Universidade Federal de Campina Grande

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Estimação e Identificação de Sistemas - 21.2

Professores: Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Saulo Oliveira Dornellas Luiz, Dr.

Aluno: Arthur Dimitri Brito Oliveira

Relatório de Atividade I - Estimação de Parâmetros

Este documento tem como objetivo descrever o procedimento para estimação de parâmetros de um sistema, sujeito a ruídos aditivos, por meio do método de mínimos quadrados.

Sumário

- Introdução
- O problema Arquétipo - Modelos ARX e o Método de Mínimos Quadrados
- Desenvolvimento
- Avaliação Teórica - Erro de Estimação
- Modelo I
- Modelo II
- Experimentos
- Referências

Introdução

Inferir modelos a partir de observações e estudar suas propriedades tem grande relação com o que é o método científico. A identificação de sistemas lida com o desafio de construir modelos matemáticos de sistemas dinâmicos baseado nos dados coletados. Assim, ao interagir com o sistema, é necessário assumir uma relação entre os sinais observados. Isto é, é necessário possuir um modelo do sistema. Tais modelos variam de acordo com o formalismo matemático.

Os sistemas reais diferem de modelos matemáticos. Pode-se comparar determinados aspectos do sistema físico com sua descrição matemática, mas é impossível estabelecer uma conexão exata entre eles. Sendo assim, a decisão de adotar, ou não, um modelo deve ser, majoritariamente, guiada pela sua usabilidade, mais do que pela sua exatidão.

O problema Arquétipo - Modelos ARX e o Método de Mínimos Quadrados

Um sistema pode ser denotado por uma equação de diferença linear entre a saída $y(t)$ e a entrada $u(t)$:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ldots + a_n(t-n) = b_1 u(t-1) + \ldots + b_m u(t-m)$$

Ou seja, dada as observações passadas, é possível determinar o próximo valor de saída. Assim:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + \ldots - a_n(t-n) + b_1 u(t-1) + \ldots + b_m u(t-m)$$

Em uma notação mais compacta, a saída pode ser expressa como:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta = [-y(t-1) \ldots -y(t-n)\; u(t-1) \ldots u(t-m)] \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \\ b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Supondo que não se sabe o valor dos parâmetros θ e que em um intervalo $1 \leq t \leq N$ conhece-se os valores da entrada e da saída por meio do vetor de dados $Z^N = [u(1), y(1) \ldots \ldots u(N), y(N)]$, pode-se utilizar a formulação do problema de mínimos quadrados para determinar o valor ótimo para os parâmetros $\widehat{\theta}$. Assim,

$$v_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y(t) - \widehat{y}(t|\theta))^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2$$

$$\min_{\theta} V_N(\theta, Z^N)$$

Ao derivar em relação ao θ, igualar a zero encontra-se que a aproximação para o vetor de parâmetros pode ser dada por:

$$\widehat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t)$$

O vetor φ é composto pelos regressores, e este termo faz alusão ao fato de que tenta-se calcular a saída com base nos dados prévios do sistema. Supondo que os dados obtidos a partir de medições sejam contaminados por um ruído branco $e(t)$ com variância λ e média nula, a saída pode ser reescrita como:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta_0 + e(t)$$

Substituindo na expressão de aproximação de $\widehat{\theta}$, tem-se:

$$\widehat{\theta}_N = \left[\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}\left[\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\theta_0 + \sum_{t=1}^{N}\varphi(t)e(t)\right] = R(N)^{-1}\left[\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\theta_0 + \sum_{t=1}^{N}\varphi(t)e(t)\right] \quad (1)$$

Sendo assim, o erro na estimação dos parâmetros do vetor $\widehat{\theta}_N$ pode ser expresso por:

$$\widetilde{\theta}_N = \widehat{\theta} - \theta_0 = R(N)^{-1}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)e(t)$$

Pode-se, então, tomar o valor esperado do erro de estimação dos parâmetros:

$$E(\widetilde{\theta}_N) = \hat{\theta} - \theta_0 = R(N)^{-1} \sum_{t=1}^{N} \varphi(t) E(e(t)) = 0$$

Desenvolvimento

Dados dois sistemas na forma:

$$\sigma_1 : y_1 = \frac{q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1}} u + \frac{q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1}} e$$

$$\sigma_2 : y_2 = \frac{q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1}} u + e$$

Onde $e \sim N(0, 1)$ e $u \sim N(0, 1)$. Reescrevendo, tem-se que a primeiro sistema pode ser escrito como:

$$y(t)(1 - 0.8q^{-1}) = (u(t) + e(t))q^{-1}$$

$$\sigma_1 : y(t) = u(t-1) + 0.8y(t-1) + e(t-1)$$

O segundo sistema pode ser expresso por:

$$y(t)(1 - 0.8q^{-1}) = u(t)q^{-1} + e(t)(1 - 0.8q^{-1})$$

$$\sigma_2 : y(t) = u(t-1) + 0.8y(t-1) + e(t) - 0.8e(t-1)$$

Avaliação Teórica - Erro de Estimação

Tendo acesso aos modelos σ_1 e σ_2, é possível traçar expectativas teóricas quanto ao erro de estimação para cada um deles. Tais expectativas devem ser condizentes com as simulações realizadas na seção Experimentos.

Modelo I

Analisando o primeiro modelo, da esperança do erro de estimativa dos parâmetros é dada por:

$$E\widetilde{\theta}_N = E\left[R(N)^{-1} \textstyle\sum_{t=1}^{N} \varphi(t) e(t)\right] = R(N)^{-1} \textstyle\sum_{t=1}^{N} \varphi(t) E e(t) = 0 \qquad (2)$$

Como o erro $e(t)$ tem média nula, é evidente que a estimativa independe do erro. Além disso, se a matriz de covariância da entrada $\bar{R}$ for não-singular, a matriz de covariância da estimativa dos parâmetros é dada por:

$$P_N = E\widetilde{\theta}_N \widetilde{\theta}_N^T = ER(N)^{-1} \sum_{t,s=1}^{N} \varphi(t) e(t) e(s) \varphi^T(s) R(N)^{-1}$$

Utilizando o fato que $Ee(t)e(s) = \lambda\sigma(t-s)$, tem-se que:

$$P_N = \lambda R(N)^{-1}$$

A matriz de covariância do erro de estimação é determinada, inteiramente, pelas propriedades da matriz $R(N)$ e o nível de ruído λ. Definindo $\overline{R}$ como sendo:

$$\overline{R} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} R(N)$$

Caso a matriz $\overline{R}$ seja não singular, a matriz de covariância da estimação de parâmetros é dada, aproximadamente, por:

$$P_N = \frac{\lambda}{N} \overline{R}^{-1} \qquad (3)$$

Isso significa que a aproximação dos parâmetros tende a melhorar com o tempo quando o erro é do tipo gaussiano, de tal forma que a matriz de covariância torna-se cada vez menor.

Modelo II

No caso do modelo σ_2, o ruído é uma soma ponderada de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal. Ou seja, o modelo tem influência da amostra no tempo t do ruído, bem como da amostra do instante anterior, $t-1$. Para verificar se essa soma resulta em uma variável aleatória com distribuição normal, o que permite a utilização do resultado obtido na Equação 2, pode-se recorrer a análise da covariância do sinal de erro $e(t) - 0.8e(t-1)$. Assim, analisando a covariância deste sinal:

$$\begin{aligned}&Cov[e(t) - 0.8e(t-1), e(t-j) - 0.8e(t-j-1)] = \\ &Cov[e(t), e(t-j)] + Cov[e(t), -0.8e(t-j-1)] + Cov[-0.8e(t-1), e(t-j)] + Cov[-0.8e(t-1), 0.8e(t-j-1)]\end{aligned}$$

Sendo $e(t)$ um ruído branco, naturalmente quando $j \neq 0$, $Cov[e(t), e(t-j)] = 0$, assim como $Cov[e(t-j), e(t-j-1)] = 0$. Assim, para o mesmo caso de $j \neq 0$:

$$Cov[e(t) - 0.8e(t-1), e(t-j) - 0.8e(t-j-1)] = -0.8Cov[e(t-1), e(t-j)]$$

Caso $j = 1$, a covariância se torna:

$$Cov[e(t) - 0.8e(t-1), e(t-j) - 0.8e(t-j-1)] = -0.8\lambda^2$$

Esse resultado aponta que $e(t) - 0.8e(t-1)$ não é um ruído gaussiano. Pode-se agora avaliar a covariância do erro de estimação.

$$\widetilde{\theta} = \widehat{\theta} - \widehat{\theta}_0 = P(t) \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)[e(t) - 0.8e(t-1)]$$

$$P = E(\widetilde{\theta}\widetilde{\theta}^T) = E\left[P(t) \sum_{t,s=1}^{N} \varphi(t)[e(t) - 0.8e(t-1)][e(s) - 0.8e(s-1)]\varphi(s)^T P(s)\right]$$

$$P = P(t) \sum_{t,s=1}^{N} \varphi(t)\varphi(t)^T P(s) E\{[e(t) - 0.8e(t-1)][e(s) - 0.8e(s-1)]\}$$

$$P = P(t)\sum_{t,s=1}^{N} \varphi(t)\varphi(t)^T P(s)\{E[e(t)e(s) - 0.8e(t)e(s-1) - 0.8e(t-1)e(s) + 0.8^2 e(t-1)e(s-1)]\} \tag{3}$$

Sabendo que $E(XY) = cov(X, Y) + E(X)E(Y)$, em termos dos erros tem-se:

$$E[e(t)e(s)] = \lambda^2\delta(0)$$

$$E[0.8^2 e(t-1)e(s-1)] = 0.8^2\lambda^2\delta(0)$$

Para os outros termos, $\forall(t-1) = s$:

$$E[-0.8e(t-1)e(s)] = Cov[-0.8e(t-1), e(s)] = -0.8\lambda^2$$

$$E[-0.8e(t)e(s-1)] = Cov[-0.8e(t), e(s-1)] = -0.8\lambda^2$$

Havendo N amostras do sinal, isso equivale a $N-1$ impulsos de magnitude σ^2. Assim, tem-se com a esperança dentro do somatório, a Eq. 3 torna-se:

$$R = P(t)\sum_{t,s=1}^{N} \varphi(t)\varphi(t)^T P(s)[\lambda^2 - 0.8\lambda^2 - 0.8\lambda^2 + 0.64\lambda^2] =$$

$$= P(t)\lambda^2[1.64 - 1.6(N-1)]\sum_{t,s=1}^{N} \varphi(t)\varphi(s)^T P(s) =$$

$$= P(t)\lambda^2[1.64 - 1.6N + 1.6] = P(t)\lambda^2[3.24 - 1.6N]$$

Definindo $\bar{M}$ como sendo:

$$\bar{M} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} P^{-1}(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} R$$

A covariância do erro de estimação é:

$$R = 2\lambda^2 \bar{M}^{-1}$$

Assim:

$$\lim_{N\to\infty} R = M^{-1}\lambda^2(3.24/N - 1.6)$$

Diferentemente do resultado obtido na Eq. 3, a covariância do erro de estimação depende parcialmente de N. À medida em que o número de amostras aumenta, o termo $3.24M^{-1}\lambda^2/N$ tende a zero. Entretanto, o menor valor que R atinge é $-1.6M^-1\lambda^2$. Assim, o método de mínimos quadrados não rejeita o erro incorporado por $e(t) - 0.8e(t-1)$ na estimação dos parâmetros.

Experimentos

Simulando os sistemas previamente mencionados no ambiente do Matlab, obteve-se os sinais ruidosos de saída que podem ser visualizados na Figura 1.

```
main
```

```
Warning: Matrix is singular to working precision.
Warning: Matrix is singular to working precision.
```

```
noises_plot
```

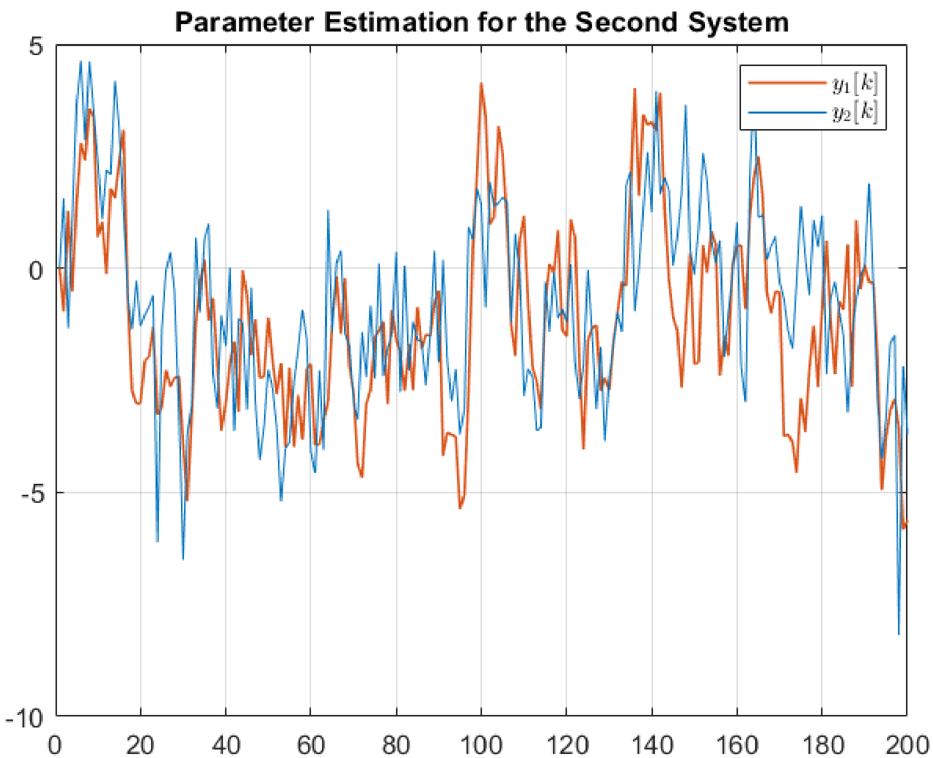

Figura 1: Sinais de saída $y_1(t)$ e $y_2(t)$ gerados.

A estimativa dos parâmetros foi obtida utilizando o método de mínimos quadrados na formulação descrita neste documento. O sistema com saída descrito por:

$$y(t) = u(t-1) + 0.8y(t-1) + e(t-1)$$

Como previamente demonstrado na seção Avaliação Téorica - Modelo I, um erro de medição gaussiano não influencia na estimação dos parâmetros. Dessa forma, como esperado, a estimação do vetor de parâmetros tende a melhorar com o tempo. O resultado pode ser observado na Figura 2 referente ao sistema 1. Os parâmetros $\hat{a}$ e $\widehat{b}$ são estimados corretamente, mesmo com a presença do erro $e(t-1)$. Este resultado já era apontado pela demonstração detalhada na seção de Desenvolvimento.

```
estimatives_plot
```

