## Universidade Federal de Campina Grande

## Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

## Estimação e Identificação de Sistemas - 21.2


### Professores: Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

### Saulo Oliveira Dornellas Luiz, Dr.

### Aluno: Arthur Dimitri Brito Oliveira


### Relatório de Atividade 2 - Modelos Estocásticos

O objetivo deste relatório é caracterizar um modelo linear e invariante no tempo quando adiciona-se uma perturbação desconhecida.

## Sumário


- Fundamentação Teórica
- Periodogramas
- Espectro do sinal
- Espectro cruzado
- Item 1
- Item 2
- Item 3
- Referências


## Fundamentação Teórica

Uma característica comum a sinais de perturbação é que eles não podem ser preditos de forma precisa. No entanto, é possível realizar predições quanto ao valor esperado do seu comportamento futuro. Sendo assim, introduzir elementos estocásticos à descrição do sinal é algo comum. Sendo assim, considerando um sinal uniformemente amostrado, tem-se a forma:

$$w(t) + d_1 w(t-t) + ... + d_n w(t-nT) \quad = \quad c_0 e(t) + c - 1e(t-T) + ... + c_n e(t-nT) \qquad (1)$$

Sendo $e(t)$ e $e(s)$ independentes se $t \neq s$. A distribuição de probabilidade de $e(t)$ tem um grande impacto na forma do sinal $w(t)$. Normalmente, $e(t)$ é uma variável independente, com distribuição normal $e(t) \in N(0, \lambda)$. $w(t)$ é um sinal contaminado.

#### Periodogramas

Um periodograma define os conteúdos de frequência de um sinal dentro de um intervalo de tempo finito. Dado um conjunto de entradas $u(t),\ t = 1, 2, ..., N$, $U_N(\omega)$ é dado pela aplicação da DFT ao sinal de entrada:

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^{N} u(t) e^{-i\omega t} \qquad (2)$$

Por meio da relação de Parseval, pode-se afirmar que a energia do sinal pode ser decomposta em contribuições de diferentes frequências.

$$\sum_{k=1}^{N} |U_N(2\pi k/N)|^2 = \sum_{t=1}^{N} u^2(t) \qquad (2.1)$$

Costumeiramente, considera-se $U_N(\omega)$ para $-\pi \leq \omega \leq \pi$, de modo que a Eq. 2 torna-se:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N/2-1}^{N/2} U_N(2\pi k/N) e^{i2\pi kt/N} \qquad (3)$$

Na Eq. 3, o sinal $u(t)$ é uma combinação linear de $e^{i\omega t}$ para diferentes frequências. O termo $U_N(2\pi k/N)$ determina o peso que cada frequência $\omega$ impõe na decomposição do sinal de entrada.

### Espectro do Sinal

O conteúdo de frequência de um determinado sinal é determinado pelo que se chama de espectro. A notação utilizada aqui é $\Phi_w(\omega)$. Os periodogramas, como mencionado anteriormente, definem os conteúdos de frequência de um sinal. Essa informação, no entanto, muitas vezes é inacessível devido ao comportamento errático do periodograma como uma função de $\omega$. Busca-se, então, uma definição dentro de um intervalo $t \in [1, \infty)$. Sendo $s(t)$ um sinal quasi-estacionário (média finita e limitada), pode-se calcular a covariância e a covariância cruzada deste sinal:

$$R_s(\tau) = \bar{E} s(t) s(t - \tau)$$

$$R_{sw}(\tau) = \bar{E} s(t) w(t - \tau)$$

No caso de sinais quasi-estacionários, o espectro é definido a partir da função de covariância ao aplicar-se a transformada de Fourier:

$$\Phi_s(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-i\tau\omega} \qquad (4)$$

Quando trata-se de dois sinais aleatórios e deseja-se estabelecer a dependência entre eles, a correlação cruzada entre o sinal de entrada e o sinal é utilizada:

$$\Phi_{s\omega}(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} R_{s\omega}(\tau) e^{-i\tau\omega} \qquad (5)$$

O termo mais preciso seria *densidade espectral,* já que este expressa a potência do sinal entre duas frequências $\omega_1$ e $\omega_2$. Assim:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \Phi_w(\omega) d\omega$$

Supondo um sinal $v(t)$, sua covariância pode ser expressa por:

$$R_v(\tau) = \lambda \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h(k)h(k-\tau)$$

Nesse caso, o espectro de $v(t)$ é dado por:

$$\Phi_v(\omega) = \lambda \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\tau}^{\infty} h(k)h(k-\tau)e^{-j\omega k}e^{-j(k-\tau)\omega}$$

$$\Phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{j\omega})|^2$$

Há diversas variações na definição do que é espectro, a depender da natureza do sinal (discreto, contínuo, determinístico, etc).

