Universidade Federal de Campina Grande

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Estimação e Identificação de Sistemas - 21.2

Professores: Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Saulo Oliveira Dornellas Luiz, Dr.

Aluno: Arthur Dimitri Brito Oliveira

O objetivo deste relatório é a descrição do método de identificação de sistemas por subespaço. Discorre-se também sobre diferentes cenários para aplicação deste método, incluindo variados sinais de entrada e ordens do sistema.

Relatório de Atividade 11

Introdução

Nos métodos de identificação por subespaço existe uma ênfase ao estado de um sistema dinâmico, enquanto que, em abordagens clássicas, baseia-se em um arcabouço do tipo entrada-saída. Uma das principais conquistas do método de identificação por subespaços é a demonstração de como os estados do filtro de Kalman podem ser obtidos a partir de dados de entrada e saída utilizando álgebra linear.

Quando analisado sob a ótica de um problema de ajuste de dados, é evidente que os algoritmos de identificação por subespaço requerem uma parametrização a ser especificada. Diferentemente de outros métodos, aqui utiliza-se os modelos de espaço de estado completos e o único parâmetro é a ordem do sistema. Os métodos clássicos de parametrização trazem alguns problemas:

- É possível que haja problemas de mal-condicionamento das matrizes, como no método de mínimos quadrados. Isso implica em resultados extremamente sensíveis a perturbações.
- Existe uma sobreposição das parametrizações, visto que nenhuma parametrização cobre todos os possíveis sistemas.

O método, então, não sofre com esses problemas. É necessário, tão somente, especificar a ordem do modelo, que pode ser determinada por meio da inspeção de alguns valores singulares.

Algoritmos de identificação por subespaços computam espaços de estados a partir dos dados de entrada e de saída. Sendo assim, dadas s medições da entrada $u_k \in \mathbb{R}^m$ e da saída $y_k \in \mathbb{R}^t$ gerados por um sistema determinístico de ordem n:

$$x_{k+1}^d = Ax_k^d + Bu_k \qquad (1)$$

$$y_k = Cx_k^d + Du_k \qquad (2)$$

Busca-se determinar a ordem n do sistema desconhecido e as matrizes $A,\ B,\ C\ e\ D$.

Não Unicidade da Solução

Diante dos dados de entrada e saída coletados, há inúmeros valores possíveis para os parâmetros capazes de determinar a saída a partir dos dados de entrada u. Supondo que conhece-se as matrizes $A,\ B,\ C\ e\ D$ que descrevem as dinâmicas do sistema.

$$\begin{bmatrix} x^{(2)} & x^{(3)} & ... & x^{(p+1)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} & ... & y^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & ... & x^{(p)} \\ u^{(1)} & u^{(2)} & ... & u^{(p)} \end{bmatrix}$$

Ao multiplicar ambos os lados por uma matriz arbitraria inversível T, tem-se:

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(2)} & x^{(3)} & ... & x^{(p+1)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} & ... & y^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & ... & x^{(p)} \\ u^{(1)} & u^{(2)} & ... & u^{(p)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Tx^{(2)} & Tx^{(3)} & ... & Tx^{(p+1)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} & ... & y^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Tx^{(1)} & Tx^{(2)} & ... & Tx^{(p)} \\ u^{(1)} & u^{(2)} & ... & u^{(p)} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Nota-se que os mesmos dados de entrada e saída (u, y) podem ser gerados com o sistema equivalente, onde os parâmetros são multiplicados por uma matriz T inversível. Utiliza-se a matriz T para provocar uma transformação ao vetor de estados.

Estratégias para Resolução do Problema

As matrizes U e Y aqui são representadas como um simples histórico dos dados de entrada e saída. Empilha-se as variáveis e aplica-se um deslocamento para a direita.

