

Cadeias de Markov

Experimento sobre o jogo "Café ou Acarajé"

Caique Alves de Souza, Dimitri Prado, Gabriel Almeida Correa,
Gustavo Oliveira Souza, Rodrigo Lyusei Sugimoto, William Jun Okinaka Suzuki
Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo

Resumo

Este trabalho tem como objetivo aplicar o conceito da Cadeia de Markov sobre o jogo de tabuleiro Café ou Acarajé. Apresentar estratégias para desenvolver um estimador por meio do método de Hill Climbing, de forma a obter o parâmetro oculto que gerou os resultados conforme as regras do jogo. Também realizar uma avaliação do estimador desenvolvido, por meio de um teste de hipótese para analisar o possível erro do estimador adotado. Além de obter dados por meio de simulações por programas e apresentar graficamente o resultado da eficácia do estimador.

Palavras-chaves: Processo Estocástico, Cadeia de Markov, Pesquisa Local, Hill Climbing, Teste de Hipótese, Jogo.

1. Introdução

A Cadeia de Markov é um tipo especial de processo estocástico que se baseia no modelo de Markov, definido em termos de distribuição condicional de estados futuros dado o estado presente. Com isso, é possível obter as probabilidades de estados futuros dado N jogos do Café ou Acarajé, que utiliza um dado D_i com seis possíveis valores, de 1 a 6, em que as probabilidades podem variar para cada valor. Essas probabilidades dos estados futuros dentro do jogo é representado pela matriz de transição, a qual pode ser usado para comparar com os resultados dos jogos.

2. Jogo: Café ou Acarajé

O jogo consiste em um tabuleiro de 6 posições, onde na quarta e sexta posição existe um prêmio a ser recebido pelo jogador, sendo um café para a quarta posição e um acarajé para sexta. O jogador começa um jogo na primeira posição do tabuleiro, rola um dado de 6 lados que pode estar viciado e movimenta seu peão de acordo com o número obtido pelo dado. Esse processo é repetido até que o peão esteja na casa "Café" (quarta posição) ou "Acarajé" (sexta posição), terminando um jogo. O jogo é simples, mas permite um estudo sobre as inferências que podemos obter através da análise das Cadeias de Markov.

Como indicado na regra, o dado utilizado pode ser viciado, ou seja, cada valor de 1 a 6 pode ter uma probabilidade diferente de $\frac{1}{6}$ (um dado ideal com probabilidade uniforme),

que será representado como $D = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$. Para o trabalho desenvolvido, vamos considerar um dado aleatório D_f , utilizado para realizar N jogos diferentes, onde cada jogo segue o processo descrito anteriormente. Assim, o objetivo é inferir, através da quantidade de jogadas de dados e do prêmio recebido para cada jogo X_i , qual é a configuração da probabilidade do dado utilizado D_f .

3. Processos Estocásticos

No campo da probabilidade e estatística, os processos estocásticos apresentam-se como ferramentas para modelar a dinâmica de sistemas sujeitos à incerteza. O movimento das ações do mercado financeiro, o congestionamento e descongestionamento do trânsito, o clima e a imprevisibilidade da trajetória de uma molécula em movimento são alguns dos sistemas que apresentam altos padrões de mudança e aleatoriedade. Em cada um desses cenários, os processos estocásticos fornecem uma estrutura matemática para capturar a essência da aleatoriedade em constante mudança.

Em seu cerne, os processos estocásticos podem ser definidos como uma sequência de variáveis aleatórias indexadas por um dado parâmetro, como o tempo. Formalmente, "um processo estocástico consiste de um conjunto não vazio T que chamamos de espaço paramétrico e na associação para cada $t \in T$ de uma variável aleatória $X_t : \Omega \rightarrow E$, todas elas definidas sobre o mesmo espaço de probabilidade." (Fernandez, 2014).

Entre os processos estocásticos mais conhecidos temos os processos de difusão, que capturam a natureza contínua da mudança e as Cadeias de Markov, onde o estado futuro do sistema depende apenas do estado atual.

A indexação ao espaço paramétrico pode ser efetuada através de dois tipos de parâmetro: os contínuos onde temos $T \in [0, +\infty)$, e os discretos onde $T \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Dentro do trabalho desenvolvido, teremos o parâmetro discreto, já que ele varia conforme a quantidade de jogos realizado e não do tempo.

