Universidade Federal de Campina Grande

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Estimação e Identificação de Sistemas - 21.2

Professores: Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Saulo Oliveira Dornellas Luiz, Dr.

Aluno: Arthur Dimitri Brito Oliveira

Relatório de Atividade 2 - Modelos Estocásticos

Desenvolvimento

2E.1

Um processo estocástico estacionário tem espectro dado por:

$$\Phi_v(\omega) = \frac{1.25 + \cos\omega}{1.64 + 1.6\cos\omega} \qquad (1)$$

Para descrever $v(t)$ como um processo ARMA, inicialmente utiliza-se a relação entre a densidade espectral de $v(t) = H(q)e(t)$ pode ser obtida por meio de:

$$\Phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{j\omega})|^2 \qquad (2)$$

Supondo que a função de transferência do filtro H, em tempo discreto, é uma função composta pelos polinômios $A(z)$ e $B(z)$, tem-se:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|a_0 + a_1 z|}{|b_0 + b_1 z|} = \frac{|a_0 + a_1 e^{j\omega}|}{|b_0 + b_1 e^{j\omega}|} = \frac{|a_0 + a_1(\cos\omega + j\sin\omega)|}{|b_0 + b_1(\cos\omega + j\sin\omega)|}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{(a_0 + a_1\cos\omega)^2 + (a_1\sin\omega)^2}{(b_0 + b_1\cos\omega)^2 + (b_1\sin\omega)^2}}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{a_0^2 + 2a_0a_1\cos\omega + a_1^2\cos^2\omega + a_1^2\sin^2\omega}{b_0^2 + 2b_0b_1\cos\omega + b_1^2\cos^2\omega + b_1^2\sin^2\omega} \qquad (3)$$

Substituindo a relação trigonométrica $\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$ na Eq.3, tem-se:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{a_0^2 + a_1^2 + 2a_0 a_1 \cos \omega}{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \cos \omega} \qquad (4)$$

Comparando a Eq.4 com a Eq.2:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \Phi_v(\omega)/\lambda$$

$$\frac{a_0^2 + a_1^2 + 2a_0 a_1 \cos \omega}{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \cos \omega} = 1/\lambda \, \frac{1.25 + \cos \omega}{1.64 + 1.6 \cos \omega}$$

Assim, as possíveis soluções para a_0 e a_1 são:

$$a_0 = \begin{cases} -1/2 \\ -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{cases}, \; a_1 = \begin{cases} -1 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases}$$

No caso dos coeficientes do denominador, as possíveis soluções para b_0 e b_1 são:

$$b_0 = \begin{cases} -\frac{4\lambda^{1/2}}{5} \\ -\lambda^{1/2} \\ \lambda^{1/2} \\ \frac{4\lambda^{1/2}}{5} \end{cases}, \; b_1 = \begin{cases} -\lambda^{1/2} \\ -\frac{4\lambda^{1/2}}{5} \\ \frac{4\lambda^{1/2}}{5} \\ \lambda^{1/2} \end{cases}$$

Dessa forma, para os pares $(a_0, a_1) = (1, 0.5)$ e $(b_0, b_1) = (\sqrt{\lambda}, 0.8\sqrt{\lambda})$, a função de transferência se torna:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} = \frac{1 + 0.5z}{\sqrt{\lambda} + 0.8\sqrt{\lambda}\, z} = \frac{v(t)}{e(t)}$$

Por fim, considerando que $zy(t) = y(t-1)$

$$\sqrt{\lambda}\, v(t) + 0.8\sqrt{\lambda}\, zv(t) = e(t) + 0.5e(t)z$$

$$\sqrt{\lambda}\, v(t) + 0.8\sqrt{\lambda}\, v(t-1) = e(t) + 0.5e(t-1)$$

$$v(t) = -0.8v(t-1) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e(t) + \frac{0.5}{\sqrt{\lambda}} e(t-1)$$

2E.7

Considerando um sistema do tipo:

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + e(t) + ce(t-1)$$

$$y(t) = -ay(t-1) + bu(t-1) + e(t) + ce(t-1) \qquad (5)$$

$u(t)$ e $e(t)$ são ruídos brancos com variâncias μ e λ.