$$Y_{1|i} = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & ... & y(j) \\ y(2) & y(3) & ... & y(j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(i) & y(i+1) & ... & y(i+j+1) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$U_{1|i} = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & ... & u(j) \\ u(2) & y(3) & ... & u(j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(i) & u(i+1) & ... & u(i+j+1) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Estas matrizes são denominadas de matrizes de Hankel. Sabendo que Y é gerado a partir de X e de U, projeta-se Y no espaço perpendicular àquele gerado por U. Ao fazer isso, a contribuição de U é descartada, já que $HU/U^{\perp} = 0$. Expressando a saída como uma função linear do vetor linha de X e do vetor linha de U. Assim:

$$\begin{bmatrix} y(1) & y(2) & ... & y(j) \\ y(2) & y(3) & ... & y(j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(i) & y(i+1) & ... & y(i+j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & ... & x_{j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & ... & 0 \\ CB & D & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{1-3}B & CA^{i-4}B & ... & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & ... & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & .... & u_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & ... & u_{i+j-1} \end{bmatrix}$$

$$Y_{1|i} = \Gamma_i X_1 + H_i U_{1|i} \qquad (6)$$

$$X_{i+1} = A^i X_1 + \Delta_i U_{1|i} \qquad (7)$$

Para $\Delta_i = [A^{i-1} \quad A^{i-2}B \quad ... \quad B]$ sendo a matriz de observabilidade reversa. A matriz Γ_i é a matriz de observabilidade. Aqui conhece-se, somente, as matrizes Y e U. Agora o objetivo é encontrar um subespaço perpendicular ao subespaço definido por U , de modo que a influência de U em Y é removida. A partir da Eq. 6 tem-se:

$$X_1 = \Gamma_i^* Y_{1|i} - \Gamma_i^* H_i U_{1|i} \qquad (8)$$

A partir do resultado obtido na Eq. 8, a Eq. 7 torna-se:

$$X_{i+1} = A^i \Gamma_i^* Y_{1|i} - A^i \Gamma_i^* H_i U_{1|i} + \Delta_i U_{1|i}$$

Definindo $L_i = [\Delta_i - A^i \Gamma_i^* H_i \;\; A^i \Gamma_i^*]$ e a matriz de dados $W_{q|i} = \begin{bmatrix} U_{1|i} \\ Y_{1|i} \end{bmatrix}$ pode-se reescrever a Eq.8 e a matriz de dados no instante $i+1$:

$$X_1 = L_i W_{1|i} \qquad (10)$$

$$Y_{i+1|2i} = \Gamma_i L_i W_{1|i} + H_i U_{i+1|2i} \qquad (11)$$

Fazendo a projeção de $Y_{i+1|2i}$ em $U_{i+1|2i}$:

$$Y_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i} = \Gamma_i L_i W_{1|i}/U^{\perp}_{i+1|2i} + H_i U_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i}$$

$$Y_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i} = \Gamma_i L_i W_{1|i}/U^{\perp}_{i+1|2i} \quad (12)$$

Ao isolar $\Gamma_i L_i$ na Eq. 12, tem-se:

$$\Gamma_i L_i = [Y_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i}][W_{1|i}/U^{\perp}_{i+1|2i}]^* \qquad (13)$$

Quando multiplica-se ambos os lados da Eq. 13, obtém-se:

$$\Gamma_i L_i W_{1|i} = [Y_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i}][W_{1|i}/U^{\perp}_{i+1|2i}]^* W_{1|i} \qquad (14)$$

Nota-se que os termos $i+1|2i$ referem-se às variáveis a serem identificadas, enquanto que os termos à esquerda dizem respeito às variáveis coletadas. Denominando $[Y_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i}][W_{1|i}/U^{\perp}_{i+1|2i}]^* W_{1|i} = O_{i+1}$, tem-se:

$$O_{i+1} = \Gamma_i X_{i+1} \qquad (15)$$

$$O_{i+1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ ... \\ .CA^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(i+1)} & x^{(i+2)} & ... & x^{(i+j)} \end{bmatrix}$$

Fica claro que a matriz O é composta por vetores linha linearmente dependentes. Assim, o posto de O é igual ao posto de X. Retomando o resultado obtido na Eq. 15, os valores do lado direito da equação são obtidos por meio do SVD de O. O resultado dessa decomposição é interpretado e relacionado com a matriz X:

$$O_{i+1} = \Gamma_i X_{i+1} = PSV = PS^{1/2}TT^{-1}S^{1/2}V$$

$$X_{i+1} = T^{-1}S^{1/2}V$$

$$\widehat{X}_{i+1} = S^{1/2}V$$

$$\widehat{X}_{i+1} = TX_{i+1} \qquad (16)$$

Sendo assim, o vetor de estados estimado é proporcional ao estado verdadeiro por meio da matriz constante e desconhecida T. Apesar de não se conhecer os valores dos estados escondidos, é possível determinar a dimensão do vetor X.