4. Cadeia de Markov

Dentro dos processos estocásticos, a Cadeia de Markov apresenta-se como um processo estocástico que satisfaz a propriedade de Markov, formado por variáveis aleatórias

discretas. Essa propriedade diz que o estado futuro do processo estocástico observado é influenciado apenas pelo seu estado atual, isto é, independe dos seus estados passados. Posteriormente, por tratar-se de um conjunto de variáveis aleatórias discretas, seu espaço de estados é definido como finito ou enumerável.

De forma teórica, a propriedade de Markov diz que dado n valores de tempos com X_n estados, a probabilidade de chegar em um estado X_{n+1} no próximo passo depende apenas de X_n . Sendo escrito como

$$Pr(X_{n+1} = x_{n+1} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = Pr(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

4.1 Função de Transição

Destacando as principais características que constituem esse modelo, pode-se observar a função de transição. Ela diz que, se uma Cadeia de Markov está em um estado específico em um determinado tempo, a forma que ela chegou até esse estado não tem importância, como dito anteriormente. De forma a parafrasear a equação anterior, a função de transição p para um estado futuro y dado o estado atual x é definida como $p_{x,y} = Pr(C_1 = y | C_0 = x)$, onde $x, y \in S$

Ademais, tem-se a sua distribuição inicial representada por um vetor de probabilidades em que seus valores definem as probabilidades da Cadeia de Markov estar em cada um dos seus estados em um tempo inicial.

4.2 Matriz de Transição

A dimensão do vetor da função de transição é igual ao número de estados que a cadeia possui. Assim, dada uma Cadeia de Markov com k estados, temos a sua distribuição inicial de tamanho $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ em que S representa o espaço dos estados. Assim podemos desenvolver uma matriz de transição, representada por uma matriz quadrada $k \times k$ onde cada posição representa a probabilidade $p_{i,j}$ de transitar de um estado S_i para outro estado S_j arbitrário, com $i, j \leq k$. Assim, ficamos com a matriz:

$$Pr = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

O que essa matriz de transição permite realizar é encontrar a probabilidade de sair de um estado S_i e chegar em um estado S_j após n tempos que decorrer. Para isso, basta tomar a matriz de transição inicial e multiplicá-la por ela n vezes, sendo o mesmo que tomar a potência Pr^n . Portanto, temos a probabilidade $Pr(S_j | S_i) = Pr^n_{S_i, S_j}$

Agora no contexto para o jogo Café ou Acarajé, temos 6 estados possíveis, que são as 6 posições do tabuleiro. E considerando as probabilidades de obter cada valor do dado, p_1 para obter 1, p_2 para obter 2 e assim por diante até o p_6 para obter 6, é possível montar a matriz de transição do jogo.

Um detalhe importante é que a matriz será 7×7 em vez de 6×6 , pois usaremos o sétimo estado como o fim do jogo, ou seja, se a peça chega na quarta ou na sexta casa que é a

do prêmio, vai ter 100% de probabilidade de ir para o sétimo estado. Isso permite que calculemos a probabilidade diretamente após os N jogos, evitando a necessidade de calcular a probabilidade acumulada e subtrair com a probabilidade acumulada depois de $N - 1$ jogos. Posto isso, a matriz de transição que será usada para o desenvolvimento das próximas etapas fica da seguinte forma:

$$Pr = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 + p_6 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 + p_6 & p_3 + p_5 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & p_6 & p_1 + p_5 & p_2 + p_4 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_6 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Estimador

Para inferir um parâmetro de uma função de probabilidade, uma possibilidade é utilizar um estimador pontual. Como o próprio nome indica, ele tenta estimar um valor dada uma função, ou seja, nem sempre e na maioria dos casos não obtemos exatamente o parâmetro original daquela função. Isso faz com que um estimador possa ser enviesado, significando que possui tendências e o valor encontrado destoa do parâmetro original.