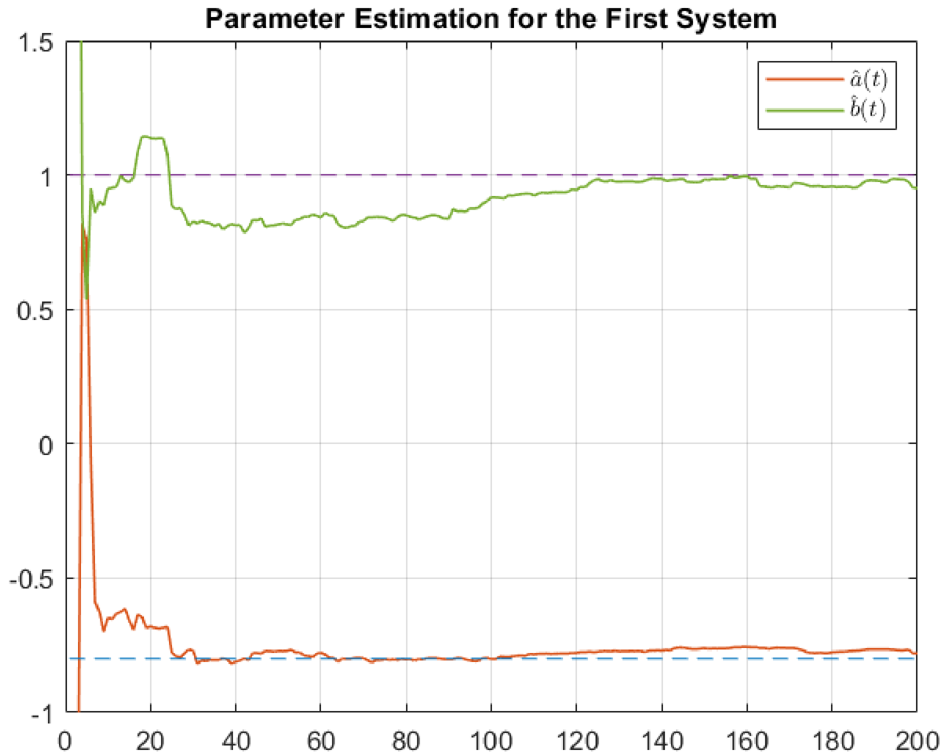

Figura 2: Estimação dos parâmetros $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ para o sistema 1.

Com relação ao sistema II, como o sinal ruidoso é do tipo $z(t) = e(t) - e(t-1)$, ele se configura como um ruído não gaussiano. Sendo assim, as demonstrações presentes na seção Avaliação Teórica - Modelo II apontam que o ruído compromete a estimativa, e isto pode ser confirmado ao visualizar a Figura 3. O método de mínimos quadrados não é capaz de prover uma estimativa satisfatória dos parâmetros do sistema.

```
estimatives_plot_2
```

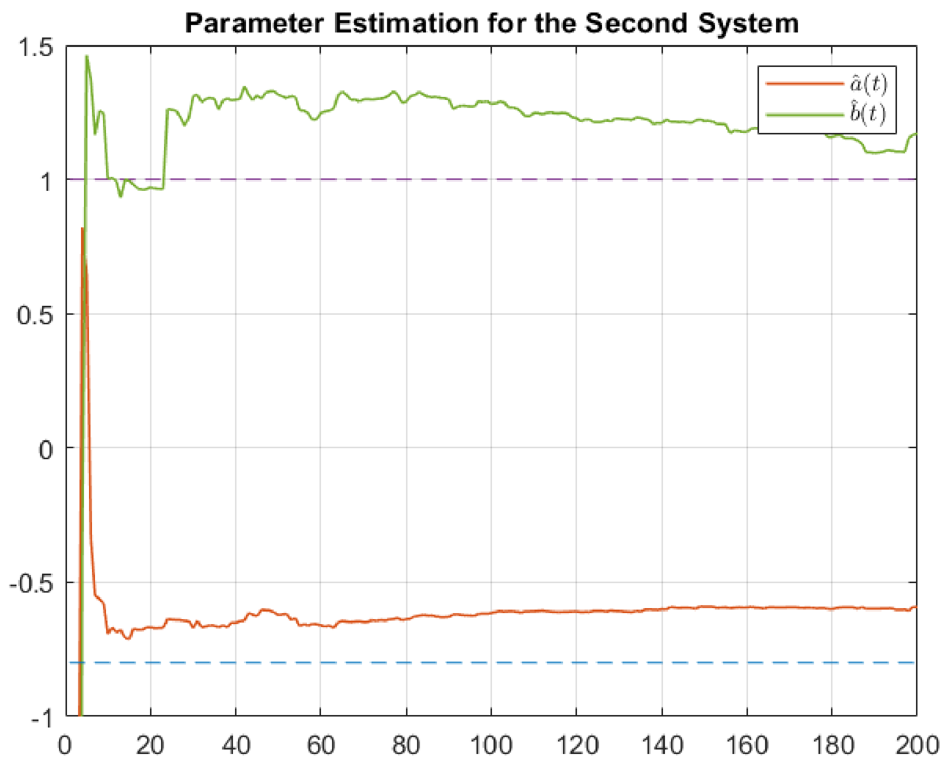

Figura 3: Estimação dos parâmetros $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ para o sistema 2.

Referências

[1] L. LJUNG. **System Identification: Theory for the User** Courier Corporation, 2008. ISBN 0486462781.