

Universidade Federal de Campina Grande

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Estimação e Identificação de Sistemas - 21.2

Arthur Dimitri Brito Oliveira

Relatório de Atividade 2 - Modelos Estocásticos

Sumário

- [Fundamentação Teórica](#)
- [Periodogramas](#)
- [Espectro do sinal](#)
- [Espectro cruzado](#)
- [Item 1](#)
- [Item 2](#)
- [Item 3](#)
- [Referências](#)

Fundamentação Teórica

Uma característica comum a sinais de perturbação é que eles não podem ser preditos de forma precisa. No entanto, é possível realizar previsões quanto ao valor esperado do seu comportamento futuro. Sendo assim, introduzir elementos estocásticos à descrição do sinal é algo comum. Sendo assim, considerando um sinal uniformemente amostrados, tem-se a forma:

$$w(t) + d_1 w(t - T) + \dots + d_n w(t - nT) = c_0 e(t) + c_1 e(t - T) + \dots + c_n e(t - nT) \quad (1)$$

Sendo $e(t)$ e $e(s)$ independentes se $t \neq s$. A distribuição de probabilidade de $e(t)$ tem um grande impacto na forma do sinal $w(t)$. Normalmente, $e(t)$ é uma variável independente, com distribuição normal $e(t) \in N(0, \lambda)$. Sendo assim, $w(t)$ é um sinal contaminado.

Periodogramas

Um periodograma define os conteúdos de frequência de um sinal dentro de um intervalo de tempo finito. Dado um conjunto de entradas $u(t)$, $t = 1, 2, \dots, N$, $U_N(\omega)$ é dado pela aplicação da DFT:

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u(t) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

Costumeiramente, considera-se $U_N(\omega)$ para $-\pi \leq \omega \leq \pi$, de modo que a Eq. 2 torna-se:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N/2-1}^{N/2} U_N(2\pi k/N) e^{i2\pi kt/N} \quad (3)$$

Na Eq. 3, o sinal $u(t)$ é uma combinação linear de $e^{i\omega t}$ para diferentes frequências. O termo $U_N(2\pi k/N)$ determina o peso que cada frequência ω carrega na decomposição do sinal de entrada.

Espectro do Sinal

O conteúdo de frequência de um determinado sinal é determinado pelo que se chama de espectro. A notação utilizada aqui é $\Phi_w(\omega)$.

Os periodogramas definem os conteúdos de frequência de um sinal dentro de um intervalo finito. Essa informação, no entanto, muitas vezes é inacessível devido ao comportamento errático do periodograma como uma função de ω . Busca-se, então, uma definição dentro de um intervalo $t \in [1, \infty)$. Sendo um sinal $s(t)$ quasi-estacionário, ou seja, aquele que tem sua média finita e limitada, pode-se tomar a covariância e a covariância cruzada:

$$R_s(\tau) = \bar{E}s(t)s(t-\tau)$$

$$R_{sw}(\tau) = \bar{E}s(t)w(t-\tau)$$

No caso de sinais quasi-estacionários, o espectro é definido a partir da função de covariância ao aplicar-se a transformada de Fourier:

$$\Phi_s(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-i\tau\omega} \quad (4)$$

Quando trata-se de dois sinais aleatórios e deseja-se estabelecer a dependência entre eles, a **correlação cruzada** entre o sinal de entrada e o sinal é utilizada:

$$\Phi_{sw}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{sw}(\tau) e^{-i\tau\omega} \quad (5)$$

Um termo mais preciso seria a *densidade espectral*, já que expressa a potência do sinal entre duas frequências ω_1 e ω_2 . Assim:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \Phi_w(\omega) d\omega$$

Há diversas variações na definição do que é espectro, a depender da natureza do sinal (discreto, contínuo, determinístico, etc).

Espectro Cruzado

Considerando dois sinais $u(t)$ e $y(t)$, é interessante observar como eles variam em conjunto. Analogamente ao espectro, o espectro cruzado entre u e y é expresso por:

$$\Phi_{yu}(\omega)$$

Assim, o espectro cruzado é dado pelo produto entre a transformada de Fourier de y e o conjugado da transformada de Fourier de u . Diz-se que dois sinais não são correlacionados se $\Phi_{yu}(\omega) = 0$.

