# Relatório - Atividade 2 - Estimação de Parâmetros em Tempo Real

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Análise e Projeto de Sistemas de Controle

Prof. Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Aluno: Arthur Dimitri Brito Oliveira

O objetivo deste relatório é a análise dos problemas propostos no livro Adaptive Control [1] por meio do método de mínimos quadrados. Esse método é capaz de estimar parâmetros de processos lineares e variantes no tempo.

## Fundamentação Teórica

A determinação em tempo real é um dos elementos primordiais no controle adaptativo. Nesse contexto, métodos de estimação são necessários para atualização recursiva dos parâmetros [1].

O método dos mínimos quadrados pode ser aplicado a uma variedade de problemas. Considerando um modelo de uma variável observável que pode ser descrito da forma:

$$y(i) = \varphi_1(i)\theta_1^0 + \varphi_2(i)\theta_2^0 + \dots + \varphi_n(i)\theta_n^0 = \varphi^T(i)\theta^0$$

Os parâmetros a serem determinados pelo modelo são o vetor  $\theta^0=(\theta_1^0 \ \theta_2^0 \ \dots \ \theta_n^0)^T$  e as funções conhecidas a priori  $\varphi^T(i)=(\varphi_1(i) \ \varphi_2(i) \ \dots \ \varphi_n(i))$  podem depender em outras variáveis conhecidas, e denotam as variáveis de regressão.

O problema consiste na determinação os parâmetros  $\theta^0$  de forma que as saídas computadas pelo modelo aproximem-se das saídas medidas y(i). Sendo assim a função de custo a ser minimizada é:

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{t} (y(i) - \varphi^{T}(i)\theta)^{2}$$

Sendo  $E=Y-\hat{Y}=Y-\Phi\theta$ , a função se custo pode ser reescrita como:

$$V(\theta,t) = \frac{1}{2}||E||^2$$

Esta equação também pode ser escrita como:

$$2V(\theta,t) = \big|\big|E\big|\big| = E^TE = (Y - \Phi\theta)^T(Y - \Phi\theta)$$

$$2V(\theta, t) = ||E|| = Y^{T}Y - Y^{T}\Phi\theta - \theta^{T}\Phi^{T}Y + \theta^{T}\Phi^{T}\Phi\theta$$

$$2V(\theta, t) = Y^{T}(I - \Phi(\Phi^{T}\Phi)^{-1}\Phi^{T})Y + (\theta - (\Phi^{T}\Phi)^{-1}\Phi^{T}Y)^{T}\Phi^{T}\Phi(\theta - (\Phi^{T}\Phi)^{-1}\Phi^{T}Y)$$

O mínimo é obtido quando:

$$\theta = \hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

A equação normal, relativa ao mínimo da função de custo, expressa na forma expandida é:

$$\widehat{\theta}(t) = (\sum_{i=1}^{t} \varphi(i) \varphi^{T}(i))^{-1} (\sum_{i=1}^{t} \varphi(i) y(i)) = P(t) (\sum_{i=1}^{t} \varphi(i) y(i))$$

#### **Desenvolvimento**

Os métodos aqui descritos foram implementados utilizando o Matlab. Inicialmente, os problemas referentes aos exemplos são formulados. Posteriormente, discute-se a resolução e os resultados obtidos com as simulações.

#### Exemplo 2.1: estimação por mínimos quadrados de um sistema estático

Considerando um sistema do tipo:

$$y(i) = b_0 + b_1 u(i) + b_2 u^2(i) + e(i)$$

Sendo e(i) um ruído gaussiano com média nula e desvio-padrão 0.1. O sistema pode ser descrito de forma compacta por:

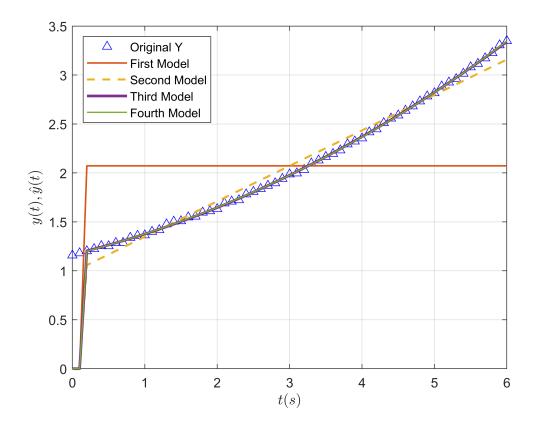
$$y(t) = \varphi^{T}(t)\theta_0 + e(t)$$

Onde  $\varphi^T(t) = (1 \ u(t) \ u^2(t))$  e  $\theta_0 = (b_0 \ b_1 \ b_2)$ . A estimativa na forma adaptada pode ser escrita como:

$$\widehat{\theta}(t) = P(t)(\sum_{i=1}^t \varphi(i)y(i)) = P(t)(\sum_{i=1}^t \varphi(i)[\varphi^T(i)\theta_0 + e(i)])$$

O exemplo fomenta a discussão do modelo mais adequado para aproximação dos dados, apresentando de forma prática os conceitos de sobreajuste e subajuste. Realizou-se experimentos com incremento gradual da ordem do modelo, comparando os valores reais medidos e os valores estimados pelo modelo. O comparativo pode ser visualizado na **Figura 1**.

ex 01



**Figura 1:** y(t) e as aproximações  $\hat{y}(t)$  com  $\theta^T$  variando.

Observando a Figura 1, fica claro que à medida em que incrementa-se a complexidade do modelo, menor é a perda associada. No entanto, deve-se analisar a relação de compromisso associada a este incremento, de modo que o modelo não se torne nem subajustado, nem sobreajustado aos dados.

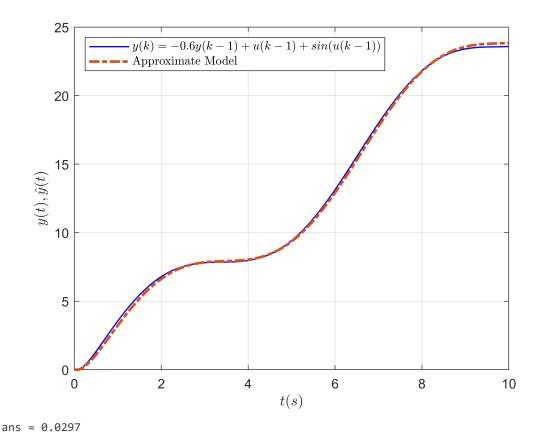
### Exemplo 2.3: Sistema Não-Linear

Considerando  $\theta = (a\ b_1\ b_2)^T$ ,  $\varphi^T = (-y(t)\ u(t)\ sin(u(t)))$ , o modelo pode ser expresso por:

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta$$

Diante da linearidade dos parâmetros, a aproximação pode ser obtida por meio do método recursivo de mínimos quadrados. O resultado em termos de y(t) e  $\hat{y}(t)$  pode ser observado a seguir:

ex\_02



**Figura 2:** Sinal real y(t) e sinal aproximado por meio do método de mínimos quadrados.

Houve uma correta aproximação do modelo não-linear. Mediante um vetor de regressores em função das entradas do sistema  $\varphi^T$ e de parâmetros  $\theta$ , foi possível aproximar  $y(t) = \varphi^T \theta$  com um erro quadrático médio próximo de zero.

## Exemplo 2.5: persistência na excitação - sinal degrau

Analisando a condição de excitação para conjuntos de dados extensos, tem-se:

$$C_{n} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \phi^{T} \phi = \begin{bmatrix} c(0) & c(1) & \cdots & c(n-1) \\ c(1) & c(0) & \cdots & c(n-2) \\ \vdots & & \ddots & \\ c(n-1) & c(n-2) & \cdots & c(0) \end{bmatrix}$$

Onde c(k) representa as covariâncias empíricas da entrada. Assim:

$$c(k) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} u(i)u(i-k)$$

A matriz  $C_n$  pode ser escrita como:

$$C_n = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \varphi(k) \varphi^T(k)$$

O sinal u só é dito persistentemente excitante de ordem n se, e se somente se:

$$U = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} (A(q)u(k))^2 > 0$$

De forma expandida:

$$U = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} (a_0 u(k+n-1) + \dots + a_{n-1} u(k))^2 = a^T C_n a$$

Caso  $C_n$  seja positiva definida, o lado direito da equação é positivo para qualquer a, bem como o lado esquerdo. Analisando para uma entrada degrau unitário:

$$C_1 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} u^2(k) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} 1 = 1$$

Isto significa que o degrau unitário é persistentemente excitante para ordem 1, e não PE,  $U \le 0$ , para outras ordens maiores que 1.

#### Exemplo 2.10: perda de identificação na presença de realimentação

Considerando que a estimação dos parâmetros a e b deve se dar por meio de realimentação, u(t) = -ky(t), para o sistema a seguir:

$$y(t+1) + ay(t) = bu(t)$$

Ao multiplicar a equação de realimentação por  $\alpha$  e adicionar à equação anterior, tem-se:

$$y(t+1) + (a+\alpha k)y(t) = (b-a)u(t)$$

Assim:

$$\hat{a} = a + \alpha k \to \alpha = \frac{\hat{a} - a}{k}$$

$$\hat{b} = b - \alpha$$

$$\hat{b} = b + \frac{1}{k}(a - \hat{a})$$

Sendo assim, múltiplas soluções podem ser obtidas a depender do ganho de realimentação k. Portanto, há a ausência de unicidade por conta da variação associada à inclinação da reta  $\frac{-1}{k}$ .

De modo a corrigir a perda de identificação devido ao ganho de realimentação, pode-se adicionar ganhos variáveis no tempo na forma:

$$u(t) = -k_1 y(t) - k_2 y(t-1)$$

Digamos que:

$$(t) = \begin{cases} k_1, & t \le 3 \\ k_2, & t > 3 \end{cases}$$

ex\_10\_b

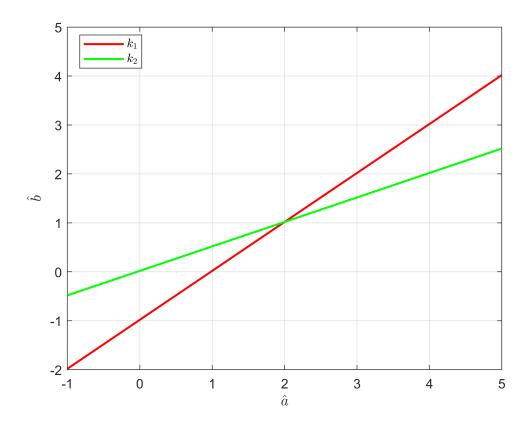


Figura 3: Relação existente entre a e b para realimentação com ganho variável.

A relação expressa entre  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  pode ser visualizada acima. Há duas retas com coeficientes angulares diferentes, dependentes do instante de tempo e do ganho de realimentação. No entanto, há um ponto de intersecção destas retas, que indica valores únicos e possíveis para  $\hat{a}=2,\ b\approx 1$ , o que mitiga o problema da perda de identificação na presença de realimentação.

#### Exemplo 2.12: avaliando o sinal de excitação

Diante de um modelo expresso por:

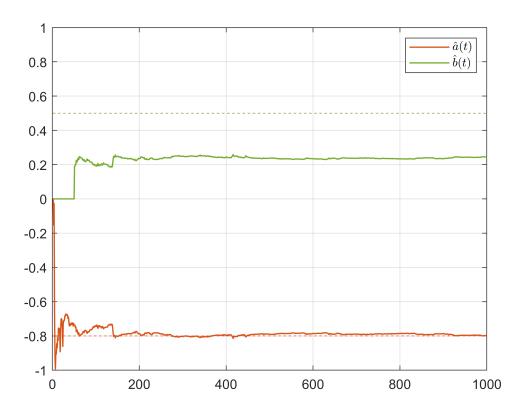
$$y(t) + ay(t - 1) = bu(t - 1) + e(t) + ce(t - 1)$$

Os valores de a e b são -0.8 e 0.5, respectivamente. e(t) éum ruído branco gaussiano de média nula e variância 0.5. Ademais, c=0, P(0)=100.I e  $\widehat{\theta}(0)=0$ . Utilizando:

$$\widehat{\theta} = (\widehat{a} \quad \widehat{b})^T$$
 
$$\varphi(t-1) = (-y(t-1) \ u(t-1))$$

O sinal de entrada u(t) é defiinido como um pulso unitário em t=50. A simulação é feita por mil segundos, onde obtém-se estimativas para a e b. O resultado pode ser observado na figura abaixo.

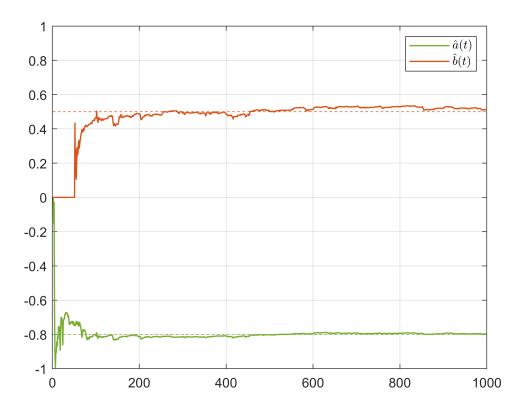
ex\_12\_a



**Figura 4:** Estimação Evolução temporal dos parâmetros  $\hat{a} \ e \ \hat{b}$  aplicando RLS com o sinal de entrada sendo um pulso unitário.

Ao observar a figura acima, constata-se que a estimativa de  $\hat{b}$  distoa do valor esperado, 0.5. Ao aplicar uma onda quadrada com período igual a 100, tem-se:

ex\_12\_b



**Figura 5:** Estimação Evolução temporal dos parâmetros  $\hat{a} \ e \ \hat{b}$  aplicando RLS com o sinal de entrada sendo uma onda quadrada.

Observa-se na Figura 5 que agora a estimativa de  $\hat{b}$  converge para o valor esperado. Embora haja flutuações em torno dos valores reais, os desvios padrão reforçam a convergência da aproximação.

Desvio padrão para  $\hat{a}$ :

```
std(theta(1,:))
ans = 0.0530
```

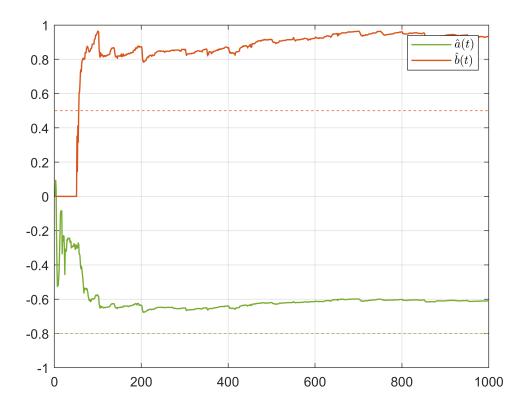
Desvio padrão para  $\hat{b}$ :

```
std(theta(2,:))
ans = 0.1165
```

#### Exemplo 2.13: avaliando a estrutura do modelo

Neste exemplo, o parâmetro c não é mais nulo, tendo valor -0.5. A ideia é avaliar as estimativas para LS (*least squares*) e ELS (Extended Least Squares). O ruído não é mais gaussiano. As estimativas podem ser observadas na Figura 6.

```
ex_13_a
```



