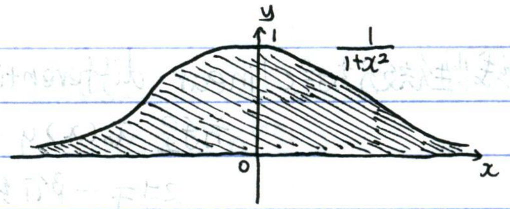
Calculus - P75

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 其中 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$

$= \lim\limits_{t\to+\infty}\arctan t - \lim\limits_{t\to-\infty}\arctan t$

$= \frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}) = \pi$



$\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$，其中常数 $p>0$

有 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p}\cdot t\,d(e^{-pt})$

$= -\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$

$= -\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}$

$= -\frac{1}{p}\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-pt} - \frac{1}{p^2}(0-1)$

$= \frac{1}{p^2}$

$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ (a>0)$，当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散

证明有，当 $p=1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_a^{+\infty} = +\infty$

所以反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 在 $p=1$ 时发散

当 $p\neq 1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \int_a^{+\infty}x^{-p}dx$

$= \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_a^{+\infty}$

当 $p<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-p}x^{1-p} = +\infty$

当 $p>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-p}x^{1-p} = 0$

于是有当 $p\neq 1$ 时 $\int_a^{+\infty}1/x^p\,dx = \begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$

于是可知反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ (a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散

$\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ $(a>0)$

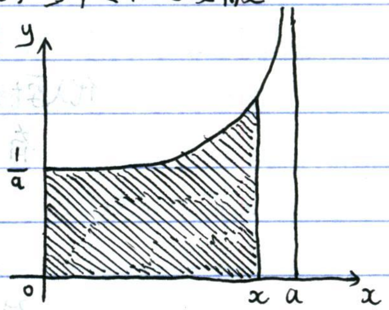
注意到当 $x\to a^-$ 时，$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$

所以点 a 为函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 的瑕点，

于是 $\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a^-}$

$= \lim\limits_{x\to a^-}\arcsin\frac{x}{a} - 0$

$= \frac{\pi}{2}$



$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx$

注意当 $x\to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$

又 $\int_{-1}^0\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0^-} = \lim\limits_{x\to 0^-}-\frac{1}{x} - 1 = +\infty$

于是反常积分 $\int_{-1}^0\frac{1}{x^2}dx$ 发散

又 $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^0\frac{1}{x^2}dx + \int_0^1\frac{1}{x^2}dx$，所以反常积分 $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx$ 发散，

注意比较于 $\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$，虽然也是反常积分，但是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 是奇函数，

而点 $x=0$ 为 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的瑕点，于是有 $\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx = 0$

Calculus - P76

$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$，当 $0<p<1$ 时收敛，当 $p\geq 1$ 时发散

证明过程为，当 $p=1$ 时 $\int_a^b \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a|\Big|_a^b$

$$= \ln(b-a) - \lim_{x\to a^+}\ln(x-a)$$

$$= +\infty$$

则当 $p=1$ 时，反常积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ 发散

当 $p\neq 1$ 时，$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \frac{1}{1-p}(x-a)^{(1-p)}\Big|_a^b$

$$= \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \lim_{x\to a^+}\frac{1}{1-p}(x-a)^{(1-p)}$$

当 $0<p<1$ 时，$1-p>0$

则当 $x\to a^+$ 时，$(x-a)^{(1-p)}\to 0$

即 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$，即反常积分收敛

当 $p>1$ 时，$1-p<0$

则当 $x\to a^+$ 时，$(x-a)^{(1-p)}\to +\infty$

即 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = +\infty$，即反常积分发散

于是可知反常积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$，当 $0<p<1$ 时收敛，当 $P\geq 1$ 时发散

反常积分换元

对于反常积分 $\int_a^b f(x)dx$，$f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，
且 a, b 可以是 $-\infty$，$+\infty$，也可以是 $f(x)$ 的瑕点，
则在换元函数具有反函数的假定下，可以采用和定积分一样的换元

如 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx$，其中积分上限为无穷大，积分下限为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}$ 的瑕点，

