Universidade Federal de Campina Grande

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Estimação e Identificação de Sistemas - 21.2

Professores: Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Saulo Oliveira Dornellas Luiz, Dr.

Aluno: Arthur Dimitri Brito Oliveira

Relatório de Atividade 6

Introdução

O objetivo deste relatório é discutir métodos que buscam determinar as funções de transferência diretamente, sem selecionar um conjunto de modelos possíveis. Estes métodos serão apresentados a seguir e baseiam-se na hipótese que é possível injetar um impulso, ou degrau, na entrada do sistema e registrar o sinal de saída por meio de um osciloscópio. A partir da forma de onda obtida, será possível obter diretamente a função de transferência da planta.

Análise da resposta transiente e análise da correlação

Análise da resposta ao impulso

Sendo um sistema descrito por:

$$y(t) = G_0(t)u(t) + v(t)$$

O sinal de teste pode ser descrito como um impulso:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

A saída é expressa por:

$$y(t) = \alpha g_0(t) + v(t)$$

Caso o ruído seja insignificante, é possível determinar os coeficientes da resposta ao impulso no tempo por meio de uma estimativa:

$$\widehat{g}(t) = \frac{y(t)}{\alpha}$$

A principal desvantagem desse método é que a maior parte dos processos físicos não permite a aplicação de impulsos com amplitude tal que o erro $v(t)/\alpha$ torna-se insignificante comparado aos coeficientes de $\widehat{g}(t)$. Esse tipo de entrada pode causar efeitos não-lineares que perturbariam o comportamento linear do modelo.

Análise da resposta ao degrau

De forma análoga, ao aplicar um sinal de entrada na forma:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, \ t \geq 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$$

Obtem-se:

$$y(t) = \alpha \sum_{k=1}^{t} g_0(k) + v(t)$$

De modo que as estimativas de $g_0(k)$ podem ser obtidas por:

$$\widehat{g}(t) = \frac{y(t) - y(t-1)}{\alpha}$$

Baseado nos gráficos obtidos por meio da resposta ao degrau, é possível obter algumas informações básicas de controle do sistema, como atraso, ganho estático, etc.

Análise de correlação

Dada a descrição do modelo dada por:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_0(k)u(t-k) + v(t)$$

Sendo a entrada um sinal quasi-estacionário com:

$$\bar{E}u(t)u(t-\tau) = R_u(\tau)$$

De modo a descorrelacionar a entrada com o ruído na operação em malha aberta:

$$\bar{E}u(t)v(t-\tau) = 0$$

A correlação cruzada entre o sinal de entrada e o sinal de saída pode ser expressa por:

$$\bar{E}\,y(t)u(t-\tau) = R_{yu}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g_0(k)R_u(k-\tau)$$

Caso a entrada escolhida seja um ruído branco, tem-se que:

$$R_u(\tau) = \alpha\delta_{\tau 0}$$

Assim, a resposta ao impulso é:

$$g_0(\tau) = \frac{R_{yu}(\tau)}{\alpha}$$

Desse modo, uma estimativa da resposta ao impulso é obtida ao variar τ, encontrando diversas amostras de $g_0(\tau)$:

$$\widehat{R}_{yu}^N(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=\tau}^{N} y(t)u(t-\tau)$$

Caso o sinal de entrada não possua correlação impulsiva, não sendo assim um ruído branco, devemos estimar:

$$\widehat{R}_{u}^N(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=\tau}^{N} u(t)u(t-\tau)$$

E resolver a correlação cruzada que também não é mais impulsiva:

$$\widehat{R}_{yu}^N(\tau) = \sum_{k=1}^{M} \widehat{g}(k)\widehat{R}_{u}^N(k-\tau)$$

Técnicas de resposta em frequência

Teste com sinal senoidal

Tendo uma entrada cossenoidal do tipo:

$$u(t) = \alpha\cos(\omega t), \quad t = 0, 1, 2, ...$$

A saída será dada por:

$$y(t) = \alpha|G_0(e^{j\omega})|\cos(\omega t + \varphi) + v(t)$$

$$\varphi = \arg G_0(e^{j\omega})$$

Essa propriedade dá algumas pistas para o cálculo de $G_0(e^{j\omega})$. Sabendo os dados do sinal de entrada, determina-se a amplitude e o deslocamento de fase do sinal cossenoidal de saída. Calcule uma estimativa $\widehat{G}_N(e^{j\omega})$ com essas informações. Isso deve ser rpetido para uma gama de frequências dentro da banda de interesse.