Considere uma variável aleatória X com a distribuição $Pr(X|\theta)$ onde θ é um parâmetro desconhecido. Se queremos descobrir o valor de θ , uma possibilidade é utilizar um estimador que gera um $\hat{\theta}$. Nesse caso, chamamos de um estimador não enviesado quando o valor esperado ou a esperança de $\hat{\theta}$ for igual a θ , ou seja, $E(\hat{\theta}) = \theta$. Já um estimador enviesado é quando esses valores não são iguais, e essa diferença $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ é chamado de vício ou vies (bias) do estimador.

5.1 Maximum Log-Likelihood

Um estimador bem conhecido e que vamos também utilizar no trabalho é o Estimador de Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimation - MLE).

Para a mesma situação anterior, quando temos as amostras x_1, x_2, \dots, x_n para n observações independentes e identicamente distribuídas da variável aleatória X , a verossimilhança L é dado por

$$L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = Pr(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) =$$

$$Pr(x_1 | \theta) \cdot Pr(x_2 | \theta) \cdot \dots \cdot Pr(x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n Pr(x_i | \theta)$$

E muitas vezes é utilizado o Log-Likelihood, que aplica a função de log para não utilizar um produtório e "substituir" por uma somatória. O Log-Likelihood ℓ é dado por

$$\ell(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \log L = \sum_{i=1}^n \log Pr(x_i | \theta)$$

Agora o MLE será o θ que maximiza essa função, ou seja

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Omega} \ell(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Para o caso do jogo, o parâmetro que queremos estimar são os valores do dado D_f , e as amostras que temos são as observações dos resultados de cada jogo X_i , indicando a quantidade de jogadas do dado e o prêmio obtido. Temos que a probabilidade para cada resultado do jogo é dado pela matriz de transição na potência da quantidade de jogadas de dado J , na primeira linha (pois sempre começamos da primeira casa) da quarta ou sexta coluna, pois depende do prêmio obtido P . Assim, se temos N jogos, o MLE é

$$D_i = \arg \max_{D \in \Omega} \ell(D|X)$$

$$D_i = \arg \max_{D \in \Omega} \sum_{i=1}^N \log Pr_{1,P}^J$$

6. Hill Climbing

A técnica de Hill Climbing consiste em começar em um ponto qualquer de uma função e tentar encontrar o seu máximo. Isso significa que podemos utilizar para encontrar o valor máximo de uma função de verossimilhança, permitindo aplicar no MLE para inferir os valores do dado utilizado no jogo, que será feito posteriormente.

A execução dessa técnica consiste em calcular o y de todos os vizinhos desse ponto inicial p_0 e escolher o que possui o maior de y . Se o inicial possui o maior, significa que estamos em um máximo. Caso contrário, o vizinho com maior y se torna o próximo ponto inicial e repete o processo. Essa sequência é feita até que encontramos um ponto máximo a partir de um ponto aleatório p_0 .

Como o processo para verificar todo o intervalo dentro de um vizinho será infinito se a função for contínua, o cálculo do próximo vizinho é feito adicionando ou removendo um valor α de p_1 . Numa função de uma variável temos duas possibilidades, variando no eixo x , mas considerando n a quantidade de variáveis da função, então o número de vizinhos possíveis a partir de um p_0 somado ou subtraído a um α em qualquer eixo é 2^n . Na Figura 1, por exemplo, o próximo ponto escolhido seria p_3 , já que está mais próximo de um máximo que p_1 ou p_2 .

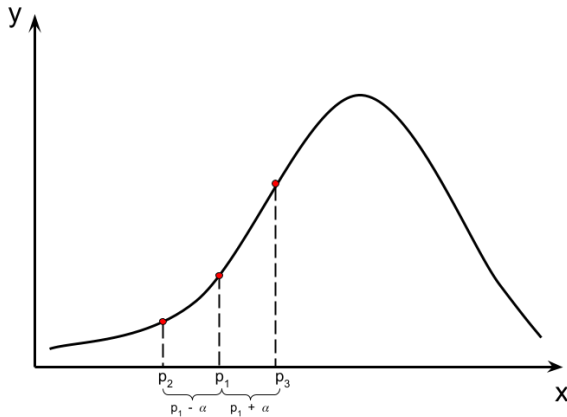


Figure 1: Função arbitrária de uma variável, alterando α no eixo x do ponto p_1

Mas também tem o seu ponto negativo, o que o algoritmo vê é parecido com a Figura 2. Apenas conhece o que está na vizinhança α , nada mais. Dessa forma, parece que em p_3 estamos bem próximos do máximo da função, quando na verdade a função é do tipo da Figura 3.

