Технически университет - СОФИЯ, Филиал ПЛОВДИВ

РЕФЕРАТ

ПО

CAD – CAM

ТЕМА: Криви на Безие. B – сплайни. NURBS

Изговвил: 4 курс АТТ 15 група

Проверил:.............................

Всеки геометричен обект може да се представи като съвкупност от определен брой базови геометрични фигури, свързани помежду си чрез определени геомтрични отношения. Всяка базова геометрична фигура може от своя страна да се изобрази с помощта на геометрични елементи, като точка, права или част от права, крива линия, равнина, многоъгълник, криволинейна повърхнина, обемни фигури с произволна форма.

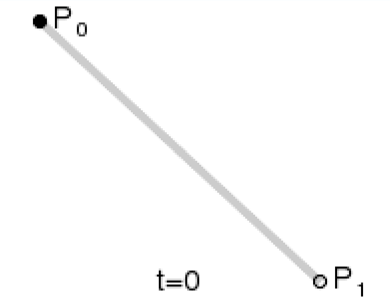
Основният метод, който се използва за приближено описание на кривите и изкривените повърхнини е *апроксимация*. При автоматизираното проектиране се използват различни математически методи за апроксимация на криви и повърхнини: метод на Bezie, метод а Coons, метод на апроксимация с кубични и B – сплайн функции, метод на апроксимация с нееднообразни рационални B – сплайн функции, наричани NURBS (Non-uniform rational B-spline).

В математическата област на цифривия анализ кривата на Безие е параметрична крива, важна за компютърната гафика и свързаните с нея области.

Линейни криви на Безие

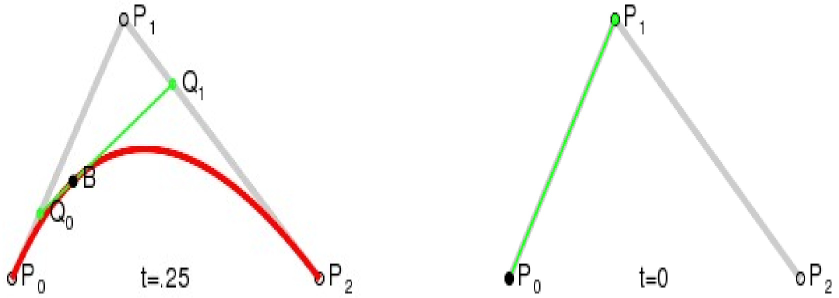
Като се има предвид точки P_0 и P_1, линейната крива на Безие е просто права линия между тези дже точки.

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \ , \ t \in [0,1]$$

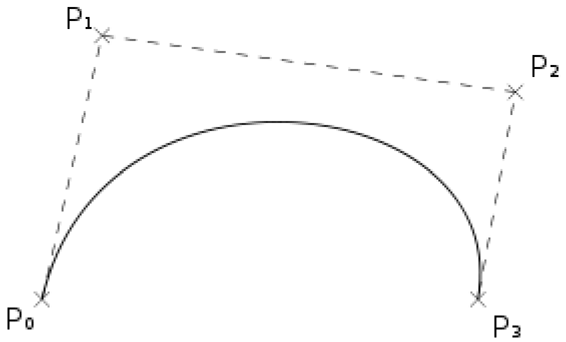


Квадратична крива на Безие

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2(1-t)t\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2 \ , \ t \in [0,1].$$



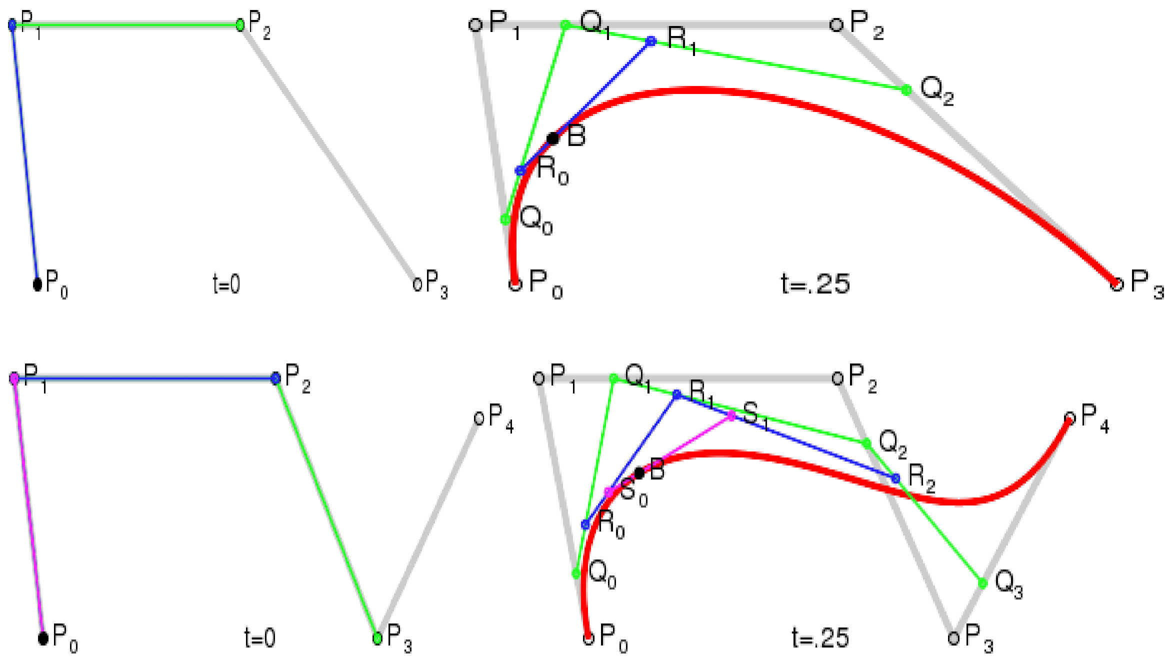
Кубична крива на Безие



Четири точки P_0, P_1, P_2 и P_3 в равнината или в триизмерното пространство определят куничната крива на Безие.

В пареметрична форма кривата е:

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3 \text{ , } t \in [0,1].$$



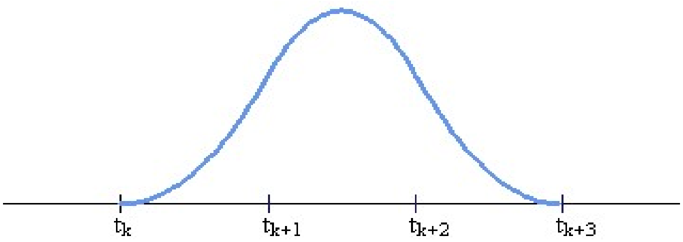
Обобщение

Кривата на Безие на стпен n може да бъде обобщена по следния начин, като се има предвит точките P_0, P_1...P_n :

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i = (1-t)^n \mathbf{P}_0 + \binom{n}{1} (1-t)^{n-1} t\mathbf{P}_1 + \cdots + t^n \mathbf{P}_n \text{ , } t \in [0,1].$$

В – Сплайн

Образуването на В-сплайн криви като NURBS е станало стандартна форма на крива и повърхнина в CAD/CAM индустрията. В - сплайните се използват в широк спектър от виртуални продукти, като: игрални и анимационни филми, компютърни игри, симулации и симулатори, обучаващи системи, VR системи като "Second life" и други.



Графика на k-ти В-сплайн $N_{k,2}$ от 2ра степен (3ти ред).

Полиномиални В-сплайни

Частично полиномиални криви от дадена степен и непрекъснато диференцируеми до някакъв ред са известни като сплайни. Сплайните се използват в приложения вариращи от обработка на образи, компютърно моделиране, до решаване на частни диференциални уравнения. Проблема за конструиране на мрежа от крайни елементи, които интерполират или апроксимират многомерна информация е основен проблем. които се изследва в геометричното моделиране. Параметричните сплайни са вектори от много-аргументни полиномиални (или рационални) функции.

