Relatório IV - MOAB

Análise e Projeto de Sistemas de Controle - 20.1

Professor Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Aluno: Arthur Dimitri Brito Oliveira

Este relatório tem como objetivo a apresentação do desenvolvimento do modelo matemático do MOAB, um sistema bola-prato com múltiplos graus de liberdade. Além disso, busca-se a comparação entre a implementação do modelo matemático do MOAB e a implementação computacional disponível em um repositório do GitHub.

Sumário

Introdução

O balanceamento de uma bola sobre um prato é um problema de controle desafiador. Trata-se de um sistema não linear complexo com múltiplos graus de liberdade. A Figura 1 ilustra o sistema.

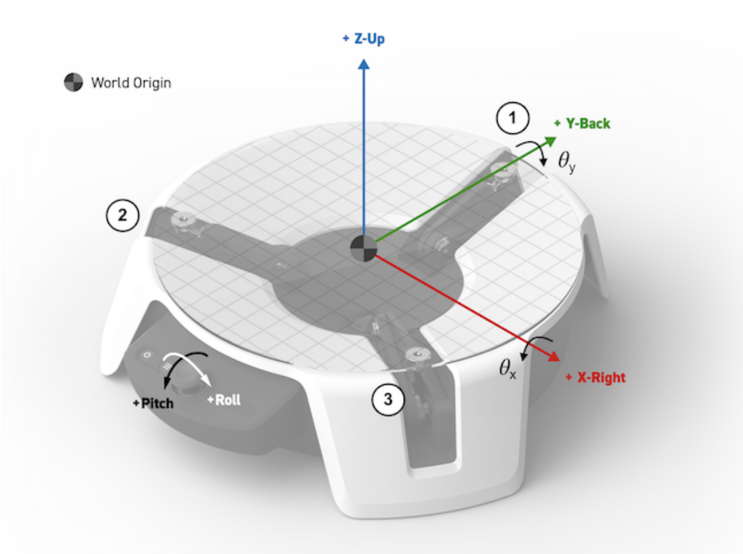

Figura 1: Vista isométrica do sistema bola-prato com identificação dos eixos.

O sistema consiste em um prato que pode ser atuado, a partir do acionamento de três motores, em duas direções perpendiculares. O projeto é realizado de tal modo que o centro do prato não se move. O objetivo consiste na estabilização da bola em um ponto de operação desejado no prato, ou fazer com que a bola siga uma trajetória pré-definida. Há quatro graus de liberdade: dois associados às inclinações do prato e dois relacionados ao movimento da bola nos eixos x e y do prato.

Fundamentação Teórica

Esta seção trata da formulação matemática do problema.

Premissas quanto ao modelo dinâmico

Algumas premissas são estabelecidas para simplificar a modelagem do sistema:

1. A bola nunca perde contato com a superfície do prato.
2. Não há deslizamento entre a bola e o prato.
3. Forças de atrito são desprezíveis.

Nomenclatura utilizada

Para as variáveis do sistema, utilizou-se as seguintes nomenclaturas:

- θ_y - ângulo com relação ao eixo X
- $\dot{\theta}_y$ - velocidade angular do prato com relação ao eixo X
- $\ddot{\theta}_y$ - aceleração angular do prato com relação ao eixo X

- θ_x - ângulo com relação ao eixo Y
- $\dot{\theta}_x$ - velocidade angular do prato com relação ao eixo Y
- $\ddot{\theta}_x$ - aceleração angular do prato com relação ao eixo Y
- m_b - massa da bola
- J_b - momento de inércia da bola
- r_b - raio da bola
- v_b - velocidade da bola
- x - posição da bola no eixo x
- y - posição da bola no eixo y
- $\dot{x}$ - velocidade da bola no eixo x
- $\dot{y}$ - velocidade da bola no eixo y
- $\ddot{x}$ - aceleração da bola no eixo x
- $\ddot{y}$ - aceleração da bola no eixo y

Equações de movimento: derivação

Para esta seção, utitilizou-se a modelagem matemática proposta em [1]. A formulação Lagrangiana utiliza escalares e torna a transformação de coordenadas uma tarefa mais simples. O Lagrangiano pode ser definido como:

$$\mathscr{L} = T - V$$

Onde T é a energia cinética do sistema e V é a energia potencial do sistema. A energia cinética total do sistema tem quatro componentes: energia cinética translacional da bola com relação à origem do prato; a energia rotacional da bola com relação ao seu centro de gravidade; energia cinética translacional do prato; energia cinética rotacional da bola no sistema bola-prato com relação à origem do prato.

