ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

Εργασία 1η

Ντζιώνη Δήμητρα, 8209

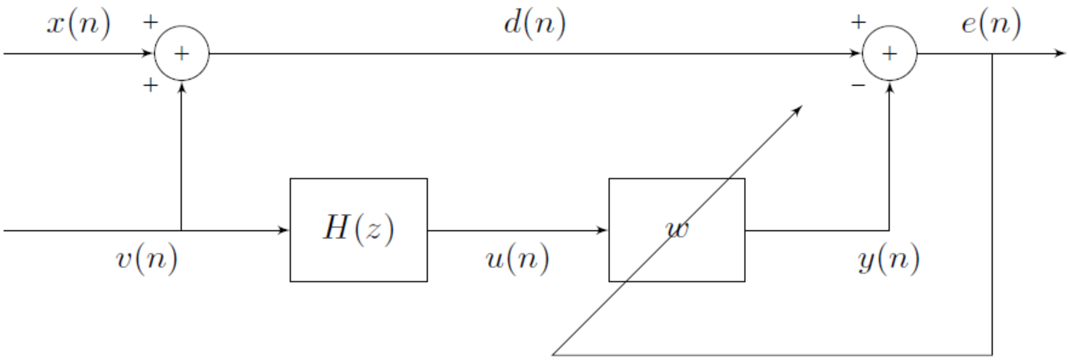
dntzioni@ece.auth.gr

Δ.καθηγητής Πιτσιάνης Νικόλαος

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών
Α.Π.Θ.

Ι. Εισαγωγή

Η πρώτη εργασία στο μάθημα των ψηφιακών φίλτρων, αφορά την υλοποίηση ενός φίλτρου wiener, προκειμένου να εξουδετερωθεί κάποιος θόρυβος, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο steepest descent. Δίνονται λοιπόν η διάταξη του συστήματος και οι απαραίτητες εξισώσεις αυτού και σε πρώτο επίπεδο πρέπει να υπολογιστούν οι παράμετροι που θα οδηγήσουν στη βέλτιστη λύση των συντελεστών w_o του φίλτρου. Οι εξισώσεις, όπως και η διάταξη φαίνονται παρακάτω.



$$x(n) = A(n)\sin\left(\frac{\pi}{8}n + \phi\right), \phi = \frac{\pi}{6} \quad (1)$$
$$u(n) = 0.25\,u(n-1) - 0.12\,u(n-2) + v(n) \quad (2)$$
$$d(n) = x(n) + v(n) \quad (3)$$

Πρέπει συνεπώς, να βρεθούν η αυτοσυσχέτιση R_u, η ετεροσυσχέτιση p_{ud}, οι βέλτιστοι συντελεστές w_o, το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα J_{min} και το πεδίο τιμών της παραμέτρου μ, για το οποίο ο αλγόριθμος steepest descent συγκλίνει. Σε επόμενο στάδιο, ζητήθηκε να υλοποιήσουμε τη διάταξη που δόθηκε σε MATLAB και να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος steepest descent, εφαρμόζοντας διάφορες τιμές για την παράμετρο μ. Τέλος, ζητήθηκε να εφαρμόσουμε στη διάταξη αυτή ένα δείγμα μουσικής που περιείχε την πληροφορία και το θόρυβο, κάνοντας τις απαραίτητες διαφοροποιήσεις, ώστε να αποθορυβοποιηθεί.

**Σημείωση, ο υλοποιημένος κώδικας βρίσκεται στο αρχείο code_assignment1.m*

ΙΙ. Υπολογισμός αυτοσυσχέτισης, ετεροσυσχέτισης, βέλτιστων συντελεστών φίλτρου wiener και άλλων παραμέτρων

Αρχικά, πρέπει να βρεθεί ή αυτοσυσχέτιση r_u. Δίνεται από τη σχέση

$r_u(k) = E[u(n) \cdot u^*(n\text{-}k)]$. Με βάση τη σχέση (1)η εξής σχέση γίνεται:

$r_u(k) = E[(0.25\cdot u(n\text{-}1) – 0.12\cdot u(n\text{-}2) + υ(n)) \cdot u^*(n\text{-}k)] =$

$= 0.25\cdot E[u(n\text{-}1) \cdot u^*(n\text{-}k)] – 0.12\cdot E[u(n\text{-}2) \cdot u^*(n\text{-}k)] + E[υ(n) \cdot u^*(n\text{-}k)] =$

$= 0.25\cdot r_u(k\text{-}1) – 0.12\cdot r_u(k\text{-}2) + r_{υu}(k)$

Όμως ισχύει $r_{υu}(k) = E[υ(n) \cdot u^*(n\text{-}k)]$.

Άρα, $r_{υu}(k) = E[υ(n) \cdot (0.25\cdot u(n\text{-}k\text{-}1) – 0.12\cdot u(n\text{-}k\text{-}2) + υ(n\text{-}k))]$

Σύμφωνα με την εκφώνηση τα u και υ είναι στατιστικά ανεξάρτητα, συνεπώς ισχύει

$r_{υu}(k) = E[υ(n) \cdot (0.25\cdot u^*(n\text{-}k\text{-}1) – 0.12\cdot u^*(n\text{-}k\text{-}2) + υ^*(n\text{-}k))] =$

$= E[υ(n) \cdot 0.25\cdot u^*(n\text{-}k\text{-}1)] – E[υ(n) \cdot 0.12\cdot u^*(n\text{-}k\text{-}2)] + E[υ(n) \cdot υ^*(n\text{-}k))] =$

$= 0 + 0 + r_{υυ}(k)$, καθώς η μέση τιμή του λευκού θορύβου ισούται με μηδέν.

Για το λευκό θόρυβο ισχύει $r_{υυ}(k) = σ_υ^2$ για k=0 και $r_{υυ}(k) =0$ για $k\neq 0$.

Συνεπώς $r_u(k) = 0.25\cdot r_u(k\text{-}1) – 0.12\cdot r_u(k\text{-}2) + r_{υu}(k)$

Για k = 0, $r_u(0) = 0.25\cdot r_u(-1) – 0.12\cdot r_u(-2) + r_{υu}(0)$

Για k = 1, $r_u(1) = 0.25\cdot r_u(0) – 0.12\cdot r_u(-1) + r_{υu}(1)$

Για k = 2 $r_u(2) = 0.25\cdot r_u(1) – 0.12\cdot r_u(0) + r_{υu}(1)$

Όμως $r_u(k) = r_u(-k)$.

Άρα,

Για k = 0, $r_u(0) = 0.25\cdot r_u(1) – 0.12\cdot r_u(2) + σ_υ^2$

Για k = 1, $r_u(0) = 0.25\cdot r_u(0) – 0.12\cdot r_u(1) + 0$

Για k = 2 $r_u(2) = 0.25\cdot r_u(1) – 0.12\cdot r_u(0) + 0$

Σε μορφή πίνακα οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως εξής

$$\begin{vmatrix} \sigma_\upsilon^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0.25 & 0.12 \\ 0.25 & 1.12 & 0 \\ 0.12 & -0.25 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_u(0) \\ r_u(1) \\ r_u(2) \end{vmatrix}$$

Εφαρμόζοντας μέθοδο Cramer προκύπτει

$r_u(0) = 0.3417$, $r_u(1) = 0.0763$, $r_u(2) = -0.0219$.

Με βάση τα παραπάνω, ο πίνακας αυτοσυσχέτισης θα είναι

$$R_u = \begin{vmatrix} r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) \\ r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) \\ r_u(2) & r_u(1) & r_u(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.3417 & 0.0763 & -0.0219 \\ 0.0763 & 0.3417 & 0.0763 \\ -0.0219 & 0.0763 & 0.3417 \end{vmatrix}$$

Συνεχίζοντας, για τον υπολογισμό του διανύσματος ετεροσυσχέτισης θα χρησιμοποιηθεί η σχέση $p_{du}(-k) = E[u(n-k) \cdot d^*(n)]$. Από τη σχέση (1) η εξής σχέση γίνεται:

$$p(-k) = E[(0.25u(n-k-1) – 0.12u(n-k-2) + \upsilon(n-k)) \cdot (x^*(n) + \upsilon^*(n))] =$$

$$= 0.25 \cdot E[u(n-k-1) \cdot x^*(n)] – 0.12E[u(n-k-2) \cdot x^*(n)] + E[\upsilon(n-k) \cdot x^*(n)] +$$

$$+ 0.25 \cdot E[u(n-k-1) \cdot \upsilon^*(n)] – 0.12E[u(n-k-2) \cdot \upsilon^*(n)] + E[\upsilon(n-k) \cdot \upsilon^*(n)]$$

Ισχύει, $E[u(n) \cdot x^*(n)] = E[u(n)] \cdot E[x^*(n)]$, καθώς τα u και x είναι στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συνεχίζοντας με βάση τη σχέση (1) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$E[u(n)] \cdot E[x^*(n)] = E[u(n)] \cdot E[A \cdot \sin(\tfrac{\pi}{8} \cdot n + \tfrac{\pi}{6})] =$$

$$= E[u(n)] \cdot E[A] \cdot E[\sin(\tfrac{\pi}{8} \cdot n + \tfrac{\pi}{6})] = 0, \text{ καθώς } E[A] = 0$$

Επειδή, λοιπόν, u και x είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και η μέση τιμή του x είναι μηδέν, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$p(-k) = + 0.25 \cdot E[u(n-k-1) \cdot \upsilon^*(n)] – 0.12E[u(n-k-2) \cdot \upsilon^*(n)] + E[\upsilon(n-k) \cdot \upsilon^*(n)] =$$

$$= 0.25 \cdot r_{u\upsilon}(-k-1) – 0.12 \cdot r_{u\upsilon}(-k-2) + r_{\upsilon\upsilon}(-k) =$$

$$= 0.25 \cdot r_{\upsilon u}(k+1) – 0.12 \cdot r_{\upsilon u}(k+2) + r_{\upsilon\upsilon}(k)$$

Για k = 0, $p(0) = \sigma_\upsilon^2 = 0.32$

Για k = 1, $p(-1) = 0$

Για k = 2 $p(-2) = 0$

Άρα, $p(-k) = [\ 0.32\ \ 0\ \ 0\ ]$, το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης.

Όσον αφορά το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα Jmin, αυτό προκύπτει από την εξής σχέση.

$J_{min} = \sigma_d^2 - p^T \cdot R^{-1} \cdot p = E[d^2(n)] - p^T \cdot R^{-1} \cdot p$, καθώς η μέση τιμή του d, είναι μηδέν.

Ωστόσο,

$$E[d^2(n)] = E[x^2(n)] + 2 \cdot E[x(n)] \cdot E[\upsilon(n)] + E[\upsilon^2(n)] =$$

$$= E[A^2 \cdot \sin^2(\tfrac{\pi}{8} \cdot n + \tfrac{\pi}{6})] + \sigma_\upsilon^2 = \tfrac{1}{2} \cdot E[A^2(n) \cdot (1 - \cos(\tfrac{\pi}{4} \cdot n + \tfrac{\pi}{3}))] + \sigma_\upsilon^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot E[A^2(n)] - \tfrac{1}{2} \cdot E[\cos(\tfrac{\pi}{4} \cdot n + \tfrac{\pi}{3})] + \sigma_\upsilon^2$$

Όμως, η μέση τιμή του συνημίτονου είναι μηδέν, συνεπώς η παραπάνω σχέση γίνεται:

$E[d^2(n)] = \frac{1}{2} \cdot \sigma_A^2 + \sigma_\upsilon^2 = 0.395$

Συνεπώς, η τιμή που προκύπτει για το ελάχιστο μέσο σφάλμα είναι $J_{min} = 0.075$

Προκειμένου να βρεθεί το πεδίο τιμών της παραμέτρου μ για το οποίο να συγκλίνει ο αλγόριθμος steepest descent στη λύση Wiener(w_o) πρέπει να βρεθεί η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα αυτοσυσχέτισης R_u. Επειδή η διαδικασία αυτή είναι αρκετά γνωστή και δαπανηρή ως προς το χώρο, θα παρατεθεί κατευθείαν η μέγιστη ιδιοτιμή, ώστε να συνεχίσουμε στην εύρεση του πεδίου τιμών. Συνεπώς $\lambda_{max} = 0.4392$

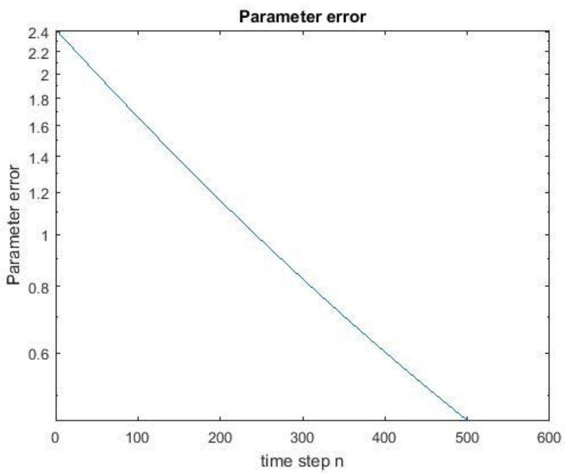
Το πεδίο λοιπόν για το οποίο παρατηρείται σύγκλιση είναι $0 < \mu < \frac{2}{\lambda max}$

Συνεπώς, $0 < \mu < 4.5537$

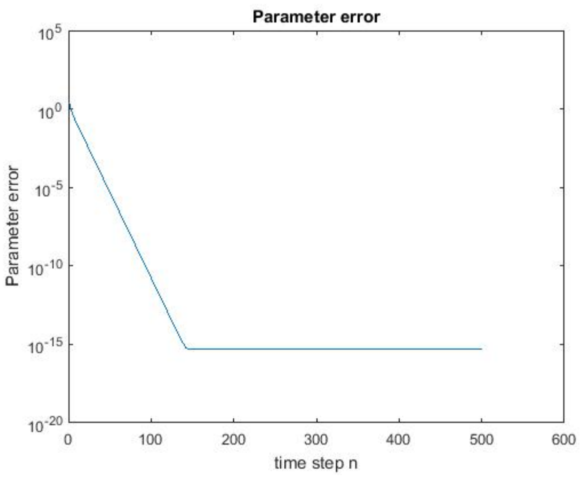
III. Διαγράμματα & σχόλια για τον αλγόριθμο steepest descent, μεταβάλλοντας την παράμετρο μ

Έχοντας βρει τις απαραίτητες παραμέτρους, περνάμε στο δεύτερο στάδιο της εργασίας, που πρέπει να υλοποιηθεί η δοθείσα διάταξη στο MATLAB και να υλοποιηθεί κι ο αλγόριθμος steepest descent. Ο υλοποιημένος κώδικας παρέχεται στο αρχείο της εργασίας. Στο σημείο αυτό αξίζει να σχολιαστούν κάποιες παρατηρήσεις και συμπεράσματα από τις διάφορες δοκιμές στη μεταβολή της παραμέτρου μ.

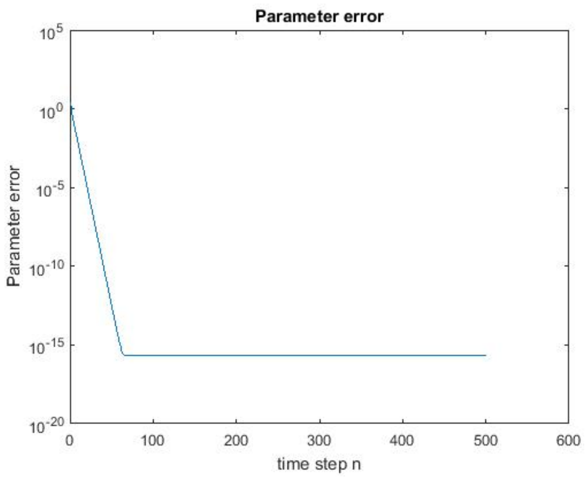
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα από πέντε διαφορετικές τιμές εντός του πεδίου τιμών του μ και δύο εκτός αυτού.



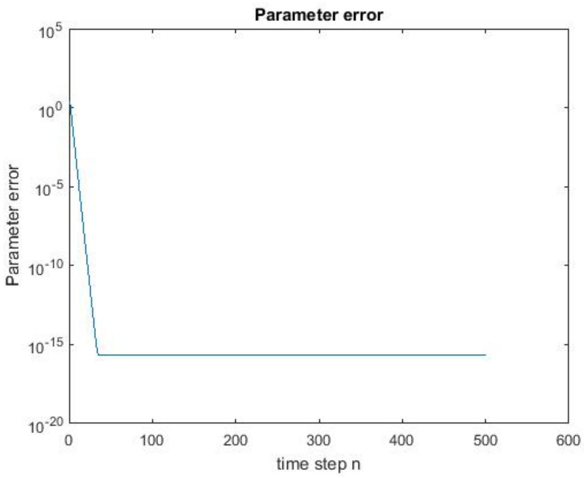
Εικόνα 1. Τρόπος σύγκλισης για μ = 0.01
Δεν προλαβαίνει να συγκλίνει σε τόσα βήματα



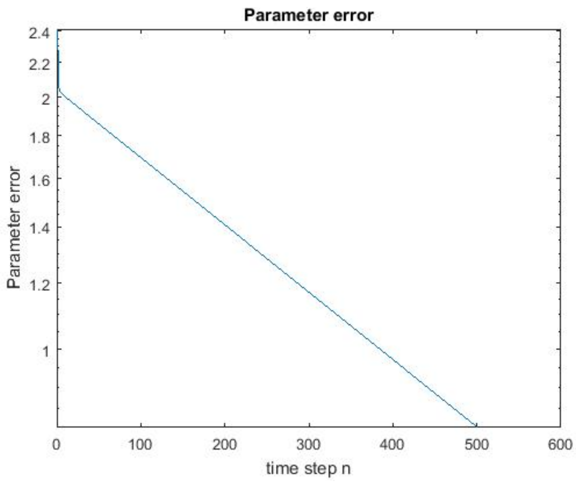
Εικόνα 2. Τρόπος σύγκλισης για μ = 1
Η σύγκλιση επιτυγχάνεται στο βήμα 146



Εικόνα 3. Τρόπος σύγκλισης για μ = 2
Η σύγκλιση επιτυγχάνεται στο βήμα 66



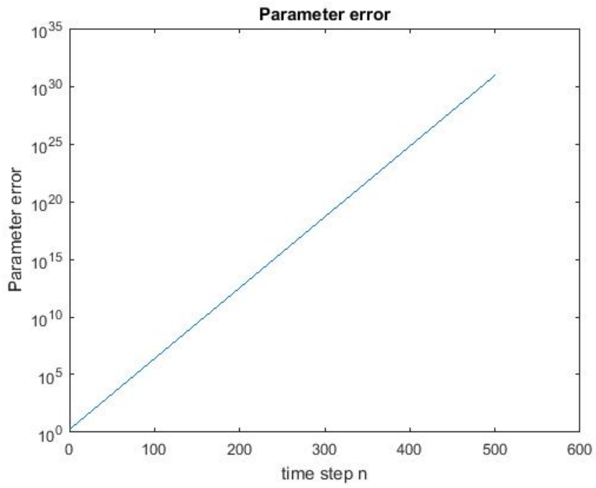
Εικόνα 4. Τρόπος σύγκλισης για μ = 3
Η σύγκλιση επιτυγχάνεται στο βήμα 36



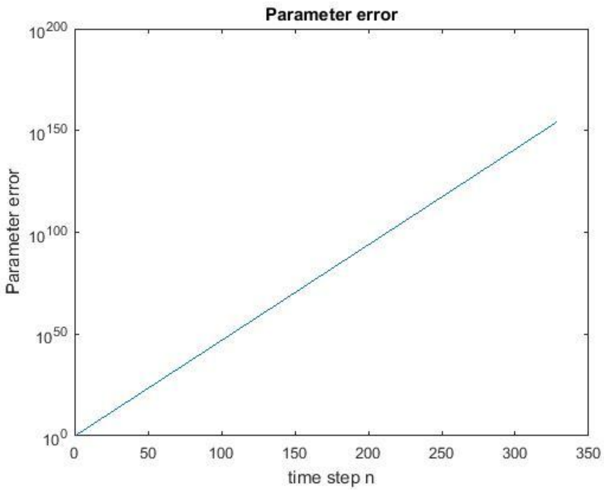
Εικόνα 4. Τρόπος σύγκλισης για μ = 4.55
Δεν προλαβαίνει να συγκλίνει σε τόσα βήματα

Όπως εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς, όσο πιο κοντά είναι το μ στο 0, τόσο πιο αργά συγκλίνουν οι συντελεστές στους βέλτιστους. Όσο αυξάνεται το μ, μέσα στο πεδίο τιμών του, είναι φανερό πως η σύγκλιση γίνεται ολοένα και πιο σύντομα, δηλαδή σε λιγότερα βήματα. Συγκεκριμένα, για μ=1 παρατηρείται ταύτιση των συντελεστών με τις βέλτιστες τιμές από το βήμα 146 και μετά, ενώ για μ=2 από το βήμα 66.

Αξιοσημείωτο είναι πως για μ=3 παρατηρήθηκε ο καλύτερος (πιο γρήγορος) τρόπος σύγκλισης, ενώ για τιμές του μ μεγαλύτερες του 3, φαίνεται ξανά μία χειροτέρευση. Αυτό είναι κατανοητό, καθώς δεν έχει επιτευχθεί η σύγκλιση πριν το βήμα 500, όπως προηγουμένως. Αυτό είναι πιθανό να οφείλεται στο γεγονός πως το μ, φτάνει αρκετά κοντά στο πάνω όριο. Με βάση τα παραπάνω, θα μπορούσε κανείς να καταλήξει στο συμπέρασμα πως για τιμές του μ κοντά στο μισό του πεδίου τιμών του μ, μπορεί επιτευχθεί ταχύτερη σύγκλιση από ότι αν επιλεχθεί μία τιμή κοντά στα άκρα του.



Εικόνα 5. Τρόπος σύγκλισης για μ = 4.9
Δε συγκλίνει



Εικόνα 6. Τρόπος σύγκλισης για μ = 9
Δε συγκλίνει

Στο σημείο αυτό παρατίθενται δύο διαγράμματα στα οποία η τιμή του μ επιλέχθηκε εκτός του πεδίου τιμών του. Είναι εύκολα φανερό πως για τέτοιες τιμές του μ, οι τιμές των συντελεστών δε συγκλίνουν προς τη βέλτιστη τιμή. Αντιθέτως, όσο το μ αυξάνεται, οι συντελεστές αυτοί διαφοροποιούνται όλο και περισσότερο από τους βέλτιστους. Αυτό που πρέπει να τονιστεί εδώ είναι πως σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το μ τέθηκε αρκετά μεγάλο, για παράδειγμα μ=9 ή μ=10, ο αλγόριθμος σταμάτησε τη διαδικασία στο 350ο βήμα, όπου το σφάλμα άγγιξε την τιμή 10^{150}.

IV. Αποθορυβοποίηση του δοσμένου αρχείου ήχου, αναγνώριση του τραγουδιού

Στο κομμάτι αυτό της εργασίας, έπρεπε να τροποποιηθεί ο κώδικας, ο οποίος υλοποιήθηκε σε προηγούμενο ερώτημα, ώστε να μπορεί να επεξεργαστεί τα δεδομένα των δοσμένων αρχείων. Με βάση αυτά τα αρχεία βρέθηκαν εκ νέου ο πίνακας αυτοσυσχέτισης και το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης, καθώς επίσης και νέοι βέλτιστοι συντελεστές. Συγκεκριμένα. Υλοποιήθηκε στο MATLAB η γενική σχέση της αυτοσυσχέτισης $r_u(k) = E[u(n) \cdot u^* (n-k)]$, οπότε και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας αυτοσυσχέτισης, όπου u, το διάνυσμα που περιλαμβάνεται στο αρχείο noise.mat.

$$R_u = \begin{vmatrix} 6.6319 & 6.2561 & 5.9892 \\ 6.2561 & 6.6319 & 6.2561 \\ 5.9892 & 6.2561 & 6.6319 \end{vmatrix}$$

Αντίστοιχα, το νέο διάνυσμα ετεροσυσχέτισης προκύπτει από τη γενική σχέση

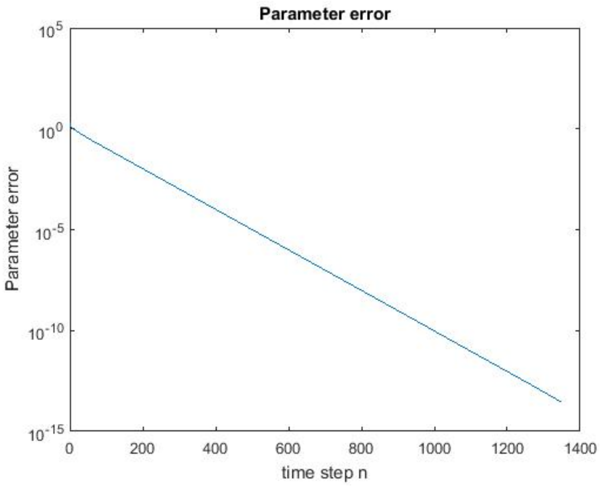
$p(-k) = E[u(n-k) \cdot d^*(n)]$, όπου d, το διάνυσμα που περιλαμβάνεται στο αρχείο sound.mat. Συνεπώς, το διάνυσμα που προκύπτει είναι $p(-k) = [\ 0.7205\ 0.007\ \ 0.007\ ]$, όπως υπολογίστηκε στο MATLAB. Φαίνεται πως είναι αρκετά κοντά στη μορφή

$p(-k) = [\ \sigma_\upsilon^2\ 0\ 0\ ]$, με σ_υ^2 τη νέα τιμή 0.72.

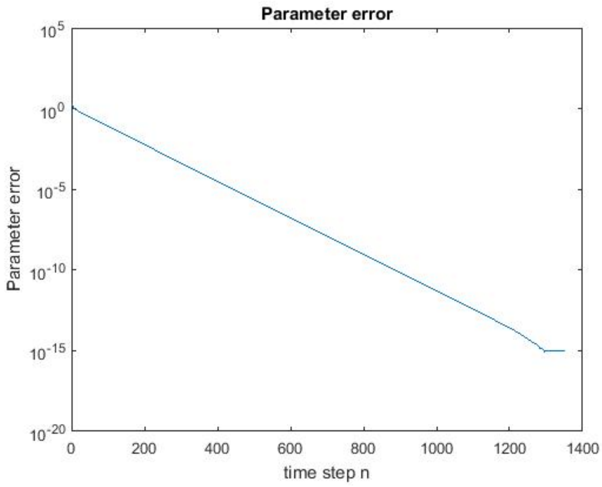
Με βάση τον αλγόριθμο steepest descent οι νέοι βέλτιστοι συντελεστές που προκύπτουν είναι οι εξής $w_o = [\ 1.0\ -0{,}83\ -0{,}12\ ]$.

Έπειτα από την αποθορυβοποίηση, το τραγούδι που κρύβεται πίσω από το αρχείο με το θόρυβο είναι το Mack the knife του τραγουδιστή Bobby Darin.

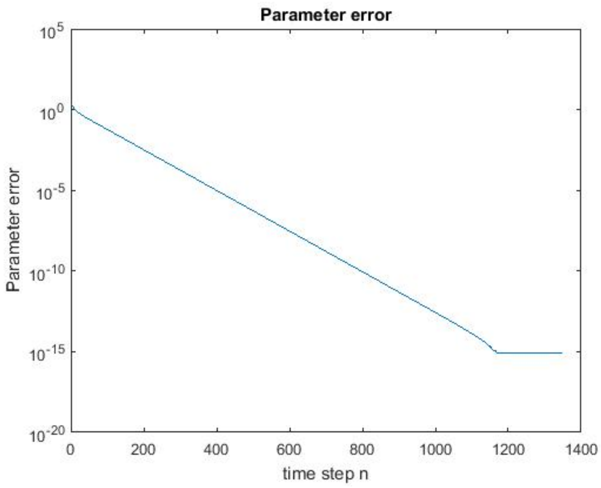
Αξιοσημείωτο είναι στο σημείο αυτό, το γεγονός πως τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον αλγόριθμο steepest descent διαφέρουν αρκετά. Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά ορισμένα διαγράμματα σχετικά με το σφάλμα.



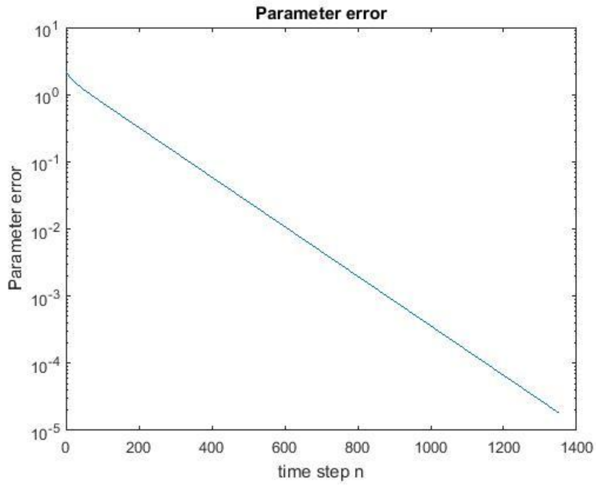
Εικόνα 7. Τρόπος σύγκλισης για μ = 0.08
Δεν προλαβαίνει να συγκλίνει σε τόσα βήματα



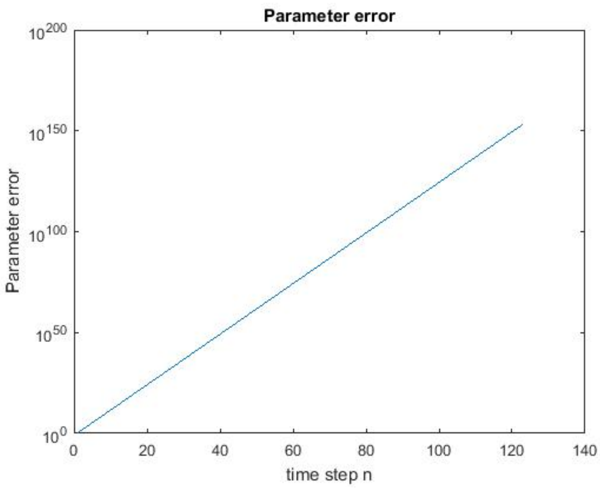
Εικόνα 8. Τρόπος σύγκλισης για μ = 0.09
Η σύγκλιση επιτυγχάνεται στο βήμα 1299



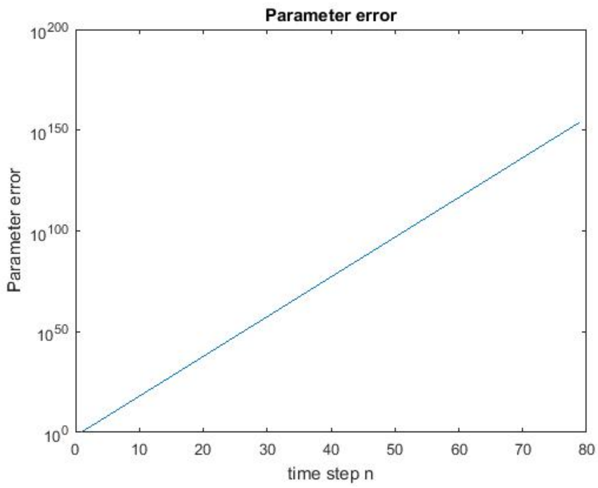
Εικόνα 9 . Τρόπος σύγκλισης για μ = 0.1
Η σύγκλιση επιτυγχάνεται στο βήμα 1172



Εικόνα 10. Τρόπος σύγκλισης για μ = 0.105
Δεν προλαβαίνει να συγκλίνει σε τόσα βήματα



Εικόνα 11 . Τρόπος σύγκλισης για μ = 1
Δε συγκλίνει



Εικόνα 12 . Τρόπος σύγκλισης για μ = 1
Δε συγκλίνει