Item 1

Sendo o processo $v(t)$ expresso por:

$$v(t) = 1.5v(t-1) - 0.7v(t-2) + e(t) + 0.5e(t-1) \quad (6)$$

$e(t)$ é definido como um ruído branco gaussiano. Expressando a Eq. 6 em termos do operador *back-shift* q , tem-se:

$$v = 1.5vq - 0.7vq^2 + e + 0.5eq]$$

$$v(1 - 1.5q + 0.7q^2) = e(1 + 0.5q)$$

$$H(q) = \frac{v(q)}{e(q)} = \frac{1 + 0.5q}{0.7q^2 - 1.5q + 1} \quad (7)$$

Definiu-se o sinal no software MATLAB e obteve-se o periodograma exibido na [Figura 1](#).

item_1_process

item_1_periodogram_plot

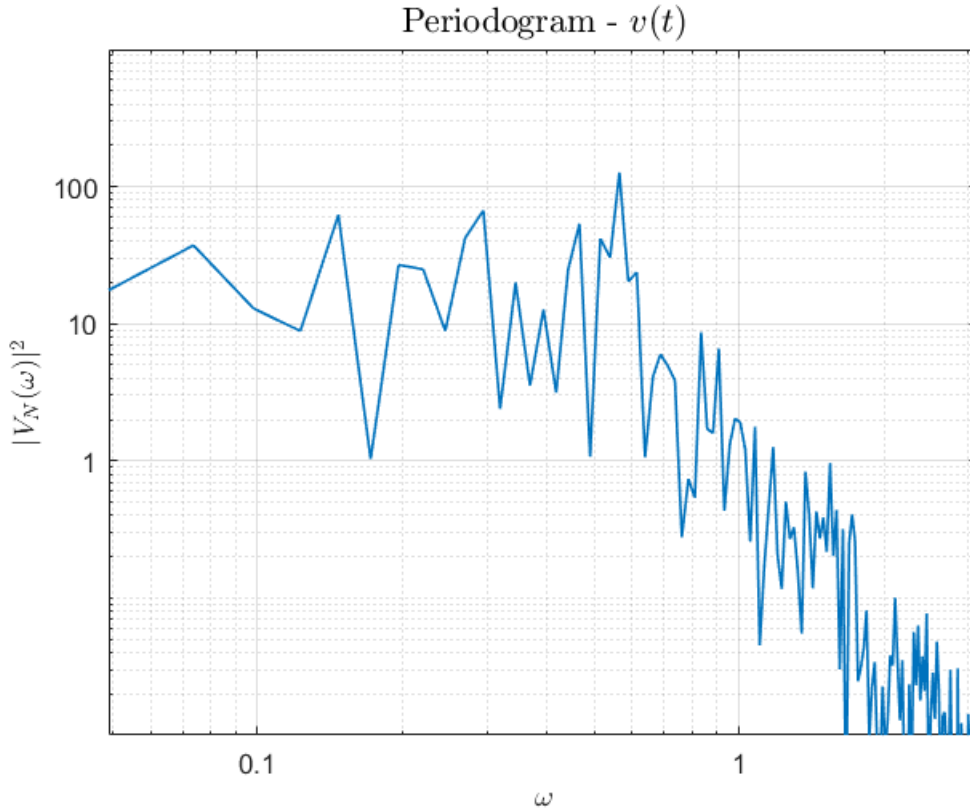


Figura 1: Periodograma da realização $v(t)$.

Utilizando a função de transferência de pulso encontrada na [Eq. 7](#), é possível determinar uma versão suavizada das componentes de frequência exibidas no periodograma anterior, isto é, calcular a densidade espectral por meio de:

$$\Phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{i\omega})|^2$$

O resultado pode ser visualizado na [Figura 2](#).

item_1_spectrum_plot

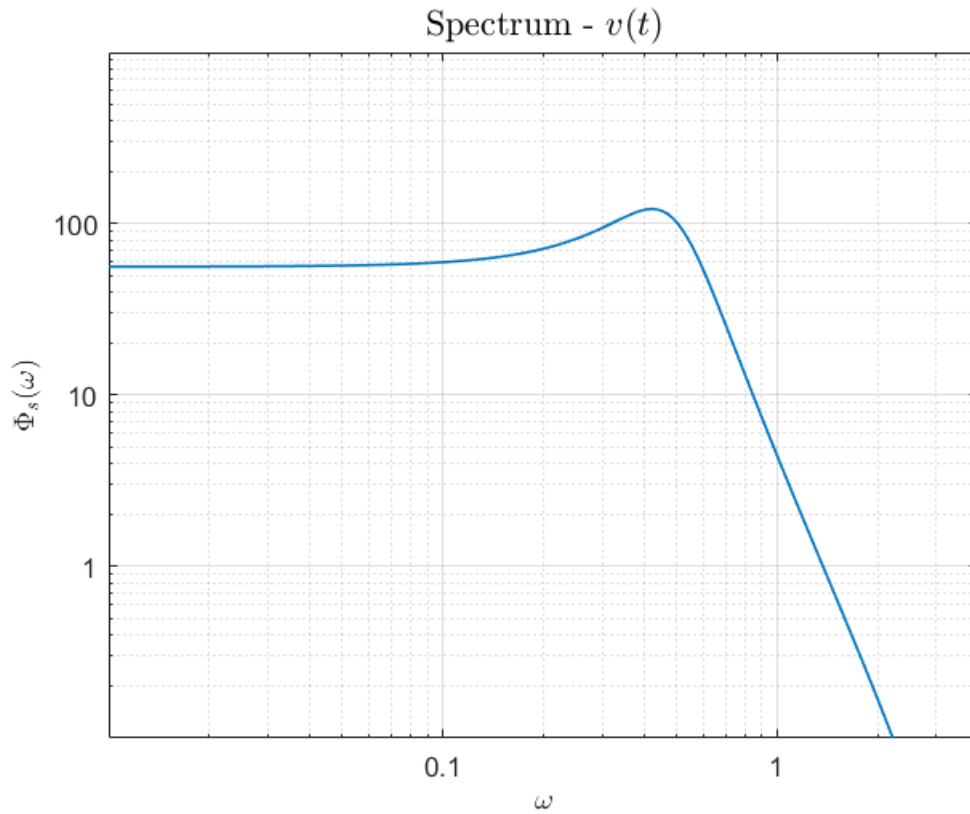


Figura 2: Densidade espectral da realização $v(t)$.

Item 2

Considere os quatro modelos descritos na Figura 3.

$$w(t) + d_1 w(t - T) + \dots + d_n w(t - nT)$$

$$= c_0 e(t) + c_1 e(t - T) + \dots + c_n e(t - nT), \quad e(t) \in N(0, \lambda) \text{ (normally distributed with mean value 0 and variance } \lambda)$$

$e(t)$ and $e(s)$ independent if $t \neq s$

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{with probability } 1 - \mu \\ e(t) \in N(0, \lambda/\mu) & \text{with probability } \mu \end{cases}$$

(a) $n = 1, d_1 = -0.9, c_0 = 1, c_1 = 0$

(b) $n = 1, d_1 = 0.9, c_0 = 1, c_1 = 0$

(c) $n = 2, d_1 = -0.5, d_2 = 0.7, c_0 = 1, c_1 = 0.5, c_2 = 0$

(d) same system as in case (c), but $e(t)$ not normally distributed, instead with the distribution $P(e(t) = 0) = 0.98, P(e(t) = \sqrt{50}) = 0.01$, and $P(e(t) = -\sqrt{50}) = 0.01$ (thus still independent with average 0 and variance 1)

Figura 3: Modelos estocásticos utilizados.

Utilizando o software de simulação MATLAB, obteve-se as curvas associadas a cada um dos modelos. Os resultados podem ser observados na [Figura 4](#).

item_2

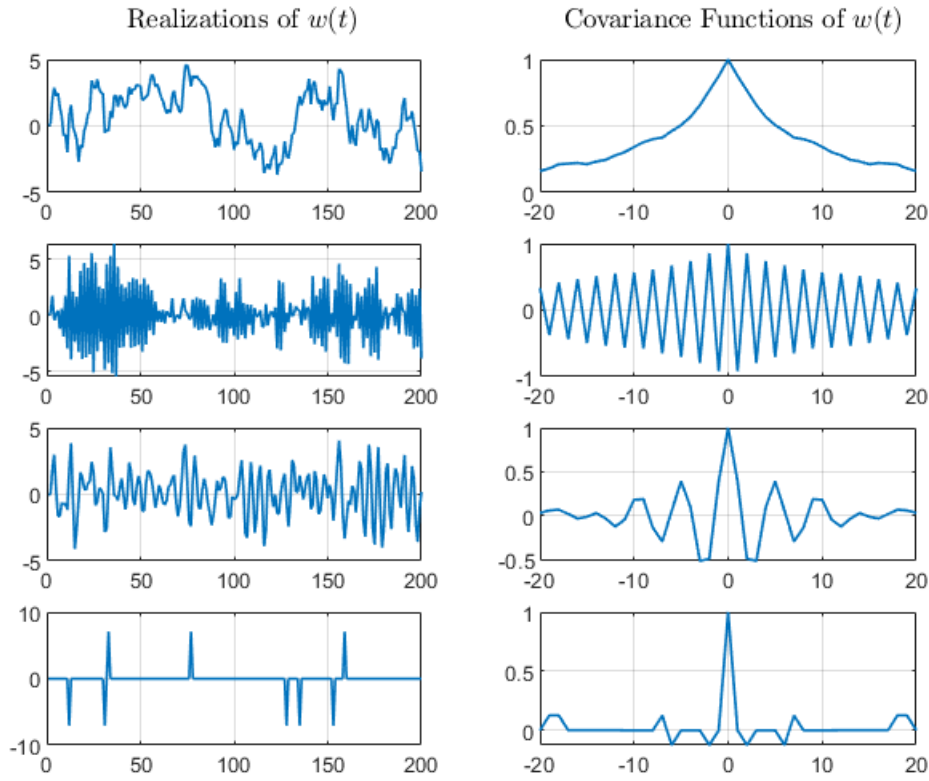


Figura 4: Realizações de $w(t)$ e suas covariâncias $R_w(\tau)$

Item 3

Sendo o processo ARMA conforme expresso na [Eq. 8](#):

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) \quad (8)$$

Utilizando a forma $y(t) = y_t$ e $e(t) = e_t$, a covariância $R_y(\tau)$, $\tau = 0, 1, 2$ pode ser obtida ao multiplicar a expressão acima por $y(t)$, $y(t-1)$ e $y(t-2)$ e tomar a esperança matemática. Então:

$$y(t)y(t) = -a_1 y(t-1)y(t) - a_2 y(t-2)y(t) + e(t)y(t) + c_1 e(t-1)y(t) + c_2 e(t-2)y(t)$$

$$R_y(0) = E(y_t y_t) = -a_1 E(y_{t-1} y_t) - a_2 E(y_{t-2} y_t) + E(e_t y_t) + c_1 E(e_{t-1} y_t) + c_2 E(e_{t-2} y_t)$$

$$R_y(1) = E(y_t y_{t-1}) = -a_1 E(y_{t-1} y_{t-1}) - a_2 E(y_{t-2} y_{t-1}) + E(e_t y_{t-1}) + c_1 E(e_{t-1} y_{t-1}) + c_2 E(e_{t-2} y_{t-1})$$

$$R_y(2) = E(y_t y_{t-2}) = -a_1 E(y_{t-1} y_{t-2}) - a_2 E(y_{t-2} y_{t-2}) + E(e_t y_{t-2}) + c_1 E(e_{t-1} y_{t-2}) + c_2 E(e_{t-2} y_{t-2})$$

No caso da correlação cruzada $R_{ye}(\tau)$, ao multiplicar a Eq. 3 por $e(t)$, $e(t-1)$, $e(t-2)$, obtém-se:

$$y(t)e(t) = -a_1y(t-1)e(t) - a_2y(t-2)e(t) + e(t)e(t) + c_1e(t-1)e(t) + c_2e(t-2)e(t)$$

$$R_{ye}(0) = E(y_t e_t) = -a_1E(y_{t-1}e_t) - a_2E(y_{t-2}e_t) + E(e_t e_t) + c_1E(e_{t-1}e_t) + c_2E(e_{t-2}e_t)$$

$$R_{ye}(1) = E(y_t e_{t-1}) = -a_1E(y_{t-1}e_{t-1}) - a_2E(y_{t-2}e_{t-1}) + E(e_t e_{t-1}) + c_1E(e_{t-1}e_{t-1}) + c_2E(e_{t-2}e_{t-1})$$

$$R_{ye}(2) = E(y_t e_{t-2}) = -a_1E(y_{t-1}e_{t-2}) - a_2E(y_{t-2}e_{t-2}) + E(e_t e_{t-2}) + c_1E(e_{t-1}e_{t-2}) + c_2E(e_{t-2}e_{t-2})$$

Sabendo que $e(t)$ é um ruído gaussiano, os termos do tipo $E(e_i e_k) = 0$, para quaisquer $i \neq k$. Além disso, $E(e_i e_k) = \lambda$, sempre que $i = k$, já que trata-se de um sinal wgn. Por fim, $E(e_i y_k) = 0$ para quaisquer $i > k$. Assim,

$$R_{ye}(0) = E(y_t e_t) = -a_1E(y_{t-1}e_t) - a_2E(y_{t-2}e_t) + E(e_t e_t) + c_1E(e_{t-1}e_t) + c_2E(e_{t-2}e_t) = E(e_t e_t)$$

Utilizando o resultado anterior, e sabendo que $E(e_{t-1}e_{t-1}) = E(e_t e_t)$

$$R_{ye}(1) = E(y_t e_{t-1}) = -a_1E(y_{t-1}e_{t-1}) - a_2E(y_{t-2}e_{t-1}) + E(e_t e_{t-1}) + c_1E(e_{t-1}e_{t-1}) + c_2E(e_{t-2}e_{t-1})$$

$$R_{ye}(1) = -a_1E(y_{t-1}e_{t-1}) + c_1E(e_{t-1}e_{t-1}) = -a_1R_{ye}(0) + c_1E(e_t e_t)$$

$$R_{ye}(2) = E(y_t e_{t-2}) = -a_1E(y_{t-1}e_{t-2}) - a_2E(y_{t-2}e_{t-2}) + E(e_t e_{t-2}) + c_1E(e_{t-1}e_{t-2}) + c_2E(e_{t-2}e_{t-2})$$

$$R_{ye}(2) = -a_1E(y_{t-1}e_{t-2}) - a_2E(e_{t-2}e_{t-2}) + c_2E(e_{t-2}e_{t-2}) = -a_1R_{ye}(1) - a_2R_{ye}(0) + c_2E(e_t e_t)$$

No caso das covariâncias $R_y(\tau)$:

$$R_y(0) = E(y_t y_t) = -a_1E(y_{t-1}y_t) - a_2E(y_{t-2}y_t) + E(e_t y_t) + c_1E(e_{t-1}y_t) + c_2E(e_{t-2}y_t)$$

$$R_y(0) = -a_1R_y(1) - a_2R_y(2) + R_{ey}(0) + c_1R_{ye}(1) + c_2R_{ye}(2)$$

$$R_y(1) = E(y_t y_{t-1}) = -a_1E(y_{t-1}y_{t-1}) - a_2E(y_{t-2}y_{t-1}) + E(e_t y_{t-1}) + c_1E(e_{t-1}y_{t-1}) + c_2E(e_{t-2}y_{t-1})$$

$$R_y(1) = -a_1R_y(0) - a_2R_y(1) + c_1R_{ye}(0) + c_2R_{ye}(1)$$

$$R_y(2) = E(y_t y_{t-2}) = -a_1E(y_{t-1}y_{t-2}) - a_2E(y_{t-2}y_{t-2}) + E(e_t y_{t-2}) + c_1E(e_{t-1}y_{t-2}) + c_2E(e_{t-2}y_{t-2})$$

$$R_y(2) = -a_1R_y(1) - a_2R_y(0) + c_2R_{ye}(0)$$

Para as covariâncias cruzadas:

$$R_{ye}(0) = E(y_t e_t) = \lambda$$

$$R_{ye}(1) = -a_1R_{ye}(0) + c_1E(e_t e_t) = \lambda[-a_1 + c_1]$$

$$R_{ye}(2) = -a_1R_{ye}(1) - a_2R_{ye}(0) + c_2E(e_t e_t) = -a_1\lambda[-a_1 + c_1] - a_2\lambda + c_2\lambda = \lambda[a_1^2 - a_1c_1 - a_2 + c_2]$$

Para as covariâncias $R_y(\tau)$:

$$R_y(0) = -a_1R_y(1) - a_2R_y(2) + R_{ey}(0) + c_1R_{ye}(1) + c_2R_{ye}(2)$$

$$R_y(0) = -a_1R_y(1) - a_2R_y(2) + \lambda + c_1\lambda[-a_1 + c_1] + c_2\lambda[a_1^2 - a_1c_1 - a_2 + c_2]$$

$$R_y(1) = -a_1R_y(0) - a_2R_y(1) + c_1R_{ye}(0) + c_2R_{ye}(1) = -a_1R_y(0) - a_2R_y(1) + \lambda[c_1 + c_2[-a_1 + c_1]]$$

$$R_y(2) = -a_1R_y(1) - a_2R_y(0) + c_2R_{ye}(0) = -a_1R_y(1) - a_2R_y(0) + c_2\lambda$$

Adotando $R_y(0) = \gamma_0$, $R_y(1) = \gamma_1$ e $R_y(2) = \gamma_2$, bem como $\theta_0 = \lambda[1 + c_1[-a_1 + c_1] + c_2\lambda[a_1^2 - a_1c_1 - a_2 + c_2]]$,

$\theta_1 = \lambda[c_1 + c_2[-a_1 + c_1]]$, $\theta_2 = c_2\lambda$, tem-se:

$$R_y(0) = \gamma_0 = -a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 + \theta_0$$

$$R_y(1) = \gamma_1 = -a_1\gamma_0 - a_2\gamma_1 + \theta_1$$

$$R_y(2) = \gamma_2 = -a_1\gamma_1 - a_2\gamma_0 + \theta_2$$

Isolando γ_1 na Eq. x, $\gamma_1 = \frac{-a_1\gamma_0 + \theta_1}{a_2 + 1}$ e substituindo na Eq.xx, tem-se:

$$R_y(2) = \gamma_2 = -a_1\left(\frac{-a_1\gamma_0 + \theta_1}{a_2 + 1}\right) - a_2\gamma_0 + \theta_2 = -a_1\left(\frac{-a_1\gamma_0 + \lambda[c_1 + c_2(-a_1 + c_1)]}{a_2 + 1}\right) = \frac{a_1^2\gamma_0 - a_1k_1 - a_2\gamma_0 + k_2 - (a_2)^2\gamma_0 + a_2k_2}{(1 + a_2)}$$

Substituindo este resultado na Eq. xxx, obtém-se:

$$R_y(0) = \gamma_0 = -a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 + \theta_0 = -a_1\left(\frac{-a_1\gamma_0 + \theta_1}{a_2 + 1}\right) - a_2\left(\frac{a_1^2\gamma_0 - a_1k_1 - a_2\gamma_0 + k_2 - (a_2)^2\gamma_0 + a_2k_2}{(1 + a_2)}\right) + \dots$$

$$+ \lambda[1 + c_1(-a_1 + c_1) + c_2\lambda(a_1^2 - a_1c_1 - a_2 + c_2)]$$

$$\gamma_0 = \frac{(a_1)^2\gamma_0 - a_1k_1 - (a_1)^2a_2\gamma_0 + a_1a_2k_1 + (a_2)^2\gamma_0 - a_2k_2 + (a_2)^3\gamma_0 - (a_2)^2k_2 + k_0 + a_2k_0}{(1 + a_2)}$$

Por fim, a variância γ_0 é expressa por:

$$\gamma_0 = \frac{(1 + a_2)[1 + (c_1)^2 + (c_2)^2] - 2a_1c_1(1 + c_2) - 2c_2[a_2 - (a_1)^2 + (a_2)^2]}{(1 - a_2)(1 - a_1 + a_2)(1 + a_1 + a_2)}$$

Referências

[1] L. LJUNG. **System Identification: Theory for the User** Courier Corporation, 2008. ISBN 0486462781.