Tratando da energia translacional da bola com relação à origem do prato, a posição da bola pode ser escrita como:

$$\overrightarrow{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + (x\sin(\theta_y) + y\sin(\theta_x))$$

Ao derivar a equação anterior, tem-se:

$$\dot{\overrightarrow{r}} = (\dot{x}\sin(\theta_y) + x\dot{\theta}_y\cos(\theta_y) + \dot{y}\sin(\theta_x) + y\dot{\theta}_x\cos(\theta_x))$$

Ao utilizar a expansão por série de Taylor para $\sin(\theta_y), \sin(\theta_x)\ \ e\ \ \cos(\theta_y), \cos(\theta_x)$ em torno do ponto de equilíbrio, tem-se que:

$$[\theta_y \quad \theta_x]' = [0 \quad 0]'$$

De modo que:

$$\overrightarrow{r} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + (-x\dot{\theta}_y + y\dot{\theta}_x)\hat{k}$$

O módulo do vetor de posição é:

$$|\dot{r}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (-x\dot{\theta}_y + y\dot{\theta}_x)^2}$$

A energia cinética translacional é dada por:

$$T_{bt} = \frac{1}{2}m_b(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (-x\dot{\theta}_y + y\dot{\theta}x)^2)$$

A energia cinética rotacional da bola em relação ao seu centro de gravidade pode ser escrita como:

$$T_{br} = \frac{1}{2}J_b\omega_b^2$$

Tendo em vista que não há separação entre a bola e o prato, a velocidade dela em relação ao prato é zero, de modo que $\omega_b = \frac{v_b}{r_b}$. A velocidade da bola, v_b pode ser definida como:

$$\overrightarrow{v_b} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \rightarrow |v_b| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Sendo assim, a energia rotacional da bola em relação ao seu centro de gravidade é:

$$T_{br} = \frac{1}{2}\frac{J_b}{r_b^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Analisando então a energia cinética rotacional do sistema bola-prato com relação à origem do prato, constata-se que a energia total consiste em três elementos: a energia cinética da bola, a energia cinética devido aos momentos de inércia do prato em x e a energia cinética devido aos momentos de inércia do prato na direção de y. Assim:

$$T_{pb} = \frac{1}{2}J_b(\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_x^2) + \frac{1}{2}J_{px}\dot{\theta}_y^2 + \frac{1}{2}J_{py}\dot{\theta}_x^2$$

Onde J_{px} e J_{py} são os momentos de inércia do prato com relação aos eixos X e Y respectivamente. θ_y e θ_x são as inclinações do prato com relação aos eixos X e Y.

A energia potencial do sistema, relativa ao plano de equilíbrio, pode ser expressa como:

$$V = m_b g(-x\sin\theta_y + y\sin(\theta_x))$$

Utilizando a formulação Lagrangiana e derivando as equações de movimento, tem-se que:

$$\mathscr{L} = T_{bt} + T_{br} + T_{pb} - V$$

Substituindo as expressões de $T_{bt},\ T_{br},\ T_{pb}\ e\ V$, tem-se:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(m_b + \frac{J_b}{r_b^2})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m_b(x\dot{\theta}_y - y\dot{\theta}_x)^2 + \frac{1}{2}J_b(\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_x^2) + \frac{1}{2}J_{px}\dot{\theta}_x^2 + \frac{1}{2}J_{py}\dot{\theta}_y^2 - m_b g(-x\sin\theta_y + y\sin\theta_x)$$

Utilizando a formulação Lagrangiana, e estabelecendo as coordenadas como $q_1 = x \ e \ q_2 = y$, obtem-se:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{x}_i}) - \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x_i} = F_x$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{y}_i}) - \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta y_i} = F_y$$

Para $q_i = x$:

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{x}} = (m_b + \frac{J_b}{r_b^2})\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{x}}) = (m_b + \frac{J_b}{r_b^2})\ddot{x}$$

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x} = m_b\dot{\theta}_y(x\dot{\theta}_y - y\dot{\theta}_x) + m_b g\sin\theta_y$$

Para $q_i = y$:

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{y}} = (m_b + \frac{J_b}{r_b^2})\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{y}}) = (m_b + \frac{J_b}{r_b^2})\ddot{y}$$

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta y} = m_b\dot{\theta}_x(y\dot{\theta}_x - x\dot{\theta}_y) - m_b g\sin\theta_x$$