令 $t=\sqrt{x}$，则有 $t^2=x$，且 $dx=2t\,dt$

当 $x\to 0^+$ 时，$t\to 0^+$，当 $x\to+\infty$ 时，$t\to+\infty$

于是 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}}\cdot 2t\,dt$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{2}{(t^2+1)^{3/2}}dt$$

再令 $t=\tan u$，则有 $dt=\sec^2 u\,du$，$t^2+1=\tan^2 u+1=\sec^2 u$

当 $t\to 0^+$ 时，$u\to 0^+$，当 $t\to+\infty$ 时，$u\to\frac{\pi}{2}$

于是 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{2}{(t^2+1)^{3/2}}dt = \int_0^{\pi/2}\frac{2}{(\sec^2 u)^{3/2}}\cdot\sec^2 u\,du$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\cos u\,du = 2$$

也可以令 $t=\frac{1}{x+1}$，则有 $\frac{1}{x}=\frac{t}{1-t}$，且 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

当 $x\to 0^+$ 时，$t\to 1^-$，当 $x\to+\infty$ 时，$t\to 0^+$

于是 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx = \int_{1^-}^{0^+}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{3}{2}}\cdot -\frac{1}{t^2}dt = \int_{1^-}^{0^+}\frac{-1}{\sqrt{1-t}}dt$

$$= 2\sqrt{1-t}\Big|_{1^-}^{0^+}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{1-t} - \lim_{t\to 1^-} 2\sqrt{1-t} = 2$$

Calculus - P77

反常积分审敛法 对于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$

则如果积分上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有上界

则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

证明过程为：由于 $f(x)\geq 0$，则 $F(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调增加

又 $F(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有上界

则可知 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 必定存在

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = A$ 存在

即反常积分 $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ 收敛

比较审敛原理 对于函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上均连续

且有 $0\leq f(x)\leq g(x)$，其中 $x\in[a,+\infty)$

则如果反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛

如果反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，则反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也收敛

证明过程为：取函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的积分上限函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad , \quad G(x)=\int_a^x g(t)dt$$

又 $G(x)-F(x)=\int_a^x g(t)dt-\int_a^x f(t)dt$

$=\int_a^x [g(t)-f(t)]dt \geq 0$，

即 $G(x)\geq F(x)$，$x\in[a,+\infty)$

又反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x g(t)dt = A$ 存在

于是 $F(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有上界 A

又 $G(x)$, $F(x)$ 都是单调递增函数

于是极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在

即极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=B$ 存在

即反常积分 $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ 收敛

而当反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时

如果反常积分收敛，则极限 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 存在

又在区间 $[a,+\infty)$ 上，比较积分上限函数

有 $G(x)\geq F(x)$，$x\in[a,+\infty)$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\leq \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=A$，即 $F(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有界

又 $F(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上是单调递增的

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=B$ 存在，与反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散矛盾

于是反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散

Calculus - P78

比较审敛法

对于函数 $f(x)$，在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$

如果存在常数 $M>0$，$P>1$，使得 $f(x)\leq M/x^P$，$x\in[a,+\infty)$

则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

如果存在常数 $N>0$，使得 $f(x)\geq N/x$，$x\in[a,+\infty)$

则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

来源于反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^P}dx=\begin{cases}+\infty, & P\leq 1，此时反常积分发散\\ \frac{a^{1-P}}{P-1}, & P>1，此时反常积分收敛\end{cases}$

极限审敛法

基于比较审敛法，极限审敛法在应用上较为方便

对于函数 $f(x)$，在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且有 $f(x)\geq 0$

如果存在常数 $P>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^P f(x)=c<+\infty$

则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$

则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

证明过程有，假设存在常数 $P>1$，c，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^P f(x)=c$，其中 $c\geq 0$

则存在正常数 $X\geq a$，取 $\varepsilon=1$

有 $\forall_x\,(x>X\to|x^P f(x)-c|<1)$

又 $f(x)\geq 0$，$X>0$，

则有 $c\leq x^P f(x)<1+c$，取 $M=1+c>0$

于是对于 $x\in(X,+\infty)$，有 $f(x)<M/x^P$

根据比较审敛法，有反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$，

则存在正常数 $X\geq a$，取 $\varepsilon=\frac{d}{2}$

有 $\forall_x\,(x>X\to|xf(x)-d|<\frac{d}{2})$

又 $f(x)\geq 0$，$X>0$

则有 $\frac{d}{2}<xf(x)<\frac{3}{2}d$，取 $N=\frac{d}{2}>0$

于是对于 $x\in(X,+\infty)$，有 $f(x)>N/x$

根据比较审敛法，有反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$

则对于任意正常数 $d>0$，存在正常数 $X\geq a$

有 $\forall_x\,(x>X\to|xf(x)|>d)$，又 $f(x)\geq 0$，$X>0$

则有 $xf(x)>d$，

于是对于 $x\in(X,+\infty)$，有 $f(x)>d/x$

根据比较审敛法，有反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

Calculus - P79

绝对收敛

对于函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续,

如果反常积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛

则反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛

称满足条件的反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛

于是有绝对收敛的反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$必定收敛

证明过程有,令$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$

于是有$0\le\varphi(x)\le|f(x)|$

则根据比较审敛法,由于反常积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛

于是有反常积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$收敛

又$f(x)=2\varphi(x)-|f(x)|$

则反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx=2\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx-\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$

于是反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛

比较审敛法2

对于函数$f(x)$在$(a,b]$上连续,且$f(x)\ge0$,点$x=a$为$f(x)$的瑕点

如果存在常数$M>0$,$q<1$,使得$f(x)\le M/(x-a)^q$,$x\in(a,b]$

则反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛

如果存在常数$N>0$,使得$f(x)\ge N/(x-a)$,$x\in(a,b]$

则反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散

注意这里的常数$q<1$与在$\int_a^{+\infty}f(x)dx$中常数$p>1$不同

极限审敛法2

对于函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续,且$f(x)\ge0$,点$x=a$为$f(x)$的瑕点,

如果存在常数$0<q<1$

使得$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=c<+\infty$

则反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛

如果$\lim_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0$

或$\lim_{x\to a^+}(x-a)f(x)=+\infty$

则反常积分$\int_a^b f(x)dx$发散

如 反常积分$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}dx$的收敛性判断

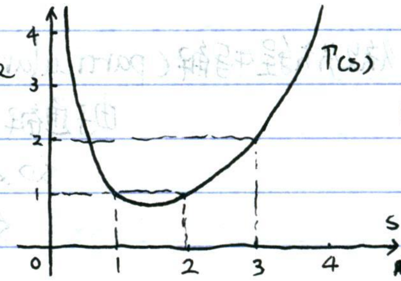
取$|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}|$,则由于当$x\to0^+$时$|\sin\frac{1}{x}|\le1$,$\frac{1}{\sqrt{x}}>0$

于是$|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}|\le\frac{1}{\sqrt{x}}$,即$f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}=1/(x-0)^{1/2}$

于是有$\int_0^1|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}|dx$收敛,即$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}dx$绝对收敛

则有$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}dx$收敛

Calculus - P80



Γ 函数 (Gamma function) 是一个在理论上与应用上都有重要意义的函数

定义为 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$，其中 $s>0$

注意到这是一个反常积分，且其积分上限为无穷大

而当 $s<1$ 时，点 $x=0$ 成为函数 $e^{-x}x^{s-1}$ 的瑕点

收敛性

于是定义两个反常积分 $I_1=\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$，$I_2=\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$.

即有 $\Gamma(s)=I_1+I_2$，其中 $s>0$. 且对于 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)=e^{-x}x^{s-1}>0$

对于 I_1，当 $s\geq 1$ 时，$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ 成为一个定积分

即点 $x=0$ 不再是瑕点，可知此时有确定的积分值

当 $s<1$ 时，$1-s<0$，而 $x\in(0,1]$，则 $e^x>1$

则 $f(x)=e^{-x}x^{s-1}=\frac{1}{e^x}\cdot\frac{1}{x^{1-s}}<\frac{1}{x^{1-s}}$

依据比较审敛法，满足 $f(x)\leq M/(x-a)^p$，常数 $M>0$，$p<1$

于是反常积分 $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ 收敛

对于 I_2，取 $x^2f(x)=e^{-x}x^{s+1}=\frac{x^{s+1}}{e^x}$

则有极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{s+1}}{e^x}=0$

依据极限审敛法，满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=c<+\infty$，常数 $p>1$