Análise de frequência pelo método de correlação

Agora utiliza-se uma modulação da seguinte forma:

$$I_C(N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)\cos\omega t$$

$$I_S(N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)\sin\omega t$$

Substituindo a equação do sinal de saída nas expressões anteriores:

$$I_C(N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \alpha|G_0(e^{j\omega})|\cos(\omega t+\varphi)\cos(\omega t) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\cos(\omega t)$$

$$I_C(N) = \frac{\alpha}{2}|G_0(e^{j\omega})|\cos\varphi + \alpha|G_0(e^{j\omega})|\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\cos(2\omega t+\varphi) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\cos(\omega t)$$

$$I_S(N) = -\frac{\alpha}{2}|G_0(e^{j\omega})|\sin\varphi + \alpha|G_0(e^{j\omega})|\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sin(2\omega t+\varphi) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\sin(\omega t)$$

O segundo termo de ambas as equações tende a zero à medida em que Ntende ao infinito, bem como o terceiro termo, que tem um decaímento na sua variância se $\sum_0^\infty \tau|R_v(\tau)| < \infty$. Então, a partir de $I_C(N)$ e $I_S(N)$, tem-se as amplitudes e fases da resposta em frequência:

$$|\widehat{G}_N(e^{j\omega})| = \frac{\sqrt{I_c^2(N) + I_s^2(N)}}{\alpha^2/2}$$

$$\widehat{\varphi}_N = \arg \widehat{G}_N(e^{j\omega}) = -\arctan\frac{I_s(N)}{I_c(N)}$$

Este teste provê o valor na frequência ω do sinal de excitação.

A relação com a análise de Fourier

A partir da representação do sinal de saída por meio da DFT:

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=1}^{N} y(t)e^{-j\omega t}$$

Por meio da relação de Euler $e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j\sin(\omega)$, tem-se que os sinais $I_c(N)$ e $I_s(N)$ podem ser escritos como:

$$I_c(N) - jI_s(N) = \frac{1}{\sqrt{N}}Y_N(\omega)$$

$$U_N(\omega) = \frac{\sqrt{N}\,\alpha}{2}$$

Reescrevendo a equação do módulo da função de transferência, tem-se:

$$\widehat{G}_N(e^{i\omega}) = \frac{\sqrt{N}\,Y_N(\omega)}{N\alpha/2} = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} \qquad (1)$$

Análise de Fourier

Estimaçao empírica da função de transferência

A expressão anterior corresponde à análise de frequência com uma única senoide de frequência ω injetada como entrada. Esse tipo de aproximação é errático quando houver termos de ruído, o que implica em DFTs ruídosas. Diante diso, define-se $\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega})$ como uma estimativa grosseira da função de transferência. Apesar da facilidade do cálculo da expressão associada, a interpretação da curva pode ser problemática devido ao ruído.

Propriedades da EEFT

Assumindo que o sistema tem forma $y(t) = G_0(q)u(t) + v(t)$, introduz-se:

$$V_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^{N} v(t) e^{-j\omega t}$$

A expressão a seguir revela o G_0 que deseja-se encontrar, mas existem o resíduo pelo truncamento R_N e termo de ruído V_N:

$$\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} + \frac{V_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

Assumindo que $v(t)$ tem média nula, $E(V_N(\omega)) = 0,$ ao tomar a esperança da expressão anterior, tem-se:

$$E\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

O valor médio será função da excitação imposta ao sistema. A princípio, seria possível manipular o sinal de entrada de modo a zerar a parcela $\frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)}$.

Analisando como a variância do ruído afeta a estimativa, tem-se que:

$$EV_N(\omega)V_N(-\xi) = \begin{cases} \Phi_v(\omega) + \rho_2(N), \ \ se \ \xi = \omega \\ \rho_2(N), \ se \ |\xi - \omega| = \frac{k2\pi}{N} \end{cases}$$

Com $|\rho_2(N)| \leq 2C/N$. Assim, o modelo a ser estimado tem um $G_0(q)$, e deseja-se analisar as propriedades da estimativa utilizando a EEFT. Quanto à média e à variância, pode-se controlar as polarizações $|\rho_1(N)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{N}}$ e $|\rho_2(N)| \leq \frac{C_2}{N}$. O erro em torno da função de transferência G_0 pode ser manipulado, mediante o projeto de sinais específicos, de modo que os erros da média e da variância sejam mínimos. As constantes podem ser calculadas por:

$$C_1 = \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} |kg_0(k)| \right). \max |u(t)|$$

$$C_2 = C_1^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tau R_v(\tau)|$$

Antecipando as conclusões a partir das demonstrações, ao utilizar a DFT para EEFT, no caso de sinais de entrada periódicos, a estimativa tende a melhoras nas frequências que estão presentes na entrada. No entanto, quando o sinal não é periódico, a variância não decai com N, mas mantém-se igual à relação sinal-ruído nas frequências correspondentes. Em qualquer um dos casos, se houver a contaminação com ruído dos sinais, as estimativas tendem a ser grosseiras para a maioria dos casos.

