Universidade Federal de Campina Grande

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Estimação e Identificação de Sistemas - 21.2

Professores: Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Saulo Oliveira Dornellas Luiz, Dr.

Aluno: Arthur Dimitri Brito Oliveira

Relatório de Atividade 6

Introdução

O objetivo aqui é discutir métodos que buscam determinar as funções de transferência diretamente, sem selecionar um conjunto de modelos possíveis. Os métodos apresentados a seguir baseiam-se na hipótese que é possível injetar um impulso, ou degrau, na entrada do sistema, registrar a saída por meio de um osciloscópio. A partir da forma de onda obtida, será possível obter diretamente o modelo.

Análise da resposta transiente e análise da correlação

Análise da resposta ao impulso

Sendo um sistema descrito por:

$$y(t) = G_0(t)u(t) + v(t)$$

O sinal de teste pode ser descrito como um impulso:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, \ t = 0 \\ 0, \ t \neq 0 \end{cases}$$

A saída é expressa por:

$$y(t) = \alpha g_0(t) + v(t)$$

Caso o ruído seja insignificante, é possível determinar os coeficientes da resposta ao impulso no tempo por meio de uma estimativa:

$$\widehat{g}(t) = \frac{y(t)}{\alpha}$$

A principal desvantagem desse método é que a maior parte dos processos físicos não permite a aplicação de impulsos com amplitude tal que o erro $v(t)/\alpha$ torna-se insignificante comparado aos coeficientes de $\widehat{g}(t)$. Esse tipo de entrada pode causar efeitos não-lineares que perturbariam o comportamento linear do modelo.

Análise da resposta ao degrau

De forma análoga, ao aplicar um sinal de entrada na forma:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, \ t \geq 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$$

Obtem-se:

$$y(t) = \alpha \sum_{k=1}^{t} g_0(k) + v(t)$$

De modo que as estimativas de $g_0(k)$ podem ser obtidas por:

$$\widehat{g}(t) = \frac{y(t) - y(t-1)}{\alpha}$$

Baseado nos gráficos obtidos por meio da resposta ao degrau, é possível obter algumas informações básicas de controle do sistema, como atraso, ganho estático, etc.

Análise de correlação

Dada a descrição do modelo dada por:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_0(k)u(t-k) + v(t)$$

Sendo a entrada um sinal quasi-estacionário com:

$$\bar{E}u(t)u(t-\tau) = R_u(\tau)$$

De modo a descorrelacionar a entrada com o ruído na operação em malha aberta:

$$\bar{E}u(t)v(t-\tau) = 0$$

A correlação cruzada entre o sinal de entrada e o sinal de saída pode ser expressa por:

$$\bar{E}\, y(t)u(t-\tau) = R_{yu}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g_0(k)R_u(k-\tau)$$

Caso a entrada escolhida seja um ruído branco, tem-se que:

$$R_u(\tau) = \alpha\delta_{\tau 0}$$

Assim, a resposta ao impulso é:

$$g_0(\tau) = \frac{R_{yu}(\tau)}{\alpha}$$

Desse modo, uma estimativa da resposta ao impulso é obtida ao variar τ, encontrando diversas amostras de $g_0(\tau)$:

$$\hat{R}_{yu}^{N}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=\tau}^{N} y(t)u(t-\tau)$$

Caso o sinal de entrada não possua correlação impulsiva, não sendo assim um ruído branco, devemos estimar:

$$\hat{R}_{u}^{N}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=\tau}^{N} u(t)u(t-\tau)$$

E resolver a correlação cruzada que também não é mais impulsiva:

$$\hat{R}_{yu}^{N}(\tau) = \sum_{k=1}^{M} \hat{g}(k)\hat{R}_{u}^{N}(k-\tau)$$

Técnicas de resposta em frequência

Teste com sinal senoidal

Tendo uma entrada cossenoidal do tipo:

$$u(t) = \alpha \cos(\omega t), \quad t = 0, 1, 2, ...$$

A saída será dada por:

$$y(t) = \alpha \left| G_0(e^{j\omega}) \right| \cos(\omega t + \varphi) + v(t)$$

$$\varphi = \arg G_0(e^{j\omega})$$

Essa propriedade dá algumas pistas para o cálculo de $G_0(e^{j\omega})$. Sabendo os dados do sinal de entrada, determina-se a amplitude e o deslocamento de fase do sinal cossenoidal de saída. Calcule uma estimativa $\hat{G}_N(e^{j\omega})$ com essas informações. Isso deve ser rpetido para uma gama de frequências dentro da banda de interesse.