于是反常积分 $\int_1^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ 收敛

于是反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ 收敛

即 $\Gamma(s)$ 函数对于 $s>0$ 是良定义的

递推公式

$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ $(s>0)$

证明过程有，$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^s dx=-\int_0^{+\infty}x^s d(e^{-x})$

$=-[e^{-x}x^s|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x}d(x^s)]$

$=-e^{-x}x^s|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}x^s=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^s}{e^x}=0$

则有 $\Gamma(s+1)=s\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx=s\Gamma(s)$

而当 $s=1$ 时，$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}|_0^{+\infty}=1=0!$

则当 s 为正整数时，有 $\Gamma(n+1)=n!$

于是可以将 $\Gamma(s)$ 函数视为阶乘的推广到所有大于 -1 的实数的形式

当 $s\to0^+$ 时，$\Gamma(s)\to+\infty$

证明过程为，首先有 $\Gamma(s)$ 在区间 $s\in(0,+\infty)$ 上连续，且 $\Gamma(1)=1$

又 $\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}$

则 $\Gamma(0^+)=\lim\limits_{s\to0^+}\frac{\Gamma(s+1)}{s}=+\infty$

Calculus - P81

$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

对于 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$，令 $x = u^2$，

则有 $dx = 2u\,du$，当 $x=0$ 时，$u=0$，当 $x \to +\infty$ 时，$u \to +\infty$

则 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2(s-1)} \cdot 2u\,du$

令 $t = 2s-1$，即 $s = \frac{t+1}{2}$

于是有 $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{t+1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^t du$，其中 $t > -1$

令 $t=0$，即 $s = \frac{1}{2}$

有 $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

又 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$，即 $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

又 $f(u) = e^{-u^2}$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du = 1$

令 $u = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$，则有 $u^2 = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$

且 $du = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx$，当 $u \to \infty$ 时，$x \to \infty$

于是有 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$.

即有正态分布的累积分布公式

Γ函数的无限乘积形式，(Euler's definition as an infinite product)

对于除负整数以外的所有复数 z，

有 $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} [(1+\frac{1}{n})^z / (1+\frac{z}{n})]$

首先是近似计算复数z的阶乘 $z!$，取足够大的正整数 n，近似计算 $(n+z)!$

然后通过 $(m-1)! = m!/m$，倒退 n 次以计算 $z!$

注意到对于给定整数 $m < +\infty$，有 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)^m}{(n+m)!} = 1$

则将任意整数m替换为任意复数z

于是有 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)^z}{(n+z)!} = 1$

则 $z! = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! \cdot z!}{(n+z)!} \cdot (n+1)^z$

$= \lim_{n\to+\infty} [\frac{1}{z+1} \times \frac{2}{z+2} \times \cdots \times \frac{n}{z+n}] \cdot [\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}]^z$

$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} [(1+\frac{1}{k})^z / (1+\frac{z}{k})]$

$= \prod_{n=1}^{+\infty} [(1+\frac{1}{n})^z / (1+\frac{z}{n})]$

注意这个公式对于除负整数外的所有复数成立

负整数在应用 $m! = m(m-1)!$ 时会经过 $m=0$ 的情形

又 $\Gamma(z) = (z-1)! = z!/z$

于是有 $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} [(1+\frac{1}{n})^z / (1+\frac{z}{n})]$

Calculus - P82

余元公式　又称 欧拉反射公式 (Euler's reflection formula)

对于 $s \notin \mathbb{Z}$，有 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$

证明过程有，对于函数 $f(x) = \cos px$，其中 $x \in (-\pi, \pi)$，p 不是整数

有 Fourier 级数展开

$$\cos px = \frac{\sin p\pi}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{p+k} + \frac{1}{p-k}\right) \cos kx\right]$$
$$= \frac{2p \sin p\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2p^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{p^2-k^2}\right]$$

又 $\cos px$ 在 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 处连续，

于是
$$\cot p\pi = \frac{\cos p\pi}{\sin p\pi} = \frac{2p}{\pi}\left[\frac{1}{2p^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k\pi}{p^2-k^2}\right]$$
$$= \frac{1}{p\pi} + \frac{2p}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^2-k^2}$$

用 x 替换变量 p，则有

$$\cot \pi x - \frac{1}{\pi x} = \frac{2x}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-k^2} = \frac{2x}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k^2-x^2} = \frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2-x^2}$$

如果 $x \in [0, k]$，且 $k<1$

则 等式右侧的第 n 项 $\left|\dfrac{2x}{\pi} \cdot \dfrac{-1}{n^2-x^2}\right| < \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{1}{n^2-k^2}$

于是级数可逐项积分

则
$$\int_0^x \left(\cot \pi t - \frac{1}{\pi t}\right) dt = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi t}{\pi t}\Big|_0^x = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$
$$= \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

$$\int_0^x \frac{2t}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2-t^2} dt = \frac{1}{\pi}\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2t}{n^2-t^2} dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^2-t^2)\Big|_0^x$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2-x^2}{n^2}$$
$$= \frac{1}{\pi} \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

于是有 $\dfrac{1}{\pi} \ln \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} = \dfrac{1}{\pi} \ln \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$

即 $\sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$

由于 $\Gamma(x)$ 函数有无限乘积形式

即
$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \Big/ \left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} (n+1)^x \Big/ \left[x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$

$$\Gamma(1-x) = \frac{1}{1-x} \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-x} \Big/ \left(1+\frac{1-x}{n}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{1-x} \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-x} \Big/ \left(\frac{n+1}{n} - \frac{x}{n}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{1-x} \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-x} \Big/ \left(1-\frac{x}{n+1}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-x} \Big/ \left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)\right]$$

则
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1)^0 \Big/ \left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right]$$
$$= 1 \Big/ \left[x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

则取 $s = \dfrac{1}{2}$，有 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi$

即 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Calculus - P83

$\Gamma(\frac{2k+1}{2}) = \frac{1\times3\times\cdots\times(2k-1)\times\sqrt{\pi}}{2^k}$，其中 $k\in Z^+$

证明过程为，$\Gamma(\frac{2k+1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{2k+1}{2}-1}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{2k-1}{2}}dx$

$$= -\int_0^{+\infty} x^{\frac{2k-1}{2}}\, d(e^{-x})$$

$$= -e^{-x}x^{\frac{2k-1}{2}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\, d(x^{\frac{2k-1}{2}})$$

$$= \frac{2k-1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{2k-3}{2}}dx$$

$$= \frac{2k-1}{2}\Gamma(\frac{2k-1}{2})$$

$$= (\frac{2k-1}{2})(\frac{2k-3}{2})\cdots(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$= 1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2k-1)\cdot\sqrt{\pi}/2^k$$

$2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n = 2^n\Gamma(n+1)$，其中 $n\in Z^+$

证明过程有，$2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n = 2^n\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n) = 2^n\cdot n!$

又 $\Gamma(n+1) = n!$，

于是有 $\prod_{i=1}^{n} 2i = 2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n = 2^n\cdot n! = 2^n\cdot\Gamma(n+1)$

$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1) = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$，其中 $n\in Z^+$

证明过程有，根据上一个证明，对于 $n\in Z^+$

$$2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2) = 2^{n-1}\Gamma(n)$$

又 $\Gamma(2n) = (2n-1)! = 1\times2\times3\times\cdots\times(2n-1)$

$$= [1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)][2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)]$$

$$= [1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)]\cdot2^{n-1}\Gamma(n)$$

于是有 $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1) = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$

勒让德倍量公式（Legendre multiplication formula），对于 $n\in Z^+$

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2})$$

证明过程有：由 $\Gamma(\frac{2n+1}{2}) = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$

有 $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot\sqrt{\pi} = 2^n\cdot\Gamma(n+\frac{1}{2})$

又 $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1) = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$

于是 $\frac{\Gamma(2n)\sqrt{\pi}}{2^{n-1}\Gamma(n)} = 2^n\cdot\Gamma(n+\frac{1}{2})$

即 $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2})$

$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx$，其中 $n>1$

证明过程有，$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x^2}d(x^2) = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}d(e^{-x^2})$

$$= -\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}d(x^{n-1})$$

$$= \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx$$

Calculus - P84

对于$n\in N$, $\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+1)$

证明过程有. $\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}d(x^2)$

$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$

$= \frac{1}{2}\Gamma(n+1)$

元素法

对于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续且$f(x)\geq 0$.

则以曲线$y=f(x)$为曲边, $[a,b]$为底的曲边梯形面积A可表示为定积分

如 $A=\int_a^b f(x)dx$

其过程可描述为

1. 用一组任意分点将区间$[a,b]$划分为长度Δx_i $(i=1,2,\cdots,n)$的n个小区间

则曲边梯形A也划分为n个窄曲边梯形ΔA_i $(i=1,2,\cdots,n)$

于是有 $A=\sum_{i=1}^n \Delta A_i$

即要求所有量等于划分成的所有部分量之和

称为所求量对于区间$[a,b]$具有可加性(additive)

2. 计算部分量ΔA_i的近似值

即 $A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$ $(x_{i-1}\leq \xi_i \leq x_i)$

3. 计算由部分量近似值求和得到的所求量近似值

即 $A\approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

4. 记$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$, 则求$\lambda\to 0$时, A的极限值

即 $A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

注意, 以近似值$f(\xi_i)\Delta x_i$代替部分量ΔA_i时

要求两者仅相差一个Δx_i的高阶无穷小

即 $\Delta A_i = f(\xi_i)\Delta x_i + o(\Delta x_i)$

从而使求和式$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$的极限值即为A的精确值

于是有A可以表示为定积分的值.

即 $A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

注意: 在实用中, 会省略下标i并用ΔA表示任一小区间$[x,x+dx]$上的窄曲边梯形面积

于是有 $A=\sum \Delta A$

再取ξ为区间$[x,x+dx]$的左端点, x.

则以此处函数值$f(\xi)=f(x)$为高, dx为底的矩形面积, 即ΔA的近似值

即 $\Delta A=f(x)dx$, 称为面积元素, 记为 $dA=f(x)dx$

于是有 $A\approx\sum f(x)dx$

进而有 $A=\lim\sum f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

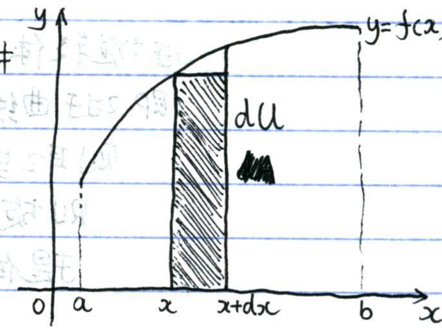
Calculus - P85

元素法的条件

一般应用元素法求实际问题中的U值时，U应符合以下条件

1. U是与变量x的变化区间$[a,b]$有关的因变量
2. U在变量x的区间$[a,b]$上具有可加性
3. 部分量ΔU_i可以用 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似地表示

则可以考虑使用定积分来表达U的值



元素法的步骤

获得所求量U的积分表达式的步骤

1. 取自变量x为积分变量，并确定变量x的积分区间$[a,b]$
2. 将区间$[a,b]$划分成n个小区间$[x, x+dx]$，并得到对应区间的ΔU的近似值
3. 如果ΔU可表示为 $\Delta U = f(x)dx + o(dx)$，其中$f(x)$为区间$[a,b]$上的连续函数，$o(dx)$为$dx$的高阶无穷小，则称 $f(x)dx$ 为U的元素，记作 dU
4. 于是得到所求量的被积表达式

$$U = \int dU = \int_a^b f(x)dx$$

椭圆面积

对于椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，其中$a>0, b>0$

由于方程关于x轴和y轴对称，则取第一相限的面积为A_1

则有总面积 $A = 4A_1 = 4\int_{x\geq 0, y\geq 0} dA$

又当 $x\geq 0, y\geq 0$时，有 $dA = y\,dx$

则 $A = 4\int_0^a y\,dx$

取椭圆的参数方程，由于在第一相限，有 $t\in[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

则 $dx = -a\sin t\,dt$

又当$x=0$时，$t=\frac{\pi}{2}$，当$x=a$时，$t=0$

$$\begin{aligned} \text{于是 } A &= 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t)\,dt \\ &= -4ab\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t\,dt \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt \\ &= 4ab\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

特别地当$a=b$时，椭圆面积πab平凡化为圆面积πa^2