Análise Espectral

Suavizando a EEFT

Suponha que existe uma função suave $G_0(e^{j\omega})$, e que a distância $\frac{2\pi}{N}$ é pequena quando comparada à mudança de $G_0(e^{j\omega})$, ou seja, há muitas raias espectrais. O valor ao redor dele pode ser considerado constante $2\pi k/N \approx \omega$. Assim os valores de $\hat{\hat{G}}_N(e^{2\pi ik/N})$ são estimativas descorrelacionados da mesma frequência G_0. Considera-se então que, em torno da frequência ω, existem dois indicadores k_1 e k_2 que cercam a frequência central ω. O objetivo é correlacionar as estimativas para melhorar a estimativa de ω. A estimativa normalizada é ponderada em termos da estimativa grosseira. Há maior peso atribuido, na ponderação, às frequências que têm melhor relação sinal-ruído. $\hat{G}_N$. Portanto, explora-se a correlação que melhora a estimativa inicial para a frequência central:

$$\alpha_k = \frac{|U_N(2\pi k/N)|^2}{\Phi_v(2\pi k/N)}$$

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k \hat{\hat{G}}_N(e^{2\pi ik/N})}{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k} \qquad (2)$$

A ideia agora é tornar o N grande de tal forma que essa ponderação se torna refinada com passo infinitesimal. Assim, k_1 e k_2 tornam-se $\omega_0 - \Delta_\omega$ e $\omega_0 + \Delta_\omega$ e tem-se a aproximação de $\hat{G}_N$ como sendo:

$$\widehat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\displaystyle\int_{\omega_0-\Delta_\omega}^{\omega_0+\Delta_\omega} \alpha(\xi)\widehat{\widehat{G}}_N(e^{i\xi})d\xi}{\displaystyle\int_{\omega_0-\Delta_\omega}^{\omega_0+\Delta_\omega} \alpha(\xi)d\xi}$$

$$\alpha(\xi) = \frac{|U_N(\xi)|}{\Phi_v(\xi)}$$

Para mitigar os efeitos de borda ao trabalhar com uma quantidade finita de dados, utiliza-se uma janela de ponderação para melhorar a estimativa, utiliza-se a função (janela) de ponderação W_γ como sendo um degrau:

$$\widehat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi-\omega_0)\alpha(\xi)\widehat{\widehat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi-\omega_0)\alpha(\xi)d\xi}$$

No caso, pode-se utilizar funções de ponderação mais complexas. Ao fazer aparecer explicitamente o espectro do sinal de entrada, tem-se:

$$\widehat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi-\omega_0)|U_N(\xi)|^2\widehat{\widehat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi-\omega_0)|U_N(\xi)|^2 d\xi} \qquad (3)$$

Então, é possível utilizar diversos tipos de janelas de ponderação de modo que a função de transferência seja suavizada, e este é o mesmo princípio utilizado no capítulo 2 ao suavizar o periodograma utilizando $\psi(\omega)$ e o converge para o espectro.

Desenvolvimento

Dado um sistema da forma:

$$y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = u(t-1) + 0.5u(t-2) + e(t)$$

Onde $e(t)$ é um ruído branco de variância unitária e $u(t)$ é um sinal PRBS. Utilizando o operador de deslocamento no tempo, a função de transferência real do sistema pode ser escrita conforme a Eq. 4

$$y(k) - 1.5y(k)q + 0.7y(k)q^2 = u(k)q + 0.5u(k)q^2$$

$$H(z) = \frac{z+0.5z}{0.7z^2 - 1.5z + 1} \qquad (4)$$

Os sinais $y(t)$ e $u(t)$ podem ser visualizados na Fig.1.

```
[y,u] = simulateSystem(1000);
figure()
subplot(2,1,1)
plot(y(1:200))
ylabel('$y(t)$', "Interpreter","latex")
xlabel('Sampling Instant')
grid()
subplot(2,1,2)
plot(u(1:200))
ylabel('$u(t)$', "Interpreter","latex")
xlabel('Sampling Instant')
grid()
```

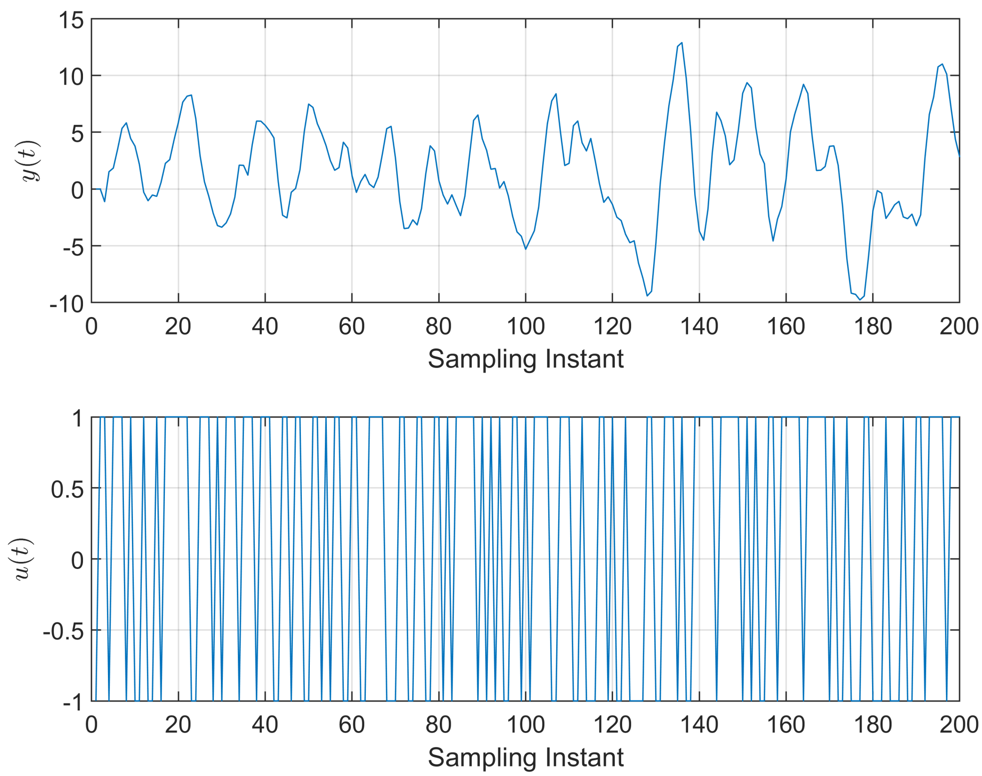

Fig.1: Sinal de saída $y(t)$ e sinal de entrada $u(t)$.

Conforme a Eq.1, a funçao de transferência empírica pode ser obtida. O resultado é uma estimativa grosseira da função de transferência do sistema:

$$\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} \qquad (5)$$

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^{N} y(t) e^{-j\omega t}$$

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^{N} u(t) e^{-j\omega t}$$

De modo a suavizar a estimativa, algumas janelas podem ser utilizadas:

	$2\pi W_\gamma(\omega)$
Bartlett	$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\sin \gamma\omega/2}{\sin \omega/2}\right)^2$
Parzen	$\frac{4(2+\cos\omega)}{\gamma^3}\left(\frac{\sin \gamma\omega/4}{\sin \omega/2}\right)^4$
Hamming	$\frac{1}{2}D_\gamma(\omega) + \frac{1}{4}D_\gamma(\omega - \pi/\gamma)$ $+\frac{1}{4}D_\gamma(\omega + \pi/\gamma)$, where $D_\gamma(\omega) = \frac{\sin(\gamma + \frac{1}{2})\omega}{\sin \omega/2}$

Figura 2: Janelas utilizadas para análise espectral.

A função de transferência suavizada é, por sua vez:

$$\widehat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)|U_N(\xi)|^2 \hat{\widehat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)|U_N(\xi)|^2 d\xi} \qquad (6)$$

Também é possível utilizar o espectro do sinal de entrada obtido a partir da correlação do sinal de entrada. À medida que $N \rightarrow \infty$, $|U_N(\xi)|^2 \rightarrow \Phi_u(\xi)$. Dessa forma o numerador e o denominador da Eq. 6 podem ser reescritos como:

$$\widehat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)\Phi_u(\xi)\hat{\widehat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)\Phi_u(\xi)d\xi} = \frac{\widehat{\Phi}_{yu}^N(\omega_0)}{\widehat{\Phi}_u^N(\omega_0} \qquad (7)$$

As Figuras 2, 3 e 4 ilustram um comparativo entre a função de transferência real do sistema e as suas aproximações. Utilizou-se o procedimento direto obtido pela divisão entre as DFTs do sinal de entrada e o sinal de saída, bem como as suavizações utilizando janelas via DFT do sinal de entrada ou da correlação do sinal de entrada.

```
empirical_TF_and_smooth_by_parzen
```

```
Warning: Negative data ignored
Warning: Negative data ignored
Warning: Negative data ignored
```

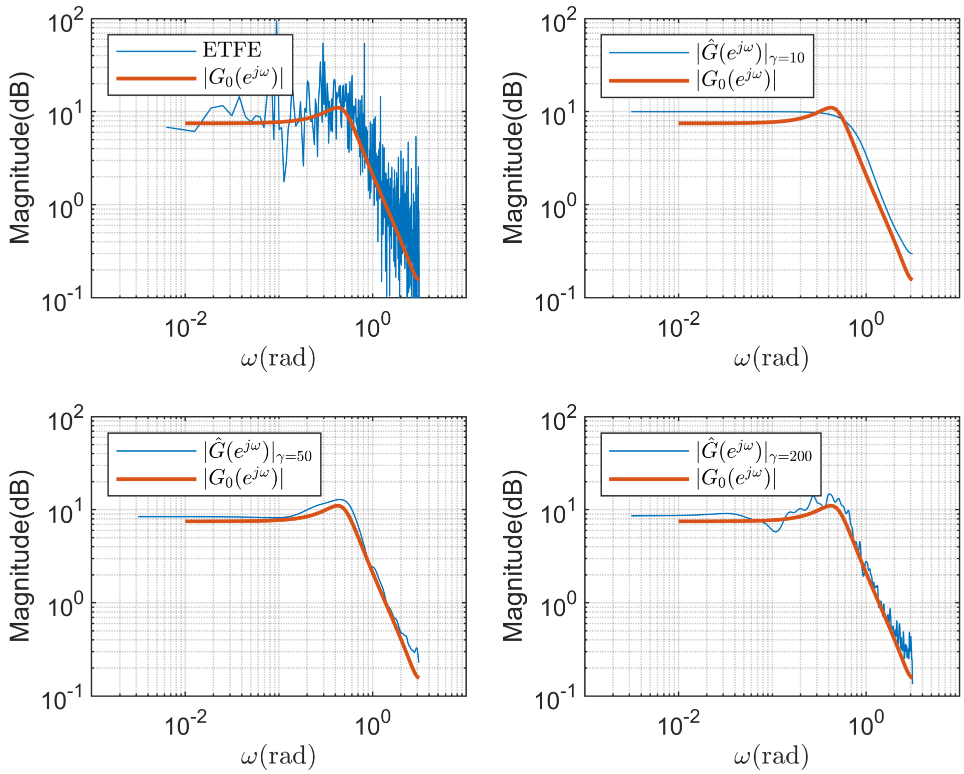

Fig. 2: Comparativos entre a função de transferência ideal e suas aproximações via ETFE e janelamento de Parzen.

```
empirical_TF_and_smooth_by_bartlett
```

```
Warning: Negative data ignored
Warning: Negative data ignored
Warning: Negative data ignored
```

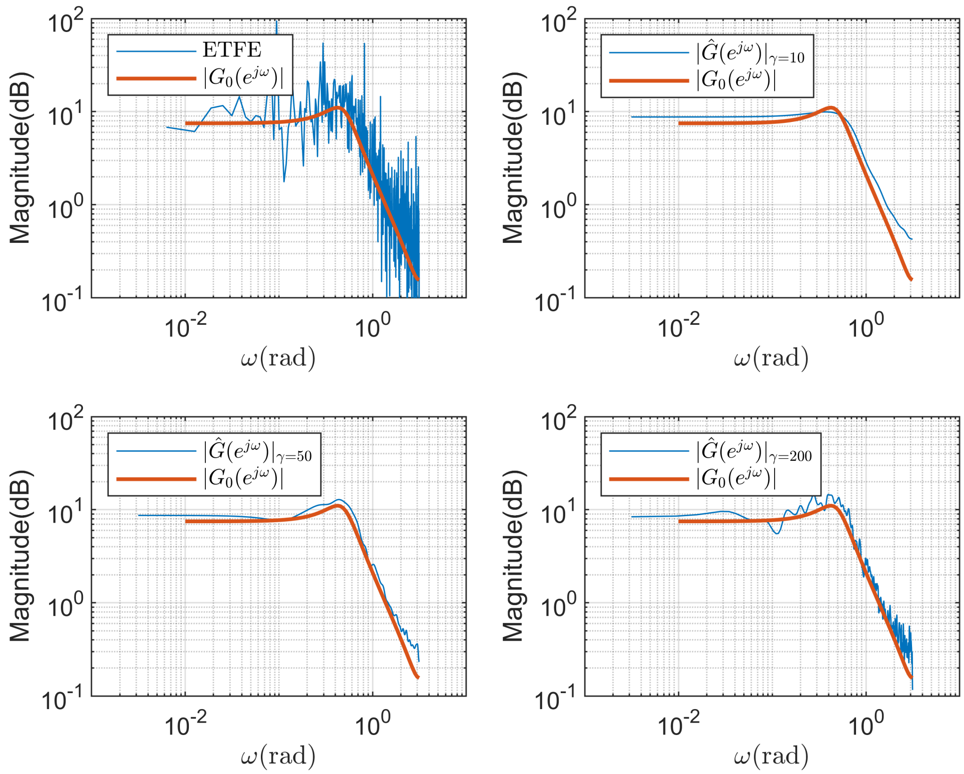

Fig. 3: Comparativos entre a função de transferência ideal e suas aproximações via ETFE e janelamento de Bartlett.

```
empirical_TF_and_smooth_by_hamming
```

```
Warning: Negative data ignored
Warning: Negative data ignored
Warning: Negative data ignored
```

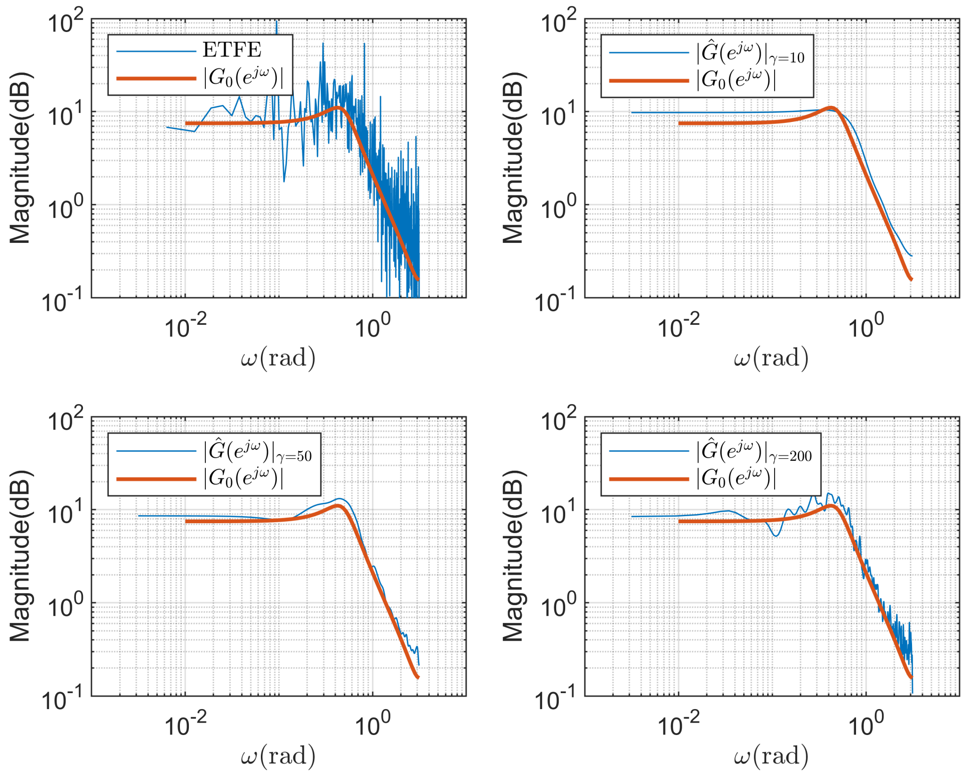

Fig. 4: Comparativos entre a função de transferência ideal e suas aproximações via ETFE e janelamento de Hamming.

Como esperado, a razão entre as DFTs da entrada e da saída resulta em uma aproximação grosseira. Mediante a utilização da Eq.6, é possível suavizar a curva obtida a partir da ETFE utilizando as janelas de Parzen, Bartlett e Hamming. Para todas estas, nota-se que à medida em que incrementa-se o valor de γ, há oscilações na magnitude da função de transferência suavizada. Isso é esperado, já que, na ponderação da estimativa grosseira, explora-se frequências com melhor relação sinal ruído. Quando a janela torna-se mais larga, pondera-se frequências que estão cada vez mais distantes da frequência central ω, contribuindo para um viés elevado e oscilações mais severas na suavização de $\hat{\hat{G}}(e^{j\omega})$. No caso do sistema em questão, a janela ótima em termos de viés e variância é $\gamma = 50$.

Outra abordagem possível é utilizar o espectro do sinal de entrada obtido a partir da correlação do sinal de entrada, valendo-se da relação $N \to \infty$, $|U_N(\xi)|^2 \to \Phi_u(\xi)$, conforme a Eq. 7. Os comparativos ilustrados nas Figuras 5, 6 e 7 para cada uma das janelas, variando $\gamma = [10,\ 50,\ 200]$, evidenciam que a aproximação previamente mencionada, onde o módulo da DFT do sinal $u(t)$ converge para o espectro Φ_u à medida em que o número de amostras tende a infinito, não foi constatada. Tais aproximações podem ser melhoradas ao incrementar-se o número de amostras N utilizadas para geração do sinais $y(t)$ e $u(t)$.

```
empirical_TF_and_smooth_blackman_turkey_parzen
```

```
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
Warning: Negative data ignored
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
Warning: Negative data ignored
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
Warning: Negative data ignored
```

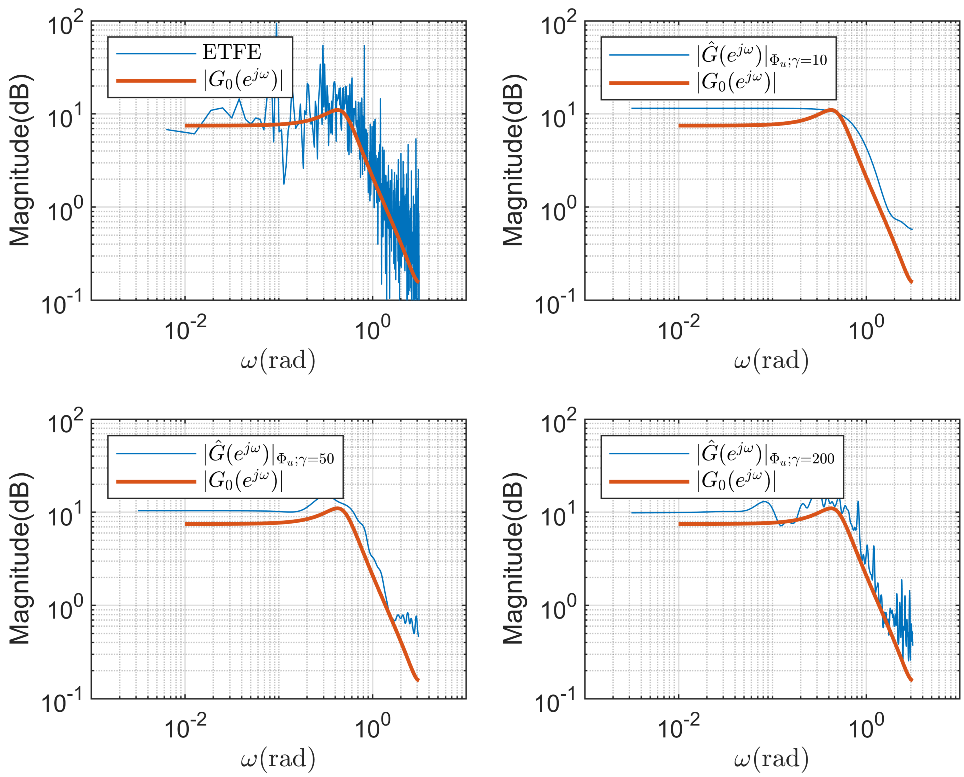

Fig. 5: Comparativos entre a função de transferência ideal e suas aproximações via ETFE e janelamento Parzen via correlação.

```
empirical_TF_and_smooth_blackman_turkey_bartlett
```

```
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
Warning: Negative data ignored
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
Warning: Negative data ignored
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
Warning: Negative data ignored
```

