Relatório - Atividade 3 - Reguladores Autoajustáveis Determinísticos

Análise e Projeto de Sistemas de Controle - 21.1

Prof. Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Aluno: Arthur Dimitri Brito Oliveira

Este relatório tem como objetivo a apresentação e o desenvolvimento dos exercícios resolvidos referentes a STR (*Self Tuning Regulators*) do Capítulo 3 do livro Adaptive Control [1].

Fundamentação Teórica

A utilização de reguladores autoajustáveis (STR) está associada à automatização das tarefas envolvidas no desenvolvimento de sistemas de controle, como modelagem, projeto da lei de controle, implementação e validação. Nesse contexto, uma das razões para utilizar controladores adaptativos é que o processo ou o ambiente que o cerca mudam de forma contínua.

Supondo um processo descrito por um sistema de única entrada e única saída

$$Ay(t) = B(u(t) + v(t))$$

Sendo y a saída, y a saída e v a perturbação. A e B são polinômios em função do operador de atraso q^{-1}. Os graus dos polinômios são $deg\ A = n$ e $deb\ B = deg\ A - d_0$, sendo d_0 denominado de excesso de polo, e represente a parte inteira da razão entre o modelo do processo e o operador de atrado q^{-1}.

Uma lei de controle genérica pode ser descrita por:

$$Ru(t) = Tu_c(t) - Sy(t)$$

Sendo R, S e T polinômios. Ao isolar $u(t)$ e substituir na equação do processo, tem-se:

$$u(t) = \frac{T}{R}u_c(t) - \frac{S}{R}y(t)$$

$$Ay(t) = B(\frac{T}{R}u_c(t) - \frac{S}{R}y(t) + v(t))$$

$$y(t)(\frac{AR + BS}{R}) = B(\frac{T}{R}u_c(t) + v(t))$$

$$y(t) = \frac{BT}{AR + BS} u_c(t) + \frac{BR}{AR + BS} v(t)$$

$$u(t) = \frac{AT}{AR + BS} u_c(t) - \frac{BS}{AR + BS} v(t)$$

O polinômio característico da malha fechada é, então:

$$A_c = AR + BS$$

A ideia central do método de projeto é a especificação de um polinômio característico desejado. A equação anterior é conhecida como **Equação Diophantina.** No entanto, a equação só determina os polinômios R e S, o que requer outras condições para determinar o polinômio T. Avaliando a resposta do sinal de controle u_c para a saída, descrita pelas dinâmicas:

$$A_m y_m(t) = B_m u_c(t)$$

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{BT}{A_c} = \frac{B_m}{A_m}$$

O polinômio B pode ser escrito como $B = B^+B^-$, onde B^+ é um polinômio mônico, cujos zeros são estáveis e bem amortecidos, de maneira que podem ser cancelados pelo controlador. B^- corresponde a fatores instáveis ou pouco amortecidos que não podem ser cancelados. Assim, B^- deve ser um fator de B_m, de modo que:

$$B_m = B^- B'_m$$

A_m também deve ser um fator de A_c, de modo que: $A_c = A_0 A_m B^+$. Assim:

$$\frac{B^+B^-T}{A_0 A_m B^+} = \frac{B^- B'_m}{A_m}$$

$$T = A_0 B'_m$$

De tal forma que a equação de Diophantine se torna

$$AR' + B^- S = A_0 A_m = A'_c$$

Desenvolvimento

Os métodos aqui descritos foram implementados utilizando o Matlab. Inicialmente, os problemas referentes aos exemplos são formulados. Posteriormente, discute-se a resolução e os resultados obtidos com as simulações.

Exemplo 3.1: Cancelamento de zeros

Considerando um processo de tempo contínuo descrito por:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

A função de tempo discreto para $h = 0.5$ é:

$$H(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_0 q + b_1}{q^2 + a_1 q + a_2} = \frac{0.1065q + 0.0902}{q^2 - 1.6065q + 0.6065}$$

Tendo o sistema desejado em malha-fechada sendo:

$$\frac{B_m(q)}{A_m(q)} = \frac{b_{m0} q}{q^2 + a_{m1} q + a_{m2}} = \frac{0.1761q}{q} 2 - 1.3205q + 0.4966$$

Pelo algoritmo MDPP, sabe-se que $B^- = b_0$, $B^+ = B/b_0$, $B_m = B'_m B^-$, assim:

$$B^+ = \frac{b_0 q + b1}{b_0} = q + b_1/b_0$$

$$B^- = b_0$$

$$B'_m = b_{m0} q/b_0$$

O processo é de segunda ordem, isto implica que os polinômios $R, S\ e\ T$ seraõ de primeira ordem, já que $degS = degA - 1$, $degR = degS = 1$. Então $degR' = degR - degB^+$, no entanto, como o polinômio é monico, $R' = 1$. Como $degA_0 = degA - degB - 1 = 0$, $A_0 = 1$. A equação de Diophantine se torna:

$$AR' + B^- S = (q^2 + a_1 q + a_2).1 + b_0(s_0 q + s_1) = q^2 + a_{m1} + a_{m2}$$

Comparando os coeficientes, tem-se:

$$s_0 = \frac{a_{m1} - a_1}{b_0}$$

$$s_1 = \frac{a_{m2} - a_2}{b_0}$$

Diante disso, conclui-se que:

$$R = B^+R' = B^+ = q + b_1/b_0$$

$$S = s_0q + s_1 = \frac{a_{m1} - a_1}{b_0}q + \frac{a_{m2} - a_2}{b_0}$$

$$B'_m = \frac{b_{m0}q}{b_0}$$

Para que as dinâmicas indesejáveis referentes ao fator B^+ sejam canceladas pelo polinômio característico do controlador A_c, é necessário que o zero não seja pouco amortecido.

Exemplo 3.2: Model-following sem cancelamento de zeros

Considerando o mesmo equivalente discreto para a função de transferência $G(s)$:

$$H(q) = \frac{b_0q + b_1}{q^2 + a_1q + a}$$

Como não há o cancelamento de nenhum zero, pode-se afirmar que:

$$B^+ = 1$$

$$B = B^+B^- = B^- = b_0q + b_1$$

Tendo em vista a resposta desejada em malha fechada como sendo:

$$H_m(q) = \beta\frac{b_0q + b_1}{q^2 + a_{m1}q + a_{m2}} = \frac{b_{m0}q + b_{m1}}{q^2 + a_{m1}q + a_{m2}}$$

β é responsável pelo ganho unitário em regime. Sabendo que $degS = degA - 1 = 1$, $degR' = degR - degB^+ = 1$, de modo que R' é monico e equivale a $R' = q + r_1$. Como $degS = 1$, $s = s_0q + s_1$. A equação de Diophantine então se torna:

$$AR' + B^-S = (q^2 + a_1q + a_2)(q + r_1) + (b_0q + b_1)(s_0q + s_1)$$

Ao adotar-se $q = -b_1/b_0$:

$$r_1 = \frac{a_0a_{m2}b_0^2 + (a_2 - a_{m2} - a_0a_{m1})b_0b_1 + (a_0 + a_{m1} - a_1)b_1^2}{b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2}$$

Vale-se salientar que o denominador de r_1 é nulo caso A e B tenham um fator em comum. No entanto, caso isso aconteça, a premissa da equação de Diophantine de que A e B são primos relativos é invalidada.