В-сплайн е сплайн функция, която има минимален носител при дадена степен, гладкост и дефиниционна част. Основна теорема гласи, че всяка сплайн функция може да се представи като линейна комбинация от В-сплайни от същата степен и гладкост върху същата дефиниционна област. Термина В-сплайн е предложен от Шоенбърг (Schoenberg) и е съкратена форма на базисен сплайн.

При компютърното геометрично моделиране и компютърната графика термина B-сплайн често означава сплайн крива параметризирана от сплайн функция, която е изразена като линейна комбинация от B-сплайни (в математическия смисъл).

Сега ще дадем определение за B-сплайн и ще въведем основните понятия, които се използва т. Нека е дадено множество T от $n + 1$ не-намаляващи числа, $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$. Елементите на това множество ще наричаме възли (knots) , а самото множество вектор от възли (knot vector), а полуотворения интервал $[t_i , t_i + 1)$ е i-тата обвивка (span). Някой възли може да са равни. Ако възела t_i се появява i_k на брой пъти (т.е. $t_i = t_{i+1} = \cdots = t_{i+i_k-1}$), ще казваме, че е t_i е кратен възел (multiple knot) с кратност i_k . В противен случай, ако t_i се появява само веднъж, ще казваме че е прост възел (simple knot). Ако възлите са равномерно разположени, то вектора от възли се нарича унифициран (uniform knot vector), в противен случай той е неунифициран (non-uniform knot vector). Възлите могат да бъдат разглеждани като точки, които разделят интервала $[t_0, t_n]$ на подинтервали. Дефиниционна та област на всички B-сплайн базисни функции се предполага, че е $[t_0, t_n]$.

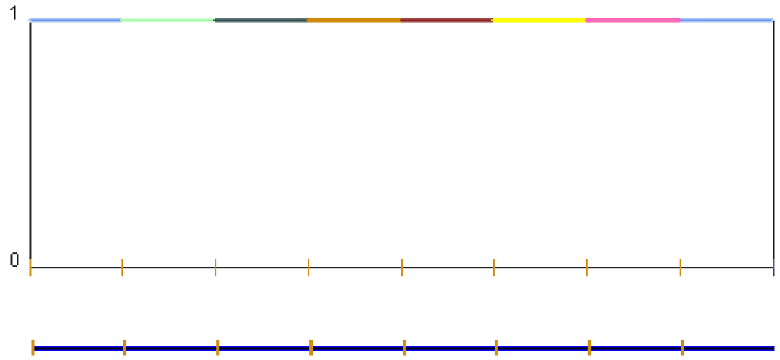
k-тата B-сплайн базисна функция от степен p, записана като $N_{k,p} (u)$, се дефинира чрез следна та рекурсивна форм ула:

$$N_{k,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ако } t \in [t_k, t_{k+1}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

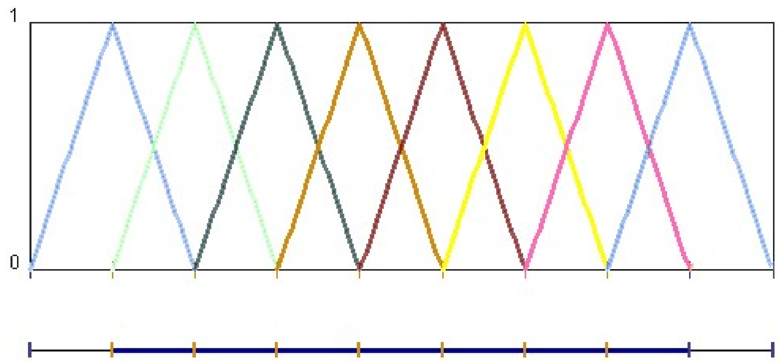
$$N_{k,p}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+p} - t_k} N_{k,p-1}(t) + \frac{t_{k+p+1} - t}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} N_{k+1,p-1}(t).$$