Análise de frequência pelo método de correlação

Agora utiliza-se uma modulação da seguinte forma:

$$I_C(N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t) \cos \omega t$$

$$I_S(N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t) \sin \omega t$$

Substituindo a equação do sinal de saída nas expressões anteriore:

$$I_C(N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \alpha |G_0(e^{j\omega})| \cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\cos(\omega t)$$

$$I_C(N) = \frac{\alpha}{2}|G_0(e^{j\omega})|\cos\varphi + \alpha|G_0(e^{j\omega})|\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\cos(2\omega t + \varphi) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\cos(\omega t)$$

$$I_S(N) = -\frac{\alpha}{2}|G_0(e^{j\omega})|\sin\varphi + \alpha|G_0(e^{j\omega})|\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sin(2\omega t + \varphi) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\sin(\omega t)$$

O segundo termo de ambas as equações tende a zero à medida em que Ntende ao infinito, bem como o terceiro termo, que tem um decaímento na sua variância se $\sum_0^\infty \tau|R_v(\tau)| < \infty$. Então, a partir de $I_C(N)$ e $I_S(N)$, tem-se as amplitudes e fases da resposta em frequência:

$$|\widehat{G}_N(e^{j\omega})| = \frac{\sqrt{I_c^2(N) + I_s^2(N)}}{\alpha^2/2}$$

$$\widehat{\varphi}_N = \arg \widehat{G}_N(e^{j\omega}) = -\arctan\frac{I_s(N)}{I_c(N)}$$

Este teste provê o valor na frequência ω do sinal de excitação.

A relação com a análise de Fourier

A partir da representação do sinal de saída por meio da DFT:

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=1}^{N} y(t)e^{-j\omega t}$$

Por meio da relação de Euler $e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j\sin(\omega)$, tem-se que os sinais $I_c(N)$ e $I_s(N)$ podem ser escritos como:

$$I_c(N) - jI_s(N) = \frac{1}{\sqrt{N}}Y_N(\omega)$$

$$U_N(\omega) = \frac{\sqrt{N}\,\alpha}{2}$$

Reescrevendo a equação do módulo da função de transferência, tem-se:

$$\widehat{G}_N(e^{i\omega}) = \frac{\sqrt{N}\,Y_N(\omega)}{N\alpha/2} = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

Análise de Fourier

Estimaçao empírica da função de transferência

A expressão anterior corresponde à análise de frequência com uma única senoide de frequência ω injetada como entrada. Esse tipo de aproximação é errático quando houver termos de ruído, o que implica em DFTs ruídosas. Diante diso, define-se $\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega})$ como uma estimativa grosseira da função de transferência. Apesar da facilidade do cálculo da expressão associada, a interpretação da curva pode ser problemática devido ao ruído.

Propriedades da EEFT

Assumindo que o sistema tem forma $y(t) = G_0(q)u(t) + v(t)$, introduz-se:

$$V_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^{N} v(t)e^{-j\omega t}$$

A expressão a seguir revela o G_0 que deseja-se encontrar, mas existem o resíduo pelo truncamento R_N e termo de ruído V_N:

$$\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} + \frac{V_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

Assumindo que $v(t)$ tem média nula, $E(V_N(\omega)) = 0,$ ao tomar a esperança da expressão anterior, tem-se:

$$E\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

O valor médio será função da excitação imposta ao sistema. A princípio, seria possível manipular o sinal de entrada de modo a zerar a parcela $\frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)}$.