Exemplo 3.3: Sistema de tempo contínuo

O método proposto no exemplo 1 será usado para determinar um controlador de tempo contínuo. Tendo em vista que o processo é de segunda ordem, o sistema em malha fechada será de terceira ordem. A função de transferência é:

$$G(s) = \frac{b}{s(s+a)}$$

Como $degA = 2$ e $degB = 1$, sabe-se que $B^- = b$, $B = B^+B^- \to B^+ = B/B^- = 1$. Sabendo que a resposta desejada para a função de transferência é:

$$\frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{w^2}{s^2 + 2\xi\omega s + w^2}$$

Sabendo que $B_m = B^{'}_m B^- \to Bm' = \omega^2/b$, e que $degS = degA - 1 = 1$ e $degS = degR = 1$, tem-se que R' é monico. Além disso, $degA_0 = degA - degB^+ - 1 = 1$, de modo que $A_0 = s + a_0$. Por fim, $degS = 1 \to S = s_0 s + s_1$. A equação de Diophantine se torna:

$$AR' + B^-S = s(s+a)(s+r_1) + b(s_0 s + s_1) = (s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)(s + a_0)$$

Igualando os termos, tem-se:

$$a + r_1 = 2\xi\omega + a_0$$

$$ar_1 + bs_0 = w^2 + 2\xi\omega a_0$$

$$bs_1 = w^2 a_0$$

Caso $b \neq 0$, a solução das equações é:

$$r_1 = 2\xi\omega + a_0 - a$$

$$s_0 = \frac{a_0 2\xi\omega + w^2 - ar_1}{b}$$

$$s_1 = \frac{\omega^2 a_0}{b}$$

Sabendo que $B^+ = 1$, $B^- = b$ e que $B^{'}_m = \omega^2/b$, tem-se que:

$$T(s) = B^{'}_m(s)A_0(s) = \frac{\omega^2}{b}(s + a_0)$$

É possível dar uma interpretação ao polinômio A_0 que aparece na solução de grau mínimo da alocação de polos no caso em que nenhum zero do processo é cancelado, ou seja, quando $B^- \neq b_0$. A equação de Diophantine se torna:

$$\frac{T}{R} = \frac{A_0 B^{'}_m}{R} = \frac{(AR' + BS)B^{'}_m}{A_m R} = \frac{AB_m}{BA_m} + \frac{SB_m}{RA_m}$$

A lei de controle pode ser escrita como:

$$u = \frac{T}{R}u_c - \frac{S}{R}y = \frac{AB_m}{RA_m}u_c - \frac{S}{R}y = \frac{AB_m}{BA_m}u_c - \frac{S}{R}(y - y_m)$$

Um diagrama de blocos que representa este controlador pode ser observado na Figura 1. Ele pode ser interpretado como a combinação de um controlador *feedforward,* que tenta cancelar as dinâmicas da planta e substituir pela dinâmica desejada B_m/A_m, e por um controlador de realimentação, que tenta fazer com que a saída siga tal modelo.

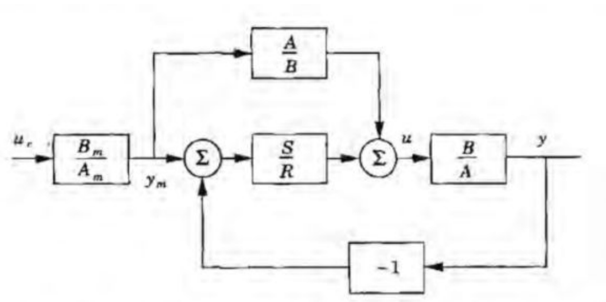


Figura 1: Representação alternativa do diagrama de blocos para o seguidor de modelo.

Sabendo que $degB < degA$, é evidente que $\frac{A}{B}$ não é realizável. Caso o sistema seja fase-mínima, A/B será instável. No entanto, a combinação do modelo desejado B_m/A_m e A/B é realizável se:

$$degS \leq degR$$

$$degT \leq degR$$

Vale-se salientar que a concatenação resultante, $\frac{AB_m}{BA_m}$, está separada de S/R, e estes termos podem causar quaisquer problemas de instabilidade pois eles aparecem apenas como parte do compensador *feedforward.*

Exemplo 3.4: Regulador auto-ajustável com cancelamento de zero do processo

Caso a função de transferência do processo não seja conhecida, é possível utilizar o método de mínimos quadrados recursivo para estimá-la. Sendo o modelo do processo descrito por:

$$y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - \ ... \ - a_ny(t-n) + b_0u(t-d_0 + \ ... \ b_mu(t-d_0-m)$$

O modelo pode ser expresso como:

$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta$

Sendo $\theta^T = [a_1\ a_2\ \dots\ a_n\ b_0\ b_m]$, $\varphi^T(t-1) = [-y(t-1)\ \dots\ -y(t-n)\ u(t-d_o)\ u(t-d_0-m)]$. O estimador é expresso por:

$$\widehat{\theta}(t) = \widetilde{\theta}(t-1) + K(t)\epsilon(t)$$

$$\epsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t-1)\widehat{\theta}(t-1)$$

$$K(t) = P(t-1)\varphi(t-1)(\lambda + \phi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1))^{-1}$$

$$P(t) = (I - K(t)\varphi^T(t-1))P(t-1)/\lambda$$

A estimação dos coeficientes associados à função de transferência ocorre e aplica-se a equação de Diophantine para atingir o desempenho desejado em malha fechada. Este procedimento ocorre a cada instante de amostragem.

A função de transferência desejada para a malha fechada é dada por:

$$H_m(q) = \frac{0.1761q}{q^2 - 1.3205 + 0.4966}$$

O comportamento temporal desejado, a resposta temporal alcançada e o sinal de controle aplicado podem ser visualizados na Figura (XXXXXXXXXXXX) a seguir:

```
ex_4
```

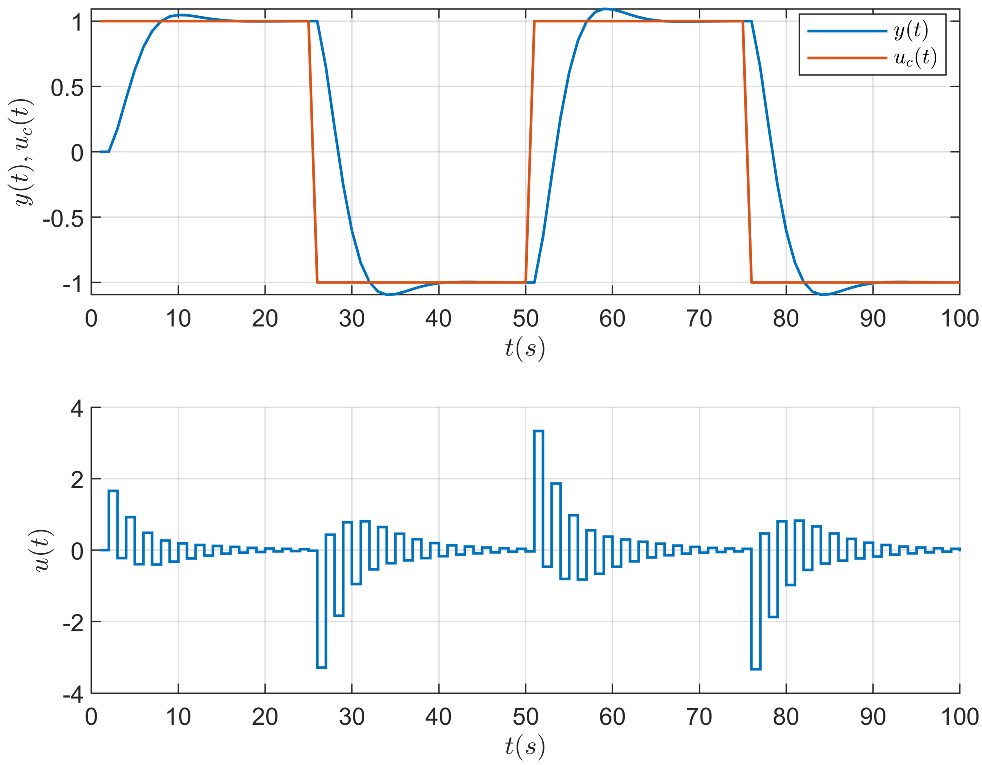


Figura 2: Resposta temporal do sinal de saída $y(t)$, a referência adotada $u_c(t)$ e o sinal de controle aplicado $u(t)$.

Os parâmetros do controlador são expressos como funções dos parâmetros do modelo e das especificações, de modo que:

$u(t) = r_1 u(t-1) = t_0 u_c(t) - s_0 y(t) - s_1 y(t-1)$

Pela resposta temporal, é evidente que o sinal de controle tem severas oscilações. Isso se deve ao zero pouco amortecido $z = b_1/b_0 = -0.85$. Considerando que a função de transferência associada à resposta temporal de $y(t)$ pode ser descrita por:

$$H(q) = \frac{b_0 q + b_1}{q^2 + a_1 q + a_2}$$

Ao estimar os parâmetros dos polinômios característicos por meio do método de mínimos quadrados recursivo, tem-se a estimativa dos parâmetros em função do tempo na figura a seguir.

```
ex_4_2
```

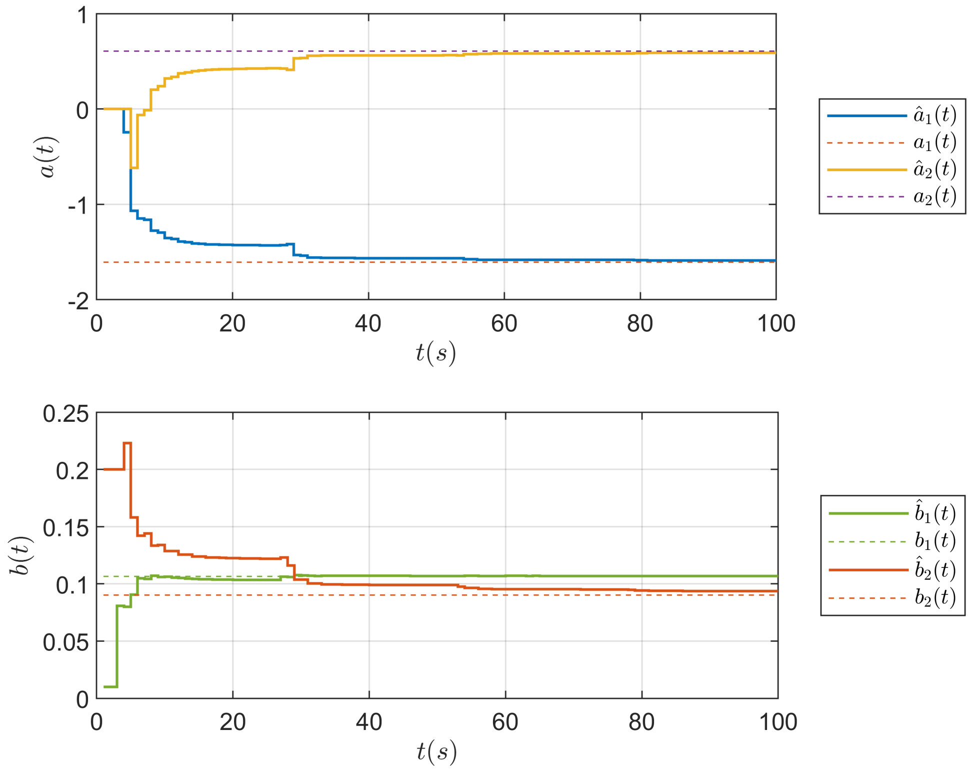


Figura 3: Evolução temporal da estimativa dos parâmetros $\widehat{b}_0$, $\widehat{b}_1$, $\widehat{a}_1$ e $\widehat{a}_2$ da função de transferência $H(q)$.

Como pode-se observar, há uma boa aproximação dos parâmetros reais do processo, em malha aberta, após 25 segundos de simulação. Os polinômios $R, S\ e\ T$ do controlador desejado também são calculados. Sua convergência para os valores desejados pode ser visualizada a seguir:

```
ex_4_3
```

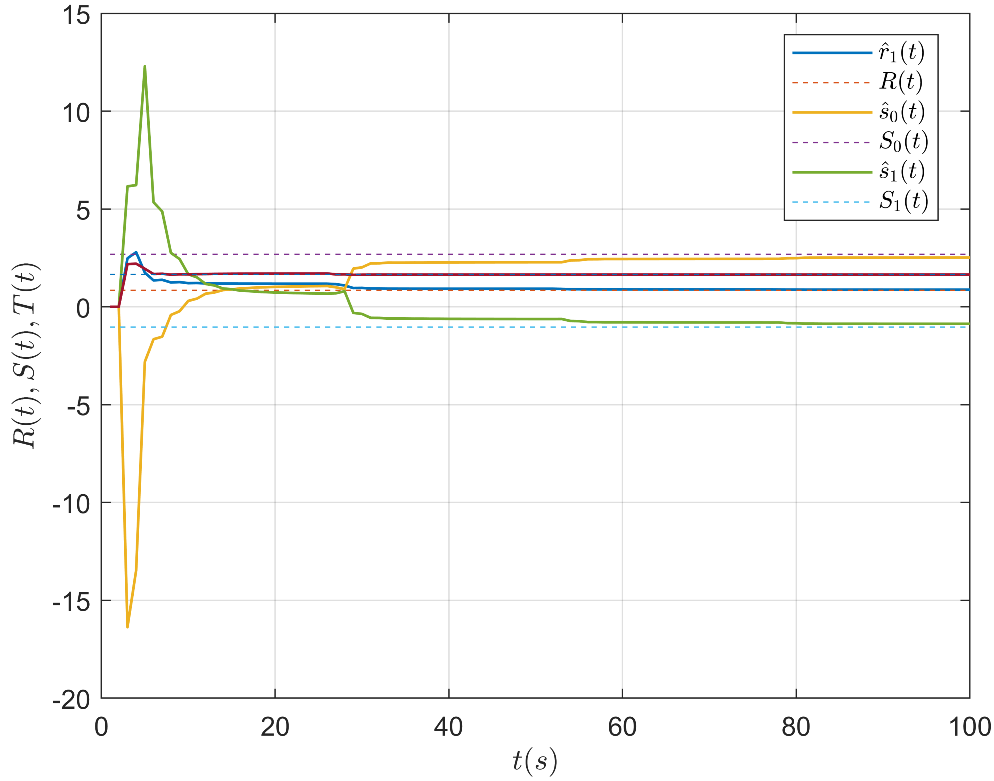


Figura 4: Evolução temporal da estimativa dos coeficientes polinomiais $R, S \ e \ T$.

Como pode-se observar, a estimação dos coeficientes polinomiais converge para os valores desejados. Caso deseje-se uma maior suavidade no sinal de controle aplicado, pode-se manter o zero do processo.

Exemplo 3.5: Regulador indireto auto-ajustável sem cancelamento do zero do processo

A função que expressa o desempenho em malha fechada é dada por:

$$H_m(q) = \frac{B_m}{A_m} = \frac{0.0953q + 0.0808}{q^2 - 1.3205q + 0.4966}$$

O resultado da simulação pode ser visualizado na Figura 5.

```
ex_5
```

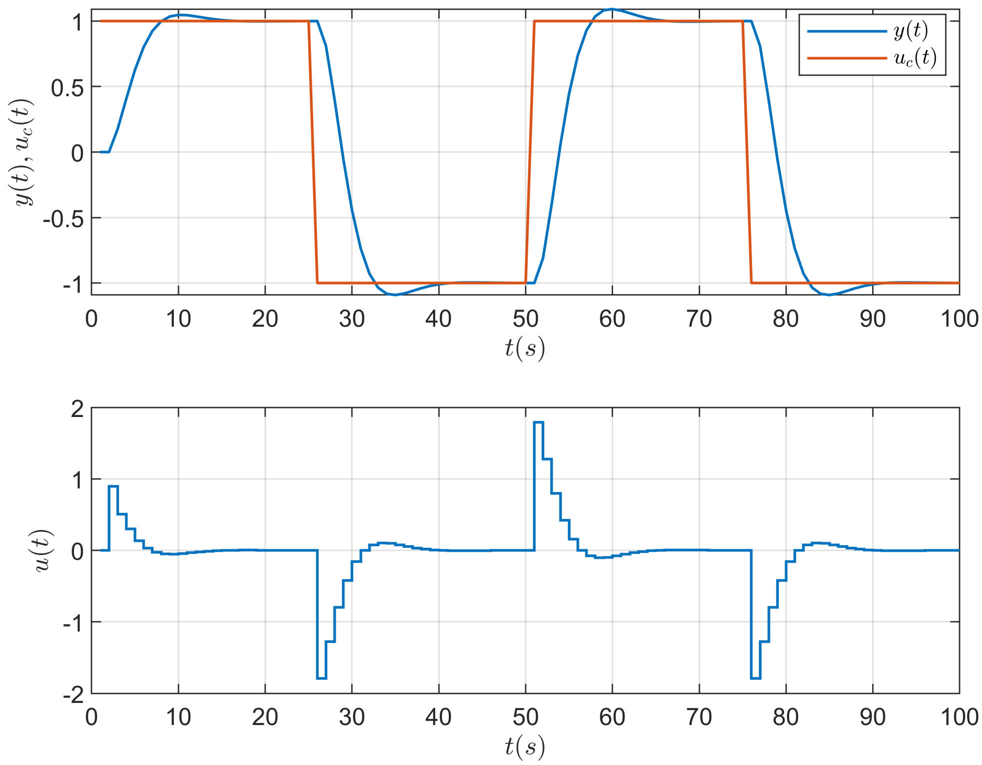


Figura 5: Sinais de saída $y(t)$, referência $u_c(t)$ e de controle $u(t)$.

Pode-se observar um sinal de controle mais suave, e isso se dá pela permanência dos zeros pouco amortecidos do processo. A estimativa dos parâmetros $\hat{\theta}$ por meio de RLS pode ser visualizada na Figura 6.

```
ex_5_1
```

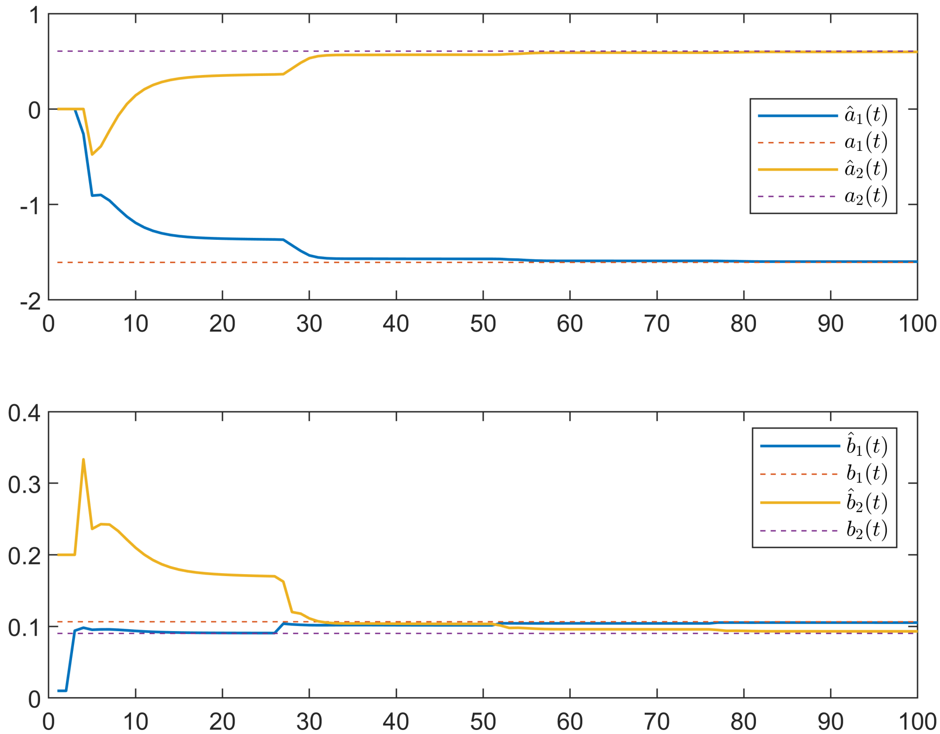


Figura 6: Evolução temporal da estimativa dos parâmetros $\widehat{\theta}$.

A estimação dos parâmetros claramente converge para os valores reais esperados. Também estima-se os polinômios do controlador, e estes podem ser observados na Figura 7.

```
ex_4_3
```

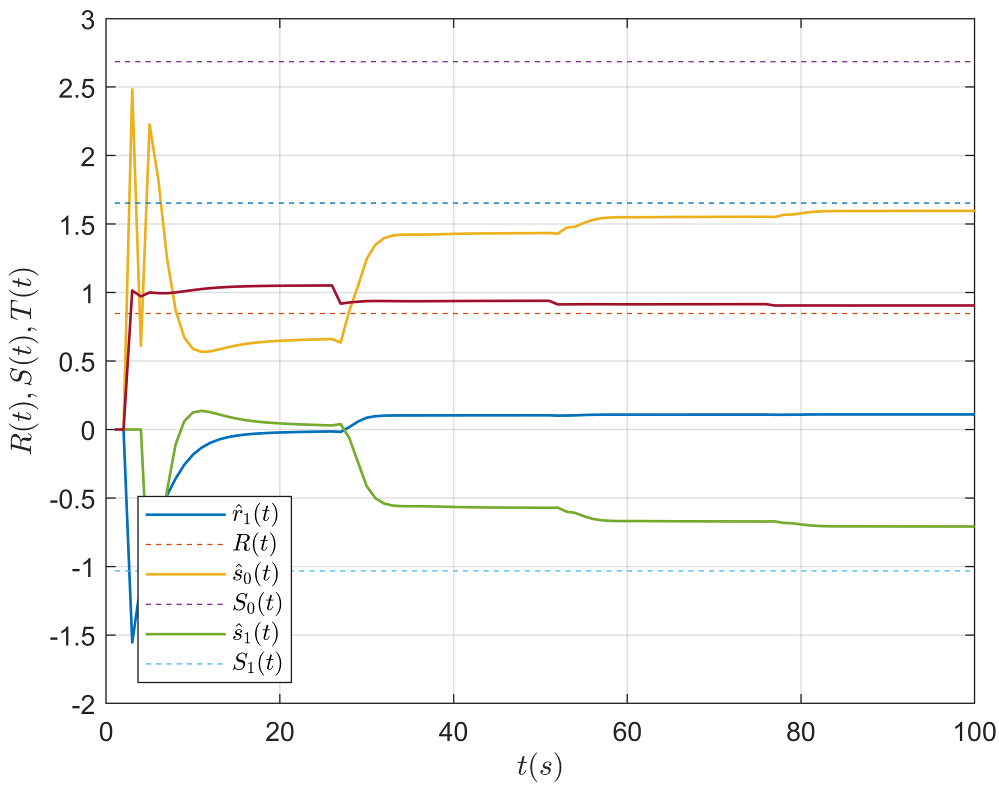


Figura 6: Evolução temporal da estimativa dos polinômios R, S e T.

Exemplo 3.6: Regulador indireto auto-ajustável sem cancelamento do zero do processo

Considerando a função de transferência do processo como sendo

$G(s) = \dfrac{1}{s^2 + s}$ e uma função de transferência em malha-fechada da forma $G_m(s) = \dfrac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$. Para definir $B^+ = 1$, faz-se necessário que $A_0 = q + a_0$, com $a_0 = 2$. O sinal de referência $u_c(t)$, o sinal de saída $y(t)$ e o sinal de controle $u(t)$ podem ser visualizados na Figura 7.

```
ex_6_1
```

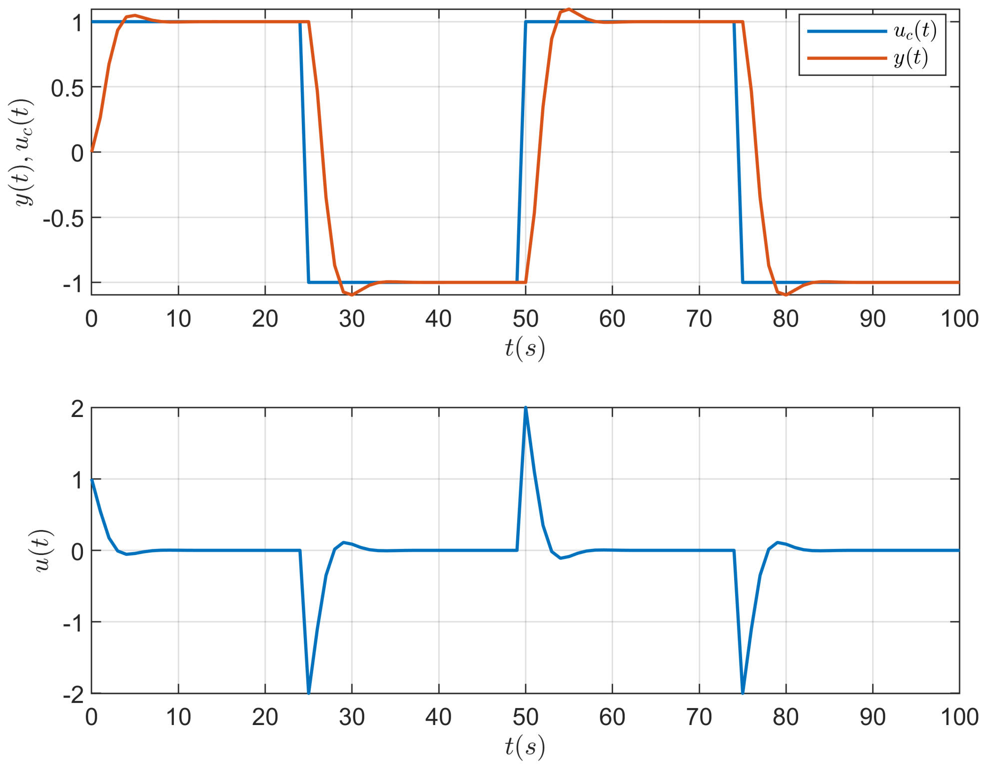


Figura 7: Sinais de saída $y(t)$, referência $u_c(t)$ e de controle $u(t)$.

E estimação dos parâmetros da função de transferência para o processo por meio de RLS resulta em:

```
ex_6_2
```

```
Gc =

    -0.05287 s + 0.8252
  ------------------------
  s^2 + 1.363 s + 0.002261

Continuous-time transfer function.
```

Como pode-se observar, o numerador da função de transferência não corresponde à função de transferência desejada para a malha-fechada. Esse erro numérico pode ser associado à conversão do domínio discreto para o contínuo. A resposta temporal comparativa entre $y_m(t)$ e $y(t)$ ilustrada na Figura 8 evidencia o erro supramencionado.

```
ex_6_3
```

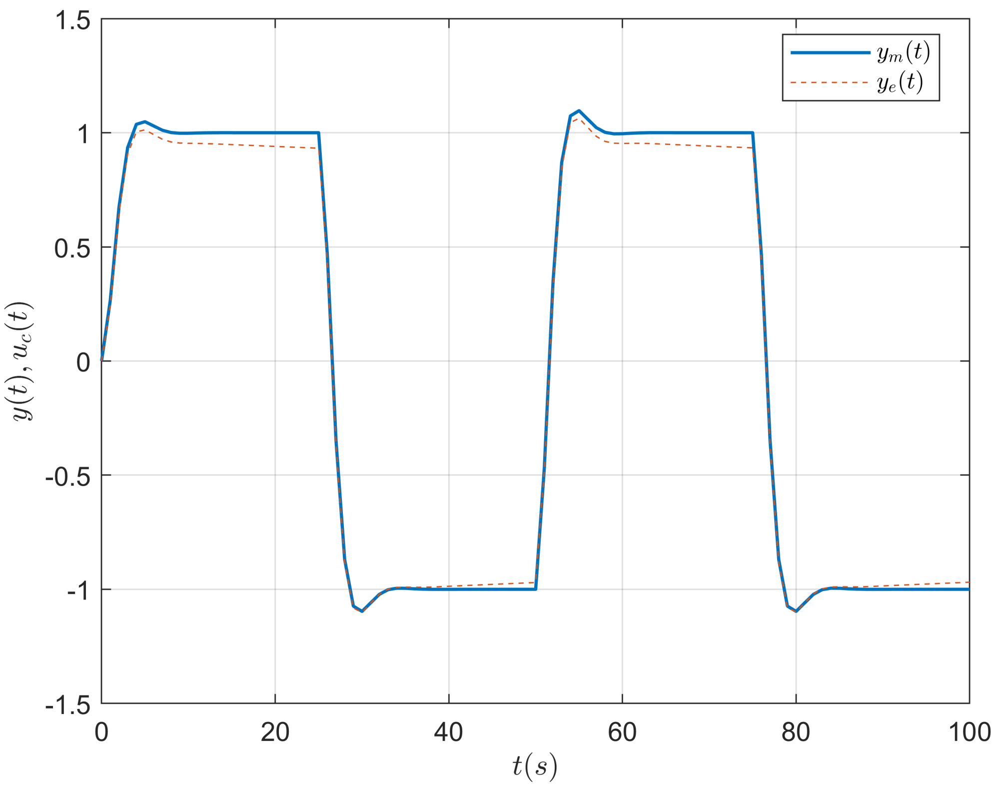


Figura 8: Sinal de saída desejado $y(_m t)$ e sinal de saída real $y(t)$.

```
mse(y,ym)
```

```
ans = 0.0013
```

Exemplo 3.7: Regulador auto-ajustável direto

Ao multiplicar ambos os lados da equação de Diophantine por $y(t)$ tem-se:

$$A_0 A_m y(t) = AR' y(t) + B^- S y(t)$$

Considerando $Ay(t) = Bu(t)$ e $R' B = RB^-$, tem-se:

$A_0 A_m y(t) = B^-(Ru(t) + Sy(t))$

Esta equação pode ser considerada um modelo do processo parametrizada pelos coeficientes polinomiais $B^-, R \ e \ S$. Se os parâmetros desta equação são estimados, a lei de controle é então obtida diretamente, sem projeto. O modelo da equação anterior é não-linear quanto aos parâmetros pois o lado direito da igualdade é multiplicado por B^-.

Caso as dinâmicas do processo o configurem como um sistema de fase mínima, $degA_0 = degA - degB - 1$, B^- será simplesmente uma constantee e a equação se torna:

$$A_m A_0 y(t) = b_0(Ru(t) + Sy(t)) = \widetilde{R}u(t) + \widetilde{S}\, y(t)$$

Onde R é monico e $\widetilde{R} = b_0 R$ e $\widetilde{S} = b_0 S$. O vetor de parâmetros pode ser definido como:

$$\theta = [r_0 \ \dots \ r_i \ s_0 \ \dots \ s_i]$$

Por sua vez, o vetor de regressão é:

$$\varphi(t) = [u(t) \ \dots \ u(t-l) \ \ y(t) \ \dots \ y(t-l)]$$

No caso deste exemplo, como $degA = 2$ e $degB = 1$, $degA_m = 2$ e $degA_0 = 0$, de modo que $A_0 = 1$. Desse modo, o modelo é descrito por:

$$y(t) = r_0 u_f(t-1) + r_1 u_f(t-2) + s_0 y_f(t-1) + s_1 y_f(t-2)$$

As estimativas dos coeficientes dos polinômios $R, S \ e \ T$ podem ser observadas na Figura 9.

```
ex_7
```

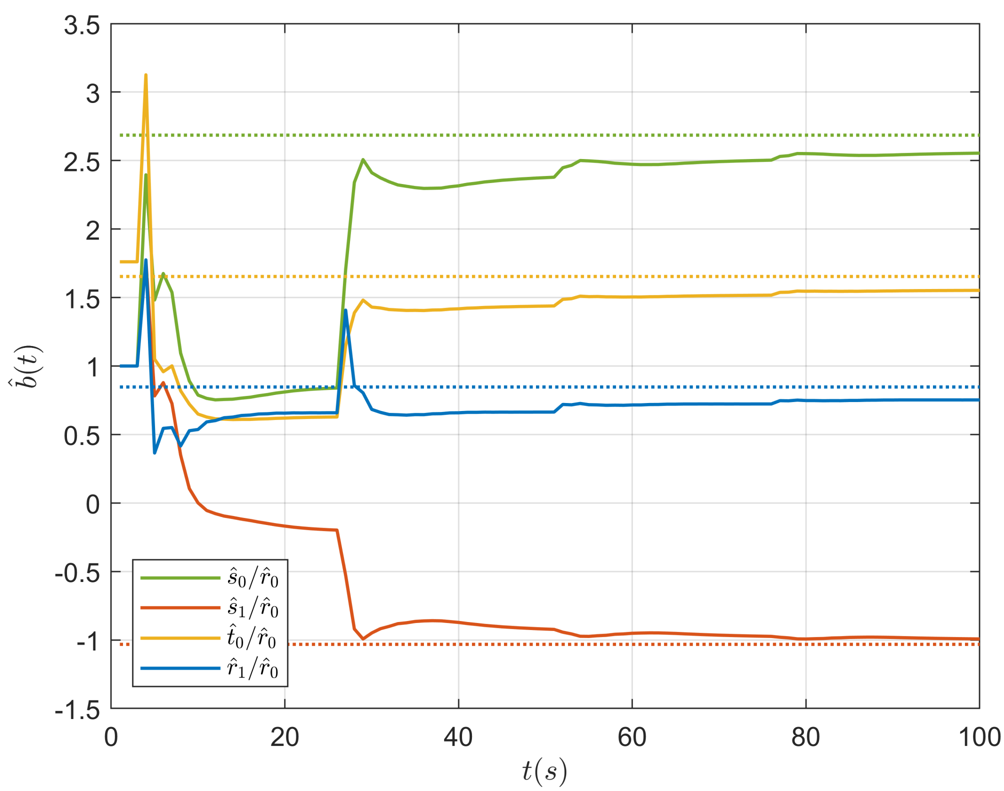


Figura 9: Evolução temporal da estimativa dos coeficientes polinomiais R, S e T do controlador.