Utilizando a notação $y(t) = y_t$ e $e(t) = e_t$, a covariância $R_y(\tau)$, $\tau = 0, 1$ pode ser obtida ao multiplicar a Eq. 1 por $y(t)$, $y(t-1)$ e tomar as esperanças:

$$R_y(0) = E(y_t y_t) = E(-ay_t y_{t-1} + bu_{t-1} y_t + e_t y_t + ce_{t-1} y_t)$$

$$R_y(0) = -aE(y_t y_{t-1}) + bE(u_{t-1} y_t) + E(e_t y_t) + cE(e_{t-1} y_t)$$

$$R_y(1) = -aE(y_{t-1} y_{t-1}) + bE(u_{t-1} y_{t-1}) + E(e_t y_{t-1}) + cE(e_{t-1} y_{t-1})$$

A correlação cruzada saída-erro pode ser obtida ao multiplicar a Eq.5 por $e(t)$ e $e(t-1)$:

$$R_{ye}(0) = -aE(e_t y_{t-1}) + bE(u_{t-1} e_t) + E(e_t e_t) + cE(e_{t-1} e_t)$$

$$R_{ye}(1) = -aE(e_{t-1} y_{t-1}) + bE(u_{t-1} e_{t-1}) + E(e_t e_{t-1}) + cE(e_{t-1} e_{t-1})$$

Por sua vez, a correlação cruzada entrada-erro pode ser obtida ao multiplicar a Eq.5 por $u(t)$ e $u(t-1)$:

$$R_{yu}(0) = -aE(u_t y_{t-1}) + bE(u_{t-1} u_t) + E(e_t u_t) + cE(e_{t-1} u_t)$$

$$R_{yu}(1) = -aE(u_{t-1} y_{t-1}) + bE(u_{t-1} u_{t-1}) + E(e_t u_{t-1}) + cE(e_{t-1} u_{t-1})$$

Sabendo que $e(t)$ é um ruído gaussiano, os termos do tipo $E(e_i e_k) = 0$, para quaisquer $i \neq k$. Além disso, $E(e_i e_k) = \lambda$, sempre que $i = k$, já que trata-se de um sinal wgn. Por fim, $E(e_i y_k) = 0$, bem como $E(e_i u_k) = 0$, para quaisquer $i > k$. Assim, para a correlação cruzada entre erro e saída:

$$R_{ye}(0) = E(y_t e_t) = -aE(e_t y_{t-1}) + bE(u_{t-1} e_t) + E(e_t e_t) + cE(e_{t-1} e_t) = E(e_t e_t) = \lambda \qquad (6)$$

$$R_{ye}(1) = -aE(e_{t-1} y_{t-1}) + bE(u_{t-1} e_{t-1}) + E(e_t e_{t-1}) + cE(e_{t-1} e_{t-1})$$

Pela Eq.6, como $R_{ye}(0) = E(y_t e_t) = \lambda$:

$$R_{ye}(1) = -aR_{ye}(0) + c\lambda = \lambda(c-a) \qquad (7)$$

Para as correlações entre entrada e saída, como a esperança entre u e y é nula para todos os termos, além de saber que a variância do sinal de entrada é $E(u_t u_t) = \mu$, tem-se:

$$R_{yu}(0) = -aE(u_t y_{t-1}) + bE(u_{t-1}u_t) + E(e_t u_t) + cE(e_{t-1}u_t)$$

$$R_{yu}(0) = 0$$

$$R_{yu}(1) = -aE(u_{t-1}y_{t-1}) + bE(u_{t-1}u_{t-1}) + E(e_t u_{t-1}) + cE(e_{t-1}u_{t-1})$$

$$R_{yu}(1) = b\mu \qquad (8)$$

Quando trata-se da autocovariância, pela Eq.6 $E(y_t e_t) = R_{ye}(0) = \lambda$, pela Eq.7 $E(e_{t-1}y_t) = R_{ye}(1) = \lambda(c-a)$, pela Eq.8 $E(u_{t-1}y_t) = R_{yu}(1) = b\mu$, e que $E(y_{t-1}y_{t-1}) = R_y(0)$, obtem-se as covariâncias de y, como exibido na Eq.9 e Eq.10:

$$R_y(0) = -aE(y_t y_{t-1}) + bE(u_{t-1}y_t) + E(e_t y_t) + cE(e_{t-1}y_t)$$

$$R_y(0) = -aR_y(1) + bR_{yu}(1) + R_{ye}(0) + cR_{ye}(1) = -aR_y(1) + b^2\mu + \lambda + \lambda(c-a) \qquad (9)$$

$$R_y(1) = -aE(y_{t-1}y_{t-1}) + bE(u_{t-1}y_{t-1}) + E(e_t y_{t-1}) + cE(e_{t-1}y_{t-1})$$

$$R_y(1) = -aR_y(0) + bR_{yu}(0) + cR_{ye}(0)$$

$$R_y(1) = -a(-aR_y(1) + b^2\mu + \lambda + \lambda c(c-a)) + cR_{ye}(0)$$

$$R_y(1)(1-a^2) = -ab^2\mu - a\lambda - ac\lambda(c-a) + c\lambda = -ab^2\mu - a\lambda - \lambda(ac^2 - a^2c) + c\lambda$$

$$R_y(1)(1-a^2) = -ab^2\mu - \lambda(a - c - ac^2 + a^2c)$$

$$R_y(1) = \frac{-ab^2\mu - \lambda(a - c - ac^2 + a^2c)}{1-a^2} \qquad (10)$$

Parametric Optimization

Utilizando o resultado da Eq.2, sabe-se que a densidade espectral pode ser expressa por:

$$\Phi(\omega) = H(z)H(z^{-1})$$

A determinação da autocovariância do sistema envolve o cálculo da integral de caminho fechado ao longo do circulo unitário no plano complexo. Sendo $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}$, tem-se:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}$$

Para calcular a integral em questão, serão utilizadas fórmulas recursivas. Definindo os polinômios associados à função de transferência:

$$A(k) = a_0^k z^+ a_1^k z^{k-1} + \ldots + a_n z^n$$

$$B(k) = b_0^k z^+ b_1^k z^{k-1} + \ldots + b_n z^n$$

De forma recursiva, tem-se:

$$A_{k-1}(z) = z^{-1}\{A_k(z) - \alpha A_k^*(z)\}$$

$$B_{k-1}(z) = z^{-1}\{B_k(z) - \alpha B_k^*(z)\}$$

$$\alpha_k = \frac{a_k^k}{a_0^k}$$

$$\beta_k = b_k^k / a_0^k$$

Os coeficientes dos polinômios podem ser calculados recursivamente por meio de:

$$a_i^{k-1} = a_i^k - \alpha_k \alpha_{k-i}^k$$

$$b_i^{k-1} = b_i^k - \beta_k \alpha_{k-i}^k$$

A integral I_k pode ser dada por:

$$I_k = \frac{1}{a_0^k} \sum_{i=0}^{k} \frac{(b_i^i)^2}{a_0^i}$$

Como exemplo ilustrativo do algoritmo proposto, calculou-se a integral de:

$$H(z) = \frac{B(z)}{B(z)} = \frac{z^3 + 0.7z^2 + 0.5z - 0.3}{z^3 + 0.3z^2 + 0.2z + 0.1}$$

Encontrou-se as seguintes tabelas para os coeficientes a e b, respectivamente:

```
tracking_a
```

```
tracking_a = 4×4
    1.0000    0.7000    0.5000   -0.3000
    0.9100    0.8500    0.7100         0
    0.3560    0.1868         0         0
    0.2580         0         0         0
```

```
tracking_b
```

```
tracking_b = 4×4
    1.0000    0.3000    0.2000    0.1000
    1.0300    0.2500    0.1300         0
    0.9286    0.1286         0         0
    0.8611         0         0         0
```

```
example_astrom_finding_coefficients
```

```
integral = 2.9488
```

Referências

[1] L. LJUNG. **System Identification: Theory for the User** Courier Corporation, 2008. ISBN 0486462781.