

Relatório V

Filtro Estendido de Kalman

Arthur Dimitri Brito Oliveira
Análise e Projeto de Sistemas de Controle 21.1
Prof Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

19 de julho de 2021

O objetivo deste documento é detalhar a implementação de uma solução de estimação para sistemas não-lineares utilizando o filtro estendido de Kalman. Para isso, simulou-se quatro possíveis espaços de estados e realizou-se experimentos quanto ao grau de incerteza inerente ao processo ao variar as estimativas iniciais fornecidas ao filtro.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O filtro de Kalman é um algoritmo de otimização utilizado para estimar variáveis de interesse quando elas não podem ser medidas diretamente. Uma série de medições contaminadas com ruído gaussiano são utilizadas para produzir estimativas de variáveis desconhecidas, gerando resultados que se tendam a se aproximar dos valores reais das grandezas medidas e valores associados.

Dado um sistema não linear da forma:

$$x_{[n+1]} = f(x_{[n]}, u_{[n]}, w_{[n]}) \quad (1)$$

$$y_{[n]} = g(x_{[n]}, v_{[n]}) \quad (2)$$

Linearizando o sistema em torno do ponto de operação $\hat{x}_{[n|n]}$ para realizar a implementação do filtro estendido de Kalman, obtém-se

$$G_{[n]} = \frac{\partial g}{\partial x} \big|_{\hat{x}_{[n|n]}, 0} \quad (3)$$

$$\Lambda_{[n]} = \frac{\partial g}{\partial v} \big|_{\hat{x}_{[n|n]}, 0} \quad (4)$$

$$F_{[n]} = \frac{\partial f}{\partial x} \big|_{\hat{x}_{[n|n]}, u_{[n]}, 0} \quad (5)$$

$$\Gamma_{[n]} = \frac{\partial f}{\partial w} \big|_{\hat{x}_{[n|n]}, u_{[n]}, 0} \quad (6)$$

Com base no modelo do sistema, é possível obter uma estimação da saída do sistema:

$$\hat{y}_{[n|n-1]} = g(\hat{x}_{[n|n-1]}, 0) \quad (7)$$

O ganho de Kalman, $K_{[n]}$, deve ser determinado a cada instante de amostragem de tal forma que a covariância entre o sistema real e a estimativa diminua. Assim:

$$Q_{[n]} = \text{cov}(w_{[n]}) \quad (8)$$

$$R_{[n]} = \text{cov}(v_{[n]}) \quad (9)$$

$$K_{[n]} = P_{[n|n-1]} G_{[n]}^T \left(G_{[n]} P_{[n|n-1]} G_{[n]}^T + \Lambda_{[n]} R_{[n]} \Lambda_{[n]}^T \right)^{-1} \quad (10)$$

Após calcular-se o ganho de Kalman, pode-se corrigir a estimativa do instante $n - 1$ em n , de modo que esta se aproxime do valor real do sistema:

$$\hat{x}_{[n|n]} = \hat{x}_{[n|n-1]} + K_{[n]} (y_{[n]} - \hat{y}_{[n|n-1]}) \quad (11)$$

$$P_{[n|n]} = P_{[n|n-1]} - K_{[n]} G_{[n]} P_{[n|n-1]} \quad (12)$$

Pode-se então determinar a previsão do estado $\hat{x}_{[n+1|n]}$ e da matriz de covariância $P_{[n+1|n]}$ no instante $n + 1$. Assim:

$$x_{[n+1|n]} = f(\hat{x}_{[n|n]}, u_{[n]}, 0) \quad (13)$$

$$P_{[n+1|n]} = F_{[n]} P_{[n|n]} F_{[n]}^T + \Gamma_{[n]} Q_{[n]} \Gamma_{[n]}^T \quad (14)$$

2 DESENVOLVIMENTO

Para motivar a discussão e implementação do filtro estendido de Kalman, utilizou-se quatro modelagens diferentes para um sinal sinusoidal. Assim como propõe Mussof e Zarchan (2009), nos experimentos estima-se a magnitude e a frequência de um sinal verdadeiro.