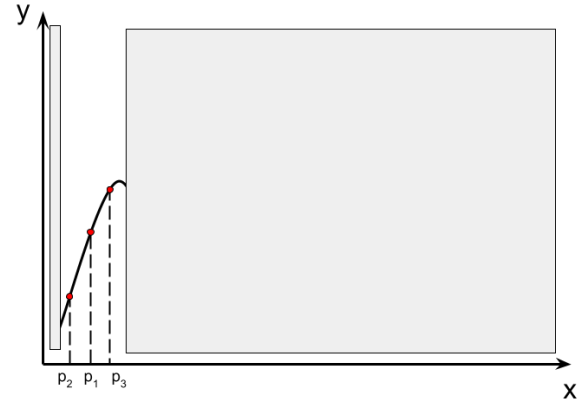


Figure 2: O que enxergamos na tentativa do Hill Climbing

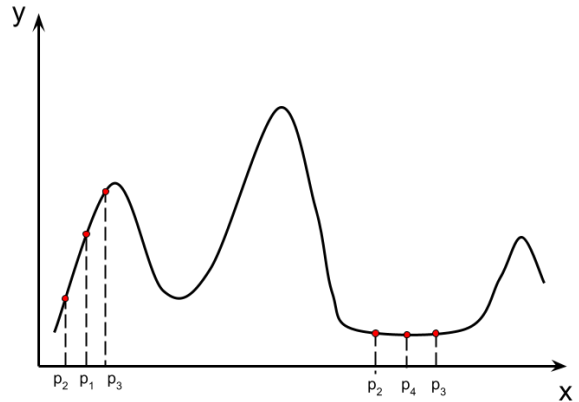


Figure 3: Toda a função, com diferentes máximos locais

Assim que o algoritmo chegar em p_3 , ficará preso num máximo local e não conseguirá chegar ao máximo absoluto da função. Além disso, há um outro problema: se o ponto escolhido for o p_4 , não terá uma direção para seguir, já que todos os vizinhos possuem o mesmo valor. A região em que p_4 está é chamada de planície.

A fim de contornar isso, ao invés de selecionar um único ponto, podemos tomar vários pontos diferentes da função e aplicar a técnica em cada uma delas, encontrando diferentes máximos locais. Assim, basta encontrar o maior entre esses diferentes máximos locais para encontrar o máximo absoluto. Mesmo que ainda haja chance de não ter nenhum máximo absoluto entre as possibilidades encontradas, podemos aumentar a probabilidade de encontrar um máximo absoluto conforme escolhemos cada vez mais pontos aleatórios para verificar.

Por exemplo, para encontrar o dado do parâmetro no jogo, o algoritmo poderia aplicar o Hill Climbing em um dado qualquer e achar um máximo do Log-Likelihood. Mas ele pode ser executado para vários dados aleatórios, com probabilidades para os valores diferentes. Assim, é possível cobrir vários pontos da função.

No caso do jogo Café ou Acarajé, precisamos executar o algoritmo em um contexto de 6 dimensões, o que significa $2^6 = 64$ vizinhos possíveis. É um número muito grande de possibilidades, por isso foi usado uma variação dessa técnica como estimador: Stochastic Hill Climbing. Nele, ao invés de calcular o y de todos os vizinhos, escolhemos um vizinho aleatório e calculamos seu y . Se for maior que o inicial, vamos até ele, mesmo que possa ter tido um outro vizinho melhor. Caso contrário, continuamos com o inicial. O seu funcionamento recebe como parâmetro a quantidade de vezes que será executado e quantos vizinhos serão escolhidos. Com isso, ele consegue ser extremamente eficiente, muito mais rápido que o Hill Climbing normal para a nossa aplicação no trabalho e com resultados satisfatoriamente parecidos.

7. Medições de Diferenças

Dado os valores de probabilidades de um dado D_i que foi estimado, queremos saber o quão distante o valor encontrado está do parâmetro real D_f . Para isso, podemos avaliar por meio de alguns métodos diferentes, como o Erro Quadrático Médio, a Distância Euclidiana, a Diferença de Log-Likelihood e a Divergência de Kullback-Leibler.