Sabendo que não há quaisquer forças externas em x e em y, $F_x, F_y = 0$. De forma que:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{x}}) - \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x} = F_x = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{x}}) - \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x} = (m_b + \frac{J_b}{r_b^2})\ddot{x} - m_b\dot{\theta}_y(x\dot{\theta}_y - y\dot{\theta}_x) - m_b g\sin\theta_y = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{y}}) - \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta y} = (m_b + \frac{J_b}{r_b^2})\ddot{y} - m_b\dot{\theta}_x(y\dot{\theta}_x - x\dot{\theta}_y) + m_b g\sin\theta_y = 0$$

Isolando as derivadas de segunda ordem, tem-se:

$$\ddot{x} = \frac{m_b(x\dot{\theta}_y^2 - y\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y + g\sin\theta_y)}{mb + \frac{J_b}{r_b^2}}$$

$$\ddot{y} = \frac{mb(y\dot{\theta}_x^2 + x\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y - g\sin\theta_x)}{m_b + J_b r_b^2}$$

Análise Cinemática das Juntas

A Figura 2 ilustra um corte transversal da planta em relação ao eixo de um dos motores.

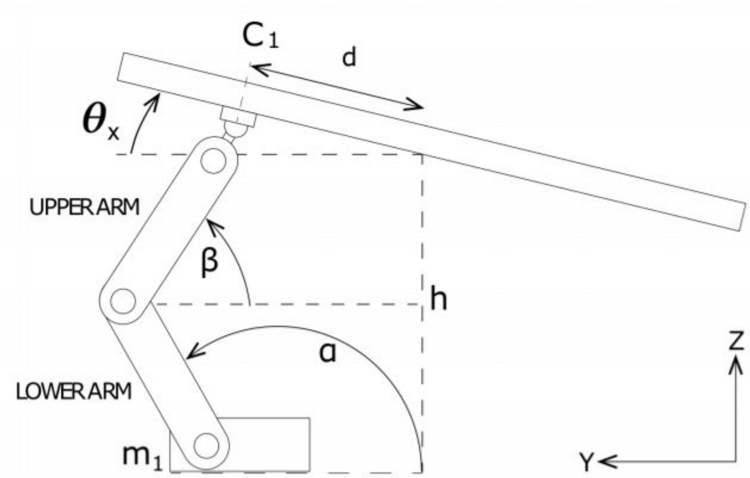

Figura 2: Corte transversal do sistema com relação ao motor 1.

A figura abaixo ilustra a vista superior do sistema e o posicionamento das juntas.

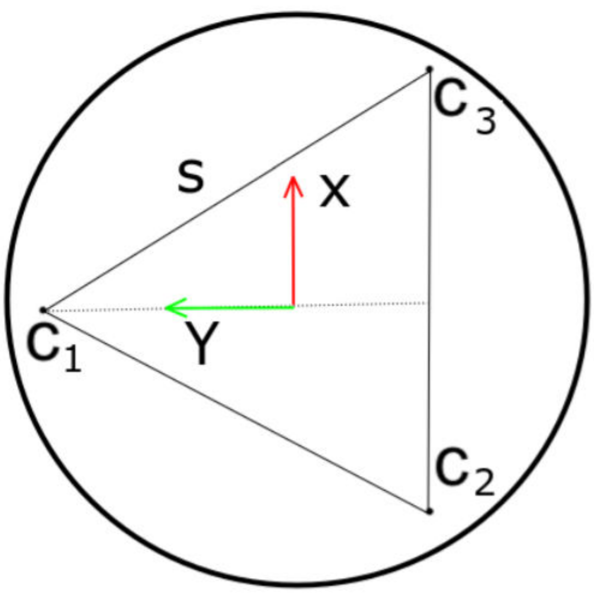

Figura 3: Vista superior do triângulo equilátero formado pelos pontos onde as juntas estão acopladas ao prato.

A altura no eixo Z pode ser então definida por:

$$Z_{c1} = h + \frac{S\cos(30^o)}{2}\sin(\theta_x)$$

$$Z_{c1} = h + \frac{S}{\sqrt{3}}\sin(\theta_x)$$

Alternativamente, Zc_1 pode ser escrito como:

$$Zc_1 = l\sin\alpha + l\sin\beta = 2l\sin\alpha_1$$

$$\alpha_1 = \arcsin(\frac{zc_1}{2l})$$

A Figura 4 ilustra um corte transversal com relação aos motores 2 e 3.