Dos quatro modelos utilizados, dois apresentam uma não-linearidade na equação de medição, enquanto que os restantes possuem uma não linearidade presente nas matrizes do espaço de estados. Utilizou-se as mesmas estimativas para a frequência do sinal e para a amplitude, bem como para as variâncias do ruído de medição e do estado.

Para cada um dos modelos, foram realizados cinco experimentos. No primeiro experimento de cada um deles, os valores de amplitude e frequência foram padronizados como unitários, e suas estimativas iniciais foram de 3 e 2 rad/s, respectivamente. Considerou-se a variância do ruído de medição $R = 1$ e do ruído inerente ao processo como $Q = 0$.

Nas experimentações posteriores, aplicou-se variações às estimativas iniciais utilizadas pelo filtro, bem como às covariâncias relativas ao ruído do processo. Utilizou-se um conjunto de valores na forma

$$\begin{bmatrix} w_{estimado1}, w_{real1} \\ w_{estimado2}, w_{real2} \\ w_{estimado3}, w_{real3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 1, & -2 \\ -1, & -2 \end{bmatrix}.$$

No último experimento, utiliza-se uma variância $q \neq 0$ de modo a avaliar a robustez do filtro quanto à rejeição de ruídos inerentes ao processo.

- Explicar o porque de varios modelos
- Como é feita a modelagem para quatro sistemas diferentes
-

3 PRIMEIRO MODELO

Considerando um sinal senoidal dado por:

$$x = A \sin(\omega t) \quad (15)$$

Ao definir $\phi = \omega t$ e considerar a frequência do sinal e a sua amplitude constantes, tem-se que $\dot{\phi} = \omega$, $\dot{\omega} = 0$ e $\dot{A} = 0$. Ao considerar os ruídos brancos adicionados a partir das derivadas, tem-se na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\omega} \\ \dot{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \omega \\ A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

u_{s1} e u_{s2} são fontes de ruído gaussiano provenientes adicionadas às derivadas de frequência e amplitude. A versão discreta do espaço de estados é:

$$x_{[n+1]} = x_{[n]} \left(I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix} T \quad (17)$$

A não linearidade presente na equação enseja a utilização do filtro de Kalman estendido, de modo que as matrizes de interesse são dadas por:

$$F = \frac{\partial x_{[n+1]}}{\partial x_{[n]}} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$G = \frac{\partial y_{[n]}}{\partial x_{[n]}} = \begin{bmatrix} A \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Gamma = \frac{\partial x_{[n+1]}}{\partial \partial w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\Lambda = \frac{\partial y}{\partial v} = 1 \quad (21)$$

A variância do ruído de medição é dada por $R = \sigma_x^2$. A matriz de covariância, por sua vez, é dada por:

$$Q_k = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_{s1} T^3}{3} & \frac{\Phi_{s1} T^2}{2} & 0 \\ \frac{\Phi_{s1} T^2}{2} & \Phi_{s1} T & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{s2} T \end{bmatrix} \quad (22)$$

As densidades espectrais dos ruídos u_{s1} e u_{s2} são representadas por Φ_{s1} e Φ_{s2} .

4 SEGUNDO MODELO

Assumindo que a amplitude do sinal, definida na Equação (15), é conhecida, tem-se o espaço de estados na forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_s \end{bmatrix} \quad (23)$$

A versão discretizada do espaço de estados é:

$$x_{[n+1]} = x_{[n]} \left(I + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ u_s \end{bmatrix} T \quad (24)$$

As matrizes de interesse são:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$G = \frac{\partial y}{\partial x} [A \cos \phi \quad 0] \quad (26)$$

$$\Lambda = \frac{\partial y}{\partial v} = 1 \quad (27)$$

5 TERCEIRO MODELO

Assumindo o seguinte modelo com frequência ω e A constantes e desconhecidas na seguinte forma:

$$y = x = A \sin \omega t + r \quad (28)$$

O espaço de estados é, então:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix} \quad (29)$$

A não-linearidade presente no espaço de estados pode ser removida mediante linearização da matriz A . Logo:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & -2\omega x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