Definindo $V|$ como sendo a matriz V sem a última coluna $V| = \begin{bmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & ... & v^{(j-1)} \end{bmatrix}$ e $|V = \begin{bmatrix} v^{(2)} & v^{(3)} & ... & v^{(j)} \end{bmatrix}$, de forma análoga:

$$\widehat{X}_{i+2}| = S^{1/2}|V$$

$$\widehat{X}_{i+1}| = S^{1/2}V|$$

Assim, o espaço de estados se torna:

$$\begin{bmatrix} \widehat{X}_{i+2}| \\ Y_{i+1|2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{X}_{i+1}| \\ U_{i+1|2i} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Tendo conhecimento de $\widehat{X}_{i+2}|$, $Y_{i+1|2i}$, $\widehat{X}_{i+1}|$ e $U_{i+1|2i}$, a estimativa das matrizes $A,\ B,\ C\ e\ D$ pode ser obtida por meio de:

$$\begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{X}_{i+2}| \\ Y_{i+1|2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{X}_{i+1}| \\ U_{i+1|2i} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix}$$

Desenvolvimento

Os exemplos aqui utilizados para validação do algoritmo envolvem sistemas de primeira, segunda e terceira ordem. As excitações utilizadas foram uma onda quadrada e um ruído gaussiano.

Exemplo 1: espaço de estados de primeira ordem - excitação: onda quadrada

Considera-se o seguinte sistema de primeira ordem:

$$x^{(k+1)} = 0.75x^{(k)} + 0.3u^{(k)}$$

$$y^{(k)} = 0.5x^{(k)}$$

$$x^{(1)} = 0$$

Utilizando um sinal periódico na forma de uma onda quadrada, excita-se o sistema e observa-se a saída por 100 amostras. Utilizando o método de identificação descrito anteriormente, obtém-se a seguinte representação em espaço de estados e a saída estimada a partir do sistema identificado, conforme ilustra a Figura 1.

```
verbose = 1;
addpath 'XI - Subspace Identification\vanoverschee\SUBFUN';
```

```
Warning: Name is nonexistent or not a directory: C:\Users\dimit\OneDrive\Documentos\Acadêmico\21.2\Estimação
e Identificação de Sistemas\XI - Subspace Identification\Scripts\XI - Subspace
Identification\vanoverschee\SUBFUN
```

```
Example_1
```

```
Wflag = 0
A = 0.7500
B = 0.4841
C = 0.3099
D = 7.3177e-16
```