Exemplo 3.8: Regulador direto com d0=2

A partir da derivação do algoritmo direto, o parâmetro d_0 era o excesso de polos da planta. Inicialmente, não sabe-se o valor de d_0 e este é tratado como um parâmetro. Por padrão de projeto $d_0 = 2$ e mantendo $A_0 = 1$. Em malha fechada, a estimação se torna:

$$y(t) = r_0 u(t-2) + r_1 u(t-3) + s_0 y(t-2) + s_1 (t-3)$$

A divisão dos parâmetros por $\widehat{r}_0$ também é necessária já para que os polinômios $\widetilde{R}\ e\ \widetilde{S}$ sejam transformados em $R\ e\ S$, visto que $B^- = b_0$. As estimativas dos polinômios $\widehat{s}_0/\widehat{r}_0$, $\widehat{s}_1/\widehat{r}_0$, $\widehat{t}_0/\widehat{r}_0$ e $\widehat{r}_1/\widehat{r}_0$ podem ser visualizadas na figura abaixo.

```
ex_8
```

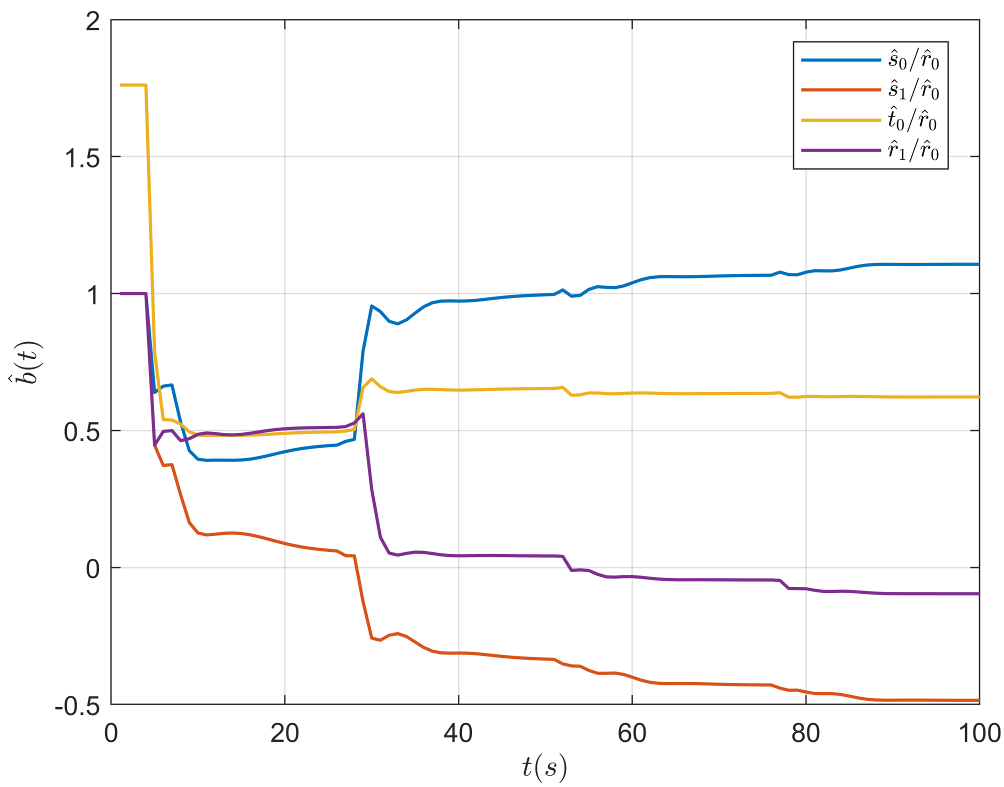


Figura 10: Evolução temporal da estimativa dos coeficientes polinomiais R, S e T do controlador.

Exemplo 3.9: Efeito de perturbações

Considerando o sistema do exemplo 5, onde há a regulação autoajustável indireta sem cancelamento de zeros. Adciona-se um ruído da forma $v(t) = 0.5$ para $t >= 40$. O comportamento do sistema em termos da saída $y(t)$, do sinal de controle $u(t)$ e da referência imposta $u_c(t)$.

```
ex_9_1
```

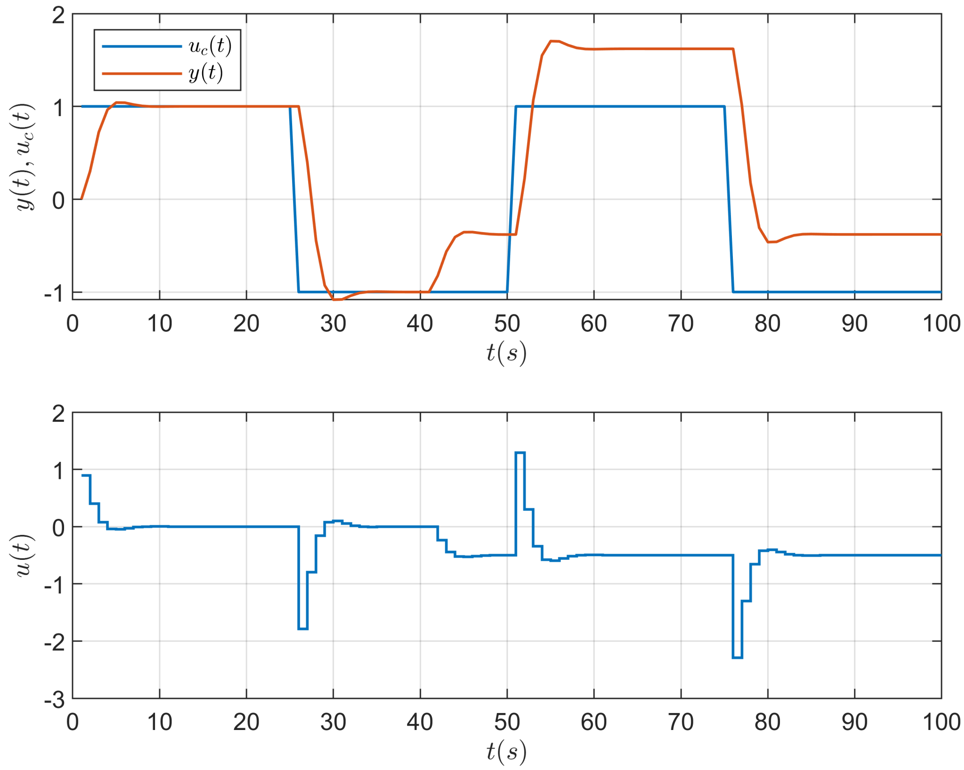


Figura 11: Sinais de saída $y(t)$, referência $u_c(t)$ e de controle $u(t)$.

Como pode-se observar, a adição do distúrbio conduz a um erro em regime permanente. Para estimar os parâmetros por meio da técnica recursiva de mínimos quadrados, utilizou-se um fator de esquecimento $\lambda = 0.98$. A estimativa pode ser visualizada na Figura abaixo.

```
ex_9_2
```

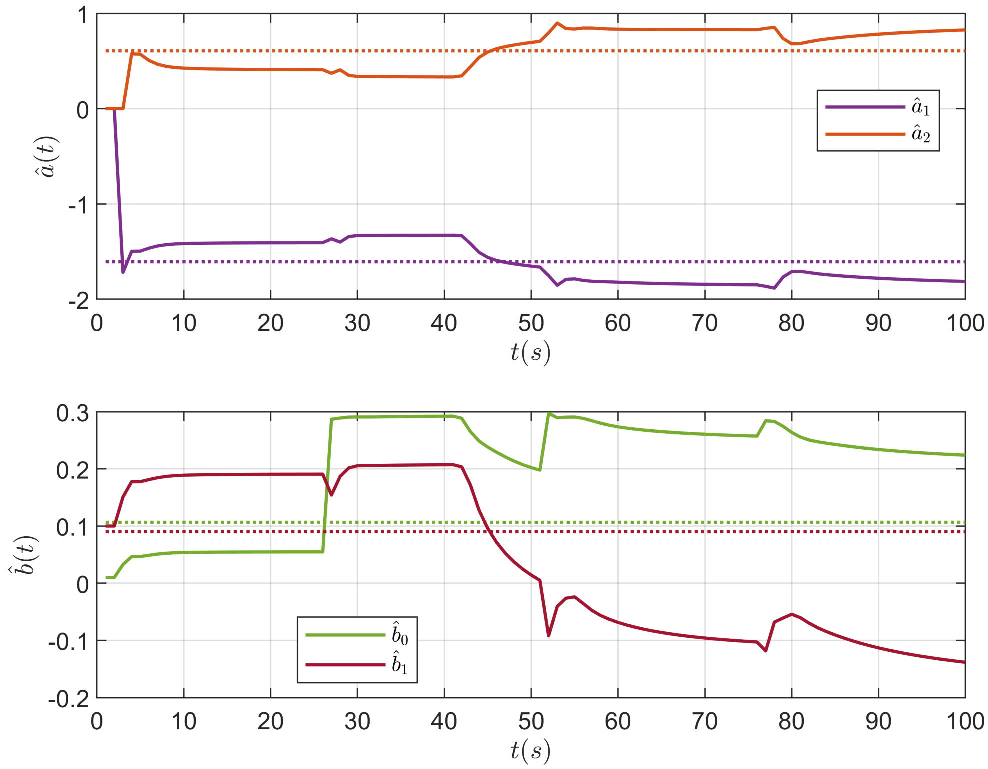


Figura 12: Evolução temporal da estimação dos parâmetros $\widehat{\theta}$ do processo.

Observa-se que há mudanças rápidas na estimação dos parâmetros sempre que há uma mudança no sinal de controle. E isto também é constatável após a adição da perturbação a partir de $t = 40s$. Estes erros na estimação podem indicar que a estrutura do modelo não está correta. Quando o sinal de controle se torna constante, os parâmetros tendem à estabilização em valores distantes dos parâmetros esperados.

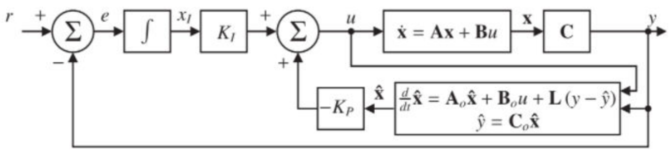
Para lidar com esse tipo de perturbação, pode-se adicionar um modelo dela, caso conhecido. Além disso, é possível adicionar um filtro que atenue as perturbações presentes no processo.

Prova dos teoremas 9.4.1 e 9.4.2

Teorema 9.4.1

O erro da estimação de estado $\widetilde{x} = \widehat{x} - x$ é inatingível a partir da entrada de referência v.

Considerando um sistema do tipo:



$$\rho x = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

O observador de estados pode então ser definido como:

$$\rho\hat{x} = A\hat{x} + Bu + J(y - C\hat{x})$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

A diferença entre os valores reais e estimados pode ser expresso por:

$$\rho\tilde{x} = \rho x - \rho\hat{x}$$

$$\rho\tilde{x} = A(x - \hat{x}) - J(Cx - C\hat{x})$$

$$\rho\tilde{x} = (A - JC)(x - \hat{x})$$

O sinal de controle é então:

$$u = -K_p\hat{x} + K_iX_i = -K_p(x - \tilde{x}) + K_ix_i$$

A partir do diagrama, pode-se definir:

$$\dot{x}_i = e = r - y = r - Cx_i$$

$$\dot{x} = Ax + B(-k_p\hat{x} + k_ix_i) = Ax - Bk_p(x - \tilde{x}) + Bk_ix_i \rightarrow \dot{x} = (A - Bk_p)x + Bk_p\tilde{x} + Bk_ix_i$$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(y - \hat{y}) = (A - LC)\tilde{x}$$

$$u = -(k_ix_i + k_px - k_p\tilde{x})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -C & 0 \\ BK_i & A - Bk_p & Bk_p \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$u = \begin{bmatrix} -k_i & k_p - k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

O observador, a partir da definição de E_1 como o polinômio característico de $A - JC$ e E_2 como $(A - BK)$, assim $\rho\hat{x} = (A - JC)\hat{x} + Bu + Jy$ pode ser reescrita como:

$$E_1(\rho)\hat{x} = V_1(\rho)u + V_2(\rho)y$$

Onde:

$$V_1(\rho) = Adj[\rho I - A + JC]^{-1}B$$

$$V_2(\rho) = Adj[\rho I - A + JC]^{-1}J$$

$$E_1(\rho) = det[\rho I - A + JC]$$

Sendo a lei de realimentação para estimação dada por $u = -K\hat{x} + k_i x_i$, substituindo as expressões anteriores, tem-se:

$$u = -K\left[\frac{V_1(\rho)}{E_1(\rho)}u + \frac{V_2(\rho)}{E_1(\rho)y}\right] + k_i x_i$$

Definindo:

$$P(\rho) = KV_2(\rho)$$

$$L(\rho) = E_1(\rho) + KV_1(\rho)$$

Assim:

$$V_1(\rho) = E_1(\rho)[\rho I - A + JC]^{-1}B$$

$$V_2(\rho) = E_1(\rho)[\rho I - A + JC]^{-1}J$$

Expressando de forma compacta o observador e a estimação do estado:

$$\frac{L}{E_1}u = -\frac{P}{E_1}y + v$$

Os operadores $L\ e\ P$ satisfazem a seguinte identidade polinomial:

$$DL + NP = E_1E_2$$

Usando as informações anteriores, tem-se:

$$L(\rho)D(\rho) + P(\rho)N(\rho) = D(\rho)[E_q(\rho) + K[V_1(\rho) + V_2(\rho)C(\rho I - IA)^{-1}B]]$$

$$= D(\rho)E_1(\rho)1 + K(\rho I - A + JC)^{-1}B + K(\rho I - A + JC)^{-1}xJC(\rho I - A)^{-1}B]$$

$$= D(\rho)E_1(\rho)[1 + K(\rho I - A + JC)^{-1}[(\rho I - A) + JC](\rho I - A)^{-1}B]$$

$$= D(\rho)E_1(\rho)[1 + K(\rho I - A)^{-1}B]$$

$$= D(\rho)E_1(\rho)det[I + (\rho I - A)^{-1}BK]$$

$$= D(\rho)E_1(\rho)det[(\rho I - A)^{-1}]det[\rho I - A + BK]$$

Sabendo que $D(\rho) = det(\rho I - A)$ e que $E_2(\rho) = det(\rho I - A + BK)$, tem-se:

$$L(\rho)D(\rho) + P(\rho)N(\rho) = E_1(\rho)E_2(\rho)$$

v é escolhido na forma:

$$v = \frac{G}{E_1}y^*$$

Nesse caso, a realização mínima da lei de controle é dada por:

$$Lu = -Py + Gy^*$$

Referências bibliográficas

[1] K. ASTRÖM, B. WITTENMARK. **Adaptive Control**. CRC Press, 2000. ISBN 0486462781