**Espectro Cruzado**

Considerando dois sinais $u(t)$ e $y(t)$, é interessante observar como eles variam em conjunto. Analogamente ao espectro, o espectro cruzado entre $u \ e \ y$ é expresso por:

$$\Phi_{yu}(\omega)$$

Assim, o espectro cruzado é dado pelo produto entre a transformada de Fourier de $y$ e o conjugado da transformada de Fourier de $u$. Diz-se que dois sinais não são correlacionados se $\Phi_{yu}(\omega) = 0$.

# Item 1 - Reproduzir os resultados exibidos nas Fig. 2.7 e 2.8

Sendo o processo $v(t)$ expresso por:

$$v(t) = 1.5v(t-1) - 0.7v(t-2) + e(t) + 0.5e(t-1) \qquad (6)$$

$e(t)$ é definido como um ruído branco gaussiano de média nula e variância unitária. Expressando a Eq. 6 em termos do operador *back-shift* $q$, tem-se:

$$v = 1.5vq - 0.7vq^2 + e + 0.5eq]$$

$$v(1 - 1.5q + 0.7q^2) = e(1 + 0.5q)$$

$$H(q) = \frac{v(q)}{e(q)} = \frac{1 + 0.5q}{0.7q^2 - 1.5q + 1} \qquad (7)$$

Definiu-se o sinal no software MATLAB e obteve-se o  periodograma exibido na Figura 1.

```
item_1_process
```

```
item_1_periodogram_plot
```

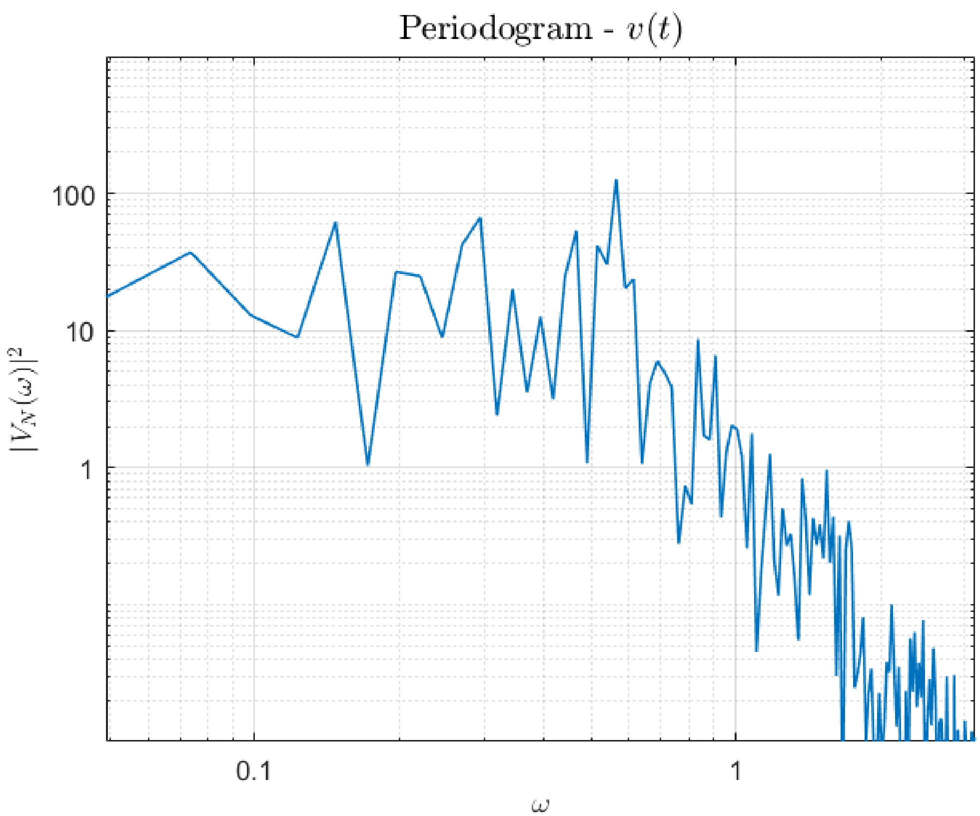


**Figura 1**: Periodograma da realização $v(t)$.

A implementação ilustrada na Figura 1 se dá por meio da Eq. 2.1. Trata-se de uma aproximação errática do espectro do sinal $v(t)$. Utilizando a função de transferência de pulso encontrada na Eq. 7, é possível determinar uma versão suavizada das componentes de frequência exibidas no periodograma anterior. Isto é, deve-se calcular a densidade espectral por meio de:

$$\Phi_v(w) = \lambda |H(e^{i\omega})|^2$$

O resultado pode ser visualizado na Figura 2.

```
item_1_spectrum_plot
```

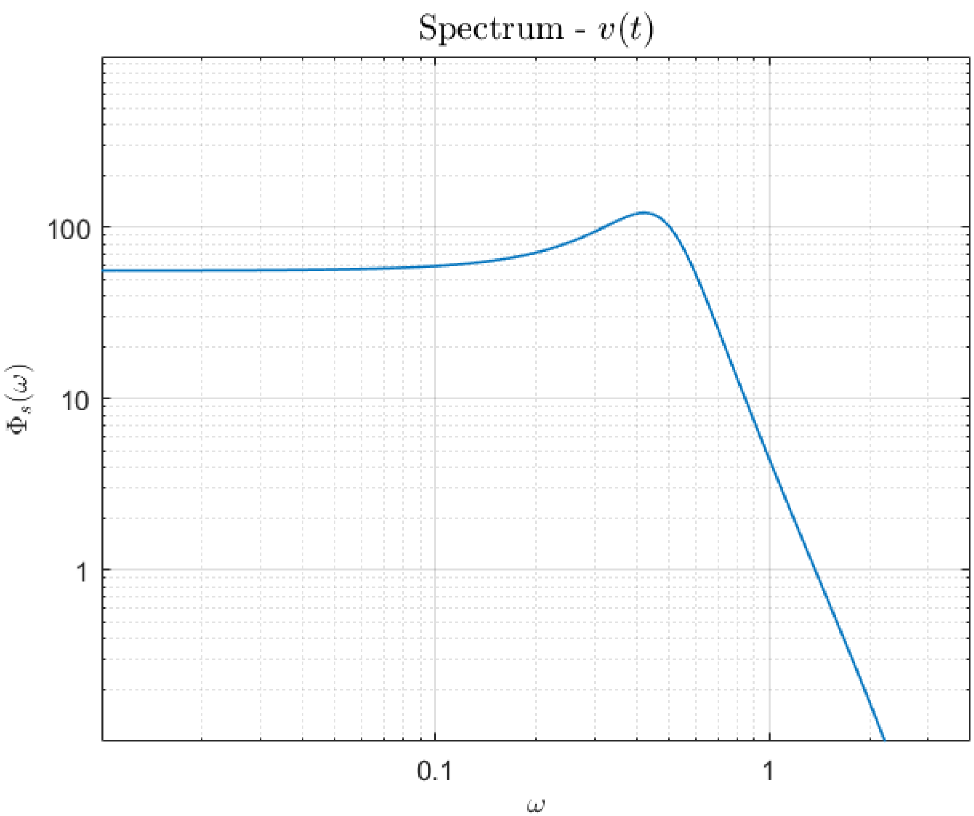


**Figura 2**: Densidade espectral da realização $v(t)$.

## Item 2

Considere os quatro modelos descritos na Figura 3.

$$w(t) + d_1 w(t-T) + \cdots + d_n w(t-nT)$$
$$= c_0 e(t) + c_1 e(t-T) + \cdots + c_n e(t-nT),$$
$e(t)$ and $e(s)$ independent if $t \neq s$

$e(t) \in N(0, \lambda)$ (normally distributed with mean value 0 and variance $\lambda$)

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{with probability } 1-\mu \\ e(t) \in N(0, \lambda/\mu) & \text{with probability } \mu \end{cases}$$

**(a)** $n = 1$, $d_1 = -0.9$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$

**(b)** $n = 1$, $d_1 = 0.9$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$

**(c)** $n = 2$, $d_1 = -0.5$, $d_2 = 0.7$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0$

**(d)** same system as in case (c), but $e(t)$ not normally distributed, instead with the distribution $P(e(t) = 0) = 0.98$, $P(e(t) = \sqrt{50}) = 0.01$, and $P(e(t) = -\sqrt{50}) = 0.01$ (thus still independent with average 0 and variance 1)

**Figura 3**: Modelos estocásticos utilizados.

Utilizando o software de simulação MATLAB, obteve-se as curvas associadas a cada um dos modelos. Os resultados podem ser observados na Figura 4. Na coluna à esquerda, encontram-se as quatro realizações de $w(t)$. À direita, as covariâncias de cada uma delas.

```
item_2
```

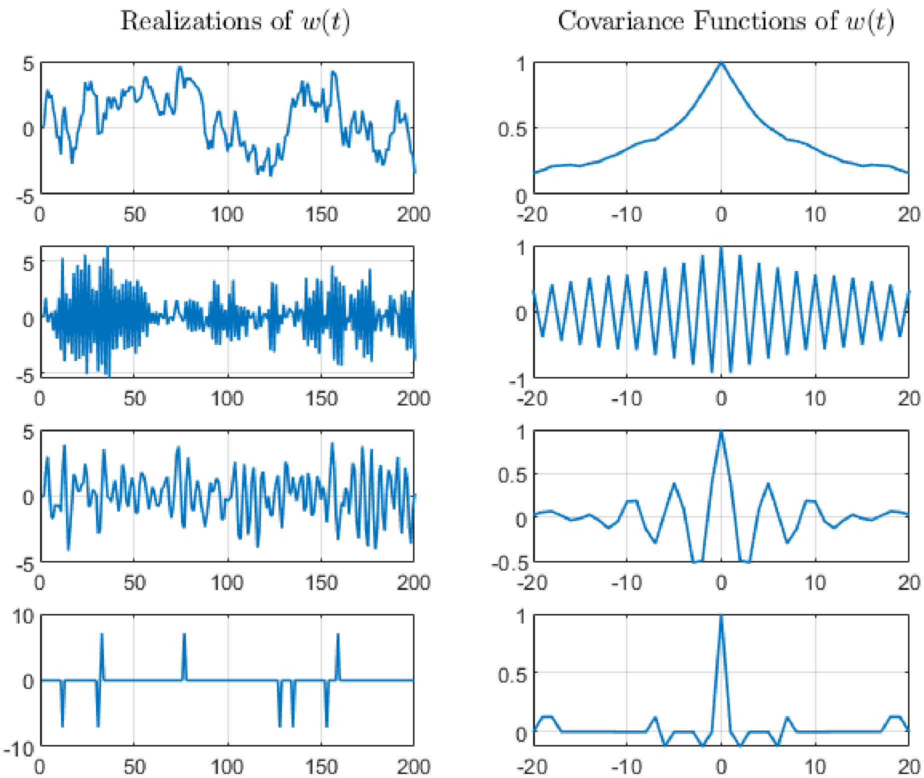


**Figura 4**: Realizações de $w(t)$ e suas covariâncias $R_w(\tau)$

## Item 3

Sendo o processo ARMA expresso na Eq. 8:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) \qquad (8)$$

Utilizando a forma $y(t) = y_t$ e $e(t) = e_t$, a covariância $R_y(\tau)$, $\tau = 0, 1, 2$ pode ser obtida ao multiplicar a expressão acima por $y(t)$, $y(t-1)$ $e$ $y(t-2)$ e tomar a esperança matemática. Então:

$$y(t)y(t) = -a_1 y(t-1)y(t) - a_2 y(t-2)y(t) + e(t)y(t) + c_1 e(t-1)y(t) + c_2 e(t-2)y(t)$$

$$R_y(0) = E(y_t y_t) = -a_1 E(y_{t-1} y_t) - a_2 E(y_{t-2} y_t) + E(e_t y_t) + c_1 E(e_{t-1} y_t) + c_2 E(e_{t-2} y_t)$$

$$R_y(1) = E(y_t y_{t-1}) = -a_1 E(y_{t-1} y_{t-1}) - a_2 E(y_{t-2} y_{t-1}) + E(e_t y_{t-1}) + c_1 E(e_{t-1} y_{t-1}) + c_2 E(e_{t-2} y_{t-1})$$

$$R_y(2) = E(y_t y_{t-2}) = -a_1 E(y_{t-1} y_{t-2}) - a_2 E(y_{t-2} y_{t-2}) + E(e_t y_{t-2}) + c_1 E(e_{t-1} y_{t-2}) + c_2 E(e_{t-2} y_{t-2})$$

No caso da correlação cruzada $R_{ye}(\tau)$, ao multiplicar a Eq. 3 por $e(t),\ e(t-1),\ e(t-2)$, obtém-se:

$$y(t)e(t) = -a_1 y(t-1)e(t) - a_2 y(t-2)e(t) + e(t)e(t) + c_1 e(t-1)e(t) + c_2 e(t-2)e(t)$$

$$R_{ye}(0) = E(y_t e_t) = -a_1 E(y_{t-1}e_t) - a_2 E(y_{t-2}e_t) + E(e_t e_t) + c_1 E(e_{t-1}e_t) + c_2 E(e_{t-2}e_t)$$

$$R_{ye}(1) = E(y_t e_{t-1}) = -a_1 E(y_{t-1}e_{t-1}) - a_2 E(y_{t-2}e_{t-1}) + E(e_t e_{t-1}) + c_1 E(e_{t-1}e_{t-1}) + c_2 E(e_{t-2}e_{t-1})$$

$$R_{ye}(2) = E(y_t e_{t-2}) = -a_1 E(y_{t-1}e_{t-2}) - a_2 E(y_{t-2}e_{t-2}) + E(e_t e_{t-2}) + c_1 E(e_{t-1}e_{t-2}) + c_2 E(e_{t-2}e_{t-2})$$

Sabendo que $e(t)$ é um ruído gaussiano, os termos do tipo $E(e_i e_k) = 0$, para quaisquer $i \neq k$. Além disso, $E(e_i e_k) = \lambda$, sempre que $i = k$, já que trata-se de um sinal wgn. Por fim, $E(e_i y_k) = 0$ para quaisquer $i > k$. Assim,

$$R_{ye}(0) = E(y_t e_t) = -a_1 E(y_{t-1}e_t) - a_2 E(y_{t-2}e_t) + E(e_t e_t) + c_1 E(e_{t-1}e_t) + c_2 E(e_{t-2}e_t) = E(e_t e_t)$$

Utilizando o resultado anterior, e sabendo que $E(e_{t-1}e_{t-1}) = E(e_t e_t)$

$$R_{ye}(1) = E(y_t e_{t-1}) = -a_1 E(y_{t-1}e_{t-1}) - a_2 E(y_{t-2}e_{t-1}) + E(e_t e_{t-1}) + c_1 E(e_{t-1}e_{t-1}) + c_2 E(e_{t-2}e_{t-1})$$

$$R_{ye}(1) = -a_1 E(y_{t-1}e_{t-1}) + c_1 E(e_{t-1}e_{t-1}) = -a_1 R_{ye}(0) + c_1 E(e_t e_t)$$

$$R_{ye}(2) = E(y_t e_{t-2}) = -a_1 E(y_{t-1}e_{t-2}) - a_2 E(y_{t-2}e_{t-2}) + E(e_t e_{t-2}) + c_1 E(e_{t-1}e_{t-2}) + c_2 E(e_{t-2}e_{t-2})$$

$$R_{ye}(2) = -a_1 E(y_{t-1}e_{t-2}) - a_2 E(t_{t-2}e_{t-2}) + c_2 E(e_{t-2}e_{t-2}) = -a_1 R_{ye}(1) - a_2 R_{ye}(0) + c_2 E(e_t e_t)$$

No caso das covariâncias $R_y(\tau)$:

$$R_y(0) = E(y_t y_t) = -a_1 E(y_{t-1}y_t) - a_2 E(y_{t-2}y_t) + E(e_t y_t) + c_1 E(e_{t-1}y_t) + c_2 E(e_{t-2}y_t)$$

$$R_y(0) = -a_1 R_y(1) - a_2 R_y(2) + R_{ey}(0) + c_1 R_{ye}(1) + c_2 R_{ye}(2)$$

$$R_y(1) = E(y_t y_{t-1}) = -a_1 E(y_{t-1}y_{t-1}) - a_2 E(y_{t-2}y_{t-1}) + E(e_t y_{t-1}) + c_1 E(e_{t-1}y_{t-1}) + c_2 E(e_{t-2}y_{t-1})$$

$$R_y(1) = -a_1 R_y(0) - a_2 R_y(1) + c_1 R_{ye}(0) + c_2 R_{ye}(1)$$

$$R_y(2) = E(y_t y_{t-2}) = -a_1 E(y_{t-1}y_{t-2}) - a_2 E(y_{t-2}y_{t-2}) + E(e_t y_{t-2}) + c_1 E(e_{t-1}y_{t-2}) + c_2 E(e_{t-2}y_{t-2})$$

$$R_y(2) = -a_1 R_y(1) - a_2 R_y(0) + c_2 R_{ye}(0)$$

Para as covariâncias cruzadas:

$$R_{ye}(0) = E(y_t e_t) = \lambda$$

$$R_{ye}(1) = -a_1 R_{ye}(0) + c_1 E(e_t e_t) = \lambda[-a_1 + c_1]$$

$$R_{ye}(2) = -a_1 R_{ye}(1) - a_2 R_{ye}(0) + c_2 E(e_t e_t) = -a_1 \lambda[-a_1 + c_1] - a_2 \lambda + c2\lambda = \lambda[a_1^2 - a_1 c_1 - a_2 + c_2]$$