O espaço de estados discretizado pode ser expresso por:

$$x_{[n+1]} = x_{[n]} \left(I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & -2\omega x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix} T \quad (31)$$

As matrizes F , G e Γ são:

$$F = \frac{x_{[n+1]}}{\partial x_{[n]}} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ -\omega^2 T & 1 & -2\omega x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

6 QUARTO MODELO

Utilizando $z = \omega^2$ como substituição no espaço de estados anterior, ele se torna:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix} \quad (34)$$

Após linearizar a matriz A , o espaço de estados discreto é:

$$x_{[n+1]} = x_{[n]} \left(I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix} T \quad (35)$$

As matrizes F , G e Γ são:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ -zT & 1 & -xT \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

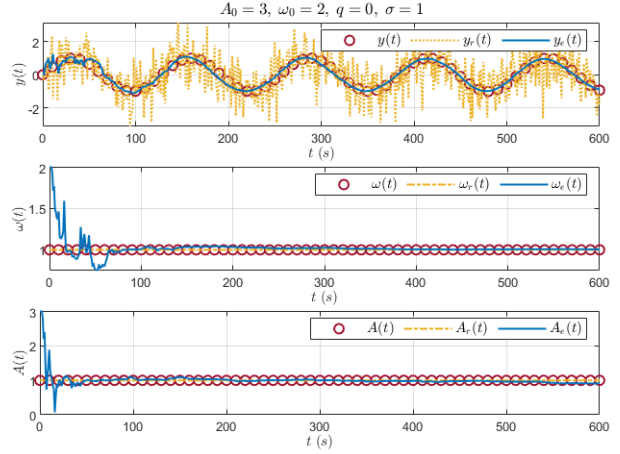
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao observar a Figura 1, pode-se afirmar que ao utilizar uma estimativa $w_0 = 2$ e a frequência real $w = 1$, o filtro estendido foi capaz de estimar satisfatoriamente a amplitude e a frequência do sinal senoidal.

Fig. 1. Estimativas da saída y e dos estados A e ω para o primeiro experimento do modelo 1.



Nos experimentos seguintes, utilizou-se valores positivos e negativos para a estimativa inicial e para a frequência utilizada para gerar a senoide. Observando a Fig. 2, a Fig. 3 e a Fig. 4, fica evidente que o filtro estendido é capaz de estimar a frequência da senoide para diferentes combinações de estimativas iniciais e frequências reais. Comparativamente, os resultados obtidos por Mussof e Zarchan (2009) são diferentes, visto que no caso da referência bibliográfica utilizada, onde o filtro é incapaz de estimar a frequência do sinal. Nos experimentos realizados, o valor da covariância inicial é menor, o que resulta em oscilações mais severas no valor do ganho de Kalman e uma imprecisão na estimação da frequência w .

Fig. 2. Estimativas da saída y e dos estados A e ω para o segundo experimento do modelo 1.

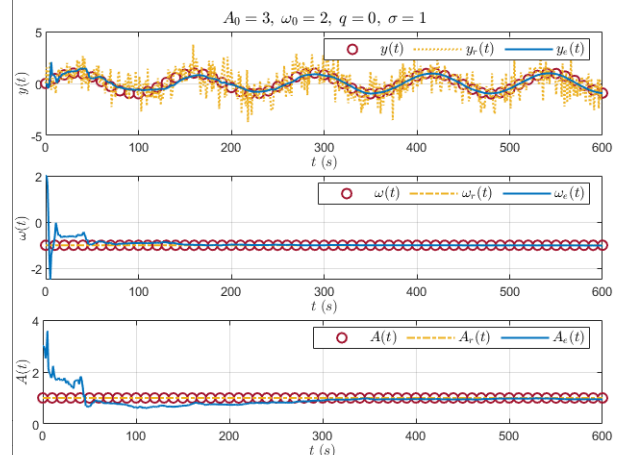


Fig. 3. Estimativas da saída y e dos estados A e ω para o terceiro experimento do modelo 1.