Analisando como a variância do ruído afeta a estimativa, tem-se que:

$$EV_N(\omega)V_N(-\xi) = \begin{cases} \Phi_v(\omega) + \rho_2(N), & se \ \xi = \omega \\ \rho_2(N), & se \ |\xi - \omega| = \frac{k2\pi}{N} \end{cases}$$

Com $|\rho_2(N)| \leq 2C/N$. Assim, o modelo a ser estimado tem um $G_0(q)$, e deseja-se analisar as propriedades da estimativa utilizando a EEFT. Quanto à média e à variância, pode-se controlar as polarizações $|\rho_1(N)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{N}}$ e $|\rho_2(N)| \leq \frac{C_2}{N}$. O erro em torno da função de transferência G_0 pode ser manipulado, mediante o projeto de sinais específicos, de modo que os erros da média e da variância sejam mínimos. As constantes podem ser calculadas por:

$$C_1 = \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} |kg_0(k)|\right). \max |u(t)|$$

$$C_2 = C_1^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tau R_v(\tau)|$$

Antecipando as conclusões a partir das demonstrações, ao utilizar a DFT para EEFT, no caso de sinais de entrada periódicos, a estimativa tende a melhoras nas frequências que estão presentes na entrada. No entanto, quando o sinal não é periódico, a variância não decai com N, mas mantém-se igual à relação sinal-ruído nas frequências correspondentes. Em qualquer um dos casos, se houver a contaminação com ruído dos sinais, as estimativas tendem a ser grosseiras para a maioria dos casos.

Análise Espectral

Suavizando a EEFT

Suponha que existe uma função suave $G_0(e^{j\omega})$, e que a distância $\frac{2\pi}{N}$ é pequena quando comparada à mudança de $G_0(e^{j\omega})$, ou seja, há muitas raias espectrais, o valor ao redor dele pode ser considerado constante $2\pi k/N \approx \omega$. Assim os valores de $\hat{\hat{G}}_N(e^{2\pi ik/N})$ são estimativas descorrelacionados da mesma frequência G_0. Considera-se então que, em torno da frequência ω, existem dois indicadores k_1 e k_2 que cercam a frequência central ω. O objetivo é correlacionar as estimativas para melhorar a estimativa de ω. A estimativa normalizada, é ponderada em termos da estimativa grosseira. Há maior peso atribuido, na ponderação, às frequências que têm melhor relação sinal-ruído. $\hat{G}_N$, portanto, explora a correlação que melhora a estimativa inicial para a frequência central:

$$\alpha_k = \frac{|U_N(2\pi k/N)|^2}{\Phi_v(2\pi k/N)}$$

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k \hat{\hat{G}}_N(e^{2\pi ik/N})}{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k}$$

A ideia agora é tornar o N grande de tal forma que essa ponderação se torna refinada com passo infinitesimal. Assim, k_1 e k_2 tornam-se $\omega_0 - \Delta_\omega$ e $\omega_0 + \Delta_\omega$ e tem-se a aproximação de $\hat{G}_N$ como sendo:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\int_{\omega_0-\Delta_\omega}^{\omega_0+\Delta_\omega} \alpha(\xi)\hat{\hat{G}}_N(e^{i\xi})d\xi}{\int_{\omega_0-\Delta_\omega}^{\omega_0+\Delta_\omega} \alpha(\xi)d\xi}$$

$$\alpha(\xi) = \frac{|U_N(\xi)|}{\Phi_v(\xi)}$$

Para mitigar os efeitos de borda ao trabalhar com uma quantidade finita de dados, utiliza-se uma janela de ponderação para melhorar a estimativa, utiliza-se a função de ponderação W_γ como sendo um degrau:

$$\widehat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)\alpha(\xi)\widehat{\widehat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)\alpha(\xi)d\xi}$$

No caso, pode-se utilizar funções de ponderação mais complexas. Ao fazer aparecer explicitamente o espectro do sinal de entrada, tem-se: