Probability and Statistics - P22

游程 (run)，假设对于联赛中的某个队伍，在某个赛季中的成绩为n胜m负，

则考虑赢和输的序列，如称一个赢的连续子序列为一个赢的游程

如对于 $\underbrace{WW}_{2}\ \underbrace{LL}_{2}\ \underbrace{WWW}_{3}\ \underbrace{L}_{1}\ \underbrace{W}_{1}\ \underbrace{LLL}_{3}\ \underbrace{WWWW}_{4}$，其中 $n=10$，$m=6$

其中有4个赢的游程，长度分别为 2，3，1，4

假定对于n胜m负的所有 $\binom{n+m}{n}$ 种序列是等可能的，其中 $n,m\in\mathbb{Z}^+$

则考虑出现r个赢的游程的概率。

首先可知 $1\le r\le n$，即至少有1个而至多有n个赢的游程

而由于至少有$r-1$个输的游程，所以 $r-1\le m$，即 $r\le m+1$

考虑 r个游程的长度 $x_1, x_2, \cdots, x_r$

则有所有游程长度至少为1，即 $x_1, x_2, \cdots, x_r \in\mathbb{Z}^+$

且有 $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$

于是对于赢的游程的不同的分布，可以转换为

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ 的不同正整数解的可能数，即有$\binom{n-1}{r-1}$种

考虑可能的$r+1$个输的游程 $y_1, y_2, \cdots, y_{r+1}$

则有 $y_1\ge 0$，$y_{r+1}\ge 0$，$y_2,\cdots,y_r\in\mathbb{Z}^+$，且 $y_1+y_2+\cdots+y_{r+1}=m$

取 $\overline{y_1}=y_1+1$，$\overline{y_{r+1}}=y_{r+1}+1$，于是 $\overline{y_1}+y_2+\cdots+y_r+\overline{y_{r+1}}=m+2$

于是方程 $\overline{y_1}+y_2+\cdots+y_r+\overline{y_{r+1}}=m+2$ 的不同正整数解的可能数有$\binom{m+1}{r}$种

即对于 $\underbrace{L\cdots L}_{y_1}\ \underbrace{W\cdots W}_{x_1}\ \underbrace{L\cdots L}_{y_2}\ \underbrace{W\cdots W}_{x_2}\ \cdots\ \underbrace{W\cdots W}_{x_r}\ \underbrace{L\cdots L}_{y_{r+1}}$

合计有 $\binom{n-1}{r-1}\binom{m+1}{r}$ 种不同的可能序列

于是出现r个赢的游程概率 $P(r)=\binom{n-1}{r-1}\binom{m+1}{r}/\binom{n+m}{n}$

考虑合计r个游程的情形，分别考虑r为奇数和偶数的情形

当 $r=2k+1$，$k\in\mathbb{N}$ 时，分别考虑 $k+1$个赢的游程或输的游程

对于$k+1$个赢的游程，则有 $\binom{n-1}{k}\binom{m-1}{k-1}$ 种可能的序列

注意这里的区别在于所有的可能游程都是长度>0的

对于$k+1$个输的游程则有 $\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k}$ 种可能的序列

于是有 $P(2k+1)=\left[\binom{n-1}{k}\binom{m-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k}\right]/\binom{n+m}{n}$

当 $r=2k$，$k\in\mathbb{Z}^+$ 时，赢或输的游程各有k个，不同的是第一个为赢或输

于是有 $2\times\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-1}$ 种可能序列

于是有 $P(2k)=2\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-1}/\binom{n+m}{n}$

Probability and Statistics - P23

事件序列，对于无限的事件空间中的事件 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$，记为事件序列 $\{E_n \mid n \geq 1\}$

如果有 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$

则称事件序列 $\{E_n \mid n \geq 1\}$ 为递增事件序列

如果有 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq E_{n+1} \supseteq \cdots$

则称事件序列 $\{E_n \mid n \geq 1\}$ 为递减事件序列

对于事件序列 $\{E_i \mid i \geq 1\}$，定义事件 $\lim_{n\to\infty} E_n$

如果 $\{E_i \mid i \geq 1\}$ 为递增事件序列，则 $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

如果 $\{E_i \mid i \geq 1\}$ 为递减事件序列，则 $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$

则有 $P(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

证明过程有，首先考虑 $\{E_i \mid i \geq 1\}$ 为递增事件序列

定义事件 $F_1 = E_1$，$F_n = E_n (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)^c = E_n E_{n-1}^c \ (n > 1)$

即 F_n 为属于事件 E_n 但不属于 $E_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ 的元素组成

于是 F_n 是一系列互不相容的事件

且有 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，$n \geq 1$，且有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

则有
$$
\begin{aligned}
P(\lim_{n\to\infty} E_n) &= P(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(E_n)
\end{aligned}
$$

于是有当 $\{E_i \mid i \geq 1\}$ 为递增事件序列时，$P(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

对于 $\{E_i \mid i \geq 1\}$ 为递减事件序列，则取事件序列 $\{E_i^c \mid i \geq 1\}$

于是可知事件序列 $\{E_i^c \mid i \geq 1\}$ 为递增事件序列

则有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$

又 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c = (\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)^c$

于是有 $P((\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)^c) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$

或者等价地有 $1 - P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{n\to\infty} [1 - P(E_n)] = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

于是有 $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

于是有当 $\{E_i \mid i \geq 1\}$ 为递减事件序列时，$P(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

主观概率(subjective probability)，作为个体确信程度的度量

即概率是人们对自己的观点的确信程度的一种度量

可以假设"确信度的度量"满足所有的概率论公理

于是 $P(A)$ 可以理解为长期相对频率或者确信程度的度量

Probability and Statistics - P24

坛子与球

假设有一个无限大的坛子以及无限个编号为1, 2, ⋯的球，则考虑试验

在差1分钟到12点时，将1-10号球放入坛子，并取出10号球

在差$\frac{1}{2}$分钟到12点时，将11-20号球放入坛子，并取出20号球

在差$\frac{1}{4}$分钟到12点时，将21-30号球放入坛子，并取出30号球

⋯

在差$\frac{1}{2^k}$分钟到12点时，将$10k+1 - 10(k+1)$号球放入坛子，并取出$10(k+1)$号球

则在12点时，坛子中有多少球

显而易见，对于所有放入坛子的球，仅有编号为$10n$的球被取出

于是坛子里有无限多个球 $\{n \in N^+ \mid n \bmod 10 \neq 0\}$

考虑另一种取球的方式

在差1分钟到12点时，将1-10号球放入坛子，并取出1号球

⋯

在差$\frac{1}{2^k}$分钟到12点时，将$10k+1 - 10(k+1)$号球放入坛子，并取出$k+1$号球

则考虑12点时，坛子中的球的数量

对于编号为n的球，将在$(1/2)^{n-1}$分钟到12点时取出

于是对任意$n \in N^+$，都将在12点前被取出

于是坛子在12点时的球数为0

再考虑另一种取球的方式

在差$\frac{1}{2^k}$分钟到12点时，将$10k+1 - 10(k+1)$号球放入坛子，并随机取出编号的球

则在12点时，坛子中的球的数量以概率为1等于0

证明过程有，考虑编号为1的球，

令事件E_n为1号球在第n次取球后仍在坛子中

则 $Pr(E_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{9k}{9k+1}$

于是在12点时1号球仍在坛子中的概率为

$\lim_{n \to \infty} Pr(E_n) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{9k}{9k+1} = 0$

由于 $\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9k+1}{9k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{9k}\right) \geq \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{9k} + \cdots$

$= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

于是在12点时，坛子中至少有一个球的概率为

$Pr(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$，其中事件$F_i$为在12点时编号为$i$的球在坛子中

$\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$

于是在12点时，坛子中的球的数量以概率为1等于0

Probability and Statistics – P25

乘法规则 对于事件 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 有

$$P(E_1E_2\cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\cdots P(E_n|E_1E_2\cdots E_{n-1})$$

证明过程有，由条件概率可知 $P(E_1E_2\cdots E_n) = P(E_n|E_1E_2\cdots E_{n-1})P(E_1E_2\cdots E_{n-1})$

$\cdots P(E_1E_2E_3) = P(E_3|E_1E_2)P(E_1E_2)$，$P(E_1E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1)$

于是有

$$\begin{aligned} P(E_1E_2\cdots E_n) &= P(E_n|E_1E_2\cdots E_{n-1})P(E_1E_2\cdots E_{n-1}) \\ &= P(E_n|E_1\cdots E_{n-1})P(E_{n-1}|E_1\cdots E_{n-2}) \\ &\cdots \\ &= P(E_n|E_1\cdots E_{n-1})\cdots P(E_3|E_1E_2)P(E_2|E_1)P(E_1) \end{aligned}$$

贝叶斯定理(Bayes' theorem)，对于事件 E, F，如果有 $P(E)\neq 0$，$P(F)\neq 0$

则有 $P(F|E) = \dfrac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F)+P(E|F^c)P(F^c)}$，即 $P(F|E) = \dfrac{P(E|F)P(F)}{P(E)}$

证明过程有，事件E可以表示为 $E = EF\cup EF^c$

又F与F^c为互不相容的事件。

则有EF与EF^c为互不相容的事件

$$\begin{aligned} \text{即 } P(E) &= P(EF\cup EF^c) = P(EF)+P(EF^c) \\ &= P(E|F)P(F)+P(E|F^c)P(F^c) \end{aligned}$$

又根据条件概率有 $P(E|F)P(F) = P(EF) = P(F|E)P(E)$

$$\begin{aligned} \text{于是有 } P(F|E) &= \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F)+P(E|F^c)P(F^c)} \end{aligned}$$

特别地有，如果事件F是某个特定的假设H，而E为新的证据

则称 $P(H|E) = P(H)P(E|H)/(P(H)P(E|H)+P(H^c)P(E|H^c))$

为新证据支持下的假设成立可能性

如果事件证据E使得 $P(H|E) > P(H)$

则称新证据支持假设成立

等价地有 $P(H|E) > P(H|E)P(E) + P(H|E^c)P(E^c)$

即 $P(H|E) > P(H|E^c)$

又 $P(H|E) = P(E|H)P(H)/P(E) > P(H)$

于是 $P(E|H) > P(E) = P(E|H)P(H)+P(E|H^c)P(H^c)$

即 $P(E|H) > P(E|H^c)$

另外如果 $P(H|E) = P(H)$，则等价地有 $P(H|E) = P(H|E^c)$，$P(E|H) = P(E|H^c)$

即假设H与证据E是独立的

另外新概率也可以写为 $P(H|E) = \dfrac{P(H)}{P(H)+[1-P(H)]\dfrac{P(E|H^c)}{P(E|H)}}$

Probability and Statistics - P26

优势比 (odds ratio, OR)，对于事件A，如果有概率 $0<P(A)<1$

则有事件A的优势比 $OR(A)=\frac{P(A)}{P(A^c)}=\frac{P(A)}{1-P(A)}$

表示了事件A发生的可能性对于不发生的可能性的倍数

与贝叶斯[redacted]定理的结合，对于假设H与新的证据E，如果有 $0<P(H)<1$

则有 $P(H|E)=\frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$ 且 $P(H^c|E)=\frac{P(E|H^c)P(H^c)}{P(E)}$

于是有 $\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)}=\frac{P(E|H)}{P(E|H^c)}\cdot\frac{P(H)}{P(H^c)}$

即可以描述为，对于已有的假设H的优势比 $OR(H)=\frac{P(H)}{P(H^c)}$

如果获得了新的证据E，

且有分别给定H与H^c的E发生的概率 $P(E|H)$和$P(E|H^c)$

则[redacted]给定证据E的优势比 $OR(H|E)=\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)}$

$OR(H|E)=\frac{P(E|H)}{P(E|H^c)}\cdot OR(H)$

全概率公式 (formula of total probability)，对于样本空间S的互不相容事件 $F_1,F_2,\cdots,F_n$

且有 $\bigcup_{i=1}^n F_i=S$，即 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 中有且仅有一个事件发生

则对于事件E，有 $EF_1\cup EF_2\cup\cdots\cup EF_n=E\cap(F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_n)$

$=E\cap(\bigcup_{i=1}^n F_i)=E\cap S=E$

且由于 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 互不相容，则有 $EF_1,EF_2,\cdots,EF_n$ 互不相容

则有 $P(E)=P(\bigcup_{i=1}^n EF_i)=\sum_{i=1}^n P(EF_i)$

$=\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)$

即可以描述为，事件 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 是一组必定发生且仅发生一个的事件

则对于一个需要计算概率的事件E

可以分别求给定事件 F_i 发生，事件E的条件概率 $P(E|F_i)$

则 $P(E)$ 为 $P(E|F_1),P(E|F_2),\cdots,P(E|F_n)$ 的加权平均值，权重为 $P(F_i)$

即 $P(E)=\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)$，其中 $\sum_{i=1}^n P(F_i)=1$

贝叶斯公式[redacted](Bayes' formula)，结合贝叶斯定理与全概率公式

对于一组互不相容的[redacted]假设 $F_1,F_2,\cdots,F_n$，且有 $\bigcup_{i=1}^n F_i=S$

则如果获得新的证据E，对于假设 F_k

有 $P(F_k|E)=\frac{P(EF_k)}{P(E)}=\frac{P(E|F_k)P(F_k)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)}$

即将一个非真即假的假设H推广至n个互不相容且必有一个发生的假设组合的情形

且对于任意 $1\le i<j\le n$，对于 F_i 和 F_j 的优势比

有 $\frac{P(F_j|E)}{P(F_i|E)}=\frac{P(E|F_j)}{P(E|F_i)}\cdot\frac{P(F_j)}{P(F_i)}$

Probability and Statistics - P27

孩子性别问题，假设已知一对夫妇有两个孩子，某天遇到母亲带着一个孩子散步

如果这个孩子是女孩，则夫妇的两个孩子都是女孩的概率

假设两个孩子可区分为年龄大的(第一个)孩子和年龄小的(第二个)孩子

则令事件 G_1 为第一个孩子是女孩，B_1 为第一个孩子是男孩

G_2 为第二个孩子是女孩，B_2 为第二个孩子是男孩

G 为母亲带着一个女孩散步

则给定母亲带着一个女孩散步，两个孩子都是女孩的概率

可以描述为 $P(G_1G_2 \mid G)$

又 G_1G_2 发生时，G 必定发生，即 $P(G_1G_2G) = P(G_1G_2)$

于是 $P(G_1G_2 \mid G) = \frac{P(G_1G_2G)}{P(G)} = \frac{P(G_1G_2)}{P(G)}$

另外 G_1G_2，G_1B_2，B_1G_2，B_1B_2 为互不相容的事件

且 G_1G_2，G_1B_2，B_1G_2，B_1B_2 有且仅有一个事件发生

于是有 $P(G) = P(G \mid G_1G_2)P(G_1G_2) + P(G \mid G_1B_2)P(G_1B_2)$

$+ P(G \mid B_1G_2)P(B_1G_2) + P(G \mid B_1B_2)P(B_1B_2)$

又 $P(G \mid G_1G_2) = 1$，$P(G \mid B_1B_2) = 0$，

于是 $P(G) = P(G_1G_2) + P(G \mid B_1G_2)P(B_1G_2) + P(G \mid G_1B_2)P(G_1B_2)$

如果假定 B_1/G_1，B_2/G_2 是等可能的，

则有 $P(G_1G_2) = P(G_1B_2) = P(B_1G_2) = P(B_1B_2) = \frac{1}{4}$

于是有 $P(G_1G_2 \mid G) = \frac{P(G_1G_2)}{P(G)} = \frac{P(G_1G_2)}{P(G_1G_2) + P(G \mid B_1G_2)P(B_1G_2) + P(G \mid G_1B_2)P(G_1B_2)}$

$= \frac{1/4}{1/4 + P(G \mid B_1G_2)/4 + P(G \mid G_1B_2)/4}$

$= \frac{1}{1 + P(G \mid B_1G_2) + P(G \mid G_1B_2)}$

考虑母亲在带孩子散步时对性别没有倾向，而带第一个孩子散步的概率为 P

则有 $P(G \mid G_1B_2) = P$，$P(G \mid B_1G_2) = 1 - P$

即有 $P(G_1G_2 \mid G) = \frac{1}{1 + P(G \mid B_1G_2) + P(G \mid G_1B_2)}$

$= \frac{1}{1 + 1 - P + P} = \frac{1}{2}$

也就是说，如果对性别没有倾向，则带孩子的出生次序的倾向不影响

考虑母亲在两个孩子性别不同时，带女孩散步的概率为 q

则有 $P(G \mid G_1B_2) = P(G \mid B_1G_2) = q$

即有 $P(G_1G_2 \mid G) = \frac{1}{1+2q}$

又 $0 \leq q \leq 1$，则有 $\frac{1}{3} \leq P(G_1G_2 \mid G) \leq 1$

注意，当 $q = 1$ 时，$P(G_1G_2 \mid G) = \frac{1}{3}$，与"至少有一个女孩"的客观条件相同

但是与"我的孩子之一是女孩"的主观声明不等价

即如果没有声明倾向的信息 q，问题是不可求解的

即使孩子的性别是等可能的，也需要额外信息

Probability and Statistics - P28

对于事件 E, F, 如果 E 和 F 独立, 则有 E 和 F^c 独立

证明过程有, $E = E \cap (F \cup F^c) = EF \cup EF^c$

于是有 $P(E) = P(EF \cup EF^c) = P(EF) + P(EF^c)$

$= P(E)P(F) + P(EF^c)$

即 $P(EF^c) = P(E) - P(E)P(F) = P(E)(1-P(F))$

$= P(E)P(F^c)$

于是有事件 E 和 F^c 是独立的

重复试验(repeat test), 对于由一系列子试验组成的概率试验

如果任一组子试验的结果不影响其他子试验的结果

则子试验的任意事件序列 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 是独立的

即一系列子试验是独立的, 事件 E_i 由第 i 次子试验的结果决定

对于重复试验中的结果 E 和 F 是两个互不相容的子试验结果,

则 E 在 F 之前发生的概率为 $P(E)/(P(E)+P(F))$

证明过程有, 令事件 A_n 为前 $n-1$ 次试验出现 E, F 之外的结果, 第 n 次试验结果为 E

则事件 A 为 E 在 F 之前发生, 于是有 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

又 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互不相容

于是有 $P(A) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

又 $P(A_n) = (1-P(E)-P(F))^{n-1} P(E)$

则 $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-P(E)-P(F))^{n-1} P(E)$

$= P(E) \sum_{n=0}^{\infty} (1-P(E)-P(F))^n$

$= P(E) \cdot 1/[1-(1-P(E)-P(F))]$

$= P(E)/(P(E)+P(F))$

也可以通过条件概率证明

令事件 G 为在最近一次试验中出现 E, F 之外的结果

则有 $P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|F)P(F) + P(A|G)P(G)$

又如果最近一次试验结果为 E, 则 $P(A|E) = 1$

如果结果为 F, 则 $P(A|F) = 0$

如果结果为 G, 则试验回到初始状态,

即试验的结果具有无记忆性, 于是有 $P(A|G) = P(A)$

于是有 $P(A) = P(E) + P(A)(1-P(E)-P(F))$

即有 $P(A) = P(E)/(P(E)+P(F))$

注意, 实际上在有多个结果的重复试验过程中, 某些结果出现的先后顺序与其他结果无关

Probability and Statistics - P29

点数问题 (problem of the points)，对于两个赌徒，在下注后按照某种规则进行赌博

规定胜者赢得所有赌注，但在未分出胜负时中止，则如何分配赌本

可以形式化地描述为，对于成功率为p的独立重复试验

在m次失败前出现n次成功的概率

帕斯卡：令事件 $P_{n,m}$ 表示在m次失败前出现n次成功

考虑第一次试验的结果的成功与失败，S/F

于是有 $P_{n,m} = P(n-1,m|S)P(S) + P(n,m-1|F)P(F)$

$= p \cdot P_{n-1,m} + (1-p) \cdot P_{n,m-1}$

再通过边界条件 $P_{n,0}=0$，$P_{0,m}=1$ 求出 $P_{n,m}$ 的显式公式

费马：考虑前n+m-1次试验，假设达到n次成功或m次失败后继续进行其余次数

于是如果n次成功出现在m次失败之前，则其中至少有n次成功

如果n+m-1次试验中少于n次成功，则已有至少m次失败

于是假定n+m-1次试验，恰好有k次成功

则其概率 $Pr\{k\} = \binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$

于是对于 $k \in [n, n+m-1]$，则有n次成功出现在m次失败之前

概率为 $P_{n,m} = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$

接发球协议 考虑选手A和B之间发球与接球游戏，A发球时A得分概率为 P_A，B发球时为 P_B