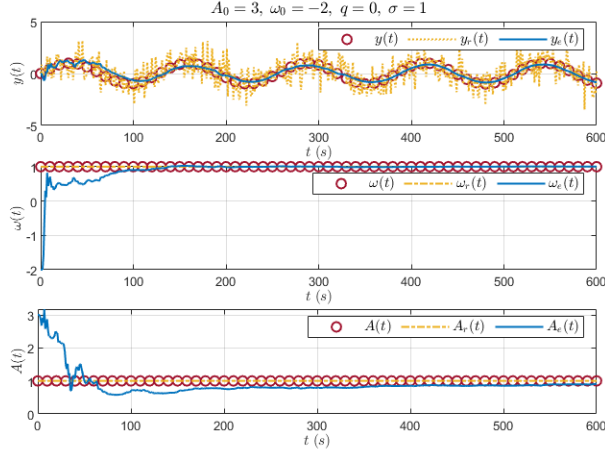
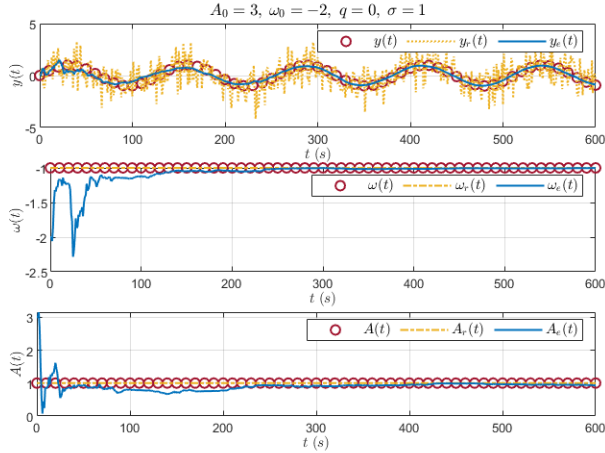
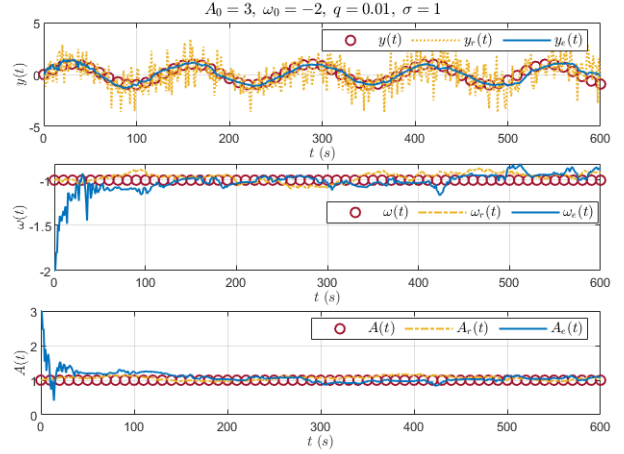


Fig. 4. Estimativas da saída y e dos estados A e ω para o quarto experimento do modelo 1.



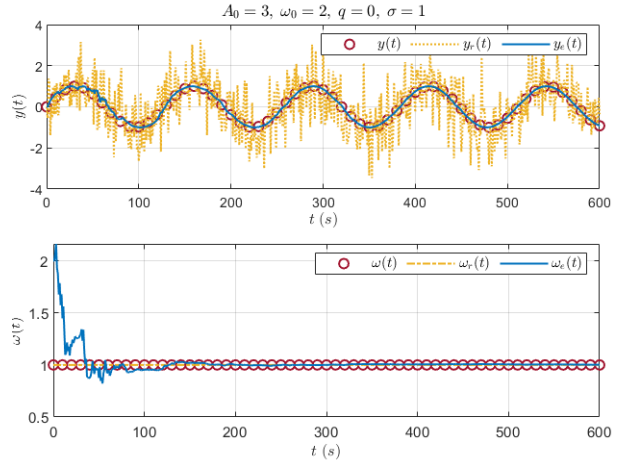
Para testar de forma mais exaustiva as propriedades do filtro, o ruído ω foi definido com variância $q = 0.01$, partindo de uma estimativa inicial negativa para a frequência da senoide e uma frequência real positiva. Como pode-se observar na Fig.5 que o filtro é capaz de estimar corretamente tanto A , quanto ω , rejeitando o ruído associado ao processo. Sob todas as circunstâncias testadas, foi possível estimar corretamente os estados de interesse.