7.1 Erro Quadrático Médio

O Erro Quadrático Médio (Mean Square Error - MSE) mede a média de um erro quadrático entre um estimador de um parâmetro $\hat{\theta}$ e o parâmetro original θ . Para uma variável aleatória com N amostras, ele é dado como

$$MSE = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

ou

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2$$

7.2 Distância Euclidiana

A distância euclidiana, ou distância reta, é uma ferramenta utilizada para medir a distância mais curta entre os dois pontos em um plano n -dimensional. A fórmula geral, dado quaisquer dois pontos de um plano n -dimensional, é:

$$\sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}$$

Para um contexto bi-dimensional, a fórmula pode ser reduzida para o famoso Teorema de Pitágoras e a distância euclidiana é dada por:

$$\sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

Como no caso dos dados temos 6 probabilidades para ser comparado, vamos usar a distância Euclidiana para 6 dimensões.

7.3 Diferença de Log-Likelihood

A diferença de Log-Likelihood, a estatística do teste de razão de verossimilhança, é uma ferramenta que permite comparar dois ou mais modelos estatísticos e avaliar qual se ajusta melhor aos dados observados. Ela faz isso através do logaritmo da razão entre as verossimilhanças dos modelos. Essa razão, por sua vez, indica quantas vezes mais provável é um modelo do que o outro em explicar os dados observados. Alguns pontos importantes a serem observados:

- A diferença log-verossimilhança é um valor negativo que indica quantas vezes mais provável é um modelo do que outro em explicar os dados.
- Quanto maior o valor absoluto da diferença log-verossimilhança, mais forte é a evidência a favor do modelo com o valor mais alto.
- Se a diferença log-verossimilhança for negativa, o modelo com o valor mais alto é menos provável que o modelo com o valor mais baixo.

No caso do estimador, vamos comprar entre o estimador do parâmetro $\hat{\theta}$ com o parâmetro real θ . Assim temos

$$D = 2(\log L(\hat{\theta}|X) - \log L(\theta|X))$$

7.4 Divergência de Kullback-Leibler

A divergência de Kullback-Leibler, ou entropia relativa, é uma medida que quantifica a diferença entre duas distribuições probabilísticas. A divergência de Kullback-Leibler apresenta alguns pontos importantes:

- Informação perdida: A D_{KL} de Q dado $Pr(D_{KL}(P||Q))$ mede a informação perdida quando usamos a distribuição Q para aproximar a distribuição P . Quanto maior o valor da D_{KL} , mais informação perdemos.
- A D_{KL} Assimetria: $D_{KL}(P||Q)$ não é igual a $D_{KL}(Q||P)$, ou seja, a diferença entre P e Q não é a mesma que a diferença entre Q e P ;
- Valor zero: Se $D_{KL}(P||Q)$ for igual a zero, significa que P e Q são iguais.

A divergência de Kullback-Leibler pode ser definida como a expectativa da diferença logarítmica entre as probabilidades P e Q nos casos de distribuição discreta:

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_{i=1}^n P(i) \log \frac{P(i)}{Q(i)}$$

Ou como uma integral, nos casos de distribuição contínua:

$$D_{KL}(P||Q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(i) \log \frac{p(i)}{q(i)}$$

8. Teste de Hipótese

A fim de criar o teste de hipótese, foi escolhida a estatística T sendo a Divergência de Kullback-Leibler calculada para n quantidade de dados. E podemos considerar como hipótese nula

$$H_0 : D_i = D_f$$

$$H_1 : D_i \neq D_f$$

Considerando a região de rejeição R sendo $D_{KL}(D_i, D_f) < 0.12$ e que o dado D_i foi estimado usando a técnica Hill Climbing (nos testes a seguir, para cada X_i foram jogados 100 dados visitando 100 vizinhos, considerando 1000 jogadas para o D_f), temos

