Calculus - P140

二重极限 将一元函数的极限扩展至二元函数的情形

考虑二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ $(P(x,y)\to P_0(x_0,y_0))$ 时的极限

其中 $P\to P_0$ 表示动点 P 以任何方式趋于定点 P_0

即 P 与 P_0 的距离趋于 0，$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$

令二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为点集 $D\subset R^2$

$P_0(x_0,y_0)$ 是点集 D 中的聚点，即 $\forall\delta>0\ \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D\neq\emptyset$

如果存在常数 A，对于任意正常数 ε

总存在正数 δ，使得当点 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时

都有 $|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$

则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限

记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $f(x,y)\to A$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$

或 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 或 $f(P)\to A$ 当 $P\to P_0$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)\ |f(x,y)-A|<\varepsilon$

注意根据聚点的定义，P_0 本身并不必然在定义域点集 D 中

另外二重极限存在要求 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都无限趋近于 A

而如果 $P(x,y)$ 是以特殊的方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$，如直线或曲线

即使 $f(x,y)$ 无限趋近于常数，也无法由此断定函数极限的存在

相反如果 $P(x,y)$ 以不同方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋近于不同常数

则可以断定函数极限不存在

如函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \quad 即\ x\neq 0 \vee y\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0 \quad 即\ x=0\wedge y=0\end{cases}$

当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋近于 $(0,0)$ 时，即 $y=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,y=0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋近于 $(0,0)$ 时，即 $x=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,x=0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

可见当 $P(x,y)$ 沿 x 轴或 y 轴趋近于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 都趋近于 0

但是当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋近于 $(0,0)$，其中 $k\in R$ 且 $k\neq 0$

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),\,y=kx} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}$$

$$=\frac{k}{1+k^2}$$

可见对于不同的 k 的取值，$f(x,y)$ 趋近于不同的常数

即 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在

Calculus - P141

二元函数连续性

对于二元函数 $f(P)=f(x,y)$，有定义域 $D\subset R^2$，点 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 是点集D的聚点

如果有 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续

如果对于点集D中的任意点 $P(x,y)$，$P(x,y)$ 都是点集D的聚点

且函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处连续

则称函数 $f(x,y)$ 在点集D上连续，或称 $f(x,y)$ 是点集D上的连续函数

由于一元函数的极限运算仍然适用于多元函数

则多元函数的连续性也类似于一元函数的连续性

即多元连续函数的和/差/积也是连续函数

多元连续函数的商在分母不为0处仍是连续函数

多元连续函数的复合函数也是连续函数

多元初等函数在其定义区域内是连续的，其中定义区域为包含在定义域内的开区域/闭区域

对于二元函数 $f(P)=f(x,y)$，有定义域 $D\subset R^2$，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是点集D的聚点

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，

则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点

与一元函数类似，多元函数的间断点也可以分类为第一类间断点/第二类间断点

有界性与最大值最小值定理

对于多元连续函数 $f(P)$，有定义域 $D\subset R^d$，

如果D为有界闭区域，则 $f(P)$ 在D上必定有界，且能取到最大值和最小值

即如果 $f(P)$ 在有界闭区域D上连续，

则必定存在常数 $M>0$，使得对任意 $P\in D$，有 $|f(P)|\le M$

且存在 $P_1, P_2\in D$，使得 $f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\}$，$f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}$

介值定理

对于有界闭区域D上的多元连续函数 $f(P)$，必定能取得介于最大值与最小值之间的任何值

即对于任意 $\min\{f(P)\mid P\in D\}\le z\le \max\{f(P)\mid P\in D\}$

都存在点 $P_0\in D$，使得 $f(P_0)=z$

一致连续性定理

在有界闭区域D上的多元连续函数 $f(P)$，必定在D上是一致连续的

如果多元函数 $f(P)$ 是有界闭区域D上的连续函数

则对于任意给定正数 ε，总存在正数 δ，使得对于任意 $P_1, P_2\in D$

有 $|P_1P_2|<\delta \longrightarrow |f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$

Calculus - P142

偏导数 (partial derivative)，对于二元函数 $z=f(x,y)$，定义域 $D \subset R^2$

如果 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义

当变量 y 固定在 y_0，而变量 x 在 x_0 处有增量 Δx

则函数有增量 $f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)$

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在

则称此极限为函数 $z=f(x_0,y_0)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对变量 x 的偏导数

记为 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=x_0,y=y_0}$，$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0,y=y_0}$，$z_x\big|_{x=x_0,y=y_0}$，$f_x(x_0,y_0)$