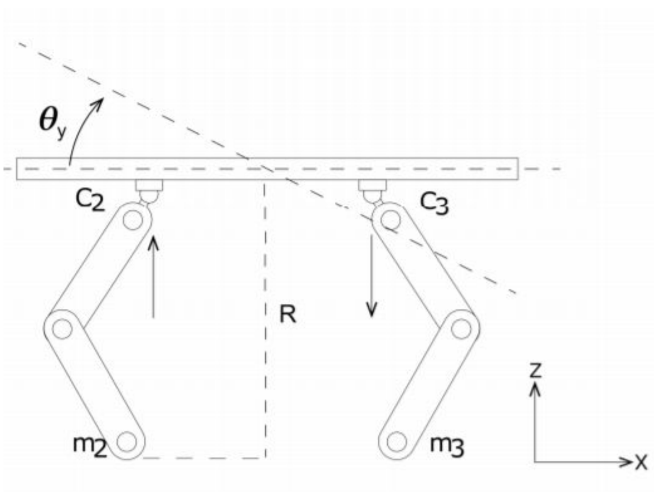

Figura 4: Seção transversal às juntas 2 e 3.

A altura no eixo z dos pontos Zc_2 e Zc_3 é expressa por:

$$Zc_2 = R + \frac{s}{\sqrt{3}}\sin\theta_y$$

$$Zc_3 = R - \frac{s}{\sqrt{3}}\sin\theta_y$$

$$R = h - \frac{s}{s\sqrt{3}}\sin\theta_x$$

$$\alpha_2 = \arcsin\frac{Zc_2}{2l}$$

$$\alpha_3 = \arcsin\frac{Zc_3}{2l}$$

Os ângulos $\alpha_{1,2,3}$ são equivalentes aos ângulos dos motores servo $m_{1,2,3}$. Para evitar singularidades no sistema, força-se $\alpha_{1,2,3}$ a operar na região de 90 a -145º.

Desenvolvimento

Após a validação das equações referentes ao modelo dinâmico do MOAB, bem como da análise da cinemática das juntas, verificou-se a compatibilidade destas com o modelo proposto por CITAR REPOSITORIO DO MOAB.

De modo a validar as equações, o sistema foi representado de duas formas: utilizando o Simscape e o Simulink, implementando no segundo as equações diferenciais que descrevem o sistema. Para analisar a posição da bola de forma comparativa entre as duas simulações, estabeleceu-se em malha fechada valores de referência para o ângulo em relação ao eixo x, θ_y e o ângulo com relação ao eixo y, θ_x. Os valores de referência adotados para uma simulação de dois segundos podem ser visualizados na Figura 5.

```
initializeMoab
```

```
showing Mechanics Explorer
```

```
MOAB_PARAMS
```

```
out = sim('MyMOAB')
```

```
out = 
  Simulink.SimulationOutput:

                logsout: [1x1 Simulink.SimulationData.Dataset]
                 simlog: [1x1 simscape.logging.Node]
                 simout: [1x1 timeseries]
                   tout: [550x1 double]

     SimulationMetadata: [1x1 Simulink.SimulationMetadata]
           ErrorMessage: [0x0 char]
```

```
tx = out.simout.Data(:,1,:); tx = tx(:,:);
ty = out.simout.Data(:,2,:); ty = ty(:,:);
x2 = out.simout.Data(:,3,:); x2 = x2(:,:);
x1 = out.simout.Data(:,4,:); x1 = x1(:,:);
y2 = out.simout.Data(:,5,:); y2 = y2(:,:);
y1 = out.simout.Data(:,6,:); y1 = y1(:,:);
t = out.simout.time;

figure();
plot(t,tx,'s','color','#A2142F','LineWidth',1), hold on;
plot(t,ty,'-','color','#77AC30','LineWidth',1), hold off;
```

```
ylabel('$\theta_x,\theta_y\; (rad)$','Interpreter','Latex');
ylim([-0.015 0.025])
xlabel('$t\;(s)$','Interpreter','Latex');
legend('$\theta_x$','$\theta_y$','Interpreter','Latex',...
        'Location', "northwest"); grid;
```