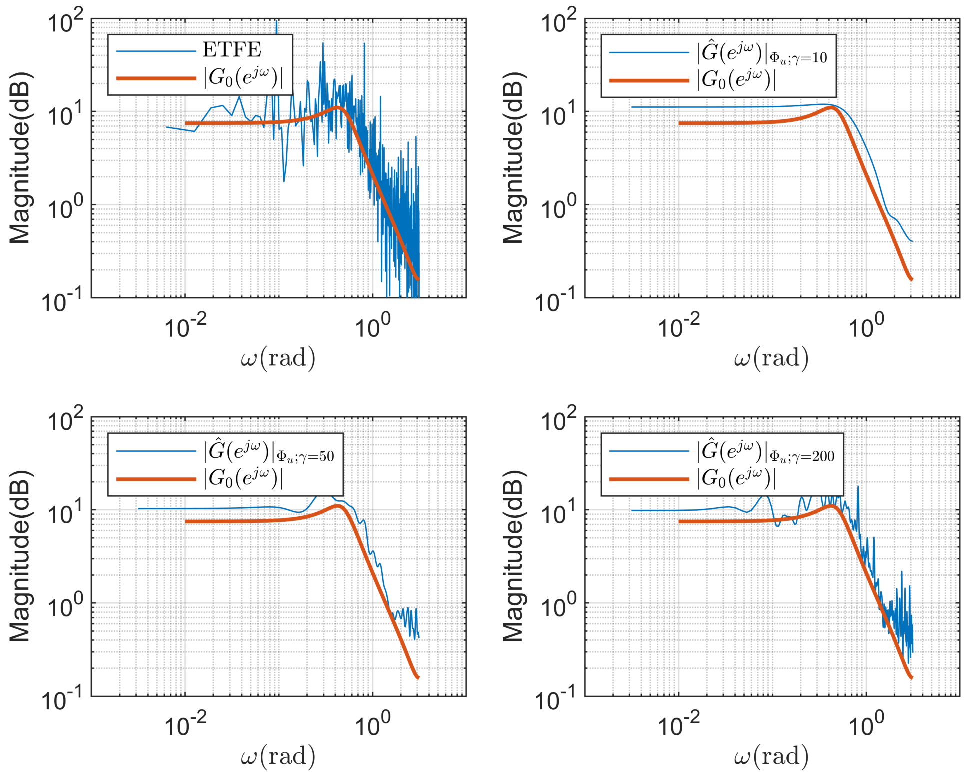

Fig. 6: Comparativos entre a função de transferência ideal e suas aproximações via ETFE e janelamento Bartlett via correlação.

```
empirical_TF_and_smooth_blackman_turkey_hamming
```

```
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
Warning: Negative data ignored
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
Warning: Negative data ignored
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
Warning: Negative data ignored
```

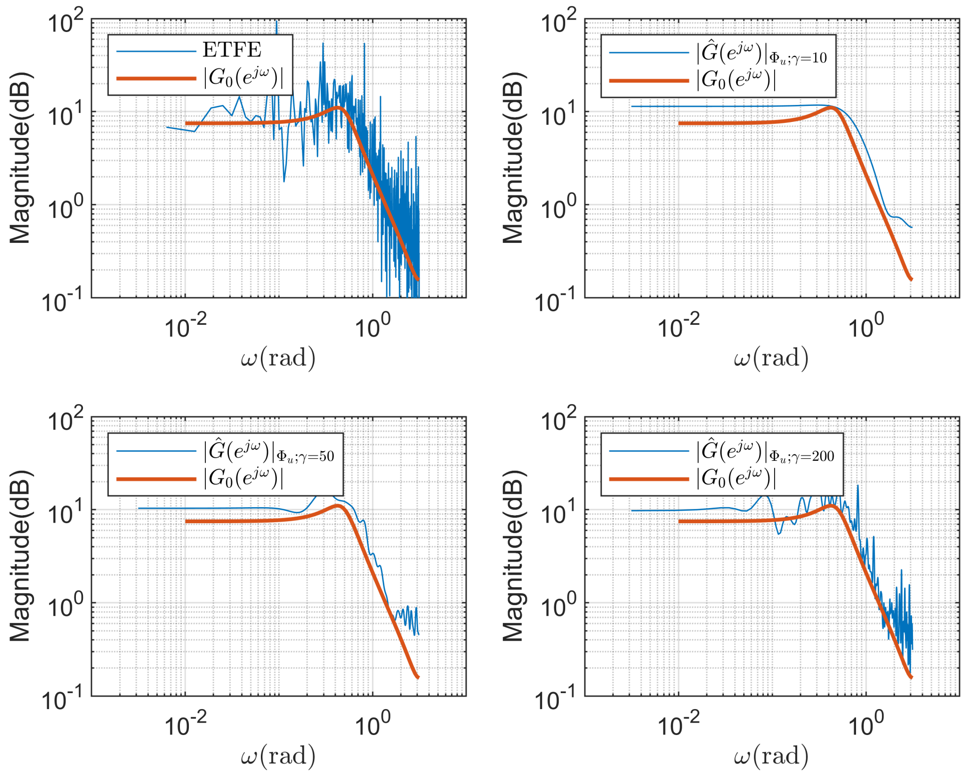

Fig. 7: Comparativos entre a função de transferência ideal e suas aproximações via ETFE e janelamento Hamming via correlação.

Referências

[1] L. LJUNG. **System Identification: Theory for the User** Courier Corporation, 2008. ISBN 0486462781.