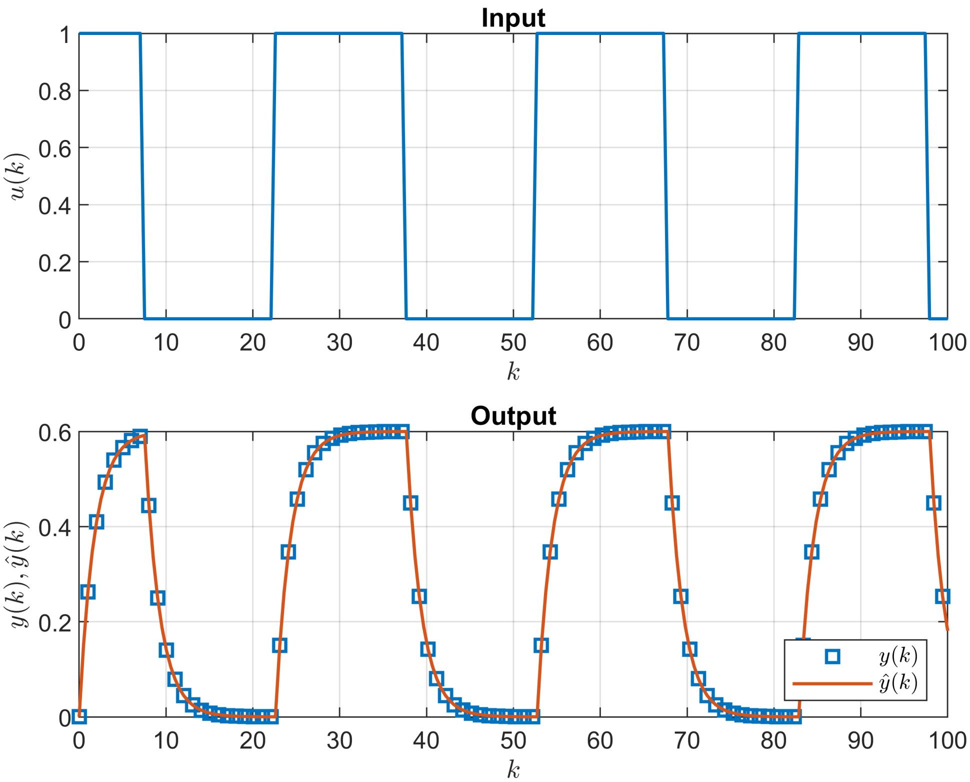

Figura 1: Sinal de excitação aplicado e saídas: sistema verdadeiro $y(k)$ e sistema aproximado $\widehat{y}(k)$.

Observando o resultado da simulação, verifica-se que os parâmetros $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ não convergem para os valores reais. No entanto, ao comparar as saídas $y(k)$ e $\widehat{y}(k)$, pode-se afirmar que o sistema identificado por subespaços é homólogo ao sistema real.

Exemplo 2: espaço de estados de segunda ordem - excitação: onda quadrada

Considera-se o seguinte sistema de segunda ordem:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix} u^{(k)}$$

$$y^{(k)} = [1 \quad 1 \quad 1] x^{(k)}$$

Excita-se o sistema com o mesmo sinal do Exemplo 1. As matrizes do sistema podem ser observadas abaixo, bem como a saída do sistema para os parâmetros estimados, ilustrada na Figura 2.

```
Example_2
```

```
Wflag = 0
A = 3×3
    0.8604   -0.1404    0.0114
   -0.1401    0.3794    0.1510
```

```
    0.0109    0.1537    0.3601
B = 3×1
    1.0385
    2.0443
   -0.4725
C = 1×3
    0.7863    0.3776   -0.0242
D = 5.5110e-16
```