Fig. 5. Estimativas da saída y e dos estados A e ω para o quinto experimento do modelo 1.



Utilizando o segundo modelo, onde o estado A é conhecido, estimou-se inicialmente $\omega_0 = 2$. Como ilustra a Fig.6, o filtro funciona conforme o desejado, estimando corretamente a frequência sinusoidal. Isto já acontecia com o primeiro modelo.

Fig. 6. Estimativas da saída y e do estado ω para o primeiro experimento do modelo 2.



Com o objetivo de testar a robustez do filtro quanto a inicialização das condições iniciais de forma não ideal, variou-se ω_v e ω_0 conforme realizado com o modelo 1. Os resultados observados na Fig.7, na Fig.8 e na Fig.9. reforçam a robustez do filtro de Kalman estendido na estimação dos estados.

Fig. 7. Estimativas da saída y e do estado ω para o segundo experimento do modelo 2.

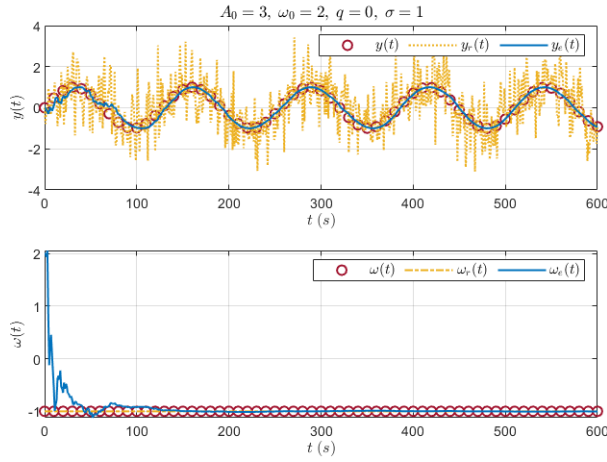


Fig. 8. Estimativas da saída y e do estado ω para o terceiro experimento do modelo 2.

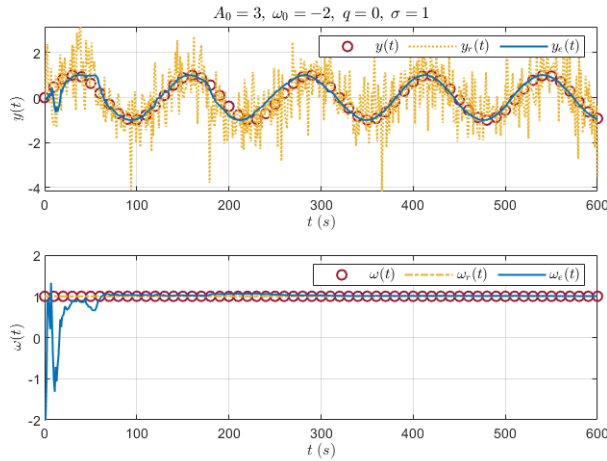
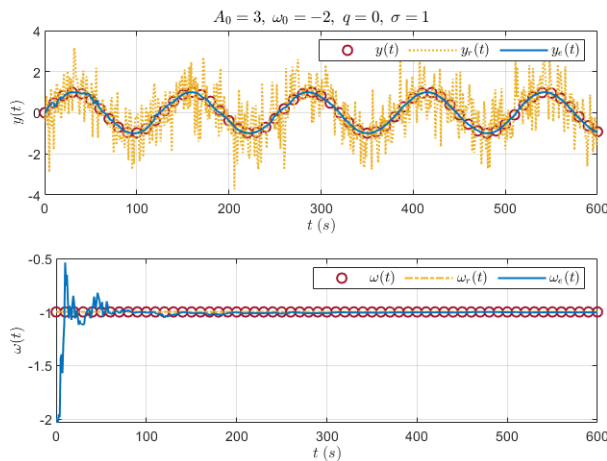
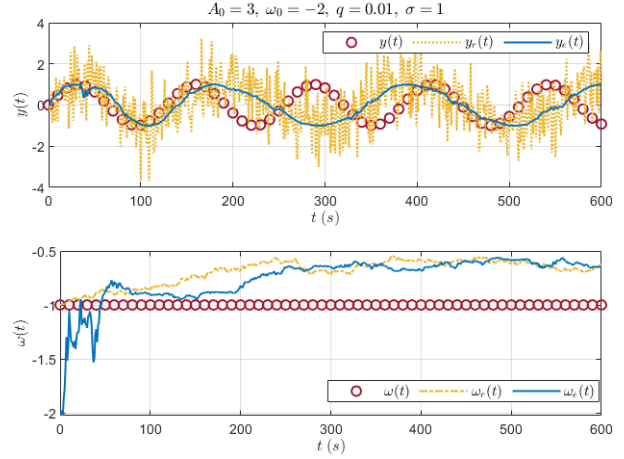


Fig. 9. Estimativas da saída y e do estado ω para o quarto experimento do modelo 2.



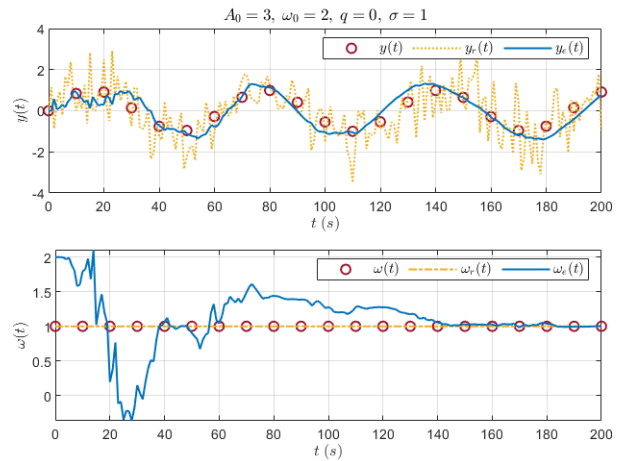
No último experimento, adicionou-se um ruído branco de variância $q = 0.01$ à medição do processo. Como estimativa inicial, utilizou-se $\omega_0 = -2$ e $\omega = -1$. Ao observar a Fig. 10, fica claro que o filtro não consegue rejeitar o ruído inerente à medição do processo. Isso pode ser atribuído à estimativa da covariância inicial, que não foi recalculada para casos onde $q \neq 0$.

Fig. 10. Estimativas da saída y e do estado ω para o quinto experimento do modelo 2.



Em seguida, executou-se os experimentos para o modelo 3. Como pode-se observar na Fig. 11, o filtro estima corretamente o estado de interesse, bem como a frequência da senoide, muito embora não tenha sido inicializado corretamente.

Fig. 11. Estimativas da saída y e do estado ω para o primeiro experimento do modelo 3.



Testando outras inicializações e valores reais para estimar com o filtro estendido, obteve-se os resultados apresentados na Fig. 12, na Fig. 13 e na Fig. 14. Nos casos onde a estimativa e o valor real possuem valores com sinais opostos, o filtro estima de forma

correta somente $y(t)$. O valor de ω não é estimado corretamente. Entretanto, na Fig. 14 observa-se que estimou-se corretamente $y(t)$ e ω quando ω_0 e ω_v são negativos, embora o tempo necessário para a rejeição do ruído de medição tenha sido elevado comparado aos experimentos com outros modelos anteriormente realizados.

Fig. 12. Estimativas da saída y e do estado ω para o segundo experimento do modelo 3.

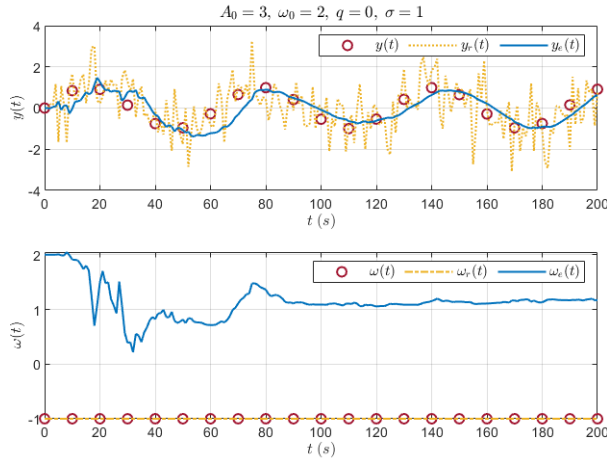


Fig. 13. Estimativas da saída y e do estado ω para o terceiro experimento do modelo 3.

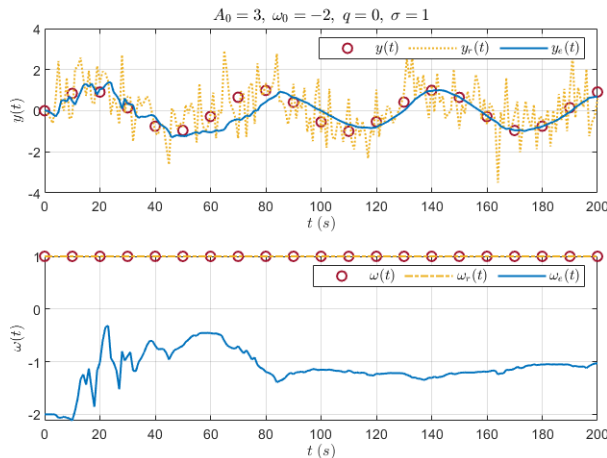
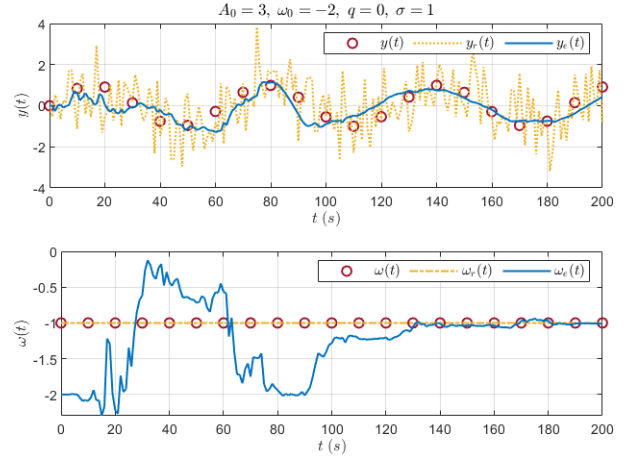
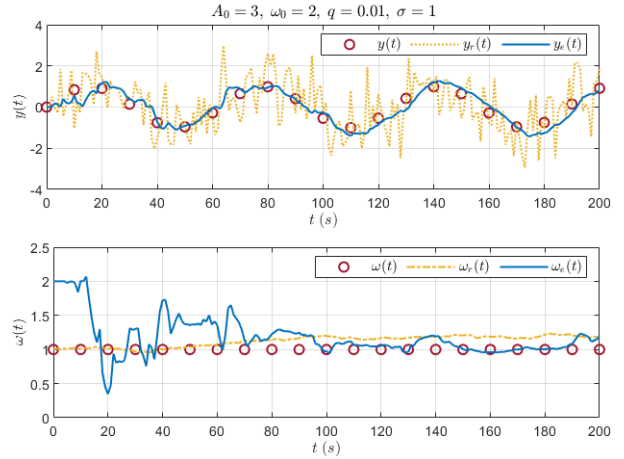


Fig. 14. Estimativas da saída y e do estado ω para o quarto experimento do modelo 3.



Por último, verificando a rejeição do ruído incorporado pela derivada da frequência, definiu-se também um ruído de medição ω com variância $q = 0.01$. Observa-se na Fig. 15 que o filtro estima corretamente $y(t)$ e é capaz de rejeitar os ruídos do processo e da medição para uma inicialização incorreta de w_0 .

Fig. 15. Estimativas da saída y e do estado ω para o quinto experimento do modelo 3.



No último conjunto de experimentos, simulou-se o modelo 4. O espaço de estados nesse caso é o mesmo que do modelo três, embora haja a substituição de $z = \omega^2$. Isso é feito para tornar a escrita da matriz F mais fácil. Sendo assim, espera-se que a filtragem seja capaz de estimar corretamente ω , assim como ocorreu para o terceiro modelo.

Ao observar a Fig. 16, com $[w, w_0] = [1, 4]$, constata-se que o filtro estendido de Kalman rastreia corretamente os valores de frequência e da saída $y(t)$. Observa-se também que o modelo 4 apresenta um erro na estimação de $y(t)$ após uma correta estimação do

valor da frequência. Isto pode estar associado às diferenças existentes na aproximação da matriz F por parte das duas modelagens.

Fig. 16. Estimativas da saída y e do estado ω para o primeiro experimento do modelo 4.

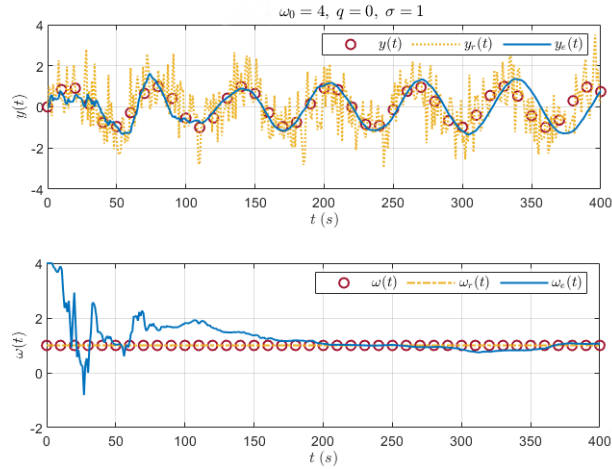
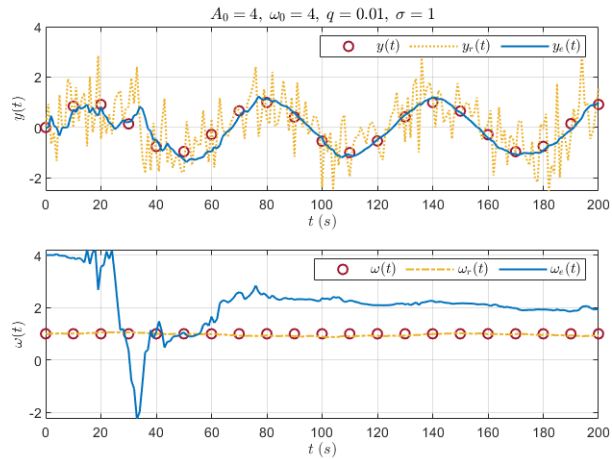


Fig. 17. Estimativas da saída y e do estado ω para o terceiro experimento do modelo 4.



Para verificar a robustez quando à incerteza de \dot{z} , a variância do ruído foi definida como $q = 0.01$. Na Fig. 17, estão ilustrados o valor verdadeiro, com ruído e estimado \hat{x} para os estados e a saída do modelo 3. Observa-se que o filtro não foi robusto o suficiente para estimar corretamente w , mas apresentou uma estimativa correta para o sinal de saída $y(t)$.

8 CONCLUSÃO

Para a realização do estudo apresentado neste documento, foi necessário discretizar os modelos associados às experimentações. Esse estudo consistiu em

desenvolver um filtro estendido de Kalman para sistemas não lineares.

Nas experimentações, mediante a variação das estimativas iniciais do filtro, foi possível avaliar a robustez do filtro diante de condições adversas. Foi possível analisar a influência desses fatores na evolução temporal da estimação dos estados de interesse.

9 REFERÊNCIAS

- [1] MUSOFF, Howard; ZARCHAN, Paul. **Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009. 10.2514/6.2009-1867.