的可能性

$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\B&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&C\end{bmatrix}$，其中 B, C为 $n\times n$ 矩阵

则有 $\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\BA_{11}&BA_{12}+C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$

即有 $\begin{cases}BA_{11}=A_{21}\\BA_{12}+C=A_{22}\end{cases}$，又 A_{11} 为非奇异矩阵，则有 $\begin{cases}B=A_{21}A_{11}^{-1}\\C=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{cases}$

提矩阵A可进行分解 $\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\A_{21}A_{11}^{-1}&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{bmatrix}$

实际上 $\begin{bmatrix}I&0\\B&I\end{bmatrix}$ 中除了主对角线元素外的非零元素 b_{ij}

均有 $i\in[n+1,2n]$，$j\in[1,n]$

Linear Algebra - P24

对于标量 c，可以看作 1×1 矩阵 $C=[c]$

对于向量 $\vec{b}\in R^n$，可以看作 $n\times 1$ 矩阵 B，

则有矩阵乘法 BC 等价于标量乘法 $c\vec{b}$

证明过程有，令向量 $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

则有

$$BC=\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\times[c]=\begin{bmatrix} cb_1\\ \vdots\\ cb_n\end{bmatrix}=(cb_1,cb_2,\cdots,cb_n)^T=c\vec{b}$$

对于 $n\times n$ 矩阵A进行按列划分 $A=[\vec{a}_1\,|\,\vec{a}_2\,|\cdots|\,\vec{a}_n]$，其中 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n\in R^n$

对于向量 $\vec{x}\in R^n$ 进行按行划分，$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

则有 $A\vec{x}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\cdots+x_n\vec{a}_n$

证明过程有，

$$A\vec{x}=[\vec{a}_1\,|\,\vec{a}_2\,|\cdots|\,\vec{a}_n]\times\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right]\times\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_1a_{11}+x_2a_{12}+\cdots+x_na_{1n}\\ x_1a_{21}+x_2a_{22}+\cdots+x_na_{2n}\\ \vdots\\ x_1a_{n1}+x_2a_{n2}+\cdots+x_na_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1a_{11}\\ x_1a_{21}\\ \vdots\\ x_1a_{n1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2a_{12}\\ x_2a_{22}\\ \vdots\\ x_2a_{n2}\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix} x_na_{1n}\\ x_na_{2n}\\ \vdots\\ x_na_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\cdots+x_n\vec{a}_n$$

对于 $n\times n$ 矩阵A，且对所有 $\vec{x}\in R^n$ 都有 $A\vec{x}=\vec{0}$，则有 $A=O$

证明过程有，令向量 $\vec{x}$ 为欧几里得空间的标准向量 $\vec{e}_j$，$j=1,2,\cdots,n$

则对于给定的 $1\le j\le n$

$A\vec{e}_j=\vec{a}_j^T=\vec{0}$，其中 $\vec{a}_j^T$ 为矩阵A中的第j列

即对于任意 $1\le j\le n$，矩阵A的第j列 $\vec{a}_j^T=\vec{0}$

于是有矩阵 $A=$ 零矩阵 O

对于 $n\times n$ 矩阵 B，C，且对所有 $\vec{x}\in R^n$ 都有 $B\vec{x}=C\vec{x}$，则有 $B=C$

证明过程有，对于任意向量 $\vec{x}\in R^n$，有 $B\vec{x}=C\vec{x}$

则有 $(B-C)\vec{x}=\vec{0}$，即 $B-C=$ 零矩阵 O

于是有矩阵 $B=C$

Linear Algebra - P25

对于 n×n 非奇异矩阵 A，n维列向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x} \in R^n$，标量 β，x_{n+1}，b_{n+1}

考虑方程组 $\left[\begin{array}{c|c} A & \vec{a} \\ \hline \vec{c}^T & \beta \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \vec{x} \\ \hline x_{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \vec{b} \\ \hline b_{n+1} \end{array}\right]$

可以通过在方程两侧乘以矩阵 $\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & \vec{0} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1} & 1 \end{array}\right]$ 得到等价三角形方程组

对于矩阵 $\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & \vec{0} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1} & 1 \end{array}\right]$ 的对角线上的分块子矩阵

可知 n×n 矩阵 A^{-1} 和 1×1 矩阵 [1] 都是非奇异的

于是有矩阵 $\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & \vec{0} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1} & 1 \end{array}\right]$ 也是非奇异的

于是 $\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & \vec{0} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & \vec{a} \\ \hline \vec{c}^T & \beta \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \vec{x} \\ \hline x_{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & \vec{0} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \vec{b} \\ \hline b_{n+1} \end{array}\right]$

是与原方程组是等价的

对于系数矩阵 $\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & \vec{0} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & \vec{a} \\ \hline \vec{c}^T & \beta \end{array}\right]$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A^{-1}A + \vec{0}\vec{c}^T & A^{-1}\vec{a} + \beta \cdot \vec{0} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1} A + \vec{c}^T & -\vec{c}^T A^{-1}\vec{a} + \beta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1}\vec{a} \\ \hline O & -\vec{c}^T A^{-1}\vec{a} + \beta \end{array}\right]$$