Para as covariâncias $R_y(\tau)$:

$$R_y(0) = -a_1 R_y(1) - a_2 R_y(2) + R_{ey}(0) + c_1 R_{ye}(1) + c_2 R_{ye}(2)$$

$$R_y(0) = -a_1 R_y(1) - a_2 R_y(2) + \lambda + c_1 \lambda[-a_1 + c_1] + c_2 \lambda[a_1^2 - a_1 c_1 - a_2 + c_2]$$

$$R_y(1) = -a_1 R_y(0) - a_2 R_y(1) + c_1 R_{ye}(0) + c_2 R_{ye}(1) = -a_1 R_y(0) - a_2 R_y(1) + \lambda[c_1 + c2[-a_1 + c_1]]$$

$$R_y(2) = -a_1 R_y(1) - a_2 R_y(0) + c_2 R_{ye}(0) = -a_1 R_y(1) - a_2 R_y(0) + c_2 \lambda$$

Adotando $R_y(0) = \gamma_0$, $R_y(1) = \gamma_1$ e $R_y(2) = \gamma_2$, bem como $\theta_0 = \lambda[1 + c1[-a_1 + c_1] + c_2\lambda[a_1^2 - a_1 c_1 - a_2 + c_2]]$, $\theta_1 = \lambda[c_1 + c2[-a_1 + c_1]]$, $\theta_2 = c_2 \lambda$, tem-se:

$$R_y(0) = \gamma_0 = -a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 + \theta_0 \qquad (9)$$

$$R_y(1) = \gamma_1 = -a_1\gamma_0 - a_2\gamma_1 + \theta_1 \qquad (10)$$

$$R_y(2) = \gamma_2 = -a_1\gamma_1 - a_2\gamma_0 + \theta_2 \qquad (11)$$

Isolando $\gamma_1$ na Eq. 10, $\gamma_1 = \dfrac{-a_1\gamma_0 + \theta_1}{a_2 + 1}$ e substituindo na Eq.11, tem-se:

$$R_y(2) = \gamma_2 = -a_1\left(\frac{-a_1\gamma_0 + \theta_1}{a_2 + 1}\right) - a_2\gamma_0 + \theta_2 = -a_1\left(\frac{-a_1\gamma_0 + \lambda[c_1 + c2(-a_1 + c_1)]}{a_2 + 1}\right) = \frac{a_1^2\gamma_0 - a_1 k_1 - a_2\gamma_0 + k_2 - (a_2)^2\gamma_0 + a_2 k_2}{(1 + a_2)}$$

Assim, a correlação de $y$ em $\tau = 0$:

$$R_y(0) = \gamma_0 = -a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 + \theta_0 = -a_1\left(\frac{-a_1\gamma_0 + \theta_1}{a_2 + 1}\right) - a_2\left(\frac{a_1^2\gamma_0 - a_1 k_1 - a_2\gamma_0 + k_2 - = (a_2)^2\gamma_0 + a_2 k_2}{(1 + a_2)}\right) + \ldots$$

$$+\lambda[1 + c1(-a_1 + c_1) + c_2\lambda(a_1^2 - a_1 c_1 - a_2 + c_2)]$$

$$\gamma_0 = \frac{(a_1)^2\gamma_0 - a_1 k_1 - (a_1)^2 a_2\gamma_0 + a_1 a_2 k_1 + (a_2)^2\gamma_0 - a_2 k_2 + (a_2)^3\gamma_0 - (a_2)^2 k_2 + k_0 + a_2 k_0}{(1 + a_2)}$$

Por fim, a variância $\gamma_0$ é expressa por:

$$\gamma_0 = \frac{(1 + a_2)\left[1 + (c_1)^2 + (c_2)^2\right] - 2a_1 c_1(1 + c_2) - 2c_2\left[a_2 - (a_1)^2 + (a_2)^2\right]}{(1 - a_2)(1 - a_1 + a_2)(1 + a_1 + a_2)}$$

# Referências


[1] L. LJUNG. **System Identification: Theory for the User** Courier Corporation, 2008. ISBN 0486462781.