考虑交替发球协议，即发球顺序为A, B, A, B, A, ⋯

再考虑得分发球协议，即由上一球得分的选手发下一球

则考虑一场BO(2n-1)的比赛，选手A应选取哪种协议

首先 假设比赛总是持续到2n-1分，而一方得到n分后其余发球不影响

并且有A赢得比赛的概率只和由谁发球相关

当使用交替发球协议时，由于A首先发球

则必定有n次A发球和n-1次B发球

当使用得分发球协议时，假设一方得分达到n时，由另一方发剩余的球

当A赢得比赛时，由于A先发球

于是有A的第2次发球跟随第1个得分，⋯，第n次发球跟随第n-1个得分

但这是A的最后一次发球，由于下一次A得分后的发球全部由B完成

当B赢得比赛时，由于A先发球

于是有B的第1次发球跟随第1次得分，⋯，第n-1次发球跟随第n-1个得分

但这是B的最后一次发球，由于下一次B得分后的发球全部由A完成

则在得分发球协议下，有n次A发球和n-1次B发球

于是对于A而言两种发球协议赢得比赛概率相同

Probability and Statistics - P30

赌徒破产问题(gambler's ruin problem)，对于进行独立连续赌博的两个赌徒

对于每次赌博，输的一方向赢的一方支付 1 元

持续进行赌博直到其中一方的赌本全部输光

假定赌徒A的起始赌本为 i 元，B的起始赌本为 $N-i$ 元，其中 $0 \leqslant i \leqslant N$

则考虑赌徒A赢得所有赌本的概率　　其中 $0<i<N$

令事件 E_i 表示在开始时A有 i 元，B有 $N-i$ 元，且A最终赢得所有赌本

令条件事件 H 为 A 赢得了开始后的第一次赌博

于是有 $E_i = E_i \cap (H \cup H^c) = (E_i \cap H) \cup (E_i \cap H^c)$

即 $P_i = Pr\{E_i\} = Pr\{E_i \cap H\} + Pr\{E_i \cap H^c\}$

$= Pr\{E_i | H\} Pr\{H\} + Pr\{E_i | H^c\} Pr\{H^c\}$

令A赢得一次赌博的概率为 $Pr\{H\} = p$，B赢的概率为 $Pr\{H^c\} = 1-p = q$

又赌博具有无记忆性，即 $E_{i+1} = E_i | H$，$E_{i-1} = E_i | H^c$

于是有 $P_i = p \cdot P_{i+1} + q \cdot P_{i-1}$

又 $P_i = p \cdot P_i + q \cdot P_i$，则有 $p \cdot P_i + q \cdot P_i = p \cdot P_{i+1} + q \cdot P_{i-1}$

则 $P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1})$，$i = 1, 2, \cdots, N-1$

又有边界条件 $P_0 = 0$，$P_N = 1$

于是有
$$\begin{cases} P_2 - P_1 = \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = q/p\, P_1 \\ P_3 - P_2 = q/p\,(P_2 - P_1) = (q/p)^2 P_1 \\ \vdots \\ P_N - P_{N-1} = q/p\,(P_{N-1} - P_{N-2}) = (q/p)^{N-1} P_1 \end{cases}$$

则有 $P_i - P_1 = (P_i - P_{i-1}) + (P_{i-1} - P_{i-2}) + \cdots + (P_2 - P_1)$

$= P_1[(q/p)^{i-1} + (q/p)^{i-2} + \cdots + (q/p)^1]$，其中 $i = 2, \cdots, N$

即有 $P_i = \sum_{k=0}^{i-1} (q/p)^k \cdot P_1$

根据 p与q 是否相等
即 q/p 分情况讨论
$$P_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)} P_1, & p \neq q \\ i P_1, & p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

又 $P_N = 1$，则有 $P_1 = \frac{1}{N}$ $(p=q)$ 或 $P_1 = \frac{1-(q/p)}{1-(q/p)^N}$ $(p \neq q)$

于是令 Q_i 表示开始时A有 i 元，B有 $N-i$ 元，且B赢得所有赌本的概率

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, & p \neq q \\ \frac{i}{N}, & p = q = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad Q_i = \begin{cases} \frac{1-(p/q)^{N-i}}{1-(p/q)^N}, & p \neq q \\ \frac{N-i}{N}, & p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$，其中 $i = 0, 1, \cdots, N$

当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时，$P_i + Q_i = \frac{i}{N} + \frac{N-i}{N} = 1$

当 $p \neq q$ 时，$P_i + Q_i = \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} + \frac{1-(p/q)^{N-i}}{1-(p/q)^N} = \frac{p^N - p^{N-i}q^i}{p^N - q^N} + \frac{q^N - p^{N-i}q^i}{q^N - p^N}$

$= (p^N - p^{N-i}q^i + p^{N-i}q^i - q^N)/(p^N - q^N) = 1$

于是可知 A 或 B 赢得所有赌本的概率为 1

即 A的赌本在 $[1, N-1]$ 之间永远转移的概率为 0，即赌博永续的概率为 0