$$\pi(D_f|\delta) = Pr(D_i \in R|D_f)$$

$$\pi(D_f|\delta) = Pr(D_{KL}(D_i, D_f) > 0.12)$$

Foi feita uma simulação com 100 dados sendo estimados. Para cada um deles, foi calculado o D_{KL} . Depois, valores infinitos, foram excluídos. Assim, formou-se uma distribuição normal com média $\mu = \bar{X}$ e $\sigma' = \frac{\sum X_i - \bar{X}}{n-1}$. Dessa maneira,

$$\pi(D_f|\delta) = 1 - \Phi\left(\frac{0.12 - \mu}{\sigma'/\sqrt{n}}\right)$$

$$\pi(D_f|\delta) = 1 - \Phi\left(\frac{0.12 - 0.1001}{0.1984/\sqrt{98}}\right) = 1 - \Phi(0.9890) = 1 - 0.8389 = 0.1611$$

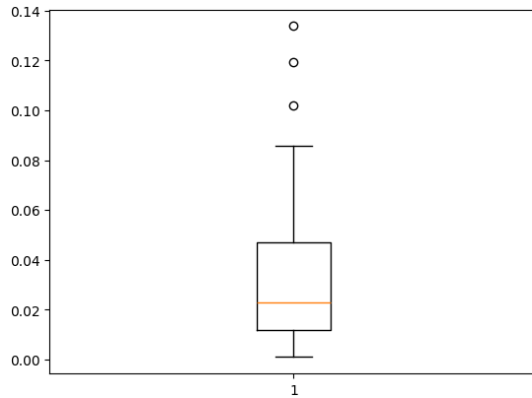


Figure 4: Box plot com o cálculo da divergência de Kullback Leibler para 100 dados. r .

Fazendo o mesmo procedimento para uma amostra de 1000 dados,

$$\pi(D_f|\delta) = 1 - \Phi\left(\frac{0.12 - \mu}{\sigma'/\sqrt{n}}\right)$$

$$\pi(D_f|\delta) = 1 - \Phi\left(\frac{0.12 - 0.0758}{0.1303/\sqrt{973}}\right) = 1 - \Phi(10.5756) \approx 1 - 1 \approx 0$$

Como há um número muito maior de dados, a variância diminui consideravelmente e a média também. Assim, para esse grande valor, nossa região de rejeição pode diminuir a 0.085 e ainda possuir uma grande segurança:

$$\pi(D_f|\delta) = 1 - \Phi\left(\frac{0.085 - 0.0758}{0.1303/\sqrt{973}}\right) = 1 - \Phi(2.198) = 1 - 0.9861 = 0.0139$$

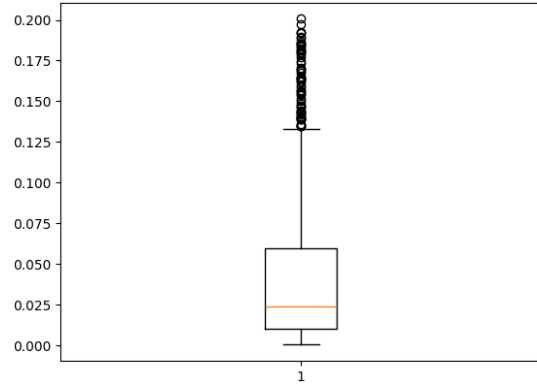


Figure 5: Box plot com o cálculo da divergência de Kullback Leibler para 1000 dados. r .

Assim, dado um nível de significância α , responde-se se a hipótese nula deve ser rejeitada ou não. Para os resultados obtidos no nosso teste de hipótese, podemos aceitar a hipótese nula com o α abaixo de 0.17 no exemplo da simulação com 100 dados para estimar. Já no exemplo com 1000 dados, podemos abaixar mais ainda o α que ainda podemos aceitar a hipótese nula, com o α abaixo de 0.015

9. Resultados

Usando a técnica de Hill Climbing, foi obtido um grande crescimento do log-likelihood de maneira rápida, como visto no gráfico abaixo.

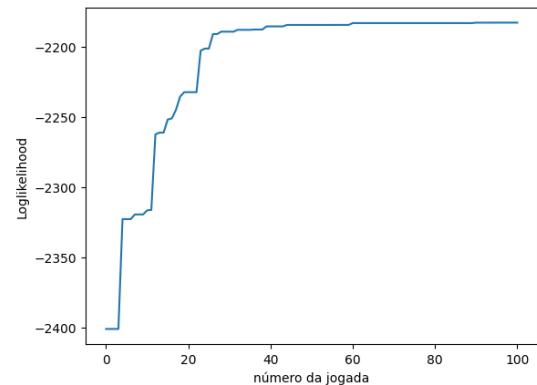


Figure 6: Crescimento do log-likelihood

Além disso, houve grande diminuição na divergência Kullback-Leibler durante cada passo:

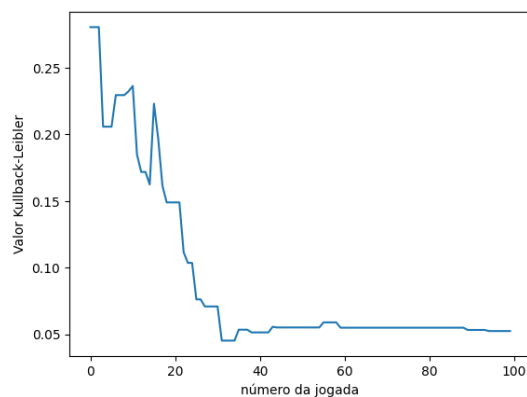


Figure 7: Diminuição da divergência de Kullback-Leibler de acordo com o passo do Hill Climbing.

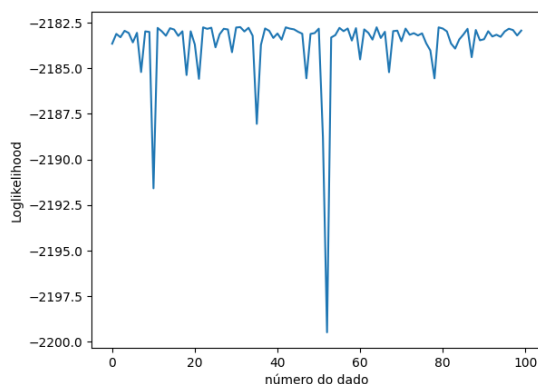


Figure 8: Log-likelihood vs repectivo dado

Visando a técnica de repetir o Hill Climbing, obtém-se o seguinte resultado:

Nele observa-se que, repetindo o experimento, os máximos locais e planíceis são evitados com sucesso.

10. Referências

DEGROOT, Morris H.; SCHERVISH, Mark J. *Probability and Statistics*. 4, ed. Pearson, 2021. cap. 3.10.

MACKAY, David J.C. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. 1, ed. Cambridge University Press, 2003. Disponível em: <https://www.inference.org.uk/itprnn/book.pdf>

FERNANDEZ, Pedro J. *Introdução aos Processos Estocásticos*. IMPA, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/10_CBM.75_03.pdf

NOGUEIRA, Fernando. *Cadeias de Markov*. UFPR, 2021. Disponível em: <http://leg.ufpr.br/lib/exe/fetch.php/projetos:microarray:cadeiamarkov.pdf>

SHALIZI, Cosma. *Maximum Likelihood Estimation for Markov Chains*. Carnegie Mellon University, 2009. Disponível em: <https://www.stat.cmu.edu/~cshalizi/462/lectures/06/markov-mle.pdf>

Stack Exchange. *Calculating Log-Likelihood for Given MLE in Markov Chains*. Stack Exchange, 2015. Disponível em: <https://stats.stackexchange.com/questions/47685/calculating-log-likelihood-for-given-mle-markov-chains>

ZHU, Xiaojin. *Hill Climbing*. Department of Computer Science, University of Wisconsin-Madison, 2016. Disponível em: <https://pages.cs.wisc.edu/~jerryzhu/cs540/handouts/hillclimbing.pdf>

GeeksforGeeks. *Introduction to Hill Climbing in Artificial Intelligence*. GeeksforGeeks, 2023. Disponível em: <https://www.geeksforgeeks.org/introduction-hill-climbing-artificial-intelligence/>

Vershelde, G. *Hill Climbing and Simulated Annealing*. Department of Computer Science, California State University, 2018. Disponível em: https://athena.ecs.csus.edu/~gordonvs/180/WeeklyNotes/12A_hillClimbingSimulatedAnnealing.pdf