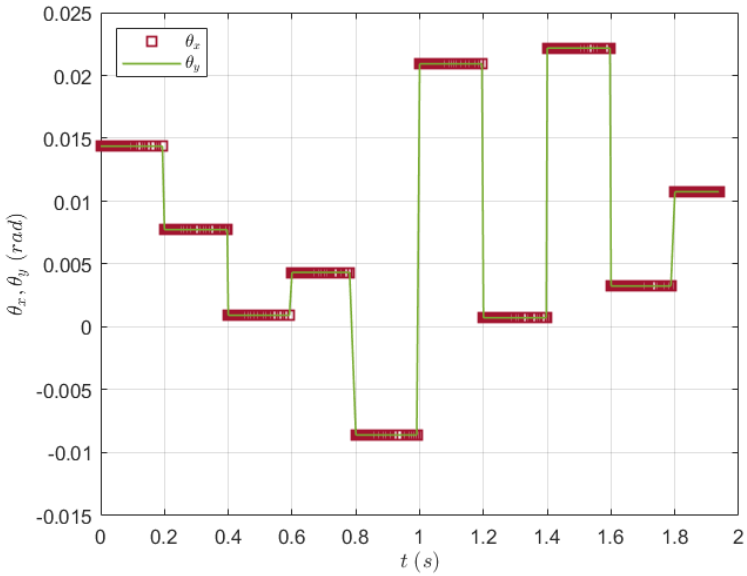

Figura 5: Referências impostas para os ângulos θ_x e θ_y.

Ao utilizar estes valores como referência em malha fechada, observou-se a posição da bola no prato com relação aos eixos x e y para dois segundos de simulação. O resultado pode ser observado na Figura 6.

```
figure();
subplot(2,1,1)
plot(t(1:7:end),x1(1:7:end),'o','LineWidth',1,"Color",'#77AC30'), hold on;
plot(t,x2,'LineWidth',1,"Color",'#A2142F'), hold off;
ylabel('$x\;(m)$','Interpreter','Latex');
xlabel('$t\;(s)$','Interpreter','Latex');
ylim([-0.01 0.08])
legend('$x_{Simulink}(t)$','$x_{Simscape}(t)$','Interpreter','Latex',...
        'Location', "southeast"); grid;
subplot(2,1,2)
plot(t(1:7:end),y1(1:7:end),'o','LineWidth',1.2,"Color",'#77AC30'), hold on;
plot(t,y2,'-.','LineWidth',1.2,"Color",'#A2142F'), hold off;
ylabel('$y\;(m)$','Interpreter','Latex');
xlabel('$t\;(s)$','Interpreter','Latex');
legend('$y_{Simulink}(t)$','$y_{Simscape}(t)$','Interpreter','Latex',...
        'Location', "northeast"); grid;
```

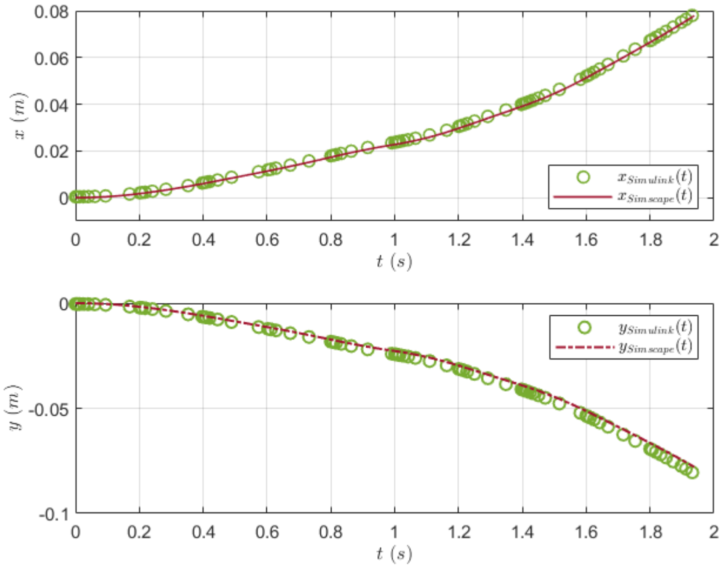

Figura 6: Posição da bola no prato com relação aos eixos x e y.

Diante dos resultados de simulação, pode-se afirmar que a velocidade da bola no Simulink é superior à obtida com o Simscape. Isto pode ser atribuído à premissa inicial de que as forças de atrito são desprezíveis. O diagrama de blocos do Simulink despreza estas forças, no entanto, o Simscape considera um coeficiente de atrito não nulo. Ainda que a discrepância entre os valores seja pequena, a diferença de posição da bola nos dois eixos se dá pela consideração da força de atrito atuante, no caso do Simscape, e a inexistência da mesma no caso do Simulink.

Referências Bibliográficas

[1] A. SINGH. **Moab System Modeling and PID Controller Design.**