类似地有极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在

则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对变量 y 的偏导数

记为 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x=x_0,y=y_0}$，$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x=x_0,y=y_0}$，$z_y\big|_{x=x_0,y=y_0}$，$f_y(x_0,y_0)$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的任意点 $P(x,y)$ 对 x 的偏导数都存在

则偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数

记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$，$f_x(x,y)$

类似地如果任意点 $P(x,y)$ 对 y 的偏导数都存在

则偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数

记为 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$，$f_y(x,y)$

考虑二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的几何意义

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中定义曲面 $(x,y,f(x,y))$

则点 $P_0(x_0,y_0)$ 扩展为 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

以平面 $y=y_0$ 截曲面可以得到曲线 $z=f(x,y_0)$

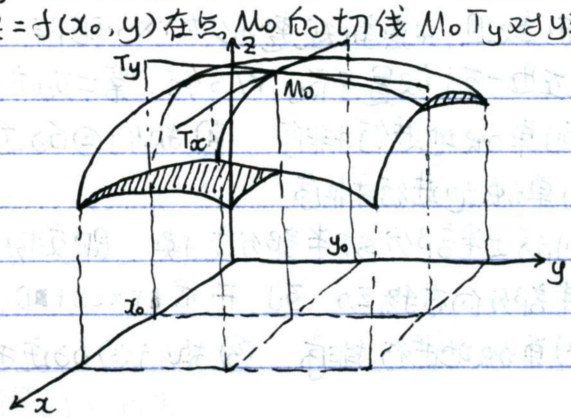
则导数 $\frac{d}{dx}f(x,y_0)\big|_{x=x_0}$ 即偏导数 $f_x(x_0,y_0)$

是曲线 $z=f(x,y_0)$ 在点 M_0 的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率

类似地以平面 $x=x_0$ 截曲面可以得到曲线 $z=f(x_0,y)$

则导数 $\frac{d}{dy}f(x_0,y)\big|_{y=y_0}$ 即偏导数 $f_y(x_0,y_0)$

是曲线 $z=f(x_0,y)$ 在点 M_0 的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率



Calculus - P143

偏导数　相比于一元函数 $y=f(x)$，$\frac{dy}{dx}$ 可以看作函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 的商

但在二元函数 $z=f(x,y)$ 中，偏导数记号是一个整体记号，不可看作分子与分母的商

对于理想气体方程 (ideal gas equation of state)：$pV=nRT$

其中 p 为理想气体的压强 (pressure)

V 为理想气体的体积 (volume)

n 为理想气体的物质的量 (number of mole of gas)

R 为理想气体常数 (ideal gas constant)

T 为理想气体的热力学温度 (absolute temperature)

则有 $p=\frac{nRT}{V}$，$V=\frac{nRT}{p}$，$T=\frac{pV}{nR}$

于是 $\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{nRT}{V^2}$，$\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{nR}{p}$，$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{nR}$

则有 $\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{nRT}{V^2}\cdot\frac{nR}{p}\cdot\frac{V}{nR}$

$=-\frac{nRT}{pV}=-1\neq 1$

相比于一元函数 $y=f(x)$，如果函数在 x_0 处具有导数，则函数在该点处必定连续

但对于多元函数，即使在点 P_0 处各偏导数都存在，也无法保证函数在该点处连续

各偏导数存在，仅能保证点 P 沿着平行于对应坐标轴的方向趋于点 P_0 时

函数 $f(P)$ 的值趋于 $f(P_0)$

而无法保证点 P 按任何方式趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$

如对于函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点 $(0,0)$ 处有对 x 的偏导数和对 y 的偏导数

$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$

但是函数在点 $(0,0)$ 处不连续

高阶偏导数 (higher order partial derivative)，类似于一元函数中的高阶导数

对于二元函数 $z=f(x,y)$，在区域 D 内有对于 x 和对于 y 的偏导数

$z_x=f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}$，$z_y=f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}$

如果 D 内的 x,y 函数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 对 x 和对 y 的偏导数也存在

则有 $f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 也称为混合偏导数

Calculus - P144

混合偏导数　对于二元函数 $z=f(x,y)$，有两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

如果 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 在区域D内连续，则在该区域内两个二阶混合偏导数必定相等

或者说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关

扩展为多元函数的情形，可以类似地定义高阶偏导数

且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导次序无关

拉普拉斯方程(Laplace's equation)，又称调和方程 (harmonic function)/位势方程

对于 twice-differentiable real-valued function $f: R^d \to R$

$\nabla \cdot$ divergence operator ("div")