其中 I 为 n×n 单位矩阵，O 为 n×n 零矩阵，$-\vec{c}^T A^{-1}\vec{a} + \beta$ 是标量

于是系数矩阵 $\left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1}\vec{a} \\ \hline O & -\vec{c}^T A^{-1}\vec{a} + \beta \end{array}\right]$ 是上三角形矩阵

即新方程组是原方程组的等价三角形方程组

考虑当 $-\vec{c}^T A^{-1}\vec{a} + \beta \neq 0$ 时，系数矩阵为非奇异矩阵。

另外 $\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & \vec{0} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \vec{b} \\ \hline b_{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A^{-1}\vec{b} + b_{n+1}\cdot\vec{0} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1}\vec{b} + b_{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A^{-1}\vec{b} \\ \hline -\vec{c}^T A^{-1}\vec{b} + b_{n+1} \end{array}\right]$

再令 n维列向量 $\vec{y} = A^{-1}\vec{a}$，$\vec{z} = A^{-1}\vec{b}$

则有 $\left[\begin{array}{c|c} I & \vec{y} \\ \hline O & -\vec{c}^T\vec{y} + \beta \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \vec{x} \\ \hline x_{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \vec{z} \\ \hline -\vec{c}^T\vec{z} + b_{n+1} \end{array}\right]$

即 $\left[\begin{array}{c} \vec{x} + x_{n+1}\vec{y} \\ \hline (-\vec{c}^T\vec{y} + \beta)x_{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \vec{z} \\ \hline -\vec{c}^T\vec{z} + b_{n+1} \end{array}\right]$

又 $-\vec{c}^T\vec{y} + \beta = -\vec{c}^T A^{-1}\vec{a} + \beta \neq 0$

于是有 x_{n+1} 解为 $x_{n+1} = (b_{n+1} - \vec{c}^T\vec{z}) / (\beta - \vec{c}^T\vec{y})$

$\vec{x}$ 解为 $\vec{x} = \vec{z} - x_{n+1}\cdot\vec{y}$

Linear Algebra - P26

行列式 (determinant)，对于 $n\times n$ 矩阵 A，均可对应标量 $\det(A)$ 指示矩阵是否为非奇异的

当 $n=1$ 时，对于矩阵 $A=[a]$，

当且仅当 $a\neq 0$ 时，矩阵 A 是非奇异的，即存在乘法逆元

则令 $\det(A)=a$，于是当且仅当 $\det(A)\neq 0$ 时，矩阵 A 是非奇异的

当 $n=2$ 时，对于矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，矩阵 A 是非奇异的当且仅当行等价于 I

当 $a_{11}\neq 0$ 时，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{bmatrix}$

则矩阵 A 是非奇异的当且仅当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

而当 $a_{11}=0$ 时，$A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12}\end{bmatrix}$

则矩阵 A 是非奇异的当且仅当 $a_{21}a_{12}\neq 0$

又 $a_{11}=0$，则 $a_{12}a_{21}\neq 0$ 等价于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

则令 $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，于是当且仅当 $\det(A)\neq 0$ 时，矩阵 A 是非奇异的

当 $n=3$ 时，对于矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，矩阵 A 是非奇异的当且仅当行等价于 I

当 $a_{11}\neq 0$ 时 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}\end{bmatrix}$

则矩阵 A 是非奇异的当且仅当 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})\neq 0$

$a_{11}^2a_{22}a_{33}-a_{11}a_{22}a_{31}a_{13}-a_{11}a_{33}a_{12}a_{21}+a_{12}a_{21}a_{31}a_{13}$

$-a_{11}^2a_{32}a_{23}+a_{11}a_{32}a_{21}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{11}a_{23}-a_{31}a_{12}a_{21}a_{13}\neq 0$

$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{22}a_{31}a_{13}-a_{33}a_{12}a_{21}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{32}a_{21}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}\neq 0$

当 $a_{11}=0$ 且 $a_{21}\neq 0$，$a_{31}\neq 0$ 时 $A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31} \\ 0 & a_{12} & a_{13}\end{bmatrix}$

则矩阵 A 是非奇异的当且仅当 $a_{21}a_{32}a_{13}-a_{22}a_{31}a_{13}+a_{21}a_{33}a_{12}-a_{23}a_{31}a_{12}\neq 0$

当 $a_{11}=a_{21}=0$ 且 $a_{31}\neq 0$ 时，

矩阵 A 是非奇异的当且仅当 $a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{13}a_{22}\neq 0$

当 $a_{11}=a_{21}=a_{31}=0$ 时，矩阵 A 是奇异的

于是令 $\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$

则以上命题均等价于当且仅当 $\det(A)\neq 0$ 时 矩阵 A 是非奇异的

Linear Algebra - P27

行列式

对于 $n\times n$ 矩阵 A，有对应的标量 $\det(A)$ 用于指示矩阵 A 是否为非奇异的

即有

当 $n=3$ 时，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，有 $\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$