Най-често използваните полиномиални сплайни са частично константни, частично линейни и гладки B-сплайни. Частично константните B-сплайни (виж Фигура 2) са от първи ред и са най-простите сплайни. Те са дефинирани само върху една обвивка (span) и са прекъснати във възлите. Частично линейните B-сплайни (виж Фигура 3) са сплайн функции от 2-ри ред (1-ва степен), дефинирани са върху два съседни обвивки и са непрекъснати във възлите, но не са диференцируеми.

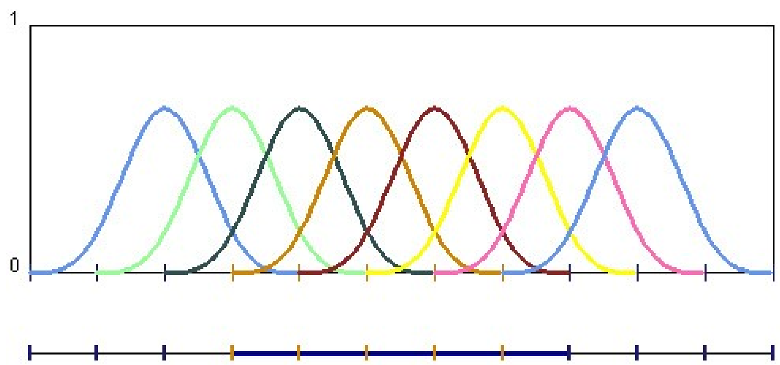
Гладките В-сплайни (виж Фигура 4) са сплайн функции от 2-ра или по-висока степен и са съответно непрекъснати и диференцируеми във възлите.



Фигура 2: Частично константен В-сплайн. Този В-сплайн е от 1-ви ред и фигурата ясно показва, че е прекъснат във възлите.



Фигура 3: Частично линеен В-сплайн 2-ри ред сплайн. Виждаме, че В- сплайн е непрекъснат във възлите, но не е диференцируем.



Фигура 2.4: Гладък В-сплайн от 4-ти ред. По-високата степен на В-сплайна му позволява непрекъснатост и диференциру емост във възлите.

NURBS

NURBS е математически модел, често използван в компютърната графика за генериране и представяне на криви и повърхнини, която предлага голяма гъвкавост и точност при аналитичната работа.

NURBS се използва за компютърно проектиране (CAD), производство (CAM), инжинеринг (CAE) и са част от производството на широко използвани множества от стандарти, като IGES, STEP, ACIS и PHIGS. NURBS инсрументите са открити в различни 3D модели и анимационни софтуерни пакети, в 4D киното и други. Освен това има и специални NURBS моделирани софтуерни пакети като *Autodesk Alias Surface*.

NURBS кривите и повърхнини са обобщение на кривите на Безие и B – сплайните, основната разлика е тежестта на контролните точки, което прави NURBS кривите рационални.

Общи формата на кривата на NURBS

Използването на определенията на базата функции *u N, N* от предходния параграф, крива NURBS се следната форма:

$$C(u) = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_{i,n} w_i}{\sum_{j=1}^{k} N_{j,n} w_j} \mathbf{P}_i = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_{i,n} w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=1}^{k} N_{i,n} w_i}$$

В това, *к* е броя на контролните точки $\mathbf{P}_i$ и w_u са съответните тегла. Знаменателят е нормализирането на фактор, който оценява една тежести, ако всички сме едно. Това може да се види от разделянето на единството на собственост на базата функции. То е прието да пиша това, както

$$C(u) = \sum_{i=1}^{k} R_{i,n} \mathbf{P}_i$$

, в която функции

$$R_{i,n} = \frac{N_{i,n} w_i}{\sum_{j=1}^{k} N_{j,n} w_j}$$

са известни като *основа* на *рационални функции.*