∇ gradient operator ("grad")

$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ Laplace operator (拉普拉斯算子)

有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2} = 0$，或 $\nabla^2 f = 0$，$\Delta f = 0$

如对于函数 $z = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

有 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$

则有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{(x^2+y^2) - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{(x^2+y^2) - 2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

于是有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$

则函数 $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ 为拉普拉斯方程

对于函数 $u = \frac{1}{r}$，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z}$

有 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{r^3}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$

又根据函数关于自变量的对称性

有 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$

于是有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$

则函数 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为拉普拉斯方程

扩展一元函数中增量与微分的关系到多元函数中

对于二元函数 $f(x,y)$，在点 (x,y) 的某个邻域内有定义

有 $f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \approx f_x(x,y)\Delta x$

$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f_y(x,y)\Delta y$

其中左端称为二元函数对x和对y的偏增量(partial increment)

右端称为二元函数对x和对y的偏微分(partial difference)

Calculus - P145

全微分 (total differential [redacted]), 对于二元函数 $z=f(x,y)$, 在点[redacted]$P(x,y)$的某个邻域内有定义

则有函数在点$P(x,y)$的全增量(total increment)

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

如果全增量可表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

其中A.B不依赖于Δx,Δy而仅与x,y有关

$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $o(\rho)$为当$\rho\to 0$时的无穷小

则称函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微分

而$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处的全微分

记作 $dz = A\Delta x + B\Delta y$

如果函数$z=f(x,y)$在区域D中的任意点均可微分, 则称函数在D内可微分

注意虽然多元函数在某一点的偏导数存在不能保证函数在该点处连续

但是如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微分, [redacted]

即当$\rho\to 0$时, 等价于[redacted]$(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)$

有 $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}) = 0$

则[redacted]$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \lim\limits_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z] = f(x,y)$

即函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处连续

必要条件 如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微分, 则函数在点$P(x,y)$的偏导数必定存在

[redacted]即 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在, 且$z=f(x,y)$在$P(x,y)$的全微分为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

证明过程有, 如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微分, [redacted]

则对于点$P(x,y)$某[redacted]个邻域内的点$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$

[redacted]有 $dz = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

令$\Delta y=0$, 则有$\rho=|\Delta x|$, $f(x+\Delta x,y)-f(x,y) = A\cdot\Delta x + o(|\Delta x|)$

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}) = A$

于是可知偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在, 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = A$

同理可得偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在, 且 $\frac{\partial z}{\partial y} = B$

但是注意 即使[redacted]偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在, 也不保证函数的全微分存在

如 对于函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

在点$(0,0)$处有 $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

则 $\Delta z - [f_x(0,0)\cdot\Delta x + f_y(0,0)\cdot\Delta y] = \frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

当点$P'(\Delta x, \Delta y)$沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时

[redacted]$\lim\limits_{\rho\to 0, y=x}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}/\rho = \Delta x\cdot\Delta x/[(\Delta x)^2+(\Delta x)^2] = \frac{1}{2}\neq 0$. 即函数在点$(0,0)$的全微分不存在

Calculus - P146

全微分充分条件

对于二元函数 $z=f(x,y)$，如果在点 $P(x,y)$ 处偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 连续

即偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x,y)$ 的某个邻域内存在，

于是偏导数在该邻域内有定义，且偏导函数在该点连续

则函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微分

证明过程有，如果二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x,y)$ 的某个邻域内存在

令点 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为该邻域内的任意一点

则函数的全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$

其中 $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$ 可看作 $y+\Delta y$ 为常数

即为 x 的一元函数 $f(x, y+\Delta y)$ 的增量

于是根据拉格朗日中值定理，存在实数 $0<\theta<1$

使得 $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x$

又 $f_x(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续

于是有 $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y-\Delta y) = f_x(x,y)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$

其中 ε_1 为 Δx，Δy 的函数且有 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$

类似地可以将 $f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 转化为 Δy 函数的形式

即有 $f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y$

其中 ε_2 为 Δy 的函数，且有 $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \varepsilon_2 = 0$

于是有 $\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$

$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

注意其中 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 与 Δx，Δy 无关而仅与 x,y 有关

而 $\left|\frac{\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y}{\rho}\right| = \left|\frac{\Delta x}{\rho}\varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\rho}\varepsilon_2\right| \le \left|\frac{\Delta x}{\rho}\varepsilon_1\right| + \left|\frac{\Delta y}{\rho}\varepsilon_2\right| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$

于是 $\lim\limits_{\rho\to 0}\left|\frac{\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y}{\rho}\right| = 0$，即 $\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$ 可看作 $o(\rho)$

则函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的全微分存在

习惯上将自变量的增量 Δx，Δy 分别记作 dx，dy

称为自变量 x，y 的微分

于是函数 $z=f(x,y)$ 的全微分可记为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

即二元函数的全微分等于其两个偏微分之和，称为二元函数微分符合叠加原理

注意全微分的定义、可微分的必要条件和充分条件，叠加原理均可扩展至多元函数的情形

即对于 n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全微分可以写作

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

Calculus - P147

多元函数误差　可以将一元函数中绝对误差和相对误差扩展至多元函数情形

如对于二元函数 $z=f(x,y)$，假设在点 $P(x,y)$ 处自变量 x,y 的绝对误差为 δ_x,δ_y

即有自变量 x,y 的增量 $|\Delta x|\le\delta_x$，$|\Delta y|\le\delta_y$

于是有全增量 $|\Delta z|\approx|dz|=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|$

$\le\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|$

$\le\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y$

则当二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的全微分存在时

z 的绝对误差约为 $\delta_z=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y$

而 z 的相对误差约为 $\delta_z/|z|=\left|\frac{\partial z}{\partial x}/z\right|\delta_x+\left|\frac{\partial z}{\partial y}/z\right|\delta_y$

多元复合函数求导，一元函数的复合函数求导法则可以扩展至多元函数的情形

对于一元函数 $u=\varphi(t)$ 和 $v=\psi(t)$ 在点 t 处可导

而二元函数 $z=f(u,v)$ 在对应的点 $(\varphi(t),\psi(t))$ 具有连续偏导数

则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 处可导

且有 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$

证明过程有，假设自变量 t 在点 t 处有增量 Δt

则此时函数 $u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$ 有对应的增量 $\Delta u,\Delta v$

由于二元函数 $z=f(u,v)$ 在点 $(\varphi(t),\psi(t))$ 处具有连续偏导数

于是二元函数 $z=f(u,v)$ 在点 t 处的全增量 Δz 可表示为

$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\Delta v+\varepsilon_1\Delta u+\varepsilon_2\Delta v$

其中当 $(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)$ 时，有 $\varepsilon_1\to0$，$\varepsilon_2\to0$

于是有 $\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}+\varepsilon_1\frac{\Delta u}{\Delta t}+\varepsilon_2\frac{\Delta v}{\Delta t}$

则当 $\Delta t\to0$ 时，有 $\Delta u\to0$，$\Delta v\to0$

于是 $\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}+\lim\limits_{(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)}\left(\varepsilon_1\frac{\Delta u}{\Delta t}+\varepsilon_2\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$

$=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$

于是可知复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 处可导

且导数为 $\frac{dz}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$

称导数 $\frac{dz}{dt}$ 为复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 的全导数 (total derivative)

可以进一步地扩展到一元函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 在点 t 处可导

而多元函数 $f[\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)]$ 在点 $(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 处具有连续偏导数

则复合函数 $f[\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)]$ 在点 t 处可导

且有全导数 $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial\varphi_2}\cdot\frac{d\varphi_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial\varphi_n}\cdot\frac{d\varphi_n}{dt}$

Calculus - P148

多元复合函数求导

对于函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 都在点 $P(x,y)$ 处具有对 x, y 的偏导数

而函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处具有连续偏导数

则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 $P(x,y)$ 的两个偏导数都存在

且有 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

可以进一步扩展到n元函数序列 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n), \varphi_2(x_1,\cdots,x_n), \cdots, \varphi_m(x_1,\cdots,x_n)$

均在点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处具有对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的偏导数

而m元函数 $z=f(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$ 在对应点 $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$ 处有连续偏导数

则复合函数 $z=f[\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)]$

在点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处的n个偏导数都存在

且有 $\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial \varphi_m}\cdot\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}$

$\cdots$

$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial z}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial \varphi_m}\cdot\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}$

对于函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 处具有对 x,y 的偏导数

函数 $v=\psi(y)$ 在点 y 处具有对 y 的导数

函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处具有连续偏导数

则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在

且有 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}$

对于函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 处具有对 x,y 的偏导数

如果复合函数中的部分变量同时又是复合函数的自变量

即对于函数 $z=f(u,x,y)$ 在对应点 (u,x,y) 处具有连续偏导数

则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数都存在

且有 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial f}$

注意其中出现了两个看似相同的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 表示函数 $f[\varphi(x,y),x,y]$ 中将 y 视为常量的 x 的偏导数

$\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示函数 $f(u,x,y)$ 中将 u, y 视为常量的 x 的偏导数

而 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也有类似的区别

Calculus - P149

偏导数极坐标变换，对于二元函数 $u=f(x,y)$，其所有二阶偏导数连续

则考虑将其偏导数转换为极坐标形式

令极坐标转换为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$

则可以将二元函数 $u=f(x,y)$ 转换为二元函数 $u=F(\rho,\theta)$

$$u=f(x,y)=f[\rho\cos\theta,\rho\sin\theta]=F(\rho,\theta)$$

又有极坐标的逆变换为 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\arctan\frac{y}{x}$

于是有 $\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\rho}$，$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\rho}$

注意当点 $P(x,y)$ 位于第一象限或第四象限时，即 $x>0$ 时

令 θ 的取值范围是 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

则有 $\theta=\arctan\frac{y}{x}$

当点 $P(x,y)$ 位于第二象限或第四象限时，即 $x<0$ 时

令 θ 的取值范围是 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$

则有 $\theta=\arctan\frac{y}{x}+\pi$

在两种情形下有相同形式的对 x 和对 y 的偏导数

有 $\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{\rho^2}$

$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1/x}{1+(y/x)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{\rho^2}$

则利用二元函数 $u=F(\rho,\theta)$ 求对 x 和对 y 的偏导数

有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{x}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\left(\frac{-y}{\rho^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{y}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\frac{x}{\rho^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\rho}$

于是偏导数的平方和

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2&=\left[\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}\right]^2+\left[\frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\rho}\right]^2\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\cos^2\theta-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}+\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\cdot\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\sin^2\theta+\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}+\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\cdot\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\end{aligned}$$

再计算二元函数 $u=F(\rho,\theta)$ 对 x 和对 y 的二阶偏导数

$$\begin{aligned}\text{有 }\frac{\partial^2u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\\&=\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}\right]\cdot\cos\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}\right]\cdot\frac{-\sin\theta}{\rho}\\&=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial\rho}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\\&\quad-\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\\&=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}\cdot\frac{\sin2\theta}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin2\theta}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\end{aligned}$$

类似地有 $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}\cdot\frac{\sin2\theta}{\rho}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin2\theta}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}$

于是有 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{\rho^2}\left[\rho^2\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right]$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[\rho\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right]$$

Calculus - P150

全微分形式不变性，对于二元函数 $z=f(u,v)$，函数具有连续偏导数

则有全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$

如果有二元函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，且均具有连续偏导数

则有全微分 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

于是对于复合函数 $u=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$

有全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$=(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})dx+(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})dy$

$=\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)+\frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)$

$=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$

可知不论 u,v 作为自变量还是中间变量，函数 $u=f(u,v)$ 的全微分形式是一致的

对于 $z=e^u\sin v$，而 $u=xy$，$v=x+y$

则有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1$

$=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot 1$

$=e^{xy}[x\cdot\sin(x+y)+\cos(x+y)]$

而通过全微分不变性有

$dz=d(e^u\sin v)=e^u\sin v\,du+e^u\cos v\,dv$

又有 $du=d(xy)=ydx+xdy$，$dv=d(x+y)=dx+dy$

于是 $dz=e^u\sin v(ydx+xdy)+e^u\cos v(dx+dy)$

$=(e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v)dx+(e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v)dy$

$=[e^{xy}(y\sin(x+y)+\cos(x+y))]dx+[e^{xy}(x\sin(x+y)+\cos(x+y))]dy$

隐函数存在定理，对于函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有连续偏导数

且有 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内恒能唯一地确定连续且有连续导数的 函数 $y=f(x)$

满足条件 $y_0=f(x_0)$，且 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$

对于函数 $F(x,y)$ 以及所确定的函数 $y=f(x)$

于是有恒等式 $F(x,f(x))\equiv 0$

分别对两侧求导仍然保持恒等，即 $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

又 F_y 连续且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，于是存在 (x_0,y_0) 的一个邻域，在此邻域内 $F_y\neq 0$

于是有 $\frac{dy}{dx}=\frac{\partial F/\partial x}{-\partial F/\partial y}=-\frac{F_x}{F_y}$