于是有 $\det(A)=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$

令 2×2 矩阵 $M_{11}=\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$M_{12}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$，$M_{13}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

则 $\det(A)=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})+a_{13}\det(M_{13})$

于是可以进一步扩展至 $n>3$ 的情形

对于 $n\times n$ 矩阵中的元素 a_{ij}，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,n$，$n\geq 3$

取 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵 M_{ij} 为从矩阵 A 中删除第 i 行与第 j 列的新矩阵

则称矩阵 M_{ij} 的行列式 $\det(M_{ij})$ 为 a_{ij} 的子式 (minor)

又注意到在对 $\det(A)$ 的分解中系数可能为 1 或 -1

于是定义标量 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$

称 A_{ij} 为 a_{ij} 的余子式 (cofactor)

再考虑 $n=2$ 时的情形

有 $\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})$

$=a_{11}\det([a_{22}])-a_{12}\det([a_{21}])$

$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，与原先定义相同

于是得到对于 $n\times n$ 矩阵 A 的行列式 $\det(A)$ 的递归定义

$$\det(A)=\begin{cases} a_{11}, & n=1 \\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, & n>1 \end{cases}$$

其中 $\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$ 为矩阵 A 行列式在第一行的余子式展开

矩阵 A 第一行元素对应的余子式 $A_{ij}=(-1)^{1+j}\det(M_{1j})$，$j=1,2,\cdots,n$

进一步扩展到矩阵 A 的任意行或任意列的余子式展开

对于 $n\times n$ 矩阵 A，其中 $n\geq 2$

有 $\det(A)=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$，即第 i 行的余子式展开

$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$，即第 j 列的余子式展开

其中 $i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,n$

Linear Algebra - P28

行列式

对于 $n\times n$ 矩阵A，有 $\det(A^T)=\det(A)$，其中 $n\in N^+$

证明过程有，基础步骤：当 $n=1$ 时，矩阵 $A=[a_{11}]=A^T$

于是 $\det(A^T)=\det(A)$ 平凡地为真

递归步骤：假设对于任意 $k\in N^+$，有 $P(k)$ 为真，则考虑 $P(k+1)$

对于 $\det(A)$ 按照第一行展开

有 $\det(A)=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})+\cdots+(-1)^{k+2}a_{1,k+1}\det(M_{1,k+1})$

$\overset{IH}{=} a_{11}\det(M_{11}^T)-a_{12}\det(M_{12}^T)+\cdots+(-1)^{k+2}a_{1,k+1}\det(M^T_{1,k+1})$

$= a^T_{11}\det(M^T_{11})-a^T_{21}\det(M^T_{12})+\cdots+(-1)^{k+2}a^T_{k+1,1}\det(M^T_{1,k+1})$

由于 $a^T_{11}\det(M^T_{11})-a^T_{21}\det(M^T_{11})+\cdots+(-1)^{k+2}a^T_{k+1,1}\det(M^T_{1,k+1})$

是 $\det(A^T)$ 按第一列展开

于是有 $\det(A)=\det(A^T)$

则根据数据归纳法，有对于 $n\times n$ 矩阵A，有 $\det(A)=\det(A^T)$，其中 $n\in N^+$

对于 $n\times n$ 矩阵A，如果其中有一行/一列元素全部为0，则 $\det(A)=0$，其中 $n\in N^+$

证明过程为，由于 $\det(A^T)=\det(A)$，所以可以仅考虑一行元素为0的情形

假设 A 中的第i行元素全部为0，其中 $1\le i\le n$

即 $a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0$

再将 $\det(A)$ 按第i行展开

则有 $\det(A)=(-1)^{i+1}a_{i1}\det(M_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}\det(M_{i2})+\cdots+(-1)^{n+i}a_{in}\det(M_{in})$

$=0$

对于 $n\times n$ 矩阵A，如果有两行/两列相等，则 $\det(A)=0$，其中 $n>1$

证明过程为，由于 $\det(A^T)=\det(A)$，所以可以仅考虑两行相等的情形

基础步骤：当 $n=2$ 时，$a_{11}=a_{21}$ 且 $a_{12}=a_{22}$

于是 $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0$

递归步骤：假设对于任意 $k\in N^+$ 且 $k\ge 2$，有 $P(k)$ 为真，则考虑 $P(k+1)$

对于矩阵A选择不同于相等两行的一行，并按此行展开 $\det(A)$

则有 $\det(A)=(-1)^{i+1}a_{i1}\det(M_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}\det(M_{i2})+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}\det(M_{in})$

由于子式 $M_{i1},M_{i2},\cdots,M_{in}$ 中均有两行相等

于是 $\det(A)=(-1)^{i+1}a_{i1}\det(M_{i1})+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}\det(M_{in})$

$\overset{IH}{=}(-1)^{i+1}a_{i1}\cdot 0+(-1)^{i+2}a_{i2}\cdot 0+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}\cdot 0$

$=0$

于是根据数学归纳法，如果 $n\times n$ 矩阵A中有两行/两列相等，则 $\det(A)=0$