



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. N. Kolmogorov, On
the representation of continuous functions of many
variables by superposition of continuous functions of
one variable and addition, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*,
1957, Volume 114, Number 5, 953–956

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 24.60.75.192

July 13, 2024, 15:01:35



Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО И СЛОЖЕНИЯ

Целью заметки является краткое изложение доказательства следующей теоремы:

Теорема. При любом целом $n \geq 2$ существуют такие определенные на единичном отрезке $E^1 = [0; 1]$ непрерывные действительные функции $\psi^{pq}(x)$, что каждая определенная на n -мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{q=2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p) \right], \quad (1)$$

где функции $\chi_q(y)$ действительны и непрерывны.

При $n = 3$, положив

$$\varphi_q(x_1, x_2) = \psi^{1q}(x_1) + \psi^{2q}(x_2), \quad h_q(y, x_3) = \chi_q[y + \psi^{3q}(x_3)],$$

получаем из (1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{q=1}^7 h_q[\varphi_q(x_1, x_2), x_3], \quad (2)$$

что является небольшим усилением результата В. И. Арнольда⁽²⁾, который показал, что любая непрерывная функция трех переменных представима в виде суммы девяти слагаемых того же вида, как слагаемые, входящие в формулу (2) в числе семи. Результаты моей заметки⁽¹⁾ не вытекают из сообщаемой сейчас новой теоремы в их точных формулировках, но принципиальное их содержание (в смысле возможности представления функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных и их приближения суперпозициями фиксированного вида из многочленов от одного переменного и сложения) очевидно образом содержится в новой теореме. Метод доказательства новой теоремы элементарнее методов работ^(1,2), сводясь к прямым конструкциям и подсчетам. Исчезла, в частности, необходимость употребления деревьев из компонент линий уровня. Фактически, однако, конструкции, употребленные в этой заметке, были найдены путем анализа конструкций, употреблявшихся в^(1,2), и отбрасывания в них деталей, излишних для получения конечного результата.

§ 1. Построение функций ψ^{pq} . Индексы p, q, k, i всюду далее пробегают целые значения

$$1 \leq p \leq n, \quad 1 \leq q \leq 2n+1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq i \leq m_k = (9n)^k + 1.$$

При суммировании и перемножении в этих пределах пределы не обозначаются.

Рассмотрим сегменты

$$A_{k,i}^q = \left[\frac{1}{(9n)^k} \left(i - 1 - \frac{q}{3n} \right), \frac{1}{(9n)^k} \left(i - \frac{1}{3n} - \frac{q}{3n} \right) \right].$$

Сегменты $A_{k,i}^q$ имеют длину $\frac{1}{(9n)^k} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)$, а при фиксированных k и q получаются один из другого при переходе от i к $i' = i + 1$ с помощью сдвига вправо на расстояние $\frac{1}{(9n)^k}$, т. е. расположены не только без перекрытий, но с промежутками длины $\frac{1}{3n(9n)^k}$, с точностью же до наличия этих промежутков покрывают весь единичный отрезок E^1 . В соответствии с этим кубики

$$S_{k,i_1 \dots i_n}^q = \prod_p A_{k,i_p}^q$$

с ребрами длины $\frac{1}{(9n)^k}$ при фиксированных k и q покрывают единичный куб E^n с точностью до разделяющих их щелей ширины $\frac{1}{3n(9n)^k}$. Легко проверяется следующая лемма.

Лемма 1. Система всех кубиков $S_{k,i_1 \dots i_n}^q$ с постоянным k и переменными q и i_1, \dots, i_n покрывает единичный куб E^n так, что каждая точка из E^n оказывается покрытой не менее $n + 1$ раз.

При помощи индукции по k может быть доказана следующая лемма.

Лемма 2. Можно подобрать константы $\lambda_{k,i}^{pq}$ и ε_k так, что будут выполнены условия:

$$1) \lambda_{k,i}^{pq} < \lambda_{k,i+1}^{pq} \leq \lambda_{k,i}^{pq} + \frac{1}{2^k};$$

2) $\lambda_{k,i}^{pq} \leq \lambda_{k+1,i'}^{pq} \leq \lambda_{k,i}^{pq} + \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}$, если сегменты $A_{k,i}^q$ и $A_{k+1,i'}^q$ пересекаются;

3) сегменты $\Delta_{k,i_1 \dots i_n}^q = \left[\sum_p \lambda_{k,i_p}^{pq}; \sum_p \lambda_{k,i_p}^{pq} + n\varepsilon_k \right]$ при фиксированных k и q попарно не пересекаются.

Легко заметить, что из 1) и 3) вытекает

$$4) \varepsilon_n \leq \frac{1}{2^k}.$$

На основе указанных ранее свойств сегментов $A_{k,i}^q$ и свойств 1), 2) и 4) констант $\lambda_{k,i}^{pq}$ и ε_k без большого труда доказывается следующая лемма.

Лемма 3. При фиксированных p и q требования

5) $\lambda_{k,i}^{pq} \leq \psi^{pq}(x) \leq \lambda_{k,i}^{pq} + \varepsilon_k$ при $x \in A_{k,i}^q$ однозначно определяют на E^1 непрерывную функцию ψ^{pq} .

Замечание. Легко видеть, что по построению функции ψ^{pq} оказываются монотонно возрастающими. Это их свойство могло бы быть включено в формулировку нашей теоремы.

Из 5) и 3) вытекает

$$6) \sum_p \psi^{pq}(x_p) \in \Delta_{k,i_1 \dots i_n}^q \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in S_{k,i_1 \dots i_n}^q.$$

§ 2. Построение функций χ^q . Установив существование функций ψ^{pq} и констант $\lambda_{k,i}^{pq}$ и ε_k , обладающих свойствами 1)–6), переходим к доказательству основной теоремы. Искомые функции $\chi^q(y)$ будут построены в виде

$$\chi^q = \lim_{r \rightarrow \infty} \chi_r^q,$$

где $\chi_0^r \equiv 0$, а χ_r^q для $r > 0$ будут определены с помощью индукции по r одновременно с натуральными k_r .

Мы будем при этом употреблять обозначения

$$f_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_q \chi_r^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right], \quad (3)$$

$$M_r = \sup_{E^n} |f - f_r|. \quad (4)$$

Очевидно, что

$$f_0 \equiv 0, \quad M_0 = \sup_{E^n} |f|.$$

Допустим, что непрерывные функции χ_{r-1}^q и номер k_{r-1} уже определены. Тем самым определена на E^n и непрерывная функция f_{r-1} . Так как диаметры кубиков $S_{k,i_1 \dots i_n}^q$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, то можно выбрать k_r столь большим, чтобы колебание разности $f - f_{r-1}$ на любом $S_{k_r, i_1 \dots i_n}^q$ не превосходило $\frac{1}{2n+2} M_{r-1}$.

Пусть $\xi_{k,i}^q$ — произвольные точки из соответствующих сегментов $A_{k,i}^q$. На сегменте $\Delta_{k,i_1 \dots i_n}^q$ положим

$$\chi_r^q(y) = \chi_{r-1}^q(y) + \frac{1}{n+1} [f(\xi_{k,i_1}^q, \dots, \xi_{k,i_n}^q) - f_{r-1}(\xi_{k,i_1}^q, \dots, \xi_{k,i_n}^q)]. \quad (5)$$

Очевидно, что фиксированные таким образом значения функции χ_r^q подчинены неравенству

$$|\chi_r^q(y) - \chi_{r-1}^q(y)| \leq \frac{1}{n+1} M_{r-1}. \quad (6)$$

Вне сегментов $\Delta_{k,i_1 \dots i_n}^q$ доопределим функцию χ_r^q произвольно, но с соблюдением этого же неравенства (6) и непрерывности.

Оценим теперь $f - f_r$ в произвольной точке (x_1, \dots, x_n) из E^n . Очевидно, что

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) - f_r(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_n) - f_{r-1}(x_1, \dots, x_n) - \\ &- \sum_q \left\{ \chi_r^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] - \chi_{r-1}^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Сумму \sum_q в (7) представим в виде $\sum' + \sum''$, где сумма \sum' распространена на некоторые $n+1$ значений q , для которых точка (x_1, \dots, x_n) входит в какой-либо из кубиков $S_{k,i_1 \dots i_n}^q$ (такие существуют по лемме 1), а сумма \sum'' распространена на остающиеся n значения q .

Для каждого слагаемого из \sum' получаем в силу (5)

$$\begin{aligned} &\chi_r^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] - \chi_{r-1}^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] = \\ &= \frac{1}{n+1} [f(\xi_{k,i_1}^q, \dots, \xi_{k,i_n}^q) - f_{r-1}(\xi_{k,i_1}^q, \dots, \xi_{k,i_n}^q)] = \\ &= \frac{1}{n+1} [f(x_1, \dots, x_n) - f_{r-1}(x_1, \dots, x_n)] + \frac{\omega^q}{n+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$|\omega^q| \leq \frac{1}{2n+2} M_{r-1}. \quad (9)$$

Слагаемые из \sum'' оцениваются при помощи (6). Из (5) вместе с (8), (9) и (6) получаем

$$\begin{aligned} |f - f_r| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum' \omega^q + \sum'' (\chi_r^q - \chi_{r-1}^q) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2n+2} M_{r-1} + \frac{n}{n+1} M_{r-1} = \frac{2n+1}{2n+2} M_{r-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как неравенство (10) справедливо в любой точке $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, то

$$\begin{aligned} M_r &\leq \frac{2n+1}{2n+2} M_{r-1}, \\ M_r &\leq \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^r M_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (6) и (11) вытекает, что разности $\chi_r^q - \chi_{r-1}^q$ не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов абсолютно сходящегося ряда

$$\sum_r \frac{1}{n+1} M_{r-1}.$$

Поэтому функции χ_r^q при $r \rightarrow \infty$ равномерно сходятся к непрерывным предельным функциям χ^q .

Из соотношений (3) и (4) и оценки (11) предельным переходом при $r \rightarrow \infty$ получаем равенство (1), чем и заканчивается доказательство теоремы.

Поступило
20 VI 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Н. Колмогоров, ДАН, 108, № 2 (1956). ² В. И. Арнольд, ДАН, 114, № 4 (1957).