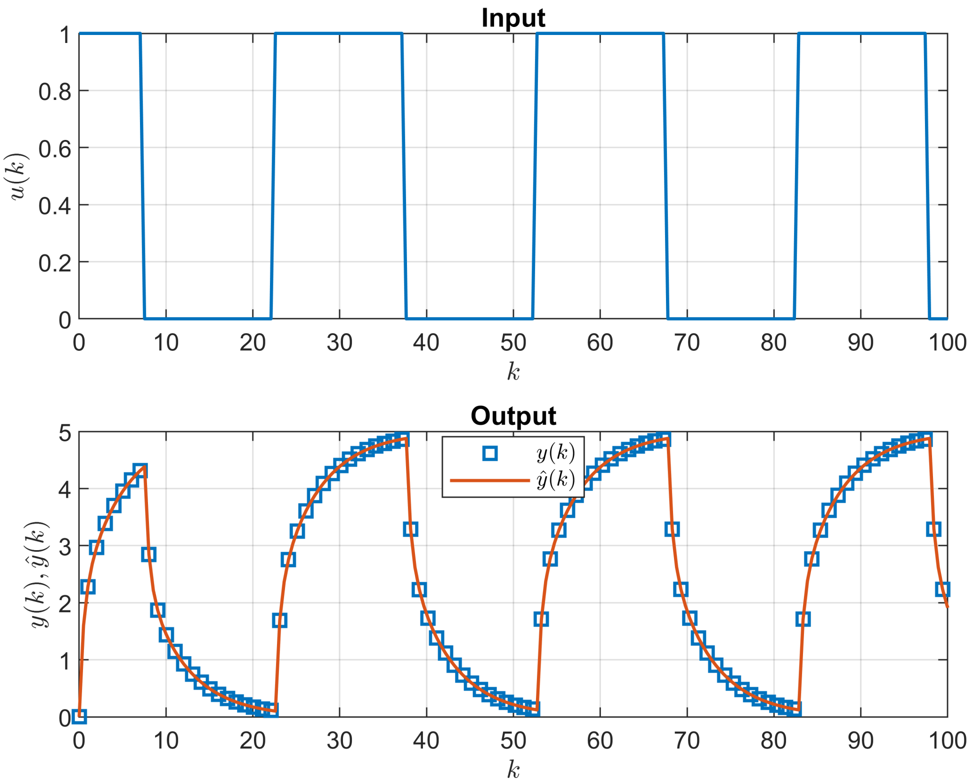

Figura 2: Sinal de excitação aplicado e saídas: sistemas de segunda ordem verdadeiro $y(k)$ e aproximado $\hat{y}(k)$.

Observando o resultado da simulação, verifica-se que os parâmetros do espaço de estados não convergem para os valores reais. No entanto, ao comparar as saídas $y(k)$ e $\hat{y}(k)$, pode-se afirmar que o sistema identificado por subespaços é homólogo ao sistema real. $T \neq 1$

Exemplo 3: espaço de estados de primeira ordem - excitação: ruído branco

O sinal de excitação $u(t)$ agora é um ruído branco para o seguinte espaço de estados:

$$x(k+1) = 0.85x(k) + 0.3u(k)$$

$$y(k) = -0.5x(k)$$

Excitou-se o sistema e aplicou-se o método de identificação por subespaços. Os resultados numéricos podem ser observados abaixo e a saída estimada pode ser observada na Figura 3.

```
Example_3
```

```
Wflag = 0
A = 0.8500
B = 0.3383
C = -0.4434
D = 3.7496e-17
```

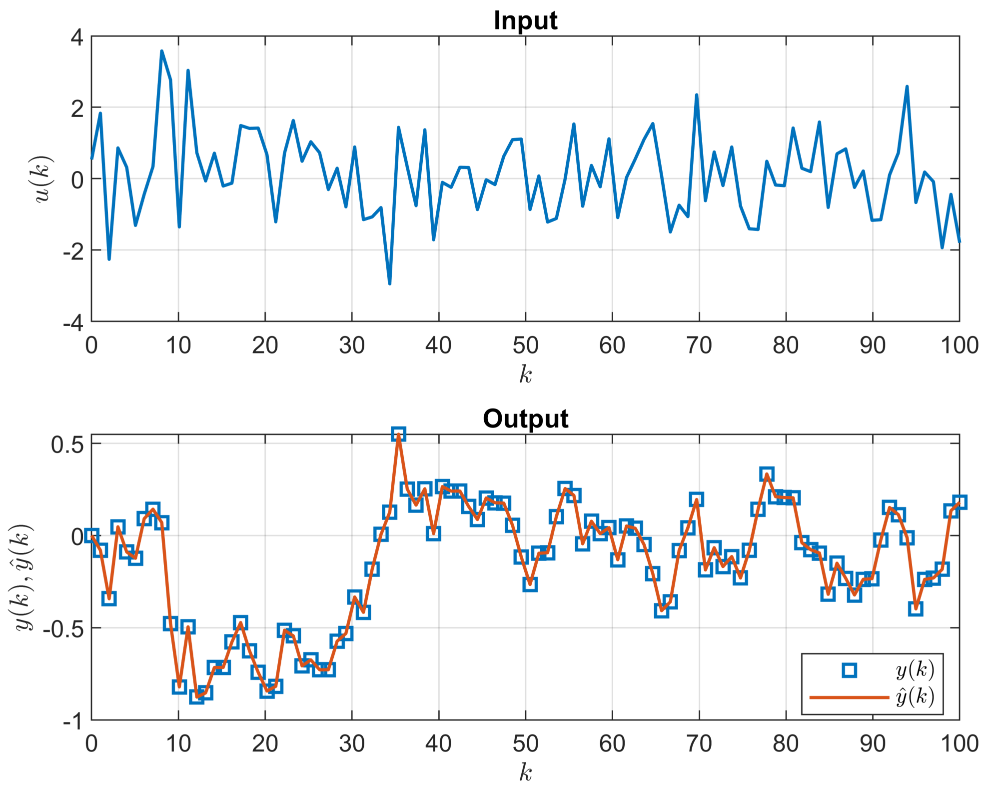

Figura 3: Ruído branco aplicado ao sistema e as saídas verdadeira $y(k)$ e aproximada $\hat{y}(k)$.