**Figura 6:** Evolução temporal das estimativas de  $\hat{a} \ e \ \hat{b}$  ao aplicar RLS para uma onda quadrática.

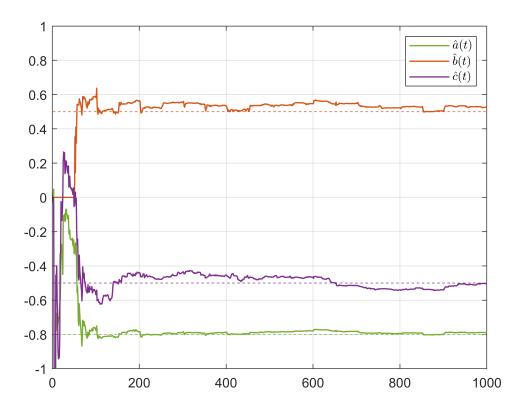
Como pode-se observar, ao considerar um erro não gaussiano e utilizar o método de mínimos quadrados,

 $E\widetilde{\theta} \neq 0$ . Isto torna a estimativa dos parâmetros  $\widehat{a}$  e  $\widehat{b}$  ruim. A alternativa pode ser a utilzação do método de mínimos quadrados extendido.

No método ELS (Extended Least Squares) utiliza-se

$$\varphi(t-1) = \begin{bmatrix} -y(t-1) & -y(t-n) & u(t-1) & \dots & u(t-1) & \varepsilon(t-1) & \dots & \varepsilon(t-n) \end{bmatrix}^T, \text{ onde } \varepsilon = y(t) - \varphi^T(t) \widehat{\theta}(t-1). \text{ Ou seja, } y(t) = \varphi^T(t) \widehat{\theta}(t-1) + \varepsilon. \text{ E isso conduz à estimação dos parâmetros visualizada a seguir:}$$

ex\_13\_b



**Figura 7:** Evolução temporal da estimativa de  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  ao empregar ELS para o sinal de entrada sendo uma onda quadrada.

Os desvios padrão de  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  e  $\hat{c}$  são, respectivamente:

```
std(theta(1,:))
ans = 0.1316

std(theta(2,:))
ans = 0.1198

std(theta(3,:))
ans = 0.1399
```

O emprego do ELS resolve o problema da ausência de convergência dos parâmetros.

## Ex. 2.19: Reparametrização

Considerando a função de transferência

$$G(s) = \frac{\frac{R}{Lc}}{s^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

Se esta função de transferência descreve uma relação I/O, com  $p = \frac{d}{dt}$ , do tipo:

$$p^{n}y + a_{1}p^{n-1}y + \dots a_{n}y = b_{1}p^{n-1}u$$
$$y = \varphi^{T}(t)\theta^{T} = [-p^{n-1}y \dots - y p^{n-1}u u]$$

Definindo  $\theta_1 = R$ ,  $\theta_2 = \frac{1}{L}$  e  $\theta_3 = \frac{1}{C}$ , a função de transferência se torna:

$$G(s) = \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{s^2 + \theta_1 \theta_2 s + \theta_2 \theta_3} = \frac{k_1}{s^2 + k_2 + k_3}$$

A função de transferência discretizada se torna:

$$H(q) = \frac{b_1 q + b_2}{q^2 + a_1 q + a_2}$$

```
sim('Simulink Diagrams\ctlsea.slx')
```

```
The electrical initial states of your model are forced to zero by the powergui block.

Error evaluating 'StopFcn' callback of block_diagram 'ctlsea'.

Callback string is 'epex219'

Caused by:

Error using Relatorio_atv2 (line 13)

Unrecognized function or variable 'epex219'.
```

**Figura 8:** Saída estimada  $\hat{y}$  e saída real y a partir da modelagem do circuito.

A evolução temporal da estimativa indica que os parâmetros da função de transferência foram corretamente estimados. Quaisquer valores relacionados aos componentes do circuito que satisfaçam o formato da função de transferência validam o sistema simulado.

# Referências bibliográficas

[1] K. ASTRÖM, B. WITTENMARK. Adaptive Control. CRC Press, 2000. ISBN 0486462781