Observando o resultado da simulação, verifica-se que os parâmetros do espaço de estados convergem para os valores verdadeiros. O sistema identificado equivale, portanto, ao sistema real e $T \approx 1$.

Exemplo 4: espaço de estados de segunda ordem - excitação: ruído branco

Aplica-se, também, um ruído branco como excitação de um sistema, que agora é de segunda ordem:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

Aplicando o método descrito anteriormente, obtém-se as saídas observadas na Figura 4.

```
Example_4
```

```
Wflag = 0
A = 2×2
    0.7595    0.1990
    0.1832    0.6405
```

```
B = 2×1
    0.5277
   -0.2615
C = 1×2
    0.6397   -0.2388
D = 5.2757e-17
```

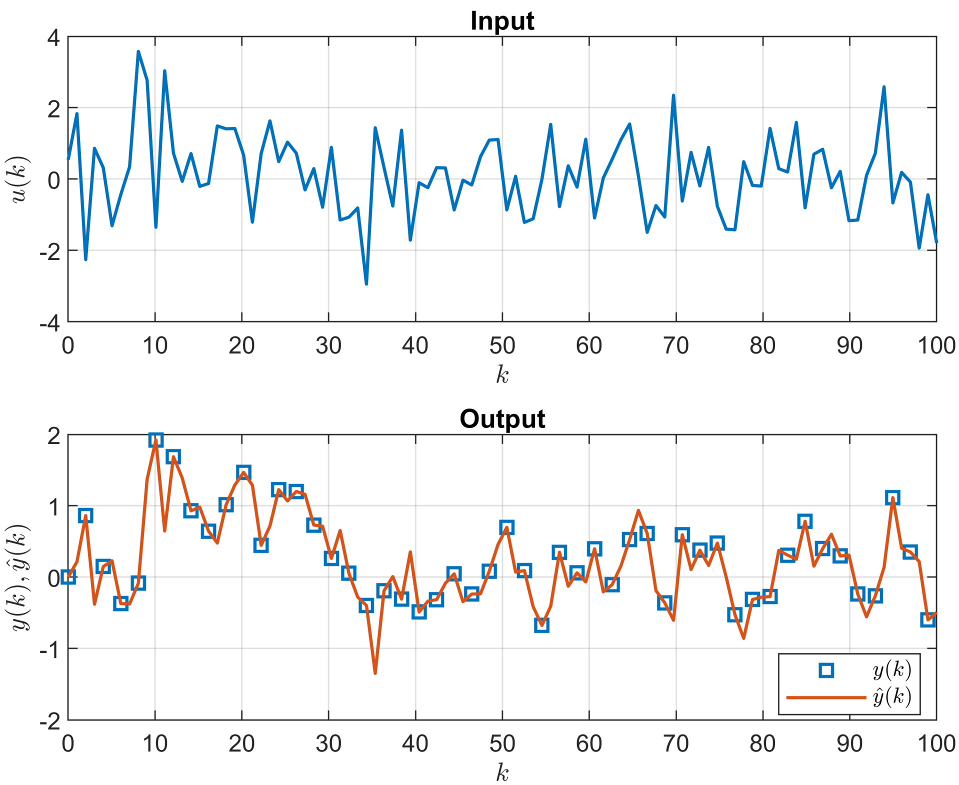

Figura 4: Ruído branco aplicado ao sistema e as saídas verdadeira $y(k)$ e aproximada $\hat{y}(k)$.

Observando o resultado da simulação, verifica-se que os parâmetros do espaço de estados não convergem para os valores verdadeiros. Quando se compara as saídas $y(k)$ e $\hat{y}(k)$, observa-se uma similaridade nas dinâmicas, embora o espaço de estados aproximado não reflita com fidelidade as flutuações da dinâmica esperada.

Referências

[1] VAN OVERSCHEE, DE MOR. **Subspace Identification for Linear Systems. Theory, implementation, applications.** Kluwer Academic Publishers, 1996.